



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KOMPOZİT KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU
ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK VE
DİNAMİK ANALİZİ**

Emrah MADENCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Haziran-2011
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Emrah MADENCİ tarafından hazırlanan "Kompozit Kirişlerin Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Statik ve Dinamik Analizi" adlı tez çalışması 07/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof.Dr. Ahmet AVCI

Danışman

Yrd.Doç.Dr. Atilla ÖZÜTOK

Üye

Yrd.Doç.Dr. Nail KARA

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Emrah MADENCİ

Tarih: 07/06/2011

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPOZİT KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

Emrah MADENCİ

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı**

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Atilla ÖZÜTOK

2011, 67 Sayfa

Jüri

Yrd.Doç.Dr. Atilla ÖZÜTOK

Prof.Dr. Ahmet AVCI

Yrd.Doç.Dr. Nail KARA

Yapılan bu çalışmada; lamine kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizleri Gâteaux diferansiyel metodu kullanılarak, karışık sonlu elemanlar formülasyonu yardımı ile incelenmiştir. Analizlerde, sabit geometriye sahip, uniform yayılı yük etkisi altında, üç farklı mesnet koşuluna göre simetrik, tek tabakalı ve çapraz tabakalı ortotropik kompozit Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişleri ele alınmıştır. Enerji prensipleri yardımı ile her iki kiriş teorisine ait kompozit kirişlerin diferansiyel alan denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler operatör forma dönüştürülmüş, Gâteaux diferansiyel metot kullanılarak her iki kiriş teorisine ait dinamik ve geometrik sınır koşullarını da içeren fonksiyoneller bulunmuştur. Bu fonksiyonellere karışık sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak eleman matrisleri elde edilmiştir. Eleman matrislerinin çözümü için FORTRAN 4.0 bilgisayar programında bir analiz programı geliştirilmiştir. Statik ve dinamik analizler için sayısal uygulamalar yapılmıştır. Sonuçlar literatürde bulunan benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmış, sonuçların birbirine çok benzer çıktığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Gâteaux diferansiyeli, kompozit kirişler, lamine, serbest titreşim, sonlu elemanlar

ABSTRACT

MS THESIS

**STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF COMPOSITE BEAMS BY MIXED
FINITE ELEMENT FORMULATION**

Emrah MADENCİ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN CIVIL ENGINEERING**

Advisor: Yrd.Doç.Dr. Atilla ÖZÜTOK

2011, 67 Pages

**Jury
Yrd.Doç.Dr. Atilla ÖZÜTOK
Prof.Dr. Ahmet AVCI
Yrd.Doç.Dr. Nail KARA**

In the present work; static and dynamic analyses of laminated composite beams have been investigated by mixed-finite element formulation using *Gâteaux Differential Method*. Symmetric, Single-layer and cross-ply orthotropic laminated Euler-Bernoulli and Timoshenko composite beams to discuss which have a stable geometric section, down to effect of uniform spread load, according to three different edge conditions. Field equations of relating to both beam theories to composite beams have been obtain by energy principle. This equation transformed to operator form, then functionals of CLBT and FSDT composite beams found by using *Gâteaux Differential*. Applying variational methods to this functionals, finite element matrix is obtained in an explicit form. Fortran 4.0 computer programme is developed for solution of element matrix. The performance of the element for static and dynamic analyses is verified with a good accuracy by the solution of numerical examples present in the literature.

Keywords: Composite beams, Gâteaux differential, laminated, free vibration, finite element

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimine başlayışımın tez çalışmamı sonuçlandırana kadar her zaman destek olan, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, başarıya ulaşmam için sürekli teşviklerde ve katkıda bulunan sayın hocam Yrd.Doç.Dr. Atilla ÖZÜTOK'a sevgi ve saygı ile teşekkür ederim.

İlgi ve yardımlarını gördüğüm İnşaat Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve eşime teşekkür ederim.

Emrah MADENCİ
KONYA-2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	10
3. MATERYAL VE METOT	16
3.1. Enerji Prensipleri	16
3.1.1. Virtüel iş ilkesi.....	16
3.1.2. Varyasyonel operatör ve Euler denklemleri	18
3.1.3. Fonksiyoneller ve Euler denklemi	20
3.1.4. Doğal sınır koşulları.....	21
3.1.5. Virtüel yer değiştirme ilkesi	22
3.2. Değişik Kiriş Teorileri	23
3.2.1. Euler-Bernoulli kiriş teorisi (CLBT)	25
3.2.2. Timoshenko kiriş teorisi (FSDT)	27
3.3. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağlılıkları	28
3.4. Kompozit Kirişlere Ait Fonksiyonel	30
3.4.1. Alan denklemleri ve fonksiyonelin elde edilmesi	30
3.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi	33
3.5.1. Şekil fonksiyonları	33
3.6. Dinamik Analiz	36
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	38
4.1. Statik Analiz	38
4.1.1. İki ucu basit mesnetli kiriş (SS).....	39
4.1.2. İki ucu ankastre mesnetli kiriş (CC)	45
4.1.3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli kiriş (CF).....	48
4.2. Dinamik Analiz.....	52
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	56
KAYNAKLAR	59
EKLER	63
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

θ	: Tabakalar arası açı
σ, ε	: Gerilme ve şekil değiştirme tansörleri
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
h	: Kiriş yüksekliği
b	: Kiriş genişliği
L	: Kiriş uzunluğu
$I(u)$: Fonksiyonel
\mathbf{Q}	: Operatör
$\langle, \rangle, [,]$: İç çarpım
u, v, w	: Teğetsel ve normal yer değiştirmeler
$[k]$: Eleman matrisi
$[m]$: Kütle matrisi
ρ	: Yoğunluk
ψ	: Şekil fonksiyonu
ξ	: Doğal koordinat takımı
R, \hat{R}, M, \hat{M}	: Dinamik sınır koşulları
$\Omega, \hat{\Omega}, u, \hat{u}$: Geometrik sınır koşulları
$Q_{(x)}$: Kesme kuvveti
γ	: Kayma açısı
$\Omega_{x,y}$: Dönme açısı
q	: Yayılı yük
$M_{(x)}$: Eğilme momenti
A	: Kesit alanı
$v(a), v(b)$: Sınır koşulları
$u(a), u(b)$: Sınır değerler
$v(x), u(x)$: Fonksiyon
δU	: İç kuvvetlerin virtüel işi
$\delta \varepsilon_{ij}$: Virtüel şekil değiştirme
\mathbf{t}	: Birim alana gelen yüzey kuvvetleri
\mathbf{f}	: Birim hacme gelen kütle kuvveti
δV	: Dış kuvvetlerin virtüel işi
$\delta \mathbf{u}$: Virtüel yer değiştirme
δW	: Virtüel iş
\mathbf{F}	: Kuvvet
dv	: Hacim elemanı
Ω_o	: Eleman hacmi
k	: Tabaka sayısı
K	: Düzeltme faktörü
D_{ij}	: Eğilme rijitliği
$Q_{ij}^{(k)}$: Azaltılmış rijitlik
$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$: Dönüştürülmüş azaltılmış rijitlik
ω	: Frekans parametreleri
w	: Düşey doğrultuda yer değiştirme
G	: Kayma modülü

Kısaltmalar

CLBT	: Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (Classical Lamina Beam Theory)
FSDT	: Timoshenko Kiriş Teorisi (First-Order Shear Deformation Theory)
CLBT4	: 2 Bilinmeyenli Euler-Bernoulli Kirişi sonlu eleman matrisi
FSDT8	: 4 Bilinmeyenli Timoshenko Kirişi sonlu eleman matrisi
FEM	: Sonlu elemanlar yöntemi
SS	: (Simply-Supported) İki ucu basit mesnetli kiriş
CC	: (Clamped-Clamped) İki ucu ankastre mesnetli kiriş
CF	: (Clamped-Free) Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli kiriş
GDM	: Gâteaux Diferansiyel Metodu

1. GİRİŞ

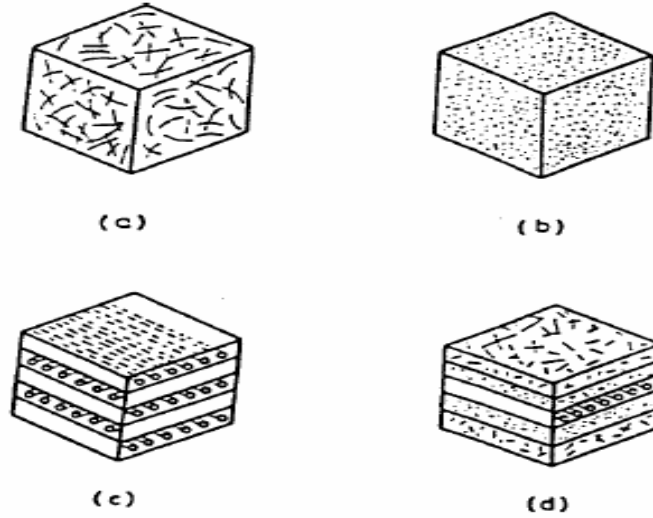
Özellikle 1950’li yıllardan sonra teknolojik ve endüstriyel gelişmelere paralel olarak, ihtiyaçlara cevap verecek özelliklere sahip malzemelerde de gelişmeler olmuştur. Mühendislik, tıp, uzay ve havacılık alanlarında kullanılan polimerlerin, metallerin ve seramiklerin gelişmesi dolayısıyla, bunların daha üstün ve daha çok çeşitli özelliklerini bir arada bulunduran malzeme olarak kompozit malzemelerin gelişimi de hızlanmıştır. Günümüzde kullanımı gittikçe yaygınlaşan kompozit malzemeler, dizayn amacına uygun olarak (ısı, mekanik, fiziksel, işletme v.b.) iki ya da daha fazla malzemenin makroskopik bir ölçüde, aralarında kimyasal reaksiyon olmadan bir araya getirilmesi ile elde edilen, istenen özelliklerin baskın, istenmeyen özelliklerin yok edilmesini sağlayan malzemelerdir. Kompozit malzemeye, “çok bileşenli malzeme”, çok fazlı malzeme” gibi adlarda verilmektedir.

Yapı tasarımında en az kaynak ile en iyi tasarımın yapılması istenmektedir. İyi bir tasarım yapabilmek için düşük ağırlıklı, yüksek mukavemetli ve düşük maliyetli malzemeler tercih edilmektedir. Kompozit malzemeler bu özelliklerin çoğunu bünyesinde barındırmaktadır. Kompozit malzemelerin sahip oldukları mükemmel karakteristik özellikleri vardır. Bu karakteristik özellikler;

- Mukavemet/ağırlık oranlarının yüksek olması
- Korozyon dayanımlarının yüksek olması
- Rijitliklerinin yüksek olması
- Isı ve ses yalıtımı sağlaması
- Hafif olması
- Metal yorgunluğu süresinin uzun olması
- Fabrikasyon ve seri üretim yapılabilmesi

gibi sıralanabilir (Jones, 1999). Kompozitlerin sahip oldukları bu karakteristik özellikler, kompoziti oluşturan tabakaların dizilimine, elastisite modülüne (E_{ij}), poisson etkilerine (ν_{ij}) v.b. özelliklere bağlı olarak modifiye edilebilir. Özellikle hafif olmaları ve yüksek mukavemet göstermeleri, böylelikle tasarımlarının kolay yapılması, daha az deformasyona uğramaları ve daha fazla yük taşıyabilmeleri kompozitlerin önemini her geçen gün arttırmaktadır.

Kompozitlerin gruplandırılmasında kesin sınırlar çizmek mümkün olamamakla birlikte, yapıdaki malzemelerin formuna göre bir sınıflama yapmak mümkündür. Bu sınıflama Şekil 1.1.'de verilmektedir.



Şekil 1.1. Kompozit malzemelerin sınıflandırılması

Bu sınıflamaya göre (a) elyafli kompozitler, (b) parçacıklı kompozitler, (c) tabakalı kompozitler, (d) karma kompozitlerdir.

- a. Elyafli kompozitler;** ince elyafların matris yapıda yer almasıyla meydana gelmişlerdir. Elyafların matris içindeki yerleşimi kompozit yapının mukavemetini etkileyen önemli bir unsurdur. Elyafların mukavemeti kompozit yapının mukavemeti açısından çok önemlidir. Ayrıca, elyafların uzunluk/çap oranları arttıkça matris tarafından elyaflara iletilen yük miktarı artmaktadır.
- b. Parçacıklı kompozitler;** bir matris malzeme içinde başka bir malzemenin parçacıklar halinde bulunması ile elde edilirler. Yapıları izotropdur. Yapının mukavemeti parçacıkların sertliğine bağlıdır. En yaygın tip plastik matris içinde yer alan metal parçacıklardır. Uçak motor parçalarının üretiminde tercih edilmektedirler.
- c. Tabakalı kompozitler;** en eski ve en yaygın kullanım alanına sahip olan kompozit tipidir. En az iki adet farklı fazın, tabakalı bir şekilde kompozitin yapısında yer almasıyla meydana gelir. Bu fazlardan birisi kompozite

özelliğini kazandıran sürekli faz, diğeri ise tabakaları bir arada tutan bağlayıcı fazdır. Metallere göre hafif ve aynı zamanda mukavemetlidirler.

d. Karma kompozitler; aynı yapıda iki ya da daha fazla elyaf çeşidinin bulunması ile meydana gelirler. Bunlara hibrid kompozitlerde denilir.

Bu çalışmada en eski ve en yaygın kullanıma sahip olan tabakalı kompozitler kullanılmıştır.

Tabakalı kompozitler “lamine veya ply” olarak da adlandırılırlar (Reddy, 2004). Laminelerin, her tabakanın diziliminden dolayı, koordinat eksenine bağlı olarak açılı bir konumu vardır. Genel olarak bir laminenin her tabakasının açısı yani θ 'sı; $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ şeklindedir. Tabakaların dizilimi $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ şeklinde ve $\pm\theta$ değerleri alıyorsa “açılı-tabakalı” olarak adlandırılır. Tabakalar sadece 0° ve $\pm 90^\circ$ değerlerini alıyorsa “çapraz-tabakalı” olarak adlandırılır. Eğer tek bir tabaka varsa o zaman da “tek-tabaka” olarak adlandırılır. Ayrıca tabaka yüksekliklerine ve dizilimdeki yansıma göre de simetrik ve antisimetrik olarak iki gruba ayrılırlar.

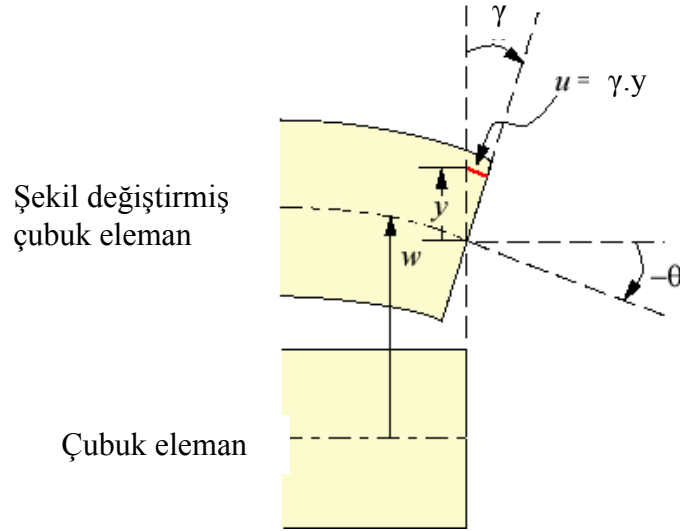
Tabakalı kompozitlerden oluşan birçok yapı elemanı vardır. Bu elemanlardan bir tanesi de kompozit kirişlerdir. Kompozit kiriş elemanlara inşaat mühendisliği uygulamalarında sıkça karşılaşılır. Örneğin büyük açıklıkları geçerken tercih edilen kompozit kirişler, klasik malzemelere göre daha hafifler, mukavemetleri daha yüksek, tasarımları daha kolay olduğu için tercih edilirler.

Kompozit kirişlerin kullanım alanları, karakteristik özellikleri ve yapısal davranışları dikkate alındığında, statik ve dinamik yükler altındaki davranışlarını çok iyi bilmemiz gerekmektedir. Bu yüzden kompozit kirişlerin analizleri ayrı bir önem teşkil etmektedir.

Kompozit kirişlerin uygulamadaki önemi ve potansiyel avantajları birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Araştırmacılar tarafından kompozit kirişlerin analizleri için bir takım teoriler ve sayısal çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Reddy (2004) ve Jones (1999) tarafından hazırlanmış, kompozit kirişlerin mekaniği ile alakalı geniş kapsamlı kaynaklar bulunmaktadır. Geometrik özelliklerine ve buna bağlı olarak uygulanan yük etkilerine göre kirişlerin analizleri için üretilen iki önemli varsayım vardır. Bunlar; Euler–Bernoulli Kiriş Teorisi (Classical Lamina Beam Theory, CLBT) ve Timoshenko Kiriş Teorisi (First–Order Shear Deformation Theory, FSDT) dir. Bu iki varsayım arasındaki farklılık kayma açısının tanımından kaynaklanmaktadır.

Classical Lamina Beam Theory (CLBT), Euler – Bernoulli tarafından sadece ince kirişler ($L/h > 10$) için geliştirilmiştir (Subramanian, 2006). Bu varsayıma göre;

sadece eğilme etkileri dikkate alınır, çubukta kayma etkisi ihmal edilir. Böylece başlangıçta çubuk eksenine dik olan enkesitler, şekil değiştirme esnasında çubuk ekseninde kalacak biçimde rijit bir levha gibi dönerler (Şekil 1.2.) (Omurtag, 2007).

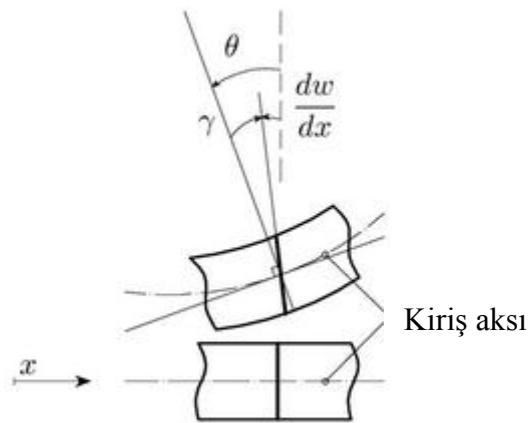


Şekil 1.2. Euler – Bernoulli kiriş modeli

Nümerik metotlar çoğunlukla Euler–Bernoulli Kiriş Teorisine dayanarak tasarlanır. Pratik mühendislikte komplike yapıların çözümü için en çok bu teori kullanılmaktadır (Xu ve Wu, 2007).

Euler–Bernoulli Kiriş Teorisindeki engelleri gidermek için Timoshenko tarafından First–Order Shear Deformation Theory (FSDT) geliştirilmiştir. Bu varsayımda kayma deformasyon etkileri hesaba katılmıştır (Subramanian, 2006). Kesme kuvvetinin sebep olduğu kayma açısının sabit olduğu varsayılır. Başlangıçta çubuk eksenine dik olan kesit, şekil değiştirme sonrası rijit bir levha gibi döner ama kayma açısı nedeniyle çubuk eksenini arasındaki açı dik değildir (Omurtag, 2007) (Şekil 1.3.). Bu varsayımla kalın kirişlerinde analizi yapılmaktadır.

Kaynak araştırması yapıldığında birçok araştırmacı tarafından her iki kiriş teorisine ait çok sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir (Miller ve Adams (1975), Vinson ve Sierakowski (1986), Heyliger ve Reddy (1988), Zienkiewicz ve Taylor (1989), Aköz ve Kadioğlu (1999), Jones (1999), Omurtag (2001), Reddy (2004), Aydoğdu (2005), Jun ve ark. (2008a,2008b)).



Şekil 1.3. Timoshenko kiriş modeli

Ayrıca bazı araştırmacılar tarafından CLBT ve FSDT deki sınırlamalar kaldırılarak yüksek mertbe teorileri geliştirilmiştir (Heyliger ve Reddy (1988), Shi ve Lam (1999), Subramnian (2006), Eisenberger (2003)). Yüksek mertbe teoriler deplasman bileşenlerinin yüksek mertbe gelişimlerini kiriş kalınlığı boyunca kullanırlar (Reddy ve ark; 1997). Böylece kompozitlerin alt ve üst yüzeylerindeki kayma gerilmelerinin serbest sınır koşulları karşılanabilmektedir (Zhang ve Yang, 2009).

