ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

REKÜRANS BAĞINTILAR VE RASYONEL YAKLAŞIMLAR

Elif TAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

19/01/2015

Elif TAN

ÖZET

Doktora Tezi

REKÜRANS BAĞINTILAR VE RASYONEL YAKLAŞIMLAR

Elif TAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde rekürans bağıntılar hakkında genel bilgiler verilmiştir ve periyodik rekürans bağıntılar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde sürekli kesirler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Daha sonra sürekli kesirler ile continuantlar arasındaki ilişki anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde periyodik sürekli kesirlerin yakınsaklığı ve periyodik rekürans bağıntılar ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Periyodik rekürans dizilerin bazı terimlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Son olarak periyodik rekürans bağıntılar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç bölümüne ayrılmıştır.

Ocak 2015, 83 sayfa

Anahtar Kelimeler: Rekürans bağıntılar, rasyonel yaklaşımlar, sürekli kesirler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

RECURRENCE RELATİONS AND RATIONAL APPROXIMATIONS

Elif TAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter general properties of recurrence relations and definition of periodic recurrence relations are given.

In the third chapter general properties of continued fractions are given. After, the relationship between continued fractions and continuants are given.

In the fourth chapter the convergence of periodic continued fractions and the relationship between periodic recurrence relations are investigated. The convergence properties of the ratios of some terms of the periodic recurrence sequences are investigated. Finally, some results on the periodic recurrence relations are obtained.

The fifth chapter is devoted to the discussion and conclusion section.

January 2015, 83 pages

Key Words: Recurrence relations, rational approximations, continued fractions.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her zaman destek olan danışman hocam Prof. Dr. Ali Bülent EKİN (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'e, çalışmalarım sırasında benden bilgi ve önerilerini esirgemeyen hocam Doç. Dr. Murat ŞAHİN (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'e ve çalışmalarım süresince benden anlayışını esirgemeyen ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan değerli aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Elif TAN
Ankara, Ocak 2015

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere reel sayılar, rasyonel terimli Cauchy dizilerinin limit noktası olarak tanımlanırlar. Dolayısıyla bir reel sayı verildiğinde bu reel sayıya yakınsayan bir rasyonel dizi inşa etmek önemli matematik problemlerinden biridir. Bu problem literatürde *rasyonel yaklaşım* problemi olarak bilinmektedir. Verilen bir reel sayının rasyonel yaklaşımları, sürekli kesirler yardımıyla elde edilebilir.

Bu tezde amacımız, bir genel sürekli kesir verildiğinde bu sürekli kesirin ne tür bir reel sayıya yakınsayacağını bulmak ve sürekli kesirin yaklaşımlarından elde edilen bağıntıları göz önüne alarak tanımlanan dizilerin yakınsaklık özelliklerini incelemektir. Bu problem oldukça genel olup, biz bu çalışmada özel durumlarda çözüm arayacağız. Bahsettiğimiz amaçlar doğrultusunda, sürekli kesirin ne tür bir reel sayıya yakınsayacağını bulmak reel sayıların tasnifi açısından oldukça önemlidir. Ayrıca bu çalışmada bulunacak sonuçlar bilgisayarlarda sayı temsili problemine de önemli katkı sağlayacaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde rekürans bağıntılar hakkında genel bilgiler verilecek ve periyodik rekürans bağıntılar tanıtılacaktır. Üçüncü bölümde sürekli kesirler hakkında genel bilgiler verilecektir. Daha sonra sürekli kesirler ile continuantlar arasındaki ilişki anlatılacaktır. Dördüncü bölümde periyodik sürekli kesirlerin yakınsaklığı ve periyodik rekürans bağıntılar ile arasındaki ilişki incelenecektir. Periyodik rekürans dizilerin bazı terimlerinin oranlarının yakınsaklığı üzerinde elde edilen sonuçlar verilecektir. Son olarak periyodik rekürans bağıntılar üzerinde bazı sonuçlar elde edilecektir. Beşinci bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bir dizi tanımlamak için en etkili yollardan biri, rekürans bağıntılar yardımı ile diziyi tanımlamaktır. Rekürans bağıntılar, dizinin her bir teriminin kendisinden önceki terimlere bağlı olarak ifade edilmesiyle oluşan bağıntılardır. Bu bölümde öncelikle lineer rekürans bağıntılar hakkında genel bilgiler verilecek ve sonra periyodik rekürans bağıntılar tanıtılacaktır.

2.1 Lineer Rekürans Bağıntılar

Bir rekürans bağıntının lineer olması, dizinin her bir teriminin kendisinden önceki terimlerin lineer kombinasyonu olarak ifade edilmesi demektir. Lineer rekürans bağıntılar homojen ve homojen olmayan lineer rekürans bağıntılar olmak üzere ikiye ayrılır. Bu tezde lineer homojen rekürans bağıntılar göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.1 (Lineer Homojen Rekürans Bağıntı) $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a_1, a_2, ...,$ $a_k \in \mathbb{R}$ ve $a_k \neq 0$ olsun. Her $n \geq k$ için,

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya sabit katsayılı lineer homojen rekürans bağıntı denir (Everest vd. 2003).

u_n terimi, dizinin kendisinden önceki k-tane terim ile ifade edildiğinden bu lineer rekürans bağıntının derecesi k dır.

Bir dizi tanımlayabilmek için, (2.1) şeklindeki bir lineer rekürans bağıntının $u_0, u_1, ...,$ u_{k-1} şeklinde k-tane başlangıç koşuluna sahip olması gerekir. O halde, bir lineer rekürans dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2 (Lineer Rekürans Dizisi) $u_0, u_1, ..., u_{k-1}$ başlangıç koşulları ile (2.1) homojen lineer rekürans bağıntısını sağlayan $\{u_n\}$ dizisine *lineer rekürans dizisi* denir (Everest vd. 2003).

Her ne kadar rekürans bağıntılar yardımı ile bir dizi tanımlamak etkili bir yol olsa da, bu dizi ile çalışmak kolay olmayabilir. Örneğin, Fibonacci dizisinin 1000. terimini hesaplamak için $F_0, F_1, F_2, ..., F_{999}$ terimi hesaplamak gerekir. Dolayısıyla dizinin genel terimini veren bir formül inşa etmek çok önemlidir. Bu formülü elde etmek, lineer rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır. Bir lineer rekürans bağıntının çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

(2.1) bağıntısında, u_n yerine x^n yazılırsa;

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_k x^{n-k} \tag{2.2}$$

elde edilir.
(2.2) eşitliğinin her iki tarafı x^{n-k} ya bölünür ve ifade düzenlenirse;

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - ... - a_k = 0 \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.3) denklemine; (2.1) reküransının *karakteristik denklemi* denir.

$$p(x) := x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - ... - a_k \tag{2.4}$$

polinomuna ise (2.1) reküransının *karakteristik polinomu* denir.

λ_1, karakteristik polinomun bir kökü ise λ_1^n, (2.1) homojen lineer rekürans bağıntısını sağlar. Ayrıca $\{u_n\}$ ve $\{u'_n\}$ dizileri (2.1) homojen lineer rekürans bağıntısını sağlıyorsa bu dizilerin lineer kombinasyonu da yine (2.1) bağıntısını sağlar. O halde (2.1) denkleminin bütün çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

Teorem 2.1 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ karakteristik polinomun birbirinden farklı kökleri ve $A_1, A_2, ..., A_k$ sabit katsayılar olmak üzere karakteristik denklemin genel çözümü

$$u_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + ... + A_k\lambda_k^n \tag{2.5}$$

şeklindedir (Everest vd. 2003).

O halde lineer rekürans bağıntıyı çözmek karakteristik denklemin çözümlerinin bulunmasına ve reküransın başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde A_i katsayılarının belirlenmesine dayanır. Burada belirtilmelidir ki, karakteristik denklemin k-tane farklı çözümü olması durumunda bu metod kullanılır. Eğer karakteristik denklemin katlı kökü varsa durum değişir. Katlı kök durumunda genel çözümün nasıl bulunacağını ifade etmek için önce lineer rekürans dizisinin üreteç fonksiyonunun nasıl elde edileceğini açıklayalım.

Bilindiği üzere üreteç foksiyonları lineer homojen rekürans bağıntıları çözmek için en güçlü tekniklerden biridir.

$$p(x) := x^k - a_1x^{k-1} - ... - a_k$$

karakteristik polinomunun katsayılarının ters sırada yazılmasıyla elde edilen polinom

$$h(x) := 1 - a_1x - ... - a_kx^k$$

olmak üzere $\{u_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

Teorem 2.2 $\{u_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_nx^n$ olsun. Bu durumda $g(x)$, derecesi en fazla $k-1$ olan bir polinom olmak üzere

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \tag{2.6}$$

dir (Alf Van der Poorten 1989).

İspat. $m \geq k$ için,

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + ... + u_m x^m + ... \\ x f(x) &= u_0 x + u_1 x^2 + u_2 x^3 + ... + u_{m-1} x^m + ... \\ x^2 f(x) &= u_0 x^2 + u_1 x^3 + u_2 x^4 + ... + u_{m-2} x^m + ... \\ &\quad ... \\ x^k f(x) &= u_0 x^k + u_1 x^{k+1} + u_2 x^{k+2} + ... + u_{m-k} x^m + ... \end{aligned}$$

yazılabilir.

$f(x)$, $h(x)$ polinomu ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} & \left(1 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_k x^k\right) f(x) \\ = \; & u_0 + (u_1 - a_1 u_0) x + (u_2 - a_1 u_1 - a_2 u_0) x^2 \\ & + ... + (u_m - a_1 u_{m-1} - ... - a_k u_{m-k}) x^m + ... \end{aligned}$$

elde edilir. $\{u_n\}$, lineer rekürans dizisi olduğundan x^m nin katsayısı 0 dır. Geriye kalan polinoma $g(x)$ denilirse, $g(x)$ in derecesi en fazla $k-1$ olur ve

$$\left(1 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_k x^k\right) f(x) = g(x)$$

yazılabilir.

O halde $\{u_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - a_1 x - ... - a_k x^k}$$

olarak elde edilir.

Son olarak lineer homojen rekürans bağıntının çözümü üreteç fonksiyonu yardımıyla gösterilecektir.

Teorem 2.3 $t \leq k$ için, (2.4) karakteristik polinomunun birbirinden farklı kökleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ olsun. Her i $(1 \leq i \leq t)$ için, λ_i kökünün katlılık derecesi m_i, $m_i \geq 1$,

$m_1 + m_2 + ... + m_t = k$ ve $q_i(m)$, derecesi en fazla $m_i - 1$ olan polinom olmak üzere;

$$u_n = q_1(n)\lambda_1^n + q_2(n)\lambda_2^n + ... + q_t(n)\lambda_t^n \tag{2.7}$$

dir (Alf Van der Poorten 1989).

İspat. (2.4) karakteristik polinomunun birbirinden farklı kökleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ olduğundan

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} ... (x - \lambda_t)^{m_t}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$h(x) = (1 - \lambda_1 x)^{m_1}(1 - \lambda_2 x)^{m_2} ... (1 - \lambda_t x)^{m_t}$$

dir. Basit kesirlere ayırma metodu kullanılırsa,

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{i,j}}{(1 - \lambda_i x)^j}$$

olacak şekilde $A_{1,1}, ..., A_{1,m_1}; A_{2,1}, ..., A_{2,m_2}, ...; A_{t,1}, ... , A_{t,m_t}$ katsayıları bulunabilir.

$$\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{i,j}}{(1 - \lambda_i x)^j}$$

ifadesinde x^n nin katsayısı,

$$\sum_{j=1}^{m_i} A_{i,j}\binom{n+j-1}{j-1}\lambda_i^n =: q_i(n)\lambda_i^n$$

dir. Burada $q_i(n)$ derecesi en fazla $m_i - 1$ olan polinomdur. O halde

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_i} A_{i,j}\binom{n+j-1}{j-1}\lambda_i^n\right)x^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{t} q_i(n) \lambda_i^n \right) x^n$$

$$\Rightarrow u_n = \sum_{i=1}^{t} q_i(n) \lambda_i^n$$

dir.

Sonuç olarak,

$$u_n = q_1(n) \lambda_1^n + q_2(n) \lambda_2^n + ... + q_t(n) \lambda_t^n$$

elde edilir.

Fibonacci dizisi ve Lucas dizisi için karakteristik denklemin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

Örnek 2.1 Fibonacci dizisi $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ ve genel çözümü

$$x_n = A_1 \alpha^n + A_2 \beta^n \tag{2.8}$$

formundadır. Burada α ve β, $x^2 - x - 1$ karakteristik polinomunun kökleridir. Yani $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (altın oran) ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

A_1 ve A_2 katsayılarını bulmak için $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları (2.8) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) A_2 = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Cramer metodundan yararlanarak, $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $A_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ olarak bulunur.

O halde genel çözüm her $n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olarak elde edilir. Bu çözüm ilk kez Fransız matematikçi Binet tarafından 1843 yılında elde edildiğinden, bu çözüme Fibonacci sayıları için *Binet formülü* denir. Fibonacci dizisinde başlangıç koşullarının 2 ve 1 olarak değiştirilmesiyle elde edilen diziye ise Lucas dizisi denir ve $\{L_n\}$ ile gösterilir. Lucas dizisinin karakteristik denklemi ile Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi eşit olduğundan $L_0 := 2$ ve $L_1 := 1$ başlangıç koşulları (2.8) eşitliğinde yerine yazılırsa, Lucas dizisi için Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

olarak elde edilir.

Son olarak, Teorem 2.3' den Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

ve Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

olarak elde edilir (Vajda 1989, Koshy 2001).

2.2 Periyodik Rekürans Bağıntılar

Fibonacci dizilerinin çeşitli genelleştirmeleri bir çok yazar tarafından elde edilmiş ve elde edilen bu dizilerin özellikleri incelenmiştir (Horadam 1961, Krassimir vd. 1985, Vajda 1989, Koshy 2001, Falcon ve Plaza 2007).

Edson ve Yayenie (2009), Fibonacci dizilerinin yeni bir genelleştirmesini lineer rekürans dizilerinden farklı olarak k-tane bağıntıya sahip olacak şekilde tanımlamışlardır.

Fibonacci dizilerinin yeni bir genelleştirmesi olan bu diziler, lineer olmayan rekürans bağıntılarda kullanılan k-tane reel parametreye bağlı olarak tanımlanırlar. Lineer olmayan bu rekürans bağıntılara katsayıları sabit olmayan lineer rekürans bağıntılar gözüyle bakılabilecektir. Ayrıca bu dizilerin katsayıları sabit olacak şekilde bir lineer rekürans bağıntıyı sağladıkları gösterilecektir.

Bu dizilerin en genel hali "Koşullu Lineer Rekürans Dizileri" olarak isimlendirilmiştir (Panario vd. 2014). Bu tez boyunca bütünlük olması açısından, bu tip bağıntılara *periyodik rekürans bağıntılar* ve başlangıç koşulları ile birlikte bu bağıntıları sağlayan dizilere ise *periyodik rekürans dizileri* adı verilecektir.

Tanım 2.3 (k-Periyotlu Fibonacci Dizisi) $a_0, a_1, ..., a_{k-1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere, $q_0 := 0, q_1 := 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$$q_n := \begin{cases} a_0 q_{n-1} + q_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{k} \\ a_1 q_{n-1} + q_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod{k} \\ \vdots & \\ a_{k-1} q_{n-1} + q_{n-2}, & n \equiv k-1 \pmod{k} \end{cases} \tag{2.9}$$

bağıntısını sağlayan $\{q_n\}$ dizisine *k-periyotlu Fibonacci dizisi* denir (Edson vd. 2011).

Burada $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ in her farklı seçilişi için yeni bir dizi elde edilir. Örneğin; $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 1$ olarak alındığında Fibonacci dizisi, $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 2$ olarak alındığında Pell dizisi elde edilir.

Edson ve Yayenie (2009) tarafından, $k = 2$ durumu için $\{q_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \frac{x\left(1 + a_0 x - x^2\right)}{1 - \left(a_0 a_1 + 2\right) x^2 + x^4}$$

ve Binet formülü

$$\xi\left(n\right) := \begin{cases} 0, & n \text{ çift} \\ 1, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olmak üzere

$$q_n = \left(\frac{a_0^{1-\xi(n)}}{(a_0a_1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada

$$\alpha = \tfrac{a_0a_1 + \sqrt{(a_0a_1)^2 + 4a_0a_1}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \beta = \tfrac{a_0a_1 - \sqrt{(a_0a_1)^2 + 4a_0a_1}}{2} \ ,$$

$$x^2 - a_0a_1x - a_0a_1$$

polinomunun kökleridir. Edson ve Yayenie (2009), $\{q_n\}$ dizisi için üreteç fonksiyonunun ve Binet formülünün bulunmasını açık problem olarak bırakmışlardır ve bu problem Edson vd. (2011) ve Şahin (2011a) tarafından çözülmüştür. Şahin (2011a) diğerlerinden farklı olarak continuantlar yardımı ile bu problemi çözmüştür.

