T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN ÖZDEĞERLERİNİ VE NORMALİZE LAPLACIAN ÖZDEĞERLERİNİ İÇEREN PARAMETRELERİ İÇİN SINIRLAR

Şerife Burcu BOZKURT

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2013

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Şerife Burcu BOZKURT tarafından hazırlanan "Grafların Özdeğerlerini ve Normalize Laplacian Özdeğerlerini İçeren Parametreleri İçin Sınırlar" adlı tez çalışması 23/12/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Başkan Doç. Dr. Hacı AKTAŞ	....
Danışman Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	....
Üye Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN	....
Üye Doç. Dr. Süleyman SOLAK	....
Üye Doç. Dr. Yıldıray KESKİN	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Şerife Burcu BOZKURT

Tarih: 23.12.2013

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GRAFLARIN ÖZDEĞERLERİNİ VE NORMALİZE LAPLACIAN ÖZDEĞERLERİNİ İÇEREN PARAMETRELERİ İÇİN SINIRLAR

Şerife Burcu BOZKURT

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2013, 69 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

Bu çalışma grafların, özdeğerlerini ve normalize Laplacian özdeğerlerini içeren parametrelerine sınırlar elde etmek için hazırlanmıştır. İlk olarak strongly quotient grafların enerjisi ve Estrada indeksi için bazı sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu sınırların strongly quotient graflar için bilinen bazı sınırlardan daha iyi olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, izole noktası olmayan bir grafın sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı tanımlanmış ve bu parametreye bağlantılı (iki parçalı) graflar için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen bu alt sınırların bir sonucu olarak bağlantılı (iki parçalı) grafların derece Kirchhoff indeksi için bazı alt sınırlar verilmiştir. Ayrıca derece Kirchhoff indeks için elde edilen bu alt sınırlardan birinin literatürdeki bilinen bir alt sınırla çakıştığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte izole noktası olmayan grafların ve bağlantılı (iki parçalı) grafların geren ağaçlarının sayıları için bazı üst sınırlar elde edilmiş ve izole noktası olmayan graflar için elde edilen üst sınırın bilinen üst sınırların birinden daima daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır. Ek olarak grafların geren ağaçlarının sayıları için elde edilen üst sınırlar bir örnek üzerinde karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar üzerine gerekli değerlendirmeler ve öneriler son bölümde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Enerji, Estrada İndeks, Geren Ağaç, Graf, Grafın Normalize Laplacian Özdeğerleri, Grafın Özdeğerleri, Strongly Quotient Graf.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

BOUNDS FOR THE PARAMETERS OF GRAPHS INVOLVING THEIR EIGENVALUES AND NORMALIZED LAPLACIAN EIGENVALUES

Şerife Burcu BOZKURT

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2013, 69 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Hacı AKTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Assoc. Prof. Dr. Yıldıray KESKİN

This study is prepared to obtain bounds for the parameters of graphs involving their eigenvalues and normalized Laplacian eigenvalues. At first, some bounds for the energy and Estrada index of strongly quotient graphs have been obtained. It has been also showed that these bounds are better than some known bounds for the strongly quotient graphs. Later, the sum of powers of non-zero normalized Laplacian eigenvalues of a graph without isolated vertices have been defined and some upper and lower bounds on this parameter for connected (bipartite) graphs have been established. As a result of these obtained lower bounds, some lower bounds for the degree Kirchhoff index of connected (bipartite) graphs have been given. It has been also observed that one of obtained lower bounds for degree Kirchhoff index coincides with a known lower bound in the literature. At the same time, some upper bounds for the number of spanning trees of graphs without isolated vertices and connected (bipartite) graphs have been obtained and it has been concluded that the upper bound obtained for graphs without isolated vertices is always better than one of known upper bounds. Additionally, upper bounds obtained for the number of spanning trees of graphs have been compared on an example.

As a final section, there have been given essential evaluations and suggestions over the obtained results in this thesis.

Keywords: Energy, Estrada Index, Spanning Tree, Graph, Normalized Laplacian Eigenvalues of Graph, Eigenvalues of Graph, Strongly Quotient Graph.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Durmuş BOZKURT yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak konuların öneminden bahsedilmiş, çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmış ve çalışmamızın kaynak araştırması ile birlikte çalışmamızda yararlanacağımız temel kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde, strongly quotient grafların enerjisi ve Estrada indeksi için bazı sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, izole noktası olmayan bir grafın sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı tanımlanmış ve bu parametreye bağlantılı (iki parçalı) graflar için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen alt sınırların bir sonucu olarak bağlantılı (iki parçalı) grafların derece Kirchhoff indeksi için bazı alt sınırlar verilmiştir. Ek olarak, izole noktası olmayan grafların ve bağlantılı (iki parçalı) grafların geren ağaçlarının sayıları için bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Son olarak, dördüncü bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışma süresince bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a, desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve hayatım boyunca emeklerini benden esirgemeyen, desteğini her zaman yanımda hissettiğim sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Şerife Burcu BOZKURT
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

E_π	:Bir molekülün toplam π elektron enerjisi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:Reel sayılar üzerinde n bileşenli vektörler kümesi
$\mathbb{R}^+$	:Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:Rasyonel sayılar kümesi
S	:Herhangi bir konveks küme
$\varnothing$	:Boş küme
J	:Bütün elemanları “1” olan matris
G	:Herhangi bir graf
$V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$	: G grafının nokta kümesi
$E_G = \{e_1, e_2 \ldots, e_m\}$	: G grafının kenar kümesi
$G - e$	: G grafından e kenarının silinmesiyle elde edilen graf
n	:Grafın nokta sayısı
m	:Grafın kenar sayısı
n_+	:Grafının pozitif özdeğerlerinin sayısı
q	:Grafın dörtgenlerinin sayısı
f_q	:Grafının nokta kümesi üzerinde tanımlı birebir fonksiyon yardımıyla tanımlanan bölüm fonksiyon
$v_i \sim v_j$	: v_i noktası v_j noktasına komşudur
$v_i \nsim v_j$	: v_i noktası v_j noktasına komşu değildir
d_i	:Grafın v_i noktasının derecesi
$d_{\max}$	:Grafın maksimum nokta derecesi
$d_{\min}$	:Grafın minimum nokta derecesi
d_{ij}	: v_i ve v_j noktaları arasındaki uzaklık
R_{ij}	: v_i ve v_j noktaları arasındaki direnç uzaklığı
K_n	: n noktalı tam graf
$G(X, Y)$	:Nokta kümesi X ve Y gibi iki ayrık alt kümeye ayrılmış iki parçalı graf
$K_{p,q}\,(p+q=n)$	: n noktalı tam iki parçalı graf
$K_{1,n-1}$	: n noktalı star graf
T	:Ağaç
$T_i\ (i=1,2,\ldots)$	:Geren ağaçlar
G^c	: G grafının tamamlayıcısı
m'	: G^c nin kenar sayısı
$G_1 \cup G_2$	: G_1 ve G_2 graflarının birleşimi
$G_1 \vee G_2$	: G_1 ve G_2 graflarının birleştirilmesiyle elde edilen graf
$G_1 \cong G_2$	: G_1 grafı G_2 grafına izomorftur

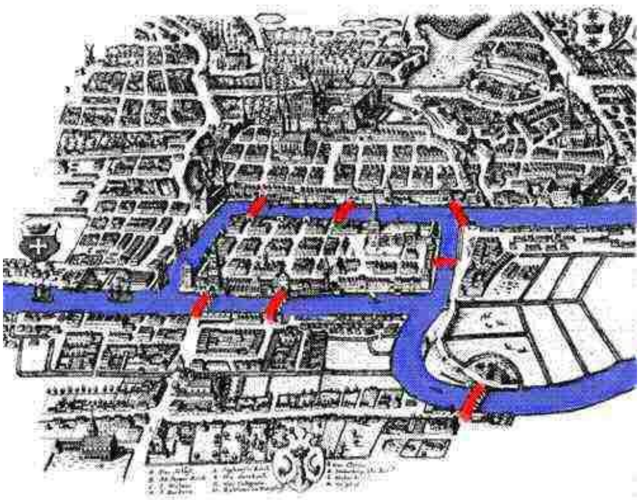
$A(G)$	: G grafının komşuluk matrisi
λ_i	: $A(G)$ nin $i.$ en büyük özdeğeri
$D(G) = köş(d_1, d_2, \ldots, d_n)$	: G grafının nokta derecelerinin köşegen matrisi
$L(G)$	: G grafının Laplacian matrisi
μ_i	: $L(G)$ nin $i.$ en büyük özdeğeri
L	: G grafının normalize Laplacian matrisi
ρ_i	: L nin $i.$ en büyük özdeğeri
$W(G)$	: G grafının Wiener indeksi
$D'(G)$	: G grafının (derece uzaklığı) Schultz indeksi
$S(G)$	: G grafının Gutman indeksi
$Kf(G)$	: G grafının Kirchhoff indeksi
$Kf^*(G)$	: G grafının derece Kirchhoff indeksi
$R_\alpha(G)$	: G grafının genel Randić indeksi
$E(G)$	: G grafının enerjisi
$EE(G)$	: G grafının Estrada indeksi
$M_k(G)$	: G grafının $k.$ spektral momenti
$s_\alpha(G)$	: G grafının sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin α. kuvvetlerinin toplamı
$s_\alpha^*(G)$	: G grafının sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin α. kuvvetlerinin toplamı
$t(G)$	: G grafının geren ağaçlarının sayısı

Kısaltmalar

SQG	:Strongly Quotient Graf
köş	:Köşegen matris
iz	:Matrisin izi
log	:Logaritma fonksiyonu
ln	:Doğal logaritma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Eski ve Yeni Pregel nehirlerinin birleşmesiyle oluşan Pregel nehri Königsberg şehrinde yer almaktadır. Bu nehirler şehri 4 bölüme ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır (bknz., Şekil 1.1). "Königsbergin Yedi Köprüsü" problemi kısaca "Her köprüden bir ve yalnız bir kez geçme koşulu ile bütün şehri dolaşmanın mümkün olup olmadığını" sorgular. Bu problem matematikte yer alan tarihi ve en önemli problemlerden biridir.



Şekil 1.1. Königsbergin Yedi Köprüsü
http://people.engr.ncsu.edu/mfms/SevenBridges/ [Ziyaret Tarihi: 9 Aralık 2013]

Bu problemin çözümü üzerine 1736 yılında İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından yazılan makale graf teori alanın çıkış noktası olup aynı zamanda bu alandaki ilk makale olarak literature geçmiştir (Euler, 1736). Euler çalışmasında her köprüden bir ve yalnız bir kez geçildiği takdirde, herbir kara parçasına gelen köprülerin sayısının çift olması (başlangıç ve bitiş noktası olarak seçilen kara parçası hariç) gerektiğine dikkat çekmiştir. Şekil 1.1 deki dört kara parçasına da gelen köprülerin sayısı tek olup, en fazla iki kara parçası yürümenin uç noktaları olabileceğinden, problemdeki gibi bir yürümenin var olmadığını ispatlamıştır. Eulerin bulduğu bu negatif çözüm graf teorinin çıkış noktası olmakla birlikte, graf teori alanına "Eulerian graf" kavramının kazandırılmasını da sağlamıştır.

Graf teori yukarıda da bahsedildiği gibi 1736 yılında ortaya çıkan bir matematik dalı olmasına rağmen ancak 20. Yüzyılda büyük bir gelişme gösterebilmiştir. Bu gelişmenin en önemli nedenlerinden bazıları graf teorinin fizik, kimya, biyoloji, dil bilimleri, genetik ve sosyoloji gibi bilim dallarına uygulanabilmesi ve teorik bilgisayar bilimlerindeki karmaşık problemlerin graf teori problemlerine dönüştürülebilmesidir. Bunların yanı sıra grup teori, matris teori, olasılık ve topoloji gibi matematiğin diğer bilim dalları ile ortak sahalarının olması da graf teorinin önemini artırmaktadır.

Graf teorinin en önemli alt dallarından biri spektral graf teoridir. Spektral graf teori; bilgisayar bilimleri, fizik, kimya ve kodlama teorisi gibi birçok alanda uygulanabilir olması açısından discrete matematiğin önemli bir parçasıdır. Bu alanda grafın bazı matrislerinin karakteristik polinomları, özdeğerleri ve özvektörleri üzerine çalışılmaktadır. Bu çalışmadaki en önemli amaç ise grafın matrislerinden elde edilen spektral bilgiler vasıtasıyla grafın özellikleri hakkında bilgi edinmektir. Spektral graf teoride yapılan çalışmaların birçoğunu ise grafın matrislerinin özdeğerleri ve bu özdeğerler vasıtasıyla tanımlanan graf parametreleri oluşturmaktadır.

Bu çalışmada esinlendiğimiz ve ele aldığımız bir grafın enerjisi, Estrada indeksi, Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı, normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı, geren ağaçlarının sayısı da sırasıyla grafın özdeğerlerini, Laplacian özdeğerlerini ve normalize Laplacian özdeğerlerini ihtiva ettiğinden, bu konular da spektral graf teori alanına girmektedir. Şimdi kısaca bu parametrelerin tanımlarını verip, önemleri üzerinde duralım.

İlk olarak bir grafta enerji kavramının tanımını verip, bu kavramın çıkış noktasından ve öneminden bahsedelim.

G grafı n noktalı bir graf ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, G grafının özdeğerleri olsun. Bu takdirde G 'nin enerjisi

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

şeklinde tanımlanmıştır (Gutman, 1978). Enerji kavramı teorik kimyadaki sonuçlardan esinlenilerek graf teoriye kazandırılmıştır. Toplam π-elektron enerji olarak bilinen ve E_π ile gösterilen bir moleküldeki tüm elektronların enerjilerinin toplamı Hückel teoride önemli bir değerdir. $n = 2k$ atomlu bir molekülün toplam π-elektron enerjisi

$$E_\pi = 2\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

şeklindedir (Hückel, 1931). Burada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ moleküle ait grafın ilk en büyük k özdeğeridir. İki parçalı bir grafın özdeğerleri orijine göre simetrik (Cvetković ve ark., 1980) olduğundan, bu denklem iki parçalı graflar için

$$E_\pi = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

şeklinde de verilebilir. İşte bu değer bir grafın enerjisi kavramının çıkış noktası olarak kabul edilmektedir (Bapat, 2010).

1978 yılında Gutman bir grafın enerjisi kavramını tanımladığında birçok matematikçinin bu kavramı ilginç bulacağını ve araştırmaya başlayacağını düşünmüştür. Ancak beklenen olmamış ve yazar dışında kimse 1998 li yıllara kadar grafın enerjisi üzerine çalışma yapmamıştır. Bu durum 20. Yüzyılın sonunda değişmiş ve grafın enerjisi birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Literatüre bakıldığında 2001 yılından günümüze kadar grafın enerjisi üzerine çok fazla çalışma yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmaların önemli bir kısmını grafın enerjisi üzerine elde edilen alt ve üst sınırlar ve bazı özel grafların enerjileri oluşturmaktadır.

Şimdi bir grafta Estrada indeks kavramının tanımını verip, bu kavramın öneminden bahsedelim.

G grafı n noktalı bir graf ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, G grafının özdeğerleri olsun. Bu takdirde G 'nin Estrada indeksi

$$EE(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanım organik moleküllerin üç boyutlu yapılarının belirli özelliklerini temsil eden yeni bir yapı tanımlayıcı olarak verilmiştir (Estrada, 2000). Özellikle proteinlerin ve diğer uzun zincirli biyopolimerlerin bağ derecelerinin karakterizasyonunda kullanılmıştır (Estrada, 2002; Estrada, 2004). Kimyadaki uygulamalarının yanı sıra Estrada indeksin karmaşık ağların (complex networks) merkeziliğinin ölçümünde de kullanıldığı bilinmektedir (Estrada ve Rodríguez-Velázquez, 2005; Estrada ve Rodríguez-Velázquez, 2005).

Bir grafın Estrada indeksi son yıllarda çalışılmakta olan bir konu olup birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Yapılan çalışmaların büyük bir kısmını Estrada indeks için elde edilen alt ve üst sınırlar ve bazı özel grafların Estrada indeksleri oluşturmaktadır.

G grafı n noktalı, m kenarlı, Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$ olan bir graf ve $\alpha \neq 0$ bir reel sayı olsun. Bu takdirde G 'nin sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin α. kuvvetlerinin toplamı

$$s_{\alpha}(G)=\sum_{i=1}^{h}\mu_i^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Zhou, 2008). Burada h, G grafının sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin sayısıdır. Bu tanım α'nın belli değerleri için bilinen bazı graf parametreleri ile yakından ilişkili olup tüm bu parametrelerin bir genelleştirmesi olması açısından literatürde önemli bir yere sahiptir. Bu parametre için daha detaylı bilgi 1.3.5 Graf Parametreleri alt bölümünde verilecektir.