Yapı analiz yöntemlerinin tamamı diferansiyel denklem çözümüne dayanır. Analitik çözümler yükün yayılı olması, kesit özelliklerinin ve sınır koşullarının matematiksel ifadelerle tanımlı olması durumlarıyla sınırlıdır. Birçok araştırmacı bu problemlerin çözümü için geliştirilen yöntemleri başarılı bir şekilde uygulamışlardır.

Geçmişten günümüze kadar olan çalışmalar incelendiğinde en çok kullanılan yöntemler

- Ritz Yöntemi
- Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM)
- Galerkin Yöntemi
- En Küçük Kareler Yöntemi
- Sonlu Farklar Yöntemi
- Sınır Elemanlar Yöntemi

olarak sayılabilir. Bu sayısal çözüm yöntemleri içerisinde Ritz yöntemi, Sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu farklar yönteminde ilk adım, diferansiyel denkleme karşı gelen " $I(u)$ " fonksiyonelinin bulunmasıdır. Galerkin yöntemi, en küçük kareler yöntemi

ve sınır elemanlar yöntemlerinde ise fonksiyonele gereksinim olmadan çözüm bulunabilmektedir (Arslan, 2004). Bu yöntemler arasında genelliği ve bilgisayar programcılığına olan yatkınlığı ile “sonlu elemanlar metodu” ön plana çıkar (Omurtag, 2001). Aslında Ritz yöntemi ile sonlu elemanlar yöntemi esas bakımından eşdeğerdirler. Her iki yöntemde de çözüm için yaklaşık bir fonksiyon seçilir. İki yöntem arasındaki temel fark, yaklaşık fonksiyon Ritz yönteminde bütün bölgede geçerli olmasına rağmen, sonlu elemanlar yönteminde sadece bölge içindeki bir elemanda geçerlidir. Karmaşık problemlerin çözümünü kolaylaştırmak açısından “sonlu elemanlar yöntemi” uygun olmaktadır (Özütok, 1999).

Sonlu elemanlar yöntemi adım adım aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Aköz, 1985)

- i. Çözüm bölgesi, sonlu sayıda alt bölgelere ayrılır. Bu alt bölgelere eleman adı verilir. Elemanlar nod denilen sınır noktaları ile birbirlerine birleşirler.
- ii. Bölgenin alt bölgelere ayrılmasından sonra bilinmeyen değişkeni karakterize eden sürekli bir fonksiyon seçilir. Bu fonksiyona interpolasyon fonksiyonu veya şekil fonksiyonu adı verilir.
- iii. Bilinmeyenleri çözmek için gerekli eleman denklemleri varyasyon prensibi vasıtasıyla bulunur.
- iv. Eleman boyutu küçültülerek eleman sayısı arttırıldığında yaklaşık çözümün gerçek değere yaklaşması için interpolasyon fonksiyonu “süreklilik” ve “tamlık” şartlarını sağlamalıdır.

Sonlu elemanlar yönteminin avantajlarından biri, sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara dâhil edilmesidir. Böylece, sınır şartlarını probleme uygularken baştan yoğun hesaplara girilmez.

Sonlu elemanlar metodunu, uygulanan değişik varyasyon ilkelerine bağlı olarak kısaca iki gruba ayırabiliriz.

- Yer değiştirme türü elemanlar
- Karışık türde elemanlar

Yer değiştirme türü elemanlarda serbest değişkenler geometrik büyüklüklerdir. Kuvvetler ve momentler ise, geometrik büyüklüklerin türev büyüklüklerinden yararlanılarak ikinci bir işlemle elde edilir. Karışık türde elemanlarda, geometrik büyüklüklerin yanı sıra, kullanılan kabullere de bağlı olarak, kuvvet ve moment türü büyüklükleri de değişken olarak bünyesinde barındırmaktadır. Her iki yönteminde kendilerine özgü üstünlükleri vardır, ama özellikle statik problemler için serbest

değişken olarak kuvvet ve momentleri, denklem takımının çözümü esnasında bir seferde hesaplayan karışık elemanlar, mühendislik hesaplarında daha büyük öneme sahip kuvvetleri ve momentleri daha az elemanla daha hassas bulabilmektedir (Omurtag, 2001). Ayrıca karışık sonlu elemanlarda eleman en/boy oranı da hesaplarda bir sorun oluşturmamaktadır.

Karışık sonlu elemanlar yöntemi ilk olarak Herman (1967) tarafından iki boyutlu problemlerin analizi için geliştirilmiştir (Arslan, 2004). Daha sonra yöntem, Reddy ve Oden (1975) tarafından yapı kirişlerinin bir boyutlu problemlerine uygulanmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemini üretmek için çeşitli varyasyon ilkelerine bağlı olmak üzere kullanılan yöntemleri sıralayabiliriz

- Potansiyel enerji Teoremleri
- Hu–Washizu ve Hellinger–Reissner Teorileri
- Varyasyonel formülasyon
- Ağırlık formülasyonu
- Gâteaux türevi

Yapılan birçok çalışmada eleman denklemlerinin elde edilmesinde potansiyel enerji teoremleri kullanılmıştır (Zienkiewicz ve Cheung (1970), Aköz (1985)). Karışık sonlu eleman formülasyonunda değişim metotların kullanıldığıda görülmüştür (Bergman ve Mukherjee (1990)). Son yıllarda Aköz ve ark., çeşitli problemlerin statik ve dinamik analizleri için Gâteaux diferansiyel metodunu başarılı bir şekilde uygulamışlar ve fonksiyoneller üretmişlerdir (Aköz ve ark. (1991), Aköz ve Kadioğlu (1996), Aköz ve Eratlı (1992, 1997), Omurtag ve ark. (1997), Aköz ve Özütok (2000)).

Bu yöntemler içerisinde Gâteaux türevi yaklaşımının bazı önemli avantajları vardır (Özütok, 1999). Bunlardan bazıları şunlardır;

- Bir tek eleman kullanılarak sürekli kirişler için doğru sonuç elde edilebilir.
- Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları çok kolaylıkla elde edilebilir.
- Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılır.
- Alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olur.
- Gâteaux yaklaşımı ile rijitlik matrisinin tersine gerek olmaksızın elemanların formülasyonu açık olarak yazılabilir.

- İnce ve kalın plak ve kabukların iç kuvvet, moment, dönme, yer değiştirme ve frekansları hesaplanabilir.

Yapılan bu çalışmada, tabakalı kompozit kirişlerin bir türü olan “çapraz tabakalı” ve “tek tabakalı” kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizleri, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı “karışık sonlu elemanlar formülasyonu” kullanılarak geliştirilmiştir. Kompozit kirişlerin karışık tipteki bu formülasyonları için “Gâteaux diferansiyel metodu” kullanılmıştır. Araştırmalarda geometrisi sabit kesitli, uniform yayılı yük etkisi altında bulunan, üç farklı mesnet koşuluna sahip, ortotropik kompozit kirişler ele alınmıştır.

Çalışmada, enerji prensiplerinden virtüel yer değiştirme ilkesi kullanılarak Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine ait diferansiyel denge denklemleri ve kinematik denklemler elde edilmiştir. Varyasyonel işlemler yapılarak dinamik ve geometrik sınır koşulları belirlenmiş, ardından bu sınır koşullarını içeren alan denklemleri

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (1.1)$$

şeklinde operatör forma dönüştürülmüştür. Bu operatör forma Gâteaux türevi uygulanmış, süreklilik ve potansiyellik kontrolleri yapılarak her iki kiriş teorisine ait kompozit kirişlerin fonksiyonelleri elde edilmiştir. Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak elde edilen bu fonksiyonellere yansıtılmıştır. Bu işlemler sırasında Aköz (1985, 1991, 1996, 2000) tarafından yayınlanan kaynaklardan ve çalışmalardan faydalanılmıştır. Elde edilen bu fonksiyoneller sadece birinci mertebe türevler içermektedirler.

Karışık tipte sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, iki düğüm noktalı, Euler-Bernoulli kirişleri için çökme ve moment, Timoshenko kirişleri için çökme, moment, kesme kuvveti ve dönmenin bilinmeyenler olarak tanımlandığı CLBT4, FSDT8 kiriş elemanları elde edilmiştir. Çözümler için Fortran bilgisayar programı kullanılarak, CLBT4 ve FSDT8 kiriş elemanları için Fortran dilinde bir analiz programı geliştirilmiştir. Geliştirilen programla, elde edilen eleman matrislerinin bilgileri kodlama yardımı ile sistem matrislerine aktarılmıştır. Bu sistem matrisleri kullanılarak her iki kiriş teorisine ait kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizleri yapılmıştır.

Farklı mesnet koşullarına sahip CLBT ve FSDT kirişlerinin statik ve dinamik analizleriyle ilgili sayısal çözümler yapılmıştır. Gâteaux diferansiyeli yaklaşımının önemli avantajlarından birisi olarak statik ve dinamik analizlerde ele alınan kompozit kirişlerin eğilme momenti, kesme kuvveti, dönme, yer değiştirme ve serbest titreşim frekansları her iki kiriş teorisine göre hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar literatürde bulunan benzer çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmış, sonuçların birbirine çok benzer olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca değişik açılarda tabaka dizilişlerinin serbest titreşim frekansları ve yer değiştirmeleri nasıl etkileyeceği, hem açılı dizilişin hem de diğer parametrelerin titreşim özellikleri üzerindeki etkileri de incelenmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak, yine Gâteaux diferansiyel metodu kullanılarak yüksek mertebeye teorilerine dayalı kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizleri ile ilgili çalışmalar devam etmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Son 20-30 yıl içerisinde kompozit malzemeler konusundaki araştırma ve geliştirme çalışmalarında ciddi bir artış meydana gelmiştir. Lamine kompozitler bu çalışmaların önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Yüksek mukavemet/ağırlık oranı ve rijitlik/ağırlık oranı gibi üstün özelliklere sahip olmaları nedeniyle bu malzemeler, uzay, otomotiv, denizcilik, inşaat, vb. birçok alanda kullanılmakta ve genellikle metallerin yerini almaktadırlar. Öte yandan, bu malzemelerle birlikte yeni problemler ortaya çıkmakta ve bunlar üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Araştırmacıların büyük bir kısmı statik analizlerini, dinamik analizlerini, burkulma, kesit yeterliliği, etki – tepki analizlerini ve diğer çeşitli analizlerini yaparken sonlu elemanlar yöntemi kullanmışlardır.

Sonlu elemanlar metodu, özellikle kompozit yapıların kompleks yapısal davranışlarının analizi için çok yönlü ve etkin bir metot olmaktadır. Sonlu elemanlar metodunu üretmek için kullanılan yöntemlerden daha önce bahsedilmişti. Araştırmacılar bu yaklaşımlarla ürettikleri sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yaptıkları çeşitli analizlerde başarılı sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca araştırmacılar yapmış oldukları analizlerde daha önce bahsettiğimiz Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerini de kullanmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmından bahsedilecek olunursa;

Teoh ve Huang (1977) yapmış oldukları çalışmada, fiber güçlendirilmiş malzemedan yapılmış ortotropik konsol bir kirişin dinamik analizini yapmışlardır. Analizlerinde, konsol kirişin serbest titreşimi üzerindeki kayma deformasyon ve atalet momenti etkilerini enerji yaklaşımı yöntemi ile incelemişlerdir.

Chen ve Yang (1985) yapmış oldukları çalışmada, kompozit lamine bir kirişin statik ve dinamik analizlerinin formülasyonunu sonlu eleman yöntemini kullanarak bir bilgisayar programı yardımıyla yapmışlardır. Kirişin serbest titreşimini incelerken kayma deformasyonu etkilerini dikkate almışlardır.

Vinson ve Sierakowski (1986) yapmış oldukları çalışmada, basit mesnetli kompozit bir kirişin analitik çözümünü Classical Lamina Beam Theory kullanarak yapılmıştır. Hesaplamalarda kayma deformasyon etkilerini ihmal etmişlerdir.

Yıldırım ve ark., (1999) çalışmalarında transfer matrisi yöntemini kullanarak simetrik çapraz tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizini yapmışlar; sınır şartları, narinlik oranı, yüksekliğin genişliğe oranı, tabaka sayısı ve malzeme özelliklerinin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Abramovich ve Livshits (1994) tarafından yapılan çalışmada, simetrik olmayan çapraz tabakalı kompozit bir kirişin serbest titreşim analizi birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanılarak yapılmıştır.

Aydoğdu (2005) yapmış olduğu çalışmada, Ritz metodu kullanarak simetrik çapraz tabakalı kompozit kirişlerin titreşim analizini yapmıştır. Çalışmada “parabolik kesme deformasyon, hiperbolik kesme deformasyon, birinci mertebeli kesme deformasyon, üstel kesme deformasyon kiriş teorileri kullanılmıştır. Kirişlerde ankastre ve basit mesnetli sınır koşulları durumları ve altı farklı serbestlik derecesi kombinasyonları dikkate alınmıştır. Analizlerde algebra polinom fonksiyonları kullanılmıştır.

Aydoğdu (2006) yapmış olduğu bir diğer çalışmasında üç serbestlik dereceli kayma deformasyonlu kiriş teorisini kullanarak farklı sınır şartları altındaki açılı tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizini yapmıştır. Açılı tabakalı kompozit kirişler için elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki değerlerle karşılaştırılmıştır.

Dong ve ark., (2005) yapmış oldukları çalışmada tabakalı kompozit Timoshenko kirişinin titreşim özelliklerini incelemiştir. $[0_2/45_2/90_2/-45_2/90_2/45_2/0_2]$ diziliş sırasına sahip T300/970 tabakalı kademeli kirişinin doğal frekansları ve mod yapıları elde edilmiştir.

Maiti ve Sinha (1994) yapmış oldukları çalışmada tabakalı kompozit kirişlerin titreşim davranışlarını analiz etmek için bir sonlu eleman modeli geliştirmişler ve fiber doğrultusu, diziliş sırası, boy/kalınlık oranı ve mesnet tipleri gibi çeşitli parametrelerin etkilerini incelemiştir.

Yıldız ve Eröz (2006) tarafından yapılan çalışmada, ankastre olarak kenarlarından mesnetlenmiş ve ortasında tekil bir yük bulunan kompozit bir plağın yer değiştirme ve gerilme analizlerini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak gerçekleştirmişlerdir.

Jun ve ark., (2008a, 2008b) yapmış oldukları çalışmada eksenel yük altındaki kompozit lamine bir kirişin serbest titreşimi için dinamik analiz yapmışlardır. Hesaplamalarda eksenel yükü, poisson etkisini, eksenel deformasyonu, kesme deformasyonu ve dönme etkilerini kullanmışlardır. Çözüm için bir dinamik rijitlik matrisi geliştirmişlerdir.

Nabi ve Ganesan (1994) tarafından yapılan çalışmada, FSDT ye dayalı sonlu elemanlar metodunu kullanarak, kompozit kirişlerin serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir.

Ahmed ve Basu (1994) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, normal ve silindirik formdaki kompozit plakların iki boyutlu eğilme analizleri için yüksek mertebe teorilerine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir.

Robins ve ark., (1993) yapmış oldukları çalışmada, Reddy'nin Layerfise Lamine Teorisini, kompozit plakların iki boyutlu yer değiştirmeleri için, 3 boyutlu sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir.

Mavenya ve Davies (1974) tarafından yapılan çalışmada, çok tabakalı kompozit plakların statik analizi için bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Çalışmada, her tabaka farklı ortotropik özelliklere sahip olarak hesaba katılmıştır.

Araştırmacıların bir kısmı çözümlerinde Timoshenko kiriş teorisini geliştirerek yüksek mertebe kiriş teorileri ile çözümler yapmışlardır. Bunların bir kısmı;

Heyliger ve Reddy (1986) tarafından yapılan çalışmada, kirişlerin eğilme titreşim problemleri için bir yüksek mertebe sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Bu formülasyonda, kirişin kalınlığı boyunca kayma gerilmelerinin parabolik değiştiği varsayılmaktadır. Ayrıca formülasyon kirişin alt ve üst yüzeylerinde kayma gerilmelerini sıfır olduğunu göstermektedir.

Khdeir ve Reddy (1997) yapmış oldukları çalışmada kalın ve ince cross-ply lamine kirişlerin eğilme davranışları için analitik çözümler geliştirmişlerdir. Çözümlerde Euler-Bernoulli kirişi, Timoshenko kirişi ve yüksek mertebe kiriş teorileri kullanmışlardır. Sınır koşullarını keyfi olarak simetrik ve ansimetrik cross-ply kirişlere keyfi yüklemeler yapmışlardır.

Marur ve Kant (1996) yapmış oldukları çalışmada, yüksek mertebe teorileri ve buna uygun sonlu elemanlar kullanarak lamine kompozit kirişlerin serbest titreşim analizlerini incelemişlerdir. Normal kayma gerilmelerinin etkilerini hesaba katmamışlardır.

Jun ve Hongxing (2009) tarafından yapılan çalışmada, lamine kompozit kirişlerin dinamik rijitlik analizleri trigonometrik kayma deformasyon teorisi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Çözümlerde Wittrick-Williams algoritması kullanmışlardır.

Matsunaga (2001) yapmış olduğu çalışmada, çok tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini yüksek mertebe teorilerine dayanarak çözmüştür. Hesaplamalarda kayma etkilerini, normal gerilmeleri ve dönme etkilerini dikkate almıştır.

Ivanez ve ark., (2010) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, kompozit sandviç kirişlerin dinamik analizlerini, geliştirdikleri 3 boyutlu sonlu eleman modeli ile yapmışlardır. Çözümlerde nümerik testlerin yanı sıra laboratuvar testleri de yapmışlardır.

Amandakumar ve Kim (2009) yapmış oldukları çalışmada, Rayleigh-Ritz metodu ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak, konsol bir kirişin 3 boyutlu davranış modeli geliştirmişlerdir. Modelde poisson etkilerini dikkate almışlardır.

Shi ve Lam (1999) tarafından yapılan çalışmada, kompozit kirişlerin analizi yüksek mertbe teorilerine dayalı sonlu elemanlarla kullanılarak yapılmıştır. Hamilton prensibi kullanılarak kütle matrisi ve varyasyonel türev sonlu eleman modeli için türetilmiştir.

Rao ve ark., (2001) yapmış oldukları çalışmada, yüksek mertbe teorilerini kullanarak lamine kompozit kirişlerin ve sandviç kirişlerin doğal frekanslarını hesaplayabilmek için analitik bir metot geliştirmişlerdir. Denklemlerin çözümlerinde Hamilton prensibi kullanmışlardır. Her bir lamine ortotropik ve planda 2 boyutlu olarak düşünmüşlerdir. Nümerik sonuçları birinci mertbe teorilerinin sonuçları ile de karşılaştırmışlardır.

Sonlu elemanlar metodunu üretmek için kullanılan bir diğer yöntemde Gâteaux diferansiyeli yaklaşımıdır. Gâteaux Diferansiyel metodu sayesinde alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olup alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılmaktadır. Bu metot sayesinde kompozit kirişlerin iç kuvvet, moment, dönme, yer değiştirme ve serbest titreşim frekansları kolaylıkla hesaplanabilmektedir. Gâteaux diferansiyel metodu Aköz ve arkadaşları tarafından çeşitli elemanların statik ve serbest titreşim analizlerinde başarılı bir şekilde uygulanmış ve fonksiyoneller üretilmiştir. Yapılan çalışmaların bir kısmı şunlardır;

Aköz (1985) tarafından yapılan çalışmada, düzlem çubuklar için klasik potansiyel enerji ve tamamlayıcı enerji ifadelerine dönüştürülebilir iki yeni enerji fonksiyoneli bulunmuştur. Bu fonksiyonellerin sonlu elemanlar ve Ritz yöntemi gibi yaklaşık çözüm yöntemleri kullanıldığında klasik fonksiyonellere göre büyük bir avantaj sağladığı görülmüştür.

Aköz ve ark., (1991) tarafından yapılan çalışmada, Gâteaux Diferansiyel yöntemiyle yeni bir fonksiyonel ve buna bağlı sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Çözümlerde değişken kesitlere sahip 3 boyutlu çubuklar kullanmışlardır. Sınır koşulları eleman denklemleri içerisinde yer almıştır. Bilinen değişken düğüm noktası değerleri Lagrange çarpım yöntemiyle işlemlere dahil edilmiştir.