Daha sonra Yayenie (2011), başlangıç koşulları $Q_0 := 0$, $Q_1 := 1$ olmak üzere

$$Q_n := \begin{cases} a_0Q_{n-1} + b_0Q_{n-2}, & n \text{ çift} \\ a_1Q_{n-1} + b_1Q_{n-2}, & n \text{ tek} \end{cases} , n \geq 2 \tag{2.10}$$

dizisini tanımlamıştır. $\{Q_n\}$ dizisinin üreteç foksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{x\left(1 + a_0x - b_0x^2\right)}{1 - \left(a_0a_1 + b_0 + b_1\right)x^2 + b_0b_1x^4}$$

ve Binet formülü

$$Q_n = \frac{a_0^{1-\xi(n)}}{(a_0a_1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\alpha + b_1 - b_0)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \beta^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\beta + b_1 - b_0)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\alpha - \beta} \right)$$

olarak elde edilmiştir. Burada

$$\alpha = \tfrac{a_0a_1 + b_0 - b_1 + \sqrt{(a_0a_1 + b_0 - b_1)^2 + 4a_0b_0b_1}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \beta = \tfrac{a_0a_1 + b_0 - b_1 - \sqrt{(a_0a_1 + b_0 - b_1)^2 + 4a_0b_0b_1}}{2} \ ,$$

$$x^2 - \left(a_0a_1 + b_0 - b_1\right)x - a_0b_0b_1$$

polinomunun kökleridir.

Bu çalışmadan bağımsız olarak, Şahin (2011b) aynı genelleştirmeyi yapmış ve Binet formülünü farklı α ve β değişkenlerine bağlı olarak

$$\begin{aligned} Q_{2n} &= a_0 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ Q_{2n+1} &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - a_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

şeklinde elde etmiştir. Burada

$$\alpha = \frac{a_0a_1+b_0+b_1+\sqrt{(a_0a_1+b_0+b_1)^2-4b_0b_1}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \beta = \frac{a_0a_1+b_0+b_1-\sqrt{(a_0a_1+b_0+b_1)^2-4b_0b_1}}{2},$$

$$x^2 - (a_0a_1 + b_0 + b_1)\, x + b_0b_1$$

polinomunun kökleridir.

Son olarak Panario vd. (2013) tarafından, (2.10)' da tanımlanan dizi aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir. Bu tezde bütünlük olması açısından bu dizilere *k-Periyotlu Genel Fibonacci Dizisi* adı verilecektir.

Tanım 2.4 (k-Periyotlu Genel Fibonacci Dizisi) $a_0, a_1, ..., a_{k-1}, b_0, b_1, ..., b_{k-1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere v_0, v_1 keyfi başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$$v_n := \begin{cases} a_0v_{n-1} + b_0v_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod k \\ a_1v_{n-1} + b_1v_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod k \\ \vdots & \\ a_{k-1}v_{n-1} + b_{k-1}v_{n-2}, & n \equiv k-1 \pmod k \end{cases} \tag{2.11}$$

bağıntısını sağlayan $\{v_n\}$ dizisine *k-Periyotlu Genel Fibonacci Dizisi* denir (Panario vd. 2013).

$\{v_n\}$ dizisinde, başlangıç koşulları $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ ve katsayılar $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = b_0 = b_1 = ... = b_{k-1} = 1$ olarak alınırsa; Fibonacci dizisi elde edilir.

Aşağıda verilecek olan teoremlerde K_1 ve K_2 genelleştirilmiş continuantlar olmak üzere

$$A := K_1 + b_1 K_2 \qquad B := \prod_{r=0}^{k-1} b_r \tag{2.12}$$

olarak göz önüne alınacaktır. 3.bölümde genelleştirilmiş continuant kavramı ve aşağıdaki teoremin ispatı ayrıntılı bir şekilde anlatılacaktır.

Teorem 2.4 $n \geq 2k$ için, $\{v_n\}$ dizisi

$$v_n = Av_{n-k} - (-1)^k Bv_{n-2k} \tag{2.13}$$

lineer rekürans bağıntısını sağlar (Panario vd. 2013).

Teorem 2.5 $\{v_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \left(v_i x^i + (v_{k+i} - Av_i) x^{k+i}\right)}{1 - Ax^k + (-1)^k Bx^{2k}} \tag{2.14}$$

dir (Panario vd. 2013).

İspat. $\{v_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $G(x)$ olmak üzere

$$G(x) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m x^m$$

dir. $i = 0, 1, 2, ..., k-1$ için

$$G_i(x) := \sum_{m=0}^{\infty} v_{mk+i} x^{mk+i}$$

olarak alınırsa;

$$G(x) = \sum_{i=0}^{k-1} G_i(x)$$

yazılabilir.

$\left(1 - Ax^k + (-1)^k Bx^{2k}\right) G_i(x)$ hesaplanırsa ve katsayılar eşitlenirse; Teorem 2.2

kullanılarak

$$G_i(x) = \frac{v_i x^i + (v_{k+i} - Av_i) x^{k+i}}{1 - Ax^k + (-1)^k Bx^{2k}}$$

elde edilir.

Teorem 2.6 α ve β, $p(z) = z^2 - (-1)^k Az + (-1)^k B$ polinomunun kökleri olmak üzere; $\{v_n\}$ dizisinin Binet formülü

$$v_{mk+i} = (-1)^{k(m+1)} \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} v_{k+i} - B \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} v_i \right) \tag{2.15}$$

dir (Panario vd. 2013).

İspat.

$$\alpha := \tfrac{(-1)^k A + \sqrt{A^2 - 4(-1)^k B}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta := \tfrac{(-1)^k A - \sqrt{A^2 - 4(-1)^k B}}{2} \tag{2.16}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = (-1)^k A, \quad \alpha - \beta = \sqrt{A^2 - 4(-1)^k B}, \quad \alpha\beta = (-1)^k B, \\ &(-1)^k A\alpha^m = \alpha^{m+1} + \beta\alpha^m, \quad (-1)^k A\beta^m = \beta^{m+1} + \alpha\beta^m \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliklerden ve (2.14)' den yararlanarak

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \frac{v_i x^i + (v_{k+i} - Av_i) x^{k+i}}{1 - Ax^k + (-1)^k Bx^{2k}} \\ &= \frac{x^i \left(v_i + (v_{k+i} - Av_i) x^k\right)}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{1 - (-1)^k \alpha x^k} - \frac{\beta}{1 - (-1)^k \beta x^k} \right) \\ &= x^i \left(v_i + (v_{k+i} - Av_i) x^k\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} \left(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}\right)}{\alpha - \beta} x^{mk} \\ &= x^i \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} \left(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}\right) v_i}{\alpha - \beta} x^{mk} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} \left(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}\right) (v_{k+i} - Av_i)}{\alpha - \beta} x^{mk+k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^i v_i + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} \left(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1} \right) v_i}{\alpha - \beta} x^{mk} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} (\alpha^m - \beta^m)(v_{k+i} - A v_i)}{\alpha - \beta} x^{mk} \right) \\
&= x^i v_i + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{mk} \left((-1)^k \frac{(\alpha^m - \beta^m)}{\alpha - \beta} v_{k+i} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left((-1)^k A \alpha^m - \alpha^{m+1} \right) - \left((-1)^k A \beta^m - \beta^{m+1} \right)}{\alpha - \beta} v_i \right) x^{mk+i} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{mk} \left((-1)^k \frac{(\alpha^m - \beta^m)}{\alpha - \beta} v_{k+i} - (-1)^k \frac{\beta \alpha^m - \alpha \beta^m}{\alpha - \beta} v_i \right) x^{mk+i} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{mk+k} \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} v_{k+i} - B \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} v_i \right) x^{mk+i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. RASYONEL YAKLAŞIMLAR

Bilindiği üzere reel sayılar, rasyonel terimli Cauchy dizilerinin limit noktası olarak tanımlanırlar. Dolayısıyla bir reel sayı verildiğinde bu reel sayıya yakınsayan bir rasyonel dizi inşa etmek önemli matematik problemlerinden biridir. Bu problem, literatürde *rasyonel yaklaşım* problemi olarak bilinmektedir. Verilen bir reel sayının rasyonel yaklaşımları sürekli kesirler yardımıyla elde edilebilir. Bu bölümde öncelikle sürekli kesirler hakkında genel bilgiler verilecektir. Daha sonra continuant kavramı tanıtılacak ve continuantlar ile sürekli kesirler arasındaki ilişki anlatılacaktır. Son olarak, continuantlar yardımı ile periyodik rekürans dizilerin sağladığı lineer rekürans bağıntının elde edilişi gösterilecektir.

3.1 Sürekli Kesirler

Bir çok teoremin ispatında kullanılan Euclid Bölme Algoritması, sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahip olan sürekli kesirlerin ortaya çıkmasında oldukça önemli bir rol oynar. Bölme algoritmasına uygulanan yeni bakış açısı sayesinde, her reel sayıyı sürekli kesirler ile ifade edilebilecektir.

Tanım 3.1 (Basit Sürekli Kesir) $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{3.1}$$

şeklindeki ifadeye sonsuz *basit sürekli kesir* denir ve kısaca $[a_0; a_1, a_2, ...]$ ile gösterilir (Rosen 2005).

Ayrıca, (3.1) deki ifadenin terimleri sonlu ise;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

şeklindeki ifadeye *sonlu basit sürekli kesir denir* ve kısaca $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ ile gösterilir (Rosen 2005).

Teorem 3.1 Her rasyonel sayı, sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir (Rosen 2005).

İspat. $q > 0$ ve $p, q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, Euclid Bölme Algoritmasından dolayı;

$$\begin{array}{rc}
p = a_0 q + r_1 & 0 < r_1 < q, \\
q = a_1 r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 = a_2 r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2, \\
\vdots & \\
r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = a_n r_n &
\end{array}$$

yazılabilir. Bu denklemler düzenlendiğinde;

$$\begin{array}{rc}
\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} & 0 < \frac{r_1}{q} < 1, \\
\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} & 0 < \frac{r_2}{r_1} < 1, \\
\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} & 0 < \frac{r_3}{r_2} < 1, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} & 0 < \frac{r_n}{r_{n-1}} < 1, \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n &
\end{array}$$

elde edilir.

Burada a_0 bir tam sayı, $a_1, a_2, ..., a_n$ ise yukarıdaki eşitsizliklerden dolayı pozitif tam sayıdır. Böylece;

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\
&= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} \\
&\quad ...
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \\
&= [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir.

Örnek 3.1 $\frac{62}{23}$ rasyonel sayısının sürekli kesir olarak ifade edilişi aşağıdaki şekildedir. Euclid Bölme Algoritması'ndan yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
62 &= 2.23 + 16 \\
23 &= 1.16 + 7 \\
16 &= 2.7 + 2 \\
7 &= 3.2 + 1
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan;

$$
\begin{aligned}
\frac{62}{23} &= 2 + \frac{16}{23} = 2 + \frac{1}{\frac{23}{16}} \\
\frac{23}{16} &= 1 + \frac{7}{16} = 1 + \frac{1}{\frac{16}{7}} \\
\frac{16}{7} &= 2 + \frac{2}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{2}} \\
\frac{7}{2} &= 3 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bu denklemler düzendiğinde;

$$
\begin{aligned}
\frac{62}{23} &= 2 + \frac{1}{\frac{23}{16}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{16}{7}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= 2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}} \\ &= [2;1,2,3,2] \end{aligned}$$

elde edilir (Rosen 2005).

Bir rasyonel sayının sonlu basit sürekli kesir olarak gösterilişi tek değildir. Gerçekten;

$a_n > 1$ ise $a_n = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$ olur ve böylece

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

elde edilir.

$a_n = 1$ ise $a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1$ olur ve böylece

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

elde edilir. Bu ifadelerin birindeki terim sayısı tek, diğerindeki terim sayısı ise çifttir. O halde herhangi bir rasyonel sayı, basit sürekli kesir olarak iki farklı şekilde ifade edilebilir.

Örnek 3.2

$$\frac{62}{23} = [2; 1, 2, 3, 2]$$

dir. $a_n = a_5 = 2 > 1$ ve $2 = 1 + \frac{1}{1}$ olduğundan

$$[2; 1, 2, 3, 2] = [2; 1, 2, 3, 1, 1]$$

şeklinde iki türlü ifade edilebilir (Rosen 2005).

Teorem 3.2 Her sonlu basit sürekli kesir, bir rasyonel sayı belirtir (Rosen 2005).

İspat. İspat tümevarım ile yapılacaktır.

$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sonlu basit sürekli kesirini gözönüne alalım.

$n = 1$ için,

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

ve $\frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \in \mathbb{Q}$ dir.

$n = k$ için, $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{Z}^+$olmak üzere; $[a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ sürekli kesiri bir rasyonel sayı belirtsin.

$n = k + 1$ için,

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_k, a_{k+1}]}$$

dir. Tümevarım hipotezinden $[a_1; a_2, ..., a_k, a_{k+1}]$ sürekli kesiri rasyoneldir. Bu durumda; $s \neq 0$ için

$$[a_1; a_2, ..., a_k, a_{k+1}] = \frac{r}{s}$$

olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} = \frac{a_0 r + s}{r}$$

ve $\frac{a_0 r + s}{r} \in \mathbb{Q}$ dir.

Örnek 3.3 $[1; 3, 2, 4]$ basit sürekli kesirinin, bir rasyonel sayı olarak ifade edilişi

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{9}} = \frac{40}{31}$$

şeklindedir (Rosen 2005).

Tanım 3.2 (*k*-inci Yaklaşım) $0 \leq k \leq n$ olmak üzere; $C_k := [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ ifadesine $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sürekli kesirinin *k-inci yaklaşımı* denir (Rosen 2005).

Örnek 3.4

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

sürekli kesirinin ikinci yaklaşımı;

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \\ C_1 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ C_2 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

dir.

Lemma 3.1 C_k, $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sürekli kesirin k-inci yaklaşımı olsun. $0 \leq k \leq n$ için, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizileri

$$\begin{array}{lll} A_0 := a_0, & A_1 := a_0 a_1 + 1, & A_k := a_k A_{k-1} + A_{k-2}, \quad k \geq 2 \\ B_0 := 1, & B_1 := a_1, & B_k := a_k B_{k-1} + B_{k-2}, \quad k \geq 2 \end{array}$$

rekürans bağıntıları ile tanımlansın.

i) $C_k = \frac{A_k}{B_k}$
ii) $A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k = (-1)^{k-1}$
iii) $ebob(A_k, B_k) = 1$
iv) $C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{B_k B_{k-1}}, \ 1 \leq k \leq n$
v) $C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^k a_k}{B_k B_{k-2}}, 2 \leq k \leq n$
vi) $C_0 < C_2 < C_4 < ... < C_5 < C_3 < C_1$
özellikleri sağlanır (Rosen 2005).

Teorem 3.3 $C_k := [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ k-inci yaklaşım olsun. Bu durumda $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

$$\lim_{k \to \infty} C_k = \alpha$$

dir (Rosen 2005).

İspat. Monoton azalan ve alttan sınırlı her reel sayı dizisi yakınsaktır.
O halde Lemma 3.1(v)' den dolayı, $\{C_{2n+1}\}_{n \geq 0}$ azalan bir dizi ve C_0 bir alt sınır

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = \alpha_1$$

olacak şekilde bir α_1 reel sayısı vardır.

Monoton artan ve üstten sınırlı her reel sayı dizisi yakınsaktır. O halde Lemma 3.1(v)' den dolayı, $\{C_{2n}\}_{n\geq 0}$ artan bir dizi ve C_1 bir üst sınır olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n} = \alpha_2$$

olacak şekilde bir α_2 reel sayısı vardır. Lemma 3.1(iii)' den

$$\begin{aligned} C_{2n+1} - C_{2n} &= \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} \\ &= \frac{A_{2n+1}B_{2n} - A_{2n}B_{2n+1}}{B_{2n+1}B_{2n}} \\ &= \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}} \end{aligned}$$

Her k için; $B_k > k$ olduğu için;

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)2n}$$

dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n+1} - C_{2n} = 0$$

dir. Yani $\alpha_1 = \alpha_2$ elde edilir.

Bundan sonra $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ yazıldığında, bu limit değeri anlaşılacaktır.

Teorem 3.4 Her irrasyonel sayı, sonsuz basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir (Rosen 2005).

İspat. $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ve $\alpha_0 := \alpha$ olsun.

α reel sayısına eşit veya α reel sayısından küçük olan en büyük tam sayıyı $\lfloor \alpha \rfloor$ ile gösterelim.

$k = 0, 1, 2, ...$ için $\{a_k\}$ dizisi

$$a_k := \lfloor \alpha_k \rfloor, \alpha_{k+1} := \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlansın. Bu durumda $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ olduğunu gösterelim.

α_0 irrasyonel olduğundan;

$$\alpha_0 \neq a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor \text{ ve } \alpha_1 := \frac{1}{\alpha_0 - a_0} \Rightarrow \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

dir. α_k irrasyonel olsun. Bu durumda;

$$\alpha_k \neq a_k \text{ ve } \alpha_{k+1} := \frac{1}{\alpha_k - a_k} \Rightarrow \alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$$

dir.

α_{k+1} rasyonel olsa; α_k da rasyonel olur. Bu ise iddia ile çelişir. O halde α_{k+1} de irrasyoneldir. Yani $\forall k \in \mathbb{Z}$ için α_k irrasyonel ve a_k tamsayıdır. Dolayısıyla $\alpha_k - a_k \neq 0$ dır.

$$\begin{aligned} a_k &< \alpha_k < a_k + 1 \\ &\Rightarrow 0 < \alpha_k - a_k < 1 \\ &\Rightarrow \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} > 1 \\ &\Rightarrow a_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor \geq 1 \end{aligned}$$

Böylece $a_1, a_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ olduğu görülür.

