ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİM LAPLACE VE MELLİN DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Ceren KÖMEKÇİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

05/06/2015

Ceren KÖMEKÇİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE VE MELLİN DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Ceren KÖMEKÇİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Fatma KARAKOÇ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezin genelinde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiş, Reimann-Liouville kesirli türev ve integralin temel özellikleri hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde Laplace dönüşümünün temel özellikleri açıklanmış, kesirli türev ve integralin Laplace dönüşümleri hesaplanmıştır. Ayrıca sabit katsayılı homogen diferensiyel denklemlerin ve homogen olmayan diferensiyel denklemlerin çözümleri Laplace dönüşümü yardımıyla incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Mellin dönüşümü tanıtılmış ve kesirli basamaktan değişken katsayılı diferensiyel denklemlerin çözümleri bu dönüşüm yardımıyla hesaplanmıştır.

Son bölüm ise elde edilen sonuçların analizine ayrılmıştır.

Haziran 2015, 52 sayfa

Anahtar Kelimler: Riemann-Liouville türev operatörü, Riemann-Liouville integral operatörü, Kesirli basamaktan diferensiyel denklem, Laplace dönüşümü, Mellin dönüşümü.

ABSTRACT

Master Thesis

LAPLACE AND MELLIN TRANSFORM METHOD
FOR SOLVING FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ceren KÖMEKÇİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Fatma KARAKOÇ

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems which are used all of thesis are given, basic properties of Riemann-Liouville fractional derivative and integral are reminded.

In the third chapter, basic properties of Laplace transform are explained, Laplace transforms of fractional derivative and integral are calculated. Moreover, the solutions of homogeneous and nonhomogeneous differential equations with constant coefficients are analyzed by using the Laplace transform.

In the fourth chapter, Mellin transform is introduced and Mellin transform method for solving fractional differential equations with Riemann-Liouville derivatives are calculated.

Finally, the last chapter is devoted to analysis of the results obtained.

June 2015, 52 pages

Key Words: Riemann-Liouville differential operator, Riemann-Liouville integral operator, Fractional differential equation, Laplace transform, Mellin transform

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli fikirleri ile beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam, Sayın Doç.Dr. Fatma KARAKOÇ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve çalışmam boyunca yardımlarını ve önerilerini eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, çalışmam süresince desteğini esirgemeyen ve bana her zaman moral kaynağı olan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ceren KÖMEKÇİ

Ankara, Haziran 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$[\|\|]$	Tam değer fonksiyonu
Γ	Gamma fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$I^{\alpha}_{a^+}$	Riemann-Liouville soldan kesirli integrali
$I^{\alpha}_{a^-}$	Riemann-Liouville sağdan kesirli integrali
$D^{\alpha}_{a^+}$	Riemann-Liouville soldan kesirli türevi
$D^{\alpha}_{a^-}$	Riemann-Liouville sağdan kesirli türevi
$A\mathbb{C}$	Mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{C}^n$	n. Basamaktan sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$A\mathbb{C}^n$	n. Basamaktan mutlak sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_p[a,b]$	Lebesque ölçülebilir fonksiyonlar uzayı

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geçtiğimiz 20 yılda kesirli basamaktan türev ve integral konusu üzerinde yoğun çalışmalar yapılmış, mühendislik ve biyoloji başta olmak üzere pek çok alanda sayısız uygulamaları olduğundan oldukça fazla önem kazanmıştır. Abel integral eşitliği gibi çok bilinen klasik yöntemlerin yanı sıra geri beslemeli kuvvetlendiriciler, kapasite teorisi, genelleştirilmiş voltaj ayrıştırıcılar, biyolojik sistemlerde elektrik iletkenliği, kesirli yapıda nöron modelleri, deneysel veriler mekanizması, özel fonksiyonlar konusu gibi bir çok alanda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada öncelikle Riemann-Liouville kesirli türev ve integralin temel özellikleri verilecektir.

Laplace dönüşümü özellikle kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bir aracıdır. Bu sebeple bu çalışmanın üçüncü bölümünde kesirli türev ve integralin Laplace dönüşümünün bazı temel özellikleri ifade edilecektir. Daha sonra bu özelliklerden yararlanılarak sabit katsayılı homogen diferensiyel denklemlerin ve homogen olmayan diferensiyel denklemlerin Laplace dönüşümü yardımıyla çözümünü verilecektir (Oldham ve Spanier 1974, Miller ve Ross 1993, Podlubny 1999, Kilbas vd. 2006, Lin ve Lu 2013).

Laplace dönüşümünün yanı sıra Mellin dönüşümü de kullanışlılığı sebebiyle son yıllarda tercih edilen dönüşümler arasında yer almaktadır. Bu sebeple dördüncü bölümde kesirli türev ve integralin Mellin dönüşümünün bazı temel özellikleri ifade edilecek ve bu özelliklerden yararlanılarak değişken katsayılı homogen olmayan diferensiyel denklemlerin çözümleri elde edilecektir (Bateman 1954, Samko vd. 1993, Katugampola 2011).

2. KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRAL

Bu bölümde tezin genelinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ifade edilecektir. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli türev ve integralin tanımı verilip temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.1 (Gamma fonksiyonu) $\mathrm{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

ile tanımlı $\Gamma(z)$ fonksiyonuna *Gamma fonksiyonu* denir (Samko vd. 1993).

Teorem 2.1 $\mathrm{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

dır (Samko vd. 1993).

Tanım 2.2 (Beta Fonksiyonu) $\mathrm{Re}(z) > 0$ ve $\mathrm{Re}(w) > 0$ için

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \tag{2.3}$$

ile tanımlı $\beta(z, w)$ fonksiyonuna *Beta fonksiyonu* denir (Samko vd. 1993).

Teorem 2.2 $z, w \notin \mathbb{Z}_0^-$ için (2.1) Gamma ve (2.3) Beta fonksiyonları arasında

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.4}$$

bağıntısı vardır (Samko vd. 1993).

Tanım 2.3 (Mittag-Leffler fonksiyonu) $z, \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ için

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{2.5}$$

ile tanımlı $E_\alpha(z)$ fonksiyonuna *Mittag-Leffler fonksiyonu* denir.

$z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ için

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{2.6}$$

ile tanımlı (2.6) fonksiyonuna *iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu* denir. Burada Γ, (2.1) ile tanımlı Gamma fonksiyonudur (Diethelm 2010).

Teorem 2.3 (2.6) ile tanımlı $E_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu her $z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır. Yani, $E_{\alpha,\beta}(z)$ tam fonksiyondur (Diethelm 2010).

İspat. Açıkça görüldüğü gibi Mittag-Leffler fonksiyonu bir kuvvet serisidir. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı için kullanılan Cauchy-Hadamard teoreminden bu kuvvet serisinin yakınsaklığı kolayca gösterilebilir. Mittag-Leffler fonksiyonu $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında yakınsak olduğu için de tam fonksiyondur.

Şimdi kesirli türev ve integralin tanımı ve özelliklerini verelim.

Tanım 2.4 $\Omega = [a, b]$ ve $-\infty < a < b < \infty$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$(I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ x > a, \tag{2.7}$$

ve

$$(I_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \ x < b, \tag{2.8}$$

ile tanımlı $I_{a^+}^{\alpha} f$ ve $I_{b^-}^{\alpha} f$ operatörlerine sırasıyla *sol taraflı* ve *sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri* denir. Burada Γ, (2.1) ile tanımlı Gamma fonksiyonudur.

Tanım 2.5 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $n = [|\mathrm{Re}(\alpha)|] + 1$ olmak üzere

$$(D_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f)(x) \tag{2.9}$$

ve

$$(D_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f)(x) \tag{2.10}$$

ile tanımlı $D_{a^+}^{\alpha}$ ve $D_{b^-}^{\alpha}$ operatörlerine sırasıyla α*. basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli türev operatörleri* denir, burada $[|\mathrm{Re}(\alpha)|]$, $\mathrm{Re}(\alpha)$' nın tam kısmını göstermektedir.

Teorem 2.4 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant 0$ ve $\gamma \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (i)\ (D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\gamma-1})(x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1} \qquad (2.11) \\ (ii)\ (D_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\gamma-1})(x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(b-x)^{\gamma-\alpha-1} \end{aligned}$$

dır (Kilbas vd. 2006).

İspat.

(i) (2.9) Riemann kesirli türev tanımından

$$(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\gamma-1})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (t-a)^{\gamma-1}(x-t)^{n-\alpha-1}dt \tag{2.12}$$

dır. (2.12) eşitliğinde $\dfrac{t-a}{x-a} = u$ dönüşümü yapılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\gamma-1})(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\gamma-1+n-\alpha}\int_0^1 u^{\gamma-1}(1-u)^{n-\alpha-1}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\gamma-1+n-\alpha}\beta(\gamma, n-\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir, burada β (2.3) ile tanımlı Beta fonksiyonudur. (2.4) özelliği göz önüne alınırsa

$$(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\gamma-1})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\gamma-1+n-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n-\alpha)}$$

bulunup Γ fonksiyonunun (2.2) özelliği göz önünde bulundurulduğunda istenilen sonuç elde edilir.

(ii) özelliği de benzer ispat yöntemiyle kolayca ispatlanabilir.