Aköz ve Omurtag (1993) tarafından yapılan çalışmada ince silindirik kabuklar ve uzay çubuklar için, dinamik ve geometrik sınır koşullarını içeren yeni fonksiyonelleri Gâteaux diferansiyel metodu kullanarak elde etmişlerdir. Bu fonksiyoneller, aynı zamanda klasik potansiyel enerji denklemlerine de dönüştürülebilmektedir. Silindirik kabukların ve uzay çubukların eleman matrisleri sonlu eleman formülasyonu kullanılarak değişik kesit alanları için geliştirilmiştir.

Aköz ve Kadioğlu (1996) yapmış oldukları çalışmada, keyfi yükleme altındaki Winkler zemini üzerine oturan, değişken kesit alanına sahip dairesel kiriş elemanlar için karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanmışlardır. Fonksiyonellerin elde edilmesinde Gâteaux diferansiyel metodunu kullanmışlardır.

Aköz ve Kadioğlu (1999) tarafından Winkler zemini üzerine oturan viskoelastik Timoshenko kirişlerinin statik ve dinamik analizleri karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Hesaplamalarda, Gâteaux diferansiyeline bağlı iki yeni fonksiyonel üretmişlerdir.

Eratlı ve Aköz (1997) yapmış oldukları çalışmada Winkler zeminine oturan Reissner plakları için Gâteaux Diferansiyel yöntemi kullanarak yeni bir fonksiyonel elde etmişlerdir. Bu fonksiyonelde, yer değiştirmeler, iç kuvvetler ve sınır koşulları olmak üzere 8 adet bağımsız değişken yer almıştır.

Eratlı ve Aköz (2002) tarafından yapılan çalışmada, Pasternak zemini üzerine oturan Reissner plaklarının dinamik analizleri Gâteaux diferansiyeline bağlı karışık sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır. Analizde, problem standart özdeğer probleminin çözümüne indirgenmiştir.

Omurtag ve ark., (1997) tarafından yapılan çalışmada, Kirchhoff plaklarının dinamik analizleri Gâteaux diferansiyeline bağlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensipleri yerine Gâteaux diferansiyeli kullanarak, Kirchhoff plakları ve elastik zemin arasında oluşan etkileşimin elde edilmesinde sistematik bir yol verilmiştir. Elde edilen sonuçlardan elemanın eğilme ve serbest titreşim analizi için doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Omurtag ve Kadioğlu (1998) yapmış oldukları çalışmada karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak, pasternak zemini üzerine oturan ortotropik plakların serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. Sonlu eleman formülasyonunu türetirken Gâteaux diferansiyeli kullanmışlardır.

Aköz ve Özütok (2000) yapmış oldukları çalışmada, ince ve kalın kabuklara ait yeni bir fonksiyoneli, Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanarak elde etmişlerdir. Bu

kabukların çözümünde sonlu elemanlar metodu kullanmışlardır. Bu kabukların sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilmesi için yer değiştirme, düzlem içi kuvvetler, düzlem içi kayma kuvvetleri, eğilme momentleri, burulma momentleri, enine kayma kuvvetleri ve dönme deformasyonlarının bilinmeyen olarak tanımlandığı kabuk elemanlar elde edilmiştir.

Ayhan ve Kadioğlu (2008) tarafından yapılan çalışmada, kompozit dairesel kirişlerin düzlem dışı doğal frekanslarını karışık sonlu elemanlar metodu ile çözülmüştür. Sonlu elemanlar formülasyonu için Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanmışlardır. Çözümler için Fortran dilinde bir bilgisayar programı geliştirmişlerdir.

3. MATERYAL VE METOT

Katı cisim mekaniğinde, denge denklemleri, uygunluk koşulları ve bünye bağıntıları kullanılarak kuvvet etkisindeki bir elemanın veya sistemin diferansiyel denklemleri, sınır koşullarını sağlayacak şekilde çözülebilir. Diğer bir yaklaşımda diferansiyel denklemlerle uğraşmadan yapıya ait uygun bir enerji fonksiyonunu minimum yaparak çözüme ulaşmaktır. Bu yöntem bir yandan elemana ait diferansiyel denklemlerin ve sınır koşulların elde edilmesinde çok yararlı olurken aynı zamanda doğrudan çözümlere ulaşmakta da kolaylık sağlar.

3.1. Enerji Prensipleri

Sürekli ortam mekaniğinin çeşitli dallarında geniş bir uygulama alanı bulan bu metoda enerji yöntemleri adı verilir. Problemin çözümü fizik anlamı enerji olan, belirli bir integralin ekstrem yapılmasına indirgenmektedir. Bu tip problemlerle uğraşan matematik dalına değişim (varyasyon) hesabı dendiği için söz konusu yöntemlere de değişim yöntemleri (varyasyonel yöntemleri) adı verilir. Enerji yöntemleri, diferansiyel denklem metodunda sıralanan denge denklemleri, uygunluk koşulları, Hooke kanunları ve sınır şartlarından bir kısmıyla bazı sınır şartlarını sağlayan birçok çözümler arasında asıl probleme cevap olanı ayırıp bulmaktır. Bu ayırma ise çeşitli çözümlerin bir fonksiyoneli olan enerji ifadesinin ekstrem yapılması ile sağlanmaktadır. Enerji ilkeleri içinde değişime uğrayan değişkenler yalnız denge denklemlerini sağlarken, diğerinde sadece uygunluk koşullarını gerçekler.

Lineer ve non-lineer teorilerde değişim yöntemleri uygulanarak hem denge denklemleri hem de sınır koşulları elde edilebilir. Kompozit yapıların, diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile ifade edilmesinden ziyade, enerji yöntemleri ile analiz edilmesi çok daha kolay olmaktadır. Enerji teoremlerinde hareket noktası virtüel iş teoremidir.

3.1.1. Virtüel İş İlkesi

Bir kuvvetler sisteminin işi hesaplanırken yer değiştirmelerin mutlaka o kuvvetlerden doğması gerekmez. Diğer bir deyimle işin her zaman gerçek olmasına gerek yoktur. Çok defa bir kuvvetin tasarlanan keyfi bir yer değiştirme sırasında

yapacağı işinde hesabı söz konusu olabilir. Böyle tasarlanan, tamamen keyfi olan bir yer değiştirmeye “virtüel yer değiştirme” denildiği gibi, kuvvetin bu tarzdaki bir yer değiştirmedeki işini de “virtüel iş” adı verilir. Sürekli ortam mekaniğinde virtüel iş teoremi, uygulanacak cismin fizik bünyesine bağlı değildir. Dengesi incelenen cisim ister rijit, ister elastik isterse plastik olsun teorem her zaman geçerlidir.

Ω_0 hacmine sahip dengede olan bir cisme, cismin bağları ile uyumlu kabul edilebilir bir $\delta \mathbf{u}$ virtüel (sanal) bir yer değiştirme verilirse, cisim üzerinde gerçek kuvvetler \mathbf{F} tarafından yapılan virtüel iş,

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dv \quad (3.1)$$

dir. Burada $dv = dx_1 dx_2 dx_3$, hacmi Ω_0 olan bir cismin hacim elemanını göstermektedir.

Dış kuvvetlerin virtüel işi

$$\delta V = - \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dv + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} ds \right) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada \mathbf{f} birim hacme gelen kütle kuvvetlerini, \mathbf{t} , Γ_σ sınır üzerinde birim alana gelen yüzey kuvvetlerini göstermektedir.

Virtüel yer değiştirmeden dolayı ortaya çıkan iç kuvvetlerin virtüel işi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. Farz edelim ki cismin dv hacmi elamanı üzerinde δu_i virtüel yer değiştirme yüzünden, cismin $\delta \varepsilon_{ij}$ virtüel şekil değiştirmesi

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}), \quad \delta u_{i,j} \equiv \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Cismin toplam iç kuvvetlerin *virtüel işi*

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3.4)$$

Cismin hacmi üzerinde (3.4) ifadesinin integralinin alınması şeklinde elde edilebilir. Denklem (3.4) deforme olmuş bir cismin *virtüel şekil değiştirme enerjisi* olarak adlandırılır (Reddy, 2004).

3.1.2. Varyasyonel operatör ve Euler denklemleri

Virtüel yer değiştirmede kullanılan δ operatörü, değişim yöntemlerinde özel bir öneme sahiptir. Bu operatör değişimi gösterdiğinden, varyasyonel operatör olarak isimlendirilir. Şekil 3.1 de görüldüğü gibi $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli, $u(a)$ ve $u(b)$ sınır değerlerine sahip bir $u(x)$ fonksiyonu komşuluğundaki $\bar{u}(x)$ fonksiyonu

$$\bar{u}(x) = u(x) + \alpha v(x) \quad (3.5)$$

şeklinde gösterilsin. Burada α küçük bir parametre, $v(x)$ ise $v(a) = v(b) = 0$ homojen sınır koşullarını sağlayan sürekli bir fonksiyondur. $\bar{u}(x) - u(x)$ arasındaki fark δu ile gösterilip $u(x)$ in değişimi (varyasyonu) denir. Yani δu ya $u(x)$ in birinci varyasyonu denir ve

$$\delta u = \bar{u}(x) - u(x) = \alpha v(x) \quad (3.6)$$

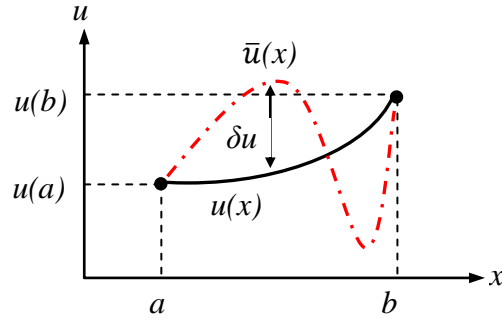
şeklinde gösterilebilir. Benzer olarak $\bar{u}'(x)$ ile $u'(x)$ türevleri arasındaki fark $\delta u'$ ile gösterilirse türevlerin değişimi de

$$\delta u' = \bar{u}'(x) - u'(x) = \alpha v'(x) \quad (3.7)$$

dir. Denklem (3.6) ve (3.7) birbiri ile karşılaştırılırsa değişimin türevi, türevin değişimine eşittir. Yani

$$(\delta u)' = \delta(u') \quad (3.8)$$

dir.



Şekil 3.1. Sınır değerler ve varyasyon eğrisi

Bu operatör virtüel iş prensibinden denge denklemlerinin elde edilmesinde çok faydalıdır. Varyasyonel operatör δ ile tam diferansiyel operatör d arasında bir analogi vardır. Bu düşüncüyü göstermek için u değişkenine bağlı bir F fonksiyonu ve türevi $u' = du/dx$ olduğunu kabul edelim. x sabit için F 'in tam diferansiyeli

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (3.9)$$

dir. F 'in birinci varyasyonu ise

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (3.10)$$

şeklinindedir. u 'nun $u + \delta u$ ya değişimi esnasında x sabit olduğu için denklem (3.9) da $dx=0$ dır. Böylece denklem (3.9)'da ki dF ve denklem (3.10)'da ki δF arasındaki analogiye göre, varyasyonel operatör δ , u bağımlı değişkene göre bir diferansiyel operatördür. Bunun yanı sıra u ve v birer fonksiyon olmak üzere, diferansiyel operatör ile değişim operatörü arasında

$$\begin{aligned} \delta(\nabla u) &= \nabla(\delta u) \\ \delta\left(\int_{\Omega} u d\Omega\right) &= \int_{\Omega} \delta u d\Omega \\ \delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 + \delta F_2 \\ \delta(F_1 F_2) &= \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2 \\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) &= \frac{\delta F_1}{F_2} - F_1 \left(\frac{\delta F_2}{F_2^2}\right) \\ \delta(F_1)^n &= n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

analojisi vardır. Burada $F_1 = F_1(u)$ ve $F_2 = F_2(u)$ dur (Omurtag, 2007; Reddy, 2004).

3.1.3. Fonksiyoneller ve Euler Denklemi

Fonksiyoneller belirli integral şeklinde verilen fonksiyonellerdir. Bu integral içinde, bilinmeyen fonksiyonla, bu fonksiyonun türevi mevcuttur. Fonksiyoneller genel olarak;

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (3.12)$$

şeklinindedir. Bu fonksiyoneli minimum yapan $u(a) = 0$ ve $u(b) = 0$ şartlarını sağlayan, birinci ve ikinci mertebeden türevelere sahip $u = u_0(x)$ fonksiyonu aranıyor. O zaman $v(a) = 0$ ve $v(b) = 0$ homojen sınır koşullarını sağlayan bir $v(x)$ için, $u = u_0 + \alpha v$ fonksiyonu fonksiyonle yerleştirilirse, $I(u) \geq I(u)_0$ olur. u_0 'ın sabit değeri için, $I(u_0 + \alpha v)$ integrali α parametresinin fonksiyonudur. Bu durumda $\alpha = 0$ da bir minimumu, $I(u_0 + \alpha v)$ 'nin α ya göre türevinin $\alpha = 0$ da sıfır olmalıdır.

$$\left[\frac{d}{d\alpha} I(u_0 + \alpha v) \right] \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.13)$$

u ve türevine bağlı $I(u)$ fonksiyonelinin birinci varyasyonu "Gâteaux türevi" dir. $I(u)$ nun birinci varyasyonu

$$\delta I(u_0; v) \equiv \alpha \left[\frac{d}{d\alpha} I(u_0 + \alpha v) \right] \Big|_{\alpha=0} \quad (3.14)$$

biçiminde yazılır. O zaman $I(u)$ 'nin u_0 da minimum olması için gerekli birinci koşul varyasyonun

$$\delta I(u_0; v) = 0 \quad (3.15)$$

eşitliğini sağlamasıdır. Bu amaçla denklem (3.12)'deki ifadenin ekstremum olma koşulu

$$\delta I(u) = \int_a^b \delta F \, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dx = 0 \quad (3.16)$$

dır. Burada $\delta u' = \delta(du/dx) = d(\delta u)/dx$ özdeşliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{d\delta u}{dx} \right) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u \, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_a^b \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. u ve u' değerleri a ve b noktalarında biliniyorsa bunlara karşı gelen değişimler $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$ sıfırdır. Bu koşullar altında denklem (3.17)'deki ikinci terim düşer. Birinci terimin sıfır olması için integral içindeki birinci çarpan

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] = 0 \quad (3.18)$$

sıfır olmalıdır. Buna $I(u)$ fonksiyonelin Euler-Lagrange denklemi adı verilir. Eğer bir $u(x)$ fonksiyonu denklem (3.18)'deki diferansiyel denklemini sağlarsa aynı zamanda denklem (3.12) fonksiyonelinin ekstremum yapar.

3.1.4. Doğal Sınır Koşulları

$u(x)$ ve $u'(x)$ 'in $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlanması halinde fonksiyonelin ekstremum olması için gerekli koşul olan Euler denklemini elde edilmişti. Sınır koşulları verilmişse fonksiyonelin ekstremuma sahip olabilmesi için gerekli sınır koşullarını

denklem (3.17) ifadesinden bulabiliriz. Eğer $u(x)$ sınırlı ya da belirlenmemişse, denklem (3.17) ifadesinin sağlanması için son terim ayrı ayrı sıfır olmalıdır. Bunun için $x = a$ ve $x = b$ de

$$\delta u = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad (3.19)$$

olmalıdır. Birinci ifade *asıl (geometrik) sınır koşulları*, ikinci ifade ise *doğal sınır koşulları* adı verilir (Omurtag, 2010).

3.1.5. Virtüel yer değiştirme ilkesi

Kütle kuvvetleri \mathbf{f} ve yüzey kuvvetleri \mathbf{t} etkisi altında dengede olan bir sürekli cisim düşünelim. Farz edelim ki Ω_0 hacminin, Γ sınır bölgesinde, Γ_u kısmı üzerinde $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ yer değiştirme vektörü, diğer Γ_σ bölgesinde ise \mathbf{t} yüzey kuvvetleri verilmiş olsun.

Virtüel yer değiştirme ilkesi “*Dış kuvvetler altında dengede olan bir sisteme virtüel bir şekil değiştirme verilirse, bu virtüel şekil değiştirme altında dış kuvvetlerin virtüel işi ile iç kuvvetlerin virtüel işinin toplamı sıfırdır.*”

$$\delta U + \delta V \equiv \delta W = 0 \quad (3.20)$$

Tıpkı birinci varyasyonun $\delta I = 0$ olma koşulu ile ilgili elde edilen Euler-Lagrange denklemini gibi denklem (3.20)'yi türetelim. Sırasıyla denklem (3.2) ve denklem (3.4) deki dış ve iç kuvvetlerin virtüel işi denklem (3.20) de yerine konursa ilke aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\int_{\Omega_0} \sigma : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (3.21)$$

Denklem (3.21)'i kartezyen koordinatlarındaki bileşenleri cinsinden yazarsak,

$$\int_{\Omega_0} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - f_i \delta u_i) dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \cdot \delta u_i ds = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir. Denklem (3.3)'deki $\delta \varepsilon_{ij}$ virtüel şekil değiştirmesini, denklem (3.22)'de yerine yazar ve ‘‘divergence teoremi’’ uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) - f_i \delta u_i \right] dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \\ &= \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} - f_i \delta u_i) dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \\ &= - \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

burada $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ ve Γ_u üzerinde $\delta u_i = 0$ olduğundan

$$0 = - \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta u_i ds \quad (3.24)$$

elde edilir. Denklem (3.24) eşitliğinin sağlanması için,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \Omega_0 \text{ üzerinde} \quad (3.25)$$

$$\sigma_{ij} n_j - t_i = 0 \quad \Gamma_\sigma \text{ üzerinde} \quad (3.26)$$

Denklem (3.25) ve denklem (3.26) bir cismin kuk deformasyonları için virtüel yer değiştirme ilkeleri ile ilgili Euler-Lagrange denklemleridir. Denklem (3.26) doğal sınır koşullarıdır.

3.2. Değişik Kiriş Teorileri

Kinematik deformasyonlarına bağlı olarak ifade edilen birçok kiriş teorisi vardır. Değişik kiriş teorilerini tanımlamak için, x, y, z koordinat takımına göre kiriş kesit ortamında bir noktanın yer değiştirme vektörü $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v, w)$ ‘nun bileşenlerinin,

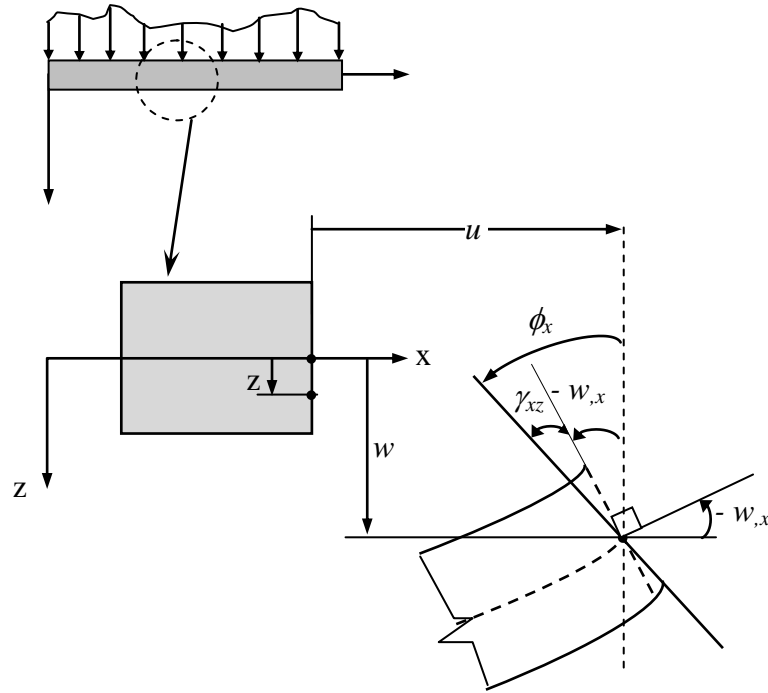
$$\begin{aligned}
u &= z [c_0 w_{,x} + c_1 \phi(x)] \\
v &= 0 \\
w &= w_0(x)
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

olduğunu farz edelim. Burada (u, v, w) kiriş üzerinde ki bir x, y, z noktasındaki yer değiştirme ϕ de x 'in fonksiyonu

$$\phi_x = [w_{,x} - \gamma_{xz}]
\tag{3.28}$$

olarak y eksenini etrafındaki dönmeyi göstermektedir.