$\alpha_k := a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ rekürans bağıntısının ard arda kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}} \\ &= [a_0; a_1, a_2, ..., a_k, \alpha_{k+1}] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k, \alpha_{k+1}] = \frac{\alpha_{k+1}A_k + A_{k-1}}{\alpha_{k+1}B_k + B_{k-1}}$$

dir. Böylece;

$$\begin{aligned}
\alpha - C_k &= \frac{\alpha_{k+1}A_k + A_{k-1}}{\alpha_{k+1}B_k + B_{k-1}} - \frac{A_k}{B_k} \\
&= \frac{-(A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k)}{(\alpha_{k+1}B_k + B_{k-1})\, B_k} \\
&= \frac{-\left(-1\right)^{k-1}}{(\alpha_{k+1}B_k + B_{k-1})\, B_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1}B_k + B_{k-1} &> a_{k+1}B_k + B_{k-1} = B_{k+1} \\
&\Rightarrow |\alpha - C_k| < \frac{1}{B_kB_{k+1}} \\
&\Rightarrow 0 < |\alpha - C_k| < \frac{1}{B_kB_{k+1}} < \tfrac{1}{k(k+1)} \\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty} C_k = \alpha \\
&\Rightarrow [a_0; a_1, a_2, ...] = \alpha
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.5 $\alpha = \sqrt{2}$ irrasyonel sayısının, sonsuz basit sürekli kesir olarak ifade edilişi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \\
a_1 &= \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2, \alpha_1 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \\
a_2 &= \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2, \alpha_3 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)-2} = \sqrt{2}+1 = \alpha_1.
\end{aligned}$$

Buradan;

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$$= [1; 2, 2, 2, ...]$$

elde edilir.

Teorem 3.5 Her sonsuz basit sürekli kesir, bir irrasyonel sayı belirtir (Rosen 2005).

İspat. $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda $[a_0; a_1, a_2, ...]$ nın irrasyonel olduğu gösterilmelidir.

$$\alpha := [a_0; a_1, a_2, ...]$$

ve α ' nın k-inci yaklaşımı

$$C_k := [a_0; a_1, a_2, ..., a_k] = \frac{A_k}{B_k}$$

olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ için Lemma 3.1(v)' den

$$C_{2n} < \alpha < C_{2n+1}$$

yazılabilir. Buradan;

$$0 < \alpha - C_{2n} < C_{2n+1} - C_{2n}$$

elde edilir. Lemma 3.1(iii)' den

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan;

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha - C_{2n} < C_{2n+1} - C_{2n} \\ &\Rightarrow 0 < \alpha - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} < \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}} \\ &\Rightarrow 0 < \alpha B_{2n} - A_{2n} < \frac{1}{B_{2n+1}} \end{aligned}$$

yazılır.

Kabul edelim ki $b \neq 0$ olmak üzere; $\alpha := \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha B_{2n} - A_{2n} < \frac{1}{B_{2n+1}} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{aB_{2n}}{b} - A_{2n} < \frac{1}{B_{2n+1}} \\ &\Rightarrow 0 < aB_{2n} - bA_{2n} < \frac{b}{B_{2n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $B_{2n+1} > 2n+1$ olduğundan, $B_{2n_0+1} > b$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ bulunabilir. Buradan $\frac{b}{B_{2n_0+1}} < 1$ olur. Yani

$$0 < aB_{2n_0} - bA_{2n_0} < \frac{b}{B_{2n_0+1}} < 1$$

elde edilir. Bu ise;

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } B_{2n_0} - bA_{2n_0} \in \mathbb{Z}$$

olmasıyla çelişir. O halde α irrasyoneldir.

Sonuç olarak; bir α reel sayısı verildiğinde, bu reel sayıya karşılık gelen sürekli kesir algoritma yardımı ile belirlenebilir. Fakat her reel sayı için bu gösterimi bulmak kolay değildir. Çünkü paydayı rasyonelleştirmek zor olduğundan, $\lfloor \alpha_k \rfloor$ değerinin hesaplanması kolay değildir. Tersine; sonsuz basit sürekli kesirin belirttiği reel sayıyı bulmanın genel bir algoritması yoktur. Şimdi kuadratik irrasyonel sayılar için bu zorluğu ortadan kaldıran çok önemli bir teorem ifade edilecektir. Bunun için öncelikle periyodik basit sürekli kesir ve kuadratik irrasyonel sayı kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 3.3 (Periyodik Basit Sürekli Kesir) $n \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq N$ için $a_n = a_{n+k}$ olacak şekilde $\exists\ N, k \in \mathbb{Z}^+$ ise; $[a_0; a_1, a_2, ...]$ sonsuz basit sürekli kesirine *periyodik basit sürekli kesir* denir ve

$$[a_0; a_1, a_2, ...a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, ..., a_{N+k-1}}]$$

ile gösterilir (Rosen 2005).

Eğer $k = 0, 1, 2, ...$ için $a_k = a_{n+k}$ olacak şekilde $\exists\ n \in \mathbb{Z}^+$ ise, $[a_0; a_1, a_2, ...]$ sonsuz basit sürekli kesirine *pür-periyodik sürekli kesir* denir ve

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, ... a_{n-1}}]$$

ile gösterilir (Rosen 2005).

Tanım 3.4 (Kuadratik İrrasyonel Sayı) $A \neq 0$ ve $A, B, C \in \mathbb{Z}$ olsun. $B^2 - 4AC$ kare çarpansız tamsayı ve $B^2 - 4AC > 0$ olmak üzere

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

kuadratik denkleminin kökü olan

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

sayısına *kuadratik irrasyonel sayı* denir (Rosen 2005).

Teorem 3.6 (Lagrange Teoremi)

$$\alpha, \text{ periyodik basit sürekli kesirdir} \Longleftrightarrow \alpha, \text{ kuadratik irrasyonel sayıdır}$$

(Rosen 2005).

İspat.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, ..., a_{N+k}}]$$

periyodik basit sürekli kesirini göz önüne alalım.

$$\beta := [\overline{a_N; a_{N+1}, ..., a_{N+k}}]$$

olsun.

Bu durumda $\beta = [a_N; a_{N+1}, ..., a_{N+k}, \beta]$ yazılabilir.
$[a_N; a_{N+1}, ..., a_{N+k}]$ sürekli kesirinin yaklaşımları $\frac{A_k}{B_k}$ ve $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ olmak üzere

$$\beta = \frac{\beta A_k + A_{k-1}}{\beta B_k + B_{k-1}}$$

yazılabilir. Son denklem

$$B_k \beta^2 + (B_{k-1} - A_k)\,\beta - A_{k-1} = 0$$

şeklinde tamsayı katsayılı kuadratik denkleme dönüşür ve buradan β kuadratik irrasyonel sayıdır.
$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{N-1}]$ sürekli kesirinin yaklaşımları $\frac{A_{N-1}}{B_{N-1}}$ ve $\frac{A_{N-2}}{B_{N-2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0; a_1, a_2, ..., a_{N-1}, \beta] \\ &= \frac{\beta A_{N-1} + A_{N-2}}{\beta B_{N-1} + B_{N-2}} \end{aligned}$$

yazılabilir. β kuadratik irrasyonel sayı olduğundan, α da kuadratik irrasyonel sayı olarak elde edilir.
α kuadratik irrasyonel sayı olduğunda, α nın periyodik basit sürekli kesir açılımına sahip olacağının ispatı fazla bilgi gerektirdiğinden burada yapılmayacaktır. İspat için Rosen (2005) kaynağına bakılabilir.

Örnek 3.6 $x = [3; \overline{1, 2}]$ periyodik sürekli kesiri göz önüne alındığında; $y = [\overline{1; 2}]$ olmak üzere $x = [3; y]$ yazılabilir.

$$y = [\overline{1; 2}] \Rightarrow y = [1; 2, y]$$

olduğundan, buradan

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}} = \frac{3y+1}{2y+1} \\ &\Rightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0,\ y > 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
x &= [3; y] \\
&\Rightarrow \quad x = 3 + \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow \quad x = 3 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir (Rosen 2005).

Aşağıdaki teorem, α irrasyonel sayısının sonsuz basit sürekli kesir açılımındaki yaklaşımların α ya olan *en iyi rasyonel yaklaşımlar* olduğunu ifade eder. Yani, $\frac{A_k}{B_k}$ kesiri α reel sayısına paydası B_k dan küçük olan herhangi bir rasyonel sayıdan daha yakındır.

Teorem 3.7 α bir irrasyonel sayı olmak üzere α nın sonsuz basit sürekli kesir açılımının yaklaşımları $\frac{A_k}{B_k}$ olsun. Bu durumda, $A \in \mathbb{Z}$ ve $B \in \mathbb{Z}^+$ için

$$
\left| \alpha - \frac{A}{B} \right| < \left| \alpha - \frac{A_k}{B_k} \right| \Rightarrow B > B_k
$$

dır (Rosen 2005).

Tanım 3.5 (Genel Sürekli Kesir) $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ sayı dizileri olmak üzere;

$$
a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}} =: \left[a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \cdots \right] \tag{3.2}
$$

şeklindeki ifadeye *genel sürekli kesir* denir (Wall 1948).

Şimdi bir genel sürekli kesirin yaklaşımlarının pay ve paydalarının sağladığı rekürans bağıntıları elde edelim.

(3.2) genel sürekli kesirinin yaklaşımları

$$\begin{aligned}
& \frac{a_0}{1}, \\
a_0 + \frac{b_1}{a_1} &= \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}, \\
a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}} &= \frac{a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0}{a_2 a_1 + b_2}, \\
a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}} &= \frac{a_3 (a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0) + b_3 (a_0 a_1 + b_1)}{a_3 (a_2 a_1 + b_2) + b_3 a_1}, \\
& \ldots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada $A_0 := a_0$, $B_0 := 1$ ve $A_1 := a_0 a_1 + b_1$, $B_1 := a_1$ denilirse, yaklaşımlar

$$\begin{aligned}
C_0 &: = \frac{A_0}{B_0} = \frac{a_0}{1}, \\
C_1 &: = \frac{A_1}{B_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}, \\
C_2 &: = \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0}{a_2 a_1 + b_2} \\
C_3 &: = \frac{A_3}{B_3} = \frac{a_3 (a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0) + b_3 (a_0 a_1 + b_1)}{a_3 (a_2 a_1 + b_2) + b_3 a_1}, \\
& \ldots
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

O halde tümevarım ile gösterilebilir ki, bir genel sürekli kesirin k-inci yaklaşımının pay ve paydaları $k \geq 2$ için

$$A_k = a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2} \tag{3.3}$$

$$B_k = a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2} \tag{3.4}$$

bağıntılarını sağlar.

Şimdi bir genel sürekli kesir verildiğinde, onu $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $b_k = 1$ olacak şekildeki bir sürekli kesire dönüştürebileceğimizi gösteren bir algoritma gösterilecektir.

Teorem 3.8 $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için b_k sıfırdan farklı olmak üzere (3.2) genel sürekli kesiri,

$$a_0 + \cfrac{1}{(a_1/b_1) + \cfrac{1}{(a_2b_1/b_2) + \cfrac{1}{(a_3b_2/b_3b_1) + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

şeklinde bir sürekli kesir olarak ifade edilebilir (Hensley 2006).

İspat. (3.2) genel sürekli kesirinin yaklaşımları

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{1}, \\ a_0 + \frac{1}{a_1/b_1} &= \frac{a_0a_1 + b_1}{a_1}, \\ a_0 + \frac{1}{a_1/b_1 + \frac{1}{a_2b_1/b_2}} &= \frac{a_2\left(a_0a_1 + b_1\right) + b_2a_0}{a_2a_1 + b_2}, \ldots \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse;

$$a_0 + \cfrac{1}{(a_1/b_1) + \cfrac{1}{(a_2b_1/b_2) + \cfrac{1}{(a_3b_2/b_3b_1) + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

sürekli kesiri elde edilir.

Burada $c_1 := a_1/b_1$, $c_2 := a_2b_1/b_2$, $c_3 := a_3b_2/b_3b_1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$c_{2n} := \frac{a_{2n}\prod_{i=1}^{n} b_{2i-1}}{\prod_{i=1}^{n} b_{2i}} \qquad \text{ve} \qquad c_{2n+1} := \frac{a_{2n+1}\prod_{i=1}^{n} b_{2i}}{\prod_{i=1}^{n+1} b_{2i-1}}$$

dir.

Sonsuz basit sürekli kesir, her zaman irrasyonel bir limite yakınsar. Yani, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_k}{B_k} = \alpha$$

dir. Teorem 3.7' den, bir reel sayıya olan en iyi rasyonel yaklaşımlar, o reel sayının sonsuz basit sürekli kesir gösterimindeki yaklaşımlarıdır. Fakat genel sürekli kesir durumunda bu limit her zaman var olmak zorunda değildir. Dolayısıyla bu limitin ne zaman var olduğunu bilmek de çok önemlidir.

Aşağıda bir genel sürekli kesirin ne zaman yakınsak olacağı ile ilgili bilinen bazı teoremler ispatsız olarak verilmiştir. Periyodik genel sürekli kesirin yakınsak olması için gerek ve yeter şartı ifade eden teorem (Wall 1948) ispatı ile birlikte 4.bölümde verilecektir.

Teorem 3.9 $\{a_k\}$ sayı dizisi olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ ise;

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

sürekli kesiri yakınsak değildir.

Bu teorem Stern (1860) ve Stolz (1886) tarafından elde edilmiştir (Hensley 2006).

Teorem 3.10 $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ pozitif tamsayı dizisi olmak üzere;

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

sürekli kesirinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1 b_3 ... b_{2n-1}}{b_2 b_4 ... b_{2n}} a_{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_2 b_4 ... b_{2n}}{b_1 b_3 ... b_{2n+1}} a_{2n+1}$$

serilerinden en az birinin ıraksak olmasıdır (Chrystal 1964).

Teorem 3.11 $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ pozitif tamsayı dizileri olmak üzere; her $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$a_k \geq b_k$ ise

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

sürekli kesiri yakınsaktır (Chrystal 1964).

Son olarak literatürde yer alan bazı önemli sürekli kesir örneklerini verelim (Olds 1963).

Örnek 3.7 (Bombelli 1572)

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{\ddots}}}$$

Örnek 3.8 (Cataldi 1613)

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{\ddots}}}$$

Örnek 3.9 (Wallis 1655)

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times ...}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times ...}$$

Örnek 3.10 (Brouncker 1658)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{\ddots}}}}}$$

Örnek 3.11 (Euler 1737)

$$
\begin{aligned}
e-1 &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}} \\
e &= [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,...]
\end{aligned}
$$

$e = 2.7182818284590...$' nin yaklaşımları;

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{2}{1}, \\
C_1 &= \frac{3}{1}, \\
C_2 &= \frac{8}{3} = 2.6666..., \\
C_3 &= \frac{11}{4} = 2.75, \\
C_4 &= \frac{19}{7} = 2.7142857..., \\
C_5 &= \frac{87}{32} = 2.71875, \\
C_6 &= \frac{106}{39} = 2.717948717..., \\
& \quad ...
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Örnek 3.12 (Lambert 1766)

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x-1}{e^x+1} &= \cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\cfrac{1}{\ddots}}}}}, \\
\tan x &= \cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\cfrac{1}{\ddots}}}}}
\end{aligned}
$$

Örnek 3.13 (Lambert 1770)

$$\begin{aligned}\pi &= 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{\ddots}}}}}} \\ &= [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,...]\end{aligned}$$

$\pi = 3.14159265358979...$' nin ilk 5 yaklaşımı;

$$\begin{aligned}C_0 &= 3, \\ C_1 &= \frac{22}{7} = 3.14285714..., \\ C_2 &= \frac{333}{106} = 3.141509433..., \\ C_3 &= \frac{355}{113} = 3.14159292..., \\ C_4 &= \frac{103993}{33102} = 3.14159265..., \\ & \quad ...\end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 3.14

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{5}}{2} &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}} \\ &= [1;1,1,1,1,1,...]\end{aligned}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$' nin yaklaşımları;

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{1}, \\ C_1 &= \frac{2}{1}, \\ C_2 &= \frac{3}{2} = 1.5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{5}{3} = 1.666..., \\ C_4 &= \frac{8}{5} = 1.6, \\ C_5 &= \frac{13}{8} = 1.625, \\ & ... \end{aligned}$$

şeklindedir. Pay ve paydadaki sayıların Fibonacci sayıları olduğu görülebilir.