Şimdi bir grafın geren ağaçlarının sayısının grafın Laplacian ve normalize Laplacian özdeğerleri cinsinden formülüzasyonlarını verip öneminden bahsedelim.

G grafı n noktalı, m kenarlı, nokta kümesi $V_G=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, Laplacian özdeğerleri $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n=0$ ve normalize Laplacian özdeğerleri $\rho_1\geq\rho_2\geq\cdots\geq\rho_n=0$ olan bir graf olsun. G grafının geren ağaçlarının sayısı $t(G)$, G'nin Laplacian özdeğerleri cinsinden

$$t(G)=\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n-1}\mu_i$$

şeklinde ifade edilir (Cvetković ve ark., 1980). Bu eşitlik literatürde yer alan *Matris-Ağaç Teoremi*'nin direkt bir sonucudur (Mohar, 1991).

G grafının geren ağaçlarının sayısı $t(G)$, G'nin normalize Laplacian özdeğerleri cinsinden ise

$$t(G)=\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}d_i}{2m}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\rho_i$$

şeklinde ifade edilir (Cvetković ve ark., 1980; Chung, 1997). Burada d_i, $v_i\in V_G$ noktasının derecesidir.

Bir grafın geren ağaçlarının sayısı ağ (network) güvenilirliği ve belirli kimyasal izomerlerin numaralandırılmasında kullanılması açısından önemli bir parametredir. Bununla birlikte bu parametreyi hesaplamak her zaman çok kolay bir problem değildir. Ancak yukarıda da bahsedildiği gibi bu parametrenin grafın hem Laplacian ve hem de normalize Laplacian özdeğerleri cinsinden ifade edilebilmesi, bu problemi daha kolay bir hale getirmekte ve bu parametrenin önemini artırmaktadır.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışma grafların özdeğerlerini ve normalize Laplacian özdeğerlerini içeren parametrelerine sınırlar elde etmek amacıyla hazırlanmıştır. İlk olarak özel bir graf ailesi olan strongly quotient grafların enerjisi ve Estrada indeksi için sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra literatürde var olan bir grafın sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamından esinlenerek izole noktası olmayan bir grafın sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı tanımlanmış ve bu parametreye bağlantılı (iki parçalı) graflar için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen alt sınırların bir sonucu olarak bağlantılı (iki parçalı) bir grafın derece Kirchhoff indeksi için bazı alt sınırlar verilmiştir. Son olarak izole noktası olmayan grafların ve bağlantılı (iki parçalı) grafların geren ağaçlarının sayıları için normalize Laplacian özdeğerleri içeren formül kullanılarak bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Grafın geren ağaçlarının sayıları için elde edilen üst sınırlar bir örnek üzerinde karşılaştırılmış ve elde edilen bazı sınırların literatürde var olan sınırlardan daima daha iyi olduğu ise ilgili uyarılarda ispatlanmıştır.

1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu kısmında, çalışmamızda esinlendiğimiz ve kullandığımız literatürde yer alan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Koolen ve Moulton (2001), "*Maximal energy graphs*" isimli çalışmalarında bir grafın enerjisi için grafın nokta sayısını ve kenar sayısını içeren bazı üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca bu üst sınırlarda eşitliği sağlayan grafları karakterize etmişlerdir.

Koolen ve Moulton (2003), "*Maximal energy bipartite graphs*" isimli çalışmalarında iki parçalı grafların enerjisi için bu grafların nokta sayısını ve kenar sayısını içeren bazı üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca bu üst sınırlarda eşitliği sağlayan iki parçalı grafları karakterize etmişlerdir.

Rada ve Tineo (2004), "*Upper and lower bounds for the energy of bipartite graphs*" isimli çalışmalarında iki parçalı grafların enerjisi için bazı alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

Zhou (2004), "*Energy of a graph*" isimli çalışmasında (iki parçalı) bir grafın enerjisi için (iki parçalı) grafın nokta sayısını, kenar sayısını ve derecelerini içeren bazı üst sınırlar elde etmiştir. Ek olarak bu üst sınırlarda eşitliğin sağlandığı (iki parçalı) grafları karakterize etmiştir.

Yu ve ark. (2005), "*New upper bounds for the energy of graphs*" isimli çalışmalarında (iki parçalı) bir grafın enerjisi için (iki parçalı) grafın nokta sayısını, kenar sayısını, derecelerini ve 2-derecelerini içeren bazı üst sınırlar elde etmişlerdir. Bununla birlikte bu üst sınırlarda eşitliğin sağlandığı (iki parçalı) grafları karakterize etmişlerdir.

Hou ve ark. (2007), *"On the spectral radius, k-degree and the upper bound of energy in a graph"* isimli çalışmalarında bir grafın herhangi bir noktasının *k*-derecesini tanımlamışlar ve (iki parçalı) bir grafın enerjisi için (iki parçalı) grafın nokta sayısını, kenar sayısını ve *k*-derecelerini içeren bazı üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca bu üst sınırlarda eşitliğin sağlandığı (iki parçalı) grafları karakterize etmişlerdir.

Liu ve Lu (2008), *"Sharp bounds on the spectral radius and the energy of graphs"* isimli çalışmalarında (iki parçalı) bir grafın enerjisi için bazı üst sınırlar elde etmişler ve bu üst sınırlarda eşitliği sağlayan (iki parçalı) grafları karakterize etmişlerdir. Ayrıca elde ettikleri bu üst sınırlardan bilinen bazı sonuçlara varmışlardır.

Adiga ve Zaferani (2008), "*Upper bounds for energy of a graph*" isimli çalışmalarında strongly quotient grafların iki tane özdeğerini belirlemişler ve bu özdeğerleri göz önünde bulundurarak strongly quotient grafların enerjisi için bir üst sınır elde etmişlerdir.

Gutman ve ark. (2009), *"Upper bound for the energy of graphs with fixed second and fourth spectral moments"* isimli çalışmalarında herhangi bir grafın enerjisi için o grafın ikinci ve dördüncü spektral momentlerinin fonksiyonu olan bir üst sınır elde etmişlerdir.

Bozkurt ve Bozkurt (2013), *"Sharp upper bounds for energy and Randić energy"* isimli çalışmalarında (iki parçalı) grafın enerjisi için bazı üst sınırlar elde etmişler ve bu üst sınırlarda eşitliği sağlayan (iki parçalı) grafları karakterize etmişlerdir. Ayrıca elde ettikleri bu üst sınırların daha önceden elde edilen birçok üst sınırı genelleştirdiğini göstermişlerdir.

De la Pena ve ark. (2007), "*Estimating the Estrada index*" isimli çalışmalarında bir grafın Estrada indeksi için grafın nokta sayısını, kenar sayısını ve enerjisini içeren bazı sınırlar elde etmişlerdir.

Gutman (2008), "*Lower bounds for Estrada index*" isimli çalışmasında bir grafın Estrada indeksi için grafın nokta sayısı ve kenar sayısını içeren bazı alt sınırlar elde etmiştir.

Das ve Lee (2010), "*On the Estrada index conjecture*" isimli çalışmalarında herhangi bir ağaç graf için, star grafın maksimum Estrada indekse sahip olduğu ve n noktalı, m kenarlı graflar için ise $m \geq 1.8n+4$ ya da $m \geq n^2/6$ şartı sağlanmak üzere yol grafın minimum Estrada indekse sahip olduğu konjektürünü çözmüşlerdir. Bununla birlikte herhangi bir bağlantılı grafın Estrada indeksi için bazı iyi alt sınırlar elde etmişlerdir.

Liu ve Liu (2010), "*Bounds of the Estrada index of graphs*" isimli çalışmalarında bir grafın Estrada indeksi için grafın nokta sayısını, kenar sayısını, pozitif özdeğerlerinin sayısını ve enerjisini içeren bazı yeni sınırlar elde etmişlerdir.

Du ve Zhou (2011), "*The Estrada index of trees*" isimli çalışmalarında pendant nokta sayıları verilen ağaç kümeleri arasında maksimum Estrada indekse sahip tek ağacı belirlemişlerdir.

Fath-Tabar ve Ashrafi (2011), "*New upper bounds for Estrada index of bipartite graphs*" isimli çalışmalarında iki parçalı grafların Estrada indeksi için bazı üst sınırlar elde etmişlerdir.

Shang (2012), "*Lower bounds for the Estrada index of graphs*" isimli çalışmasında bir grafın Estrada indeksi için bazı yeni alt sınırlar elde etmiştir. Ayrıca elde etmiş olduğu bu alt sınırları daha önceden elde edilen bazı alt sınırlarla karşılaştırmıştır.

Zhou (2008), "*On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs*" isimli çalışmasında sıfırdan farklı bir α reel sayısı için bir grafın sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin α. kuvvetlerinin toplamını tanımlamış ve bu parametreye, bağlantılı (iki parçalı) graflar için bazı alt ve üst sınırlar elde etmiştir. Ayrıca yazar çalışmasında $\alpha = 1/2$ ve $\alpha = 2$ özel durumlarını da incelemiştir.

Tian ve ark. (2009), "*A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs*" isimli çalışmalarında bağlantılı iki parçalı grafların Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı için bazı sınırlar elde etmişlerdir.

Zhou (2009), "*On sum of powers of Laplacian eigenvalues and Laplacian Estrada index of graphs*" isimli çalışmasında bağlantılı grafların Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı için grafın derece dizisini içeren bazı sınırlar elde etmiştir.

Zhou ve Ilić (2010), *"On the sum of powers of Laplacian eigenvalues of bipartite graphs*" isimli çalışmalarında bağlantılı iki parçalı grafların Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı için bazı sınırlar elde etmişlerdir.

Liu ve Liu (2011), "*A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs*" isimli çalışmalarında bağlantılı bir grafın Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı için bazı sınırlar elde etmişlerdir. Bununla birlikte bu sınırların daha önceden elde edilen bazı sınırlardan daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Nosal (1970), "*Eigenvalues of graphs*" isimli çalışmasında n noktalı r-regüler bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için

$$t(G) \leq n^{n-2}\left(\frac{r}{n-1}\right)^{n-1} \tag{1.1}$$

üst sınırını elde etmiştir.

Grimmett (1976), "*An upper bound for the number of spanning trees of a graph*" isimli çalışmasında n noktalı, m kenarlı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için

$$t(G) \leq \frac{1}{n}\left(\frac{2m}{n-1}\right)^{n-1} \tag{1.2}$$

üst sınırını elde etmiştir.

Kelmanns (bknz., sayfa 222, Cvetković ve ark., 1980), çalışmasında n noktalı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için

$$t(G) \leq n^{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{m'} \tag{1.3}$$

üst sınırını elde etmiştir. Burada m', G grafının tamamlayıcısının kenar sayısıdır.

Grone ve Merris (1988), "*A bound for the complexity of a simple graph*" isimli çalışmalarında n noktalı, m kenarlı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için grafın nokta derecelerinin çarpımını da içeren

$$t(G) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m}\right) \tag{1.4}$$

üst sınırını elde etmişlerdir.

Zhang (2005), "*A new bound for the complexity of a graph*" isimli çalışmasında n noktalı, m kenarlı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için

$$t(G) \leq \left(1+(n-2)a\right)(1-a)^{n-2} \frac{1}{n}\left(\frac{2m}{n-1}\right)^{n-1} \tag{1.5}$$

üst sınırını elde etmiştir. Burada $a = \left(\dfrac{n(n-1)-2m}{2mn(n-2)}\right)^{1/2}$ dir.

Das (2007), "*A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph*" isimli çalışmasında n noktalı, m kenarlı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için grafın maksimum nokta derecesi $d_{\max}$ 'ı da içeren

$$t(G) \leq \left(\frac{2m-d_{\max}-1}{n-2}\right)^{n-2} \tag{1.6}$$

üst sınırını elde etmiştir.

Feng ve ark. (2008), "*Sharp upper bounds for the number of spanning trees of a graph*" isimli çalışmalarında n noktalı, m kenarlı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için maksimum nokta derecesi $d_{\max}$ 'ı ve nokta derecelerinin kareleri toplamını da içeren

$$t(G) \leq \left(\frac{d_{\max}+1}{n}\right)\left(\frac{2m-d_{\max}-1}{n-2}\right)^{n-2} \tag{1.7}$$

ve

$$t(G) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2m - (d_{\max}+1)^2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \tag{1.8}$$

üst sınırlarını elde etmişlerdir.

Li ve ark. (2010), "*The number of spanning trees of a graph*" isimli çalışmalarında n noktalı bir G grafının geren ağaçlarının sayısı için maksimum nokta derecesi $d_{\max}$ 'ı ve minimum nokta derecesi $d_{\min}$ 'i içeren

$$t(G) \leq d_{\min}\left(\frac{2m-d_{\max}-1-d_{\min}}{n-3}\right)^{n-3} \tag{1.9}$$

üst sınırını elde etmişlerdir.

Bununla birlikte Grimmet (1976) çalışmasında (1.2) üst sınırının (1.1) üst sınırının bir genelleştirmesi olduğunu gözlemlemiştir. Grone ve Merris (1988) çalışmalarında Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinin uygulanmasıyla (1.4) üst sınırının (1.2) üst sınırına indirgendiğini ifade etmiştir. Das (2007) çalışmasında (1.1), (1.2), (1.3) ve (1.4) üst sınırları sadece K_n (tam graf) için keskin iken (1.6) sınırının $K_{1,n-1}$ (star graf) ve K_n için keskin olduğunu belirtmiştir. Li ve ark. (2010) çalışmalarında (1.6) ve (1.7) üst sınırları $K_{1,n-1}$ ve K_n için keskin iken, (1.9) üst sınırının $K_{1,n-1}, K_n$, $K_1 \vee (K_1 \cup K_{n-2})$ ve $K_n - e$ graflarına izomorf olan graflar için keskin olduğuna dikkat çekmişlerdir. Zhang (2005) çalışmasında (1.5) üst sınırının (1.2) üst sınırından daima daha iyi olduğunu ispatlarken, Feng ve ark. (2008) ise (1.7) üst sınırının (1.6) ve (1.8) üst sınırlarından daima daha iyi olduğunu ispatlamışlardır.

1.3. Temel Kavramlar

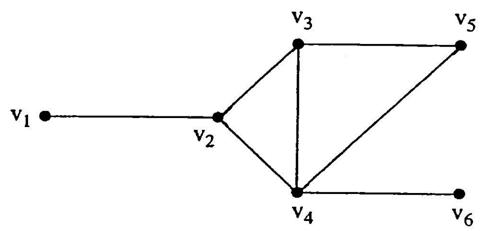
Çalışmamızın bu alt bölümünde çalışmamızda adı geçen ve kullanacağımız bazı temel kavramları (örnekleri ile birlikte) vereceğiz. Aksi belirtilmedikçe vereceğimiz bu kavramlar için kaynaklarımız Cvetković ve ark. (1980), Balakrishnan ve Ranganathan (1999) ve Aldous ve Wilson (2000) tarafından yapılan çalışmalardır.

1.3.1. Graf Teoride Bazı Temel Tanımlar

Bir *graf* elemanları noktalar olarak bilinen bir V_G kümesi ile elemanları kenarlar olarak bilinen bir E_G kümesinden oluşur ve $G = (V_G, E_G)$ ile gösterilir.

Bir grafta her bir kenar iki noktayı birleştirir.

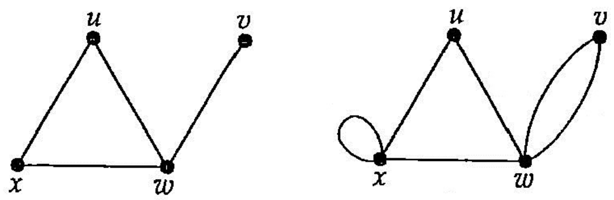
Aşağıda, nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ve kenar kümesi $E_G = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_4v_6\}$ olan 6 noktalı, 7 kenarlı bir graf örneği verilmiştir.



Şekil 1.2. 6 noktalı, 7 kenarlı bir G grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Bir grafta aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar* denir. Bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir. Çoklu kenar ve ilmeği bulunmayan graflara *basit graf (simple graph)*, bunlardan herhangi birini ya da ikisini birden bulunduran graflara ise *basit olmayan graf (non-simple graph)* denir.

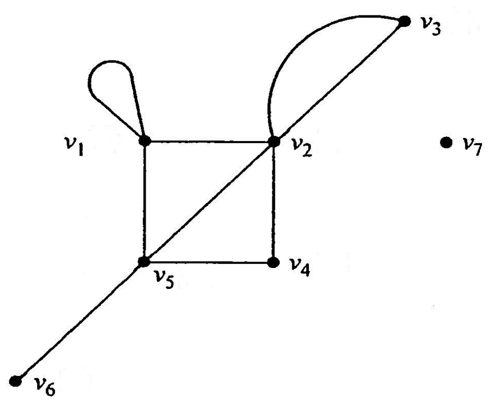
Aşağıda sırasıyla basit grafa ve basit olamayan grafa örnekler verilmiştir.