Denklem (3.27) yer değiştirme alanlarının içinde Euler-Bernoulli kiriş teorisi (CLBT) ile Timoshenko kiriş teorisine (FSDT) ait yer değiştirme alanları mevcuttur. Denklem (3.27) deki yer değiştirmelerde CLBT için $c_0 = -1$, $c_1 = 0$ ve FSDT için $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ alınacaktır.



Şekil 3.2. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisinde yapılan kinematik varsayımlar

3.2.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (CLBT)

Şekil 3.2.'de görülen yayılı “q” dış kuvvetinin etkisi altında bir kirişin denklem (3.27) deki yer değiştirme ifadelerine göre uzama oranı

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z w_{,xx} \quad (3.29)$$

elde edilir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde kayma açısı ihmal edildiği için, çubuk eksenine dik olan kesitler, şekil değiştirmeden sonrada dik kalmaya devam ederler.

Virtüel yer değiştirme ilkesi kullanılarak, Euler-Bernoulli varsayımına göre diferansiyel denge denklemlerini elde etmek için gerçek iç kuvvetler $\sigma_x dA$ tarafından kirişin birim uzunluğunda ki virtüel işin, virtüel yer değiştirme $\delta\varepsilon_x dx$ çarpımıdır. Toplam iç kuvvetlerin virtüel işi

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x \delta\varepsilon_x dA dx \quad (3.30)$$

dir. Denklem (3.29) da verilen Euler-Bernoulli kiriş teorisine ait gerçek şekil değiştirmedir. Virtüel şekil değiştirme $\delta\varepsilon_x$, virtüel yer değiştirmeye bağlı olarak,

$$\delta\varepsilon_x = -z \delta w_{,xx} \quad (3.31)$$

ifade edilir. Denklem (3.31), denklem (3.30)'da yerine konursa

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x (-z \delta w_{,xx}) dA dx = \int_0^L -M \delta w_{,xx} dx \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada $M(x)$ eğilme momenti, A kesit alanı olmak üzere

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA \quad (3.33)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Yayıllı dış kuvvetler $q(x)$ tarafından yapılan virtüel iş

$$\delta V = -\int_0^L q \delta w dx \quad (3.34)$$

dir. Kirişin dengede olması durumunda virtüel iş ilkesi $\delta U + \delta V = 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\int_0^L (-M_x \delta w_{,xx} - q \delta w) dx = 0 \quad (3.35)$$

elde edilir. Şimdi denklem (3.35)' de birinci integralde $\delta w_{,xx}$ deki türevlerden kurtulmak için buna iki defa kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa,

$$\int_0^L M_x \delta w_{,xx} dx = M_x \delta w_{,x} \Big|_0^L - M_{x,x} \delta w \Big|_0^L + \int_0^L M_{x,xx} \delta w dx \quad (3.36)$$

elde edilir.

Denklem (3.36), denklem (3.35)'de yerine konursa,

$$\int_0^L (-M_{x,xx} - q) \delta w dx - M_x \delta w_{,x} \Big|_0^L - M_{x,x} \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (3.37)$$

elde edilir. Denklem (3.37)'deki sınır koşulları

$$\delta w_{,x}(0) = \delta w_{,x}(L) = 0, \quad \delta w(0) = \delta w(L) = 0 \quad \text{ve} \quad (3.37a)$$

$$M_x(0) = M_x(L) = 0, \quad M_{x,x}(0) = M_{x,x}(L) = 0 \quad \text{dır.} \quad (3.37b)$$

Denklem (3.37)'deki integral ifadelerden δw , $0 < x < L$ aralığında bağımsız ve keyfi olduğundan Euler-Lagrange denklemi

$$-M_{x,xx} - q = 0 \quad (3.38)$$

özdeş olarak sağlanmalıdır.

3.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisi (FSDT)

Şekil 3.2.'de görülen yayılı “q” dış kuvvetinin etkisi altında bir kirişin denklem (3.27)'deki yer değiştirme ifadelerine göre uzama oranı,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \phi_{,x,x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x} + \phi_x\end{aligned}\quad (3.39)$$

elde edilir. Burada γ_{xz} kayma açısıdır. Virtüel şekil değiştirmeler,

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_x &= z \delta\phi_{,x,x} \\ \delta\gamma_{xz} &= \delta w_{,x} + \delta\phi_x\end{aligned}\quad (3.40)$$

ifade edilir. Virtüel yer değiştirme ilkesine göre iç kuvvetlerin virtüel işi, dış kuvvetlerin virtüel işine eşittir. $\delta U + \delta V = 0$ kullanılarak, Timoshenko kiriş teorisine göre

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx - \int_0^L q \delta w dx \\ &= \int_0^L \int_A [\sigma_x (z \delta\phi_{,x,x}) + \tau_{xz} (\delta w_{,x} + \delta\phi_x)] dA dx - \int_0^L q \delta w dx \\ &= \int_0^L [M_x \delta\phi_{,x,x} + Q_x (\delta w_{,x} + \delta\phi_x)] dx - \int_0^L q \delta w dx\end{aligned}\quad (3.41)$$

elde edilir. Burada M_x eğilme moment, Q_x kesme kuvveti, A kesit alanını göstermek üzere

$$\begin{aligned}M_x(x) &= \int_A \sigma_x z dA \\ Q_x(x) &= \int_A \tau_{xz} dA\end{aligned}\quad (3.42)$$

dir. Denklem (3.41)'de birinci integralde bulunan türevli ifadelerden kurtulmak için iki defa kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa,

$$0 = \int_0^L \left[(-M_{x,x} + Q_x) \delta\phi_x + (-Q_{x,x} - q) \delta w \right] dx + M_x \delta\phi_x \Big|_0^L + Q_x \delta w \Big|_0^L \quad (3.43)$$

elde edilir. Denklem (3.43) de integral içindeki fonksiyonelin Euler denklemi,

$$\begin{aligned} -M_{x,x} + Q_x &= 0 \\ -Q_{x,x} - q &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

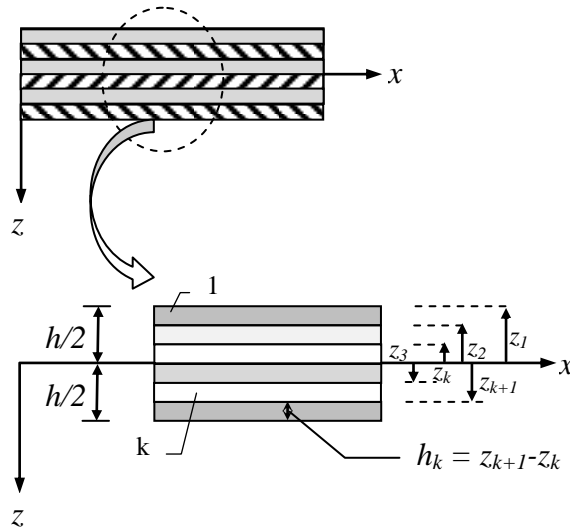
elde edilir. Görüldüğü gibi Euler denklemi gerçekte Timoshenko kiriş teoremine göre elde edilmiş denge denklemleridir.

3.3. Gerilme – Şekil Değiştirme Bağlıları

Şekil 3.3.'de görüldüğü gibi bir kompozit tabakaya ait asıl malzeme koordinatlarındaki k'nci ortotrop tabakanın lineer bünye bağıntıları

$$\{\sigma\}^{(k)} = [Q_{ij}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} \quad (3.45)$$

dir. Burada $Q_{ij}^{(k)}$ azaltılmış rijitlik, “k” tabaka sayısıdır (Reddy, 2004; Ek-2.1).



Şekil 3.3. Tabakalı kirişe ait koordinat sistemi ve tabaka numaraları

Tabakalar, tabaka koordinatlarına göre değişik doğrultularda bir kaç değişik ortotrop tabakadan oluşturulabilir. Bunun için her tabakanın bünye denklemi, tabaka koordinatlarına dönüştürülmek zorundadır. (3.45) denklemindeki bünye bağıntıları, tabaka koordinatlarına dönüştürüldüğü zaman k'inci tabakadaki gerilme durumu

$$\sigma_x^{(k)} = \bar{Q}_{ij}^{(k)} \varepsilon_x^{(k)}, \quad \tau_{xz}^{(k)} = \bar{Q}_{55}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)} \quad (3.46)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ dönüştürülmüş rijitlik matrisidir (Reddy, 2004; Ek-2.2). Denklem (3.46), denklem (3.42) de yerine yazılır ve tabaka kalınlığına bağlı olarak integre edilirse iç kuvvetler;

- Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre, eğilme momenti

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_x z dz \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11} \varepsilon_x z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11} (-w_{,xx}) z^2 dz \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$M_x = D_{11} w_{,xx}$$

elde edilir.

- Timoshenko kiriş teorisine göre,

$$M_x = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11} (\phi_{x,x}) z^2 dz = D_{11} \phi_{x,x} \quad (3.48)$$

elde edilir. (3.47-3.48) denklemindeki D_{11} eğilme rijitliğidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (3.49)$$

Kesme kuvveti ise

$$\begin{aligned} Q_x(x) &= K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{55} \gamma_{xz} dz \\ &= \sum_{k=1}^n K \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{55} \gamma_{xz} dz = \sum_{k=1}^n K \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{55} (w_{,x} + \phi_x) dz \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$Q_x = K A_{55} (w_{,x} + \phi_x)$$

elde edilir.

Denklem (3.50)'de yer alan “ K ” kayma düzeltme katsayısı ve A_{55}

$$\begin{aligned} A_{55} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{55}^{(k)} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{55}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{55}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad (3.51)$$

dir.

3.4. Kompozit Kirişlere Ait Fonksiyonel

3.4.1. Alan denklemleri ve fonksiyonelin elde edilmesi

Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine ait denge denklemleri ve kinematik denklemleri sırasıyla denklem (3.38, 3.44) ve denklem (3.47, 3.48, 3.50) ile ifade edilmesinin yanı sıra kirişin dinamik sınır koşulları,

$$-\mathbf{R} + \widehat{\mathbf{R}} = 0 \quad , \quad -\mathbf{M} + \widehat{\mathbf{M}} = 0 \quad (3.52)$$

ve geometrik sınır koşulları,

$$-\mathbf{\Omega} + \widehat{\mathbf{\Omega}} = 0 \quad , \quad -\mathbf{u} + \widehat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.53)$$

şeklinde sembolik olarak yazılabilir.

Sınır koşullarının açık ifadeleri varyasyonel işlemler sonunda elde edilecektir. (3.51) ve (3.52) denklemlerindeki şapkalı terimler sırasıyla sınırlarda bilinen \mathbf{R} , \mathbf{M} , $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{u} kuvvet, moment, dönme ve yer değiştirme vektörlerine karşı gelmektedir.

Kompozit kirişler için sınır koşullarını da içerecek şekilde alan denklemleri operatör formda

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (3.54)$$

şeklinde yazılabilir. \mathbf{Q} operatörü, CLBT için (3.38) ve (3.47) denklemlerini, FSDT için (3.44; 3.48 ve 3.50) denklemlerini kullanarak sırasıyla

$$\begin{bmatrix} 0 & -d^2/dx^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d^2/dx^2 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ M \\ w \\ w' \\ M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ \tilde{T} \\ -\tilde{M} \\ \tilde{w}' \\ -\tilde{w} \end{bmatrix} \quad (3.54a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d/dx & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d/dx & 1 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \phi \\ M \\ Q \\ Q \\ M \\ \phi \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{w} \\ -\tilde{\phi} \\ \tilde{M} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} \quad (3.54b)$$

matris formunda yazılabilir.

(3.38; 3.44; 3.47; 3.50) denklemlerinde verilen CLBT ve FSDT alan denklemlerine ait fonksiyonellerin elde edilmesi için bu amaca uygun *Gâteaux Diferansiyeli* metodu kullanılacaktır. Burada basitlik için temel kavram ve tanımları verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Aköz, 1991, 2000) kaynaklara bakılması önerilir.

Q operatörünün Gâteaux türevi

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{u} + \tau \hat{\mathbf{u}})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Oden, 1976). Burada “ τ ” bir skalerdir.

Eğer **Q** sürekli bir operatörse ve $\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}) \rangle$ gibi Gâteaux türevi varsa ve

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*), \hat{\mathbf{u}} \rangle \quad (3.56)$$

eşitliği sağlanıyorsa **Q** operatörü potansiyeldir. Burada parantez içerisindeki ifadeler iç çarpımı göstermektedir. Bu tanım kullanılarak iç çarpımlar yapılırsa CLBT ve FSDT için denklem (3.54) deki **Q** operatörünün potansiyel olduğu görülür. Bu durumda alan denklemlerine karşı gelen “ I ” fonksiyoneli

$$I(u) = \int_0^1 [\mathbf{Q}(s\mathbf{u} + \mathbf{u}), \mathbf{u}] ds \quad (3.57)$$

şeklinde hesaplanabilir (Oden, 1976). Burada “ s ” skalerdir.

Bu çalışmada CLBT ve FSDT ne ait alan denklemlerine karşı gelen fonksiyonel, CLBT için,

$$I(u) = [M_{x,x}, w_{,x}] - [q, w] - \frac{\alpha}{2} [M_{x,x}, M_{x,x}] - [\hat{w}_{,x}, M_x]_{\varepsilon} - [w, \hat{T}]_{\sigma} \quad (3.58)$$

$$- [(M_x - \hat{M}_x), w_{,x}]_{\sigma} + [(\hat{w} - w), T]_{\varepsilon}$$

burada $\alpha = 1/D_{11}$ dir.

FSDT için,

$$I(u) = [Q_x, w_{,x}] + [M_x, \phi_{x,x}] + [Q_x, \phi_x] - \frac{\alpha}{2} [M_x, M_x] - \frac{\beta}{2} [Q_x, Q_x] \quad (3.59)$$

$$- [q, w] - [\hat{M}_x, \phi_x]_{\varepsilon} - [\hat{Q}_x, w]_{\varepsilon} - [Q_x, (w - \hat{w})]_{\sigma} - [(\phi_x - \hat{\phi}_x), M_x]_{\sigma}$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{1}{D_{11}}$, ve $\beta = \frac{1}{K A_{55}}$ dir. Parantez altındaki “ σ ” ve “ ε ” alt indisli terimler, sırasıyla, sınır noktaları üzerinde geçerli dinamik ve geometrik sınır koşullarını göstermektedir. Şapkalı değişkenler sınır noktaları üzerinde bilindiği zaman, bu şapkalı değişkene karşı gelen terim veya terimler eleman matrisine katkı sağlayacaktır.

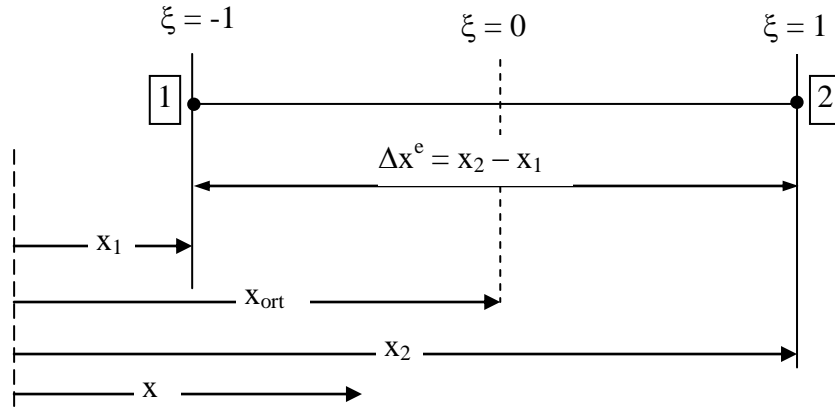
3.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bölüm 3.1.5. de belirtildiği gibi virtüel yer değiştirme ilkesi ile Euler-Lagrange denklemleri olarak adlandırılan denge denklemleri elde edilmişti. Diferansiyel denklem şeklinde olan bu denge denklemlerinin her zaman çözümünü yapmak mümkün olmayabilir. Sınır koşullarına, problemin geometrisine ve yüke bağlı olarak karşılaşılan bu zorlukları aşmak için sınır elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi gibi pek çok yaklaşık çözüm yöntemi kullanılmaktadır. Bunlar arasında en yaygın kullanım alanına sahip ve gerekli olan yöntem sonlu elemanlar yöntemidir.

3.5.1. Şekil fonksiyonları

Sonlu elemanlar yöntemi, incelenecek bölgenin sonlu eleman denilen çeşitli alt bölgelere ayrılması ve sonra her bir elemanın kendisine komşu olan elemanlarla düğüm noktaları üstünde uygun bir biçimde ilişkilendirilmesi esasına dayanır. Doğru eksenli bir çubuğun m tane alt bölgeye ayrılması ve her bir alt bölgeyi işaret edecek çubuk elemanında iki düğüm noktası seçilir (Şekil 3.4.; Omurtag, 2010).

(3.58) ve (3.59) denklemlerindeki Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişine ait fonksiyonel içerisindeki değişkenler sırasıyla $w = w(x)$, $M = M(x)$, ve $w = w(x)$, $M = M(x)$, $Q = Q(x)$, $\phi = \phi(x)$ olmak üzere, her ikisinin de birinci türevleri mevcuttur. Her iki büyüklük için Şekil 3.4. de görüldüğü gibi, şekil fonksiyonu için yerel takımda tanımlı, boyutsuz ve normalize edilmiş ($0 \leq \xi \leq 1$) bir koordinat takımı kullanılmıştır. Burada $\xi = 2x/L$ dir.



Şekil 3.4. Şekil fonksiyonu için koordinat takımı

Boyutsuz ξ koordinatı cinsinden şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\end{aligned}\tag{3.60}$$

olarak alınmıştır. Eğer şekil fonksiyonu (3.60) 'da ki gibi tanımlı ise, zincir kuralına göre türevleri

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dx} &= \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{L} \\ \frac{d\psi_2}{dx} &= \frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L}\end{aligned}\tag{3.61}$$

şeklinde hesaplanabilir. Sonlu elemanlar ve şekil fonksiyonları ile ilgili geniş bilgi (Omurtag, 2010) verilmiştir. Şekil fonksiyonlarının temel özelliğinden yararlanarak eleman içerisindeki herhangi bir noktada yer değiştirme, birim şekil değiştirme, gerilme gibi çeşitli büyüklükler, eleman düğüm noktası serbestliklerine bağlı olarak hesaplanabilir. Örneğin iki düğüm noktalı bir elemanda düğüm noktaları i ve j ye ait yer değiştirmeler w_i ve w_j biliniyorsa, elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirme $w^e = w_i \psi_i + w_j \psi_j$ şeklinde ifade edilecektir. (3.58) ve (3.59) denklemleri şekil

fonksiyonları ile ifade edilirse, fonksiyonelde ortaya çıkan şekil fonksiyonlarının çarpım değerleri

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= \int_{-1}^1 \psi_i \psi_j dx \quad , \quad i, j = 1, 2 \\
 [k_2] &= \int_{-1}^1 \psi_{i,x} \psi_{j,x} dx \quad , \quad i, j = 1, 2 \\
 [k_3] &= \int_{-1}^1 \psi_i \psi_{j,x} dx \quad , \quad i, j = 1, 2
 \end{aligned}
 \tag{3.62}$$

şeklinde yazılır. Bu alt matrislerin açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} , \quad [k_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} , \quad [k_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \tag{3.63}$$

Buna göre Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişleri için sonlu eleman matrisleri sırasıyla,

$$[k]_{CLBT} = \begin{bmatrix} w & M \\ [0] & [k_2]^T \\ \text{simetrik} & -\alpha [k_1] \end{bmatrix}
 \tag{3.64}$$

$$[k]_{FSDT} = \begin{bmatrix} w & M & Q & \phi \\ [0] & [0] & [k_3]^T & [0] \\ & -\alpha [k_1] & [0] & [k_3] \\ \text{simetrik} & & -\beta [k_1] & [k_1] \\ & & & [0] \end{bmatrix}
 \tag{3.65}$$

olarak elde edilir.

3.6. Dinamik Analiz

Yapıların, dinamik yükler altında ki davranışını bulmak için öncelikle statik davranışını veren matematik modeli bilmek gerekir. Yapının dinamik özellikleri, doğrudan yer değiştirmelere bağlı olmasından dolayı daha az değişken kullanılarak dinamik analiz yapılabileceğini gösterir. Bu nedenle dinamik analiz için serbestlik dereceleri azaltılır. Serbestlik derecelerinde azaltma, atalet kuvveti önemli görülen yer değiştirme bileşenlerine veya dinamik parametrelerin sayısı için seçilen fonksiyonlarla sınırlandırılabilir.