Örnek 3.15

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2.3-x^2) + \cfrac{2.3x^2}{(4.5-x^2) + \cfrac{4.5x^2}{(6.7-x^2) + \ddots}}}}$$

Örnek 3.16 (Lambert 1770)

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}$$

Örnek 3.17 (Lambert 1770, Lagrange 1776)

$$\log(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 + \cfrac{1^2 x}{3 + \cfrac{2^2 x}{4 + \cfrac{2^2 x}{5 + \cfrac{3^2 x}{6 + \cfrac{3^2 x}{7 + \ddots}}}}}}}, \quad |x| < 1$$

Örnek 3.18 (Laplace 1805, Legendre 1826)

$$\int_o^x e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\frac{1}{2}e^{-x^2}}{x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{2x + \cfrac{4}{x + \ddots}}}}}, \quad x > 0$$

3.2 Sürekli Kesirler ve Continuantlar Arasındaki İlişki

Tanım 3.6 (Continuant) $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ sayı dizileri olmak üzere,

$$K(a_0, a_1, ..., a_n) := \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & & & & & \\ -1 & a_1 & b_2 & & & 0 & \\ & -1 & a_2 & b_3 & & & \\ & & -1 & a_3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & \\ & 0 & & & -1 & a_{n-1} & b_n \\ & & & & & -1 & a_n \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

şeklindeki üç bant matrisin determinantına continuant denir (Muir 1960).

Continuantlar, genel sürekli kesirlerin yaklaşımlarının pay ve paydaları olarak ifade edilirler. Bir genel sürekli kesirin yaklaşımları göz önüne alındığında $K() := 1$ ve $K(a_0) := a_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(a_0, a_1) &= \begin{vmatrix} a_0 & b_1 \\ -1 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 a_1 + b_1 \\ &= a_1 K(a_0) + b_1 K(), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(a_0, a_1, a_2) &= \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 \\ -1 & a_1 & b_2 \\ 0 & -1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 (a_0 a_1 + b_1) + b_2 a_0 \\ &= a_2 K(a_0, a_1) + b_2 K(a_0), \\ & \quad ... \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Tümevarım ile gösterilebilir ki, $n \geq 2$ için

$$K\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) = a_n K(a_0, ..., a_{n-1}) + b_n K(a_0, ..., a_{n-2}) \tag{3.6}$$

elde edilir (Muir 1960).

Burada genel sürekli kesirin n-inci yaklaşımının payı olan A_n değeri için

$$A_n = K\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) \tag{3.7}$$

dir. Benzer şekilde, genel sürekli kesirin n-inci yaklaşımının paydası olan B_n değeri için

$$B_n = K\left(a_1, ..., a_n\right) \tag{3.8}$$

olduğu elde edilebilir.

O halde continuantlar ve genel sürekli kesirler arasındaki ilişki

$$\frac{K\left(a_0, a_1, ..., a_n\right)}{K\left(a_1, ..., a_n\right)} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots_{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}} \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilebilir (Muir 1960).

$1 \leq n \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq k \leq n-1$ için

$$K\left(a_k, a_{k+1}, ..., a_n\right) := \begin{vmatrix} a_k & b_{k+1} & & & & & \\ -1 & a_{k+1} & b_{k+2} & & & 0 & \\ & -1 & a_{k+2} & b_{k+3} & & & \\ & & -1 & a_{k+3} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & \\ & 0 & & & -1 & a_{n-1} & b_n \\ & & & & & -1 & a_n \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

determinantı son sütuna göre açılıp düzenlenirse;

$$K\left(a_k, a_{k+1}, ..., a_n\right) = a_n K\left(a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-1}\right) + b_n K\left(a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-2}\right) \tag{3.11}$$

elde edilir.

(3.10) determinantı ilk satıra göre açıldığında, determinant değeri yine değişmeyeceğinden

$$K\left(a_k, a_{k+1}, ..., a_n\right) = a_k K\left(a_{k+1}, ..., a_n\right) + b_{k+1} K\left(a_{k+2}, ..., a_n\right) \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca, (3.10) determinantı ile bileşenlerin ters sırada yazılmasıyla elde edilen

$$K\left(a_n, a_{n-1}, ..., a_k\right) := \begin{vmatrix} a_n & b_n & & & & & \\ -1 & a_{n-1} & b_{n-1} & & & 0 & \\ & -1 & a_{n-2} & b_{n-2} & & & \\ & & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a_{k+2} & b_{k+2} & \\ & 0 & & & -1 & a_{k+1} & b_{k+1} \\ & & & & & -1 & a_k \end{vmatrix}$$

determinantı eşit olacağından

$$K\left(a_k, a_{k+1}, ..., a_n\right) = K\left(a_n, a_{n-1}, ..., a_k\right) \tag{3.13}$$

yazılabilir (Weld 1893).

(3.5) determinatında $i \in \mathbb{Z}^+$ için $\forall b_i = 1$ olarak alınırsa, bu continuanta *basit continuant* denir ve genel sürekli kesirler ile continuantlar arasındaki ilişkiye benzer olarak, herhangi bir basit sürekli kesirin yaklaşımları basit continuantlar cinsinden ifade edilebilir (Muir 1960).

Örnek 3.20 Örnek 3.13'de, $\pi^{'}$ nin 2. yaklaşımını gözönüne alalım.

$$C_2 := \frac{A_2}{B_2} = [3; 7, 15] = \frac{333}{106}.$$

(3.9) eşitliğinden;

$$\frac{K(3,7,15)}{K(7,15)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{333}{106}$$

dir.

3.3 Periyodik Rekürans Bağıntılar için Continuant Yardımı ile Lineer Rekürans Bulma

Panario vd. (2013), continuant tanımını genelleştirerek k-periyotlu diziler için lineer rekürans elde etmişlerdir. Şimdi genelleştirilmiş continuant tanımı ve bu tanım yardımıyla periyodik rekürans bağıntıların sağladığı lineer reküransın nasıl elde edileceği gösterilecektir.

Tanım 3.7 (Genelleştirilmiş Continuant) $0 \leq i \in \mathbb{Z}$ için, $K() := 1, K(a_i) := a_i$ olsun. $n \geq 2$ için

$$K(a_n, a_{n-1}, ..., a_{i+1}, a_i) := a_i K(a_n, a_{n-1}, ..., a_{i+2}, a_{i+1}) + b_{i+1} K(a_n, a_{n-1}, ..., a_{i+2})$$

dir (Panario vd. 2013).

$1 \leq n \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq k \leq n-1$ için (3.13) eşitliğinden yararlanarak, (3.11) eşitliğini yeniden düzenlenirse

$$K(a_n, a_{n-1}, ..., a_k) = a_n K(a_{n-1}, ..., a_k) + b_n K(a_{n-2}, ..., a_k) \tag{3.14}$$

elde edilir (Panario vd. 2013).

Teorem 3.12 Bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için, $i = 0, 1, ..., k-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &:= K\left(a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_1, a_0, a_{k-1}, ..., a_{i+2}, a_{i+1}\right) \\ K_2^{(i)} &:= K\left(a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_1, a_0, a_{k-1}, ..., a_{i+2}\right) \end{aligned}$$

tanımlansın. Bu durumda

$$K_1^{(i)} + b_{i+1} K_2^{(i)} = K_1^{(i+1)} + b_{i+2} K_2^{(i+1)}$$

dir (Panario vd. 2013).

İspat. (3.14) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} K_1^{(i+1)} &= K\left(a_{i+1}, a_i, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right) \\ &= a_{i+1} K\left(a_i, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right) + b_{i+1} K\left(a_{i-1}, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir.
$K_2^{(i+1)} = K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+4}, a_{i+3}\right)$ olduğundan;

$$\begin{aligned} K_1^{(i+1)} + b_{i+2} K_2^{(i+1)} &= a_{i+1} K\left(a_i, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right) + b_{i+1} K\left(a_{i-1}, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right) \\ &\quad + b_{i+2} K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+4}, a_{i+3}\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

dir.
Genelleştirilmiş continuant tanımından;

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+2}, a_{i+1}\right) \\ &= a_{i+1} K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+2}\right) + b_{i+2} K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+3}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir.
$K_2^{(i)} = K\left(a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right)$ olduğundan;

$$
\begin{aligned}
K_1^{(i)} + b_{i+1} K_2^{(i)} &= a_{i+1} K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+2}\right) + b_{i+2} K\left(a_i, a_{i-1}, ..., a_{i+3}\right) \\
&\quad + b_{i+1} K\left(a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_{i+3}, a_{i+2}\right) \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

dir. (3.15) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak teoremin ifadesi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
K_1 := K_1^{(0)} &= K\left(a_0, a_{k-1}, a_{k-2,} ..., a_{2,} a_1\right) \\
K_2 := K_2^{(0)} &= K\left(a_{k-1}, a_{k-2,} ..., a_2\right)
\end{aligned} \qquad (3.17)
$$

olarak tanımlanırsa, Teorem 3.12' den

$$
K_1^{(i)} + b_{i+1} K_2^{(i)} = K_1 + b_1 K_2
$$

elde edilir.

Teorem 2.4' de, periyodik rekürans bağıntıların sağladığı lineer reküransın continuantlar yardımı ile

$$
v_n = \left(K_1 + b_1 K_2\right) v_{n-k} - (-1)^k \left(b_0 b_1 b_2 ... b_{k-1}\right) v_{n-2k}, \ n \geq 2k
$$

şeklinde elde edilebileceği ifade edilmişti (Panario vd. 2013). Şimdi bu teoremin ispatı verilecektir.

İspat. (Teorem 2.4' ün ispatı) $\{v_n\}$ dizisinin tanımından,

$$
v_{mk+i} = a_i v_{mk+i-1} + b_i v_{mk+i-2} = K\left(a_i\right) v_{mk+i-1} + b_i K\left(\right) v_{mk+i-2}
$$

yazılabilir.

$v_{mk+i-1} = a_{i-1} v_{mk+i-2} + b_{i-1} v_{mk+i-3}$ yazılarak eşitlik tekrar düzenlenirse;

$$
v_{mk+i} = \left(a_i a_{i-1} + b_i\right) v_{mk+i-2} + b_{i-1} a_i v_{mk+i-3} = K\left(a_i, a_{i-1}\right) v_{mk+i-2} + b_{i-1} K\left(a_i\right) v_{mk+i-3}
$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edildiğinde;

$$\begin{aligned}
v_{mk+i} &= K(a_i)\, v_{mk+i-1} + b_i K()\, v_{mk+i-2} \\
&= K(a_i, a_{i-1})\, v_{mk+i-2} + b_{i-1} K(a_i)\, v_{mk+i-3} \\
&= K(a_i, a_{i-1}, a_{i-2})\, v_{mk+i-3} + b_{i-2} K(a_i, a_{i-1})\, v_{mk+i-4} \\
&\vdots \\
&= K(a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_{i+2}, a_{i+1})\, v_{mk+i-k} \\
&\quad + b_{i+1} K(a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_{i+2})\, v_{mk+i-k-1} \\
&= K_1^{(i)} v_{mk+i-k} + b_{i+1} K(a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_{i+2})\, v_{mk+i-k-1} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\{v_n\}$ dizisinin tanımından ve $mk + i - 2k + 2 \equiv i + 2 \pmod k$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
b_{i+2} v_{mk+i-2k} &= v_{mk+i-2k+2} - a_{i+2} v_{mk+i-2k+1} \\
&= K()\, v_{mk+i-2k+2} - K(a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklem b_{i+3} ile çarpılıp

$$b_{i+3} v_{mk+i-2k+1} = v_{mk+i-2k+3} - a_{i+3} v_{mk+i-2k+2}$$

eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
b_{i+2} b_{i+3} v_{mk+i-2k} &= b_{i+3} v_{mk+i-2k+2} - a_{i+2} b_{i+3} v_{mk+i-2k+1} \\
&= -K(a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+3} + (a_{i+2} a_{i+3} + b_{i+3})\, v_{mk+i-2k+2} \\
&= -K(a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+3} + K(a_{i+3}, a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde;

$$\begin{aligned}
b_{i+2} v_{mk+i-2k} &= K()\, v_{mk+i-2k+2} - K(a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+1} \\
b_{i+2} b_{i+3} v_{mk+i-2k} &= -K(a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+3} + K(a_{i+3}, a_{i+2})\, v_{mk+i-2k+2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{i+2}b_{i+3}b_{i+4}v_{mk+i-2k} &= K\left(a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-2k+4}-K\left(a_{i+4},a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-2k+3}\\
&\vdots\\
b_{i+2}b_{i+3}...b_{i+k}v_{mk+i-2k} &= \left(-1\right)^{k}K\left(a_{i-1},a_{i-2},...,a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-k}\\
&\quad+\left(-1\right)^{k+1}K\left(a_{i},a_{i-1},a_{i-2},...,a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-k-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Son denklem $\left(-1\right)^{k}b_{i+1}$ ile çarpılıp, indisleri $(\operatorname{mod} k)$ ya göre yeniden düzenlendiğinde;

$$
\begin{aligned}
\left(-1\right)^{k}b_{0}b_{1}...b_{k-1}v_{mk+i-2k} &= b_{i+1}K\left(a_{i-1},a_{i-2},...,a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-k}\\
&\quad-b_{i+1}K\left(a_{i},a_{i-1},a_{i-2},...,a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-k-1}\\
&= b_{i+1}K_{2}^{(i)}v_{mk+i-k}\\
&\quad-b_{i+1}K\left(a_{i},a_{i-1},a_{i-2},...,a_{i+3},a_{i+2}\right)v_{mk+i-k-1}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

elde edilir.

Son olarak; (3.18) ve (3.19) eşitlikleri toplanıp $n=mk+i$ yazıldığında;

$$
\begin{aligned}
v_{n} &= \left(K_{1}^{(i)}+b_{i+1}K_{2}^{(i)}\right)v_{n-k}+\left(-1\right)^{k+1}\left(b_{0}b_{1}...b_{k-1}\right)v_{n-2k}\\
&= \left(K_{1}+b_{1}K_{2}\right)v_{n-k}+\left(-1\right)^{k+1}\left(b_{0}b_{1}...b_{k-1}\right)v_{n-2k}
\end{aligned}
$$

teoremin ifadesi elde edilmiş olur.

4. PERİYODİK REKÜRANS BAĞINTILAR VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde periyodik genel sürekli kesirin yakınsak olması için gerek ve yeter şartı ifade eden teorem (Wall 1948) verilecektir. Periyodik rekürans bağıntılar açısından verilecek olan teorem büyük bir önem taşımaktadır. Bu teoremden yararlanarak, periyodik genel sürekli kesire karşılık gelen periyodik rekürans dizileri elde edilecektir. Daha sonra elde edilen periyodik rekürans dizilerinin bazı terimlerinin oranlarının yakınsaklığı incelenecektir. Son olarak, Fibonacci dizilerinin bir genelleştirmesi olan periyodik rekürans bağıntılar üzerinde çeşitli sonuçlar elde edilecektir. Bu sonuçlar, daha önce elde edilen sonuçları kapsamaktadır.

4.1 Periyodik Genel Sürekli Kesirlerin Yakınsaklığı

$k \in \mathbb{Z}^+$, $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{C}$ ve $b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{C}\backslash \{0\}$ olmak üzere;

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ddots+\cfrac{b_k}{a_k+\cfrac{b_1}{a_1+\ddots+\cfrac{b_k}{a_k+\cfrac{b_1}{a_1+\ddots}}}}}} =: \left[\overline{\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\cdots\frac{b_k}{a_k}}\right] \tag{4.1}$$

şeklinde verilen periyodik genel sürekli kesiri göz önüne alalım.

Bu sürekli kesirin hangi koşullar altında yakınsak olacağını eğer yakınsak ise hangi değere yakınsayacağını gösteren teoremi ispatlamak için gerekli olan bazı önbilgileri sunalım.

Tanım 4.1 (Lineer Kesirli Dönüşüm) w kompleks değişken, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ keyfi sabitler ve $\det(ad - bc) \neq 0$ olmak üzere;

$$s = s(w) = \frac{aw + b}{cw + d} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanan kompleks fonksiyona *lineer kesirli dönüşüm denir.*

Lineer kesirli dönüşümlerin kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur ve sürekli kesirler, lineer kesirli dönüşümlerin bileşkeleri olarak ifade edilebilirler.

$$\begin{aligned}
\tau_0(w) &:= a_0 + w \\
\tau_1(w) &:= \frac{b_1}{a_1 + w} \\
\tau_2(w) &:= \frac{b_2}{a_2 + w} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan basit lineer kesirli dönüşümlerin dizisi göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
s_1(w) &:= \tau_0 \circ \tau_1(w) = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + w} \\
s_2(w) &:= \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_2(w) = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + w}} \\
&\vdots \\
s_n(w) &:= \tau_0 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n(w) = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \frac{b_n}{a_n + w}}}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu durumda A_n ve B_n sürekli kesirin n-inci yaklaşımının pay ve paydaları olmak üzere

$$s_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}$$

olarak ifade edilir (Wall 1948).

O halde, (4.1) periyodik genel sürekli kesiri

$$s = s(w) = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \frac{b_k}{a_k + w}}}$$

lineer kesirli dönüşüm tarafından üretilir ve bu dönüşüm

$$s = s(w) = \frac{A_{k-1}w + A_k}{B_{k-1}w + B_k} \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir.

$b_1, b_2, ..., b_k$ sıfırdan farklı olduğundan, (4.3) lineer kesirli dönüşümün determinantı

$$A_{k-1}B_k - A_kB_{k-1} = (-1)^k b_1b_2...b_k$$

sıfırdan farklıdır.

(4.3) lineer kesirli dönüşümün sabit noktaları,

$$x = \frac{A_{k-1}x + A_k}{B_{k-1}x + B_k}$$

olacak şekildeki x noktalarıdır. Başka bir deyişle, sabit noktalar

$$B_{k-1}x^2 + (B_k - A_{k-1})\,x - A_k = 0$$

kuadratik denkleminin kökleri olan x_1 ve x_2

$$x_1 = \frac{-(B_k - A_{k-1}) + \sqrt{(B_k - A_{k-1})^2 + 4A_kB_{k-1}}}{2B_{k-1}} \tag{4.4}$$

$$x_2 = \frac{-(B_k - A_{k-1}) - \sqrt{(B_k - A_{k-1})^2 + 4A_kB_{k-1}}}{2B_{k-1}} \tag{4.5}$$

lerdir.

Eğer x_1 ve x_2 sonlu ise yani, $B_{k-1} \neq 0$ ise $f := s(\infty) = \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ sonludur ve bu durumda $s = s(w)$ dönüşümü

$$\frac{1}{s - x_1} = \frac{1}{w - x_1} + \frac{1}{f - x_1}, \quad x_1 = x_2 \tag{4.6}$$

$$\frac{s - x_1}{s - x_2} = \frac{f - x_1}{f - x_2}.\frac{w - x_1}{w - x_2}, \qquad x_1 \neq x_2 \tag{4.7}$$

şeklinde yazılabilir.

$s = s^n(w)$ dönüşümü, $s = s(w)$ dönüşümünün n defa ard arda uygulanmasıyla elde edilir ve bu durumda (4.6) ve (4.7) eşitlikleri

$$\frac{1}{s-x_1} = \frac{1}{w-x_1} + \frac{n}{f-x_1}, \qquad x_1 = x_2 \tag{4.8}$$

$$\frac{s-x_1}{s-x_2} = \left(\frac{f-x_1}{f-x_2}\right)^n . \frac{w-x_1}{w-x_2}, \; x_1 \neq x_2 \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1 $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{C}$ ve $b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere x_1 ve x_2, (4.3) lineer kesirli dönüşümün sabit noktaları olsun. C_n, (4.1) sürekli kesirinin n-inci yaklaşımı olsun. Bu durumda, (4.1) sürekli kesirinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul x_1 ve x_2 sonlu sayılarının aşağıdaki koşullardan birini sağlamasıdır:
(i) $x_1 = x_2$ veya
(ii) $|C_{k-1} - x_2| > |C_{k-1} - x_1|$, $C_p \neq x_2$, $p = 0, 1, 2, ..., k-1$.
Eğer bu sürekli kesir yakınsak ise, yakınsadığı değer x_1 dir (Wall 1948).

İspat.

$$C_{nk+p} = s^n(C_p), \; p = 0, 1, 2, ..., k-1 \text{ ve } n = 1, 2, 3, ... \tag{4.10}$$

olduğu göz önüne alınırsa, $C_p = x_1$ olması için gerek ve yeter şart $C_{nk+p} = x_1$ olmasıdır.
Bunun için aşağıdaki dört durum incelenmelidir.
1. Durum: $s(w)$ nun bir sabit noktası ∞ daki nokta olsun.
(4.3) ve determinant formülünden dolayı $B_{k-1} = 0$ ve $A_{k-1} \neq 0$ olduğu durumda $C_{k-1} = \infty$ elde edilir. (4.10) eşitliğinden, $C_{nk+k-1} = \infty$ elde edilir ve böylece (4.1) sürekli kesiri ıraksaktır.
2. Durum: x_1 ve x_2 sabit noktaları sonlu ve $x_1 = x_2$ olsun.
Bu durumda; (4.8) ve (4.10) dan;

$$\frac{1}{C_{nk+p} - x_1} = \frac{1}{C_p - x_1} + \frac{n}{C_{k-1} - x_1} \tag{4.11}$$

yazılabilir. Burada $C_{k-1} = s(\infty)$ sonlu ve x_1 değerinden farklıdır. Eğer $C_p = x_1$ ise $C_{nk+p} = x_1$ dir. Eğer $C_p \neq x_1$ ise $C_{nk+p} \neq x_1$ dir. (4.11) eşitliğinde limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} C_{nk+p} = x_1$$

elde edilir. Bu durumda (4.1) sürekli kesiri yakınsaktır ve yakınsadığı değer x_1 dir.

3. Durum: x_1 ve x_2 sabit noktaları sonlu ve $|C_{k-1} - x_2| > |C_{k-1} - x_1|$ olsun.

Bu durumda; (4.9) ve (4.10) dan;

$$\frac{C_{nk+p} - x_1}{C_{nk+p} - x_2} = K^n \frac{C_p - x_1}{C_p - x_2}, \quad K := \frac{C_{k-1} - x_1}{C_{k-1} - x_2} \tag{4.12}$$

ve hipotezden dolayı $|K| < 1$ dir. Eğer $C_p \neq x_2$ ise; (4.12) den

$$\begin{aligned} C_{nk+p} - x_1 &= \epsilon_n \left(C_{nk+p} - x_2\right), \\ \lim_{n\to\infty} \epsilon_n &= 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece eğer $|\epsilon_n| < 1$ ise,

$$C_{nk+p} - x_1 = \frac{\epsilon_n}{1 - \epsilon_n}\left(x_1 - x_2\right)$$

ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} C_{nk+p} = x_1$$

elde edilir ve (4.1) sürekli kesir yakınsaktır.

Diğer taraftan, eğer $C_p = x_2$ ise, bu durumda

$$C_{nk+p} = s^n\left(C_p\right) = s^n\left(x_2\right) = x_2$$

dir. C_{k-1},lineer kesirli dönüşümünün sabit noktası olmadığından $C_{k-1} \neq x_2$ ve

$$\lim_{n\to\infty} C_{nk+k-1} = x_1 \neq x_2$$

elde edilir. Böylece (4.1) sürekli kesiri ıraksaktır.

4. Durum: x_1 ve x_2 sabit noktaları sonlu, $x_1 \neq x_2$ ve $|C_{k-1} - x_2| = |C_{k-1} - x_1|$ olsun.

Bu durumda; (4.12) eşitliğinden; $|K| = 1$ ve $K \neq 1$ dir. K, K^2, $K^3, ...$ dizisi iki farklı limit noktasına sahiptir. (4.12) eşitliğinde $p = k - 1$ yazılırsa; C_{nk-1} dizisi iki farklı limit noktasına sahip olacağından (4.1) sürekli kesiri ıraksaktır.

Bu dört durum ile olası bütün ihtimaller incelendiğinden ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 4.1' den yararlanarak bir sonuç elde edilecektir. Bu sonuç, $a_1, a_2, ..., a_k$, $b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $k = 2$ durumu için $\{v_n\}$ periyodik rekürans dizisinin sağladığı lineer reküransın katsayıları olan A ve B değerlerinin durumuna göre periyodik genel sürekli kesirin yakınsaklık durumunu inceleme imkanı sağlayacaktır.

K_1 ve K_2 (3.17) şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş continuantlar, A_k ve B_k (4.1) periyodik genel sürekli kesirinin yaklaşımlarının pay ve paydaları olsun.

K_1 ve K_2 genelleştirilmiş continuantları

$$\begin{aligned} K_1 &= K(a_k, a_{k-1}, ..., a_2, a_1) \\ K_2 &= K(a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_2) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.1) sürekli kesirinin yaklaşımları continuantlar cinsinden ifade edilirse; (3.7) ve (3.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= K(0, a_1, ..., a_{k-1}) \\ &= b_1 K(a_2, a_3, ..., a_{k-1}) \\ &= b_1 K(a_{k-1}, ..., a_3, a_2) \\ &= b_1 K_2 \end{aligned}$$

dir.

Benzer şekilde, (3.8) ve (3.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} B_k &= K(a_1, ..., a_k) \\ &= K(a_k, ..., a_1) \\ &= K_1 \end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak

$$K_1 + b_1 K_2 = B_k + A_{k-1} \tag{4.13}$$

elde edilir.

(2.12) eşitliğinden $A := B_k + A_{k-1}$ ve $B := b_1 b_2 ... b_k$ olmak üzere

$$x^2 - Ax + (-1)^k B = 0$$

kuadratik denkleminin kökleri

$$\alpha' := \tfrac{A + \sqrt{A^2 - (-1)^k 4B}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \beta' := \tfrac{A - \sqrt{A^2 - (-1)^k 4B}}{2} \tag{4.14}$$

olsun. Bu durumda (4.4) ve (4.5) eşitlikleri düzenlenerek,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(A_{k-1} - B_k) + \sqrt{(A_{k-1} + B_k)^2 - (-1)^k 4 (b_1 b_2 ... b_k)}}{2B_{k-1}} \\ x_2 &= \frac{(A_{k-1} - B_k) - \sqrt{(A_{k-1} + B_k)^2 - (-1)^k 4 (b_1 b_2 ... b_k)}}{2B_{k-1}} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.13) ve (4.14) eşitliklerinden yararlanarak

$$x_1 = \frac{A_{k-1} - \beta'}{B_{k-1}} \tag{4.15}$$

$$x_2 = \frac{A_{k-1} - \alpha'}{B_{k-1}} \tag{4.16}$$

elde edilir.

Buradan $B_{k-1} \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A^2 = (-1)^k 4B \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha' = \beta' \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \\
A^2 > (-1)^k 4B \quad ve \quad &A < 0 \Rightarrow \quad |\alpha'| < |\beta'| \\
A^2 > (-1)^k 4B \quad ve \quad &A > 0 \Rightarrow \quad |\alpha'| > |\beta'|
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dir.

Sonuç 4.1

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots}}}} = \left[\overline{\frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2}} \right] \tag{4.18}$$

2-periyotlu genel sürekli kesiri göz önüne alalım.

(i) $A^2 = 4B \Rightarrow$ (4.18) sürekli kesir yakınsaktır ve yakınsadığı değer

$$\frac{b_1 - a_1 a_2 - b_2}{2a_1}$$

dir.

(ii) $A^2 > 4B$ ve $A < 0 \Rightarrow$ (4.18) sürekli kesir yakınsaktır ve yakınsadığı değer

$$\frac{b_1 - a_1 a_2 - b_2 - \sqrt{(a_1 a_2 + b_1 + b_2)^2 - 4b_1 b_2}}{2a_1}$$

dir.

(iii) $A^2 > 4B$ ve $A > 0 \Rightarrow$ (4.18) sürekli kesir yakınsaktır ve yakınsadığı değer

$$\frac{b_1 - a_1 a_2 - b_2 + \sqrt{(a_1 a_2 + b_1 + b_2)^2 - 4b_1 b_2}}{2a_1}$$

dir.

İspat. (4.18) periyodik genel sürekli kesirinin yaklaşımları

$$C_0 = \frac{A_0}{B_0} = \frac{0}{1},$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A_1}{B_1} = \frac{b_1}{a_1}, \\ C_2 &= \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2} \end{aligned}$$

dir. Buradan $A = A_1 + B_2 = a_1 a_2 + b_1 + b_2$ ve $B = b_1 b_2$ olarak elde edildir.
(4.14)' den

$$\alpha' = \frac{a_1a_2+b_1+b_2+\sqrt{(a_1a_2+b_1+b_2)^2-4b_1b_2}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta' = \frac{a_1a_2+b_1+b_2-\sqrt{(a_1a_2+b_1+b_2)^2-4b_1b_2}}{2}$$

olarak elde edilir.
(i) $A^2 = 4B$ olsun. Bu durumda (4.17)'den $x_1 = x_2$ olacağından Teorem 4.1(i) şartı sağlanır.
Böylece (4.18) periyodik genel sürekli kesir yakınsaktır ve yakınsadığı değer

$$x_1 = \frac{A_1 - \beta'}{B_1} = \frac{b_1 - a_1 a_2 - b_2}{2a_1}$$

dir.
(ii) $A^2 > 4B$ ve $A < 0$ olsun. Bu durumda (4.17)'den

$$\begin{aligned} |\alpha'| &< |\beta'| \Rightarrow \left|\frac{\alpha'}{B_1}\right| < \left|\frac{\beta'}{B_1}\right| \\ &\Rightarrow \left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_1 - \alpha'}{B_1}\right| < \left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_1 - \beta'}{B_1}\right| \\ &\Rightarrow |C_1 - x_2| < |C_1 - x_1| \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $C_0 \neq x_1$ ve $C_1 \neq x_1$ olduğundan Teorem 4.1(ii) şartı sağlanır.
Böylece (4.18) periyodik genel sürekli kesir yakınsaktır ve yakınsadığı değer

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{A_1 - \alpha'}{B_1} \\ &= \frac{b_1 - a_1 a_2 - b_2 - \sqrt{(a_1 a_2 + b_1 + b_2)^2 - 4 b_1 b_2}}{2a_1} \end{aligned}$$

dir.

(iii) $A^2 > 4B$ ve $A > 0$ olsun. Bu durumda (4.17)'den

$$\begin{aligned}
|\alpha'| &> |\beta'| \Rightarrow \left|\frac{\alpha'}{B_{k-1}}\right| > \left|\frac{\beta'}{B_{k-1}}\right| \\
&\Rightarrow \left|\frac{A_1}{B_{k-1}} - \frac{A_1-\alpha'}{B_{k-1}}\right| > \left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_1-\beta'}{B_1}\right| \\
&\Rightarrow |C_1 - x_2| > |C_1 - x_1|
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $C_0 \neq x_2$ ve $C_1 \neq x_2$ olduğundan, Teorem 4.1(ii) şartı sağlanır.

Böylece (4.18) periyodik genel sürekli kesir yakınsaktır ve yakınsadığı değer

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{A_1 - \beta'}{B_1} \\
&= \frac{b_1 - a_1a_2 - b_2 + \sqrt{(a_1a_2 + b_1 + b_2)^2 - 4b_1b_2}}{2a_1}
\end{aligned}$$

dir.

Bu tezdeki amaçlarımızdan biri, bir genel sürekli kesir verildiğinde rasyonel dizi inşa ederek o genel sürekli kesirin yakınsadığı reel sayıyı belirlemekti. O halde Sonuç 4.1' de, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olarak alınırsa, rasyonel dizi inşa edilerek verilen genel sürekli kesirin yakınsadığı reel sayı belirlenmiş olur.

Örnek 4.1 $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $a_1 = a_2 = 2a$, $b_1 = b_2 = a$ olsun.

$$\cfrac{a}{2a + \cfrac{a}{2a + \ddots}}$$

sürekli kesiri Sonuç 4.1' den

$$-a + \sqrt{a^2 + a}$$

reel sayısına yakınsar.

Örnek 4.2 $a \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere, $a_1 = a$, $a_2 = 2a$, $b_1 = 3a$, $b_2 = 4a$ olsun.

$$\cfrac{3a}{a + \cfrac{4a}{2a + \cfrac{3a}{a + \cfrac{4a}{2a + \ddots}}}}$$

sürekli kesiri Sonuç 4.1' den

$$\frac{-2a - 1 + \sqrt{4a^2 + 28a + 1}}{2}$$

reel sayısına yakınsar.

Sonuç 4.2 $a_2, b_1 \in \mathbb{Z}^{+}, b_1 = b_2$ ve $a_1 = b_1 k$; $\exists k \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere; (4.18) sürekli kesiri

$$\frac{-a_2 k + \sqrt{a_2 k \left(a_2 k + 4\right)}}{2k}$$

kuadratik irrasyonel sayısına yakınsar.

İspat. Teorem 3.8' den, (4.18) periyodik genel sürekli kesiri,

$$\cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \cfrac{1}{\frac{a_2 b_1}{b_2} + \cfrac{1}{\frac{a_1 b_2}{b_1^2} + \cfrac{1}{\frac{a_2 b_1^2}{b_2^2} + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{4.19}$$

şeklindeki sürekli kesire dönüşür.

Basit sürekli kesirin bileşenlerinin pozitif tamsayı olduğu göz önüne alındığında, hipotezden $a_2, b_1 \in \mathbb{Z}^{+}$, $b_1 = b_2$ ve $\frac{a_1}{b_1} \in \mathbb{Z}^{+}$ olarak alınırsa; (4.19) sürekli kesirinin bileşenleri pozitif tamsayı olur ve bu sürekli kesir

$$\left[0; \frac{a_1}{b_1}, a_2, \frac{a_1}{b_1}, a_2, \frac{a_1}{b_1}, ...\right] = \left[0; \overline{\frac{a_1}{b_1}, a_2}\right]$$

şeklinde bir periyodik basit sürekli kesire dönüşür. Lagrange Teoremi' nden, periyodik basit sürekli kesir bir kuadratik irrasyonel sayıya yakınsar. O halde $a_1 = b_1 k$;

$k \in \mathbb{Z}^{+}$ alınırsa, Sonuç 4.1' den bu sürekli kesir

$$\frac{-a_2 k + \sqrt{a_2 k\left(a_2 k + 4\right)}}{2k}$$

formundaki kuadratik irrasyonel sayıya yakınsar.

Örnek 4.3 $a \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere, $a_1 = a, a_2 = 2a, b_1 = b_2 = 1$ seçilirse; $\left[0; \overline{a, 2a}\right]$ periyodik basit sürekli kesiri elde edilir. Sonuç 4.2' den, bu sürekli kesir

$$-a + \sqrt{a^2 + 2}$$

kuadratik irrasyonel sayısına yakınsar.

4.2 Periyodik Genel Sürekli Kesirler ve Periyodik Rekürans Bağıntılar Arasındaki İlişki

Bir genel sürekli kesirin k-inci yaklaşımının pay ve paydaları

$$\begin{array}{lll} A_0 := a_0, & A_1 := a_0 a_1 + b_1, & A_k = a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2},\ k \geq 2 \\ B_0 := 1, & B_1 := a_1, & B_k = a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2},\ k \geq 2 \end{array} \tag{4.20}$$

bağıntılarını sağlar.

(4.20) ifadesinde, A_k ve B_k terimleri kendisinden önceki iki terime ve değişen a_k ve b_k katsayılarına bağlı olarak elde edilmektedir. $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ sabit diziler olarak seçilirse, (4.20) ifadesi ikinci dereceden bir *lineer rekürans bağıntı*ya dönüşür. Literatürde bu rekürans bağıntıların bir çok özel hali çalışılmıştır. Örneğin; $\forall k$ için $a_k = 1$ ve $b_k = 1$ alındığında, $\{A_k\}$ dizisi çok yakından bilinen Fibonacci dizisine dönüşür. $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ sabit olmayan diziler olarak seçilirse, (4.20) ifadesi ikinci dereceden sabit katsayılı bir lineer reküransı sağlamaz. Fakat bu durum $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerinin sabit katsayılı yüksek dereceden bir lineer rekürans bağıntı sağlamayacağı anlamına gelmemektedir.

Lenstra ve Shallit (1993), bir irrasyonel sayı verildiğinde onun basit sürekli kesir açılımını göz önüne alarak, $k \geq 0$ için $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerinin ne zaman sabit katsayılı bir lineer rekürans bağıntıyı sağlayacağını incelemişlerdir ve aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir. Bu sonuç aynı zamanda kuadratik irrasyonel sayıların bir karakterizasyonunu vermesi açısından oldukça önemlidir.

Teorem 4.2 α irrasyonel sayısının basit sürekli kesir açılımı $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ olsun. $k \geq 0$ olmak üzere; $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizileri sırasıyla α nın yaklaşımlarının pay ve paydalarının dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.
(i) $\{A_k\}$ dizisi, sabit kompleks katsayılı bir lineer rekürans sağlar.
(ii) $\{B_k\}$ dizisi, sabit kompleks katsayılı bir lineer rekürans sağlar.
(iii) $\{a_k\}$ dizisi periyodiktir.
(iv) α kuadratik irrasyonel sayıdır (Lenstra ve Shallit 1993).

Şimdi kuadratik irrasyonel sayılar kümesi ile periyodik rekürans dizileri arasındaki ilişki incelenecektir.

Lagrange Teoremi'nden, α nın kuadratik irrasyonel sayı olması için gerek ve yeter şart, α' nın periyodik basit sürekli kesir gösterimine sahip olmasıdır. Eğer α kuadratik irrasyonel sayısı $[0, 1)$ aralığına kısıtlanırsa; α' nın basit sürekli kesir açılımı

$$\alpha = [0; \overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_k}]$$

şeklindedir. Edson vd. (2011), her kuadratik irrasyonel sayıya karşılık gelen k-periyotlu Fibonacci dizisinin bulunabileceğini, üstelik bu k-periyotlu dizinin α' nın yaklaşımları ile elde edilebileceğini ifade etmişlerdir. Gerçekten, α' nın yaklaşımlarının dizisi

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, ..., \frac{A_n}{B_n}, ...$$

göz önüne alındığında $A_{-2} := 0$, $A_{-1} := 1$ ve $B_{-2} := 1$, $B_{-1} := 0$ olmak üzere dizinin payları ve paydaları

$$\begin{aligned} A_n &= a_n A_{n-1} + A_{n-2}, n \geq 0 \\ B_n &= a_n B_{n-1} + B_{n-2}, n \geq 0 \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlar. Burada α ya karşılık gelen k-periyotlu Fibonacci dizisinin, α nın sürekli kesir açılımındaki yaklaşımların paylarından elde edildiği açıktır. İki dizi için de başlangıç koşulları ve sağladığı rekürans bağıntılar aynıdır.

Örnek 4.4 $k = 2$ olsun. $[0; \overline{a_1, a_2}]$ periyodik basit sürekli kesirinin yaklaşımları;

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{a_1}, \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}, \frac{a_1 a_2 + 1}{a_1 (a_1 a_2 + 1) + a_1}, \frac{a_2 (a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_2 (a_1^2 a_2 + 2a_1) + (a_1 a_2 + 1)}, \cdots$$

şeklindedir.

Buna karşılık gelen 2-periyotlu Fibonacci dizisi

$$q_0 := 0, \ q_1 := 1, \ q_n = \begin{cases} a_1 q_{n-1} + q_{n-2}, \ n \equiv 1 \pmod 2 \\ a_2 q_{n-1} + q_{n-2}, \ n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}, \ n \geq 2$$

şeklindedir.

Örnek 4.5 $k = 3$ olsun. $[0; \overline{a_1, a_2, a_3}]$ periyodik basit sürekli kesirinin yaklaşımları;

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{a_1}, \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}, \frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1}, \frac{a_1 (a_3 a_2 + 1) + a_2}{a_1 (a_3 a_1 a_2 + a_3 + a_1) + (a_1 a_2 + 1)}, \cdots$$

şeklindedir.

Buna karşılık gelen 3-periyotlu Fibonacci dizisi

$$q_0 := 0, \ q_1 := 1, \ q_n = \begin{cases} a_1 q_{n-1} + q_{n-2}, \ n \equiv 1 \pmod 3 \\ a_2 q_{n-1} + q_{n-2}, \ n \equiv 2 \pmod 3 \\ a_3 q_{n-1} + q_{n-2}, \ n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}, \ n \geq 2$$

şeklindedir.

Örnek 4.6 $k=4$ olsun. $[0;\overline{a_1,a_2,a_3,a_4}]$ periyodik basit sürekli kesirinin yaklaşımları;

$$\frac{0}{1},\frac{1}{a_1},\frac{a_2}{a_1a_2+1},\frac{a_3a_2+1}{a_3\left(a_1a_2+1\right)+a_1},\frac{a_4\left(a_3a_2+1\right)+a_2}{a_4\left(a_3a_1a_2+a_3+a_1\right)+\left(a_1a_2+1\right)},$$
$$\frac{a_1\left(a_4a_3a_2+a_4+a_2\right)+a_3a_2+1}{a_1\left(a_4a_3a_1a_2+a_4a_3+a_4a_1+a_1a_2+1\right)+\left(a_3a_1a_2+a_3+a_1\right)},\cdots$$

şeklindedir.

Buna karşılık gelen 4-periyotlu Fibonacci dizisi

$$q_0:=0,q_1:=1,q_n=\begin{cases} a_1q_{n-1}+q_{n-2}, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ a_2q_{n-1}+q_{n-2}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)\\ a_3q_{n-1}+q_{n-2}, & n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\\ a_4q_{n-1}+q_{n-2}, & n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases},n\geq 2$$

şeklindedir.

Benzer şekilde Teorem 4.1 göz önüne alındığında, verilen yakınsak bir k-periyotlu genel sürekli kesire karşılık gelen k-periyotlu genel Fibonacci dizisi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3 (4.1) k-periyotlu genel sürekli kesirine karşılık gelen başlangıç koşulları $v_0:=0$, $v_1:=b_1$ olacak şekilde bir

$$v_n=\begin{cases} a_1v_{n-1}+b_1v_{n-2}, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,k)\\ a_2v_{n-1}+b_2v_{n-2}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,k)\\ \vdots & \\ a_{k-1}v_{n-1}+b_{k-1}v_{n-2}, & n\equiv k-1\,(\mathrm{mod}\,k)\\ a_kv_{n-1}+b_kv_{n-2}, & n\equiv k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)\end{cases},n\geq 2$$

k-periyotlu genel Fibonacci dizisi bulunabilir.

İspat. (4.1) k-periyotlu genel sürekli kesirinin yaklaşımları göz önüne alındığında, yaklaşımların paylarının dizisi $\{A_n\}$, $A_0 = 0$, $A_1 = b_1$ ve $n \geq 2$ için

$$A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2}$$

bağıntısını sağlar.

$\{v_n\}$, k-periyotlu genel Fibonacci dizisinin başlangıç koşulları $v_0 := 0$, $v_1 := b_1$ olacak şekilde seçilirse, bu iki dizi için de başlangıç koşulları ve sağladığı rekürans bağıntılar aynı olmuş olur.

Örnek 4.7 $k = 2$ olsun. $\left[\overline{\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2}}\right]$ periyodik genel sürekli kesirinin yaklaşımları;

$$\frac{0}{1}, \frac{b_1}{a_1}, \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}, \frac{a_1 (a_2 b_1) + b_1^2}{a_1 (a_1 a_2 + b_2) + b_1 a_1}, \frac{a_2 (a_1 a_2 b_1 + b_1^2) + b_2 (a_2 b_1)}{a_2 (a_1^2 a_2 + a_1 b_2 + a_1 b_1) + b_2 (a_1 a_2 + b_2)}, \cdots$$

şeklindedir.

Buna karşılık gelen 2-periyotlu genel Fibonacci dizisi

$$v_0 := 0,\ v_1 := b_1,\ v_n = \begin{cases} a_1 v_{n-1} + b_1 v_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 2 \\ a_2 v_{n-1} + b_2 v_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}, n \geq 2$$

şeklindedir.

Örnek 4.8 $k = 3$ olsun. $\left[\overline{\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3}}\right]$ periyodik genel sürekli kesirinin yaklaşımları;

$$\frac{0}{1}, \frac{b_1}{a_1}, \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}, \frac{a_3 (a_2 b_1) + b_3 b_1}{a_3 (a_1 a_2 + b_2) + b_3 a_1}, \frac{a_1 (a_3 a_2 b_1 + b_3 b_1) + b_1 (a_2 b_1)}{a_1 (a_3 a_1 a_2 + a_3 b_2 + b_3 a_1) + b_1 (a_1 a_2 + b_2)}, \cdots$$

şeklindedir.

Buna karşılık gelen 3-periyotlu genel Fibonacci dizisi

$$v_0 := 0,\ v_1 := b_1,\ v_n = \begin{cases} a_1 v_{n-1} + b_1 v_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ a_2 v_{n-1} + b_2 v_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 3 \\ a_3 v_{n-1} + b_3 v_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}, n \geq 2$$

şeklindedir.

Örnek 4.9 $k=4$ olsun. $\left[\overline{\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\frac{b_4}{a_4}}\right]$ periyodik genel sürekli kesirinin yaklaşımları;

$$\frac{0}{1},\frac{b_1}{a_1},\frac{a_2b_1}{a_1a_2+b_2},\frac{a_3\left(a_2b_1\right)+b_3b_1}{a_3\left(a_1a_2+b_2\right)+b_3a_1},$$
$$\frac{a_4\left(a_3a_2b_1+b_3b_1\right)+b_4\left(a_2b_1\right)}{a_4\left(a_3a_1a_2+a_3b_2+b_3a_1\right)+b_4\left(a_1a_2+b_2\right)},\ldots$$

şeklindedir.

Buna karşılık gelen 4-periyotlu genel Fibonacci dizisi

$$v_0:=0,\ v_1:=b_1,\ v_n=\begin{cases} a_1v_{n-1}+b_1v_{n-2}, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ a_2v_{n-1}+b_2v_{n-2}, & n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)\\ a_3v_{n-1}+b_3v_{n-2}, & n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\\ a_4v_{n-1}+b_4v_{n-2}, & n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases},n\geq 2$$

şeklindedir.

4.3 Periyodik Rekürans Dizilerinin Yakınsaklık Özelliği

Fibonacci dizisinin ardışık terimleri oranının altın orana yakınsadığı bilinmektedir. Yani; Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{(altın oran)}$$

dir.

Edson ve Yayenie (2009), 2-periyotlu Fibonacci dizisini gözönüne alarak $a_0=a_1=a$ olduğunda dizinin ardışık terimleri oranının

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n}=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

olacağını, $a_0\neq a_1$ olduğunda ise ardışık terimler oranının a_0 ve a_1 değerlerine bağlı olarak iki farklı limit noktası olacağından, yakınsak olamayacağını ifade etmişlerdir. Ayrıca, bu dizinin ardışık tek veya çift terimler oranının yakınsadığını göstermişlerdir.

Daha sonra Edson vd. (2011), k-periyotlu Fibonacci dizisinin alt dizilerini göz önüne alarak, bu alt dizilerin ardışık terimler oranının yakınsaklık durumunu incelemişlerdir.

Bu çalışmalardan yola çıkarak; k-periyotlu genel Fibonacci dizisinin bazı terimlerinin oranının yakınsaklık durumu incelenecektir. Burada elde edilen sonuçlar, geçmişte elde edilen sonuçları kapsamaktadır.

$a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ olmak üzere, A ve B değerleri (2.12)' de verilen

$$A := K_1 + b_1 K_2 \qquad B := \prod_{r=0}^{k-1} b_r$$

şeklinde, α ve β değerleri (2.16)' da verilen

$$\alpha := \frac{(-1)^k A + \sqrt{A^2 - 4(-1)^k B}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta := \frac{(-1)^k A - \sqrt{A^2 - 4(-1)^k B}}{2}$$

şeklinde tanımlansın.

$A \neq 0$ ve $A^2 > (-1)^k 4B$ olsun. Bu durumda (4.17)' den, ya $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ veya $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ dir.

Teorem 4.3 $n \geq 1$ ve $r = 1, 2, ..., k-1$ olmak üzere $\{v_{nk+r}\}$ dizisinin ardışık terimlerinin oranı

$$\begin{cases} (-1)^k \alpha, & \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \\ \\ (-1)^k \beta, & \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \end{cases}$$

değerine yakınsar.

İspat. $\{v_n\}$ dizisinin Binet formülünden yararlanarak;

$$\frac{v_{(n+1)k+r}}{v_{nk+r}} = \frac{(-1)^{k(n+2)}\left[\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)v_{k+r} - B\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)v_r\right]}{(-1)^{k(n+1)}\left[\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)v_{k+r} - B\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)v_r\right]}$$

$$= (-1)^k \frac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)v_{k+r} - B\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)v_r}{\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)v_{k+r} - B\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)v_r}$$

elde edilir. Eğer $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ ise; $\alpha\beta = (-1)^k B$ eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{v_{(n+1)k+r}}{v_{nk+r}} = (-1)^k \alpha \frac{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)v_{k+r} - \frac{B}{\alpha}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)v_r}{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)v_{k+r} - \frac{B}{\alpha}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\right)v_r}$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{(n+1)k+r}}{v_{nk+r}} = (-1)^k \alpha$$

dir. Benzer şekilde, eğer $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ ise; $\alpha\beta = (-1)^k B$ eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{v_{(n+1)k+r}}{v_{nk+r}} = (-1)^k \beta \frac{\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}-1\right)v_{k+r} - \frac{B}{\beta}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}-1\right)v_r}{\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}-1\right)v_{k+r} - \frac{B}{\beta}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}-1\right)v_r}$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{(n+1)k+r}}{v_{nk+r}} = (-1)^k \beta$$

dir.

Teorem 4.4 $n \geq 1$ ve $r = 1, 2, ..., k-1$ olmak üzere; $n \to \infty$ iken $\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}}$

$$\begin{cases} \frac{v_{k+r}+(-1)^{k+1}\beta v_r}{v_{k+r-1}+(-1)^{k+1}\beta v_{r-1}}, & \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \\ \\ \frac{v_{k+r}+(-1)^{k+1}\alpha v_r}{v_{k+r-1}+(-1)^{k+1}\alpha v_{r-1}}, & \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \end{cases}$$

değerine yakınsar.

İspat. $\{v_n\}$ dizisinin Binet formülünden yararlanak;

$$\begin{aligned}\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}} &= \frac{(-1)^{k(n+1)}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}v_{k+r} - B\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}v_r\right)}{(-1)^{k(n+1)}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}v_{k+r-1} - B\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}v_{r-1}\right)} \\ &= \frac{(\alpha^n-\beta^n)\,v_{k+r} - B\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)v_r}{(\alpha^n-\beta^n)\,v_{k+r-1} - B\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)v_{r-1}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ ise; $\alpha\beta = (-1)^k B$ eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}} = \frac{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)v_{k+r} - \frac{B}{\alpha}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\right)v_r}{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)v_{k+r-1} - \frac{B}{\alpha}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\right)v_{r-1}}$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}} = \frac{v_{k+r} + (-1)^{k+1}\beta v_r}{v_{k+r-1} + (-1)^{k+1}\beta v_{r-1}}.$$

Benzer şekilde, eğer $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ ise; $\alpha\beta = (-1)^k B$ eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}} = \frac{\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n - 1\right)v_{k+r} - \frac{B}{\beta}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1\right)v_r}{\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n - 1\right)v_{k+r-1} - \frac{B}{\beta}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1\right)v_{r-1}}$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}} = \frac{v_{k+r} + (-1)^{k+1}\alpha v_r}{v_{k+r-1} + (-1)^{k+1}\alpha v_{r-1}}$$

dir.

Eğer $\{v_n\}$ dizisinde $k = 2$ ve $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ başlangıç koşulları olarak alınırsa; Teorem 4.3 ve Teorem 4.4 aşağıdaki sonuçlara dönüşür.