Örnek 2.1

$$(D^{\frac{1}{2}}_{1^+}(t-1)^3)(x) = \frac{2^4}{5\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

dir. Gerçekten (2.11) de $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 1$ ve $\gamma = 4$ alınırsa,

$$(D^{\frac{1}{2}}_{1^+}(t-1)^3)(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{2^4}{5\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

elde edilir.

Teorem 2.5 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant 0$ ve $\gamma \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (i)\ (I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\gamma-1})(x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(x-a)^{\gamma+\alpha-1} \\ (ii)\ (I^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\gamma-1})(x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(b-x)^{\gamma+\alpha-1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

dır (Kilbas vd. 2006).

İspat.

(i) (2.7) Riemann kesirli integral tanımından

$$(I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\gamma-1})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^{\gamma-1}(x-t)^{\alpha-1}dt \tag{2.14}$$

dir. (2.14) eşitliğinde $\dfrac{t-a}{x-a} = u$ dönüşümü yapılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\gamma-1})(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\gamma-1+\alpha}\int_0^1 u^{\gamma-1}(1-u)^{\alpha-1}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\gamma-1+\alpha}\beta(\gamma,\alpha) \end{aligned}$$

bulunur, (2.4) özelliği göz önüne alınırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

(ii) özelliği de benzer ispat yöntemiyle kolayca ispatlanabilir.

Örnek 2.2

$$(I_{1^+}^{\frac{1}{2}}(t-1)^3)(x) = \frac{2^5}{35\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}}$$

dır. Gerçekten, (2.13) eşitliğinde $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $\gamma = 4$ alınırsa,

$$(I_{1^+}^{\frac{1}{2}}(t-1)^3)(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{9}{2})}(x-1)^{\frac{7}{2}} = \frac{2^5}{35\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}}$$

elde edilir.

Teorem 2.6 Eğer $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$ ve $f(x) \in L_p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ise, bu durumda

$$(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\gamma} f)(x) = (I_{a^+}^{\alpha+\gamma} f)(x) \tag{2.15}$$

ve

$$(I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\gamma} f)(x) = (I_{b^-}^{\alpha+\gamma} f)(x) \tag{2.16}$$

eşitlikleri $[a, b]$ üzerinde hemen hemen her yerde geçerlidir (Miller ve Ross 1993, Kilbas vd. 2006).

İspat. (2.7) Riemann-Liouville kesirli integral tanımından

$$\begin{aligned}(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\gamma} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-\zeta)^{\gamma-1} f(\zeta) d\zeta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_\zeta^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\zeta)^{\gamma-1} f(\zeta) dt d\zeta\end{aligned}$$

elde edilir. Bu integrale $\dfrac{t-\zeta}{x-\zeta} = s$ dönüşümü uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(I^{\alpha}_{a^+} I^{\beta}_{a^+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\zeta)(x-\zeta)^{\alpha+\beta+1} \underbrace{\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} ds}_{\beta(\alpha,\beta)} d\zeta$$

bulunur. (2.4) ile verilen Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}(I^{\alpha}_{a^+} I^{\gamma}_{a^+} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_a^x f(\zeta)(x-\zeta)^{\alpha+\gamma-1} d\zeta \\ &= (I^{\alpha+\gamma}_{a^+} f)(x)\end{aligned}$$

bulunup (2.15) ispatlanmış olur.

Aynı ispat yöntemiyle (2.16) eşitliği de kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 2.7 Eğer $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ise, bu durumda

$$(D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f)(x) = f(x) \tag{2.17}$$

ve

$$(D^{\alpha}_{b^-} I^{\alpha}_{b^-} f)(x) = f(x) \tag{2.18}$$

eşitlikleri $[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde geçerlidir (Miller ve Ross 1993, Kilbas vd. 2006).

İspat. (2.7) ve (2.9) Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımlarından

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f)(x) &= D^{\alpha}_{a^+} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\int_{a}^{t}(x-t)^{n-\alpha-1}(t-\zeta)^{\alpha-1}f(\zeta)d\zeta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}f(\zeta)\int_{\zeta}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}(t-\zeta)^{\alpha-1}dtd\zeta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\dfrac{t-\zeta}{x-\zeta}=s$ dönüşümü yapılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}f(\zeta)\int_{0}^{1}\left[(1-s)(x-\zeta)\right]^{n-\alpha-1}\left[s(x-\zeta)\right]^{\alpha-1}dsd\zeta \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}f(\zeta)(x-\zeta)^{n-1}\underbrace{\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\alpha-1}dsd\zeta}_{\beta(\alpha,n-\alpha)}
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.4) ile verilen Beta ve Gamma fonksiyonları arasındaki ilişki göz önünde bulundurulursa,

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}f(\zeta)(x-\zeta)^{n-1}d\zeta \\
&= \frac{(n-1)(n-2)...(1)}{\Gamma(n)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(\zeta)d\zeta \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilip (2.17) ispatlanmış olur.

Benzer ispat yöntemi kullanılarak (2.18) de eşitliği de kolayca ispatlanabilir.

3. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Laplace dönüşümleri diferensiyel denklemlerin çözülmesinde kullanılan en önemli araçlarından biridir. Bu bölümde ilk olarak Laplace dönüşümünün temel özellikleri açıklanacak daha sonra kesirli türev ve kesirli integralin Laplace dönüşümleri hesaplanacaktır. Son iki kesimde ise, kesirli basamaktan bazı denklem sınıflarının çözümleri Laplace dönüşümü yardımıyla bulunacaktır.

3.1 Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

Bu kesimde Laplace dönüşümünün tanımı verilip bazı temel özellikleri ele alınacaktır.

Tanım 3.1 f, $t > 0$ için tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $s \in \mathbb{C}$ için

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

genelleştirilmiş integralinin yakınsadığı tüm s değerleri için (3.1) ile tanımlı F fonksiyonuna f fonksiyonunun *Laplace dönüşümü* denir ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 Her $t > t_0$ için

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}$$

sağlanacak şekilde $M > 0$ ve α sabitleri mevcutsa, bu durumda f fonksiyonuna $\alpha-$ *üstel basamaktandır* denir.

Teorem 3.1 f fonksiyonu $b > 0$ için her kapalı $[0, b]$ aralığında parçalı sürekli ve $\alpha-$ üstel basamaktan ise, bu durumda f fonksiyonunun Laplace dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur.

Tanım 3.3 f ve g fonksiyonları $b > 0$ için her kapalı $[0, b]$ aralığında parçalı sürekli ve $\alpha-$ üstel basamaktan olsun.

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t)g(x-t)dt \tag{3.2}$$

integraline f ve g fonksiyonlarının *konvolüsyonu* denir ve $f * g$ ile gösterilir.

Teorem 3.2 f ve g fonksiyonları her kapalı $[0,b]$, $b > 0$, aralığında parçalı sürekli ve $\alpha-$ üstel basamaktan olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} \ , \ s > \alpha \tag{3.3}$$

dır.

Teorem 3.3 $t \geqslant 0$ olmak üzere $f \in A\mathbb{C}^n$ ve f fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcut olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{3.4}$$

dir.

3.2 Kesirli Türev ve İntegralin Laplace Dönüşümü

Bu kesimde Riemann-Liouville kesirli türev ve integralin Laplace dönüşümleri ele alınacaktır. Bunun yanı sıra bazı özel fonksiyonların kesirli türev ve integrallerinin Laplace dönüşümü hesaplanacaktır.

Teorem 3.4 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant 0$ ve f fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcut olsun. (2.7) kesirli basamaktan integrali için

$$\mathcal{L}\left\{I_{0+}^{\alpha} f(t)\right\} = s^{-\alpha}F(s) \tag{3.5}$$

dır, burada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dır (Samko vd. 1993).

İspat. (2.7) ifadesinin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanıp (3.2) konvolüsyon teoremi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{f(t)\} \\
&= s^{-\alpha} F(s), \ s > 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.1 Teorem 3.4'ün bir uygulaması olarak $f(t) = \sin at$ alınırsa, (3.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} \sin at\} &= s^{-\alpha} \mathcal{L}\{\sin at\} \\
&= \frac{a}{s^{\alpha}(s^2 + a^2)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 f sürekli ve birinci basamaktan sürekli türeve sahip bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha}\{Df(t)\}\} = s^{-\alpha}[sF(s) - f(0)] \tag{3.6}$$

dır.

İspat. Teorem 3.4 ve (3.4) özelliği göz önünde bulundurulursa, (3.6) eşitliği elde edilir.

Çizelge 3.1'de bazı temel fonksiyonların kesirli basamaktan integralinin Laplace dönüşümleri verilmektedir.