Bu çalışmada, statik analiz için geliştirilen sonlu eleman formülasyonunda, sadece nodlarda ki “ w ” ler doğrultusunda atalet kuvveti verilerek serbestlik derecesinin azaltılması yoluna gidilmiştir. “ w ” ler dışındaki bütün değişkenler “ \mathbf{d} ” ile gösterilmiştir. “ w ” doğrultularında “ $q = -\omega^2 m \mathbf{w}$ ” atalet kuvvetleri dış yük olarak alınırsa (3.64-3.65) denklemindeki sonlu eleman matrisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_2 m \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

haline gelir. Burada “ $[m] = \rho h [k_1]$ ” eleman yayılı kütle matrisi, “ ρ ” yoğunluk, “ h ” kesit kalınlığıdır. Bu matris kütleli sürekli değişimi göz önüne alınarak hesaplanmıştır. Bu denklem açık olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{12} \mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{K}_{21} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{w} &= -\omega_2 m \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.67)$$

elde edilir. (3.67) denkleminin ilk teriminden “ \mathbf{d} ” çözülür ve ikinci terimde yerine konursa,

$$\left([\mathbf{K}]^* - \omega^2 [\mathbf{M}] \right) \{ \mathbf{w} \} = \{ \mathbf{0} \} \quad (3.68)$$

biçiminde standart bir özdeğer problemine ulaşılır. Burada

$$[\mathbf{K}]^* = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{21}][\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}] \quad (3.69)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Özütok, 1999).

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde farklı sınır koşullarına sahip simetrik tabakalı kompozit Euler-Bernoulli (CLBT) ve Timoshenko (FSDT) kirişleri için, Gâteaux diferansiyeline bağlı karışık sonlu elemanlar yöntemi ile statik ve dinamik analizleri yapılmıştır. Analizlerde bulunan sonuçlar literatürde ki benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Hesaplamalarda kullanılan kirişlerde bazı parametreler kabul edilmiştir. Kabul edilen bu parametreler Çizelge 4.1.'de gösterilmektedir..

Çizelge 4.1. Kiriş parametreleri

E_1/E_2	h (m)	G_{13}	G_{23}	ν_{12}	ν_{21}	L (m)	q
25	0,1	$0,5.E_2$	$0,2.E_2$	0,25	0,01	1	1

Analizlerde birim kargaşasını önlemek için çizelge 4.1'de ki parametreler genelde oranlama yapılarak kullanılmıştır. Ayrıca nümerik sonuçlar boyutsuz hale getirilmiştir, böylece basamak sayısını azaltarak grafiksel gösterimlerde kolaylık sağlanmıştır. Bütün hesaplamalarda uniform yayılı yük etkisi dikkate alınarak ve sabit kesit kabul edilerek hesap yapılmıştır.

Statik analizlerde her iki kiriş teoremi için farklı sınır koşullarına göre maksimum yer değiştirmeler, momentler ve gerilmeler hesaplanmış, bulunan sonuçlar literatürde ki analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Dinamik analizlerde ise yine her iki kiriş teoremi için farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar, literatürde bulunan çeşitli çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmaları yapılmıştır.

4.1. Statik Analiz

Statik analiz bölümünde farklı sınır koşullarına sahip Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişleri için hesaplamalar yapılmıştır. Bu hesaplarda;

- Eleman sayısına bağlı olarak maksimum yer değiştirmeler için yaklaşım testi yapılmıştır,
- Farklı tabaka açılarına göre maksimum çökme değerleri hesaplanmıştır,
- Farklı tabaka açılarına göre maksimum gerilmeler hesaplanmıştır,
- Elastisite modülleri oranlarına göre maksimum çökme değerleri hesaplanmıştır,

- Yükseklik ve genişlik oranına bağlı olarak maksimum çökme değerleri hesaplanmıştır,
- Bulunan sonuçlar literatürde ki analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

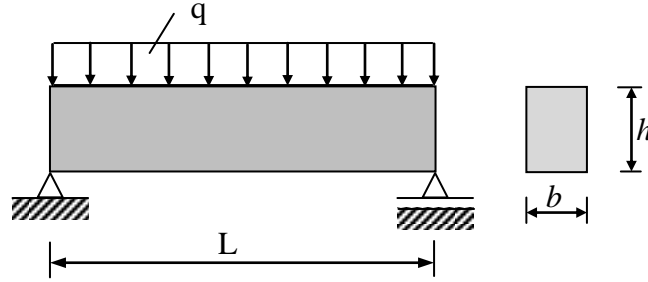
Çözümlerde bulunan çökme ve moment değerleri (4.1) ve (4.2)' de gösterilen formüller yardımıyla boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\bar{w} = w_{\max} E_2 h^3 / q L^4 10^{-2} \quad (4.1)$$

$$\bar{M} = M \frac{1}{q L^2} \quad (4.2)$$

4.1.1. İki ucu basit mesnetli kiriş (SS)

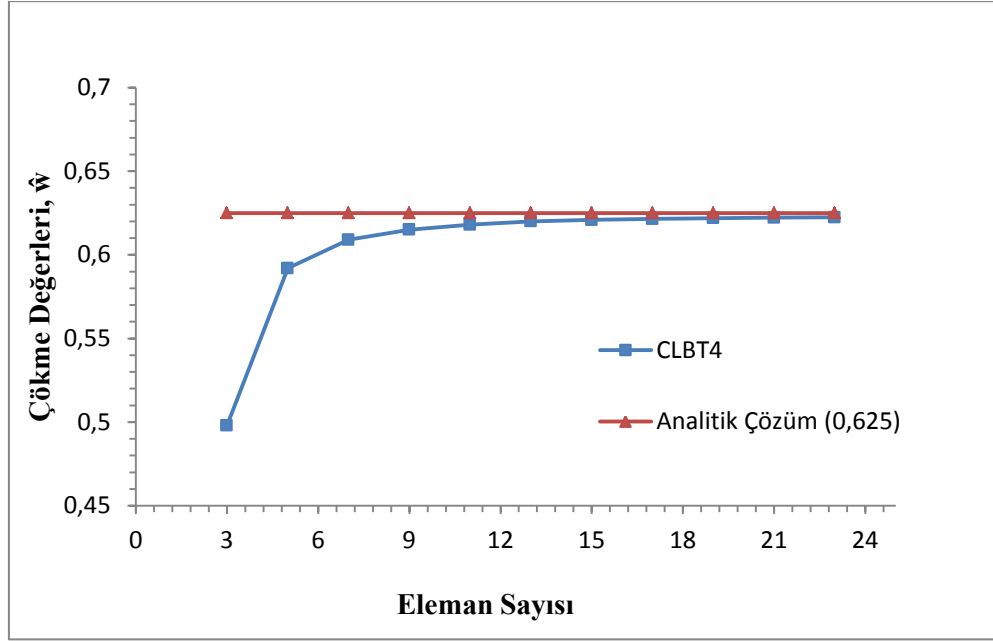
Şekil 4.1. de görülen iki basit mesnetli, sabit kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki kiriş eleman için, CLBT ve FSDT kiriş teorilerine göre gerilmeler, çökme ve moment değerleri sonlu elemanlar yöntemiyle bulunup, elde edilen sonuçlarla analitik çözümden elde edilen sonuçların karşılaştırması yapılmıştır.



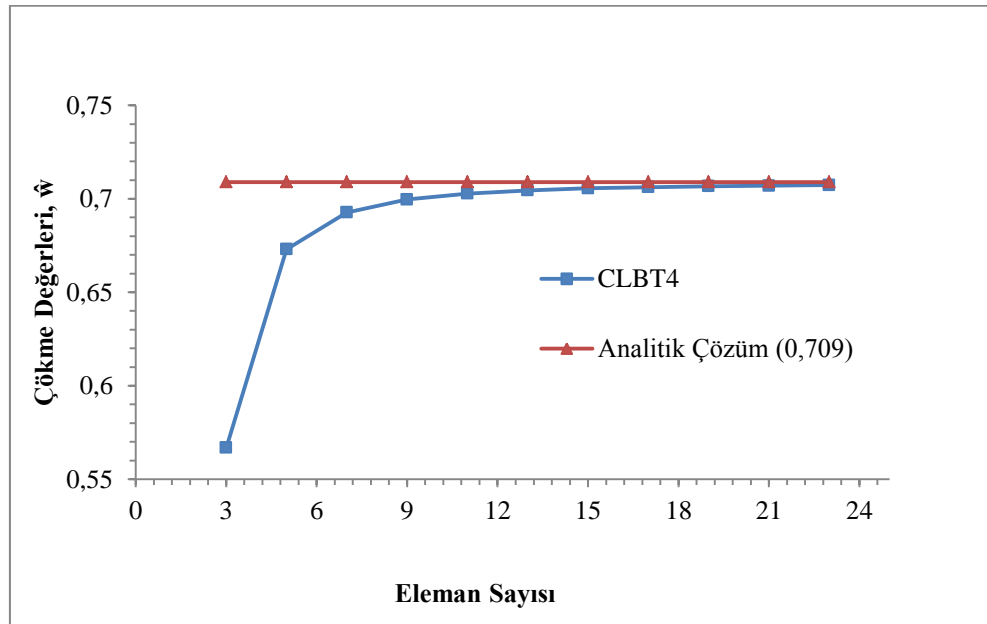
Şekil 4.1. İki ucu basit mesnetli kiriş modeli

- CLBT Kirişi için yapılan çözümler ve sonuçları ;

Yapılan çözümlerde simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabakalı $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlerin, eleman sayısına bağlı maksimum yer değiştirmeleri için yaklaşım testi uygulanmıştır. E_1/E_2 oranı 25 alınmıştır. Sonuçlar Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. de görüldüğü gibi Reddy (2004) sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.2. Simetrik tek tabaka (0°), CLBT4 kirişi için karşılaştırmalı yaklaşım testi



Şekil 4.3. Simetrik çapraz tabaka ($0^\circ/90^\circ$), CLBT4 kirişi için karşılaştırmalı yaklaşım testi

Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. de görüldüğü gibi, her iki durum için bulunan sonuçlar, eleman sayısındaki artış ile analitik çözüm sonucu bulunan gerçek sonuçlarla 15 eleman sayısından itibaren örtüşmektedir. Buna bağlı olarak, yapılan diğer hesaplamalarda eleman sayısı 17 olarak alınmıştır.

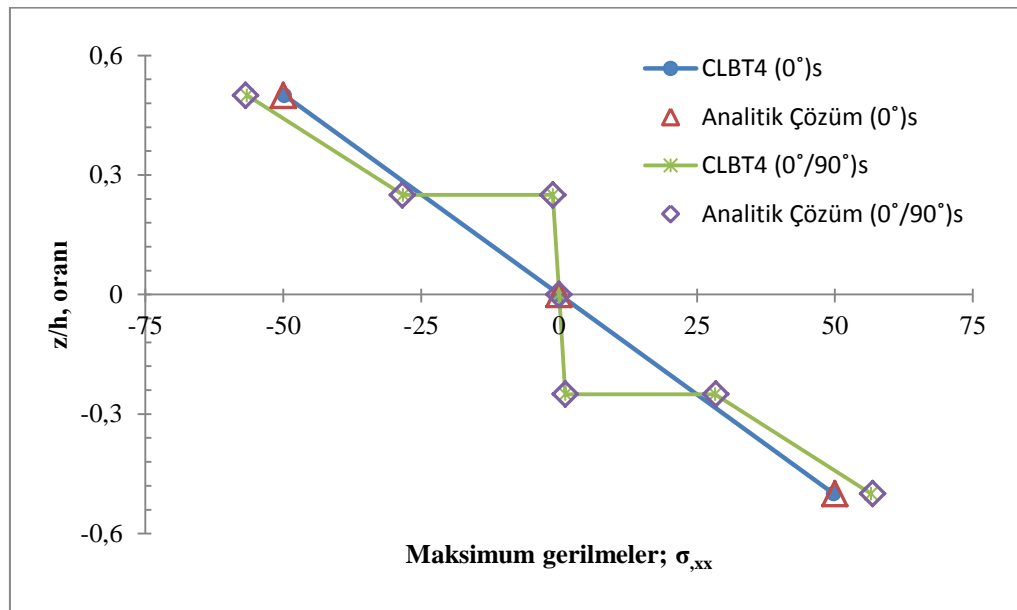
Farklı açılardaki tabaka dizilimleri için bulunan maksimum yer değiştirmeler Çizelge 4.2.'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Çizelge 4.2. Tabaka açılarna bağlı maksimum boyutsuz çökme değerleri

CLBT4 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değeri; (\bar{w})								
Mesnet	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)
SS	0,621	0,625	15,540	15,625	0,706	0,709	3,880	3,899

Yapılan çalışma ile literatür nümerik sonuçlarının birbirine çok yakın çıktığı ve farklılık yüzdesinin %0.99 olduğu Çizelge 4.2. de görülmektedir.

Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlerin z/h oranına, yani tabakaların koordinatlarına bağlı maksimum gerilmeleri literatür sonuçları ile Şekil 4.4. de gösterildiği gibi karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.4. Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ CLBT4 kirişi için karşılaştırmalı gerilme grafiği

Şekil 4.4.'e bakıldığında yapılan çalışma sonucunda bulunan maksimum gerilmeler, analitik çözüm sonucu bulunan değerlerle örtüşmektedir. Ayrıca tabakaların açılı konumlarının kiriş gerilmelerini nasıl etkilediği burada görülmektedir. Buna göre simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ bir kompozit kirişin gerilmeleri z/h oranına bağlı olarak

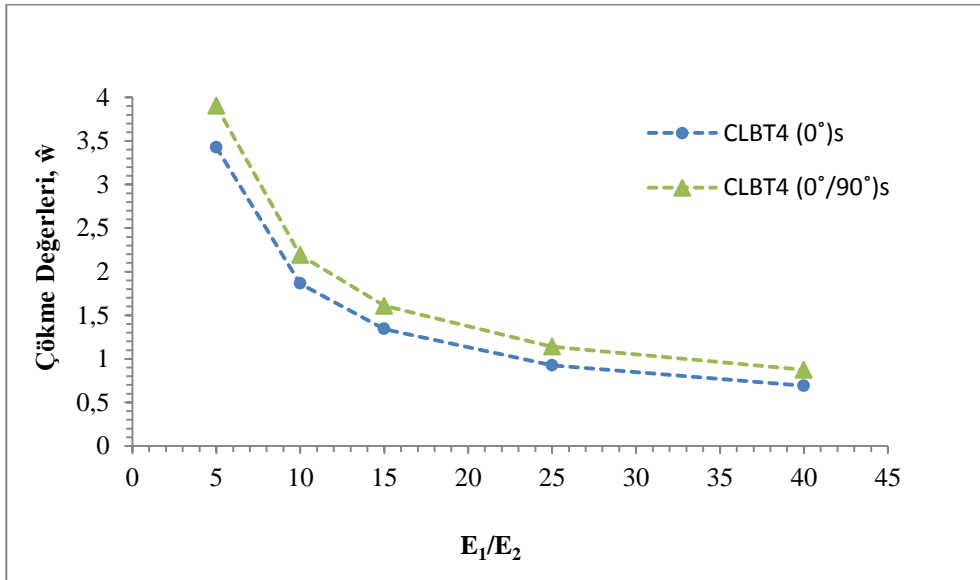
doğrusallık gösterirken; simetrik çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kirişin gerilmeleri zig-zag bir değişim göstermektedir.

Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlerin maksimum yer değiştirmelerinin, E_1/E_2 elastisite modülü oranlarına bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiş, bulunan nümerik sonuçlar Çizelge 4.3.'de, literatürde bulunan analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ CLBT4 kirişi için maksimum yer değiştirmelerin E_1/E_2 oranına göre boyutsuz değerleri

E_1/E_2	Maksimum boyutsuz çökme değerleri; \bar{w}			
	$(0^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$	
	CLBT4	Reddy (2004)	CLBT4	Reddy (2004)
5	3,107	3,156	3,531	3,495
10	1,554	1,568	1,766	1,762
15	1,036	1,043	1,177	1,178
25	0,621	0,625	0,706	0,709
40	0,388	0,390	0,441	0,443

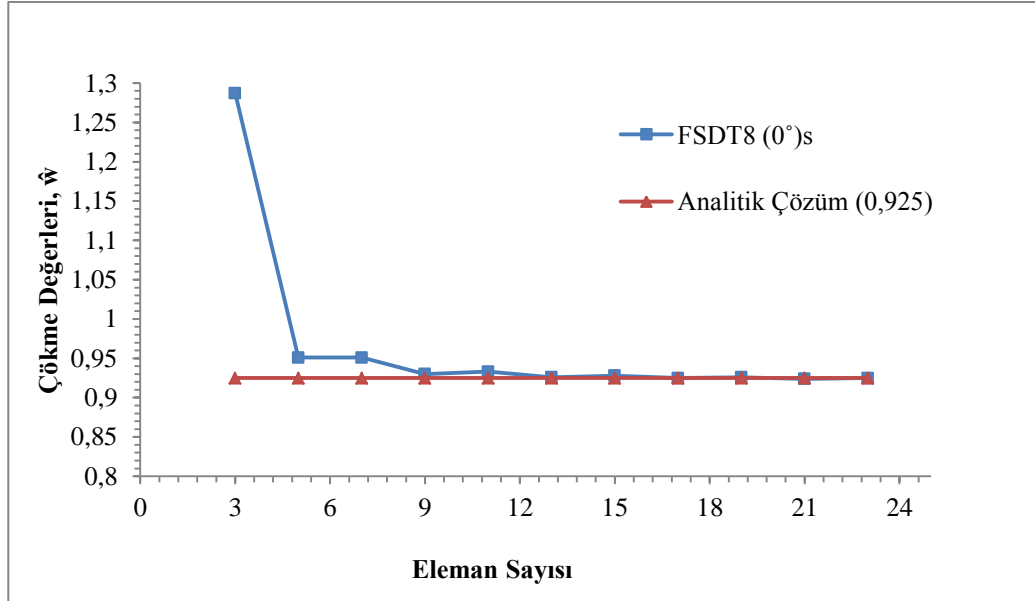
Çizelge 4.3.'de gösterilen çalışma sonuçlarının eğrisel değişimi Şekil 4.3.'de görülmektedir. Buradan da anlaşıldığı gibi, E_1/E_2 oranının büyümesi maksimum yer değiştirmeleri azaltmaktadır.



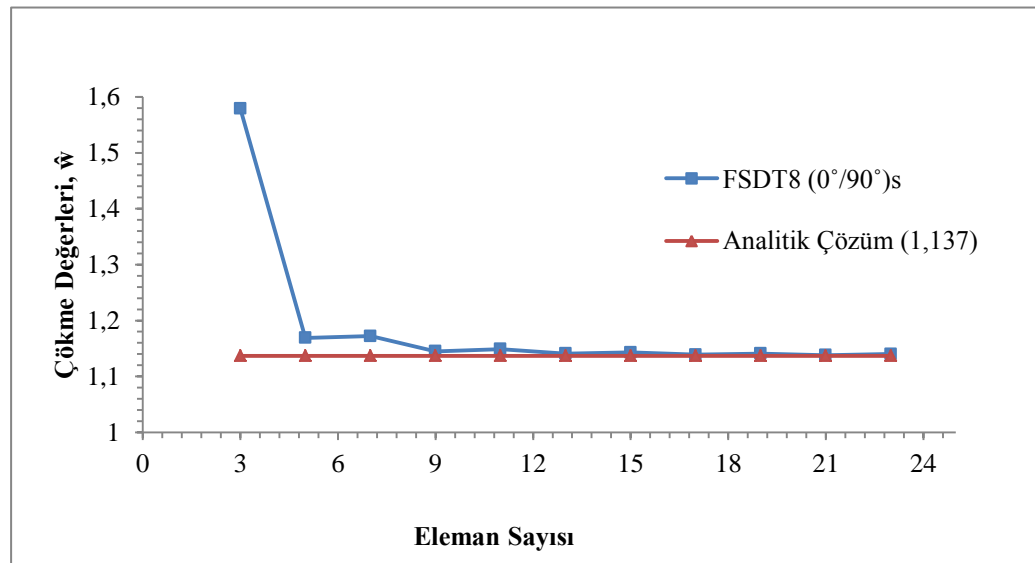
Şekil 4.5. Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ CLBT4 kirişi için E_1/E_2 oranına bağlı maksimum yer değiştirmelerin eğrisel değişimi

- FSDT Kirişi için yapılan çözümler ve sonuçları;

CLBT4 kirişi için yapılan kabuller FSDT8 kirişi içinde yapılmıştır. E_1/E_2 oranı 25 ve L/h oranı 10 kabul edilerek simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlere yaklaşım testi uygulanmıştır. Uygulanan yaklaşım testi ile eleman sayısına bağlı olarak çökme değerlerinin değişim eğrisinin gerçek çözüm sonucuna nasıl yaklaştığı Şekil 4.6 ve Şekil 4.7. de karşılaştırmalı olarak görülmektedir.