Şekil 1.3. Basit graf ve basit olamayan graf
(Aldous ve Wilson, 2000)

$G=(V_G,E_G)$ grafı nokta kümesi $V_G=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ ve kenar kümesi $E_G=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ olan bir graf olmak üzere G grafında, $v_iv_j\in E_G$ ise bu noktalara *komşudur* denir ve $v_i\sim v_j$ şeklinde gösterilir. $v_iv_j\notin E_G$ ise bu noktalara komşu değildir denir ve $v_i\nsim v_j$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir v_i noktasının derecesi v_i noktasına komşu olan noktaların sayısı olup d_i ile gösterilir. Derecesi sıfır olan noktaya *izole nokta*, derecesi bir olan noktaya ise *pendant nokta* denir.

Aşağıdaki gibi bir graf verilsin.



Şekil 1.4. İzole ve pendant noktaya sahip bir G grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Bu grafta v_5 noktası, v_1, v_2, v_4 ve v_6 noktalarına komşudur. Ancak diğer noktalara komşu değildir. Bu grafın noktalarının dereceleri sırasıyla

$d_1 = 4,\ d_2 = 5, d_3 = 2,\ d_4 = 2, d_5 = 4, d_6 = 1$ ve $d_7 = 0$

dır. Burada v_6 bir pendant nokta, v_7 ise bir izole noktadır. Ayrıca bir G grafında nokta derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katı olup bu

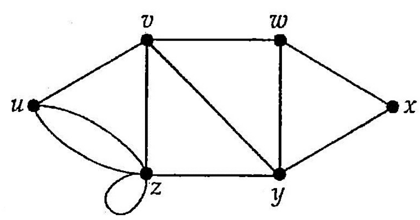
$$|E_G| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

şeklinde ifade edilir.

Bir G grafında ardı ardına k tane kenarın dizilmesiyle oluşan $\underbrace{uv, vw, wx, \ldots, yz}_{k \text{ tane}}$ formuna G de k uzunluğunda bir *yürüme* denir. Bu şekildeki bir yürüme şeklinde $uvwx\ldots yz$ şeklinde gösterilir ve u dan z ye bir yürüme olarak adlandırılır. Burada u noktası yürümenin başlangıç ve z noktası ise bitiş noktasıdır.

Herhangi bir G grafında aynı noktada başlayan ve biten bir yürümeye G de bir *kapalı yürüme* denir. Bütün noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye G de bir *yol* ve bütün kenarları, başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları birbirinden farklı olan kapalı bir yürümeye ise G de bir *devir* denir.

Aşağıdaki gibi bir graf verilsin.



Şekil 1.5. Yürüme, kapalı yürüme, yol ve devire sahip bir G grafı
(Aldous ve Wilson, 2000)

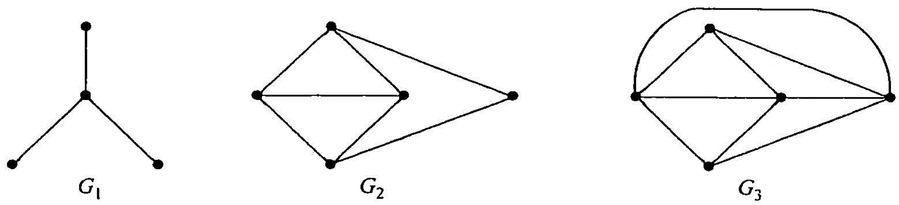
Bu grafta *uvwxywvzzy* 9 uzunluğunda bir yürüme, *vywxyzv* kapalı bir yürüme, *vwxyz* bir yol ve *vwxyzv* ise bir devirdir.

$G = (V_G, E_G)$ grafı nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olan bir graf olmak üzere v_i ve v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğuna v_i ve v_j noktaları arasındaki *uzaklık (distance)* denir ve d_{ij} ile gösterilir (Buckley ve Harary, 1990). Şekil 1.4 deki

G grafında v_1 ve v_2 noktaları arasındaki uzaklık $d_{12} = 1$ olup v_1 ve v_6 noktaları arasındaki uzaklık $d_{16} = 2$ dir.

G herhangi bir graf olsun. G grafının her bir nokta çifti arasında bir yol varsa, G grafına *bağlantılı bir graf*, aksi takdirde ise G grafına *bağlantısız graf* denir. Bağlantısız bir grafın bağlantılı alt graflarına ise o grafın *bileşenleri* denir.

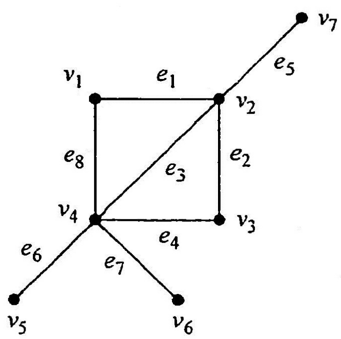
Aşağıda üç bileşene sahip bağlantısız bir graf örneği verilmiştir.



Şekil 1.6. Üç bileşenli bağlantısız graf
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Bileşen tanımdan da anlaşıldığı üzere bu bileşenlerin her biri bağlantılı bir grafa örnektir.

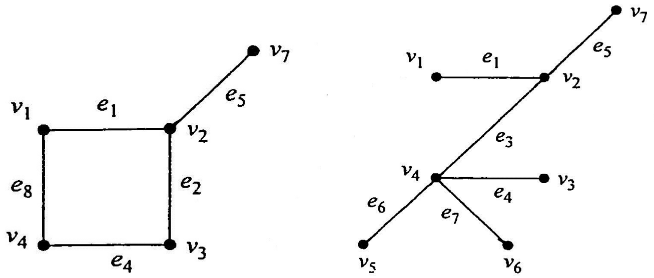
$G = (V_G, E_G)$ ve $H = (V_H, E_H)$ iki graf olsun. Eğer, $V_H \subseteq V_G$ ve $E_H \subseteq E_G$ oluyorsa H grafına G nin bir *alt grafı* denir. H grafı G nin bir alt grafı ve $V_H = V_G$ ise bu takdirde H grafına G nin bir *geren alt grafı* denir.



Şekil 1.7. Bir G grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

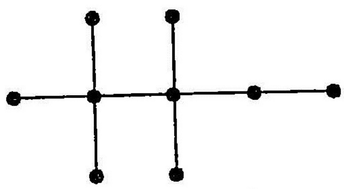
şeklinde bir G grafı verilsin.

Aşağıda sırasıyla G 'nin bir alt grafı ve bir geren alt grafı verilmiştir.



Şekil 1.8. Şekil 1.7'de verilen G grafının bir alt grafı ve bir geren alt grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

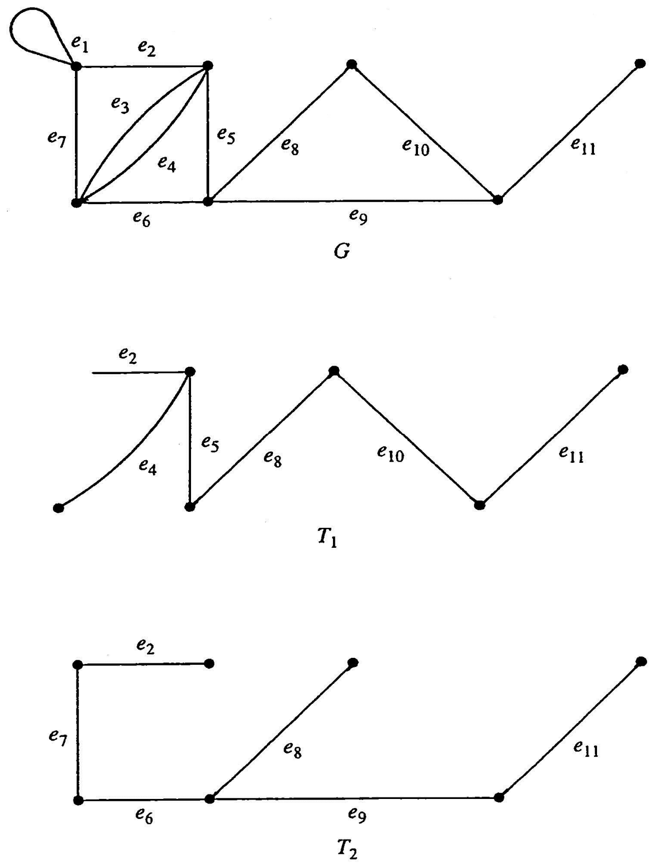
Deviri olmayan bağlantılı grafa *ağaç* denir ve bu graf T ile gösterilir.
Aşağıda bir ağaç graf örneği verilmiştir.



Şekil 1.9. Bir T ağacı
(Aldous ve Wilson, 2000)

Bir grafın, geren alt grafı aynı zamanda bir ağaç ise bu takdirde bu geren alt grafa grafın *geren ağacı* denir.

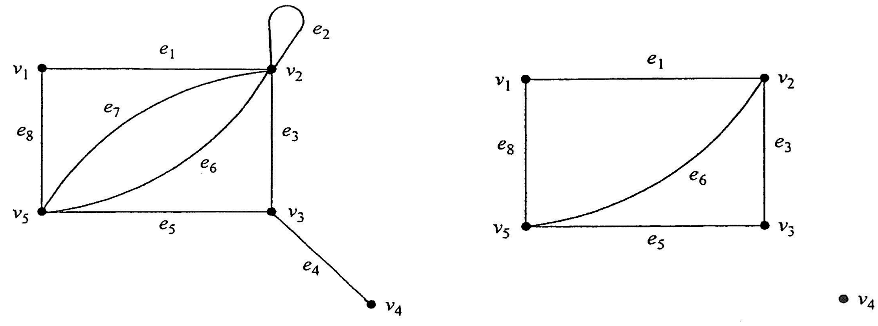
Aşağıda bir G grafı ve G nin T_1 ve T_2 gibi iki geren ağacı verilmiştir.



Şekil 1.10. Bir G grafı ve G 'nin T_1 ve T_2 gibi iki geren ağacı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

G nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kenar kümesi $E_G = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ olan bir graf olsun. $E'_G \subseteq E_G$ olmak üzere; $G - E'_G$ grafı G grafından E'_G kümesindeki kenarların silinmesiyle elde edilen graftır. Herhangi $v_i, v_j \in V_G$ için $E'_G = \{e = v_i v_j\}$ olması durumunda $G - E'_G$ grafı kısaca $G - e$ ile gösterilir.

Aşağıda bir G grafı ve bu graftan 3 tane kenarın silinmesiyle elde edilen graf örneği verilmiştir.



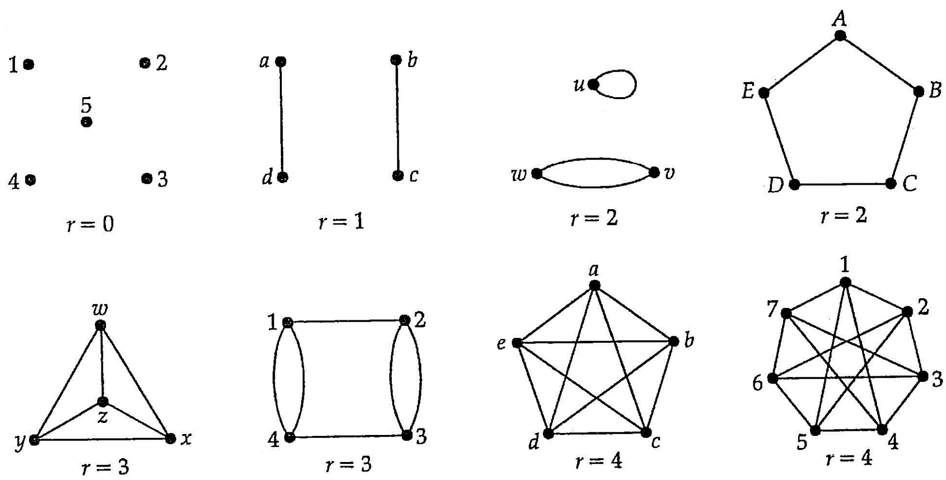
Şekil 1.11. Bir G grafı ve $G-\{e_2,e_4,e_7\}$ grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Herhangi bir G grafının dörtgeni, o grafın dörtgen formundaki dört noktalı, dört kenarlı bir alt grafıdır. Şekil 1.11 deki G grafının nokta kümesi $V_H=\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$, kenar kümesi $E_H=\{e_1,e_3,e_5,e_8\}$ olan H alt grafı G nin bir dörtgenidir.

1.3.2. Özel Graflar

Bir G grafının her bir nokta derecesi r gibi bir sabite eşit ise bu takdirde G grafına *r-regüler* ya da kısaca *regüler graf* denir.

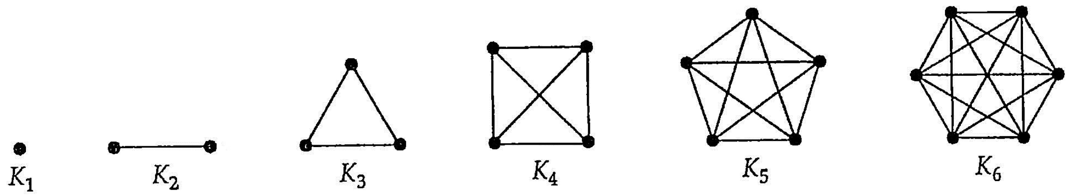
Aşağıda r'nin çeşitli değerleri için bazı r-regüler graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1.12. Bazı regüler graflar
(Aldous ve Wilson, 2000)

Farklı noktalarının her çifti birbirine komşu olan graflara *tam graf* denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir. Dikkat edilirse K_n tam grafı $(n-1)$-regüler bir graftır.

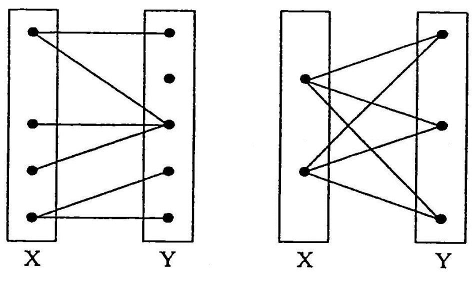
Aşağıda bazı tam graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1.13. Bazı tam graflar
(Aldous ve Wilson, 2000)

Sadece bir noktası olan, kenarı olmayan grafa *aşikar (trivial) graf* denir. Şekil 1.13 deki K_1 grafı bir aşikar (trivial) graftır.

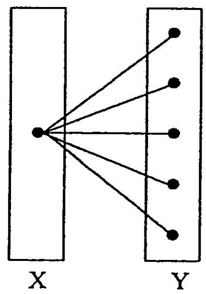
Nokta kümesi, aynı kümedeki noktalar komşu olmayacak şekilde, X ve Y gibi boş olmayan, iki ayrık alt kümeye ayrılmış olan bir G grafına *iki parçalı graf* denir ve $G(X,Y)$ ile gösterilir. $G(X,Y)$ iki parçalı grafında X deki her bir nokta Y deki bütün noktalara komşu ise bu takdirde $G(X,Y)$ iki parçalı grafına *tam iki parçalı graf* denir. $|X| = p$ ve $|Y| = q$ olacak şekildeki tam iki parçalı graf $K_{p,q}$ ile gösterilir. Aşağıda sırasıyla iki parçalı ve tam iki parçalı graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1.14. İki parçalı bir graf ve $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Özel olarak $K_{1,n-1}$ tam iki parçalı grafına ise *star graf* denir.

Aşağıda bir star graf örneği verilmiştir.



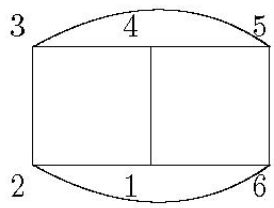
Şekil 1.15. $K_{1,5}$ star grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

$G=(V_G, E_G)$ grafı n noktalı bir graf olmak üzere G grafının bir f etiketlemesi (labeling) olarak birebir $f: V_G \to \{1,2,\ldots,n\}$ fonksiyonu verilsin. $f_q: E_G \to \mathbb{Q}$ bölüm fonksiyonu $e=uv$ ise

$$f_q(e)=\min\left\{\frac{f(u)}{f(v)}, \frac{f(v)}{f(u)}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada herhangi $e \in E_G$ için, $0 < f_q(e) < 1$ olduğu açıktır. G grafı n noktalı bir graf olmak üzere, bölüm fonksiyonu f_q birebir, yani bütün kenarlar üzerindeki $f_q(e)$ değerleri farklı olacak şekilde, G'nin noktaları $1,2,\ldots,n$ biçiminde etiketlenebiliyorsa G'ye *strongly quotient graf (SQG)* denir (Adiga ve ark., 2007).

Aşağıda bir SQG örneği verilmiştir.



Şekil 1.16. Bir SQG
(Zaferani, 2008)

G 'nin kenarlarının değerleri artan bir dizi şeklinde düzenlenirse

$$\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}\right\}$$

olur. Bu durumda G bir SQG dır (Zaferani, 2008). SQG üzerine daha detaylı bilgi için Adiga ve ark., (2007) ve Zaferani, (2008) tarafından yapılan çalışmalara bakılabilir.

1.3.3. Grafın Matris Temsilleri

Şimdi çalışmamızda adı geçen ve spektral graf teoride de çok fazla çalışılmış olan grafın matris temsillerinden "komşuluk matrisi, Laplacian matrisi ve normalize Laplacian matrisi" tanımlarını verip, bu tanımları bir örnek üzerinde anlamaya çalışalım.

G grafı nokta kümesi $V_G=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olan n noktalı bir graf olsun. G grafının *komşuluk matrisi* $n\times n$ simetrik bir matris olup

$$A(G)=(a_{ij})=\begin{cases}1; & v_i\sim v_j\\ 0; & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

G grafında d_i, $v_i\in V_G$ noktasının derecesi olmak üzere, G 'nin nokta derecelerinin köşegen matrisi

$$D(G)=k\ddot{o}\c{s}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$$

şeklinde $n\times n$ köşegen bir matristir.

G grafının *Laplacian matrisi* $n\times n$ simetrik bir matris olup

$$L(G)=(l_{ij})=\begin{cases}d_i; & i=j \text{ ise}\\ -1; & v_i\sim v_j \text{ ise}\\ 0; & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki tanımlardan herhangi bir G grafının Laplacian matrisinin, komşuluk matrisi ve nokta derecelerinin köşegen matrisi cinsinden

$$L(G)=D(G)-A(G)$$

şeklinde de ifade edilebileceği açıktır (Merris, 1994).

G grafının *normalize Laplacian matrisi* $n \times n$ simetrik bir matris olup

$$L = \left(L_{ij}\right) = \begin{cases} 1; \ i = j \text{ ise} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{d_i d_j}}; \ v_i \sim v_j \text{ ise} \\ 0; \text{ aksi takdirde} \end{cases}$$

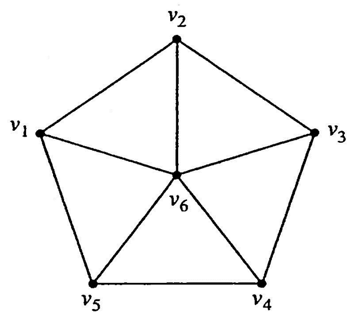
şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan izole noktası olmayan herhangi bir G grafının normalize Laplacian matrisinin

$$L = D(G)^{-1/2} L(G) D(G)^{-1/2}$$

şeklinde de ifade edilebileceği açıktır. Burada $L(G)$ ve $D(G)$ sırasıyla G grafının Laplacian matrisi ve nokta derecelerinin köşegen matrisidir (Chung, 1997).

Aşağıdaki gibi bir G grafı verilsin.



Şekil 1.17. Bir G grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Bu grafın komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca G grafının nokta dereceleri

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 3 \text{ ve } d_6 = 5$$

dir.

Böylece nokta derecelerinin köşegen matrisi

$$D(G)=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

Laplacian matrisi

$$L(G)=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

ve normalize Laplacian matrisi de

$$L=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

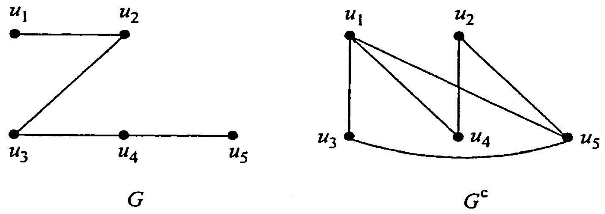
1.3.4. Graf İşlemleri

Şimdi çalışmamızda adı geçen bazı graf işlemlerinden bahsedelim.

G grafı basit bir graf olsun. *G grafının tamamlayıcısı,* nokta kümesi G'nin nokta kümesiyle aynı olan bir graf olup, G^c ile gösterilir. Bu graf, "G^c grafında herhangi iki noktanın komşu olması için gerek ve yeter şart bu noktaların G de komşu olmamasıdır." biçiminde tanımlanır. G basit bir graf ise G^c grafı da basit bir graftır ve

$\left(G^c\right)^c = G$ dir. Ayrıca n noktalı m kenarlı bir grafın tamamlayıcısı, n noktalı $m' = \left(n(n-1) - 2m\right)/2$ kenarlı bir graftır.

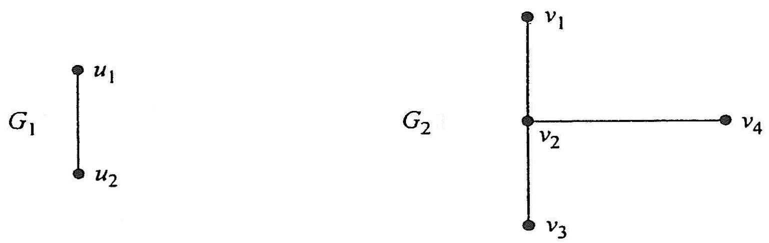
Aşağıda bir G grafı ve bu G grafının tamamlayıcısını gösteren bir örnek verilmiştir.



Şekil 1.18. Bir G grafı ve G 'nin tamamlayıcısı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

$G_1 = \left(V_{G_1}, E_{G_1}\right)$ ve $G_2 = \left(V_{G_2}, E_{G_2}\right)$ nokta kümeleri ayrık ($V_{G_1} \cap V_{G_2} = \varnothing$) olan iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının *birleşimi,* nokta kümesi $V_{G_1} \cup V_{G_2}$ ve kenar kümesi $E_{G_1} \cup E_{G_2}$ olan bir graf olup, $G_1 \cup G_2$ şeklinde gösterilir.

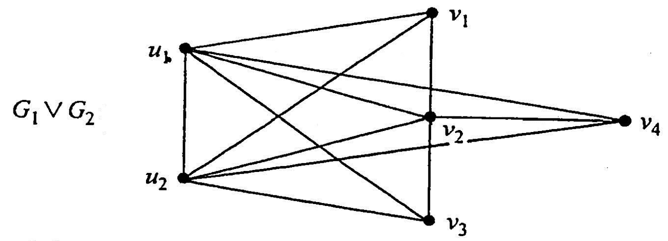
Aşağıda, iki graf ve aynı zamanda bu grafların birleşimlerini gösteren bir örnek verilmiştir.



Şekil 1.19. G_1 ve G_2 graflarının birleşimleri
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

$G_1 = \left(V_{G_1}, E_{G_1}\right)$ ve $G_2 = \left(V_{G_2}, E_{G_2}\right)$ nokta kümeleri ayrık ($V_{G_1} \cap V_{G_2} = \varnothing$) olan iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının birleştirilmesiyle (birbirine bağlanmasıyla) elde edilen graf, nokta kümesi $V_{G_1} \cup V_{G_2}$ ve kenar kümesi $E_{G_1} \cup E_{G_2} \cup \left\{u_i v_j \middle| u_i \in V_{G_1}, v_j \in V_{G_2}\right\}$ olan bir graf olup, $G_1 \vee G_2$ şeklinde gösterilir.

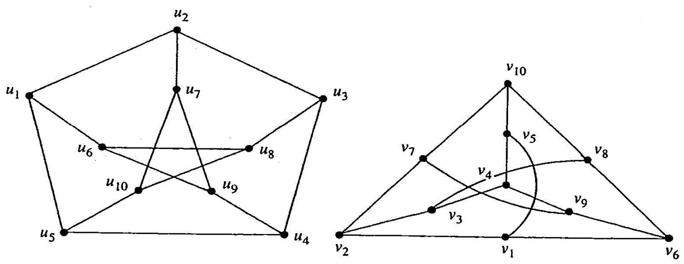
Aşağıda Şekil 1.19'de verilen G_1 ve G_2 grafların birleştirilmesiyle elde edilen $G_1 \vee G_2$ grafı verilmiştir.



Şekil 1.20. Şekil 1.19'da verilen G_1 ve G_2 graflarının birleştirilmesiyle elde edilen graf (Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

G_1 ve G_2 nokta kümeleri V_{G_1} ve V_{G_2} olan iki graf olsun. G_1 ve G_2 nin nokta kümeleri arasında, G_1 deki herhangi iki v_i ve v_j noktalarının G_1 de komşu olması için gerek ve yeter şart $f(v_i)$ ve $f(v_j)$ noktalarının G_2 de komşu olmasıdır şeklinde, 1-1 örten bir $f : V_{G_1} \to V_{G_2}$ dönüşümü varsa bu dönüşüme G_1 ve G_2 graflarının izomorfizmi denir. Herhangi iki G_1 ve G_2 grafı arasında izomorfizm varsa bu graflara izomorfik graflar denir ve bu $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir.

Aşağıda birbirine izomorf iki graf örneği verilmiştir.



Şekil 1.21. Birbirine izomorf iki graf (Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

1.3.5. Graf Parametreleri

Şimdi çalışmamızda adı geçen ve çalışmamızın Giriş kısmında da öneminden bahsettiğimiz bir grafın enerjisi, Estrada indeksi, sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı ve geren ağaçlarının sayısı gibi parametrelerinden kısaca bahsedip, bunları bir örnek üzerinde daha iyi anlamaya çalışalım.

G, komşuluk matrisi $A(G)$ olan bir graf olsun. $A(G)$'nin özdeğerlerine G *grafının özdeğerleri* denir.

G, n noktalı bir graf ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, G'nin özdeğerleri olsun. Bu takdirde G *grafının enerjisi*

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanır (Gutman, 1978). Grafın enerjisi kavramı literatürde çok fazla çalışılmış bir kavram olup detaylı bilgi için Li ve ark. (2012) ve Gutman (2012) çalışmalarına bakılabilir.

G, n noktalı bir graf ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, G'nin özdeğerleri olmak üzere G *grafının Estrada indeksi*

$$EE(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanır (Estrada, 2000).

$k \geq 0$ için G nin k. *spektral momenti*

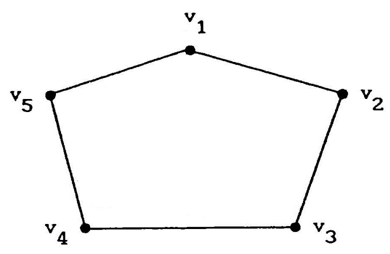
$$M_k = M_k(G) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k$$

dir (Estrada ve Rodríguez-Velázquez, 2005). M_k, aynı zamanda G deki k uzunluğundaki kapalı yürümelerin sayısına eşittir (Cvetković ve ark., 1995). Buradan e^x in seri açılımı da göz önünde bulundurulursa, Estrada indeks ve spektral moment arasında

$$EE(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{k!} \tag{1.12}$$

ilişkisinin olduğu görülür (De la Pena ve ark., 2007).

Aşağıdaki gibi bir G grafını göz önüne alalım.



Şekil 1.22. Bir G grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Bu grafın komşuluk matrisi,

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \lambda_4 = \lambda_5 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

dir. Böylece bu grafın enerjisi ve Estrada indeksi sırasıyla,

$$E(G)=\sum_{i=1}^{5}|\lambda_i| = 6.472132$$

ve

$$EE(G)=\sum_{i=1}^{5} e^{\lambda_i} = 11.496186$$

olarak elde edilir.

G, Laplacian matrisi $L(G)$ olan bir graf olsun. $L(G)$'nin özdeğerlerine G *grafının Laplacian özdeğerleri* denir (Merris, 1988).

G, n noktalı, m kenarlı bir graf ve $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$, G'nin Laplacian özdeğerleri olmak üzere, sıfırdan farklı bir α reel sayısı için, G'nin sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin α. kuvvetlerinin toplamı

$$s_\alpha(G)=\sum_{i=1}^{h}\mu_i^{\alpha} \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Zhou, 2008). Burada h, G'nin sıfır olmayan Laplacian özdeğerlerinin sayısıdır. G grafının $\mu_n = 0$ Laplacian özdeğerinin katlılığı G'nin bileşenlerinin sayısına eşittir (Fiedler, 1973). G'nin bağlantılı bir graf olması durumunda bileşen sayısı bir tane olup o da kendisidir. Böylece (1.13) denklemi ile verilen tanım bağlantılı bir G grafı için

$$s_\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^\alpha \qquad (1.14)$$

şeklinde olur (Zhou, 2008). Ayrıca (1.13) tanımı α'nın belli değerleri için bilinen bazı graf parametreleri ile yakından ilişkilidir. Örneğin; $s_1(G) = 2m$'dir. $s_2(G)$'nin bazı özellikleri Lazic (2006) tarafından incelenmiştir. $s_{1/2}(G)$ değeri G grafının *Laplacian enerji-benzer invaryantı* adı altında Liu ve Liu (2008) tarafından tanımlanmıştır. Bu değer literatürde çok fazla çalışılan grafın enerjisi ile benzer özelliklere sahip olup bu açıdan önemli bir parametredir (Gutman ve ark., 2010). G grafının bağlantılı olması durumunda $ns_{-1}(G) = Kf(G)$ dir (Gutman ve Mohar, 1996). Burada $Kf(G)$, G grafının *Kirchhoff indeksi*'dir (Bonchev ve ark., 1994).

G, n noktalı bir graf ve $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$, G'nin Laplacian özdeğerleri olmak üzere, G grafının geren ağaçlarının sayısı $t(G)$, Laplacian özdeğerler cinsinden

$$t(G) = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n-1} \mu_i \qquad (1.15)$$

şeklinde ifade edilir (Cvetković ve ark, 1980).

Şekil 1.22 deki G grafını göz önüne alalım. Bu grafın Laplacian matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olup Laplacian özdeğerleri

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \ \mu_3 = \mu_4 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \ \text{ve} \ \mu_5 = 0$$

dir.

Ayrıca bu grafın nokta sayısı $n=5$ olup böylece geren ağaçlarının sayısı

$$t(G)=\frac{1}{5}\prod_{i=1}^{4}\mu_i=5$$

olarak elde edilir.

G, normalize Laplacian matrisi L olan bir graf olsun. L'nin özdeğerlerine G *grafının normalize Laplacian özdeğerleri* denir (Chung, 1997).

G, n noktalı, m kenarlı bir graf ve $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n = 0$, G'nin normalize Laplacian özdeğerleri olmak üzere, G grafının geren ağaçlarının sayısı $t(G)$, G'nin normalize Laplacian özdeğerleri cinsinden

$$t(G)=\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\rho_i \qquad (1.16)$$

şeklinde ifade edilir (Cvetković ve ark., 1980; Chung, 1997).

Şekil 1.22 deki G grafını göz önüne alalım. Bu grafın normalize Laplacian matrisi

$$L=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olup normalize Laplacian özdeğerleri de

$$\rho_1=\rho_2=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4},\ \rho_2=\rho_3=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4} \text{ ve } \rho_5=0$$

dir. Ayrıca bu grafın kenar sayısı $m=5$ ve nokta dereceleri

$$d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=2$$

olup böylece geren ağaçlarının sayısı yine

$$t(G)=\left(\frac{\prod_{i=1}^{5} d_i}{10}\right)\prod_{i=1}^{4}\rho_i=5$$

şeklinde elde edilir.

1.3.6. Grafın Topolojik İndeksleri

Genel olarak bir *topolojik indeks*, graf-teorik indeks olarak da bilinen (kimyasal) bir grafın nümerik bir invaryantıdır (Plavšić ve ark., 1993). Graftaki uzaklık kavramına bağlı topolojik indeksler moleküllerin yapıları ve özellikleri arasındaki ilişkiyi belirlemek için teorik kimyada geniş ölçüde kullanılır. Bu indeksler kimyasal bileşiklerin fiziksel, kimyasal ve termodinamik parametreleri ile ilişki sağlaması açısından çok önemlidir (Gutman ve Furtula, 2012; Gutman ve Furtula, 2012).

Çalışmamızda adı geçen grafın "derece Kirchhoff indeksi" de grafın topolojik indekslerinden biri olup şimdi bu kavramın nasıl ortaya çıktığından ve öneminden bahsedelim.

G nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olan n noktalı, m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. d_i herhangi bir v_i noktasının derecesini, d_{ij} de herhangi iki v_i ve v_j noktaları arasındaki uzaklığı göstersin.

G grafının *Wiener indeksi* v_i ve v_j sıralı olmayan nokta çiftleri arasındaki bütün uzaklıkların toplamı olup

$$W(G) = \sum_{\{v_i, v_j\} \subseteq V(G)} d_{ij} \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanır (Wiener, 1947). Bu moleküler yapı tanımlayıcı, moleküler bileşiklerin birçok fiziksel ve kimyasal indeksleri ile önemli bağlantıları olan en çok kullanılan topolojik indekslerden biridir (Dobrynin ve ark, 2001).

G grafının *derece uzaklığı*

$$D'(G) = \sum_{\{v_i, v_j\} \subseteq V(G)} \left[d_i + d_j\right] d_{ij} \tag{1.18}$$

şeklinde tanımlanır (Dobrynin ve Kochetova, 1994). Bu kavramdan Gutman (1994) çalışmasında *Schultz indeks* olarak bahsetmiştir.

G grafının *derece uzaklığının çarpımsal varyantı*

$$S(G) = \sum_{\{v_i, v_j\} \subseteq V(G)} d_i d_j d_{ij} \tag{1.19}$$

şeklindedir (Gutman, 1994). Gutman bu indeksi *ikinci tür Schultz indeks* adı altında tanımlamıştır. Ancak daha sonra bu indeks Todeschini ve Consonni (2000) tarafından *Gutman indeks* olarak adlandırılmıştır.

Klein ve Randić (1993) çalışmalarında yeni bir uzaklık fonksiyonu olarak elektrik ağ (network) teorisine dayalı *direnç uzaklığı (resistance distance)* öne sürmüşlerdir. Klein ve Randić, G grafının her bir kenarını bir birim direnç ile değiştirerek G grafını bir N elektrik ağ olarak düşünmüşlerdir. Böylece G grafının v_i ve v_j noktaları arasındaki direnç uzaklığı N deki v_i ve v_j noktaları arasındaki *etkili direnç uzaklığı (effective resistance distance)* olarak tanımlamışlardır ve bunu R_{ij} olarak göstermişlerdir.

J bütün elemanları 1 olan $n \times n$ bir matris ve $L(G)$, G grafının Laplacian matrisi olmak üzere $L(G)+\frac{1}{n}J$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olup tersi mevcuttur (Xiao ve Gutman, 2003).

$$X=(x_{ij})=\left(L(G)+\frac{1}{n}J\right)^{-1}$$

olmak üzere direnç uzaklığı

$$R_{ij}=x_{ii}+x_{jj}-2x_{ij}$$

şeklinde hesaplanır (Babić ve ark., 2002).

Bu kavram Laplacian ve normalize Laplacian spektral teoride, elektrik ağlarında ve kimyada önemli bir yere sahiptir (Klein ve Randić, 1993; Xiao ve Gutman, 2003; Chen ve Zhang, 2007).

G grafının *Kirchhoff indeksi* Wiener indeksine benzer olarak

$$Kf(G)=\sum_{\{v_i,v_j\}\subseteq V(G)} R_{ij} \tag{1.20}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bonchev ve ark., 1994).

G grafının *derece Kirchhoff indeksi* Gutman indeksine benzer olarak

$$Kf^*(G)=\sum_{\{v_i,v_j\}\subseteq V(G)} d_i d_j R_{ij} \tag{1.21}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Chen ve Zhang, 2007).

G, n noktalı ve Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n = 0$ olan bir graf olmak üzere, Gutman ve Mohar (1996) çalışmalarında G nin Kirchhoff indeksinin Laplacian özdeğerler cinsinden

$$Kf(G)=n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} \tag{1.22}$$

şeklinde ifade edilebildiğini ispatlamışlardır.

G, n noktalı ve normalize Laplacian özdeğerleri $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_n = 0$ olan bir graf olmak üzere, Chen ve Zhang (2007) çalışmalarında G nin derece Kirchhoff indeksinin normalize Laplacian özdeğerler cinsinden

$$Kf^*(G) = 2m\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\rho_i} \tag{1.23}$$

şeklinde ifade edilebildiğini ispatlamışlardır.

Yukarıda da bahsedildiği gibi bir grafın derece Kirchhoff indeksi, graftaki uzaklık kavramına bağlı olarak tanımlanan Gutman indeksin, yeni bir uzaklık kavramı olan direnç uzaklığına adapte edilmesiyle ortaya çıkmıştır. Kirchhoff indeksi, grafın Laplacian özdeğerleri cinsinden ifade edilirken, derece Kirchhoff indeksin de grafın normalize Laplacian özdeğerleri cinsinden ifade edilebildiğinin ispatlanması, bu indeksi önemli kılan özelliklerden biridir. Bununla birlikte derece Kirchhoff indeks ile Kirchhoff indeks arasında birçok bağlantı olup, bu da derece Kirchhoff indeks kavramının önemini artırmaktadır. Bu bağlantılar hakkında daha detaylı bilgi için Chen ve Zhang (2007) ve Zhou ve Trinajstić (2009) tarafından yapılan çalışmalara bakılabilir.

1.3.7. Artan-Azalan ve Konveks-Konkav Fonksiyonlar

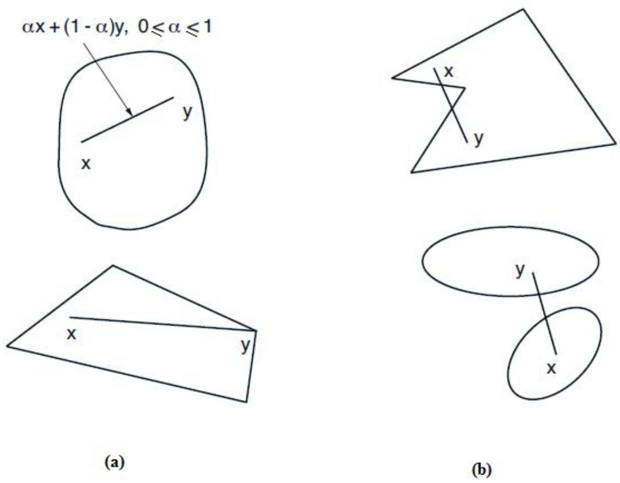
$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in A$ için, $x < y$ iken $f(x) \leq f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna A üzerinde *monoton artan*, $x < y$ iken $f(x) < f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna A üzerinde *kesin artan* fonksiyon denir. Benzer şekilde; $x < y$ iken $f(x) \geq f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna A üzerinde *monoton azalan* $x < y$ iken $f(x) > f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna A üzerinde *kesin azalan* fonksiyon denir. Ayrıca, türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonu için eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton artan, $f'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur. Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton azalan, $f'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur (Caferov, http://w2.anadolu.edu.tr/aos/kitap/IOLTP/2285/unite10.pdf [Ziyaret Tarihi: 9 Aralık 2013].)

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Her $x, y \in S$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için,

$$ax + (1-a)y \in S$$

oluyorsa S'ye *konveks küme* denir. Başka bir deyişle $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki bütün noktalar aynı kümede kalıyorsa S'ye konveks küme denir.

Aşağıda konveks ve konveks olmayan kümelere bir örnek verilmiştir.



Şekil 1.23. Konveks ve konveks olmayan kümeler
http://web.mit.edu/course/6/6.253/OldFiles/www/Lecture02.pdf [Ziyaret Tarihi: 9 Aralık 2013]

$\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan bir S alt kümesi üzerinde tanımlı reel değerli $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Fonksiyonun tanım kümesi olan S kümesi konveks bir küme ve herhangi $x, y \in S$ ve her $0 \leq a \leq 1$ için

$$f\left(ax + (1-a)y\right) \leq af(x) + (1-a)f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir.

$t \geq 1$ ya da $t \leq 0$ için $f(x) = x^t$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Herhangi $x, y \in S$ ve her $0 \leq a \leq 1$ için

$$f\left(ax + (1-a)y\right) < af(x) + (1-a)f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna *kesin konveks fonksiyon* denir

$-f$ fonksiyonu konveks ise $f: S \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *konkav fonksiyon* denir.

$-f$ fonksiyonu kesin konveks ise $f: S \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *kesin konkav fonksiyon* denir.

$0 \le t \le 1$ için $f(x) = x^t$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi üzerinde konkav bir fonksiyondur (Horn ve Johnson, 1991; Pecaric ve ark., 1992).

1.3.8. Bazı Eşitsizlikler

Şimdi çalışmamızda kullanacağımız bazı eşitsizlikleri verelim.

Teorem 1.3.8.1 (Hölder Eşitsizliği) $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reel (kompleks) sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} \tag{1.24}$$

eşitsizliği sağlanır. (1.24) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart her bir $1 \le i \le n$ için $|b_i| = c|a_i|^{p-1}$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ olmasıdır (Hardy ve ark., 1934).

Teorem 1.3.8.2 (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği) Negatif olmayan n tane $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayıları için

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{1.25}$$

eşitsizliği sağlanır. (1.25) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ olmasıdır (Hardy ve ark., 1934).

Teorem 1.3.8.3 (Jensen Eşitsizliği) $f: S \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ olmak üzere $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ olsun. Bu takdirde

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \tag{1.26}$$

eşitsizliği sağlanır. Kesin konveks fonksiyonlar için (1.26) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ olmasıdır.

Eğer $f : S \to \mathbb{R}$ konkav bir fonksiyon ise (1.26) eşitsizliğinin tersi olan

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i f\left(x_i\right) \tag{1.27}$$

eşitsizliği sağlanır. Kesin konkav fonksiyonlar için (1.27) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ olmasıdır. (Hardy ve ark., 1934)

2. SQG'ın Özdeğerlerini İçeren Parametreler İçin Sınırlar

Çalışmamızın bu bölümünde SQG'ın enerjisi ve Estrada indeksi için bazı sınırlar elde edilmiş ve bu sınırların SQG için, daha önceden elde edilen sınırlardan daha iyi olduğu gösterilmiştir.

Yukarıda belirtilen Alt Bölüm 2.2 ve Alt Bölüm 2.3 de yer alan bu sonuçlar orijinal olup tarafımızdan ispatlanmıştır (Bozkurt ve ark., 2012).

2.1. Lemmalar

Bu alt bölümde, sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız bazı yardımcı lemmalar verelim.

Lemma 2.1.1 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ negatif olmayan sayılar olsun. Bu takdirde

$$n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}\right] \le n\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2$$
$$\le n(n-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}\right]$$

dir (Zhou ve ark., 2008).

Lemma 2.1.2 G , n noktalı bir SQG ise, bu takdirde

$$S = \left\{ p \middle| p \text{ asal ve } \frac{n}{2} < p \le n \right\}$$

olmak üzere -1, katlılığı $|S| = l$ den büyük veya eşit olacak şekilde G'nin bir özdeğeridir (Adiga ve Zaferani, 2008).

Lemma 2.1.3 G , n noktalı bir SQG ise, bu takdirde

$$s = \sum_{\substack{p-\text{asal} \\ p \le \left[\frac{n}{2}\right]}} \left(\left[\log_p n\right] - 1\right)$$

olmak üzere 0 , katlılığı s den büyük veya eşit olacak şekilde G'nin bir özdeğeridir (Adiga ve Zaferani, 2008).

Lemma 2.1.4 G, n noktalı, m kenarlı, nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olan bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 = 2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2m + 8q$$

dir. Burada d_i, v_i noktasının derecesi ve q, G'nin dörtgenlerinin sayısıdır (Gutman ve ark., 2009).

2.2. SQG'ın Enerjisi İçin Sınırlar

G, n noktalı ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olan bir SQG olsun. Bu alt bölümde, G nin enerjisi için elde edilen iyi bir üst sınır ve iki yeni alt sınır verilmiştir. Not edelim ki, Alt Bölüm 2.2 ve Alt Bölüm 2.3 boyunca, l ve s sırasıyla Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 de belirtildiği gibi olmak üzere kolaylık olması açısından

$$\lambda_{n-l-s+1} = \lambda_{n-l-s+2} = \cdots = \lambda_{n-l} = 0$$

ve

$$\lambda_{n-l+1} = \lambda_{n-l+2} = \cdots = \lambda_n = -1$$

farzedilmiştir.

Teorem 2.2.1 G, $3 < n$ noktalı ve m maksimum kenarlı bir SQG, $S = \left\{ p \middle| p \text{ asal ve } \frac{n}{2} < p \leq n \right\}$ ve $|S| = l$ olsun. Bu takdirde

$$E(G) \geq l + \sqrt{2m - l + (n-l-s)(n-l-s-1)\phi^{2/n-l-s}} \tag{2.1}$$

ve

$$E(G) \leq l + \sqrt{(n-l-s-1)(2m-l) + (n-l-s)\phi^{2/n-l-s}} \tag{2.2}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Burada

$$\phi = \prod_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i| \quad \text{ve} \quad s = \sum_{\substack{p-\text{asal} \\ p \leq \left[\frac{n}{2}\right]}} \left(\left[\log_p n \right] - 1 \right)$$

dir.

İspat. Lemma 2.1.1 de $a_i = \lambda_i^2$ ve n yerine $n-l-s$ alarak

$$T \le (n-l-s)\sum_{i=1}^{n-l-s}\lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-l-s}|\lambda_i|\right)^2 \le (n-l-s-1)T$$

elde edilir. Burada

$$T = (n-l-s)\left[\frac{1}{n-l-s}\sum_{i=1}^{n-l-s}\lambda_i^2 - \left(\prod_{i=1}^{n-l-s}\lambda_i^2\right)^{1/n-l-s}\right]$$

dir. Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 den, -1 ve 0, sırasıyla katlılılığı l ve s den büyük veya eşit olacak şekilde G 'nin özdeğerleridir. Böylece

$$T \le (n-l-s)(2m-l) - (E(G)-l)^2 \le (n-l-s-1)T$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} T &= (n-l-s)\left[\frac{1}{n-l-s}\sum_{i=1}^{n-l-s}\lambda_i^2 - \left(\prod_{i=1}^{n-l-s}\lambda_i^2\right)^{1/n-l-s}\right] \\ &= (n-l-s)\left[\frac{1}{n-l-s}(2m-l) - \left(\prod_{i=1}^{n-l-s}|\lambda_i|\right)^{2/n-l-s}\right] \\ &= 2m-l-(n-l-s)\phi^{2/n-l-s} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.1 Adiga ve Zaferani (2008) yaptıkları çalışmada SQG'ın Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 de verildiği gibi iki özdeğerini belirlemiş ve SQG'ın enerjisi için

$$E(G) \le l + \sqrt{(n-l-s)(2m-l)} \tag{2.3}$$

üst sınırını elde etmişlerdir. (2.2) üst sınırı (2.3) üst sınırından daha iyidir. Gerçekten Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$2m-l \ge (n-l-s)\phi^{2/n-l-s}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E(G) &\le l + \sqrt{(n-l-s-1)(2m-l) + (n-l-s)\phi^{2/n-l-s}} \\ &\le l + \sqrt{(n-l-s)(2m-l)} \end{aligned}$$

olur. Bu ise (2.2) üst sınırının (2.3) üst sınırından daha iyi olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.2 G**,** $3 < n$ noktalı ve m maksimum kenarlı bir SQG, $S = \left\{ p \middle| p \text{ asal ve } \frac{n}{2} < p \leq n \right\}$ ve $|S| = l$ olsun. Bu takdirde

$$E(G) \geq l + (2m - l)\sqrt{\frac{2m - l}{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2m + 8q - l}} \tag{2.4}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat. Hölder eşitsizliği $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ negatif olmayan reel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}$$

şeklindedir. Bu eşitsizlikte $a_i = |\lambda_i|^{2/3}$, $b_i = |\lambda_i|^{4/3}$, $p = 3/2,\ q = 3$ ve n yerine $n - l - s$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i|^{2/3} \left(|\lambda_i|^4 \right)^{1/3} \leq \left(\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i| \right)^{2/3} \left(\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i|^4 \right)^{1/3} \tag{2.5}$$

elde edilir. G grafı, $3 < n$ noktalı olduğundan, S kümesinin mertebesi en az bire eşittir. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i|^4 \neq 0$$

olup (2.5) denklemi

$$\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i| \geq \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i|^2 \right)^3}{\sum_{i=1}^{n-l-s} |\lambda_i|^4}} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-l-s} \lambda_i^2 \right)^3}{\sum_{i=1}^{n-l-s} \lambda_i^4}}$$

şeklinde yazılır. Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 den, -1 ve 0, sırasıyla katlılılığı l ve s den büyük veya eşit olacak şekilde G 'nin özdeğerleridir. Böylece Lemma 2.1.4 den

$$E(G) - l \geq \sqrt{\frac{(2m - l)^3}{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2m + 8q - l}}$$

olur.

Buradan

$$E(G) \geq l + (2m-l)\sqrt{\frac{2m-l}{2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2m + 8q - l}}$$

olup bu da ispatı tamamlar.

2.3. SQG'ın Estrada İndeksi İçin Sınırlar

G, n noktalı, özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olan bir SQG ve n_+, G'nin pozitif özdeğerlerinin sayısı olsun. Bu alt bölümde, G'nin Estrada indeksi için G'nin nokta sayısını, kenar sayısını, pozitif özdeğerlerinin sayısını ve enerjisini içeren bazı sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 2.3.1 G**,** $3 < n$ noktalı ve m maksimum kenarlı bir SQG olsun. Bu takdirde

$$EE(G) \geq le^{-1} + \frac{1}{2}E(G)(e-1) + n - n_+ \tag{2.6}$$

ve

$$EE(G) \leq le^{-1} + (n-l-1) + e^{\frac{E(G)}{2}} \tag{2.7}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$S = \left\{ p \middle| p \text{ asal ve } \frac{n}{2} < p \leq n \right\} \text{ ve } |S| = l$$

dir.

İspat. Alt Sınır: Lemma 2.1.2, Lemma 2.1.3, $e^x \geq xe$ ve $e^x \geq 1+x$ eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} EE(G) &= \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = se^0 + le^{-1} + \sum_{i=1}^{n-l-s} e^{\lambda_i} \\ &\geq s + le^{-1} + \sum_{\lambda_i > 0} e\lambda_i + \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \leq 0}}^{n-l-s} (1+\lambda_i) \\ &= s + le^{-1} + (e-1)\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n_+}\right) + (n-l-s-n_+) + l \\ &= le^{-1} + \frac{1}{2}E(G)(e-1) + n - n_+ \end{aligned}$$

olup böylece (2.6) alt sınırı elde edilir.

Üst Sınır: n_+, G 'nin pozitif özdeğerlerinin sayısı olsun. $f(x)=e^x$ fonksiyonu $(-\infty,+\infty)$ aralığında monoton artan olduğundan,

$$EE(G)=\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = se^0 + le^{-1} + \sum_{i=1}^{n-l-s} e^{\lambda_i}$$

$$\leq s + le^{-1} + (n-l-s-n_+) + \sum_{i=1}^{n_+} e^{\lambda_i}$$

dir. Böylece

$$EE(G) \leq le^{-1} + (n-l-n_+) + \sum_{i=1}^{n_+}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda_i)^k}{k!}$$

$$= le^{-1} + n - l + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n_+}(\lambda_i)^k \tag{2.8}$$

$$\leq le^{-1} + n - l + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n_+}(\lambda_i)\right]^k$$

$$= le^{-1} + (n-l-1) + e^{\frac{E(G)}{2}}$$

olup ispat tamamlanır.

Uyarı 2.3.1 Liu ve Liu (2010) yaptıkları çalışmada n noktalı, m kenarlı basit graflar için

$$EE(G) \geq \frac{1}{2}E(G)(e-1) + n - n_+ \tag{2.9}$$

ve

$$EE(G) \leq n - 1 + e^{\frac{E(G)}{2}} \tag{2.10}$$

eşitsizliklerini ispatlamışlardır. $3 < n$ noktalı ve m maksimum kenarlı bir SQG olan G grafının Estrada indeksi $EE(G)$ için, (2.6) alt sınırının (2.9) alt sınırından daha iyi olduğu açıktır. Ayrıca $f(x)=e^x$ fonksiyonu $(-\infty,+\infty)$ aralığında monoton artan olduğu ve S kümesinin mertebesinin ($|S|=l$) en az 1 olduğu göz önüne alınırsa, (2.7) üst sınırının (2.10) üst sınırından daha iyi olduğu sonucuna varılır.

Teorem 2.3.2 G **,** $3 < n$ noktalı ve m maksimum kenarlı bir SQG olsun. Bu takdirde

$$EE(G) - E(G) < le^{-1} + (n-l-1) - \sqrt{2m-l} + e^{\sqrt{2m-l}} \qquad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$S = \left\{ p \,\middle|\, p \text{ asal ve } \frac{n}{2} < p \leq n \right\} \text{ ve } |S| = l$$

dir.

İspat. (2.8) denkleminden

$$\begin{aligned} EE(G) &\leq le^{-1} + n - l + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{n_+} (\lambda_i)^k \\ &= le^{-1} + n - l + \frac{E(G)}{2} + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{n_+} (\lambda_i)^k \\ &< le^{-1} + n - l + E(G) + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{n_+} (\lambda_i)^k \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} EE(G) &< le^{-1} + n - l + E(G) + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=1}^{n_+} (\lambda_i)^2 \right]^{\frac{k}{2}} \\ &= le^{-1} + n - l + E(G) + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!} \left[2m - \sum_{i=n_+ +1}^{n} (\lambda_i)^2 \right]^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 den, -1 ve 0, sırasıyla katlılılığı l ve s den büyük veya eşit olacak şekilde G 'nin özdeğerleri olduğundan,

$$\sum_{i=n_+ +1}^{n} (\lambda_i)^2 \geq l$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} EE(G) - E(G) &< le^{-1} + n - l + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!} [2m - l]^{\frac{k}{2}} \\ &= le^{-1} + (n-l-1) - \sqrt{2m-l} + e^{\sqrt{2m-l}} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Yukaradaki ispatımızdan ayrıca (2.11) sınırından daha iyi olan

$$EE(G) - \frac{E(G)}{2} \leq le^{-1} + (n-l-1) - \sqrt{2m-l} + e^{\sqrt{2m-l}}$$

sınırının da elde edilebileceği açıktır.

Uyarı 2.3.2 Liu ve Liu (2010) yaptıkları çalışmada n noktalı, m kenarlı basit graflar için

$$EE(G)-E(G)\leq n-1-\sqrt{2m-1}+e^{\sqrt{2m-1}} \tag{2.12}$$

sınırını elde etmişlerdir. $f(x)=e^{x}$ ve $f(x)=e^{x}-x$ fonksiyonları sırasıyla $(-\infty,+\infty)$ ve $(0,+\infty)$ aralıklarında monoton artan ve S kümesinin mertebesi ($|S|=l$) en az 1'e eşit olduğundan, SQG için (2.11) üst sınırının (2.12) üst sınırından daha iyi olduğu sonucuna varılır.

3. Grafların Normalize Laplacian Özdeğerlerini İçeren Parametreleri İçin Sınırlar

Bu bölümde izole noktası olmayan bir grafın sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamı ilk kez tarafımızdan tanımlanmış ve bu parametreye bağlantılı (iki parçalı) graflar için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen alt sınırların bir sonucu olarak bağlantılı (iki parçalı) grafların derece Kirchhoff indeksi için bazı alt sınırlar verilmiştir. Ayrıca derece Kirchhoff indeks için elde edilen alt sınırlardan birinin literatürde var olan bir alt sınırla çakıştığı gözlemlenmiştir. Bunula birlikte izole noktası olmayan ve bağlantılı (iki parçalı) grafların geren ağaçlarının sayıları için bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Ek olarak izole noktası olmayan graflar için elde edilen üst sınırın (1.4) denklemindeki üst sınırdan daima daha iyi olduğu gösterilmiş ve geren ağaçların sayısı için elde edilen üst sınırlar bir örnek üzerinde karşılaştırılmıştır.

Yukarıda belirtilen Alt Bölüm 3.2 ve Alt Bölüm 3.3 de yer alan bu sonuçlar orijinal olup tarafımızdan ispatlanmıştır (Bozkurt ve Bozkurt, 2012; Bozkurt, 2012).

Not edelim ki, Alt bölüm 3.1, Alt Bölüm 3.2 ve Alt Bölüm 3.3 boyunca nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olan n noktalı bir G grafı için,

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} d_i \quad \text{ve} \quad P = 1 + \sqrt{\frac{2}{n(n-1)} \sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i d_j}}$$

kısaltmaları kullanılmıştır. Burada d_i, $v_i \in V_G$ noktasının derecesidir.

3.1. Lemmalar

Bu alt bölümde sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız bazı yardımcı lemmalar verelim.

Lemma 3.1.1 G, n noktalı ve normalize Laplacian özdeğerleri $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n = 0$ olan bir graf olsun. Bu takdirde

$$\rho_1 \geq \frac{n}{n-1} \tag{3.1}$$

dir. Dahası, (3.1) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin K_n tam graf olmasıdır (Chung, 1997).

Lemma 3.1.2 G **,** n noktalı ve normalize Laplacian özdeğerleri $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n = 0$ olan bir graf olsun. Bu takdirde

$$\rho_1 \geq P \tag{3.2}$$

dir. Dahası, (3.2) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin K_n tam graf olmasıdır (Das ve ark., baskıda).

Lemma 3.1.3 (3.2) alt sınırı, (3.1) alt sınırından daima daha iyidir (Das ve ark., baskıda).

Lemma 3.1.4 G **,** $2 < n$ noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{p,q}$ olmasıdır (Das ve ark., baskıda).

Lemma 3.1.5 G , n noktalı ve normalize Laplacian özdeğerleri $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n = 0$ olan bir graf olsun. Bu takdirde

$$0 \leq \rho_i \leq 2$$

dir. Dahası, $\rho_1 = 2$ olması için gerek ve yeter şart G 'nin bağlantılı bir bileşeninin iki parçalı ve aşikar (trivial) olmayan graf olmasıdır (Chung, 1997).

Lemma 3.1.6 G , n noktalı ve normalize Laplacian matrisi L olan, izole noktası olmayan bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = iz\left(L\right) = n$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = iz\left(L^2\right) = n + 2\sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i d_j}$$

dir (Zumstein, 2005).

Lemma 3.1.7 G **,** n noktalı ve izole noktası olmayan bir graf olsun. $d_{\max}$, G 'nin maksimum nokta derecesi olmak üzere, bu takdirde

$$\sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i d_j} \geq \frac{n}{2d_{\max}} \tag{3.3}$$

dir. Dahası, (3.3) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin regüler graf olmasıdır (Shi, 2009).

Lemma 3.1.8 $1 \le i \le n$ için $x_i > -1$ olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge c^2\left(1-n^{-1}\right)$ ise, bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+x_i\right) \le \ln\left(1+c-cn^{-1}\right)+\left(n-1\right)\ln\left(1-cn^{-1}\right)$$

dir (Cohn, 1967).

3.2. Grafların Normalize Laplacian Özdeğerlerinin Kuvvetlerinin Toplamı İçin Sınırlar

Bu alt bölümde yer alan sonuçlarımızı vermeden önce ilk olarak yeni bir graf parametresi olarak izole noktası olmayan bir grafın sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetlerinin toplamını tanımlayalım ve bu parametrenin önemini açıklayalım.

Tanım 3.2.1 G, n noktalı, izole noktası olmayan ve normalize Laplacian özdeğerleri $\rho_1 \ge \rho_2 \ge \cdots \ge \rho_n = 0$ olan bir graf ve $\alpha \ne 0$ bir reel sayı olsun. Bu takdirde G 'nin sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin α. kuvvetlerinin toplamı

$$s_\alpha^*\left(G\right) = \sum_{i=1}^{h} \rho_i^\alpha \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada h, G grafının sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin sayısıdır. G grafının $\rho_n = 0$ normalize Laplacian özdeğerinin katlılığı G 'nin bileşenlerinin sayısına eşittir (Chung, 1997). Böylece G nin bağlantılı bir graf olması durumunda (3.4) denklemi ile verilen tanım

$$s_\alpha^*\left(G\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i^\alpha \tag{3.5}$$

şeklinde olur. Bu tanım α 'nın belli değerleri için bilinen bazı graf parametreleri ile yakından ilişkilidir. Örneğin; $n=1$ için $s^*_1\left(G\right)=n$ dir. G grafının bağlantılı olması durumunda $2ms_{-1}^*\left(G\right) = Kf^*\left(G\right)$ dir. Burada $Kf^*\left(G\right)$, G 'nin derece Kirchhoff indeksidir (Chen ve Zhang, 2007).

Ayrıca sıfırdan farklı bir α reel sayısı için G 'nin genel Randić indeksi

$$R_\alpha(G) = \sum_{v_i \sim v_j} \left(d_i d_j\right)^\alpha$$

olmak üzere (Bollobás ve Erdös, 1998)

$$s_2^*(G) = n + 2\sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i d_j} = n + 2R_{-1}(G)$$

dir (Zumstein, 2005).

Teorem 3.2.1 $\alpha \neq 0,1$ olacak şekilde bir reel sayı ve G, $3 \leq n$ noktalı, m kenarlı ve $t(G)$ geren ağaçlı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$s_\alpha^*(G) \geq P^\alpha + (n-2)\left(\frac{2mt(G)}{\Delta P}\right)^{\alpha/(n-2)} \tag{3.6}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.6) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G = K_n$ olmasıdır.

İspat. (1.16) denkleminden, $\prod_{i=1}^{n-1} \rho_i = \dfrac{2mt(G)}{\Delta}$ dır. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} s_\alpha^*(G) &= \rho_1^\alpha + \sum_{i=2}^{n-1} \rho_i^\alpha \\ &\geq \rho_1^\alpha + (n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1} \rho_i^\alpha\right)^{1/(n-2)} \\ &= \rho_1^\alpha + (n-2)\left(\frac{2mt(G)}{\Delta \rho_1}\right)^{\alpha/(n-2)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$ olmasıdır. Şimdi

$$f(x) = x^\alpha + (n-2)\left(\frac{2mt(G)}{\Delta x}\right)^{\alpha/(n-2)}$$

yardımcı fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu takdirde

$$f'(x)=\alpha\left(x^{\alpha-1}-\left(\frac{2mt(G)}{\Delta}\right)^{\frac{\alpha}{n-2}}x^{-\frac{\alpha}{n-2}-1}\right)\geq 0$$

eşitsizliğini çözerek f fonksiyonunun $x\geq\left(\frac{2mt(G)}{\Delta}\right)^{1/(n-1)}$ ve ya $\alpha>0$ ya da $\alpha<0$ için artan olduğunu kolayca görebiliriz. Lemma 3.1.2, Lemma 3.1.3 ve Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\rho_1\geq P\geq\frac{n}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\rho_i}{n-1}\geq\left(\prod_{i=1}^{n-1}\rho_i\right)^{1/(n-1)}=\left(\frac{2mt(G)}{\Delta}\right)^{1/(n-1)}$$

dir. Böylece

$$s_\alpha^*(G)\geq f(P)=P^\alpha+(n-2)\left(\frac{2mt(G)}{\Delta P}\right)^{\alpha/(n-2)}$$

olup (3.6) eşitsizliği elde edilir. (3.6) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$\rho_1=P$ ve $\rho_2=\rho_3=\cdots=\rho_{n-1}$

olmasıdır. Bu takdirde Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.4' den, $G=K_n$ olduğu sonucuna varılır.

Daha öncede basedildiği gibi

$Kf^*(G)=2ms_{-1}(G)$

dir. Böylece (3.6) sınırında $\alpha=-1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1 G, $3\leq n$ noktalı, m kenarlı ve $t(G)$ geren ağaçlı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$Kf^*(G)\geq\frac{2m}{P}+2(n-2)m\left(\frac{\Delta P}{2mt(G)}\right)^{1/(n-2)}\tag{3.7}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.7) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G=K_n$ olmasıdır.

Teorem 3.2.2 G , $3 \le n$ noktalı bağlantılı bir graf olsun.

i) Eger $\alpha < 0$ ya da $\alpha > 1$ ise

$$s_\alpha^*(G) \ge P^\alpha + \frac{(n-P)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}, \tag{3.8}$$

ii) Eğer $0 < \alpha < 1$ ise

$$s_\alpha^*(G) \le P^\alpha + \frac{(n-P)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}} \tag{3.9}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Dahası, (3.8) ve (3.9) eşitsizliklerinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G = K_n$ olmasıdır.

İspat. x^α 'nın $x > 0$ ve $\alpha < 0$ ya da $\alpha > 1$ için (kesin) konveks bir fonksiyon olduğuna dikkat edelim. Böylece Jensen eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n-2} \rho_i\right)^\alpha \le \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n-2} \rho_i^\alpha$$

ve sonuç olarak

$$\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i^\alpha \ge \frac{1}{(n-2)^{\alpha-1}} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i\right)^\alpha$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$ olmasıdır. Buradan

$$\begin{aligned} s_\alpha^*(G) &= \rho_1^\alpha + \sum_{i=2}^{n-1} \rho_i^\alpha \\ &\ge \rho_1^\alpha + \frac{1}{(n-2)^{\alpha-1}} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i\right)^\alpha \\ &= \rho_1^\alpha + \frac{(n-\rho_1)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki

$$g(x) = x^\alpha + \frac{(n-x)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}$$

yardımcı fonksiyonunu düşünelim. Bu takdirde

$$g'(x) = \alpha\left(x^{\alpha-1} - \frac{(n-x)^{\alpha-1}}{(n-2)^{\alpha-1}}\right) \ge 0$$

eşitsizliğini çözerek g fonksiyonunun $x \geq \frac{n}{n-1}$ için artan olduğunu kolayca görebiliriz. Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 den,

$$\rho_1 \geq P \geq \frac{n}{n-1}$$

dir.

Böylece

$$s_\alpha^*(G) \geq g(P) = P^\alpha + \frac{(n-P)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}$$

olup (3.8) eşitsizliği elde edilir. (3.8) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$$\rho_1 = P \text{ ve } \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$$

olmasıdır. Bu takdirde Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.4' den, $G = K_n$ olduğu sonucuna varılır. Şimdi $0 < \alpha < 1$ olduğunu farzedelim. x^α, $x > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için (kesin) konkav bir fonksiyon olduğundan, Jensen eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n-2} \rho_i\right)^\alpha \geq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n-2} \rho_i^\alpha$$

ve sonuç olarak

$$\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i^\alpha \leq \frac{1}{(n-2)^{\alpha-1}} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i\right)^\alpha$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$ olmasıdır. Böylece

$$\begin{aligned} s_\alpha^*(G) &= \rho_1^\alpha + \sum_{i=2}^{n-1} \rho_i^\alpha \\ &\leq \rho_1^\alpha + \frac{1}{(n-2)^{\alpha-1}} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i\right)^\alpha \\ &= \rho_1^\alpha + \frac{(n-\rho_1)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

olur. Şimdi aşağıdaki

$$g(x) = x^\alpha + \frac{(n-x)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}$$

yardımcı fonksiyonunu alalım. g fonksiyonu $x \geq \frac{n}{n-1}$ için azalan olduğundan

$$s_{\alpha}^{*}(G) \leq g(P) = P^{\alpha} + \frac{(n-P)^{\alpha}}{(n-2)^{\alpha-1}}$$

olup (3.9) eşitsizliği elde edilir. Teoremin (i) kısmındaki (3.8) eşitsizliğinin eşitlik koşulana benzer olarak (ii) kısmındaki (3.9) eşitsizliğinde de eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G = K_n$ olmasıdır.

(3.8) sınırında $\alpha = -1$ alındığında derece Kirchhoff indeks için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2 G, $3 \leq n$ noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$Kf^{*}(G) \geq \frac{2m}{P} + \frac{2(n-2)^{2} m}{n-P} \tag{3.10}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.10) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G = K_n$ olmasıdır.

Şimdi Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 de verdiğimiz sonuçları bağlantılı iki parçalı graflar için de verelim.

Teorem 3.2.3 $\alpha \neq 0,1$ olacak şekilde bir reel sayı ve G, $3 \leq n$ noktalı, m kenarlı ve $t(G)$ geren ağaçlı bağlantılı iki parçalı bir graf olsun. Bu takdirde

$$s_{\alpha}^{*}(G) \geq (2)^{\alpha} + (n-2)\left(\frac{mt(G)}{\Delta}\right)^{\alpha/(n-2)} \tag{3.11}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.11) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{p,q}$ $(p+q=n)$ olmasıdır.

İspat. Teoremin 3.2.1'in ispatındaki benzer yolu izlersek

$$s_{\alpha}^{*}(G) \geq \rho_1^{\alpha} + (n-2)\left(\frac{2mt(G)}{\Delta\rho_1}\right)^{\alpha/(n-2)} \tag{3.12}$$

elde edilir. G grafı bağlantılı iki parçalı graf olduğundan, Lemma 3.1.5 den $\rho_1 = 2$ olduğu sonucuna varırız. Böylece (3.12) eşitsizliği düşünülerek (3.11) eşitsizliği elde edilir.

(3.11) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$

olmasıdır.

Şimdi (3.11) eşitsizliğinde eşitlik olduğunu farzedelim. Bu takdirde, Lemma 3.1.4 den $G \cong K_{p,q}$ olduğu sonucuna varırız. Tersine, iki parçalı $K_{p,q}$ grafı için (3.11) eşitsizliğinde eşitlik olduğu kolayca görülebilir.

(3.11) sınırında $\alpha = -1$ alındığında derece Kirchhoff indeks için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3 G, $3 \le n$ noktalı, m kenarlı ve $t(G)$ geren ağaçlı bağlantılı iki parçalı bir graf olsun. Bu takdirde

$$Kf^*(G) \ge m + 2(n-2)m\left(\frac{\Delta}{mt(G)}\right)^{1/(n-2)} \tag{3.13}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.13) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{p,q}$ $(p+q=n)$ olmasıdır.

Teorem 3.2.4 G, $3 \le n$ noktalı bağlantılı iki parçalı bir graf olsun.

i) Eğer $\alpha < 0$ ya da $\alpha > 1$ ise

$$s_\alpha^*(G) \ge n + 2\left(2^{\alpha-1} - 1\right), \tag{3.14}$$

ii) Eğer $0 < \alpha < 1$ ise

$$s_\alpha^*(G) \le n + 2\left(2^{\alpha-1} - 1\right) \tag{3.15}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Dahası, (3.14) ve (3.15) eşitsizliklerinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{p,q}$ $(p+q=n)$ olmasıdır.

İspat. Teorem 3.2.2'nin ispatındaki benzer yolu izlersek

$$s_\alpha^*(G) \ge \rho_1^\alpha + \frac{(n-\rho_1)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}} \tag{3.16}$$

elde edilir. G grafı bağlantılı iki parçalı graf olduğundan, Lemma 3.1.5 den $\rho_1 = 2$ olduğunu görürüz. Böylece (3.16) eşitsizliği düşünülerek (3.14) eşitsizliği elde edilir. $0 < \alpha < 1$ için Teorem 3.2.2'deki ispat yolu izlenirse

$$s_{\alpha}^{*}(G) \leq \rho_1^{\alpha} + \frac{(n-\rho_1)^{\alpha}}{(n-2)^{\alpha-1}} \tag{3.17}$$

elde edilir. Böylece $\rho_1 = 2$ olduğu ve (3.17) eşitsizliği göz önüne alınarak (3.15) eşitsizliği elde edilir.

(3.14) ve (3.15) eşitsizliklerinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$

olmasıdır. Teorem 3.2.3'ün ispatındaki benzer yol kullanılarak $G \cong K_{p,q}$ olduğu sonucuna varılır.

(3.14) sınırında $\alpha = -1$ alındığında derece Kirchhoff indeks için literatürde var olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.4. G, $3 \leq n$ noktalı ve m kenarlı bağlantılı iki parçalı bir graf olsun. Bu takdirde

$$Kf^{*}(G) \geq (2n-3)m \tag{3.18}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.18) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{p,q}$ $(p+q=n)$ olmasıdır (Zhou ve Trinajstić, 2009).

3.3. Grafların Geren Ağaçlarının Sayıları İçin Üst Sınırlar

Bu alt bölümde izole noktası olmayan ve bağlantılı (iki parçalı) grafların geren ağaçlarının sayıları için bu grafların nokta sayılarını, kenar sayılarını ve nokta derecelerini içeren bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Ek olarak Teorem 3.3.1 de elde edilen (3.19) üst sınırının (1.4) denklemindeki üst sınırdan daima daha iyi olduğu gösterilmiş ve geren ağaçların sayısı için elde edilen üst sınırlar bir örnek üzerinde karşılaştırılmıştır.

Teorem 3.3.1 G**,** n noktalı izole noktası olmayan bir graf olsun. Bu takdirde

$$t(G) \le \left(1+(n-2)b\right)(1-b)^{n-2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m}\right) \tag{3.19}$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada $b = \left(\dfrac{n-1-d_{\max}}{n(n-2)d_{\max}}\right)^{1/2}$ ve $d_{\max}$, G'nin maksimum nokta derecesidir.

İspat. G bağlantılı bir graf değil ise, bu takdirde $t(G)=0$ olup (3.19) eşitsizliği sağlanır. Şimdi G nin bağlantılı olduğunu farzedelim. $\rho_{n-1} > 0$ olduğundan,

$$0 < t(G) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m}\right)\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-1}$$

olduğu açıktır. $q = \dfrac{n}{n-1}$ ve $1 \le i \le n-1$ için $x_i = \dfrac{\rho_i}{q} - 1$ olsun. Bu takdirde $x_i > -1$ dir. Dahası, Lemma 3.1.6 ve Lemma 3.1.7' den

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\rho_i}{q} - 1\right) = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\rho_i}{q} - 1\right)^2 \\
&= (n-1) - \frac{2\sum_{i=1}^{n-1}\rho_i}{q} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\rho_i^2}{q^2} \\
&\ge (n-1) - 2(n-1) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(n + \frac{n}{d_{\max}}\right) \\
&= \frac{(n-1)^2}{nd_{\max}} - \left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \frac{(n-1)^2(n-1-d_{\max})}{n(n-2)d_{\max}}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \left((n-1)b\right)^2\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece Lemma 3.1.8'den

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1+x_i)\le\left(1+(n-1)b-\frac{(n-1)b}{n-1}\right)(1-b)^{n-2}$$

sonucuna varılır. Buradan

$$\prod_{i=1}^{n-1}\rho_i\le(1+(n-2)b)(1-b)^{n-2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

ve

$$t(G)\le(1+(n-2)b)(1-b)^{n-2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}d_i}{2m}\right)$$

olup (3.19) eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.3.1 $f(b)=(1+(n-2)b)(1-b)^{n-2}$ olsun. Bu takdirde $0\le b\le 1$ için

$$f'(b)=-(n-2)(n-1)b(1-b)^{n-3}\le 0$$

ve böylece $f(b)\le f(0)=1$'dir (Zhang, 2005). Bundan dolayı (3.19) sınırının (1.4) sınırından daima daha iyi olduğu sonuca varırız. Dahası, G grafı bir tam graf ise, (3.19) eşitsizliğinde eşitlik elde edilir.

Teorem 3.3.2 G, $2<n$ noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$t(G)\le P\left(\frac{n-P}{n-2}\right)^{n-2}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}d_i}{2m}\right)\tag{3.20}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.20) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin K_n tam graf olmasıdır.

İspat. (1.16) denkleminden,

$$t(G)=\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}d_i}{2m}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\rho_i$$

dir. Böylece Lemma 3.1.6 ve Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
t(G) &= \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \rho_1 \prod_{i=2}^{n-1} \rho_i \\
&\le \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \rho_1 \left(\frac{\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i}{n-2} \right)^{n-2} \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \rho_1 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i - \rho_1}{n-2} \right)^{n-2} \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \rho_1 \left(\frac{n-\rho_1}{n-2} \right)^{n-2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $P \le x \le 2$ için

$$f(x) = x(n-x)^{n-2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3'den

$$\rho_1 \ge P \ge \frac{n}{n-1}$$

dir. Ayrıca $P \le x \le 2$ için

$$f'(x) = f(x) \frac{n-(n-1)x}{x(n-x)} \le 0$$

olup böylece $f(x)$ maksimum değerini $x = P$ noktasında alır ve (3.20) eşitsizliği elde edilir.

(3.20) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart yukarıdaki tüm eşitsizliklerin eşitlik olması, yani

$\rho_1 = P$ ve $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$

olmasıdır.

Buradan Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.4 kullanılarak G grafının K_n tam graf olduğu sonucuna varılır. Tersine, K_n tam grafı için (3.20) eşitsizliğinde eşitlik olduğu kolayca görülür.

Şimdi Teorem 3.3.2 de elde edilen sonucu iki parçalı graflar için düşünelim.

Teorem 3.3.3. G, $2<n$ noktalı, m kenarlı bağlantılı iki parçalı bir graf olsun. Bu takdirde

$$t(G) \leq \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{m} \right) \tag{3.21}$$

eşitsizliği mevcuttur. Dahası, (3.21) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_{p,q}$ $(p+q=n)$ olmasıdır.

İspat. G grafı bağlantılı iki parçalı graf olduğundan, Lemma 3.1.5 ile, $\rho_1 = 2$ olduğu sonucuna varabiliriz. Bu bilgi, (1.16) eşitliği ve Lemma 3.1.6 göz önünde alınır ve Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
t(G) &= \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \rho_i = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \rho_1 \prod_{i=2}^{n-1} \rho_i \\
&\leq \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{m} \right) \left(\frac{\sum_{i=2}^{n-1} \rho_i}{n-2} \right)^{n-2} \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{m} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i - \rho_1}{n-2} \right)^{n-2} \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{m} \right) \left(\frac{n-\rho_1}{n-2} \right)^{n-2} = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{m} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

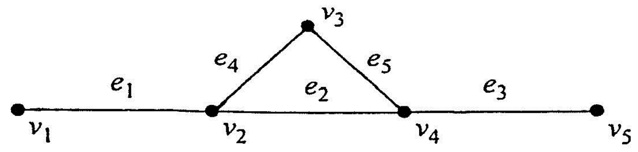
Dahası, (3.21) eşitsizliğinde eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$$

olmasıdır. Bu takdirde, Lemma 3.1.4 den $G \cong K_{p,q}$ olduğu sonucuna varabiliriz.

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.3 den sırasıyla, (3.20) üst sınırı K_n tam grafı için keskin iken, (3.21) üst sınırının $K_{p,q}(p+q=n)$ tam iki parçalı grafına izomorf olan iki parçalı graflar için keskin olduğu sonucuna varılır.

Örnek 3.3.1 Aşağıdaki gibi bir G grafı verilsin.



Şekil 3.1. Bir G grafı
(Balakrishnan ve Ranganathan, 1999)

Bu grafın normalize Laplacian matrisi

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

olup normalize Laplacian özdeğerleri

$$\rho_1 = \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}, \rho_2 = \frac{5}{3}, \rho_3 = 1, \rho_4 = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6} \text{ ve } \rho_5 = 0$$

şeklindedir. Ayrıca bu grafın nokta sayısı $n = 5$, kenar sayısı $m = 5$ ve nokta dereceleri $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 2, d_4 = 3$ ve $d_5 = 1$

dir. Böylece geren ağaçlarının sayısı

$$t(G) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2m} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \rho_i \right) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{5} d_i}{10} \right) \left(\prod_{i=1}^{4} \rho_i \right) = 3$$

olarak elde edilir.

Bu grafdaki geren ağaçların sayıları için elde edilen üst sınırların verdiği değerler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Şekil 3.1 deki G grafının geren ağaçlarının sayısı için, elde edilen üst sınırların verdiği yaklaşımlar

	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)	(1.7)	(1.8)	(1.9)	(3.19)	(3.20)
G	7.812	9.720	4.394	5.659	8.000	6.400	14.696	6.250	3.918	4.381

Grafların geren ağaçlarının sayıları için bu çalışmada elde edilen (3.19) üst sınırının literatürdeki (1.4) üst sınırından daima daha iyi olduğu Uyarı 3.3.1 de ispatlanmıştı. Çizelge 3.1 den ise (3.19) üst sınırının bazı durumlarda, yukarıda bahsedilen diğer üst sınırlardan daha iyi bir yaklaşım verdiği anlaşılmaktadır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Çalışmanın ikinci bölümünde, Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 de SQG'ın enerjisi için (2.1) ve (2.4) alt sınırları ve (2.2) üst sınırı elde edilmiş ve SQG için (2.2) üst sınırının (2.3) de verilen üst sınırdan daima daha iyi olduğu Uyarı 2.2.1 de ispatlanmıştır. Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2 de SQG'ın Estrada indeksi için (2.6) alt sınırı ve (2.7) ve (2.11) üst sınırları elde edilmiştir. SQG için, (2.6) alt sınırının (2.9) da verilen alt sınırdan, (2.7) üst sınırının (2.10) da verilen üst sınırdan daha iyi olduğu Uyarı 2.3.1 de, (2.11) üst sınırının (2.12) de verilen üst sınırdan daha iyi olduğu ise Uyarı 2.3.2 de ispatlanmıştır. Çalışmanın üçüncü bölümünde, Tanım 3.2.1 de izole noktası olmayan bir grafın sıfır olmayan normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetleri toplamı tanımlanmış ve bu parametrenin önemi açıklanmıştır. Teorem 3.2.1, Teorem 3.2.2, Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4 de bu parametreye, bağlantılı (iki parçalı) graflar için (3.6), (3.8), (3.11) ve (3.14) alt sınırları ve (3.9) ve (3.15) üst sınırları elde edilmiştir. Elde edilen alt sınırların bir sonucu olarak Sonuç 3.2.1, Sonuç 3.2.2, Sonuç 3.2.3 ve Sonuç 3.2.4 de bağlantılı (iki parçalı) bir grafın derece Kirchhoff indeksi için (3.7), (3.10), (3.13) ve (3.18) alt sınırları verilmiş ve (3.18) alt sınırının literatürde var olan bir alt sınırla çakıştığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte Teorem 3.3.1 de izole noktası olmayan grafların geren ağaçlarının sayıları için (3.19) üst sınırı, Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.3'de bağlantılı (iki parçalı) grafların geren ağaçlarının sayıları için (3.20) ve (3.21) üst sınırları elde edilmiştir. (3.19) üst sınırının (1.4) de verilen üst sınırından daima daha iyi olduğu Uyarı 3.3.1 de ispatlanmıştır. Örnek 3.3.1 de ise (3.19) üst sınırının (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) ve (3.20) üst sınırlarından bazı durumlarda daha iyi olduğu belirtilmiştir. Ayrıca Sonuç 3.3.1 de (3.20) üst sınırının K_n tam graf için keskin iken (3.21) üst sınırının $K_{p,q}\left(p+q=n\right)$ tam iki parçalı grafına izomorf olan iki parçalı graflar için keskin olduğu sonucuna varılmıştır.

4.2 Öneriler

Bu çalışmada SQG'ın enerjisi ve Estrada indeksi ve grafların normalize Laplacian özdeğerlerinin kuvvetleri toplamı ve geren ağaçlarının sayıları üzerine çalışılmış ve bu parametreler için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Bu parametreler için daha iyi alt ve üst sınırlar elde edilebilir. Ayrıca özel graf aileleri üzerinden bu parametreler daha detaylı çalışılarak spektral graf teori alanında yeni çalışma sahaları oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

Adiga, C., Zaferani, R. K., Smitha, M., 2007, Strongly quotient graphs, *South East Asian J. Math. & Math. Sc.,* 15, 119-127.