Çizelge 3.1 Bazı temel fonksiyonların Riemann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümü

Fonksiyon	Laplace dönüşümü
$I_{0+}^{\alpha} t^{\mu}$	$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} t^{\mu}\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1+\alpha}},\ s>0,\ \mu>-1$
$I_{0+}^{\alpha} e^{at}$	$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} e^{at}\} = \frac{1}{s^{\alpha}(s-a)},\ s>0$
$I_{0+}^{\alpha} t^{\mu-1} e^{at}$	$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} t^{\mu-1} e^{at}\} = \frac{\Gamma(\mu)}{s^{\alpha}(s-a)^{\mu}},\ s>0,\ \mu>0$
$I_{0+}^{\alpha} \cos at$	$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} \cos at\} = \frac{1}{s^{\alpha-1}(s^2+a^2)},\ s>0$
$I_{0+}^{\alpha} \sin at$	$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha} \sin at\} = \frac{a}{s^{\alpha}(s^2+a^2)},\ s>0$

Teorem 3.5 $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leqslant n$ $(n \in \mathbb{N})$, $f(t) \in A\mathbb{C}^n(0,\infty)$ ve $f^{(n)}(t) \in L_1(0,b)$, $b > 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^{\alpha} f\right\}(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0) \tag{3.7}$$

dir (Lin ve Lu 2013).

İspat. (3.1) Laplace dönüşümü ve (2.9) Riemann-Liouville türev tanımları göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^{\alpha} f\right\}(s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{\infty} e^{-st} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n} f(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} e^{-st}(t-\zeta)^{\alpha-n+1} dt d\zeta$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte integrale $t - \zeta = u$ dönüşümünü uygulandığında

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^{\alpha} f\right\}(s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{\infty} e^{-s\zeta} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n} f(\zeta) \int_{0}^{\infty} e^{-su} u^{n-\alpha-1} du d\zeta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^\infty e^{-s\zeta} (\frac{d}{d\zeta})^n f(\zeta) \mathcal{L}\{u^{n-\alpha-1}\} d\zeta$$

bulunur. Burada $s > 0$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$\mathcal{L}\{x^{n-1}\} = \frac{\Gamma(n)}{s^n} \tag{3.8}$$

özelliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{D_{0+}^\alpha f\right\}(s) &= s^{\alpha-n} \int\limits_0^\infty e^{-s\zeta} (\frac{d}{d\zeta})^n f(\zeta) d\zeta \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left\{ \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n f(\zeta) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılıp (3.4) özelliği göz önünde bulundurulursa,

$$(\mathcal{L}D_{0+}^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=1}^n s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2

$$k = 1, ..., n \text{ için } f^{(k-1)}(0) = 0$$

ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^\alpha f\right\}(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s)$$

dir.

3.3 Kesirli Basamaktan Homogen Diferensiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü

Bu kesimde kesirli basamaktan

$$(D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = 0 \ , \ x > 0; \ p-1 < \alpha \leqslant p; \ p \in \mathbb{N}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

denklemi

$$(D_{0^+}^{\alpha-k}y_j)(0^+) = 0,\ k,j = 1,...,p;\ k \neq j,$$

$$(D_{0^+}^{\alpha-k}y_j)(0^+) = 1,\ k,j = 1,...,p;\ k = j, \tag{3.10}$$

koşullarıyla birlikte ele alınacaktır.

Aşağıdaki yardımcı lemmadan (3.9) ve (3.10) probleminin çözümlerini elde ederken yararlanılacaktır.

Lemma 3.1 α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\mid \lambda s^{-\alpha} \mid < 1$ için

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda} \tag{3.11}$$

dır. Burada $E_{\alpha,\beta}$ (2.6) ile tanımlı iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur (Diethelm 2010).

İspat. (2.6) Mittag-Leffler fonksiyonu tanımından

$$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanıp, Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \mathcal{L}\{t^{\alpha k+\beta-1}\}$$

elde edilir. (3.8) özelliği uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\alpha k+\beta}} \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^k \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{s^{\alpha}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}$$

bulunup istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.6 $p-1<\alpha\leqslant p$, $p\in\mathbb{N}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $j=1,...,p$ için

$$y_j(x)=x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda x^{\alpha}) \tag{3.12}$$

fonksiyonları (3.9) – (3.10) probleminin çözümleridir (Kilbas vd. 2006).

İspat. $j=1,...,p$ için

$$d_j=(D_{0+}^{\alpha-j}y)(0^+) \tag{3.13}$$

olsun. Bu durumda (3.7) denklemi $p-1<\alpha\leqslant p$, $p\in\mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^{\alpha}y\right\}(s)\ =s^{\alpha}\mathcal{L}\{y\}(s)-\sum_{j=1}^{p}d_js^{j-1} \tag{3.14}$$

şeklini alır. Laplace dönüşümünü (3.9) kesirli basamaktan homogen diferensiyel denklemine uygulanıp (3.14) gözönüne alınırsa

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{y\}(s)-\sum_{j=1}^{p}d_js^{j-1}-\lambda\mathcal{L}\{y\}(s)=0$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{L}\{y\}(s)=\sum_{j=1}^{p}d_j\frac{s^{j-1}}{s^{\alpha}-\lambda} \tag{3.15}$$

olup, (3.15) eşitliğinin her iki yanının ters Laplace dönüşümü alınıp (3.11) Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü özelliği kullanılırsa

$$y(x)=\sum_{j=1}^{p}d_jy_j(x),\quad y_j(x)=x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda x^{\alpha}),$$

bulunur.

Burada elde edilen y_j fonksiyonlarının (3.9) kesirli basamaktan homogen diferensiyel denkleminin çözümleri olduğu kolaylıkla görülebilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}[t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda t^{\alpha})](x) &= D^{\alpha}_{0+}\left\{t^{\alpha-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1-j)}\right\}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D^{\alpha}_{0+}\left\{\frac{\lambda^k t^{\alpha k+\alpha-j}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1-j)}\right\}(x) \end{aligned}$$

burada $k=0$ için $D^{\alpha}_{0+}(t^{\alpha-j})=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}[t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda t^{\alpha})](x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda^k t^{\alpha k-j}}{\Gamma(\alpha k+1-j)}\right\}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}x^{\alpha k+\alpha-j}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1-j)} \\ &= \lambda x^{\alpha-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}x^{\alpha k} \\ &= \lambda x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda x^{\alpha})\ , \quad j=1,...,p \end{aligned}$$

olup

$$(D^{\alpha}_{0+}y_j)(x)-\lambda y_j(x)=0$$

sağlanır.

Ayrıca y_j fonksiyonları (3.10) koşullarını da sağlar. Gerçekten $k,j=1,...,p; k\geqslant j$ için

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k}_{0+}[t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda t^{\alpha})](x) &= \left[D^{\alpha-k}_{0+}t^{\alpha-j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1-j)}\right](x) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n D^{\alpha-k}_{0+}t^{\alpha n+\alpha-j}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1-j)}\right](x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\Gamma(\alpha n+\alpha+1-j)}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1-j)\Gamma(\alpha n+\alpha-j+1-\alpha+k)}x^{\alpha n-j+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n+k+1-j)}x^{\alpha n+k-j} \end{aligned}$$

dır.

Bu durumda $k = 1, ..., p; k = j$ için

$$(D_{0^+}^{\alpha-k} y_k)(x) = 1 + \frac{\lambda x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda^2 x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + ...$$

olup

$$\lim_{x\to 0^+} (D_{0^+}^{\alpha-k} y_k)(x) = 1$$

ve $k, j = 1, ..., p; k > j$ için

$$(D_{0^+}^{\alpha-k} y_j)(x) = \frac{x^{k-j}}{\Gamma(k+1-j)} + \frac{\lambda x^{\alpha+k-j}}{\Gamma(\alpha+k+1-j)} + ...$$

olup

$$\lim_{x\to 0^+} (D_{0^+}^{\alpha-k} y_j)(x) = 0$$

dir.

$k, j = 1, ..., p; k < j$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}(D_{0^+}^{\alpha-k} y_j)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n + k + 1 - j)} x^{\alpha n + k - j} \\ &= \frac{\lambda x^{\alpha+k-j}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda^2 x^{3\alpha+k-j}}{\Gamma(2\alpha+1)} + ...\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{x\to 0^+} (D_{0^+}^{\alpha-k} y_j)(x) = 0$$

elde edilir. Böylece

$(D_{0^+}^{\alpha-k} y_j)(0^+) = 0,\ k,\ j = 1, ..., p;\ k \neq j,$ ve $(D_{0^+}^{\alpha-k} y_j)(0^+) = 1,\ k,\ j = 1, ..., p;\ k = j,$

koşulları da sağlanmış olup ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.3 $x > 0$; $0 < \alpha \leqslant 1$; $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = 0 \tag{3.16}$$

diferensiyel denkleminin çözümü

$$y(x) = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) \tag{3.17}$$

dir. $x > 0; 1 < \alpha \leqslant 2$; $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = 0, , \tag{3.18}$$

denkleminin çözümleri ise

$$y_1(x) = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) \text{ ve } y_2(x) = x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda x^{\alpha}) \tag{3.19}$$

fonksiyonlarıdır. Burada $E_{\alpha,\alpha}$ (2.6) ile tanımlı Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Örnek 3.2 $x > 0$; $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(D_{0+}^{p-\frac{1}{2}}y)(x) - \lambda y(x) = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümleri $j = 1, ..., p$ için

$$y_j(x) = x^{p-\frac{1}{2}-j}E_{p-\frac{1}{2},p-j+\frac{1}{2}}(\lambda x^{p-\frac{1}{2}})$$

dir.