Şekil 4.6. Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ FSDT8 kirişi yaklaşım testi



Şekil 4.7. Simetrik çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ FSDT8 kirişi için karşılaştırmalı yaklaşım testi

Yapılan yaklaşım testleri sonucu Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.'de görüldüğü gibi hesaplanan boyutsuz çökme değerleri eleman sayısındaki artışa bağlı olarak, analitik çözüm sonucu bulunan gerçek sonuçlarla 14 eleman sayısından itibaren örtüşmektedir. CLBT4 kirişi çözümlerinde eleman sayısı 17 olarak alındığından hesap sonuçlarının karşılaştırılabilmesi için FSDT8 kirişi çözümlerinde de eleman sayısı 17 olarak kabul edilmiştir.

Farklı açılara sahip iki ucu basit mesnetli, simetrik tabaka dizilimli FSDT8 kirişlerinin, farklı L/h oranlarına bağlı olarak hesaplanan boyutsuz maksimum yer değiştirme değerleri Çizelge 4.4.'de analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir.

Çizelge 4.4. Farklı tabaka açılına sahip iki ucu basit mesnetli simetrik FSDT8 kirişlerinin L/h oranına bağlı boyutsuz maksimum yer değerimleri

FSDT8 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değerleri; \bar{w}								
L/h	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)
10	0,925	0,925	16,38	16,375	1,139	1,137	4,336	4,327
20	0,700	0,700	15,82	15,813	0,817	0,816	4,014	4,006
50	0,637	0,637	15,66	15,655	0,727	0,726	3,924	3,916
100	0,628	0,628	15,64	15,633	0,714	0,713	3,912	3,903

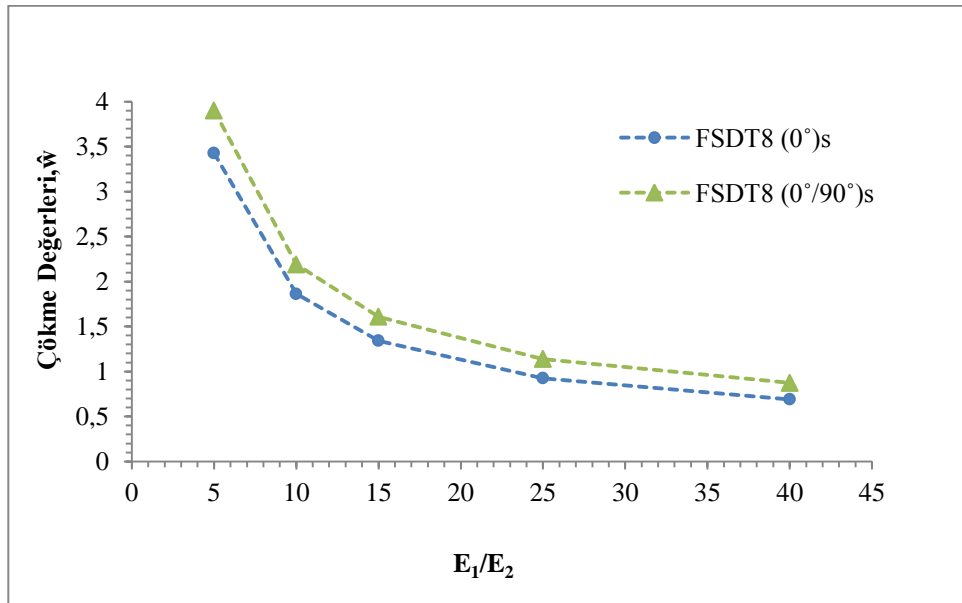
Çizelge 4.4.'de görüldüğü gibi hesap sonuçları, literatürde ki mevcut analitik çözüm sonuçları ile hemen hemen aynı çıkmıştır.

L/h oranı 10 kabul edilerek iki ucu basit mesnetli, simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlerin, E_1/E_2 oranına bağlı olarak boyutsuz maksimum çökme değerleri Çizelge 4.5.'de, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir.

Çizelge 4.5. Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ FSDT8 kirişi için maksimum yer değiştirmelerin E_1/E_2 oranına göre değerleri

FSDT8 maksimum boyutsuz çökme değerleri; \bar{w} (L/h=10 için)				
E_1/E_2	$(0^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$	
	FSDT8	Reddy (2004)	FSDT8	Reddy (2004)
5	3,426	3,456	3,902	3,924
10	1,863	1,868	2,19	2,19
15	1,342	1,343	1,608	1,606
25	0,925	0,925	1,139	1,137
40	0,690	0,690	0,873	0,872

Çizelge 4.5.'de ki boyutsuz maksimum yer değiştirmelerin eğrisel değişimi simetrik $(0^\circ)_s$ ve $(0^\circ/90^\circ)_s$ tabaka açılı kirişleri için Şekil 4.8.' de gösterilmektedir.



Şekil 4.8. Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlerin E_1/E_2 oranına bağlı boyutsuz maksimum yer değiştirmelerinin eğrisel değişimi

Şekil 4.8.'de görüldüğü gibi E_1/E_2 oranının artmasıyla birlikte maksimum yer değiştirmelerde azalmaktadır.

Yapılan hesaplamalarda maksimum moment değeri analitik çözüm sonucu bulunan moment değerleri ile aynı bulunmuştur Çizelge 4.6.

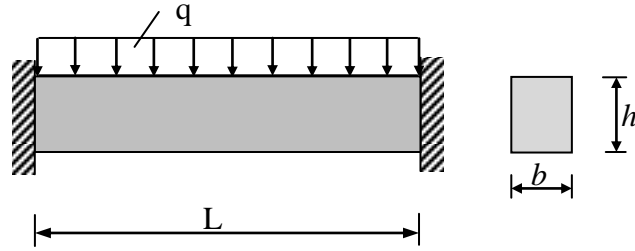
Çizelge 4.6. İki ucu basit mesnetli (SS) CLBT4 kiriş için bulunan maksimum moment

	Maksimum boyutsuz moment değeri; (\bar{M})							
	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)
SS	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125

4.1.2. İki ucu ankastre mesnetli kiriş (CC)

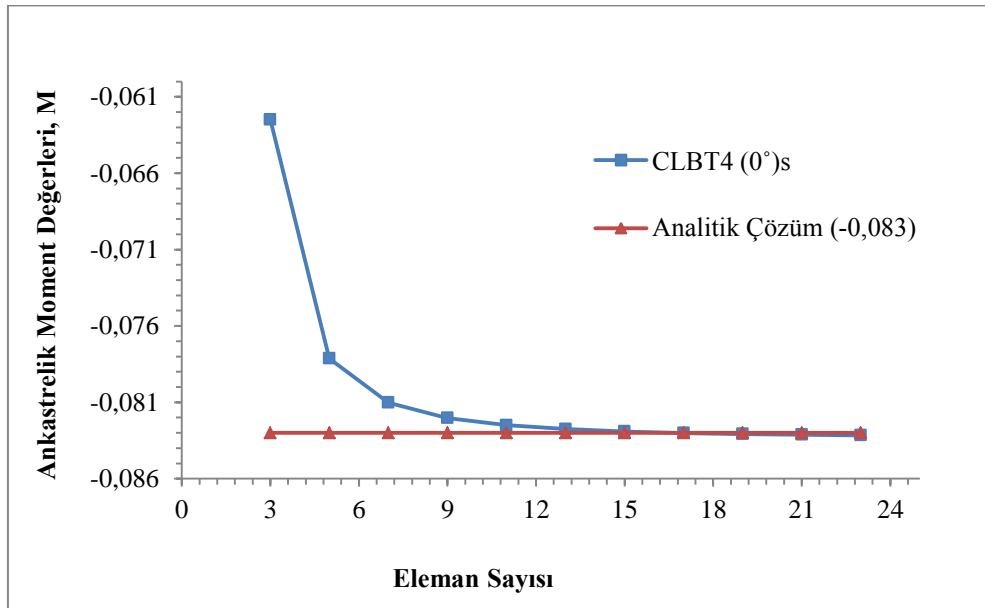
Şekil 4.9.'da görülen iki ucu ankastre mesnetli, düzgün kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki kiriş için yer değiştirmeler, gerilmeler ve moment

değerleri CLBT ve FSDT ye göre sonlu elemanlar yöntemiyle bulunup literatürdeki analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmaları yapılmıştır.



Şekil 4.9. İki ucu ankastre mesnetli kiriş

İki ucu ankastre mesnetli kiriş için ankastrelik momentlerinin kesin çözüme yaklaşım testi Şekil 4.10.'da verilmiştir.



Şekil 4.10. İki ucu ankastre mesnetli simetrik tek tabaka (0°)s CLBT4 kirişinin eleman sayısına bağlı ankastrelik momentlerindeki değişimin karşılaştırmalı yaklaşım testi

Yapılan çözümlerinde elde edilen ankastrelik momentlerinin eleman sayısına bağlı olarak analitik çözüm sonuçları ile 13 elemandan sonra üst üste düştüğü görülmektedir.

Farklı tabaka açılımlarına sahip simetrik CLBT4 kirişi için bulunan çökme değerleri literatürde ki analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.7.'de verilmiştir.

Çizelge 4.7. Simetrik CLBT4 kirişi için bulunan çökme değerleri

	L/h=10 için CLBT4 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değeri; (\bar{w})							
	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)
CC	0,124	0,125	3,117	3,125	0,141	0,142	0,779	0,780

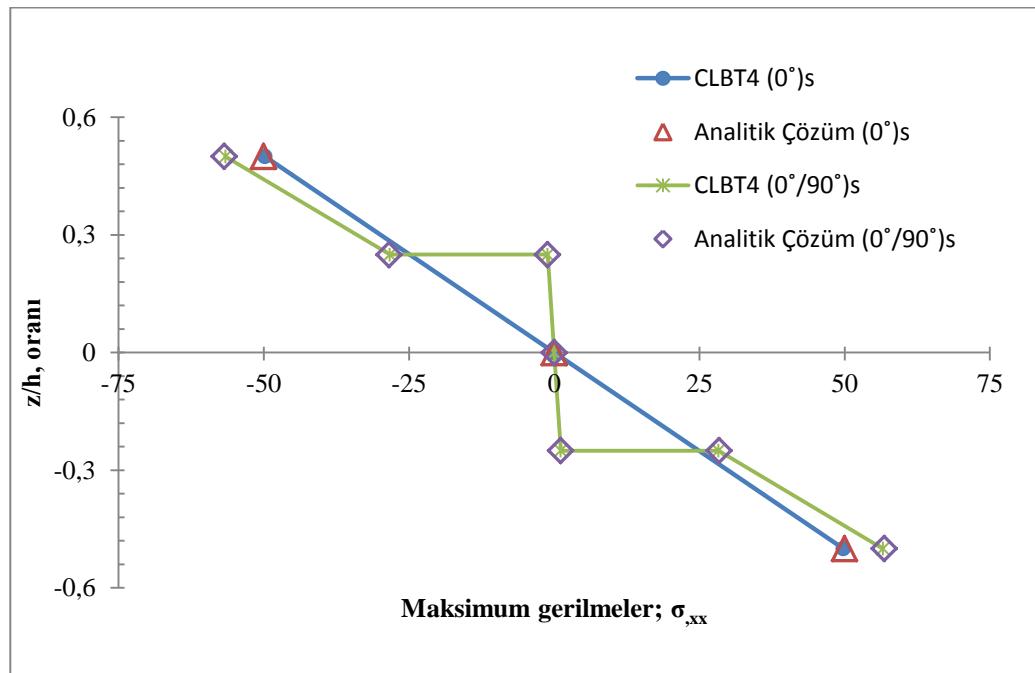
FSDT8 kirişi için bulunan boyutsuz çökme değerleri ise karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.8.'de verilmiştir.

Çizelge 4.8. Simetrik FSDT8 kirişi için bulunan çökme değerleri

	L/h=10 için FSDT8 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değeri; (\bar{w})							
	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)
CC	0,427	0,425	3,932	3,875	0,573	0,570	1,224	1,208

Yapılan çalışma sonuçları ile analitik çözüm sonuçlarının hemen hemen aynı çıktığı görülmektedir.

Simetrik tek tabaka $(0^\circ)_s$ ve çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kompozit kirişlerin z/h oranına, yani tabakaların koordinatlarına bağlı maksimum gerilmeleri literatür sonuçları ile Şekil 4.11.'de gösterildiği gibi karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.11. İki ucu ankastre mesnetli CLBT4 kirişin gerilme değerleri eğrisi

Çalışma sonucu bulunan gerilme değerleri ile analitik çözüm sonucu bulunan değerlerin üst üste düştüğü görülmektedir.

Farklı açılara sahip iki ucu basit mesnetli, simetrik tabaka dizilimli FSDT kirişlerinin, farklı L/h oranlarına bağlı olarak hesaplanan boyutsuz maksimum yer değiştirme değerleri Çizelge 4.9.'da analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir.

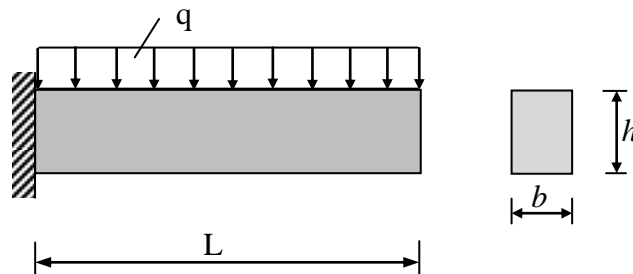
Çizelge 4.9. Farklı tabaka açılara sahip iki ucu ankastre mesnetli, simetrik FSDT8 kirişlerinin L/h oranına bağlı boyutsuz maksimum yer değiştirmeleri

FSDT8 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değerleri; \bar{w}								
L/h	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)
10	0,427	0,425	3,932	3,875	0,573	0,570	1,224	1,208
20	0,202	0,200	3,370	3,312	0,251	0,249	0,902	0,887
50	0,139	0,137	3,212	3,155	0,161	0,158	0,812	0,796
100	0,130	0,128	3,190	3,132	0,148	0,146	0,799	0,784

Çizelge 4.9.'da görüldüğü gibi hesap sonuçları, literatürde ki mevcut analitik çözüm sonuçları ile hemen hemen aynı çıkmıştır.

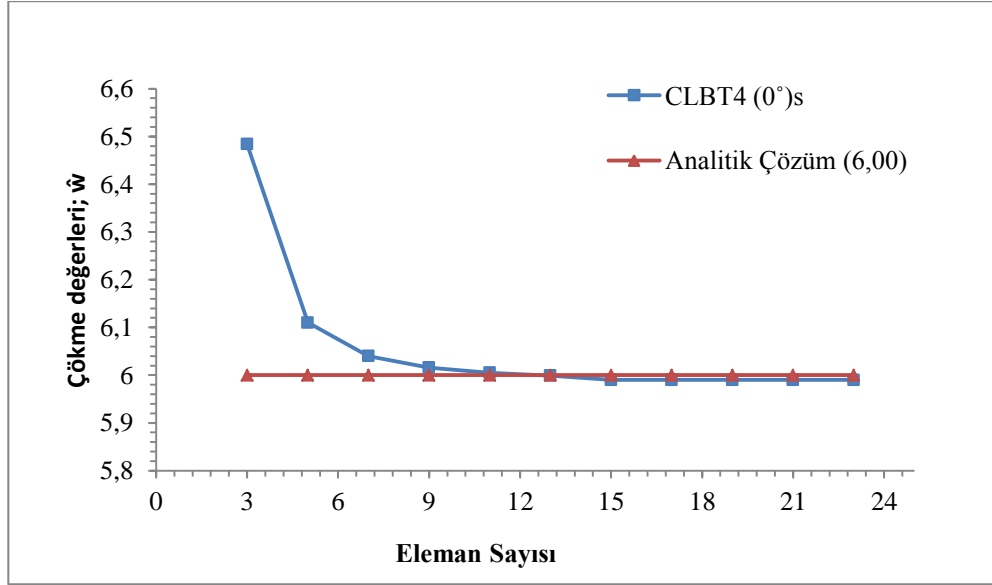
4.1.3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (CF) mesnetli kiriş

Şekil 4.12.'de görülen bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli, düzgün kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki kiriş için gerilmeler, yer değiştirmeler ve moment değerleri CLBT ve FSDT ye göre sonlu elemanlar yöntemiyle bulunup literatürdeki analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmaları yapılmıştır.

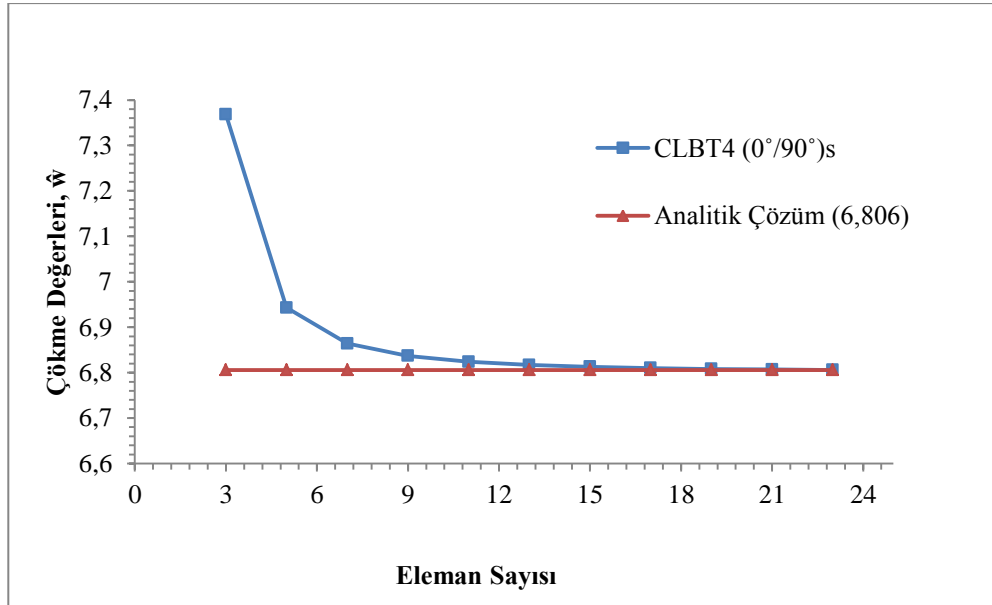


Şekil 4.12. Bir ucu ankastre diğer serbest mesnetli kiriş

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli, simetrik tek tabaka (0°)_s ve çapraz tabaka ($0^\circ/90^\circ$)_s CLBT4 kirişinin eleman sayısının artırılmasıyla çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçların gerçek sonuçlara yaklaşımı Şekil 4.13. ve Şekil 4.14.'de verilmiştir.



Şekil 4.13. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli, simetrik tek tabaka (0°)_s CLBT4 kirişinin serbest ucundaki çökme değerlerinin eleman sayısına bağlı değişiminin yaklaşımı



Şekil 4.14. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli, simetrik çapraz tabaka ($0^\circ/90^\circ$)_s CLBT4 kirişinin serbest ucundaki çökme değerlerinin eleman sayısına bağlı değişiminin yaklaşımı

Çökme değerlerinin gerçek sonuçlara yaklaşımı Şekil 4.13. ve Şekil 4.14.'de görüldüğü gibi olmaktadır. Az eleman için karışık sonlu elemanlar yöntemi, kesin değere daha uzak sonuçlar verirken, eleman sayısının artırılmasıyla değerlerin kesin sonuca hızla yaklaştığı gözlemlenmiştir.

Farklı tabaka açılarına sahip bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli, simetrik CLBT4 kirişi için bulunan çökme değerleri literatürde ki analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.10.'da verilmiştir.