Sonuç 4.4 $n \geq 1$ için, $\{v_n\}$ dizisinin ardışık çift terimleri oranı

$$\begin{cases} \frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}, & \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \\ \\ \frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2}, & \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \\ \end{cases}$$

değerine yakınsar. Burada $A = a_0a_1 + b_0 + b_1$ ve $B = b_0b_1$ dir.

Sonuç 4.5 $n \geq 1$ olmak üzere, $n \to \infty$ iken $\frac{v_{2n+1}}{v_{2n}}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha-b_0}{a_0}, & \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \\ \\ \frac{\beta-b_0}{a_0}, & \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \\ \end{cases}$$

değerine yakınsar.

Sonuç 4.6 $n \geq 1$ olmak üzere, $n \to \infty$ iken $\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha a_0}{\alpha-b_0}, & \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \\ \\ \frac{\beta a_0}{\beta-b_0}, & \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \\ \end{cases}$$

değerine yakınsar.

İspat. $\{v_n\}$ dizisinin Binet formülünden

$$\begin{aligned} \frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} &= \frac{a_0\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) - b_0\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)} \\ &= \frac{a_0\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right) - b_0\left(\alpha^n-\beta^n\right)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ ise; $\alpha\beta = b_0 b_1$ eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} = \frac{a_0\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right) - \frac{b_0}{\alpha}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)}$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} = \frac{\alpha a_0}{\alpha - b_0}$$

dir.

Benzer şekilde, eğer $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ ise; bu durumda

$$\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} = \frac{a_0\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}-1\right)}{\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}-1\right) - \frac{b_0}{\alpha}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}-1\right)}$$

elde edilir ve buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} = \frac{\beta a_0}{\beta - b_0}$$

dir.

Şimdi $r = 1, 2, ..., k$ için$\left\{\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}}\right\}$ dizisini gözönüne alalım.

Luis ve Oliveira (2014), *k-periyotlu Fibonacci dizisi* $\{q_n\}$ için

$$L_{i+1} = \frac{a_{i+2}L_i + 1}{L_i},\ i \in \{0, 1, ..., k-2\}$$

olmak üzere;

$$\left\{\frac{q_{nk+(i+2)}}{q_{nk+(i+1)}}\right\} \to L_{i+1}$$

olduğunu göstermişlerdir.

Buradan yola çıkarak, $r = 1, 2, ..., k$ olmak üzere $\left\{\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}}\right\}$ dizisi için benzer bir sonuç elde edilebilecektir. Yani; $\left\{\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}}\right\}$ dizisinin ardışık terimlerinin limit noktası bir önceki limit noktasına bağlı olarak elde edilebilecektir.

$\{v_n\}$ dizisinin tanımından; $i = 0, 1, ..., k-1$ için

$$v_{nk+i} = a_i v_{nk+i-1} + b_i v_{nk+i-2}$$

yazılabilir.

Eğer $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ ise; Teorem 4.4' den dolayı

$$\frac{v_{nk+1}}{v_{nk}} \rightarrow \frac{v_{k+1} + (-1)^{k+1} \beta v_1}{v_k + (-1)^{k+1} \beta v_0}$$

dir.

$\frac{v_{k+1}+(-1)^{k+1}\beta v_1}{v_k+(-1)^{k+1}\beta v_0} = L_0$ denilirse; benzer şekilde

$$\frac{v_{nk+2}}{v_{nk+1}} \rightarrow \frac{v_{k+2} + (-1)^{k+1} \beta v_2}{v_{k+1} + (-1)^{k+1} \beta v_1} = \frac{a_2 L_0 + b_2}{L_0} = L_1$$

ve

$$\frac{v_{nk+3}}{v_{nk+2}} \rightarrow \frac{a_3 L_1 + b_3}{L_1} = L_2$$

dir.

Genel olarak,

$$\frac{v_{nk+(i+2)}}{v_{nk+(i+1)}} \rightarrow \frac{a_{i+2} L_i + b_{i+2}}{L_i} = L_{i+1}, \; i \in \{0, 1, ..., k-2\}$$

yazılabilir. Burada negatif olmayan i tamsayıları için $L_{k+i} = L_i$ dir.

Böylece, $r = 1, 2, ..., k$ için $\left\{\frac{v_{nk+r}}{v_{nk+r-1}}\right\}$ dizisinin limiti

$$\{L_0, L_1, ..., L_{k-1}\}$$

olarak elde edilir.

Eğer $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ ise; benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\frac{v_{nk+1}}{v_{nk}} &\rightarrow \widetilde{L}_0, \\
\frac{v_{nk+2}}{v_{nk+1}} &\rightarrow \frac{a_2 \widetilde{L}_0 + b_2}{\widetilde{L}_0} = \widetilde{L}_1
\end{aligned}$$

ve genel olarak

$$\frac{v_{nk+(i+2)}}{v_{nk+(i+1)}} \to \frac{a_{i+2}\widetilde{L}_i + b_{i+2}}{\widetilde{L}_i} = \widetilde{L}_{i+1}, i \in \{0, 1, ..., k-2\}.$$

elde edilir.

Örnek 4.10 $\{v_n\}$ dizisinde $k = 3$ ve başlangıç koşulları $v_0 = 0, v_1 = 1$ olsun. $n \geq 2$ için;

$$v_n = \begin{cases} a_0 v_{n-1} + b_0 v_{n-2}, & n \equiv 0 \, (\text{mod} \, 3) \\ a_1 v_{n-1} + b_1 v_{n-2}, & n \equiv 1 \, (\text{mod} \, 3) \\ a_2 v_{n-1} + b_2 v_{n-2}, & n \equiv 2 \, (\text{mod} \, 3) \end{cases}$$

dir. Genelleştirilmiş continuant tanımı kullanılırsa;

$$A = a_0 a_1 a_2 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_2 b_1 \quad \text{ve} \quad B = b_0 b_1 b_2$$

dir. $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1, b_0 = 2, b_1 = -1, b_2 = 1$ olarak alınırsa; $\{v_n\}$ dizisinin terimleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
v_n	1	1	3	5	8	18	28	46	102	158	260	576	...

$\alpha = -3 + \sqrt{7}$ ve $\beta = -3 - \sqrt{7}$ olduğundan $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ dir.
$r = 1, 2$ ve 3 için $\left\{\frac{v_{3n+r}}{v_{3n+r-1}}\right\}$ dizisinin terimlerinin limiti

$$\frac{v_{3n+1}}{v_{3n}} \to \frac{v_4 + \alpha v_1}{v_3 + \alpha v_0} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} = \widetilde{L}_0$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{3n+2}}{v_{3n+1}} &\to \frac{v_5 + \alpha v_2}{v_4 + \alpha v_1} = -1 + \sqrt{7} \\ &= \frac{a_2 \widetilde{L}_0 + b_2}{\widetilde{L}_0} = \frac{\widetilde{L}_0 + 1}{\widetilde{L}_0} = \widetilde{L}_1 \end{aligned}$$

$$\frac{v_{3n+3}}{v_{3n+2}} \to \frac{\widetilde{L}_1 + 2}{\widetilde{L}_1} = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = \widetilde{L}_2$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.11 $\{v_n\}$ dizisinde $k=2$ ve başlangıç koşulları $v_0=0, v_1=1$ olsun.
$n \geq 2$ için,

$$v_n = \begin{cases} a_0 v_{n-1} + b_0 v_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ a_1 v_{n-1} + b_1 v_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

dir. Genelleştirilmiş continuant tanımı kullanılırsa;

$$A = a_0 a_1 + b_0 + b_1 \quad \text{ve} \quad B = b_0 b_1$$

olarak elde edilir.
$a_0 = 1, a_1 = 2, b_0 = 3, b_1 = 4$ olarak seçilirse; $\{v_n\}$ dizisinin terimleri aşağıdaki şekildedir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
v_n	1	1	6	9	42	69	306	513	2250	3789	16578	27945	...

.

$\alpha = \frac{9+\sqrt{33}}{2}$ ve $\beta = \frac{9-\sqrt{33}}{2}$ olduğundan $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$dir.
$\{v_n\}$ dizisinin ardışık çift terimlerinin oranları

$$\frac{v_{2n+2}}{v_{2n}} \rightarrow \alpha = \frac{9+\sqrt{33}}{2}$$

dir.
$r = 1$ ve 2 için $\left\{\frac{v_{2n+r}}{v_{2n+r-1}}\right\}$ dizisinin terimlerinin limiti

$$\frac{v_{2n+1}}{v_{2n}} \rightarrow \frac{\alpha - b_0}{a_0} = \frac{3+\sqrt{33}}{2} = L_0$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} &\rightarrow \frac{\alpha a_0}{\alpha - b_0} = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ &= \frac{a_0 L_0 + b_0}{L_0} = L_1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.12 Örnek 4.11' de; $a_0 = 3, a_1 = -5, b_0 = 2, b_1 = 1$ olarak seçilirse; $\{v_n\}$ dizisinin terimleri;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
v_n	1	3	-14	-36	166	426	-1964	-5040	23 236	59628	...

olarak elde edilir.

$$\alpha = -6 + \sqrt{34} \quad \text{ve} \quad \beta = -6 - \sqrt{34},$$

olduğundan $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ dir.

$\{v_n\}$ dizisinin ardışık çift terimleri oranı

$$\frac{v_{2n+2}}{v_{2n}} \to \beta = -6 - \sqrt{34}$$

değerine yakınsar ve $r = 1$ ve 2 için $\left\{\frac{v_{2n+r}}{v_{2n+r-1}}\right\}$ dizisinin terimleri

$$\frac{v_{2n+1}}{v_{2n}} \quad \to \quad \frac{\beta - b_0}{a_0} = -\frac{8+\sqrt{34}}{3} = \widetilde{L}_0$$

$$\begin{aligned}\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} \quad &\to \quad \frac{\beta a_0}{\beta - b_0} = \frac{7+\sqrt{34}}{5} \\ &= \quad \frac{a_0\widetilde{L}_0 + b_0}{\widetilde{L}_0} = \widetilde{L}_1.\end{aligned}$$

dir.

Uyarı 4.1 Bu bölümdeki bütün sonuçlar, Tan ve Ekin tarafından 2014 yılında elde edilmiştir (Tan ve Ekin 2014).

4.4 Periyodik Rekürans Bağıntılar Üzerinde Bazı Sonuçlar

Bu bölümde, $\{v_n\}$ dizisinde $k = 2$ alınarak elde edilen ve Fibonacci ve Lucas dizilerinin genelleştirilmeleri olan diziler göz önüne alınacaktır. Bu dizileri içeren özellikler elde edilirken, notasyon karmaşasını önlemek için Fibonacci dizisinin genelleştirmesi olan 2-periyotlu genel Fibonacci dizisi $\{f_n\}$ ile, başlangıç koşullarının

değiştirilmesiyle elde edilen ve Lucas dizisinin genelleştirmesi olan 2-periyotlu genel Fibonacci dizisi ise $\{l_n\}$ ile gösterilecektir.
Yani $\{f_n\}$ dizisi

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = \begin{cases} a_0 f_{n-1} + b_0 f_{n-2}, & n \text{ çift} \\ a_1 f_{n-1} + b_1 f_{n-2}, & n \text{ tek} \end{cases}, n \geq 2 \tag{4.21}$$

ve $\{l_n\}$ dizisi

$$l_0 = 2,\ l_1 = a_1,\ l_n = \begin{cases} a_0 l_{n-1} + b_0 l_{n-2}, & n \text{ çift} \\ a_1 l_{n-1} + b_1 l_{n-2}, & n \text{ tek} \end{cases}, n \geq 2 \tag{4.22}$$

dir.

Teorem 4.5 $A = a_0a_1 + b_0 + b_1$ ve $B = b_0b_1$ olmak üzere; $\{l_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x) = \frac{2 + a_1x - (a_0a_1 + 2b_1)x^2 + b_0a_1x^3}{1 - Ax^2 + Bx^4}$$

ve Binet formülü

$$l_{2n} = (a_0a_1 + 2b_0)\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - 2(b_0b_1)\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \tag{4.23}$$

$$l_{2n+1} = a_1(a_0a_1 + 2b_0 + b_1)\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - a_1(b_0b_1)\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \tag{4.24}$$

dir.

İspat. Teorem 2.5 ve Teorem 2.6' da $k = 2$ alınarak elde edilir.

Yayenie (2011), $\{f_n\}$ dizisinde $b_1 = b_2$ durumunu göz önüne alarak; Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği,...gibi Fibonacci dizisi için bilinen özdeşlikleri elde etmiştir. Şahin (2011), $\{f_n\}$ dizisinde $b_1 = b_2$ şartı aranmaksızın, dizinin çift terimlerinin Gelin-Cesaro özdeşliğini ve Catalan özdeşliğini sağladığını göstermiştir. Bu özellikler elde edilirken yazarların kullandıkları metod, dizilerin üreteç fonksiyonunu kullanmaya dayanmaktadır.

Burada $\{f_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizilerinin bazı özellikleri matris metodu kullanılarak elde edilecektir. Böylelikle hem geçmişte yapılan çalışmaların daha geneli elde edilecek, hem de matris metodu kullanılarak ispatlar daha kolay bir şekilde verilecektir. Bu bölümde elde edilecek olan sonuçlar orjinal sonuçlarımızdır ve yayın olarak gönderilmiştir.

Fibonacci Q-matrisi

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir (Gould 1981).

Benzer şekilde $S := \begin{pmatrix} A & -B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi tanımlandığında;

$$S^n = \frac{1}{a_0} \begin{pmatrix} f_{2(n+1)} & -Bf_{2n} \\ f_{2n} & -Bf_{2(n-1)} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

olduğu tümevarımla elde edilebilir. Burada S matrisinin terslenebilir bir matristir. Bu matris eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.6 m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere;

(i) $-a_0^2 B^{m-1} = f_{2(m-1)} f_{2(m+1)} - f_{2m}^2$

(ii) $a_0 B^m f_{2(n-m)} = f_{2n} f_{2(m+1)} - f_{2m} f_{2(n+1)}$

(iii) $a_0 f_{2n} = f_{2m} f_{2(n-m+1)} - B f_{2(n-m)} f_{2(m-1)}$

(iv) $a_0 f_{2(n+m+1)} = f_{2(n+1)} f_{2(m+1)} - B f_{2n} f_{2m}$

(v) $a_0 f_{2(n+m)} = f_{2(n+1)} f_{2m} - B f_{2n} f_{2(m-1)}$

(vi) $a_0 f_{2(n+m-1)} = f_{2n} f_{2m} - B f_{2(n-1)} f_{2(m-1)}$ dir.

İspat. (i) (4.25) matris eşitliğinde her iki tarafın determinantı alınırsa;

$$-a_0^2 B^{m-1} = f_{2(m-1)} f_{2(m+1)} - f_{2m}^2$$

eşitliği elde edilir. Bu özellik, $\{f_n\}$ dizisinin çift terimleri için *Cassini özdeşliği*dir.
(ii) S matrisi terslenebilir olduğundan

$$S^{-n} = \frac{1}{a_0 B^n} \begin{pmatrix} -Bf_{2(n-1)} & Bf_{2n} \\ -f_{2n} & f_{2(n+1)} \end{pmatrix}$$

dir. $S^{n-m} = S^n S^{-m}$ eşitliğini gözönüne alınırsa; (4.25) matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0} \begin{pmatrix} f_{2(n-m+1)} & -Bf_{2(n-m)} \\ f_{2(n-m)} & -Bf_{2(n-m-1)} \end{pmatrix} \\ = \; & \frac{-1}{a_0^2 B^{m-1}} \begin{pmatrix} f_{2(n+1)} f_{2(m-1)} - f_{2n} f_{2m} & f_{2n} f_{2(m+1)} - f_{2m} f_{2(n+1)} \\ f_{2(m-1)} f_{2n} - f_{2(n-1)} f_{2m} & f_{2(n-1)} f_{2(m+1)} - f_{2n} f_{2m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $(1,2)$ bileşenleri eşitlenirse;

$$a_0 B^m f_{2(n-m)} = f_{2n} f_{2(m+1)} - f_{2m} f_{2(n+1)}$$

elde edilir. Bu özellik $\{f_n\}$ dizisinin çift terimleri için *d'Ocagne's özdeşliğine* karşılık gelir.
(iii) $S^{n-m} S^{m-1} = S^{n-1}$ eşitliği gözönüne alınır ve (4.25) matris eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_{2(n-m+1)} f_{2m} - Bf_{2(n-m)} f_{2(m-1)} & -Bf_{2(m-1)} f_{2(n-m+1)} + B^2 f_{2(n-m)} f_{2(m-2)} \\ f_{2(n-m)} f_{2m} - Bf_{2(n-m-1)} f_{2(m-1)} & -Bf_{2(m-1)} f_{2(n-m)} + B^2 f_{2(n-m-1)} f_{2(m-2)} \end{pmatrix} \\ = \; & a_0 \begin{pmatrix} f_{2n} & -Bf_{2(n-1)} \\ f_{2(n-1)} & -Bf_{2(n-2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Matrisin her iki tarafının $(1,1)$ bileşenleri eşitlenirse;

$$a_0 f_{2n} = f_{2m} f_{2(n-m+1)} - Bf_{2(n-m)} f_{2(m-1)}$$

elde edilir. Bu özellik $\{f_n\}$ dizisinin çift terimleri için *Convolution özelliğidir.*Benzer şekilde $S^{n+m} = S^n S^m$ eşitliği gözönüne alınır ve (4.25) matris eşitliği kullanılırsa; (iv), (v) ve (iv) eşitlikleri elde edilir.

Eğer (iv) eşitliğinde $n = m$ alınırsa;

$$a_0 f_{2(2n+1)} = f_{2(n+1)}^2 - B f_{2n}^2$$

elde edilir.
Eğer (v) eşitliğinde $n = m$ alınırsa;

$$\begin{aligned} a_0 f_{4n} &= f_{2n}\left(f_{2(n+1)} - B f_{2(n-1)}\right) \\ &= f_{2n}\left(\left(b_1 - b_0\right) f_{2n} + a_0 l_{2n}\right) \end{aligned}$$

formülü elde edilir. Son eşitlikte $2n = m$ ve $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$ alınırsa; Fibonacci ve Lucas dizileri için çok iyi bilinen

$$F_{2m} = F_m L_m$$

formülü elde edilir.

$\{f_n\}$ dizisinin çift terimleri için Binet formülü, matris metodunu kullanarak da elde edilebilir. S matrisinin karakteristik polinomu $p(z) = z^2 - Az + B$ nin iki farklı kökünün var olmasını garanti etmek için $A^2 - 4B \neq 0$ olduğunu kabul edelim. α ve β, $p(z) = z^2 - Az + B$ polinomunun kökleridir.

Teorem 4.7 $\{f_{2n}\}$ dizisinin Binet formülü

$$f_{2n} = a_0 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

İspat. S matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir.

$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ dir. Buradan $S^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$ olarak elde edilir.

Bu matris eşitliğinde karşılık gelen bileşenler eşitlenir ve (4.25) matris eşitliği kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

S matrisinden yararlanarak $\{l_n\}$ dizisi için de bir matris eşitliği elde edilebilir. $\{l_n\}$ dizisi için elde edilecek sonuçlar $b_0 = b_1$ durumunda geçerlidir.

Lucas dizileri için bilinen

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

matris eşitliğine benzer olarak

$$\frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} l_{2(n+1)} & -Bl_{2n} \\ l_{2n} & -Bl_{2(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -2B \\ 2 & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \tag{4.26}$$

elde edilebilir.

Teorem 4.8 $\{l_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$l_{2(n-1)} l_{2(n+1)} - l_{2n}^2 = a_0^2 B^{n-1} (\alpha - \beta)^2$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $\{l_n\}$ dizisi için tanımlanan (4.26) matris eşitliğinin her iki tarafının determinantı alınırsa;

$$\left(l_{2(m-1)}l_{2(m+1)} - l_{2m}^2\right) = a_0^2 B^{n-1}\left(A^2 - 4B\right)$$

elde edilir. $A^2 - 4B = (\alpha - \beta)^2$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir. Bu özellik $\{l_n\}$ dizisinin çift terimleri için *Cassini özdeşliği*dir.

Matris tekniği, $\{f_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizilerini içeren bazı bağıntıları ispatlamak için de kullanılabilir. Bunun için $b_0 = b_1$ ve $\Delta := A^2 - 4B \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$R := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi tanımlandığında;

$$R^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} L_n & 5F_n \\ F_n & L_n \end{pmatrix}$$

dir. Benzer şekilde; $T := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & \Delta \\ 1 & A \end{pmatrix}$ matrisi tanımlanırsa;

$$T^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} l_{2n} & \Delta\frac{f_{2n}}{a_0} \\ \frac{f_{2n}}{a_0} & l_{2n} \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

olduğu tümevarım kullanılarak gösterilebilir.

Teorem 4.9 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

(i) $4B^n = l_{2n}^2 - \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2n}^2$

(ii) $2f_{2(m+n)} = f_{2m}l_{2n} + f_{2n}l_{2m}$

(iii) $2l_{2(m+n)} = l_{2m}l_{2n} + \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2n}f_{2m}$

(iv) $2B^m f_{2(n-m)} = f_{2n}l_{2m} - l_{2n}f_{2m}$

(v) $2B^m l_{2(n-m)} = l_{2n}l_{2m} - \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2n}f_{2m}$

(vi) $l_{2n}l_{2m} = l_{2(n+m)} + B^m l_{2(n-m)}$

(vii) $f_{2n}l_{2m} = f_{2(n+m)} + B^m f_{2(n-m)}$ dir.

İspat. (4.27) matris eşitliğinin her iki tarfının determinantı alındığında (i) eşitliği elde edilir.

$T^{n+m} = T^n T^m$ eşitliği gözönüne alınır ve (4.27) matris eşitliği kullanılırsa;

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} l_{2(n+m)} & \Delta\frac{f_{2(n+m)}}{a_0} \\ \frac{f_{2(n+m)}}{a_0} & l_{2(n+m)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} l_{2n}l_{2m} + \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2n}f_{2m} & \frac{\Delta}{a_0}\left(f_{2m}l_{2n} + f_{2n}l_{2m}\right) \\ \frac{1}{a_0}\left(f_{2n}l_{2m} + f_{2m}l_{2n}\right) & \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2m}f_{2n} + l_{2n}l_{2m} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Her iki tarafın kaşılık gelen bileşenleri eşitlenirse; (ii) ve (iii) eşitlikleri elde edilir.

Benzer şekilde $T^{n-m} = T^n T^{-m} = T^n \left(T^m\right)^{-1}$ eşitliği gözönüne alınır ve (4.27) matris eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\begin{pmatrix} l_{2(n-m)} & \frac{\Delta}{a_0}f_{2(n-m)} \\ \frac{1}{a_0}f_{2(n-m)} & l_{2(n-m)} \end{pmatrix} \\ = \quad &\frac{1}{4B^m}\begin{pmatrix} l_{2n}l_{2m} - \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2n}f_{2m} & \frac{-\Delta}{a_0}\left(l_{2n}f_{2m} - f_{2n}l_{2m}\right) \\ \frac{-1}{a_0}\left(l_{2n}f_{2m} - f_{2n}l_{2m}\right) & l_{2n}l_{2m} - \frac{\Delta}{a_0^2}f_{2n}f_{2m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın karşılık gelen bileşenleri eşitlenirse; (iv) ve (v) eşitlikleri elde edilir.

Son olarak;

$$T^{n+m} + B^m T^{n-m} = T^n T^m + B^m T^n \left(T^m\right)^{-1}$$

eşitliği gözönüne alınır ve matris özdeşliği kullanıldıktan sonra elde edilen matris eşitliğinin her iki tarafının karşılık gelen bileşenleri eşitlenirse; (vi) ve (vii) özellikleri elde edilir.

Buraya kadar, incelenen dizilerin çift terimleri için matris özdeşliği kullanılabildi. Şimdi $\{f_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizilerinin hem tek hem çift terimlerini içeren yeni bir matris eşitliği elde edilecektir.

Sürekli kesirler ve 2×2 tipindeki matrisler arasındaki ilişkiden yararlanarak,

$$U := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 a_1 + b_1 & a_0 b_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

matrisi tanımlanırsa;

$$U^n = \begin{pmatrix} f_{2n+1} & \frac{a_1 b_0}{a_0} f_{2n} \\ f_{2n} & \frac{b_0}{a_0}\left(f_{2n} - b_1 f_{2(n-1)}\right) \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

olarak elde edilir.

$\{f_n\}$ dizisinin tek ve çift terimleri için Binet formülü, U matrisi kullanılarak elde edilebilir. Burada yine U matrisinin karakteristik polinomu olan $p(z) = z^2 - Az + B$ nin farklı iki kökünün var olmasını garantilemek için $A^2 - 4B \neq 0$ olduğunu kabul edelim. α ve β, $p(z) = z^2 - Az + B$ polinomunun kökleridir.

Teorem 4.10 $\{f_n\}$ dizisinin Binet formülü

$$\begin{aligned} f_{2n} &= a_0 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ f_{2n+1} &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - a_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

dir.

İspat. U matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - b_0}{a_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} \frac{\beta - b_0}{a_0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan $P = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - b_0}{a_0} & \frac{\beta - b_0}{a_0} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $P^{-1}UP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ dir. Dolayısıyla $U^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$ dir. Bu matris eşitliğinin her iki tarafının $(1,1)$ ve $(2,1)$

bileşenlerini eşitlersek $\{f_n\}$ dizisi için Binet formülleri elde edilir.

Teorem 4.11 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

(i) $\frac{b_0}{a_0}(f_{2n+1}(f_{2n} - b_1 f_{2(n-1)}) - a_1 f_{2n}^2) = B^n$

(ii) $B^m f_{2(n-m)} = f_{2n} f_{2m+1} - f_{2m} f_{2n+1}$

(iii) $f_{2(n+m)} = f_{2n} f_{2m+1} + f_{2m} \left(\frac{b_0}{a_0} f_{2n} - \frac{B}{a_0} f_{2(n-1)} \right)$

(iv) $f_{2(n+m)+1} = f_{2n+1} f_{2m+1} + \frac{a_1 b_0}{a_0} f_{2n} f_{2m}$ dir.

İspat.

(i) (4.29) matris eşitliğinin her iki tarafının determinantını alırsak; (i) eşitliği elde edilir.

Eğer $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$ ve $2n = m$ alınırsa; bu eşitlik Fibonacci dizileri için bilinen

$$F_{m+1} F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$$

Cassini özdeşliğine dönüşür.

(ii) $U^{n-m} = U^n U^{-m}$ eşitliği gözönüne alınır ve matris özdeşliği kullanılırsa; (ii) eşitliği elde edilir.

Eğer $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$ ve $2n = r$, $2m = s$ alınırsa; bu sonuç Fibonacci dizileri için bilinen

$$(-1)^s F_{r-s} = F_r F_{s+1} - F_s F_{r+1}$$

d'Ocagne's özdeşliğine dönüşür.

Benzer şekilde $U^{n+m} = U^n U^m$ eşitliği gözönüne alınırsa; (iii) ve (iv) elde edilir.

Eğer $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$ ve $2n = r$, $2m = s$ alınırsa; bu eşitlikler sırasıyla Fibonacci dizileri için bilinen

$$\begin{aligned} F_{r+s} &= F_r F_{s+1} + F_s F_{r-1} \\ F_{r+s+1} &= F_{r+1} F_{s+1} + F_r F_s \end{aligned}$$

özelliklerine dönüşür.

Benzer şekilde $\{l_n\}$ dizisinin tek ve çift terimlerini içeren matris eşitliği tanımlayabiliriz. Bunun için $b_0 = b_1$ olduğunu kabul edelim.

$\{l_n\}$ dizisinin tek ve çift terimlerini içeren matris eşitliği

$$\begin{pmatrix} a_1 & 2\frac{a_1 b_0}{a_0} \\ 2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 a_1 + b_1 & a_1 b_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} l_{2n+1} & \frac{a_1 b_0}{a_0} l_{2n} \\ l_{2n} & \frac{b_0}{a_0}\left(l_{2n} - b_0 l_{2(n-1)}\right) \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

şeklindedir.

Teorem 4.12

$$a_0 b_0 (l_{2n+1}[l_{2n} - b_0 l_{2(n-1)}] - a_1 l_{2n}^2) = -\left(\alpha - \beta\right)^2 B^n.$$

İspat. (4.30) matris eşitliğinin her iki tarafının determinantı alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Eğer $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$ ve $2n = m$ alınırsa; bu eşitlik Lucas dizileri için çok iyi bilinen

$$L_{m+1} L_{m-1} - L_m^2 = (-1)^{m+1} 5$$

özdeşliğine dönüşür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bilindiği üzere, rasyonel katsayılı bir polinomun kökü olarak ifade edilen reel sayılara *cebirsel sayı*, rasyonel bir polinomun kökü olarak ifade edilemeyen reel sayılara *transandant sayı* denilmektedir. Bir reel sayının basit sürekli kesir gösterimi ile bu reel sayının cebirsel sayı veya transandant sayı olup olmadığı ile ilgili durumlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Derecesi 1 olan cebirsel sayılar (rasyonel sayılar); sonlu basit sürekli kesir gösterimine sahiptir.
2. Derecesi 2 olan cebirsel sayılar (kuadratik irrasyonel sayılar); periyodik basit sürekli kesir gösterimine sahiptirler.
3. Transandant sayılar ve derecesi 2'den büyük olan cebirsel sayılar; periyodik olmayan sonsuz basit sürekli kesirler ile ifade edilebilirler.

Fakat genel sürekli kesir durumunda; $\lim_{k\to\infty} \frac{A_k}{B_k}$ değeri her zaman var olmak zorunda olmadığından, genel sürekli kesirin ne tür bir reel sayıya yakınsayacağını bulmak kolay değildir.

Bu çalışmada, Wall (1948) tarafından periyodik genel sürekli kesirin yakınsak olması için gerek ve yeter şartı ifade eden teoremden yararlanarak genel sürekli kesirin periyodik olduğu durum göz önüne alınmıştır. Periyodik genel sürekli kesire karşılık gelen periyodik rekürans dizileri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen periyodik rekürans dizilerinin bazı terimlerinin oranının yakınsaklık durumu incelenmiştir. Son olarak Fibonacci dizilerinin bir genelleştirmesi olan periyodik rekürans bağıntılar üzerinde çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, daha önce elde edilen sonuçları kapsamaktadır.

KAYNAKLAR

Chrystal, G. 1964. Algebra an Elementary Textbook for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges, Volume II, AMS Chelsea Publishing, 628 p., USA.

Edson, M. and Yayenie, O. 2009. A New Generalizations of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula, Integers 9, 639–654.

Edson, M., Lewis, S. and Yayenie, O. 2011. The k-Periodic Fibonacci Sequence and an Extended Binet's Formula, Integers 11, 739–751.

Everest, G., Poorten, A., Shparliaski, I. and Ward, T. 2003. Recurrence Sequences, American Mathematical Society, 323 p., USA.

Falcon, S. and Plaza, A. 2007. The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-Triangle, Chaos, Solitons and Fractals 33, 38-49.

Gould, H.W. 1981. A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem, Fibonacci Quarterly, 19 (3), 250-257.

Hensley, D. 2006. World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd., 245 p., Singapore.

Horadam, A. F. 1961. A generalized Fibonacci sequence, Amer. Math. Monthly, 68 (5), 455-459.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, 672p., New York.

Krassimir, A. T. 1986. On a second new generalization of the Fibonacci sequence, Fibonacci Quart. 24 (4), 362-365.

Lenstra, H.W. and Shallit, J.O. 1993. Continued Fractions and Linear Recurrences, Mathematics of Computation, 61 (203), 351-354.

Luis, R. and Olievira, H. M. 2014. Products of 2x2 matrices related to non autonomous Fibonacci difference equations, Applied Mathematics and Computation, 226, 101-116.

Muir, T. 1960. A Treatise on the Theory of Determinants, Dover, 774 p., New York.

Olds, C. D. 1963. Continued Fractions, Random House, 169 p., New York.

Panario, D., Sahin, M. and Wang, Q. 2013. A Family of Fibonacci-like Conditional Sequences, Integers 13 (A78).

Panario, D., Sahin, M., Wang, Q. and Webb, W. 2014. General conditional recurrences, Applied Mathematics and Computation, 243, 220-231.

Poorten, A. J. 1989. Notes on continued fractions and recurrence sequences, Number theory and cryptography (Sydney) 154, 86–97.

Rosen, H. K. 2005. Elemantary Number Theory, 719 p., New York.

Sahin, M. 2011a. The generating function of a family of sequences in terms of the continuant, Applied Mathematics and Computation, 217 (12), 5416–5420.

Sahin, M. 2011b. The Gelin-Cesaro identity in some conditional sequences, Hacet. J. Math. Stat., 40 (6), 855-861.

Tan, E. and Ekin, A.B. 2014. On Convergence Properties of Fibonacci-Like Conditional Sequences, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 63(2),1-11.

Vajda, S. 1989. Fibonacci & Lucas Numbers and The Golden Section, Theory and Applications, Ellis Horwood Ltd. Chishester.

Wall, H.S. 1948. Analytic Theory of Continued Fractions, D.Van Nostrand Company, INC., 433 p., New York.

Weld, L.G. 1893. A Short Course In The Theory Of Determinants, Macmillan And Co., 274 p., New York.

Yayenie, O. 2011. A note on generalized Fibonacci sequences, Applied Mathematics and Computation, 217 (12), 5603-5611.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif TAN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 12/11/1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans : Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Ocak 2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Tobb Etü Matematik Bölümü Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi (2008-2009)

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Araş. Gör. (2009-...)

Yayınları:

1) Tan, E. and Ekin, A.B. On Convergence Properties of Fibonacci-Like Conditional Sequences, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, Volume 63 (2), 1-11, 2014.

2) Tan, E. and Ekin, A.B. Some Identities On Conditional Sequences By Using Matrix Method (yayına gönderildi).

3) Tan, E. and Ekin, A.B. Bi-periodic Incomplete Lucas Sequences (yayına gönderildi).

Katıldığı Sempozumlar:

1) Tan, E. DIMACOS'11 (Discrete Mathematics & Computer Science), Some Subsequences of the Generalized Fibonacci and Lucas Sequences, 5-8 May 2011 Fas, Morocco.

2) Tan, E. International Conference On Algebra and Number Theory (ICA), Some Identities On Conditional Sequences By Using Matrix Method, 5-8 August 2014, Samsun,Turkey.