Adiga, C., Zaferani, R. K., 2008, Upper bounds for energy of a graph, *Adv. Stud. Cont. Math.,* 16, 279-285.

Aldous, J. M., Wilson, R. J., 2000, Graphs and Applications, The Open University, *Springer-Verlag*, London, Berlin, Heidelberg.

Babić, D., Klein, D.J., Lukovits, I., Nikolić, S., Trinajstić, N., 2002, Resistance-distance matrix. A computational algorithm and its application, *Int. J. Quantum Chem.,* 90,161-176.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K., 1999, A Texbook of Graph Theory, *Springer-Verlag*, New York, Berlin, Heidelberg.

Bapat, R.B., 2010, Graphs and Matrices, Universitext, *Springer*, London; Hindustan Book Agency, New Delhi.

Bollobás, B., Erdös, P., 1998, Graphs of extremal weights*, Ars Combin.,* 5, 225-233.

Bonchev, D., Balaban, A. T., Liu, X., Klein, D. J., 1994, Molecular cyclicity and centricity of polycyclic graphs: I. Cyclicity based on resistance distances or reciprocal distances, *Int. J. Quantum Chem.,* 50, 1-20.

Bozkurt, Ş.B., 2012, Upper bounds for the number of spanning trees of graphs, *J. Inequalities Appl.,* 269, 1-7.

Bozkurt, Ş.B., Adiga, C., Bozkurt, D., 2012, On the energy and Estrada index of strongly quotient graphs*, Indian J. Pure Appl. Math.,* 43 (1), 25-36.

Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., 2012, On the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68, 917-930.

Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., 2013, Sharp upper bounds for energy and Randić energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 70, 669-680.

Buckley, F., Harary, F., 1990, Distance in graphs, *Addison-Wesley,* Redwood.

Caferov, V., Türev Uygulamaları, Anadolu Üniversitesi, http://w2.anadolu.edu.tr/aos/kitap/IOLTP/2285/unite10.pdf [Ziyaret Tarihi: 9 Aralık 2013].

Chen, H., Zhang, F., 2007, Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum, *Discr. Appl. Math.,* 122, 654-661.

Chung, F. R. K., 1997, Spectral Graph Theory, *American Math. Soc.,* Providence, RI.

Cohn, J. H. E., 1967, Determinants with elements ± 1, *J. London Math. Soc.*, 42, 436-442.

Cvetković, D., Doob, M., Sachs, H., 1980, Spectra of Graphs, *Academic press*, New York.

Cvetković, D., Doob, M., Sachs, H., 1995, Spectra of Graphs-Theory and Application, third ed., *Johann Ambrosius Barth Verlag*, Heidelberg, Leipzig.

Das, K. Ch., 2007, A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph, *Graphs Combinator.*, 23, 625-632.

Das, K. Ch., Güngör, A. D., Bozkurt, Ş. B., On the normalized Laplacian eigenvalues of graphs, *Ars Combin.,* baskıda.

Das, K. Ch., Lee, S. G., 2009, On the Estrada index conjecture, *Linear Algebra Appl.,* 431, 1351-1359.

De la Pena, J. A., Gutman, I., Rada, J., 2007, Estimating the Estrada index, *Linear Algebra Appl.,* 427, 70-76.

Dobrynin, A., Entringer, R., Gutman, I., 2001, Wiener index of trees: Theory and applications, *Acta Appl. Math.,* 66, 211-249.

Dobrynin, A., Kochetova, A. A., 1994, Degree distance of a graph: A degree analogue of the Wiener index, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 34, 1082-1086.

Du, Z., Zhou, B., 2011, The Estrada index of trees, *Linear Algebra Appl.,* 435, 2462-2467.

Estrada, E., 2000, Characterization of 3D molecular structure, *Chem. Phys. Lett.,* 319, 713-718.

Estrada, E., 2002, Characterization of the folding degree of proteins, *Bionformatics,* 18, 697-704.

Estrada, E., 2004, Characterization of the amino acid contribution to the folding degree of proteins, *Proteins,* 54, 727-737.

Estrada, E., Rodríguez-Velázquez, J. A., 2005, Subgraph centrality in complex Networks, *Phys. Rev.,* E 71, 056103-1-056103-9.

Estrada, E., Rodríguez-Velázquez, J. A., 2005, Spectral measures of bipartivity in complex networks, *Phys. Rev.,* E 72, 046105-1-046105-6.

Euler, L., 1736, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* 8, 128-140.

Fath-Tabar, G. H., Ashrafi, A. R., 2011, New upper bounds for Estrada index of bipartite graphs, *Linear Algebra Appl.,* 435, 2607-2611.

Feng, L., Yu, G., Jiang, Z., Ren, L., 2008, Sharp upper bounds for the number of spanning trees of a graph, *Appl. Anal. Discrete Math.,* 2, 255-259.

Fiedler, M., 1973, Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Math. J.*, 23, 298-305.

Grimmett, G. R., 1976, An upper bound for the number of spanning trees of a graph, *Discrete Math.*, 16, 323-324.

Grone, R., Merris R., 1988, A bound for the complexity of a simple graph, *Discrete Math.*, 69, 97-99.

Gutman, I., 1978, The energy of a graph, *Ber. Math. Stat. Sckt. Forschungzentrum Graz*, 103, 1-22.

Gutman, I., 1994, Selected properties of the Schultz molecular topological index, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 34, 1087-1089.

Gutman, I., 2008, Lower bounds for Estrada index, *Publications de l'Institut Mathématique,* 83, 1-7.

Gutman, I., Zhou, B., Furtula, B., 2010, The Laplacian-energy like invariant is an energy like invariant, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*,64, 85-96.

Gutman, I., 2012, Comparative studies of graph energies, *Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles,* 144, 1-17.

Gutman, I., Furtula, B., 2012, Distance in Molecular Graphs-Theory, *Univ. Kragujevac,* Kragujevac, 2012.

Gutman, I., Furtula, B., 2012, Distance in Molecular Graphs-Applications, *Univ. Kragujevac,* Kragujevac, 2012.

Gutman, I., Gudino, E., Quiroz, D., 2009, Upper bound for the energy of graphs with fixed second and fourth spectral moments, *Kragujevac J. Math.,* 32, 27-35.

Gutman, I., Mohar M., 1996, The quasi-Wiener and the Kirchhoff indices coincide, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 36, 982-985.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. 1934, Inequalities, *Cambridge University Press*, Great Britain.

Horn, A.R., Johnson, C.R., 1991, Topics in Matrix Analysis, *Cambridge University Press*, New York.

Hou, Y. P., Tang, Z., Woo, C., 2007, On the spectral radius, *k*-degree and the upper bound of energy in a graph, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 57, 341-350.

Hückel, E., 1931, Quantentheoretische beitrage zum benzolproblem, *Z. Phys.,* 70, 204-286.

Lazić, M., 2006, On the Laplacian energy of a graph, *Czech. Math. J.,* 56, 1207-1213.

Li, J., Shiu, W. C., Chang, A.,2010, The number of spanning trees of a graph, *Appl. Math. Letters,* 23, 286-290.

Li, X., Shi, Y., Gutman, I., 2012, Graph Energy, *Springer*, New York.

Liu, H., Lu, M., 2008, Sharp bounds on the spectral radius and the energy of graphs, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 59, 279-290.

Liu, J., Liu, B., 2008, A Laplacian energy-like invariant of graphs, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 59, 355-372.

Liu, J. P., Liu, B. L., 2010, Bounds of the Estrada index of graphs, *Appl. Math. J. Chinese Univ.,* 25, 325-330.

Liu, M., Liu, B., 2011, A note sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Appl. Math. Lett.,* 24, 249-252.

Klein, D. J., Randić M., 1993, Resistance distance, *J. Math. Chem.,* 12, 81-95.

Koolen, J., Moulton, V., 2001, Maximal energy graphs, *Adv. Appl. Math.*, 26, 47-51.

Koolen, J., Moulton, V., 2003, Maximal energy bipartite graphs, *Graphs Combinator.,* 19, 131-135.

Merris, R., 1994, Laplacian matrices of graphs A survey, *Linear Algebra Appl.,* 197, 143-176.

Merris, R., 1988, A note on Laplacian graph eigenvalues, *Linear Algebra Appl.,* 285, 33-35.

Mohar, B., 1991, The Laplacian spectrum of graphs, in: Alavi Y., G. Chartrand G., Oellermann O. R., Schwenk A. J., Graph Theory, Combinatorics and Applications, vol. 2, *Wiley,* New York, 871-898.

Nosal, E., 1970, Eigenvalues of graphs, Master Thesis, *University of Calgary.*

Pecaric, J.E., Proschan F., Yong, Y.L., 1992, Convex Functions, Partial Orderings and Statistichal Applications, Mathematics in Science and Engineering, vol 187, *Academic Press Inc.*, USA.

Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N., Mihalić, Z., 1993, On the Harary index for the characterization of chemical graphs, *J. Math. Chem.,* 12, 235-250.

Rada, J.,Tineo, A., 2004, Upper and lower bounds for the energy of of bipartite graphs, *J. Math. Anal. Appl.,* 289, 446-455.

Shang, Y., 2012, Lower bounds for the Estrada index of graphs*, Electron. J. Linear Algebra,* 23, 664-668.

Shi, L., 2009, Bounds on Randić indices, *Discrete Math,* 309, 5238-5241.

Tian, G. X., Huang, T. Z., Zhou, B., 2009, A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs, *Linear Algebra Appl.,* 430, 2503-2510.

Todeschini, R., Consonni, V., 2000, Handbook of Molecular Descriptors, *Wiley-VCH*, Weinheim.

Wiener, H., 1947, Structural determination of parafin boiling points, *J. Amer. Chem. Soc.,* 69, 17-20.

Xiao, W., Gutman, I., 2003, On resistance matrices, *MATCH Commun. Math. Comput Chem.,* 49, 67-81.

Xiao, W., Gutman, I., 2003, Resistance distance and Laplacian spectrum, *Theor. Chem. Acc.,* 110, 284-289.

Yu, A. M., Lu, M., Tian, F., 2005, New upper bounds for the energy of graphs, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 53, 441-448.

Zaferani, R.K., 2008, A note on strongly quotient graphs*, B. Iran. Math. Soc.,* 34 (2), 97-114.

Zhang, X., 2005, A new bound for the complexity of a graph, *Utilitas Math.,* 67, 201-203.

Zhou, B., 2004, Energy of a graph, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 51, 111-118.

Zhou, B., 2008, On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Linear Algebra Appl.,* 429, 2239-2246.

Zhou, B., 2009, On sum of powers of Laplacian eigenvalues and Laplacian Estrada index of graphs, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 62, 611-619.

Zhou, B., Gutman, I., Aleksić, T., 2008, A note on the Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun Math. Comput. Chem.*, 60, 441-446.

Zhou, B., Ilić, A., 2010, On the sum of powers of Laplacian eigenvalues of bipartite graphs, *Czech. Math. J.*, 60, 1161-1169.

Zhou, B., Trinajstić, N., 2009, On resistance-distance and Kirchhoff index, *J. Math. Chem.,* 46, 283-289.

Zumstein, P., 2005, Comparison of spectral methods through the adjacency matrix and the Laplacian of a graph, Diploma Thesis, *ETH Zürich.*

(İsim belirtilmemiş), http://people.engr.ncsu.edu/mfms/SevenBridges/ [Ziyaret Tarihi: 9 Aralık 2013].

(İsim belirtilmemiş), http://web.mit.edu/course/6/6.253/OldFiles/www/Lecture02.pdf [Ziyaret Tarihi: 9 Aralık 2013].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Şerife Burcu BOZKURT
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Manavgat/Antalya, 12.02.1986
Telefon	:	0506 662 58 47
Faks	:	0332 241 24 99
e-mail	:	sbbozkurt@selcuk.edu.tr, srf_burcu_bozkurt@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Manavgat Anadolu Lisesi, Manavgat, Antalya	2003
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2007
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2009
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2013

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008-	Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI: Spektral Graf Teori

YABANCI DİLLER: İngilizce

YAYINLAR

A. Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler (SCI/SCI EXP.)

A1. Güngör, A.D., **Bozkurt, Ş.B.,** "On the Distance Estrada Index of Graphs", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 38(3), 277-283, 2009. **(Yüksek Lisans Tezinden)**

A2. Bozkurt, Ş.B., Güngör A.D., Zhou, B., "Note on the Distance Energy of Graphs", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 64, 129-134, 2010. **(Yüksek Lisans Tezinden)**

A3. Bozkurt, Ş.B., Güngör, A.D., Gutman, I., Çevik, A.S., "Randić Matrix and Randić Energy", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 64, 239-250, 2010.

A4. Bozkurt, **Ş.B.,** Güngör, A.D., Gutman, I., "Randić Spectral Radius and Randić Energy", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 64, 321-334, 2010.

A5. Bozkurt, **Ş.B.,** Güngör, A.D., "Improved Bounds for the Spectral Radius of Digraphs", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3), 313-318, 2010.

A6. Güngör, A.D., **Bozkurt**, **Ş.B.,** "On the Distance Spectral Radius and the Distance Energy of Graphs", Linear and Multilinear Algebra, 59(4), 365-370, 2011. **(Yüksek Lisans Tezinden)**

A7. Bozkurt, Ş.B., "Upper Bounds for the Number of Spanning Trees of Graphs", Journal of Inequalities and Applications, 269, 1-7 2012. **(Doktora Tezinden)**

A8. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "On the Sum of Powers of Normalized Laplacian Eigenvalues of Graphs", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 68, 917-930, 2012. **(Doktora Tezinden)**

A9. Bozkurt, **Ş.B.,** Adiga, C., Bozkurt, D.," On the Energy and Estrada Index of Strongly Quotient Graphs", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 43(1), 25-36, 2012. **(Doktora Tezinden)**

A10. Bozkurt, Ş.B., Gutman, I., "Estimating the Incidence Energy", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 70, 143-146, 2013.

A11. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "Sharp Upper Bounds for Energy and Randić Energy", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 70, 669-680, 2013.

A12. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "On the Signless Laplacian Spectral Radius of Digraphs", Ars Combinatoria, 108, 193-200, 2013.

A13. Bozkurt, **Ş.B.,** Adiga, C., Bozkurt, D., "Bounds on the Distance Energy and the Distance Estrada Index of Strongly Quotient Graphs", Journal of Applied Mathematics, http://dx.doi.org/10.1155/2013/681019, 1-6, 2013.

A14. Gutman, I., Furtula, B., **Bozkurt**, **Ş.B.,** "On Randić Energy", Linear Algebra and its Applications, 442, 50-57, 2014.

A15. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "On Incidence Energy", MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, baskıda.

A16. Das, K.C., Güngör, A.D., **Bozkurt, Ş.B.,** "On the Normalized Laplacian Eigenvalues of Graphs", Ars Combinatoria, baskıda.

B. Diğer Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

B1. Bozkurt, **Ş.B.,** Bozkurt, D., "Randić Energy and Randić Estrada Index of a Graph", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 5(1), 88-96, 2012.

B2. Bozkurt, **Ş.B.,** Bozkurt, D., "On the Spectral Radius of Weighted Digraphs", Proyecciones Journal of Mathematics, 31(3), 247-259, 2012. (Universidad Catolica del Norte Antofagasta-Chile)

B3. Jog, S.R., Hande, S.P., Gutman, I., **Bozkurt**, **Ş.B.,** "Derived Graphs of Some Graphs", Kragujevac Journal of Mathematics, 36(2), 309-314, 2012.

C. Uluslararası Kitaplarda Yayınlanan Makaleler

C1. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "On the Spectral Radius of the Distance-Based Matrices of Graphs", Topics in Chemical Graph Theory, University of Kragujevac and Faculty of Science Kragujevac, 91-98, 2014.

D. Uluslararası Konferanslarda Sunulan Bildiriler

D1. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "Randić Energy and Randić Estrada Index of a Graph", International Conference on Applied Analysis and Algebra, 29 June-2 July, 2011, İstanbul, Turkey.

D2. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "Improved Bounds for the Estrada Index of Graphs", MATTRIAD 2011 Conference on Matrix Analysis and Its Applications, 12-16 July, 2011, Tomar, Portugal.

D3. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "On the Complexity of Bipartite Graphs", International Conference on Applied Analysis and Algebra 20 -24 June, 2012, İstanbul, Turkey.

D4. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., "Bounds on the Largest Eigenvalue of the Distance Signless Laplacian of Connected Graphs", 1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 03-07 September, 2012, Prishtine, Kosovo.

D5. Bozkurt, Ş.B., Bozkurt, D., Zhang, X. D., "On the Spectral Radius and the Energy of a Digraph", 4th International Conference on Matrix Analysis and Applications, 02-05 July, 2013, Konya, Turkey.

E. <u>Ulusal Konferanslarda Sunulan Bildiriler</u>

E1. Bozkurt, Ş.B., Güngör, A.D., "The Upper Bounds for Spectral Radius", III Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, 22-23 Mayıs, 2008, Ankara, Türkiye.