Çizelge 4.10. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, simetrik CLBT4 kirişi için bulunan çökme değerleri

L/h=10 için CLBT4 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değeri; (\bar{w})								
	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)
CF	5,99	6,00	149,8	150	6,81	6,806	37,450	37,433

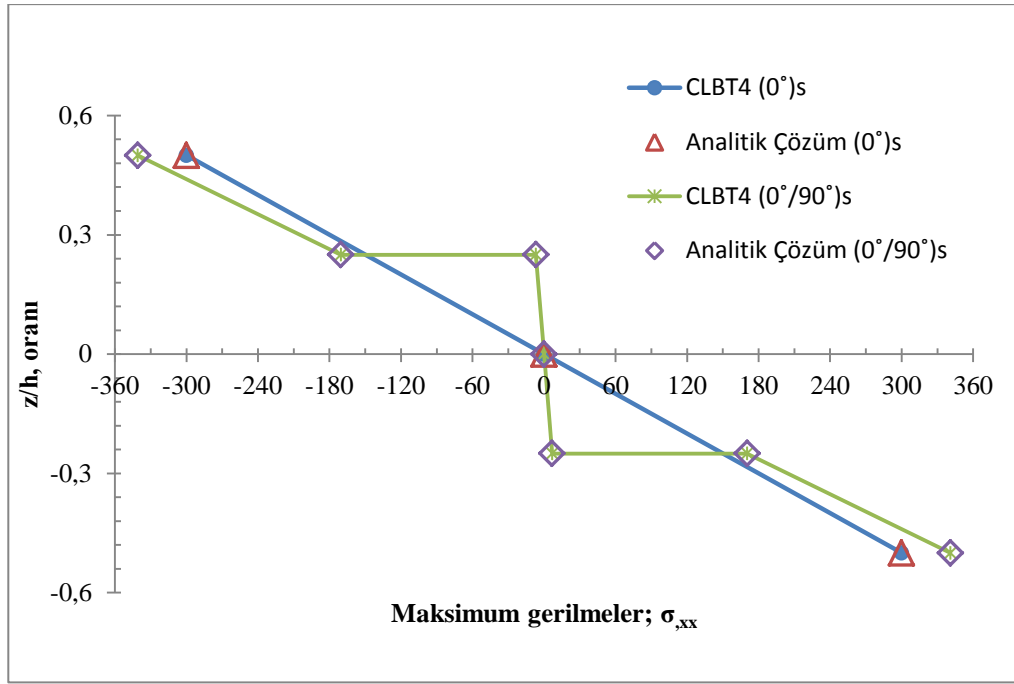
FSDT kirişi için bulunan boyutsuz çökme değerleri ise karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.11.'de verilmiştir.

Çizelge 4.11. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest, simetrik FSDT8 kirişi için bulunan çökme değerleri

L/h=10 için FSDT8 Kirişi maksimum boyutsuz çökme değeri; (\bar{w})								
	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)
CF	7,20	7,20	153	153	8,531	8,520	39,21	39,147

Çözüm sonuçlarının analitik çözüm sonuçları ile hemen hemen aynı çıktığı görülmektedir.

Bir ucu ankastre diğer serbest mesnetli kirişteki z/h koordinatına bağlı gerilmelerin eğrisel değişimi Şekil 4.15.'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



Şekil 4.15. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest mesnetli CLBT kirişin gerilme değerleri eğrisi

Şekil 4.15.'de görüldüğü gibi çalışma sonucu bulunan gerilme değerleri ile analitik çözüm sonucu bulunan değerlerin üst üste düşmektedir.

Yapılan analizlerde bulunan karşılaştırmalı yer değiştirme, moment ve serbest titreşim frekansı büyüklüklerinin yanı sıra, kullanılan Karışık sonlu elemanlar metodunun avantajlarından faydalanarak kesme kuvveti ve dönme büyüklükleri de hesaplamalar sırasında tek seferde bulunmuştur. Bu sonuçların bazıları Çizelge 4.12. de gösterilmektedir.

Çizelge 4.12. Mesnet tiplerine göre maksimum boyutsuz kesme kuvveti ve dönme değerleri ($E_1/E_2=25$; $L/h=10$)

FSDT8 kirişi maksimum kesme kuvveti (Q) ve dönme (θ) büyüklükleri								
Mesnet	$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
	Q	θ	Q	θ	Q	θ	Q	θ
SS	0,05	2,00	0,05	50,13	0,05	2,27	0,05	12,53
CC	0,05	0,389	0,05	9,74	0,05	0,44	0,05	2,43
CF	0,05	7,96	0,05	199	0,05	9,04	0,05	49,75

Literatürde bulunan çalışmalarda kullanılan yöntemlerde sadece moment ve yer değiştirme büyüklükleri hesaplanabildiği için kesme ve dönme değerleri bulunmamaktadır. Bu çalışmada bulunan değerler analitik çözüm sonuçları ile kontrol edilmiş ve sonuçlar aynı çıkmıştır (İnan, 1988).

4.2. Dinamik Analiz

Bu bölümde farklı sınır koşullarına sahip, düzgün kesitli, yayılı yük etkisi altındaki CLBT ve FSDT kirişlerinin serbest titreşim frekansları araştırılmıştır. Araştırmalarda nümerik sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar literatürde ki diğer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Analizler sırasında bulunan frekans değerleri (4.3)'de gösterilen formül yardımıyla boyutsuz hale getirilmiştir (Reddy, 2004).

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{I_0}{E_2 h^3}} \quad I_0 = \rho h \quad (4.3)$$

Farklı sınır koşulları ve açılı tabakalı CLBT kirişlerine ait serbest titreşim frekanslarının ilk 3 mod değeri literatürde ki çalışma sonuçları ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.13. ve Çizelge 4.14.'de verilmiştir.

Çizelge 4.13. Simetrik $(0^\circ)_s$ ve $(90^\circ)_s$ CLBT4 kirişinin farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim değerleri ve karşılaştırması ($E_1/E_2=25$; $L/h=10$)

L/h=10		$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$	
		CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)
SS	$\bar{\omega}_1$	14,274	14,263	2,854	2,852
	$\bar{\omega}_2$	57,216	-	11,443	-
	$\bar{\omega}_3$	129,19	-	25,839	-
CC	$\bar{\omega}_1$	32,362	32,332	6,472	6,466
	$\bar{\omega}_2$	89,424	-	17,89	-
	$\bar{\omega}_3$	175,97	-	35,194	-
CF	$\bar{\omega}_1$	5,081	5,080	1,016	1,016
	$\bar{\omega}_2$	31,874	-	6,375	-
	$\bar{\omega}_3$	89,458	-	17,89	-

Çizelge 4.14. Simetrik $(0^\circ/90^\circ)_s$ ve $(90^\circ/0^\circ)_s$ CLBT4 kirişinin farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim değerleri ve karşılaştırması ($E_1/E_2=25$; $L/h=10$)

L/h=10		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
		CLBT4	Reddy(2004)	CLBT4	Reddy(2004)
SS	$\bar{\omega}_1$	13,390	13,375	5,709	5,703
	$\bar{\omega}_2$	53,673	-	22,886	-
	$\bar{\omega}_3$	121,20	-	51,678	-
CC	$\bar{\omega}_1$	30,358	30,320	12,945	12,929
	$\bar{\omega}_2$	83,887	-	35,77	-
	$\bar{\omega}_3$	165,08	-	70,389	-
CF	$\bar{\omega}_1$	4,766	4,764	2,032	2,032
	$\bar{\omega}_2$	29,901	-	12,750	-
	$\bar{\omega}_3$	83,919	-	35,783	-

Yapılan çözümlerin sonuçları ile literatürde ki çözüm sonuçlarının hemen hemen aynı çıktığı görülmektedir.

FSDT8 kirişine ait çözümlerin sonuçları ise Çizelge 4.15. ve Çizelge 4.16.' da farklı mesnet koşulları için ve açılar için gösterilmektedir.

Çizelge 4.15. Simetrik $(0^\circ)_s$ ve $(90^\circ)_s$ FSDT8 kirişinin farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim değerleri ve karşılaştırması ($E_1/E_2=25$; $L/h=10$)

L/h=10		$(0^\circ)_s$		$(90^\circ)_s$	
		FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)
SS	$\bar{\omega}_1$	11,667	11,635	2,784	2,771
	$\bar{\omega}_2$	33,056	-	10,426	-
	$\bar{\omega}_3$	54,973	-	21,355	-
CC	$\bar{\omega}_1$	17,225	17,212	5,785	5,761
	$\bar{\omega}_2$	35,380	-	14,319	-
	$\bar{\omega}_3$	56,049	-	25,125	-
CF	$\bar{\omega}_1$	4,570	4,528	1,004	1,004
	$\bar{\omega}_2$	19,756	-	5,905	-
	$\bar{\omega}_3$	25,502	-	8,290	-

Çizelge 4.16. Simetrik $(0^\circ/90^\circ)_s$ ve $(90^\circ/0^\circ)_s$ FSDT8 kirişinin farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim değerleri ve karşılaştırması ($E_1/E_2=25$; $L/h=10$)

L/h=10		$(0^\circ/90^\circ)_s$		$(90^\circ/0^\circ)_s$	
		FSDT8	Reddy(2004)	FSDT8	Reddy(2004)
SS	$\bar{\omega}_1$	10,506	10,488	5,407	5,405
	$\bar{\omega}_2$	28,658	-	18,937	-
	$\bar{\omega}_3$	46,882	-	36,147	-
CC	$\bar{\omega}_1$	14,843	14,837	10,316	11,530
	$\bar{\omega}_2$	30,192	-	23,737	-
	$\bar{\omega}_3$	47,569	-	39,683	-
CF	$\bar{\omega}_1$	4,184	4,132	1,980	1,991
	$\bar{\omega}_2$	17,281	-	10,869	-
	$\bar{\omega}_3$	22,023	-	14,955	-

Çözüm sonuçlarının analitik çözüm sonuçlarıyla benzer çıktığı görülmektedir.

Literatürde bulunan birçok çalışmada farklı malzeme özellikleri kullanılarak çözümler yapılmıştır. Chandrasekhara ve ark.; (1990) tarafından yapılan benzer bir FSDT çalışmasında, malzeme özellikleri: $E_1=144,84$ GPa; $E_2=9,65$ GPa; $G_{13}=4,14$ GPa; $G_{23}=3,45$ GPa, $\nu_{12}=0,3$; $\rho=1389,23$ kg/m³; $L/h=15$ alınarak farklı sınır koşullarına sahip simetrik çapraz tabakalı $(0^\circ/90^\circ)_s$ kiriş için yapılan titreşim analizi sonuçları ile bu çalışmanın çözüm sonuçları çizelge 4.17.'de verilmiştir.

Çizelge 4.17. Simetrik çapraz tabakalı $(0^\circ/90^\circ)_s$ FSDT8 kirişinin farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim değerleri ve karşılaştırması ($E_1=144,8$ GPa; $E_2=9,65$ GPa ; $L/h=15$)

FSDT8 kirişi serbest titreşim frekansı simetrik çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$; ($\bar{\omega}$)								
Mesnet	Mod1		Mod2		Mod3		Mod4	
	FSDT8	Chan.1990	FSDT8	Chan.1990	FSDT8	Chan.1990	FSDT8	Chan.1990
SS	2,505	2,502	8,505	8,481	15,803	15,756	23,366	23,309
CC	4,597	4,594	10,310	10,291	17,005	16,966	24,096	24,041
CS	3,529	3,525	9,464	9,442	16,427	16,384	23,747	23,685
CF	0,924	0,924	4,910	4,892	11,496	11,440	18,794	18,697

Sayısal sonuçların her iki çalışmada da benzer çıktığı görülmektedir.

Abramovich ve Livshits (1994) yılında yaptıkları çalışmada; malzeme özelliklerini: $E_1=14.5 \cdot 10^{10}$ N/m²; $E_2=0.96 \cdot 10^{10}$ N/m²; $G_{13}=0.41 \cdot 10^{10}$ N/m²; $G_{23}=0.34 \cdot 10^{10}$ N/m², $\nu_{12}=0.3$; $\rho=1389.23$ kg/m³; $L/h=10$ olarak farklı sınır koşullarına sahip simetrik çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$ kirişin, FSDT ye göre serbest titreşim analizini

hesaplamışlardır. Aynı malzeme özelliklerini kullanarak yapılan çözüm sonuçları ve karşılaştırması Çizelge 4.18.'de verilmiştir.

Çizelge 4.18. Simetrik çapraz tabakalı $(0^\circ/90^\circ)_s$ FSDT8 kirişinin farklı sınır koşullarına göre serbest titreşim değerleri ve karşılaştırması ($E_1=14,5 \cdot 10^{10}$ N/m²; $E_2=0,96 \cdot 10^{10}$ N/m² ; L/h=10)

FSDT8 kirişi serbest titreşim frekansı simetrik çapraz tabaka $(0^\circ/90^\circ)_s$; $(\bar{\omega})$						
Mod	SS		CF		CC	
	FSDT8	Abram.1994	FSDT8	Abram.1994	FSDT8	Abram.1994
1	2,320	2,319	0,887	0,882	3,687	3,757
2	6,998	7,002	4,129	4,026	7,736	7,871
3	12,007	12,037	8,995	9,108	12,380	12,573
4	16,95	17,015	13,958	14,08	17,134	17,373
5	21,803	21,907	18,927	19,066	21,909	22,200
6	26,588	26,736	23,795	23,938	26,651	27,254

FSDT ye göre yapılan her iki çalışma sonuçlarının birbiriyle üst üste düştüğü görülmektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; sabit kesitli, uniform yayılı yük etkisi altındaki tabakalı kompozit kirişlerin Euler-Bernoulli (CLBT) ve Timoshenko (FSDT) kiriş teorilerine dayalı statik ve dinamik analizleri karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak incelenmiştir. Her iki kiriş teorisine ait dinamik ve geometrik sınır koşullarını içeren fonksiyoneller Gâteaux diferansiyel metodu kullanılarak elde edilmiştir. Bu fonksiyonellerin elde edilmesi için gerekli olan alan denklemleri virtüel yer değiştirme ilkesine dayanarak bulunmuştur.

Kompozit kirişler için elde edilen fonksiyonellere uygulama olmak üzere Euler-Bernoulli kirişi için eğilme momenti ve çökme değerlerinin bilinmeyen olarak alındığı 4 serbestlik dereceli, Timoshenko kirişi için eğilme momenti, çökme, kesme kuvveti ve dönmenin bilinmeyen olarak alındığı 8 serbestlik dereceli CLBT4 ve FSDT8 sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir.

CLBT4 ve FSDT8 kiriş elemanları için sonlu eleman çözümlerinde kullanılan eleman alt matrislerinin hesabı FORTRAN 4.0 programı ile yapılmıştır.

Gâteaux diferansiyel metodunun avantajlarını vurgulamak için kompozit kirişlere ait kesme kuvveti, eğilme momenti, çökme ve dönme büyüklükleri aynı anda elde edilmiştir.

Yapılan sayısal çözümlerin sonuçları literatürde bulunan benzer çalışmaların ve analitik çözümlerin sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmalarda sonuçların birbirleriyle üst üste düştüğü görülmüştür.

Bu çalışmanın amacı ve verimliliği yönünden elde edilen sonuçları özetleyecek olursak;

- I. Gâteaux diferansiyel metodu, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı sabit kesitli kompozit kirişler için başarılı bir şekilde uygulanmıştır ve iki farklı fonksiyonel elde edilmiştir.
- II. Bu yöntem ile farklı açılara sahip simetrik kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizleri başarılı bir şekilde yapılmıştır.
- III. Gâteaux diferansiyel metodu aşağıdaki avantajları sağlamaktadır;
 - Alan denklemleri birbiri ile uyumludur
 - Sistematik bir yolla fonksiyonellerden sınır koşulları terimleri kolaylıkla elde edilebilir.

- IV. Formülasyonun kompozit kirişlerin titreşim problemlerine de uygulanabilirliği gösterilmiştir.
- V. Statik analizlerde Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı kompozit kirişlerin farklı mesnet durumları için;
- Eleman sayısına bağlı olarak maksimum yer değiştirmeler için yaklaşım testleri yapılmıştır, sonuçların analitik çözüm sonuçları ile birebir örtüştüğü görülmüştür.
 - Tek tabaka ve çapraz tabakalı kompozit kirişlerin maksimum çökme, moment ve gerilme değerleri hesaplanmış, sonuçlar literatür sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar birbirleri ile benzer çıkmıştır.
 - Elastisite modülü oranlarına göre maksimum çökme değerlerinin değişimi incelenmiştir. Elastisite modülü oranının artması ile çökme değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Sonuçlar literatür sonuçları ile de karşılaştırılmıştır.
 - L/h oranındaki değişime göre maksimum çökme değerlerinin değişimi incelenmiştir. L/h oranının artması ile çökme değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Sonuçlar literatür sonuçları ile de karşılaştırılmıştır.
 - Analizlerde FSDT8 kiriş elemanı için moment ve çökmenin yanında kesme kuvveti ve dönme değerleri tek tabaka ve çapraz tabakalı kirişler için bulunmuştur. Sonuçlar analitik çözüm sonuçları ile uyumaktadır.
 - Analizlerde Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayalı kompozit kirişlerin Timoshenko teorisine dayalı kompozit kirişlerden daha az yer değiştirme yaptığı görülmüştür.
 - Analizlerde tek tabaka kompozit kirişlerden $(0^\circ)_s$ açılı kirişin $(90^\circ)_s$ açılı kirişten daha az çökme yaptığı; çapraz tabakalı $(0^\circ/90^\circ)_s$ açılı kirişin $(90^\circ/0^\circ)_s$ açılı kirişten daha az çökme yaptığı görülmüştür.
- VI. Dinamik analizlerde, Euler-Bernoulli Timoshenko kiriş teorilerine dayalı kompozit kirişlerin serbest titreşim frekansları farklı mesnet durumlarına göre, tek tabaka ve çapraz tabakalı kompozit kirişler için hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar literatür sonuçları ile kıyaslanmış ve birbiriyle benzer

sonuçlar elde edilmiştir. Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayalı kompozit kirişlerin serbest titreşim frekanslarının Timoshenko kiriş teorisine dayalı kompozit kirişlerin serbest titreşim frekanslarından yüksek çıktığı gözlemlenmiştir.