Teorem 3.7 $1 < \alpha < 2$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$y^{''}(t) + ay^{(\alpha)}(t) + by(t) = 0,\ y(0) = c_0 \text{ ve } y^{'}(0) = c_1 \tag{3.20}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_o \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k+1]r!} \\
&+c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k+1}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k+2]r!} \\
&+ac_o \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k-\alpha+2}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k-\alpha+3]r!} \\
&+ac_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k-\alpha+3}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k-\alpha+4]r!} \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

dir (Lin ve Lu 2013).

İspat. (3.20) denkleminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınıp (3.7) türevin Laplace dönüşümü özelliği göz önüne alınırsa

$$
\mathcal{L}\left\{D^2 y\right\}(s) + a\mathcal{L}\left\{D^\alpha y\right\}(s) + b\mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = 0
$$

$$
\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - \sum_{k=1}^{2} s^{2-k} y^{(k-1)}(0) + as^\alpha \mathcal{L}\{y\}(s) - a\sum_{k=1}^{\alpha} s^{\alpha-k} y^{(k-1)}(0) + b\mathcal{L}\{y\}(s) = 0
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\}(s) &= c_0 \left(\frac{s}{s^2+as^\alpha+b}\right) + c_1\left(\frac{1}{s^2+as^\alpha+b}\right) \\
&+ac_0\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^2+as^\alpha+b}\right) + ac_1\left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^2+as^\alpha+b}\right) \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^2+as^\alpha+b} &= \frac{s^{-\alpha}}{s^{2-\alpha}+a} \frac{1}{1+\dfrac{bs^{-\alpha}}{s^{2-\alpha}+a}} \\
&= \frac{s^{-\alpha}}{s^{2-\alpha}+a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-bs^{-\alpha}}{s^{2-\alpha}+a}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k s^{-\alpha k-\alpha}}{(s^{2-\alpha}+a)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k s^{-2k-2}}{(1+as^{\alpha-2})^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k s^{-2k-2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-as^{\alpha-2})^r \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-a)^r s^{(\alpha-2)r-2k-2}
\end{aligned}
$$

eşitliği (3.22) de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}y)(s) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-a)^r s^{(\alpha-2)r-2k-1} \\
&\quad + c_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-a)^r s^{(\alpha-2)r-2k-2} \\
&\quad + ac_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-a)^r s^{(\alpha-2)r-2k+\alpha-3} \\
&\quad + ac_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-a)^r s^{(\alpha-2)r-2k+\alpha-4}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü hesaplandığında

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+r)!(-a)^r}{k!r!\Gamma((2-\alpha)r+2k+1)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma((2-\alpha)r+2k+1)}{s^{(2-\alpha)r+2k+1}}\right\} \\
&\quad + c_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+r)!(-a)^r}{k!r!\Gamma((2-\alpha)r+2k+2)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma((2-\alpha)r+2k+2)}{s^{(2-\alpha)r+2k+2}}\right\} \\
&\quad + ac_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+r)!(-a)^r}{k!r!\Gamma((2-\alpha)r+2k-\alpha+3)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma((2-\alpha)r+2k-\alpha+3)}{s^{(2-\alpha)r+2k-\alpha+3}}\right\} \\
&\quad + ac_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+r)!(-a)^r}{k!r!\Gamma((2-\alpha)r+2k-\alpha+4)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma((2-\alpha)r+2k-\alpha+4)}{s^{(2-\alpha)r+2k-\alpha+4}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k+1]r!} \\
& +c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k+1}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k+2]r!} \\
& +ac_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k-\alpha+2}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k-\alpha+3]r!} \\
& +ac_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k t^{2k-\alpha+3}}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-at^{2-\alpha})^r}{\Gamma[(2-\alpha)r+2k-\alpha+4]r!}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 3.8 $1 < \alpha < 2$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$
y^{(\alpha)}(t) + ay'(t) + by(t) = 0, y(0) = c_0 \text{ ve } y'(0) = c_1 \tag{3.23}
$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
y(t) \ = \ & c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-a)^r t^{(\alpha-1)r+\alpha k}}{\Gamma[(\alpha-1)r+\alpha k+1]r!} \\
& +c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-a)^r t^{(\alpha-1)r+\alpha k+1}}{\Gamma[(\alpha-1)r+\alpha k+2]r!} \\
& +ac_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1)(-a)^r t^{(\alpha-1)r+\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma[(\alpha-1)r+\alpha k+\alpha]r!}
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

dir (Lin ve Lu 2013).

İspat. (3.23) denkleminin her iki yanının Laplace dönüşümü alınıp (3.7) türevin Laplace dönüşümü ve (3.4) kesirli türevin Laplace dönüşümü özelliği göz önüne alınırsa

$$
\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{s^{\alpha-1}c_0 + s^{\alpha-2}c_1 + c_0}{s^{\alpha} + as + b}
$$

elde edilir. Teorem 2.7'nin ispatına benzer olarak, son eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa (3.24) elde edilir.

Örnek 3.3

$$y^{(\frac{3}{2})}(t) - y'(t) - 2y(t) = 0,\ y(0) = c_0 \text{ ve } y^{'}(0) = c_1$$

denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1) t^{\frac{r}{2}+\frac{3k}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2}+\frac{3}{2}k+1) r!} \\ &+ c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1) t^{\frac{r}{2}+\frac{3k}{2}+1}}{\Gamma(\frac{r}{2}+\frac{3}{2}k+2) r!} \\ &+ c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k+1) t^{\frac{r}{2}+\frac{3k}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2}+\frac{3}{2}k+\frac{3}{2}) r!} \end{aligned}$$

dir.

3.4 Kesirli Basamaktan Homogen Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü

Bu kesimde kesirli basamaktan homogen olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümleri Laplace dönüşümü yardımıyla elde edilecektir. $x > 0; 0 < \alpha_1 < ... < \alpha_m; m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{m} A_k (D_{0^+}^{\alpha_k} y)(x) + A_0 y(x) = f(x) \tag{3.25}$$

denklemini ele alalım. Burada $A_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, ..., m)$ ve $f(x)$ $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. Bu kesim boyunca

$$k = 1, ..., n \text{ için } f^{(k-1)}(0) = 0$$

kabul edilecektir.

Tanım 3.4

$$G_{\alpha_1,...,\alpha_m}(x) = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P_{\alpha_1,...,\alpha_m}(s)}\right\}\right](x) \tag{3.26}$$

ile tanımlı fonksiyona *analog Green fonksiyonu* denir. Burada

$$P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(s) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k}$$

dir (Kilbas vd. 2006).

Teorem 3.9 Kesirli basamaktan homogen olmayan (3.25) diferensiyel denkleminin çözümü

$$y(x) = \int_0^\infty G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x-t)f(t)dt \tag{3.27}$$

dir, burada $G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x)$ (3.26) ile tanımlı Green fonksiyonudur (Kilbas vd. 2006).

İspat. (3.25) denkleminin her iki yanının Laplace dönüşümünü alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \mathcal{L}\left\{D_{0^+}^{\alpha_k} y\right\}(s) + A_0 \mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

bulunur. Sonuç 3.2'de verilen kesirli türevin Laplace dönüşümü özelliğinden

$$\sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k} \mathcal{L}\{y\}(s) + A_0 \mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

dir. Buradan

$$\mathcal{L}\{y\}(s)\left[A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k}\right] = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

elde edilir. $A_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k} = P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{f\}(s)}{P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(s)}$$

bulunur, buradan

$$y(x) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}\{f\}(s)}{P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(s)}\right]\right)(x)$$

elde edilir. (3.26) analog Green fonksiyonu tanımından

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{(\mathcal{L}G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m})(s)(\mathcal{L}f)(s)\}(x)$$

dır. (3.2) konvolüsyon tanımı ve (3.3) konvolüsyon özelliğinden

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x-t)f(t)dt\right\}\right] \\ &= \int_0^\infty G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.10 $x > 0$ ve $\alpha > 0$ için

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = f(x) \tag{3.28}$$

denkleminin bir özel çözümü

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]f(t)dt \tag{3.29}$$

dir. Burada $E_{\alpha,\alpha}$ (2.6) ile tanımı Mittag-Leffler fonksiyonudur (Kilbas vd. 2006).

İspat. (3.25) denkleminde $m = 1, \alpha_1 = \alpha, A_1 = 1, A_0 = -\lambda$ alınmasıyla (3.28) denklemi elde edilir. Bu durumda Tanım 3.4'de verilen Green fonksiyonu

$$G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x) = G_{\alpha}(x) = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda}\right\}\right](x) \tag{3.30}$$

formunu alır. (3.11) Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü özelliğinde $\beta = \alpha$ alınıp, (3.30) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} G_{\alpha}(x) &= \left[\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})\}\right](x) \\ &= x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen $G_{\alpha}(x)$ (3.27)de yerine yazılırsa,

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]f(t)dt$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.4 $x>0, p\in\mathbb{N}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$(D_{0+}^{p-\frac{1}{2}}y)(x)-\lambda y(x)=f(x)$$

denkleminin bir özel çözümü

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{p-\frac{3}{2}}E_{p-\frac{1}{2},p-\frac{1}{2}}[\lambda(x-t)^{p-\frac{1}{2}}]f(t)dt$$

dir. Bu çözüm (3.9) eşitliğinde $\alpha=p-\frac{1}{2}$ alınarak elde edilir.

Örnek 3.5 $x>0$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$y''(x)-\lambda y(x)=f(x) \tag{3.31}$$

denkleminin özel çözümleri

$$\begin{aligned} y_1(x)&=\int_0^x \frac{\sinh(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}}f(t)dt;\ \lambda>0 \\ y_2(x)&=\int_0^x \frac{\sin(\sqrt{-\lambda}(x-t))}{\sqrt{-\lambda}}f(t)dt;\ \lambda<0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

dır. Gerçekten, (3.28) denkleminde $\alpha=2$ alınmasıyla (3.31) denklemi elde edilir. O halde Teorem 3.10'dan

$$y(x)=\int_0^x (x-t)E_{2,2}[\lambda(x-t)^2]f(t)dt \tag{3.33}$$

dir.

$\lambda > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(x-t)E_{2,2}[\lambda(x-t)^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{\lambda}(x-t)]^{2k+1}}{\sqrt{\lambda}\Gamma(2k+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sinh\left(\sqrt{\lambda}(x-t)\right)\end{aligned}$$

olup son eşitlik (3.33) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{\sinh(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt$$

elde edilir.

$\lambda < 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(x-t)E_{2,2}[\lambda(x-t)^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[\sqrt{-\lambda}(x-t)]^{2k+1}}{\sqrt{-\lambda}\Gamma(2k+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \sin\left(\sqrt{-\lambda}(x-t)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son eşitlik (3.33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$y_2(x) = \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{-\lambda}(x-t))}{\sqrt{-\lambda}} f(t)dt$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

4. MELLİN DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde Mellin dönüşümü tanıtılıp, kesirli basamaktan değişken katsayılı bir denklem sınıfının analitik çözümü Mellin dönüşümü yardımı ile hesaplanacaktır.

4.1 Mellin Dönüşümünün Temel Özellikleri

Bu kesimde Mellin dönüşümünün temel özellikleri verilecektir. Ayrıca bazı temel fonksiyonların Mellin dönüşümleri hesaplanacaktır.

Tanım 4.1 $t \in \mathbb{R}^+$ için tanımlı $\varphi(t)$ fonksiyonunun *Mellin dönüşümü* $s \in \mathbb{C}$ için,

$$(\mathcal{M}\varphi)(p) = \mathcal{M}[\varphi(t)](p) = \varphi^*(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)dt \tag{4.1}$$

ile tanımlıdır (Samko vd. 1993).

$x \in \mathbb{R}^+$ için bir $g(x)$ fonksiyonunun ters Mellin dönüşümü $\gamma = \mathrm{Re}(s)$ olmak üzere

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(x) = \mathcal{M}^{-1}[g(s)](x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}g(s)ds \tag{4.2}$$

dir.

Mellin integralinin yakınsak olduğu en geniş aralık (a,b) olsun.

Teorem 4.1 $f(x)$, (a,b) aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. p sıfıra eşit olmayan bir reel sayı ve α, β pozitif reel sayılar olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler mevcuttur (Katugampola 2011).

a) $\mathcal{M}\left[\sum_{k\in I}\lambda_k f(\alpha_k x)\right](s) = \left(\sum_{k\in I}\frac{\lambda_k}{\alpha_k^s}\right)\mathcal{M}[f](s)$, *I sonlu bir aralık,* $\lambda_k > 0$, $s \in (a,b)$.

$b)$ $\mathcal{M}\left[x^{\beta}f(x)\right](s) = \mathcal{M}[f](s+\beta)$, $s \in (a,b)$.

$c)$ $\mathcal{M}\left[f(x^{p})\right](s) = \dfrac{1}{p}\mathcal{M}[f]\left(\dfrac{s}{p}\right)$, $s \in (pa,pb)$.

$d)$ $\mathcal{M}\left[\dfrac{d}{dx}f(x)\right](s) = (1-s)\mathcal{M}[f](s-1)$, $s < 1$ ve $f(x)$ sınırlı.

$e)$ $\mathcal{M}\left[x\dfrac{d}{dx}f(x)\right](s) = -s\mathcal{M}[f](s)$, $s < 0$ ve $f(x)$ sınırlı.

$f)$ $\mathcal{M}\left[\int\limits_0^x f(t)dt\right](s) = -\dfrac{1}{s}\mathcal{M}[f](s+1)$, $\lim_{x\to\infty} x^s = 0$.

İspat.

$a)$ (4.1) Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[\sum_{k\in I}\lambda_k f(\alpha_k x)\right](s) &= \int\limits_0^\infty x^{s-1}\sum_{k\in I}\lambda_k f(\alpha_k x)dx \\
&= \sum_{k\in I}\lambda_k\int\limits_0^\infty x^{s-1}f(\alpha_k x)dx
\end{aligned}$$

dır. Burada $\alpha_k x = t$ dönüşümünü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[\sum_{k\in I}\lambda_k f(\alpha_k x)\right](s) &= \sum_{k\in I}\lambda_k\int\limits_0^\infty \frac{1}{(\alpha_k)^{s-1}}t^{s-1}f(t)\frac{1}{\alpha_k}dt \\
&= \sum_{k\in I}\frac{\lambda_k}{\alpha_k^s}\mathcal{M}[f](s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$b)$ (4.1) Mellin dönüşümü tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[x^{\beta}f(x)](s) &= \int\limits_0^\infty x^{s-1}x^{\beta}f(x)dx \\
&= \mathcal{M}[f](s+\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) (4.1) tanımından

$$\mathcal{M}[f(x^p)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x^p) dx$$

dır. Burada integrale $x^p = t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[f(x^p)](s) &= \int_0^\infty t^{\frac{s-1}{p}} f(t) \frac{1}{p} t^{\frac{1-p}{p}} dt \\
&= \frac{1}{p} \mu[f] \left(\frac{s}{p}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

d) (4.1) tanımından integralde kısmi integrasyon uygulanıp $s < 1$ ve $f(x)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[\frac{d}{dx} f(x)\right](s) &= \int_0^\infty x^{s-1} \frac{d}{dx} f(x) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[x^{s-1} f(x) \Big|_0^b\right] - \int_0^\infty (s-1) x^{s-2} f(x) dx \\
&= (1-s)\mathcal{M}[f](s-1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

e) (d)'nin ispatına benzer olarak, (4.1) tanımı uygulanıp, $s < 0$ ve $f(x)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{M}\left[x \frac{d}{dx} f(x)\right](s) = -s\mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir.

f) (4.1) tanımından

$$\mathcal{M}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \int_0^\infty x^{s-1}\int_0^x f(t)dtdx$$
$$= \int_0^\infty f(t)\int_t^\infty x^{s-1}dxdt$$

dır. $\lim_{x\to\infty} x^s = 0$ olduğundan

$$\mathcal{M}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = -\frac{1}{s}\int_0^\infty t^s f(t)dt$$
$$= -\frac{1}{s}\mathcal{M}[f](s+1)$$

elde edilir.

Teorem 4.2 $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$ için $\mathcal{M}[f](s-n)$ ve $\mathcal{M}[f^{(n)}](s)$ Mellin dönüşümleri mevcut olsun. $k = 0, 1, ..., n-1$ için

$$\lim_{t\to 0^+}[f^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}] \text{ ve } \lim_{t\to+\infty}[f^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}]$$

limitleri sonlu ise

$$\mathcal{M}[f^{(n)}](s) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}[f^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}]_0^\infty + \frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}[f](s-n)$$

dir (Kilbas vd. 2006).

İspat. (4.1) Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}[f^{(n)}](s) = \int_0^\infty f^{(n)}(t)t^{s-1}dt$$

dır. İntegralin hesabı için $n-1$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[f^{(n)}](s) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-k)}[f^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}]_0^\infty + (-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\mathcal{M}[f](s-n)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}[f^{(n-k-1)}t^{s-k-1}]_0^\infty + \frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}[f](s-n)\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 4.1 Eğer $\lim\limits_{t\to 0^+}[f^{(n-k-1)}t^{s-k-1}] = 0$ ve $\lim\limits_{t\to +\infty}[f^{(n-k-1)}t^{s-k-1}] = 0$ sağlanırsa, bu durumda

$$\mathcal{M}[f^{(n)}](s) = \frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}[f](s-n)$$

dir.

Mellin dönüşümünün en çok kullanılan özelliklerinden biri de aşağıda ifade edilen konvolüsyon teoremidir.

Tanım 4.2 $f(t)$ ve $g(t)$ integrallenebilen iki fonksiyon olmak üzere $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Mellin konvolüsyonu

$$f(t) * g(t) = \int_0^\infty f(t\tau)g(\tau)d\tau \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlıdır (Podlubny 1999).

Teorem 4.3 $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Mellin dönüşümü mevcut olsun. Bu durumda (4.3) konvolüsyon eşitliğinin Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}\left[\int_0^\infty f(t\tau)g(\tau)d\tau\right] = \mathcal{M}[f](s)\mathcal{M}[g](1-s) \tag{4.4}$$

dir (Podlubny 1999).

İspat. (4.1) Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}\left[\int_0^\infty f(t\tau)g(\tau)d\tau\right]=\int_0^\infty t^{s-1}\int_0^\infty f(t\tau)g(\tau)d\tau dt$$

dır. $x=t\tau$ dönüşümü uygulanıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[\int_0^\infty f(t\tau)g(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty\int_0^\infty (\frac{x}{\tau})^{s-1}f(x)g(\tau)\tau^{-1}d\tau dx\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\tau^{1-s-1}g(\tau)d\tau dx\\ &= \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx\int_0^\infty \tau^{1-s-1}g(\tau)d\tau\\ &= \mathcal{M}[f](s)\mathcal{M}[g](1-s)\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 4.1 $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları için ikinci bir Mellin konvolüsyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$f(t)*g(t)=\int_0^\infty f\left(\frac{x}{\tau}\right)g(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \tag{4.5}$$

Bu durumda $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonunun Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}\left[\int_0^\infty f\left(\frac{x}{\tau}\right)g(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right]=\mathcal{M}[f](s)\mathcal{M}[g](s)$$

dir (Kilbas vd. 2006).

İspat. (4.5) eşitliğinin her iki tarafını Mellin dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[f](s)\mathcal{M}[g](s) &= \int_0^\infty t^{s-1}f(t)dt\int_0^\infty \tau^{s-1}g(\tau)d\tau\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty (t\tau)^{s-1}f(t)g(\tau)dtd\tau\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $t = \dfrac{x}{\tau}$ dönüşümünü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}[f](s)\mu[g](s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1} f\left(\frac{x}{\tau}\right) g(\tau)\frac{1}{\tau} dx d\tau \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1} f\left(\frac{x}{\tau}\right) g(\tau)\frac{1}{\tau} d\tau dx \\
&= \int_0^\infty x^{s-1} \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\tau}\right) g(\tau)\frac{1}{\tau} d\tau dx \\
&= \mathcal{M}\left[\int_0^\infty f\left(\frac{x}{\tau}\right) g(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right]
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Çizelge 4.1'de bazı temel fonksiyonların ters Mellin dönüşümleri verilmektedir (Bateman 1954).

Çizelge 4.1 Bazı temel fonksiyonların ters Mellin dönüşümleri

Fonksiyon	Ters Mellin Dönüşümü
$\dfrac{1}{s+\alpha}$, $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\alpha)$	x^α $\quad 0 < x < 1$ 0 $\quad 1 < x < \infty$
$\Gamma(s)$, $\mathrm{Re}(s) > 0$	e^{-x}
$\dfrac{\Gamma(\beta)}{(s+\alpha)^{-\beta}}$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ ve $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\alpha)$	$-x^\alpha(\log x)^{\beta-1}$ $\quad 0 < x < 1$ 0 $\quad 1 < x < \infty$
$\dfrac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $\mathrm{Re}(s) > 0$	$\dfrac{(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ $\quad 0 < x < 1$ 0 $\quad 1 < x < \infty$
$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta-s)$, $\mathrm{Re}(\alpha-\beta) > 0$ $-\mathrm{Re}(\alpha) < s < \mathrm{Re}(\beta)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)x^\alpha}{(1+x)^{\alpha+\beta}}$

4.2 Kesirli Türev ve İntegralin Mellin Dönüşümü

Bu kesimde kesirli türev ve integral operatörlerinin Mellin dönüşümü hesaplanacaktır.

Teorem 4.4 $f \in L_1(0,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M}\left[I_{0+}^{\alpha} f\right](s) = \frac{\Gamma(1-s-\alpha)}{\Gamma(1-s)} \mathcal{M}\left[f\right](s+\alpha), \ \ \mathrm{Re}(s+\alpha) < 1 \tag{4.6}$$

ve

$$\mathcal{M}\left[I_{0-}^{\alpha} f\right](s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)} \mathcal{M}\left[f\right](s+\alpha), \ \ \mathrm{Re}(s) < 1 \tag{4.7}$$

dir, burada I_{0+}^{α} ve I_{0-}^{α} sırasıyla (2.7) ve (2.8) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli integralleridir (Samko vd. 1993).

İspat. (2.7) Reimann-Liouville kesirli integral tanımının her iki yanının Mellin dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[I_{0+}^{\alpha} f\right](s) &= \int_0^\infty t^{s-1} (I_{0+}^{\alpha} f)(t) dt \\
&= \int_0^\infty t^{s-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(\zeta) \int_\zeta^\infty t^{s-1} (t-\zeta)^{\alpha-1} dt d\zeta
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\frac{t}{\zeta} - 1 = u$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[I_{0+}^{\alpha} f\right](s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(\zeta) \int_0^\infty \zeta^{s-1} (u+1)^{s-1} \zeta^{\alpha-1} u^{\alpha-1} \zeta du d\zeta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(\zeta) \zeta^{s+\alpha-1} \underbrace{\int_0^\infty u^{\alpha-1} (u+1)^{s-1} du d\zeta}_{\beta(\alpha, 1-s-\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-s)} \int_0^\infty f(\zeta) \zeta^{s+\alpha-1} d\zeta
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)} \mathcal{M}\left[f\right](s+\alpha)$$

bulunup (4.6) ispatlanmış olur.

Şimdi (2.8) Riemann-Liouville kesirli integral tanımının her iki tarafının Mellin dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[I_{0^-}^{\alpha} f\right](s) &= \int_0^\infty t^{s-1}(I_{0^-}^{\alpha} f)(t)dt \\
&= \int_0^\infty t^{s-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty (\zeta-t)^{\alpha-1}f(\zeta)d\zeta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty f(\zeta)\int_0^\zeta t^{s-1}(\zeta-t)^{\alpha-1}dtd\zeta
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu integrale $\frac{t}{\zeta} = u$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[I_{0^-}^{\alpha} f\right](s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty f(\zeta)\int_0^1 \zeta^{s-1}u^{s-1}(-\zeta)^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}\zeta du d\zeta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty f(\zeta)\zeta^{s+\alpha-1}\underbrace{\int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{\alpha-1}du}_{\beta(s,\alpha)}d\zeta \\
&= \frac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+\alpha)}\int_0^\infty f(\zeta)\zeta^{s+\alpha-1}d\zeta \\
&= \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}\mathcal{M}\left[f\right](s+\alpha)
\end{aligned}$$

bulunup (4.7) ispatlanmış olur.

Teorem 4.5 $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ olsun.

$$\lim_{t\to 0^+}\left[f^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}\right] \text{ ve } \lim_{t\to +\infty}\left[f^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}\right]$$

limitleri mevcut ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[D_{0^+}^{\alpha}f\right](s) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{\alpha-n}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^{\infty} \\ &\quad+\frac{\Gamma(1-s+\alpha)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}\left[f\right](s-\alpha) \qquad (4.8)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[D_{0^-}^{\alpha}f(s)] &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^{\infty} \\ &\quad+\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}.\frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s+n-\alpha)}\mathcal{M}(f)(s-\alpha) \qquad (4.9)\end{aligned}$$

dir (Podlubny 1999).

İspat. (2.9) Reimann-Liouville kesirli türev tanımının her iki tarafının Mellin dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{M}\left[D_{0^+}^{\alpha}f\right](s)=\mathcal{M}\left[\frac{d^n}{dt^n}I_{0^+}^{n-\alpha}f\right](s)$$

elde edilir. $(I_{0^+}^{n-\alpha}f)(t)=g(t)$ olsun, bu durumda

$$\mathcal{M}\left[D_{0^+}^{\alpha}f\right](s)=\mathcal{M}\left[g^{(n)}\right](s)$$

dir. Teorem 4.2 türevin Mellin dönüşümü özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[D_{0^+}^{\alpha}f\right](s) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}[g^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}]_0^{\infty}+\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}[g](s-n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^{\infty} \\ &\quad+\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}(I_{0^+}^{n-\alpha}f)(s-n)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.6) kesirli integralin Mellin dönüşümü özelliğinden

$$\mathcal{M}\left[D_{0^+}^{\alpha}f\right](s)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^{\infty}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma(1-s+\alpha-n+n)}{\Gamma(1-s+n)}\mathcal{M}\left[f\right](s-n-\alpha+n) \\
= & \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^\infty \\
& +\frac{\Gamma(1-s+\alpha)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}\left[f\right](s-\alpha)
\end{aligned}
$$

bulunup (4.8) ispatlanmış olur.

(2.10) Riemann-Liouville kesirli türev tanımının her iki tarafının Mellin dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{M}\left[D_{0^-}^{\alpha}f\right](s)=\mathcal{M}\left[(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}I_{0^-}^{n-\alpha}f\right](s)$$

elde edilir. $I_{0^-}^{n-\alpha}f(t)=h(t)$ olsun, bu durumda

$$\mathcal{M}\left[D_{0^-}^{\alpha}f\right](s)=(-1)^n\mathcal{M}[h^{(n)}](s)$$

bulunur. Teorem 4.2'den

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[D_{0^-}^{\alpha}f\right](s) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[h^{(n-k-1)}(t)t^{s-k-1}\right]_0^\infty \\
&\quad +(-1)^n\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}[h](s-n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^\infty \\
&\quad +\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}\left[I_{0^-}^{n-\alpha}f\right](s-n)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.7) kesirli integralin Mellin dönüşümü özelliğinden

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[D_{0^-}^{\alpha}f\right](s) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]_0^\infty \\
&\quad +(-1)^n\frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s+n-\alpha)}\mathcal{M}[f](s-\alpha)
\end{aligned}
$$

elde edilip (4.9) da ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2 Eğer

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]=0,\ \lim_{t\to\infty}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]=0$$

ve

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]=0,\ \lim_{t\to\infty}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha}f(t)t^{s-k-1}\right]=0$$

sağlanırsa (4.8) ve (4.9) eşitlikleri sırasıyla

$$\mathcal{M}\left[D_{0^+}^{\alpha}f\right](s)=\frac{\Gamma(1-s+\alpha)}{\Gamma(1-s)}\mathcal{M}\left[f\right](s-\alpha) \tag{4.10}$$

ve

$$\mathcal{M}\left[D_{0^-}^{\alpha}f\right](s)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}\mathcal{M}\left[f\right](s-\alpha) \tag{4.11}$$

formuna indirgenir.

Teorem 4.6 $\alpha\in\mathbb{C}$, $\beta\in\mathbb{N}$ ve $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ olsun. Eğer

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha-k}f(t)t^{s-k-1}\right]=0,\ \lim_{t\to\infty}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^+}^{n-\alpha-k}f(t)t^{s-k-1}\right]=0$$

ve

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha-k}f(t)t^{s-k-1}\right]=0,\ \lim_{t\to\infty}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}I_{0^-}^{n-\alpha-k}f(t)t^{s-k-1}\right]=0$$

sağlanıyorsa, bu durumda

$$\mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}D_{0^+}^{\alpha+k}y\right](s)=\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)}\mathcal{M}[y](s) \tag{4.12}$$

ve

$$\mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}D_{0^-}^{\alpha+k}y\right](s)=\frac{\Gamma(s+\alpha+k)}{\Gamma(s)}\mathcal{M}[y](s) \tag{4.13}$$

dir.

İspat. (4.1) Mellin dönüşümü tanımından

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}D_{0^+}^{\alpha+k}y\right](s) &= \int_0^\infty t^{s-1}t^{\alpha+k}(D_{0^+}^{\alpha+k}y)(t)dt \\
&= \int_0^\infty t^{s+\alpha+k-1}(D_{0^+}^{\alpha+k}y)(t)dt \\
&= \mathcal{M}[D_{0^+}^{\alpha+k}y](s+\alpha+k)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.10) kesirli türevin Mellin dönüşümü özelliğinde $s \to s+k+\alpha$ ve $\alpha \to \alpha+k$ alınırsa,

$$
\mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}D_{0^+}^{\alpha+k}y\right](s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)}\mathcal{M}[y](s)
$$

bulunup (4.12) ispatlanmış olur.

Aynı yöntem sağdan kesirli türev için de uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}D_{0^-}^{\alpha+k}y\right](s) &= \int_0^\infty t^{s-1}t^{\alpha+k}(D_{0^-}^{\alpha+k}y)(t)dt \\
&= \int_0^\infty t^{s+\alpha+k-1}(D_{0+-}^{\alpha+k}y)(t)dt \\
&= \mathcal{M}\left[D_{0^-}^{\alpha+k}y\right](s+\alpha+k)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.11) kesirli türevin Mellin dönüşümü özelliğinde $s \to s+k+\alpha$ ve $\alpha \to \alpha+k$ alınmasıyla,

$$
\mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}D_{0^-}^{\alpha+k}y\right](s) = \frac{\Gamma(s+\alpha+k)}{\Gamma(s)}\mathcal{M}[y](s)
$$

bulunup (4.13) ispatlanmış olur.

4.3 Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemlerin Mellin Dönüşümü İle Çözümü

Bu kesimde lineer homogen olmayan $x > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} (D_{0^+}^{\alpha+k} y)(x) = f(x) \tag{4.14}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m} B_k x^{\alpha+k} (D_{0^-}^{\alpha+k} y)(x) = f(x) \tag{4.15}$$

diferensiyel denklemlerine Mellin integral dönüşümü uygulanarak özel çözümleri hesaplanacaktır, burada $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, ..., m)$ dir, $D_{0^+}^{\alpha+k} y$ ve $D_{0^-}^{\alpha+k} y$ sırasıyla (2.9) ve (2.10) ile tanımlı sol ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli türevleridir.

Tanım 4.3 Green fonksiyonunun Mellin kesirli analogu

$$G_\alpha^1(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{P_\alpha^1(1-s)}\right](x),\ P_\alpha^1(s) = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha-k)} \tag{4.16}$$

ve

$$G_\alpha^2(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{P_\alpha^2(s)}\right](x),\ P_\alpha^2(s) = \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{\Gamma(s+\alpha+k)}{\Gamma(s)} \tag{4.17}$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas vd. 2006).

Teorem 4.7 Eğer

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I_{0^+}^{n-\alpha-\beta} f(t) t^{s-k-1}\right] = 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I_{0^+}^{n-\alpha-\beta} f(t) t^{s-k-1}\right] = 0$$

şartları sağlanıyorsa, (4.14) denkleminin çözümü

$$y(x) = \int_0^\infty f(xt) G_\alpha^1(t)\, dt \tag{4.18}$$

dir (Kilbas vd. 2006).

İspat. (4.14) denkleminin her iki tarafının Mellin dönüşümünü alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \mathcal{M}\left[x^{\alpha+k} D_{0^+}^{\alpha+k} y\right](s) = \mathcal{M}[f](s)$$

ve Teorem 4.6'dan

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)} \mathcal{M}[y](s) = \mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir. (4.16) göz önüne alınırsa, bu durumda

$$\mathcal{M}[y](s) = \frac{1}{P_{\alpha}^{1}(1-s)} \mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın ters Mellin dönüşümü alınırsa,

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{P_{\alpha}^{1}(1-s)} \mathcal{M}[f](s)\right](x)$$

bulunur. Tanım 4.3'den

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[G_{\alpha}^{1}](1-s)\mathcal{M}[f](s)](x)$$

elde edilir. Teorem 4.3'den

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{M}\left[\int_{0}^{\infty} G_{\alpha}^{1}(t) f(xt) dt\right]\right](x) \\ &= \int_{0}^{\infty} G_{\alpha}^{1}(t) f(xt) dt \end{aligned}$$

bulunup çözüm elde edilmiş olur.

Teorem 4.8

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I_{0^-}^{n-\alpha-\beta} f(t) t^{s-k-1}\right] = 0, \ \lim_{t\to \infty}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I_{0^-}^{n-\alpha-\beta} f(t) t^{s-k-1}\right] = 0$$

şartları sağlanıyorsa, (4.15) denkleminin çözümü

$$y(x) = \int_0^\infty G_\alpha^2(\frac{x}{t})f(t)\frac{dt}{t} \tag{4.19}$$

dir (Kilbas vd. 2006).

İspat. (4.15) denkleminin her iki yanının Mellin dönüşümünü alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{m} B_k \mathcal{M}\left[x^{\alpha+k}(D_{0^-}^{\alpha+k}y)\right](s) = \mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir. (4.13) eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{m} B_k \frac{\Gamma(s+\alpha+k)}{\Gamma(s)}\mathcal{M}[y](s) = \mathcal{M}[f](s)$$

bulunur. (4.17) göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{M}[y](s) = \frac{1}{P_\alpha^2(s)}\mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın ters Mellin dönüşümü alınırsa,

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{P_\alpha^2(s)}\mathcal{M}[f](s)\right](x)$$

elde edilir. Tanım 4.3'den

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{M}[G_\alpha^2](s)\mathcal{M}[f](s)\right](x)$$

bulunur. Uyarı 4.1'den

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{M}\left[\int_0^\infty G_\alpha^2(\frac{x}{t})f(t)dt\right]\right](x) \\ &= \int_0^\infty G_\alpha^2(\frac{x}{t})f(t)dt \end{aligned}$$

bulunup çözüm elde edilmiş olur.

Teorem 4.7 ve Teorem 4.8 de elde ettiğimiz çözümlerdeki $G^1_\alpha(x)$ ve $G^2_\alpha(x)$ Green fonksiyonlarını hesaplayabilmek için kompleks analizde bildiğimiz Rezidü teoremi kullanılacaktır. Bunun için şimdi bu teoremi ifade edelim.

Teorem 4.9 Eğer $f(z)$ bir C çevresi içinde bulunan sonlu sayıda $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları hariç C üzerinde ve içinde analitik ise, bu durumda

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rez } [f, z_k] \tag{4.20}$$

dır. Burada, m kökün derecesi olmak üzere

$$\text{Rez } [f, z_k] = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

ile hesaplanır (Brown ve Churchill 1996).

Sonuç 4.3 $\alpha > 0$ olmak üzere

$$t^{\alpha+1} D^{\alpha+1}_{0^+} y(t) + t^\alpha D^\alpha_{0^+} y(t) = f(t) \tag{4.21}$$

denkleminin çözümü

$$y(t) = \int\limits_0^1 f(t\tau) g(\tau) d\tau \tag{4.22}$$

dir. Burada $\Psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ ve $\gamma = -\Gamma'(1)$ Euler sabiti olmak üzere

$$g(t) = -\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \{\ln t + \Psi(\alpha) + \gamma\} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-\alpha+1}}{(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(-n+\alpha-1)} \tag{4.23}$$

dir.

İspat. (4.21) denkleminin her iki tarafına Mellin dönüşümü uygulanıp (4.12) göz önüne alınırsa,

$$\left[\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-1)}+\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha)}\right]\mathcal{M}[y](s)=\mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\mathcal{M}[y](s)=\left[\frac{\Gamma(1-s-\alpha)}{(1-s-\alpha)\Gamma(1-s)}\right]\mathcal{M}[f](s)$$

bulunur.

$$\mathcal{M}[g](s)=\frac{\Gamma(s-\alpha)}{(s-\alpha)\Gamma(s)} \tag{4.24}$$

olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M}[y](s)=\mathcal{M}[g](1-s)\mathcal{M}[f](s)$$

elde edilir. Tanım 4.2 ve Teorem 4.3'den

$$y(t)=\int_0^\infty f(t\tau)g(\tau)d\tau \tag{4.25}$$

olarak bulunur.

Şimdi $t>1$ için $g(t)=0$ olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{M}[g_1](s)=\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)} \text{ ve } \mathcal{M}[g_2](s)=\frac{1}{s-\alpha}$$

seçilirse,

$$\mathcal{M}[g](s)=\mathcal{M}[g_1](s)\mathcal{M}[g_2](s)$$

dir. Uyarı 4.1'den

$$\mathcal{M}[g](s)=\mathcal{M}\left[\int_0^\infty g_1(\frac{t}{\tau})g_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right](s) \tag{4.26}$$

elde edilir. Çizelge 4.1'den

$$g_1(t)=\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)}\right]=\begin{cases}\dfrac{t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0<t<1\\ 0 & , \quad 1<t<\infty\end{cases}$$

ve

$$g_2(t) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = \begin{cases} t^{-\alpha}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < \infty \end{cases}$$

dir.

Böylece (4.26) eşitliği

$$\mathcal{M}[g](s) = \mathcal{M}\left[\int_0^1 g_1(\frac{t}{\tau}) g_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right](s)$$

eşitliğine indirgenir ve (4.25) çözümü

$$y(t) = \int_0^1 f(t\tau) g(\tau) d\tau$$

formunu alır. Böylece (4.22) ispatlanmış olur. Son olarak $g(t)$ fonksiyonunu hesaplayalım. (4.24) eşitliğinden

$$\mathcal{M}[g](s) = \frac{\Gamma(1+s-\alpha)}{(s-\alpha)^2\Gamma(s)}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin iki yanının Mellin dönüşümü alınıp, (4.2) tanımı göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(1+s-\alpha)}{(s-\alpha)^2\Gamma(s)}\right](t) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}\frac{\Gamma(1+s-\alpha)}{(s-\alpha)^2\Gamma(s)} ds \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Bu integrali hesaplamak için Rezidü teoreminden yararlanılacaktır.

Burada Rezidüsü alınacak fonksiyon

$$x^{-z}\mathcal{M}[g](z) = x^{-z}\frac{\Gamma(1+z-\alpha)}{(z-\alpha)^2\Gamma(z)}$$

dir. $\mathcal{M}[g](z)$ fonksiyonunun kökleri; $z = \alpha$ $(m = 2)$ ve $z = \alpha - n - 1, n = 0, 1, 2, ...(m = 1)$ dir. Teorem 4.9'dan

$z = \alpha$ için

$$\begin{aligned}
\text{Rez } (f;\alpha) &= \lim_{z\to\alpha} \frac{d}{dz}\left[(z-\alpha)^2 \frac{\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z}\right] \\
&= \lim_{z\to\alpha}\left[\frac{\Gamma'(1+z-\alpha)\Gamma(z)-\Gamma'(z)\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma^2(z)} x^{-z}\right. \\
&\quad \left. + x^{-z}\ln(x)\frac{\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma(z)}\right] \\
&= \frac{\Gamma'(1)\Gamma(\alpha)-\Gamma'(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma^2(\alpha)} x^{-\alpha} + x^{-\alpha}\frac{\ln(x)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[-\gamma-\Psi(\alpha)+\ln x\right] \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

bulunur. $z = \alpha - n - 1$ için ilk olarak $n = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\text{Rez } (f;\alpha-1) &= \lim_{z\to\alpha-1}(z-\alpha+1)\frac{\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z} \\
&= \lim_{z\to\alpha-1}(z-\alpha+1)\frac{(z-\alpha+1)\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma(z)(z-\alpha)^2(z-\alpha+1)} x^{-z} \\
&= \lim_{z\to\alpha-1}\frac{\Gamma(2+z-\alpha)}{\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha-1)} x^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur. $n = 1$ için,

$$\begin{aligned}
\text{Rez } (f;\alpha-2) &= \lim_{z\to\alpha-2}(z-\alpha+2)\frac{\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z} \\
&= \lim_{z\to\alpha-2}(z-\alpha+2)\frac{\Gamma(3+z-\alpha)}{(z-\alpha+2)(z-\alpha+1)\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{(-1)4\Gamma(\alpha-2)} x^{2-\alpha}
\end{aligned}$$

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
\text{Rez } (f;\alpha-3) &= \lim_{z\to\alpha-3}(z-\alpha+3)\frac{\Gamma(1+z-\alpha)}{\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z} \\
&= \lim_{z\to\alpha-3}(z-\alpha+3)\frac{\Gamma(4+z-\alpha)}{(z-\alpha+3)(z-\alpha+2)(z-\alpha+1)\Gamma(z)(z-\alpha)^2} x^{-z} \\
&= \frac{\Gamma(1)x^{3-\alpha}}{(-1)(-2)9\Gamma(\alpha-3)}
\end{aligned}$$

hesaplanır. Benzer işlemlere devam edilirse,

$$\text{Rez }(f;\alpha-n-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-\alpha+1}}{(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(-n+\alpha-1)} \tag{4.29}$$

olarak bulunur. (4.28) ve (4.29) ifadeleri Teorem 4.9'da yerine yazılıp, (4.27) göz önünde bulundurulursa,

$$g(t)=-\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\{\ln t+\Psi(\alpha)+\gamma\}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-\alpha+1}}{(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(-n+\alpha-1)}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

17. yüzyıla kadar türev ve integral doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan operatörlerdi. Ancak 1695 yılında Leibnitz bu operatörlerin reel sayılar kümesi üzerindeki davranışlarını incelemeye başladı. Doğal sayılar yerine kesirli sayıları kullanarak türev ve integral operatörleri yeniden tanımladı. Böylece ortaya çıkan yeni teori matematikçilerin yanı sıra biyolog, kimyacı, ekonomist, fizikçi ve mühendisler tarafından da oldukca ilgi gördü. Sonraki yıllarda kesirli analizin teori ve gelişmeleri hakkında pek çok kitap yazıldı ve hatta Riemann-Lioville, Hadamard, Grunwald-Letnikow, Reies, Caputo gibi birden çok kesirli analiz türü şekillendi. Bu tanımlar arasında uygulamaları sebebiyle en çok tercih edilen kesirli türev formları Reimann-Liouville ve Caputo'dur.

Kesirli analizin gelişmesi tam sayı basamaktan diferensiyel denklemlerin ardından kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin oluşumunu da beraberinde getirdi. Adi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Laplace, Fourier ve Mellin gibi integral yöntemleri de kesirli basamaktan diferensiyel denklemlere uygulanarak bu denklemlerin çözümleri elde edildi.

Bu tez çalışmasında Riemann-Liouville kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin Laplace ve Mellin dönüşümleri yardımıyla çözülmesi incelendi. Bu çalışmanın devamında farklı kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin Laplace ve Mellin dönüşümleri yardımıyla çözümleri elde edilebilir. Bunun yanı sıra Fourier dönüşümü gibi farklı integral dönüşüm yöntemleri yardımıyla da kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Bateman, H. 1954. Tables of Integral Transforms. McGraw-Hill, 410 p., USA.

Brown, J.W. and Churchill, R.V. 1996. Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, 482 p., New York.

Diethelm, K. and Ford, N.J. 2002. Analysis of fractional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 265, 229-248.

Diethelm, K. 2010. Fractional Differential Equations. Springer-Verlag, 248 p., Berlin Heidelberg.

Katugampola, U.N. 2011. Mellin transforms of the generalized fractional integrals and derivatives. Appl. Math. and Comput., 257, 566-580.

Kilbas, A.A., Srivastava, H. and Trujillo, J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Faculteit der Exacte Wetenschappen Amsterdam, 541 p., Netherland.

Lin, S.D. and Lu, C.H. 2013. Laplace transform for solving some families of fractional differential equations and its applications. Advances in Difference Equations, 137(1), 1-9.

Miller, K.S. and Ross, B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley & Sons, 366 p., Canada.

Oldham, K.B. and Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, 240 p., New York.

Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, 366 p., London.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach Science Publishers, 976 p., Amsterdam.

Saxena, R.K., Mathai, A.M. and Haubold, H.J. 2010. Solutions of certain fractional kinetic equations and fractional diffusion equations. J. Math. Physics, 51(103556), 1-9.

Zhang, S. Q. 2000. The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl., 252(2), 804-812.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ceren KÖMEKÇİ

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 25/08/1990

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı):

Lise	**:**	Rauf Denktaş Lisesi (2008)
Lisans	**:**	Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı (2012)
Yüksek Lisans	**:**	Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2013-Temmuz 2015)