Bundan sonra ki çalışmalarda farklı tipte ki elemanlarda ve yüksek mertebe teorilerde problem çözümleri yapılarak çalışmalara devam edilmesi düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abramovich, H., Livshits, A., 1994, Free vibration of non-symmetric cross-ply laminated composite beams, *Journal of Sound and Vibration*, 176 (5), 597-612
- Ahmed, N. U., Basu, P. K., 1994, Higher-order finite element modelling of laminated composite plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 123-139
- Aköz, A. Y., 1985, Çubuklar için yeni enerji fonksiyonelleri ve uygulamaları, *V. Ulusal Mekanik Kongresi, İTÜ*
- Aköz, A.Y., Omurtag, M. H. and Doğruoğlu, A. N., 1991, The mixed finite element formulation for three dimensional bars, *International Journal Of Solids and Structures in Engineering*, 28, 225-234
- Aköz, A. Y., Kadioğlu, F., 1996, The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Computers and Structures*, 60 (4), 643-651
- Aköz, A. Y., Kadioğlu, F., 1999, The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 1909-1932
- Aköz, A. Y., Özütok, A., 2000, A functional for shells of arbitrary geometry and a mixed finite element method for parabolic and circular cylindrical shells, *International Journal For Numerical Method Engineering*, 47, 1933-1981
- Aköz, A. Y., Eratlı, N., 2002, Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element, *Structures Engineering and Mechanics*, 13(3), 277-298
- Anandakumar, G., Kim, J. H., 2010, On the modal behavior of a three-dimensional functionally graded cantilever beam: poisson's ratio and material sampling effects, *Composite Structures*, 92, 1358-1371
- Arslan, A., 2004, Varyasyonel türev yöntemi ile Euler-Bernoulli Kirişlerinin Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 1-7
- Aydoğdu, M., 2005, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 1740-1755
- Aydoğdu, M., 2006, Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25 (15), 1571-83
- Ayhan, B., Kadioğlu, F., 2008, Mixed finite element solution on the-out-of plane natural frequencies of composite circular beams, *5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Venice, Italy

- Banerjee, J.R., Williams, F. W., 1996, Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications, *Journal of Sound and Vibration*, 194, ---
- Bassiouni, A. S., Gad-Elrab, R. M. and Elmahdy, T. H., 1999, Dynamic analysis for laminated composite beams, *Composite Structures*, 44, 81-87
- Bergman, V. L., Mukherjee, S., 1990, A hybrid strain finite element for plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, 233-257
- Chakraborty, A., Mahapatra, D. R. and Gopalakrishnan, S., 2002, Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities, *Composite Structures*, 55, 23-36
- Chandrasekhara, K., Krishnamurthy, K. and Roy, S., 1990, Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear Deformation, *Composite Structures*, 14, 269-279
- Chen, A. T., Yang, T. Y., 1985, Static and dynamic formulation of symmetrically laminated beam finite element for a micro-computer, *Journal of Composite Materials*, 19, 459-475
- Dong, X. J., Meng, G., Li H. G. and Ye, L., 2005, Vibration analysis of a stepped laminated composite timoshenko beam, *Mechanics Research Communications*, 32, 572-81
- Eratli, N., Aköz, A.Y., 1997, The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations, *Computers and Structures*, 65:4, 515-529
- Eisenberger, M., 2003, Dynamic stiffness vibration analysis using a high-order beam model, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 57, 1603-1614
- Heyliger, P.R., Reddy, J.N., 1988, A higher order beam finite element for bending and vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, 126:2, 309-326
- Jones, R. M., 1999, Mechanics of composite materials, 24061-0219, *Taylor and Francis, INC, Blacksburg, Virginia*, 13-234
- Jun, L., Hongxing, H., Rongying, S., 2008, Dynamic stiffness analysis for free vibration of axially loaded laminated composite beams, *Composite Structures*, 84, 87-98
- Jun, L., Hongxing, H. and Rongying, S., 2008, Dynamic finite element method for generally laminated composite beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 466-480
- Jun, L., Hongxing, H., 2009, Dynamic stiffness analysis of laminated composite beams using trigonometric shear deformation theory, *Composite Structures*, 89, 433-442
- Kapania, R. K., Raciti, S., 1989, Recent advances in analysis of laminated beams and plates, *American Institute of Astronautics Journal*, 27, 935-946

- Khedir, A. A., Reddy, J. N., 1997, An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams, *Composite Structures*, 37, 195-203
- Krishnaswamy, S., Chandrashekhara, K. and Wu, W. Z. B., 1992, Analytical solutions to vibration of generally layered composite beams, *Journal of Sound and Vibration*, 159 (1), 85-99
- Maiti, D. K., Sinha, P. K., 1994, Bending and free vibration analysis of shear deformable laminated composite beams by finite element method, *Composite Structures*, 29, 421-31
- Marur, S. R., Kant, T., 1996, Free vibration analysis of fiber reinforced composite beams using higher order theories and finite element modelling, *Journal of Sound and Vibration*, 194(3), 337-51
- Matsunaga, H., 2001, Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher-order deformation theories, *Journal of Sound and Vibration*, 246 (1), 47-62
- Mawenya, A. S., Davies, J. D., 1974, Finite element bending analysis of multilayer plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8, 215-225
- Miller, A. K., Adams, D. F., 1975, Analytic means of determining the flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams, *Journal of Sound and Vibration*, 41, 433-449
- Nabi, S. M., Ganesan, N., 1994, A generalized element for the free vibration analysis of composite beam, *Computers and Structures*, 51, 607-10
- Oden, J. T., Reddy, L. N., 1976, Variational methods in theoretical mechanics, *Springer-Verlag*
- Omurtag, M. H., Aköz, A.Y., 1993, A compatible cylindrical shell element for stiffened cylindrical shells in mixed finite element formulation, *Computers and Structures*, 49(2), 363-70
- Omurtag, M. H., Kadioğlu, F., 1998, Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation, *Computers and Structures*, 67, 253-265
- Omurtag, M. H., 2001, Tabakalı kompozit plakların karışık SEM ile statik analizi, *İMO Teknik Dergi*, 160, 2317-2330
- Omurtag, M. H., 2007, Mukavemet, *Birsen Yayınevi*, Cilt2, İstanbul, 94-105
- Omurtag, M. H., 2010, Çubuk Sonlu Elemanlar, *Birsen Yayınevi*, 1. Baskı, İstanbul
- Özçelikörs, Y., Omurtag, M. H., Demir, H., 1997, Analysis of orthotropic plate foundation interaction by mixed finite element formulation using Gâteaux Differential, *Computers and Structures*, 62(1), 93-106

- Özütok, A., 1999, Genel kabuklara ait fonksiyonel ve parabolik silindir kabuklar için karışık sonlu eleman formülasyonu, Doktora tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 1-5
- Rao, M.K., Desai, Y.M. and Chitnis, M.R., 2001, Free vibration of laminated beams using mixed theory, *Composite Structures*, 52, 149-160
- Reddy, J. N., Wang, C. M. and Lee, K. H., 1997, Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories, *International Journal Solids Structures*, 26, 3373-3384
- Reddy, J. N., 2004, Mechanics of laminated composite plate and shells: theory and analysis, 2nd ed. Boca Rotan, *CRC Press*, 49-200
- Robbins, D. H., Reddy, J. N. and Reddy, J. R., 1993, Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 655-677
- Shi, G., Lam, K. Y., 1999, Finite element vibration analysis of composite beams based on higher-order beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, 219, 707-721
- Subramanian, P., 2006, Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements, *Composite Structures*, 73, 342-353
- Teoh, L. S., Huang, C. C., 1977, The vibration of beams of fibre reinforced material, *Journal of Sound and Vibration*, 51, 467-473
- Vinson, J. R., Sierakowski, R. L., 1986, Behaviour of structures composed of composite materials, *Martinuss Nijhoff*
- Xu, R., Wu, Y., 2007, Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam Theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 1139-1155
- Yıldırım, V., Sancaktar E. and Kırıl, E., 1999, Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15, 651-60
- Yıldız, A., Eröz, M., 2006, Sonlu elemanlar yöntemi ile kompozit bir plaktaki yer değiştirme ve gerilme analizi, *SA.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2 (10), 24-30
- Zhang, Y. X., Yang, C. H., 2009, Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates, *Composite Structures*, 88, 147-157
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1989, The finite element method, *Vol.1, Singapore: McGraw-Hill*
- Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y. K., 1970, The finite element method in structural and continuum mechanics, *McGraw-Hill, New York*

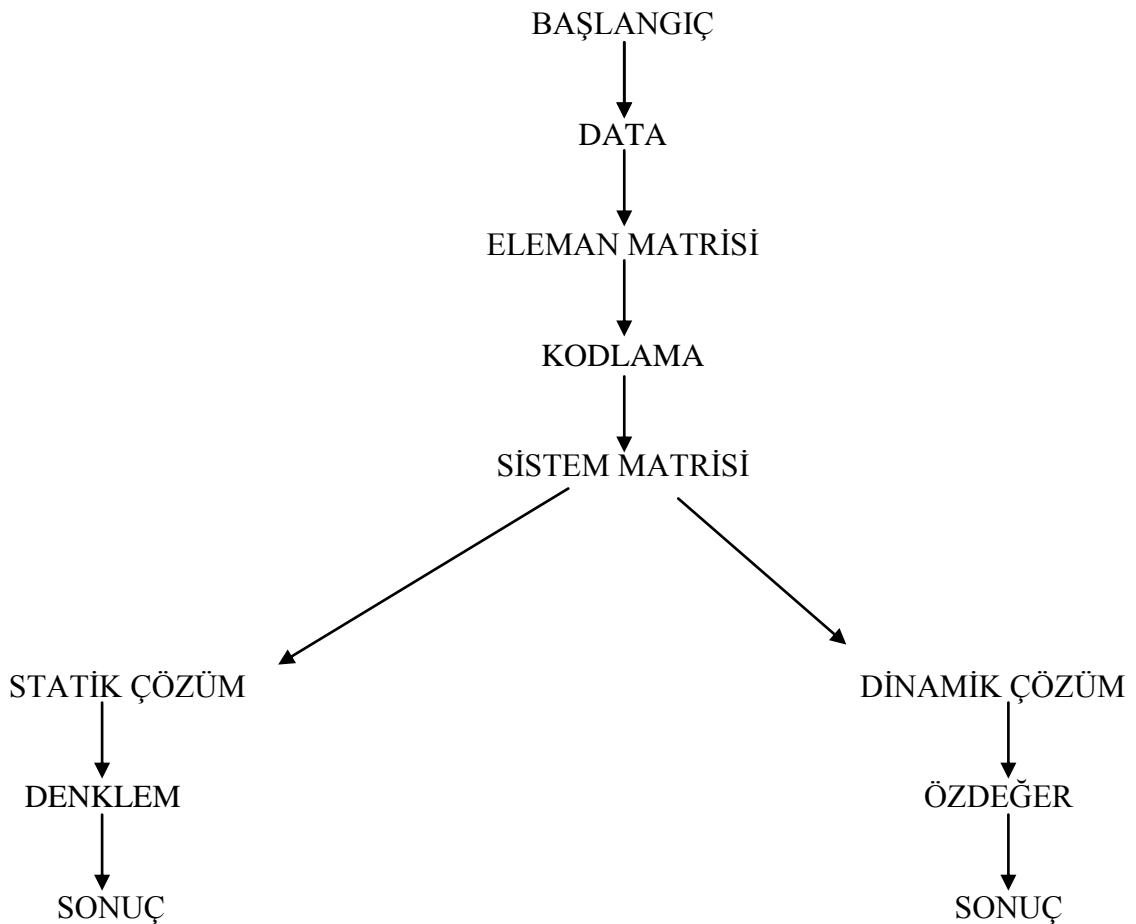
EKLER

EK-1 Euler-Bernoulli Kirişli Statik Analizin Fortran Programında Yazılımı

Sabit kesitli, uniform yayılı yük etkisi altındaki lamine kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizleri Fortran Power Station 4.0 programı yardımı ile gerçekleştirilmiştir. Gâteaux diferansiyel metodu ile elde edilen fonksiyonellere uygulanan karışık sonlu elemanlar yöntemi sonucu bulunan eleman matrislerinin çözümü, yazılan bu programla yapılmıştır.

Program genel olarak dört dosyadan oluşmaktadır. Bunlar; “.Dat” uzantılı iki adet veri dosyası, “.For” uzantılı programın yazıldığı dosya ve son olarak “.Son” uzantılı sonuç dosyasıdır.

Programa ait akış şeması Şekil EK-1.1.’de gösterilmektedir.



Şekil EK-1.1. Programa ait akış şeması

Fortran 4.0 ortamında bilgisayar programının nasıl yapıldığını göstermesi açısından, programın başlangıç kısmından alınan küçük bir kısım Şekil EK-1.2’de gösterilmektedir.

```

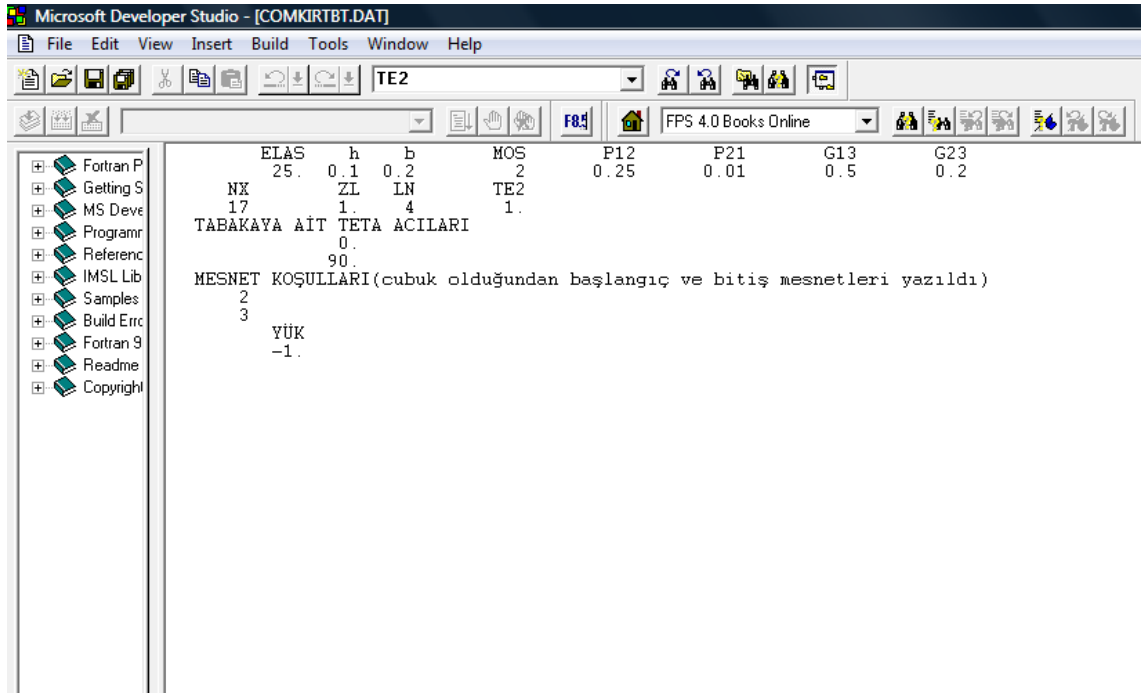
Microsoft Developer Studio - [COMKIRIS.for *]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
TE2
FPS 4.0 Books Online

C      EULER-BERNOULLI KIRISLARI STATIK ANALIZ
C      DEGISKEN SAYISI 2
C      =====Eğilme etkisi altındaki Kompozit Kiriş problemi=====
C      =====16.04.2010      saat:13.00      =====
C
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DIMENSION COR(100),NODE(100,2),JDEG(100,2),MTK(2)
C      *          SE(4,4),S(400000),GM(500,500),YM(4),NCODE(4),JO(2)
C      *          ,ICOMMTP(10,2),Z(10),TETA(10)
C
C      OPEN (UNIT=6,FILE='COMKIRIS.SON',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
C      OPEN (UNIT=5,FILE='COMKIRIS.DAT',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
C      OPEN (UNIT=2,FILE='ICOMMTP.DAT',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
C      DATA MDUG,MAXB,MDIK,MAXS/50,15,70,100000/
C
C
C      -----
C      MDUG : MAKSIMUM DUGUM NOKTASI SAYISI
C      MST  : BIR DUGUM NOKTASINDAKI BILINMEYEN SAYISI
C      MDIK : MAKSIMUM ELEMAN SAYISI
C      MDEG : MAKSIMUM DEGISKEN SAYISI
C      ISMTP : MESNET TIPLERI
C      MTK  : MESNET TIPI VE KOSULU
C      NJT  : BIR ELEMANDAKI DUGUM NOKTASI SAYISI
C      MOS  : OZEL MESNET SAYISI
C      MTS  : MESNET TIPI SAYISI
C
C      -----
C      TOL=0.000000000001
C      NULL=0
C      MST=2
C      NJT=2
C      MS=MST*NJT
C      NYUK=1
C      MTS=3
C
C      CALL COMDGM(COR,E,h,b,P12,P21,AA,NULL,NODE,JDEG,MST,
C      *          ND,MTS,MTK,ME,NS,ICOMMTP,LN,TETA)
C      CALL COMRJTLC(E,h,b,P12,P21,AA,SE,LN,Z,TETA)
C      CALL COMSYS(NODE,ME,SE,MST,NJT,NCODE,JO,JDEG,GM,NS,YM,S,
C      *          NYUK,AA)
C
C

```

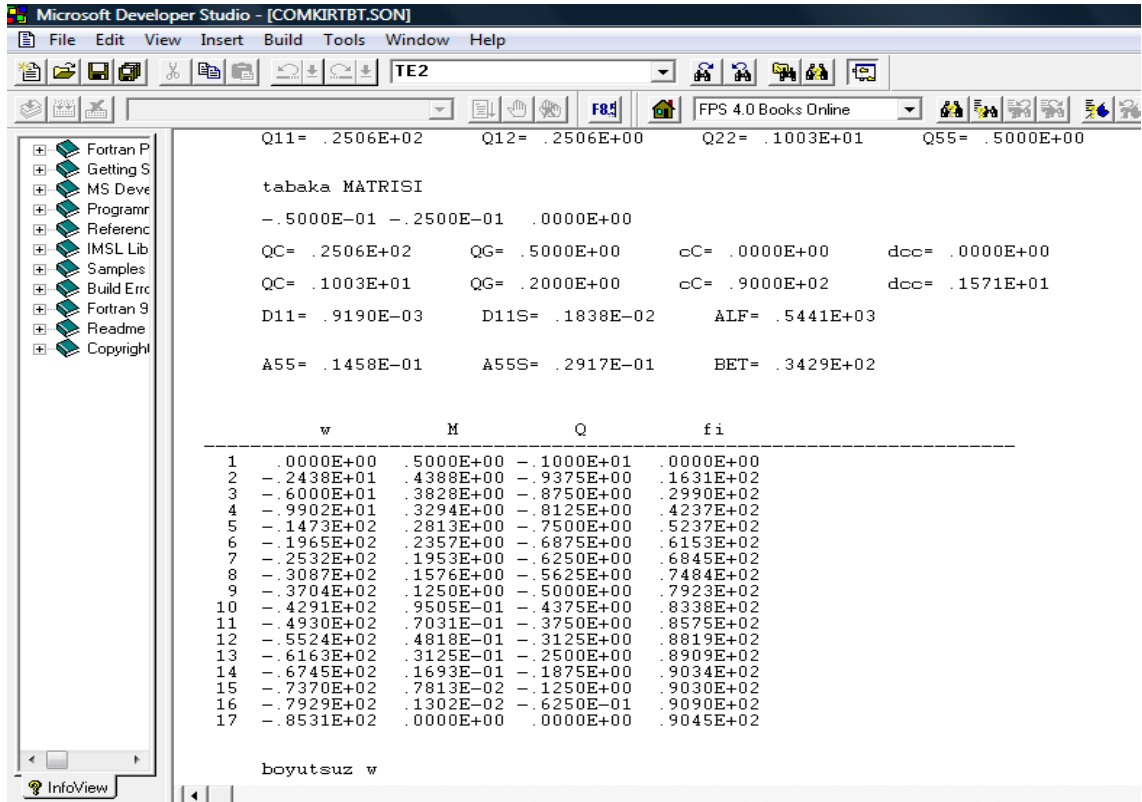
Şekil EK-1.2. Ana programdan alınan pencere

Analize başlamadan önce istenilen bilgilerin girdisi “.Dat” uzantılı alt programla gerçekleştirilir. Malzeme sabitleri (elastisite modülü, poisson oranı, kayma modülü v.b.), kiriş kalınlığı, mesnet tipi, tabaka açıları, eleman sayısı doğrultusunda oluşturulacak sonlu eleman matrisinin alt data girişi yapılır. Örnek olarak Şekil EK-1.3.’de programdan bir alıntı gösterilmektedir.



Şekil EK-1.3. Data alt programı veri girişi

Analiz sonunda sonuç dosyasında yer alan verileri göstermek amacıyla Şekil EK-1.4.'de programdan bir alıntı gösterilmiştir.



Şekil EK-1.4. Sonuç dosyası

EK-2 Azaltılmış Rijitlik ve Dönüşüm Matrisi İfadeleri

Denklem (3.45) de kullanılan azaltılmış rijitlik ifadesinin açık hali EK-2.1'de tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, & Q_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_{12}^{(k)}E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, & Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)}, & Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}, & Q_{55}^{(k)} &= G_{13}^{(k)} \end{aligned} \quad (\text{EK-2.1})$$

Denklem (3.46) da kullanılan dönüşüm matrislerinin açık hali EK-2.2'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{EK-2.2})$$

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Emrah Madenci
Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Yeri ve Tarihi : Antakya 17/04/1984
Telefon : +90 554 749 9512
Faks : ---
e-mail : emrahmadenci@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Silifke Anadolu Lisesi, Silifke, Mersin	2002
Üniversite	: Çukurova Üniversitesi, Adana	2006
Yüksek Lisans	:	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2005-2006	Genel Müh.Ltd.Şti	Proje Mühendisi
2006-2008	Alyap Yapı Den.Ltd.Şti	Kontrol Mühendisi
2008-	Konya Büyükşehir Belediyesi	İnşaat Mühendisi

UZMANLIK ALANI

Betonarme hesap ve uygulama; Çelik hesap ve uygulama; Yapıların deprem analizi

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Static and Dynamic Analysis of Composite Beams by Mixed Finite Element Formulation, 2010, 9th International Congress on Advances in Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Trabzon, Turkey

Çapraz Tabakalı Kompozit Kirişlerin Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Dinamik Analizi, 2011, 17^{nci} Ulusal Mekanik Kongresi (TUMTMK), Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye