T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI CEBİRSEL YAPILAR İÇİN GRÖBNER TABAN

Nurten URLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2015
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Nurten URLU tarafından hazırlanan "Bazı Cebirsel Yapılar için Gröbner Taban" adlı tez çalışması 12/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....
Danışman Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	....
Üye Doç. Dr. Aynur YALÇINER	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

Bu tez çalışması Tübitak tarafından 113F294 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Nurten URLU

12.05.2015

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

BAZI CEBİRSEL YAPILAR İÇİN GRÖBNER TABAN

Nurten URLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2015, 50 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Fırat ATEŞ
Doç. Dr. Aynur Yalçıner

Bu tez 4 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde grup ve monoid sunuşları genel anlamlarıyla verilmiş ve ağırlıklı olarak diğer bölümlerde ayrıntılarıyla incelenecek olan Gröbner-Shirshov metodu tanımlanmıştır.

İkinci bölümde, bilinen yapılar için sırasıyla bu yapıların tanım ve sunuşlarıyla, Gröbner-Shirshov tabanları verilmiştir. İncelenen bu cebirsel yapılar sırasıyla Schützenberger çarpım, Graf çarpım ve Chinese monoidtir.

Üçüncü bölümde, kompleks yansıma grupları çalışılmıştır. Öncelikle kompleks yansıma grubunun tanımı ve sunuşları verilmiştir. Sonraki kısımda ise kompleks yansıma gruplarının Gröbner-Shirshov tabanı orijinal bir sonuç olarak verilmiştir.

Son bölümde ise genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Compleks yansıma grupları, graf çarpım, Gröbner-Shirshov taban, monoid, Schützenberger çarpım, sunuş.

ABSTRACT

MS THESIS

THE GRÖBNER BASIS FOR SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

Nurten Urlu

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2015, 50 Pages

Jury
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Fırat ATEŞ
Doç. Dr. Aynur Yalçıner

This thesis contains four main chapters.

At the begining of the first chapter, it is given the presentations of groups and monoids with their general meanings. Later on, it is focused on the Gröbner-Shirshov method that will be mainly used to construct the remaining chapters.

In the second chapter, for known structures, namely the Schützenberger and graph products of monoids and also Chinese monoid, after it is stated the definitions with their presentations then their Gröbner-Shirshov bases are defined.

In the third chapter, it is has been priority studied complex reflection groups. In detail, by giving the definition and presentations of these groups, the Gröbner-Shirshov basis is defined over them as an orginal result.

The final chapter can be thought as a general summarized the results achieved whole of this thesis.

Keywords: Complex reflection groups, graph products, Gröbner-Shirshov basis, monoid, presentation, Schützenberger products.

ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlamada geçirdiğim süreç içerisinde, bilgilerinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum, beni her konuda cesaretlendiren ve yanımda olduğunu hissettiğim değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hiçbir zaman yardımını esirgemeyen, değerli vaktini bana ayırarak her zaman yol gösteren ve fikir veren, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı saygıdeğer hocam ve eş danışmanım Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca emeği geçen tüm hocalarıma ve beni yalnız bırakmayan arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca TÜBİTAK'a 113F294 nolu proje kapsamında yüksek lisans eğitimim boyunca burs sağlayarak verdiği maddi destekten dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak koşulsuz sevgi ve destekleriyle her zaman yanımda olarak bana güç veren ve bugünlere gelmemi sağlayan aileme sonsuz teşekkürler...

Nurten URLU
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Tanımı
1_w	Boş kelime
$\imath(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$\approx$	Serbest olarak iki kelimenin denkliği
$F(X)$	X kümesi üzerindeki serbest grup
$\lvert X\rvert$	X kümesinin eleman sayısı
$\wp_M$	M monoidin sunuşu
A^+	A kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelime
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
$\overline{f}$	Baş kelime
ρ	Kongrüans bağıntısı
$\delta(A\times B)$	$A\times B$'nin kuvvet kümesi
$M_1 \Diamond M_2$	M_1 ve M_2 monoidlerinin Schützenberger çarpımı
$\widetilde{u_i}$	Son üreteci içermeyen kelime
$\underline{u_i}$	İlk üreteci içermeyen kelime
$(f)\wedge(g)$	Verilen f ve g gibi iki polinomun kesişim bileşeni
$(f)\vee(g)$	Verilen f ve g gibi iki polinomun bileşim bileşeni
S^{comp}	Shirshov algoritması

1. GİRİŞ

Bu bölümünde tezin amacı olan Gröbner-Shirshov metodunda sıkça kullandığımız grup ve monoid sunuşları hakkında bilgi verilecek daha sonra Gröbner-Shirshov metodu tanımlanıp, detaylandırılacaktır. Bu bölümdeki temel kavramlar ile ilgili ayrıntılı bilgiler (Baumslag, 1993), (Rotman, 1988), (Lyndon, 1977) kaynaklarında bulunabilir.

1.1. Sunuşlar

Birleştirilmiş grup teorisinde çok önemli bir yere sahip olan sunuşlar, cebirsel problemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca sunuşların kullanım amaçları yalnızca temsil ettikleri cebirsel yapının (grup, monoid, yarı grup vb.) mertebelerini bulmak yada ait olduğu cebirsel yapı hakkında bize bilgi vermesi değildir. Bu görevlerinin dışında sunuşlar, bazı özel problemlerin çözüm alanlarında önemli bir yere sahiptir. Tezin genelinde bahsedilecek olan Gröbner-Shirshov metodu, sunuşlar yardımıyla cebirsel yapıların kelime problemine çözüm olanağı veren bir metottur.

1.1.1. Serbest grup

1.1.2. Tanım: X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}(x \in X)$ eşleşmesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım. Ayrıca $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına harf ve $\left(n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \leq i \leq n \textit{ olmak üzere}\right)$

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \tag{1.1}$$

ifadesine de X kümesi üzerinde bir *kelime* denir. w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w)$ ile gösterilip bu kelime için $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve bitiş harfi de $\tau(w)$ ile gösterilip yine bu kelime için $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ dir. Eğer $n = 0$ ise boş kelime elde edilir ve 1_w ile gösterilir. (1.1) 'deki gibi boş olmayan bir kelime $(n \geq 1)$ için her $\varepsilon_i = +1(1 \leq i \leq n)$ oluyorsa, w kelimesine pozitif kelime denir. Ayrıca (1.1) 'deki w kelimesinin tersi

$$w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \ldots x_1^{-\varepsilon_1}$$

şeklinde tanımlanır.

(1.1) 'de verilen kelime için n sayısına w kelimesinin uzunluğu adı verilir ve $l(w)$ ile gösterilir. Ayrıca w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu da $\sum_{x_i=x}|\varepsilon_i|$ olarak hesaplanır ve bu ifade de $l_x(w)$ ile gösterilir.

X kümesi üzerindeki herhangi bir kelime, $x_i^{\varepsilon_i}x_i^{-\varepsilon_i}$ $(x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1)$ şeklindeki ters harf çiftini içermiyorsa, bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir. Ayrıca yine X kümesi üzerindeki (1.1) 'deki gibi bir kelime için, $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye *devirsel indirgenmiş kelime* denir.

X üzerindeki herhangi iki w ve u kelimeleri arasındaki işlem, wu biçimindeki çarpma işlemidir. Görüldüğü gibi bu işlem, w kelimesinin yanına u kelimesinin yazılması ile elde edilmektedir.

(1.1) 'deki gibi boş olmayan bir kelime üzerinde aşağıdaki işlemler uygulanabilir:

1. $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimede $x_i^{\varepsilon_i}x_i^{-\varepsilon_i}$ çifti varsa bu çift silinir. Yapılan bu silme işlemine *indirgeme işlemi* denir.

2. $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x_i^{\varepsilon_i}x_i^{-\varepsilon_i}$ şeklindeki ters harf çifti eklenebilir. Yapılan bu işleme *ekleme işlemi* denir.

X kümesi üzerinde herhangi iki w ve w' kelimeleri için, bu kelimelerden biri diğerine 1. ve 2. işlemlerinin sonlu sayıda uygulanması ile elde ediliyorsa, w ve w' kelimelerine *serbest olarak eşittir* denir ve $w \approx w'$ ile gösterilir. Burada $\approx$ simgesi ile gösterilen serbest olarak eşitliğin bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. Herhangi bir w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Eğer X kümesi üzerindeki bütün kelimelerin denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ ile gösterilirse bu küme üzerindeki çarpma işlemi

$$[w][u] = [wu] \qquad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

1.1.3. Tanım: $F(X)$ kümesi, üzerinde tanımlanan (1.2) 'deki işleme göre bir grup oluşturur. Bu gruba X kümesi üzerindeki *serbest grup* denir. Ayrıca $X_0 = \{[x] : x \in X\}$ kümesi, $F(X)$ serbest grubu için bir üreteç kümesidir. Burada X_0 kümesinin eleman sayısının X kümesinin eleman sayısı ile aynı olduğu açıkça görülmektedir.

1.2.1. Grup Sunuşları

X üreteç sembollerinin oluşturduğu küme ve R de X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda, $\wp =< X; R >$ ikilisine bir grup sunuşu denir. X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp$ sunuşu sonludur denir. $\wp$ sunuşu ile bir grup tanımlamak mümkündür. Şöyle ki;

- w kelimesi $r^{\varepsilon}\left(r \in R, \varepsilon = \pm 1\right)$ şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimesini sileriz.
- w kelimesi içinde herhangi bir yere $r^{\varepsilon}\left(r \in R, \varepsilon = \pm 1\right)$ alt kelimesini ekleriz.

w kelimesini içeren denklik sınıfını $[w]_{\wp}$ ile gösterirsek, bu denklik sınıfı üzerindeki çarpma işlemi $[w_1]_{\wp}[w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$ şeklinde tanımlanır.

1.2.2. Teorem: $\wp$ sunuşunun temsil ettiği $G(\wp)$ grubu ve X kümesi için, $G(\wp) \cong F(X)/N$ dir.

İspat:

$$\psi_0 : X \rightarrow G(\wp)$$
$$x \mapsto [x]_{\wp}$$

Evrensel dönüşüm özelliğinde, bu dönüşümün genişlemesi olan

$$\psi : F(X) \rightarrow G(\wp)$$
$$[w] \mapsto [w]_{\wp}$$

biçiminde bir tek homomorfizma vardır ve de $\psi|X = \psi_0$ (ψ nin X üzerindeki kısıtlanışı) dır. Açıkça görülebilir ki, ψ homomorfizması örtendir. Ayrıca Çek $\psi = N$ dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoremi gereği $G(\wp) \cong F(X)/N$ bulunur.

1.3.1. Monoid Sunuşları

Bu kısımda tezin geneline hakim olan monoid sunuşlarından söz edilecektir. Grup sunuşları ile monoid ya da yarı grup sunuşları arasında farklılıklar vardır. Bu tip sunuşlarda çalışmak grup sunuşlarında çalışmaktan daha güçtür. Bu nedenle yapılan çalışmalar monoid ve yarı grup sunuşları üzerinde yoğunlaşmıştır.

1.3.2. Tanım: M bir monoid ve A da bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere, A^+ kümesi A üreteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlanır. Monoidler için tanımlanan kelimeler ise $A^* = A^+ \cup \{1\}$ kümesinden alınır. A boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $U \subseteq A^* \times A^*$ olacak şekilde U alt kümesi, bağıntı kelimelerinin bir kümesi olsun. Bu durumda $\wp_M = [A;U]$ ikilisin bir *monoid sunuşu* denir. A ve U kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşu da sonludur.

Monoid ve yarı gruplarda önemli bir yer oluşturan ve şimdi vereceğimiz teoremde de kullanacağımız 'kogrüans' bağıntısını açıklayalım. M bir monoid (S bir yarı grup) ve ρ, M üzerindeki (veya S) bir denklik bağıntısı olsun. Her $x,y,s \in M$(veya S) için $(x,y) \in \rho \Rightarrow (xs,ys) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir *sağ kongrüans bağıntısı* denir. Benzer olarak her $x,y,s \in M$ için, $(x,y) \in \rho \Rightarrow (xs,ys) \in \rho$ oluyor ise bu ρ bağıntısına bir *sol kongrüans bağıntısı* denir. Eğer ρ bağıntısı hem sağ hem de sol kongrüans oluyor ise bu ρ bağıntısına *kongrüans* bağıntısı denir. (Yada her $(x_i,y_i) \in \rho (i=1,2)$ için, $(x_1,y_1),(x_2,y_2) = (x_1y_1,x_2y_2) \in \rho$ ise ρ bağıntısına *kongrüans bağıntısı* denir.)

1.3.3. Teorem: M bir monoid, A da M için bir üreteç kümesi ve ρ, A^* kümesi üzerinde U yu içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda $M \cong A^* / \rho$ dir.

İspat: $\wp_M$ sunuşunun temsil ettiği M monoidi ve A üreteç kümesi için,

$$\Phi : A \to M,$$
$$x \mapsto [x]_\wp \qquad (x \in A)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm

$$\Phi : A^* \to M,$$
$$[w] \mapsto [w]_\wp$$

şeklinde tek bir örten homomorfizmaya genişletilebilir. Ayrıca $Çek\Phi$, U içeren en küçük kongrüans bağıntısı olduğundan, $Çek\Phi = \rho$ dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoreminden $M \cong A^* / \rho$ sonucuna ulaşır.

Tezin amacı olan Gröbner-Shirsov metoduna geçmeden ilerleyen bölümlerde karşımıza gelecek olan ve cebirsel çalışmalarda önemli bir yere sahip normal form teoremini açıklayalım.

1.3.4. Teorem (Normal form teoremi) (Cohen, 1989): Her bir denklik sınıfı tek bir indirgenmiş kelime içerir.

1.2. Gröbner-Shirshov Taban Nedir?

1.2.1. Giriş

Temellerinin 1962 yılında atılmış olduğu Gröbner-Shirshov taban teorisi ilk olarak A.I.Shirshov'un bir çalışmasında öne sürdüğü şu soru ile ortaya çıkmıştır.

"Üreteç ve tanımlı bağıntılar tarafından sunulmuş olan herhangi bir Lie cebirinin lineer tabanı nasıl bulunur?"

A.I.Shirshov (1962) iki Lie polinomunun birleşimi adına yeni bir notasyon kullanarak bu problemin çözümü için sonsuz bir algoritma vermiştir. Shirshov'un Lie cebirleri üzerinde temellerini attığı bu konu üzerinde Buchberger (1965) değişmeli cebirler için Gröbner Basis teorisini tanıtarak yeni bir boyut kazandırdı. Bergman (1978) bunun üzerine bu konuda önemli bir yere sahip olan Diamond Lemma'yı ispatlayarak birleşmeli cebirler için bu teoriyi genelledi. Diğer taraftan Bokut (1976), Shirshov'un metodunun birleşmeli cebirler için çalışabileceğini gösterdi. Tüm bu sebeplerden dolayı Shirshov'un teorisi Lie cebirleri ve diğer cebirsel yapılar için *Gröbner Shirshov taban teorisi* olarak adlandırıldı. Gröbner-Shirshov taban teorisinin gelişimi hakkında vermiş olduğumuz bu bilgilerden sonra aşağıda tanımlar ve konu içinde önemli görülen lemma verilmiştir.

K bir cisim ve $K\langle X\rangle$ de K cismi üzerinde X ile üretilen serbest değişmeli cebir olsun. X ile üretilen serbest monoid X^* ve boş kelime 1 olmak üzere, herhangi bir $w \in X^*$ için, w kelimesinin uzunluğu $|w|$ ile gösterilsin. Ayrıca X^* iyi sıralı bir küme olsun. Bu durumda her sıfırdan farklı $f \in K\langle X\rangle$ polinomu $\overline{f}$ ile gösterilen bir baş kelimeye sahiptir. Eğer $\overline{f}$ nin başkatsayısı 1 e eşitse bu durumda f polinomu *monik* diye adlandırılır.

1.2.2. Tanım: f ve g polinomları $K\langle X\rangle$ de iki monik polinom olsunlar. Bu durumda aşağıdaki iki tip bileşim işlemi mevcuttur:

1. Eğer w kelimesi $w=\bar{f}b=a\bar{g}$ $(a,b\in X^{*},\ |\bar{f}|+|\bar{g}|>|w|)$ biçiminde ise, bu durumda $(f,g)_w=fb-ag$ polinomu f ve g polinomlarının w kelimesi bakımından *kesişim bileşkesi* olarak adlandırılır. Buradaki w kelimesine *kesişimin belirsizliği* denir.

2. Eğer w kelimesi $w=\bar{f}=a\bar{g}b$ $(a,b\in X^{*})$ biçiminde ise, bu durumda $(f,g)_w=f-agb$ polinomu f ve g polinomlarının w kelimesi bakımından *içerme bileşkesi* olarak adlandırılır. Buradaki w kelimesine *içermenin belirsizliği* denir. Birinci ve ikinci belirsizlik tipleri sırasıyla $f\wedge g$ ve $f\vee g$ biçiminde gösterilirler.

1.2.3. Tanım: $S\subseteq K\langle X\rangle$ ve her bir $s\in S$ polinomu monik olsun. Eğer $(f,g)_w=\sum\alpha_i a_i s_i b_i$ $(\alpha_i\in K,\ a_i,b_i\in X^{*},\ s_i\in S$ ve $a_i\bar{s_i}b_i<w)$ ise, bu durumda $(f,g)_w$ bileşkesi (S,w) moduna göre *tekildir* denir. Bu durum

$(f,g)_w\equiv 0 \mod(S,w)$

biçiminde ifade edilir.

1.2.4. Tanım: S kümesindeki polinomların herhangi bir bileşkesi S moduna göre tekil ise, bu durumda S kümesine $K\langle X\rangle$ için bir *Gröbner-Shirshov tabandır* denir.

Aşağıdaki lemma serbest Lie cebirleri için A. I. Shirshov tarafından 1962 de ispatlanmıştır (Shirshov, 1962). L. A. Bokut ise A. I. Shirshov'un bu yaklaşımını 1976 da değişmeli cebirler için özelleştirmiştir (Bokut, 1976).

1.2.5. Lemma (Composition-Diamond Lemma): K bir cisim olsun.

$$A=K\langle X|S\rangle=K\langle X\rangle/Id(S)$$

ve $<$ sıralaması da X^{*} üzerinde tek terimli sıralama olsun. Burada $Id(S)$, $K\langle X\rangle$ in S ile üretilen bir idealidir. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

1. S kümesi $K\langle X\rangle$ için bir Gröbner-Shirshov tabandır.

2. Bazı $s\in S$ ve $a,b\in X^{*}$ için, $f\in Id(S)\Rightarrow\bar{f}=a\bar{s}b$ dir.

3. $Irr(S)=\left\{u\in X^{*} \middle| u\neq a\bar{s}b, s\in S, a,b\in X^{*}\right\}$ kümesi $A=K\langle X|S\rangle$ cebirinin bir tabanıdır.

Eğer $S\subseteq K\langle X\rangle$ alt kümesi bir Gröbner-Shirshov taban değil ise, bu durumda S kümesine S nin polinomlarının tekil olmayan bütün bileşkeleri eklenir. Bu prosedür devam edilerek S^{comp} Gröbner-Shirshov tabanı elde edilir. Bu işlem Shirshov algoritması olarak adlandırılır.

Verilen bir cebirsel yapının elde edilen Gröbner-Shirshov tabanı ile bu cebirsel yapının elemanlarının normal formu elde edilir. Bu normal form yapısı ile cebirsel yapının kelime probleminin çözülebilirliği sağlanır.

" *Kelime problemi*, üzerinde çalışılan cebirsel yapının (monoid, yarı grup v.b.) üreteç elemanlarıyla oluşturulan keyfi iki kelimenin birbirine denk olup olmadığını araştıran bir algoritmanın varlığı problemidir. Çalışılan cebirsel yapı bir grup ise, bu durumda kelime problemi üreteç elemanlarıyla oluşturulan keyfi bir kelimenin grubun birimine eşit olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığı problemidir (Adıan, 1966), (Adıan ve Durnev, 2000)."

A. I. Shirshov'un Gröbner-Shirshov taban bulma ile ilgili ortaya attığı sorudan günümüze kadar yapılmış olan pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu konuda yapılmış olan bazı özel çalışmalar aşağıda listelenmiştir.

- Grupların Schreier genişlemesi (Chen, 2008)
- Artin-Garside üreteç içinde Braid gruplar (Bokut, 2008)
- Birman-Ko-lee üreteç içinde Braid gruplar (Bokut, 2009)
- Adyan-Thurston üreteç içinde Braid gruplar (Chen ve Zhong, 2013)
- Chinese monoid (Chen ve Qiu, 2008)
- Serbest tersinir yarıgruplar (Bokut ve ark., 2009)
- Bazı bir bağıntılı gruplar (Chen ve Zhong, 2011)
- Monoidlerin graf çarpımları (Ateş ve ark., 2011)
- Monoidlerin Schützenberger çarpımları (Ateş ve ark., 2011)
- Rees matris yarıgrupları (Ateş ve ark., 2011)
- Monoidlerin genelleştirilmiş Bruck-Reilly genişlemesi (C. Kocapinar ve ark., 2012)
- Monoidlerin Bruck-Reilly genişlemesi, dikdörtgensel band, monoidlerin küçük genişlemesi (E.G. Karpuz, 2015)

2. ÖZEL MONOİD GENİŞLEMELERİNİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARI

2.1. Giriş

Bu bölümün genel amacı, 3. Bölümde orijinal bir sonuç altında inceleyeceğimiz Gröbner-Shirshov tabanlarının bilinen yapılarda nasıl işlediğini görmektir. Bunun için 1. Bölüm ikinci kısımda temelini verdiğimiz Gröbner-Shirshov taban teorisini hatırlamak gerekmektedir.

2. Bölüm üç ana başlıktan oluşmaktadır. İlk olarak monoidlerin Schützenberger çarpımı (Ateş ve ark., 2011) için Gröbner-Shirshov taban bulunacaktır. Sonrasında sırası ile monoidlerin graf çarpımı (Ateş ve ark., 2011) ve Chinese monoidler (Chen ve Qiu, 2008) için Gröbner-Shirshov tabanlar verilecektir. Bulunan taban elemanları üzerinden bu cebirsel yapıların normal formları bulunup buna bağlı olarak da yapıların kelime problemleri hakkındaki sonuçlar verilecektir.

2.2. Monoidlerin Schützenberger Çarpımı için Gröbner Shirshov Taban

Bir tıp doktoru olan Marcel-Paul Schützenberger tarafından ikinci doktarasını matematik alanında yaptığı sırada ortaya koyduğu bu çarpım, günümüzde önemli bir çalışma konusu olmuştur. Çünkü monoidlerin Schützenberger çarpımı, alınan iki monoidin tanımlanacak olan kural altında yeni bir monoid oluşturmasıdır. Hakkında kısaca açıklama yaptığımız bu çarpım için sırasıyla tanım, sunuş, Gröbner-Shirshov taban ve buna bağlı sonuçlar verilecektir. Bu bölümün temel tanımları hariç ana teori ve sonuçları (Ateş ve ark., 2011) referansından alınmıştır.

2.2.1. Tanım : A ve B monoid olsun. Ayrıca $P \subset A \times B$ ve $a \in A$, $b \in B$ için

$$aP = \{(ac,d) \mid (c,d) \in P\} \tag{2.1}$$

$$Pb = \{(c,db) \mid (c,d) \in P\} \tag{2.2}$$

şeklinde iki küme tanımlansın. Buna göre A ve B monoidlerinin *Schützenberger çarpımı*, $\delta(A \times B)$ kuvvet kümesi olmak üzere, $A \times \delta(A \times B) \times B$ kümesi altında

$$(a_1,P_1,b_1)(a_2,P_2,b_2) = (a_1a_2, P_1b_2 \cup a_1P_2, b_1b_2) \tag{2.3}$$

işlemiyle tanımlı bir monoiddir ve $A\Diamond B$ notasyonu ile gösterilir. $A\Diamond B$ monoidinin birim elemanı $(1_A,\varnothing,1_B)$ dır. □

Şimdi (2.3) kuralı ile verilen çarpımın gerçekten bir monoid olduğunu gösterelim.

Bir yapının monoid olduğunu göstermek için öncelikle cebirsel bir yapı olduğunu garanti altına almalıyız.

$(a_1,P_1,b_1)\in A\times\delta(A\times B)\times B$ ve $(a_2,P_2,b_2)\in A\times\delta(A\times B)\times B$ olmak üzere,

$$(a_1,P_1,b_1)\Diamond(a_2,P_2,b_2)=(a_1a_2,P_1b_2\cup a_1P_2,b_1b_2)$$

oluşturduğumuz yeni sıralı üçlü, elemanlarını da aldığımız $A\times\delta(A\times B)\times B$ kümesinin elemanıdır. Boştan farklı bir küme cebirsel yapı ise kapalılık özelliği sağlanır (Çevik, 2010). Kapalılık özelliği ile ilişkilendirilen bu özelliğe dayanarak kapalılık özelliğinin sağlandığı garanti altına alındı.

Tanımda sözü geçen $(1_A,\varnothing,1_B)$ birim elemanının varlığını gösterelim. $(a_1,P_1,b_1)\in A\times\delta(A\times B)\times B$ olmak üzere,

$$(1_A,\varnothing,1_B)\Diamond(a_1,P_1,b_1)=(a_1,P_1,b_1)\Diamond(1_A,\varnothing,1_B)=(a_1,P_1,b_1)$$

eşitliklerinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$(1_A,\varnothing,1_B)\Diamond(a_1,P_1,b_1)=(a_1,\varnothing\cup P_1,b_1)=(a_1,P_1,b_1)$$

$$(a_1,P_1,b_1)\Diamond(1_A,\varnothing,1_B)=(a_1,P_1\cup\varnothing,b_1)=(a_1,P_1,b_1)$$

dir.

Son olarak birleşme özelliğini de göstermek çarpımın monoid olduğunu göstermeye yetecektir. $(a_1,P_1,b_1)\in A\times\delta(A\times B)\times B$, $(a_2,P_2,b_2)\in A\times\delta(A\times B)\times B$ ve $(a_3,P_3,b_3)\in A\times\delta(A\times B)\times B$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}((a_1,P_1,b_1)\Diamond(a_2,P_2,b_2))\Diamond(a_3,P_3,b_3)&=(a_1a_2,P_1b_2\cup a_1P_2,b_1b_2)\Diamond(a_3,P_3,b_3)\\ &(a_1a_2a_3,(P_1b_2\cup a_1P_2)b_3\cup b_3a_1\cancel{a_2P_3,b_1b_2b_3)}\\ &=(a_1,P_1,b_1)\Diamond(a_2a_3,P_2b_3\cup a_2P_3,b_2b_3)\\ &=(a_1,P_1,b_1)\Diamond((a_2,P_2,b_2)\Diamond(a_3,P_3,b_3))\end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği garanti altına alınır. Bu durumda $A\Diamond B$ çarpımı bir monoiddir. □

Monoidlerin Schützenberger çarpımının sunuşunu verebilmek için öncelikle üretildiği kümeyi gösterelim.

2.2.2. Önerme (Ruskuc, 1999): A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin. Bu durumda $A\Diamond B$ Schützenberger çarpımı

$$\{(x,\varnothing,1_B)|x\in X\}\cup\{(1_A,\varnothing,y)|y\in Y\}\cup\left\{\left(1_A,\{(a,b)\},1_B\right)|a\in A,b\in B\right\}$$

kümesi tarafından üretilir. □

İspat: $a_1,a_2,a_3\in A$, $b_1,b_2,b_3\in B$ ve $P_1,P_2\subseteq A\times B$ olsun.

$$(a_1,\varnothing,1_B)(a_2,\varnothing,1_B)=(a_1a_2,\varnothing,1_B) \quad (2.4)$$

$$(1_A,\varnothing,b_1)(1_A,\varnothing,b_2)=(1_A,\varnothing,b_1b_2) \quad (2.5)$$

$$(1_A,P_1,1_B)(1_A,P_2,1_B)=(1_A,P_1\cup P_2,1_B) \quad (2.6)$$

$$(1_A,\varnothing,b)(1_A,P,1_B)(a,\varnothing,1_B)=(a,P,b) \quad (2.7)$$

Genel olarak verilen bu üreteç kümesi $A\Diamond B$ çarpımı için mümkün olan en iyi üreteç kümesidir. Burada bahsedilen mümkün olan en iyi üreteç kümesinden kasıt, monoid elemanlarının üretildiği kümelerin ayrıştırılamayacak en sade halde olmasını sağlamaktır. Aslında, $X\cup\{1_A\}$ ve $Y\cup\{1_B\}$ kümelerinin tüm elemanları sırasıyla A ve B kümeleri içinde ayrıştırılamaz ise bu durumda 2.2.2 Önerme den tüm üreteçler $A\Diamond B$ çarpımı içinde ayrıştırılamazdır.En iyi üreteç kümesinde söz ettiğimiz gibi buradaki amacımız monoid elemanlarını oluşturabilecek ayrıştırılamaz en sade kümeye ulaşabilmektir. Bu nedenle (2.4) - (2.7) bağıntıları $A\Diamond B$ monoidinin tüm üreteç kümesine aittir.

2.2.2. Önermesiyle tanımlanan üreteç kümesini kullanarak, $A\Diamond B$ sunuşu aşağıdaki teoremde verilmektedir.

2.2.3. Teorem (Ruskuc, 1999): A ve B monoidleri sırasıyla $\wp_A=\langle X_1;R_1\rangle$ ve $\wp_B=\langle X_2;R_2\rangle$ sunuşları ile temsil edilsinler. Bu durumda $A\Diamond B$ çarpımının üreteç kümesi

$$Z=X_1\cup X_2\cup\{Z_{a,b}|a\in A,b\in B\} \quad (2.8)$$

dir ve bağıntı kümesi ise

$$R_A,R_B; \quad (2.9)$$

$$z^2_{a,b}=z_{a,b},\quad z_{a,b}z_{a',b'}=z_{a',b'}z_{a,b} \quad \left(a,a'\in A,\quad b,b'\in B\right), \quad (2.10)$$

$$x_1z_{a,b}=z_{x_1a,b}x_1 \quad (x_1\in X_1,\ a\in A,\ b\in B), \quad (2.11)$$

$$z_{a,b}x_2 = x_2 z_{a,bx_2} \qquad (x_2 \in X_2, a \in A, \quad b \in B), \tag{2.12}$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 \qquad (x_1 \in X_1, \qquad x_2 \in X_2). \tag{2.13}$$

şeklindedir. □

Tezin birinci bölümünde belirtmiş olduğumuz gibi bir cebirsel yapının Gröbner-Shirshov tabanını elde edebilmek için o yapının sunuşuna ulaşmalıyız. Monoidlerin Schützenberger çarpımının üreteç ve bağıntı kümesi yukarıda verilmiştir. Monoidlerin schützenberger çarpımı sunuşunda verilmiş olan bağıntılar için üreteçler arasındaki sıralama aşağıdaki gibidir.

- $x_i \in X_i \,(1 \le i \le 2)$ için $x_1 > x_2$,
- $w_i \in M_i \,(1 \le i \le 2)$ için $x_1 > z_{w_1,w_2} > x_2$,
- $w_1 > w_1'$ yada $w_1 = w_1'$ iken $w_2 > w_2'$ için $(w_1, w_2) > (w_1', w_2')$
- $(w_1, w_2) > (w_1', w_2')$, $w_i, w_i' \in M_i \,(1 \le i \le 2)$ için $z_{w_1,w_2} > z_{w_1',w_2'}$

2.2.4. Teorem (Ateş ve ark., 2011): $M_1 \Diamond M_2$ için Gröbner-Shirshov tabanı

(1) $u_1 = u_2$, **(2)** $v_1 = v_2$, (3) $z^2_{w_1 w_2} = z_{w_1,w_2}$,

(4) $z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} = z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2}$, (5) $x_1 z_{w_1,w_2} = z_{x_1 w_1, w_2} x_1$, (6) $z_{w_1,w_2} x_2 = x_2 z_{w_1,w_2 x_2}$,

(7) $x_1 x_2 = x_2 x_1$

bağıntılarından oluşmaktadır. Buradaki $u_i = v_i \in R_i \,(1 \le i \le 2)$ dır. □

İspat: İspat boyunca kullanılacak olan $\widetilde{u_i}$ notasyonu son üreteci içermeyen kelime, $\underline{u_i}$ notasyonu ise ilk üreteci içermeyen kelime olarak kullanılacaktır. (1)-(7) bağıntıları arasındaki tüm içeren ve kesişen bileşkelerin tekil olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bu bağıntılar arasında içeren bileşkeler bulunmadığından sadece kesişen bileşkelerin tekil olduğunun gösterilmesi ispatı tamamlamak için yeterli olacaktır.

(1) ve (7) arasındaki bağıntıların kesişimlerinden aşağıdaki belirsizlikler elde edilir.

Çizelge 2.1. Polinomların kesişimleri sonucu oluşan kelimeler

$(i)\wedge(j)$	w : belirsizlik kelimesi	$(i)\wedge(j)$	w : belirsizlik kelimesi
$(1)\wedge(5)$	$\widetilde{u}_1 x_1 z_{w_1,w_2}$	$(4)\wedge(6)$	$z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} x_2$
$(1)\wedge(7)$	$\widetilde{u}_1 x_1 x_2$	$(5)\wedge(3)$	$x_1 z^2_{w_1,w_2}$
$(3)\wedge(4)$	$z^2_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'}$	$(5)\wedge(4)$	$x_1 z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'}$
$(3)\wedge(6)$	$z^2_{w_1,w_2} x_2$	$(5)\wedge(6)$	$x_1 z_{w_1,w_2} x_2$
$(4)\wedge(3)$	$z_{w_1,w_2} z^2_{w_1',w_2'}$	$(6)\wedge(2)$	$z_{w_1,w_2} x_2 \underline{u_2}$
$(4)\wedge(4)$	$z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z$	$(7)\wedge(2)$	$x_1 x_2 \underline{u_2}$

İspat için çizelgede verilen bileşimlerin tamamının tekile indirgendiğini göstermeliyiz. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$(5)\wedge(6): w = x_1 z_{w_1,w_2} x_2,$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= (x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1 w_1,w_2} x_1)x_2 - x_1(z_{w_1,w_2} x_2 - x_2 z_{w_1,w_2 x_2}) \\
&= x_1 z_{w_1,w_2} x_2 - z_{x_1 w_1,w_2} x_1 x_2 - x_1 z_{w_1,w_2} x_2 + x_1 x_2 z_{w_1,w_2 x_2} \\
&= x_1 x_2 z_{w_1,w_2 x_2} - z_{x_1 w_1,w_2} x_1 x_2 \\
&\equiv x_2 x_1 z_{w_1,w_2 x_2} - z_{x_1 w_1,w_2} x_2 x_1 \\
&\equiv x_2 z_{x_1 w_1,w_2 x_2} x_1 - x_2 z_{x_1 w_1,w_2 x_2} x_1 \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$(1)\wedge(5): w = \widetilde{u}_1 x_1 z_{w_1,w_2},$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= (u_1 - v_1) z_{w_1,w_2} - \widetilde{u}_1(x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1 w_1,w_2} x_1) \\
&= u_1 z_{w_1,w_2} - v_1 z_{w_1,w_2} - \widetilde{u}_1 x_1 z_{w_1,w_2} + \widetilde{u}_1 z_{x_1 w_1,w_2} x_1 \\
&= \widetilde{u}_1 z_{x_1 w_1,w_2} x_1 - v_1 z_{w_1,w_2} \\
&\equiv z_{\widetilde{u}_1 x_1 w_1,w_2} \widetilde{u}_1 x_1 - z_{v_1 w_1,w_2} v_1 \\
&\equiv z_{u_1 w_1,w_2} u_1 - z_{v_1 w_1,w_2} v_1
\end{aligned}
$$

$$\equiv z_{v_1 w_1, w_2} v_1 - z_{v_1 w_1, w_2} v_1 \equiv 0.$$

$(3) \wedge (6) : w = z^2_{w_1, w_2} x_2,$

$$(f,g)_w = (z^2_{w_1 w_2} - z_{w_1, w_2}) x_2 - z_{w_1, w_2} (z_{w_1, w_2} x_2 - x_2 z_{w_1, w_2 x_2})$$

$$= z^2_{w_1, w_2} x_2 - z_{w_1, w_2} x_2 - z_{w_1, w_2} z_{w_1, w_2} x_2 + z_{w_1, w_2} x_2 z_{w_1, w_2 x_2}$$

$$= z_{w_1, w_2} x_2 z_{w_1, w_2 x_2} - z_{w_1, w_2} x_2$$

$$\equiv x_2 z_{w_1, w_2 x_2} z_{w_1, w_2 x_2} - z_{w_1, w_2} x_2$$

$$\equiv x_2 z_{w_1, w_2 x_2} - z_{w_1, w_2} x_2 \equiv x_2 z_{w_1, w_2 x_2} - x_2 z_{w_1, w_2 x_2} \equiv 0.$$

$(4) \wedge (4) : w = z_{w_1, w_2} z_{w'_1, w'_2} z_{w''_1, w''_2},$

$$(f,g)_w = \left(z_{w_1, w_2} z_{w'_1, w'_2} - z_{w'_1, w'_2} z_{w_1, w_2} \right) z_{w''_1, w''_2} - z_{w_1, w_2} \left(z_{w'_1, w'_2} z_{w''_1, w''_2} - z_{w''_1, w''_2} z_{w'_1, w'_2} \right)$$

$$= z_{w_1, w_2} z_{w''_1, w''_2} z_{w'_1, w'_2} - z_{w'_1, w'_2} z_{w_1, w_2} z_{w''_1, w''_2}$$

$$\equiv z_{w''_1, w''_2} z_{w_1, w_2} z_{w'_1, w'_2} - z_{w'_1, w'_2} z_{w''_1, w''_2} z_{w_1, w_2}$$

$$\equiv z_{w''_1, w''_2} z_{w'_1, w'_2} z_{w_1, w_2} - z_{w''_1, w''_2} z_{w'_1, w'_2} z_{w_1, w_2} \equiv 0.$$

$(6) \wedge (2) : w = z_{w_1, w_2} x_2 \underline{u_2},$

$$(f,g)_w = \left(z_{w_1, w_2} x_2 - x_2 z_{w_1, w_2 x_2} \right) \underline{u_2} - z_{w_1, w_2} (u_2 - v_2)$$

$$= z_{w_1, w_2} v_2 - x_2 z_{w_1, w_2 x_2} \underline{u_2}$$

$$\equiv v_2 z_{w_1, w_2 v_2} - x_2 \underline{u_2} z_{w_1, w_2 x_2 \underline{u_2}}$$

$$\equiv v_2 z_{w_1, w_2 v_2} - u_2 z_{w_1, w_2 u_2} \equiv 0.$$

Benzer şekilde tüm kesişim bileşimleri kontrol edildiğinde tekil olduğu görülür. Birleşim bileşimi olmadığı için ispat burada tamamlanır. □

Verilen bir cebirsel yapının Gröbner-Shirshov tabanını bulmak o yapının normal formunu bulmak için çok kullanışlı bir metottur. 1. Bölümde söz edildiği gibi Composition-Diamond Lemma, Gröbner-Shirshov taban kümesinin elemanlarını kullanarak o cebirsel yapının normal formunu bulmamızı sağlayacaktır.

R kümesi (1)-(7) bağıntılarından oluşan bir küme olsun. Keyfi bir $u \in M_1 \Diamond M_2$ kelimesinin normal formu *C(u)* olmak üzere, 2.2.4. Teorem ve 1.2.5. Lemma (Composition- Diamond Lemma) ile bu *C(u)* normal formunun yapısı aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

2.2.5. Sonuç (Ateş ve ark., 2011): $M_1 \Diamond M_2$ çarpımının her w kelimesi

$$u_2 z_{m_1,m_2} u_1,$$

buradaki u_1, u_2 ve z_{m_1,m_2} elemanları sırasıyla $u_1 \in X_1^*$, $u_2 \in X_2^*$ ve $z_{m_1,m_2} \in \{z_{m_1,m_2} | w_1 \in M_1, w_2 \in M_2\}^*$ şeklinde indirgenemez elemanlar olmak üzere $M_1 \Diamond M_2$ çarpımı tek bir temsile sahiptir. Verilen bu temsil monoidlerin Schützenberger çarpımı için normal formdur. □

2.2.5. Sonuç ile monoidlerin Schützenberger çarpımı için kelime problemi ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.6. Sonuç (Ateş ve ark., 2011): Monoidlerin Schützenberger çarpımı $M_1 \Diamond M_2$ için kelime problemi çözülebilirdir. □

2.3. Monoidlerin Graf Çarpımı için Gröbner-Shirshov Taban

Graf çarpım serbest ve direkt çarpımın bir karışımıdır. Monoidlerin graf çarpımları elimizdeki çarpımın serbest mi yoksa direkt çarpım mı olduğunu belirlemekte kullanılan bir araçtır. Bu ayırımı yapmak basit graf (düğüm içermeyen graf) ile mümkündür. Grafın her bir köşesi monoidler ile etiketlenirse monoidlerin graf çarpımı her bir köşe monoidleri ile üretilen monoiddir. Üreteçlerini monoidden aldığımız bu çarpımın monoid oluşturduğu aşikardır. Bu monoidin bağıntı kümesi, köşe monoidlerin bağıntılarını içermesinin yanında komşu köşe monoid elemanlarının değişmeliliğinin de eklenmesiyle elde edilir (Ateş ve ark., 2011).

Hakkında kısaca açıklama yaptığımız bu çarpım için sırasıyla sunuş, Gröbner-Shirsov taban ve bununla ilgili sonuçlar verilecektir.

2.3.1. Teorem (Ateş ve ark., 2011): $M_1, M_2, \ldots M_j$ $(j \geq 4)$ monoidleri sırasıyla $\wp_{M_1} = \langle X_1 | R_1 \rangle$, $\wp_{M_2} = \langle X_2 | R_2 \rangle, \ldots, \wp_{M_j} = \langle X_j | R_j \rangle$ sunuşları ile temsil edilsinler. Monoid sunuşunda verilmiş olan bağıntılar,

$$R_1 = \left\{ u_{1_1} = v_{1_1},\ u_{1_2} = v_{1_2},\ \ldots,\ u_{1_{m_1}} = v_{1_{m_1}} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ u_{2_1} = v_{2_1},\ u_{2_2} = v_{2_2},\ \ldots,\ u_{2_{m_2}} = v_{2_{m_2}} \right\},$$

$$\ldots$$

$$R_j = \left\{ u_{j_1} = v_{j_1},\ u_{j_2} = v_{j_2},\ \ldots,\ u_{j_{m_j}} = v_{j_{m_j}} \right\}.$$

şeklindedir.

Graf çarpım sunuşu ise şu şekildedir.

$$\wp_M = \left\langle X_1, X_2, \ldots, X_j \,\middle|\, R_1, R_2, \ldots, R_j, S' \right\rangle \tag{2.17}$$

yukarıdaki sunuşta bahsedilen S' bağıntısı $S' = \left\{ x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i,\ x_1 x_j = x_j x_1 \right\}$ $\left(1 \le i < j\right)$ şeklinde daha açık bir şekilde ifade edilebilir. □

Teoremde verilmiş olan $R_1, R_2, \ldots, R_j$ bağıntılarının her biri $M_1, M_2, \ldots M_j$ monoidleri için Gröbner-Shirshov tabanlardır. Ayrıca dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta köşelerini $M_1, M_2, \ldots, M_j$ şeklinde etiketlediğimiz basit bir grafta komşu köşeler M_i, M_{i+1} olmasıdır. Basit bir graf göz önüne alındığında M_1, M_j köşelerininde komşu köşeler olduğu gözden kaçmamalıdır.

Monoidlerin graf çarpımı sunuşunda verilmiş olan bağıntılar için üreteçler arasındaki sıralama aşağıdaki gibidir.

$$i < k \Rightarrow x_i > x_k \ \ (x_i \in X_i, x_k \in X_k) \tag{2.18}$$

2.3.2. Teorem (Ateş ve ark., 2011): Monoidlerin graf çarpımlarını Gröbner-Shirshov taban bağıntıları

(1) $u_{i_r} = v_{i_r} \quad (1 \le i \le j)$, **(2)** $x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i \quad (1 \le i \le j-1)$,

(3) $x_1 x_j = x_j x_1 \quad (1 \le i \le j-1)$, **(4)** $x_i w_{i+2} x_{i+1} = x_{i+1} x_i w_{i+2} \ (1 \le i \le j-2)$ *ve* $(w_{i+2} \in X_{i+2}^{*})$,

şeklindedir. □

İspat: Verilen bağıntıların Gröbner-Shirshov taban olduğunu göstermek için oluşan tüm kesişim bileşimlerinin tekil olduğunu göstermeliyiz. İspatı kolaylaştırmak adına aşağıdaki durumları göz önünde bulundurmak ispatın daha kolay anlaşılmasını sağlayacaktır.

1. R_j içindeki bağıntılardan oluşan kesişim kelimeleri,

2. S' içindeki bağıntılardan oluşan kesişim kelimeleri,

3. R_i *ve* S' arasındaki kesişimlerden oluşan kelimeler.

S' içinden aldığım iki polinom $g_1 = x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i$ ve $g_2 = x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1}$ ise oluşan belirsiz kelime $w = x_i x_{i+1} x_{i+2}$ şeklinde olacaktır. Bu durumda kesişim bileşimine göre

$$\begin{aligned}(g_1, g_2)_w &= g_1 b - a g_2 \\ &= (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i) x_{i+2} - x_i (x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1}) \\ &= x_i x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+1} x_i x_{i+2} - x_i x_{i+1} x_{i+2} + x_i x_{i+2} x_{i+1} \\ &= x_i x_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i x_{i+2}\end{aligned}$$

tekil değildir.

S' içinden aldığım bir diğer kesişim aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$g_1 = x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1} \quad \text{ve} \quad g_2 = x_{i+2} x_{i+3} - x_{i+3} x_{i+2} \quad \text{ise}$$

oluşan belirsiz kelime $w = x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}$ şeklinde olacaktır. Bu durumda kesişim bileşimine göre

$$\begin{aligned}(g_1, g_2)_w &= g_1 b - a g_2 \\ &= (x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1}) x_{i+3} - x_{i+1} (x_{i+2} x_{i+3} - x_{i+3} x_{i+2}) \\ &= x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} - x_{i+2} x_{i+1} x_{i+3} - x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} + x_{i+1} x_{i+3} x_{i+2} \\ &= x_{i+1} x_{i+3} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1} x_{i+3}\end{aligned}$$

tekil değildir.

Birinci bölümde anlatıldığı gibi tekil olmayan bağıntılar, cebirsel yapının sunuşunda verilen bağıntılara eklenilerek Gröbner-Shirshov taban bağıntıları elde edilir. Tekil olmayan bu bağıntı 4. bağıntı olarak eklenmiştir.

İspatı tamamlamadan önce tekil olan bazı bağıntıları kontrol edelim.

$h_1 = x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i$, $h_2 = x_i w_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i w_{i+2}$ ise $w = x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2}$

$$\begin{aligned}(h_1, h_2)_w &= h_1 b - a h_2 \\ &= (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i) w_{i+3} x_{i+2} - x_i (x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3}) \\ &= x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} - x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} + x_i x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} \\ &= x_i x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} \\ &\equiv x_{i+1} x_i x_{i+2} w_{i+3} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} \equiv x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} \equiv 0.\end{aligned}$$

Benzer şekilde tüm kesişim bileşimleri kontrol edildiğinde tekil olduğu görülür. Birleşim bileşimi olmadığı için ispat burada tamamlanır. □

R kümesi (1)-(4) bağıntılarından oluşan bir küme olsun. Monoidlerin graf çarpımları kümesinden alınan keyfi bir u kelimesinin normal formu *C(u)* olmak üzere, 2.3.2. Teorem ve 1.2.5. Lemma (Composition- Diamond Lemma) ile bu *C(u)* normal formunun yapısı aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

2.3.3. Sonuç (Ateş ve ark., 2011): M monoidinin her w kelimesi $w_1 w_2 ... w_n$ normal formlarından birine sahiptir. Buradaki w_i'nin her biri M_k monoidinin bazı köşe elemanlarıdır. Aşağıda verilen algoritma monoidlerin graf çarpımlarında bizi normal forma götürebilecek bir araçtır.

1. $w_i = 1$ kaldırmak.

2. $w_i w_{i+1}$ tek elemanı ile M_k monoidinin benzer köşelerinde olan w_i ve w_{i+1} ardışık elemanları ile yer değiştirmek.

3. w_i, w_{i+1} ve w_1, w_j ardışık elemanlar için w_i ile w_{i+1}, w_1 ile w_j'nin yer değiştirmesi. □

2.3.3. Sonuç ile monoidlerin graf çarpımı için kelime problemi ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.3.4. Sonuç (Ateş ve ark., 2011): Monoidlerin graf çarpımı için kelime problemi çözülebilirdir. □

2.4. Chinese Monoid için Gröbner-Shirshov Taban

Chinese monoid her $a \leq b \leq c$ için $cba=cab=bca$ bağıntıları ile tam sıralı alfabeler tarafından üretilen bir monoiddir. Duchamp ve Krob tarafından 1994 yılında keşfedilen bu çarpım Julien Cassaigne, Marc Espie, Daniel Krob, Jean-Christophe Novelli, ve Florent Hivert tarafından 2001 yılında ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

Bu bölümde Chinese monoidler için Gröbner-Shirshov taban verilecek ve daha sonra normal formunu bulmak için bir algoritma verilecektir. Şimdi taban bulmamızı sağlayacak olan Chinese Monoid sunuşunu inceleyelim.

2.4.1. Teorem (Chen ve Qiu, 2008): $A = \{x_i | i \in I\}$ iyi sıralı küme olmak üzere Chinese monoid T tarafından üretilen A^* free monoidi üzerinde bir denklik sınıfıdır. T aşağıdaki bağıntıları içerir.

- $x_i x_j x_k = x_i x_k x_j = x_j x_i x_k \qquad i > j > k \qquad (2.19)$
- $x_i x_j x_j = x_j x_i x_j \qquad i > j \qquad (2.20)$

- $x_i x_i x_j = x_i x_j x_i$ $\qquad i > j$ (2.21)

Chinese monoidlerin Gröbner-Shirshov taban bağıntılarını oluşturmak için gerekli sıralama yukarıda bağıntıların her biri için ayrı ayrı verilmiştir. □

2.4.2. Teorem (Chen ve Qiu, 2008): Chinese monoidlerin Gröbner-Shirshov taban bağıntıları

(1) $x_i x_j x_k = x_j x_i x_k$, **(2)** $x_i x_k x_j = x_j x_i x_k$, **(3)** $x_i x_j x_j = x_j x_i x_j$,

(4) $x_i x_i x_j = x_i x_j x_i$, **(5)** $x_i x_j x_i x_k = x_i x_k x_i x_j$,

biçimindedir. Buradaki $x_i, x_j, x_k \in A$ ve $i > j > k$ dır. □

İspat: Oluşan tüm kesişim bileşimlerinin tekil olduğunu göstermek ispatı tamamlayacağı için öncelikle kesişim bileşimlerini oluşturalım.

İspat boyunca x_i yerine i, x_j yerine j gösterimleri kullanılacaktır. (1) ve (5) arasındaki bağıntıların kesişimlerinden aşağıdaki belirsizlikler elde edilir.

$(1)\wedge(1): w = ijkk_1,\ i > j > k > k_1$ $\qquad (1)\wedge(1): w = ijkj_1k_1,\ i > j > k > j_1 > k_1$

$(1)\wedge(2): w = ijj_1k,\ i > j > j_1 > k$ $\qquad (1)\wedge(2): w = ijkj_1k_1,\ i > j > k > j_1 > k_1$

$(1)\wedge(3): w = ijkj_1j_1,\ i > j > k > j_1$ $\qquad (1)\wedge(3): w = ijkk,\ i > j > k$

$(1)\wedge(4): w = ijkkj_1,\ i > j > k > j_1$ $\qquad (1)\wedge(5): w = ijkjk_1,\ i > j > k > k_1$

$(1)\wedge(5): w = ikjk_1kk_1,\ i > j > k > j_1 > k_1$ $\qquad (2)\wedge(2): w = ikjk_1j_1,\ i > j > k,\ i > j_1 > k_1$

$(2)\wedge(1): w = ikjj_1k_1,\ i > j > k,\ j > j_1 > k_1$ $\qquad (2)\wedge(3): w = ikjj_1j_1,\ i > j > k, j > j_1$

$(2)\wedge(4): w = ikjjj_1,\ i > j > k,\ j > j_1$ $\qquad (2)\wedge(5): w = ikjj_1jk_1,\ i > j > k, j > j_1 > k_1$

$(3)\wedge(1): w = ijjj_1k_1,\ i > j > j_1 > k_1$ $\qquad (3)\wedge(2): w = ijjk_1j_1,\ i > j > j_1 > k_1$

$(3)\wedge(3): w = ijjj_1j_1,\ i > j > j_1$ $\qquad (3)\wedge(4): w = ijjj_1,\ i > j > j_1$

$(3)\wedge(5): w = ijjj_1jk_1,\ i > j > j_1 > k_1$ $\qquad (4)\wedge(1): w = iijj_1k_1,\ i > j > j_1 > k_1$

$(4)\wedge(1): w = ijk,\ i > j > k$ $\qquad (4)\wedge(2): w = iijk_1j_1,\ i > j > j_1 > k_1$

$(4)\wedge(2): w = iijj_i,\ i > j > j_1$ $\qquad (4)\wedge(3): w = iijj,\ i > j$

$(4)\wedge(3): w = iijj_1j_1,\ i > j > j_1$ $\qquad (4)\wedge(4): w = ijjj_1,\ i > j > j_1$

$(4)\wedge(5): w = iijij_1,\ i > j > j_1$ $\qquad (4)\wedge(5): w = iijk_1jj_1,\ i > j > j_1 > k_1$

$(5)\wedge(1): w = ijikj_1k_1,\ i > j > k > j_1 > k_1$ $\qquad (5)\wedge(1): w = ijikk_1,\ i > j > k > k_1$

$(5)\wedge(2): w=ijikk_1j_1,\ i>j>k>j_1>k_1$ $(5)\wedge(2): w=ijikj_1,\ i>j>k,\ i>j_1>k$

$(5)\wedge(3): w=ijikj_1j_1,\ i>j>k>j_1$ $(5)\wedge(4): w=ijikkj_1,\ i>j>k>j_1$

$(5)\wedge(5): w=ijikik_1,\ i>j>k>k_1$ $(5)\wedge(5): w=ijikj_1kk_1,\ i>j>k>k_1$

İspat için verilen bileşimlerin tamamının tekile indirgendiğini göstermeliyiz. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$(1)\wedge(1)\Rightarrow f: ijk-jik \quad (i>j>k)$

$g: kj_1k_1-j_1kk_1 \quad (k>j_1>k_1) \Rightarrow (i>j>k>j_1>k_1)$

$w=ijkj_1k_1$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ijk-jik)j_1k_1-ij(kj_1k_1-j_1kk_1)\\ &= ijkj_1k_1-jikj_1k_1-ijkj_1k_1+ijj_1kk_1\\ &= ijj_1kk_1-jikijk\\ &\equiv ijkj_1k_1-jikj_1k_1 \equiv jikj_1k_1-jikj_1k_1 \quad \equiv 0.\end{aligned}$$

$(1)\wedge(2)\Rightarrow f: ijk-jik \quad (i>j>k)$

$g: kk_1j_1-j_1kk_1 \quad (k>j_1>k_1)$

$w=ijkk_1j_1$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ijk-jik)k_1j_1-ij(kk_1j_1-j_1kk_1)\\ &= ijkk_1j_1-jikk_1j_1-ijkk_1j_1+ijj_1kk_1\\ &= ijj_1kk_1-jikk_1j_1 = ijkk_1j_1-ijkk_1j_1 \quad \equiv 0.\end{aligned}$$

$(1)\wedge(3)\Rightarrow f: ijk-jik \ (i>j>k)$

$g: kj_1j_1-j_1kj_1 \quad (k>j_1)$

$w=ijkj_1j_1$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ijk-jik)j_1j_1-ij(kj_1j_1-j_1kj_1)\\ &= ijkj_1j_1-jikj_1j_1-ijkj_1j_1+ijj_1kj_1\\ &= ijj_1kj_1-jikj_1j_1 = ijkj_1j_1-ijkj_1j_1 \equiv 0.\end{aligned}$$

$(2)\wedge(1)\Rightarrow f: ikj-jik \ (i>j>k)$

$$g: jj_1k_1 - j_1jk_1 \ (j > j_1 > k_1)$$

$$w = ikjj_1k_1$$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ikj - jik)\,j_1k_1 - ik\,(jj_1k_1 - j_1jk_1)\\ &= ikjj_1k_1 - jikj_1k_1 - ikjj_1k_1 + ikj_1jk_1\\ &= ikjj_1k_1 - jikj_1k_1 \equiv ikjj_1k_1 - ikjj_1k_1 \equiv 0.\end{aligned}$$

$$(2)\wedge(2) \Rightarrow f: ikj - jik \ (i > j > k)$$

$$g: jk_1j_1 - j_1jk_1 \ (j > j_1 > k_1)$$

$$w = ikjk_1j_1$$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ikj - jik)\,k_1j_1 - ik\,(jk_1j_1 - j_1jk_1)\\ &= ikjk_1j_1 - jikk_1j_1 - ikjk_1j_1 + ikj_1jk_1\\ &= ikj_1jk_1 - jikk_1j_1 \equiv ikjk_1j_1 - ikjk_1j_1 \equiv 0.\end{aligned}$$

$$(2)\wedge(3) \Rightarrow f: ikj - jik \ (i > j > k)$$

$$g: jj_1j_1 - j_1jj_1 \ (j > j_1)$$

$$w = ikjj_1j_1$$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ikj - jik)\,j_1j_1 - ik\,(jj_1j_1 - j_1jj_1)\\ &= ikjj_1j_1 - jikj_1j_1 - ikjj_1j_1 + ikj_1jj_1\\ &= ikj_1jj_1 - jikj_1j_1\\ &\equiv ikjj_1j_1 - ikjj_1j_1 \equiv 0.\end{aligned}$$

$$(2)\wedge(4) \Rightarrow f: ikj - jik \ (i > j > k)$$

$$g: jjj_1 - jj_1j \ (j > j_1)$$

$$w = ikjjj_1$$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ikj - jik)\,jj_1 - ik\,(jjj_1 - jj_1j)\\ &= ikjjj_1 - jikjj_1 - ikjjj_1 + ikjj_1j\\ &= ikjj_1j - jikjj_1\\ &\equiv ikjjj_1 - ikjjj_1 \equiv 0.\end{aligned}$$

$(3)\wedge(1)\Rightarrow f: ijj-jij\ (i>j)$

$$g: jj_1k_1-j_1jk_1\ (j>j_1>k_1)\Rightarrow(i>j>j_1>k_1)$$

$w=ijjj_1k_1$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ijj-jij)\,j_1k_1-ij\,(jj_1k_1-j_1jk_1)\\ &= ijjj_1k_1-jijj_1k_1-ijjj_1k_1+ijj_1jk_1\\ &= ijj_1jk_1-jijj_1k_1\\ &\equiv ijj_1jk_1-ijj_1jk_1\equiv 0.\end{aligned}$$

$(3)\wedge(2)\Rightarrow f: ijj-jij\ (i>j)$

$$g: jk_1j_1-j_1jk_1\ \ (j>j_1>k_1)\ \ \Rightarrow(i>j>j_1>k_1)$$

$w=ijjk_1j_1$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ijj-jij)\,k_1j_1-ij\,(jk_1j_1-j_1jk_1)\\ &= ijjk_1j_1-jijk_1j_1-ijjk_1j_1+ijj_1jk_1\\ &= ijj_1jk_1-jijk_1j_1\equiv ijjk_1j_1\equiv 0.\end{aligned}$$

$(3)\wedge(3)\Rightarrow f: ijj-jij\ (i>j)$

$$g: jj_1j_1-j_1jj_1\ (j>j_1)\ \ \Rightarrow(i>j>j_1)$$

$w=ijjj_1j_1$

$$\begin{aligned}(f,g)_w &= (ijj-jij)\,j_1j_1-ij\,(jj_1j_1-j_1jj_1)\\ &= ijjj_1j_1-jijj_1j_1-ijjj_1j_1+ijj_1jj_1\\ &= ijj_1jj-jijj_1j_1\\ &\equiv ijjj_1j_1-ijjj_1j_1\equiv 0.\end{aligned}$$

$(5)\wedge(1)\Rightarrow f: ijik-ikij\ (i>j>k)$

$$g: ij_1k_1-j_1kk_1\ (k>j_1>k_1)$$

$w=ijikj_1k_1$

$$(f,g)_w=(ijik-ikij)\,j_1k_1-iji\,(kj_1k_1-j_1kk_1)$$

$$= ijikj_1k_1 - ikijj_1k_1 - ijikj_1k_1 + ijij_1kk_1$$

$$= ijij_1kk_1 - ikijj_1k_1$$

$$\equiv ijikj_1k_1 - ijikj_1k_1 \equiv 0.$$

$$(5) \wedge (4) \Longrightarrow f : ijik - ikij \;\; (i > j > k) \; (i > j > k > j_1)$$

$$g : kj_1j_1 - j_1kj_1 \;\; (k > j_1)$$

$$w = ijikkj_1$$

$$(f,g)_w = (ijik - ikij)kj_1 - iji(kkj_1 - kj_1k)$$

$$= ijikkj_1 - ikijkj_1 - ijikkj_1 + ijikj_1k$$

$$= ijikj_1k - ikijkj_1$$

$$\equiv ijikkj_1 - ijikkj_1 \equiv 0.$$

Benzer şekilde tüm kesişim bileşimleri kontrol edildiğinde tekil olduğu görülür. Birleşim bileşimi olmadığı için ispat burada tamamlanır. □

R kümesi (1)-(5) bağıntılarından oluşan bir küme olsun. Chinese monoidlerin kümesinden alınan keyfi bir u kelimesinin normal formu *C(u)* olmak üzere, 2.4.2. Teorem ve 1.2.5. Lemma (Composition- Diamond Lemma) ile bu *C(u)* normal formunun yapısı aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

2.4.3. Sonuç (Chen ve Qiu, 2008): Chinese monoidlerin her w kelimesi

$$u_n = w_1 w_2 \cdots w_n,$$

buradaki $n \geq 0$ olmak üzere tek bir temsile sahiptir. Verilen bu temsil Chinese monoid için normal formdur. □

2.4.3. Sonuç ile Chinese monoid için kelime problemi ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.4.4. Sonuç (Chen ve Qiu, 2008): Chinese monoidler için kelime problemi çözülebilirdir. □

3. BAZI KOMPLEKS YANSIMA GRUPLAR İÇİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABAN

3.1. Giriş

N dizi üzerine tanımlanan temel braid gruplar Artin tarafından 1947 yılında literatüre kazandırılmıştır (Artin, 1947). Herhangi bir Coxeter grup kompleks yansıma grubu olarak görülebilir. Uygun bir braid grubun Coxeter sunuşundaki quadratik bağıntıların göz ardı edilmesi ile bir Artin sunuşu olarak belirtilmektedir. Literatürde kompleks yansıma grupları ile ilişkili braid gruplar "olağanüstü braid gruplar" olarak da adlandırılmaktadır. (Broué ve ark., 1998) de yazarlar G_4-G_{37} arasındaki tüm olağanüstü braid gruplardan G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{31}, G_{33} ve G_{34} hariç tüm diğer gruplar için sunuş vermişlerdir. Bu 6 olağanüstü braid gruplar için ise sunuşlar ilk kez (Bessıs ve Mıchel, 2004) de verilmiştir.

1954 yılında Shephard ve Todd tüm sonlu kompleks yansıma gruplarını sınıflandırmıştır (Shephard ve Todd, 1954). Daha sonra 1976 yılında Cohen; kök sistemi, vektör grafları ve kök grafları kullanarak bu gruplar için daha sistematik bir tanım vermiştir (Cohen, 1976). 2000 yılında ise Howlett ve Shi basit kök sistemi tanımlayarak, tıpkı Coxeter gruplarda olduğu gibi üreteçler ve bağıntılar ile bir sunuşa sahip olan kompleks yansıma gruplarını oluşturmuştur (Howlett ve Shi, 2000). Daha sonra Shi G_{12}, G_{24}, G_{25} ve G_{26} kompleks yansıma grupları için bu grupların denk olmayan tüm basit kök sistemlerini elde etmiştir (Shi, 2002). Shi aynı çalışmasında bu grupların kongrüent olmayan tüm sunuşlarını vermiştir. Bu bölümde kısaca anlatılan compleks reflection gruplar ile ilgili ayrıntılı bilgiler (Cohen, 1976), (Cohen ve Sucıu, 1998), (Howlett ve Shi, 2000), (Shephard ve Todd, 1954) ve (Shi, 2002) kaynaklarında bulunabilir.

G_{24} ve G_{27} kompleks yansıma grupları ile ilişkili braid grupları için sunuş ilk kez (Bessis ve Michel, 2004) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada yazarlar sunuşları elde ederken Van Kampen metodunu uygulayan bir GAP programı olan VKCURVE paketini kullanmışlardır. Ayrıca aynı çalışmada yazarlar G_{29}, G_{31}, G_{33} ve G_{34} gruplarının sunuşları ile ilgili varsayımlarda bulunmuşlardır. Bu bölümde verilecek olan kompleks yansıma grupları için sunuşlar ve bu gruplar hakkındaki bilgilere yukarıda adı geçen kaynaklardan ulaşılabilir.

Tezin bu bölümünde yer alan 3.2.2., 3.2.3., 3.2.4., 3.3.2., 3.3.3. ve 3.3.4. teoremler tarafımızdan ispatlanmıştır.

3.2. G_{24} Kompleks Yansıma Grupları ile İlişkili Braid Grubun Kongrüans Sınıfı

Bu grup için kullanacağımız birden çok sunuş bulunmaktadır. Bir cebirsel yapı için verilen sunuşlar denklik sınıfları kullanılarak değiştirilebilmektedir. Verilen yapının her farklı sunuşu bize o yapının farklı özellikleri hakkında fikir vermektedir. (Shi, 2005)

Tezimizin bu bölümünde G_{24} grubu ve bu grubun denklik sınıfı için Gröbner-Shirshov taban bulacağız.

3.2.1. Teorem (Shi, 2005): G_{24} kompleks yansıma grupları ile ilişkili braid grubun denklik sınıfının monoid sunuşu

$$\wp'_{G_{24}} = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, s_1s_3s_1s_3 = s_3s_1s_3s_1,\ s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2, s_2s_3s_2s_3 = s_3s_2s_3s_2,$$
$$s_2s_1s_2s_3s_2s_1 = s_3s_2s_1s_2s_3s_2 \rangle$$

şeklindedir. □

G_{24} kompleks yansıma grupları ile ilişkili braid grubun kongrüans sınıfı için üreteçler arasında seçilen sıralama $s_1 > s_2 > s_3$ şeklindedir.

3.2.2. Teorem: G_{24} grubunun Gröbner-Shirshov tabanı

(1) $s_1^2 = 1$ **(2)** $s_2^2 = 1$ **(3)** $s_3^2 = 1$

(4) $s_1s_3s_1s_3 = s_3s_1s_3s_1$ **(5)** $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ **(6)** $s_2s_3s_2s_3 = s_3s_2s_3s_2$

(7) $s_2s_1s_2s_3s_2s_1 = s_3s_2s_1s_2s_3s_2$

bağıntılarından oluşmaktadır. □

İspat: Polinomlar arasında birleşim bileşimi olmadığı için kesişim bileşiminden oluşan kelimelerin tekil olduğunu göstermek ispatı tamamlayacaktır. Şimdi oluşacak kesişim bileşimlerini inceleyelim.

$(1)\wedge(1): w = s_1^3,$ $(1)\wedge(4): w = s_1^2s_3s_1s_3,$

$(2)\wedge(2): w = s_2^3,$ $(1)\wedge(5): w = s_1^2s_2s_1,$

$(3)\wedge(3): w=s_3^3,$

$(2)\wedge(6): w=s_2^2s_3s_2s_3,$

$(2)\wedge(7): w=s_2^2s_1s_2s_3s_2s_1,$

$(4)\wedge(3): w=s_1s_3s_1s_3^2,$

$(5)\wedge(1): w=s_1s_2s_1^2,$

$(5)\wedge(4): w=s_1s_2s_1s_3s_1s_3,$

$(5)\wedge(5): w=s_1s_2s_1s_2s_1,$

$(6)\wedge(3): w=s_2s_3s_2s_3^2,$

$(7)\wedge(1): w=s_2s_1s_2s_3s_2s_1^2,$

$(7)\wedge(4): w=s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_3s_1s_3,$

$(7)\wedge(5): w=s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_2s_1.$

Verilen tüm kelimeler tekildir. Bunlardan bazılarını kontrol edelim.

$(1)\wedge(4): w=s_1^2s_3s_1s_3,$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= \left(s_1^2-1\right)s_3s_1s_3 - s_1\left(s_1s_3s_1s_3 - s_3s_1s_3s_1\right)\\
&= s_1s_3s_1s_3s_1s_1 - s_3s_1s_3\\
&\equiv s_3s_1s_3s_1s_1 - s_3s_1s_3\\
&\equiv 0.
\end{aligned}
$$

$(2)\wedge(7): w=s_2^2s_1s_2s_3s_2s_1,$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= \left(s_2^2-1\right)s_1s_2s_3s_2s_1 - s_2\left(s_2s_1s_2s_3s_2s_1 - s_3s_2s_1s_2s_3s_2\right)\\
&\quad s_2s_3s_2s_1s_2s_3s_2 - s_1s_2s_3s_2s_1\\
&\equiv s_2s_3s_2s_1s_2s_3s_2s_1 - s_1s_2s_3s_2s_1s_1\\
&\equiv s_2s_3s_3s_1s_2s_3s_2 - s_1s_2s_3s_2\\
&\equiv s_1s_2s_3s_2 - s_1s_2s_3s_2\\
&\equiv 0.
\end{aligned}
$$

$(4)\wedge(3): w=s_1s_3s_1s_3^2,$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= \left(s_1s_3s_1s_3 - s_3s_1s_3s_1\right)s_3 - s_1s_3s_1\left(s_3^2-1\right)\\
&\quad s_1s_3s_1 - s_3s_1s_3s_1s_3\\
&\equiv s_1s_3s_1 - s_3s_3s_1s_3s_1\\
&\equiv 0.
\end{aligned}
$$

$(5)\wedge(4): w=s_1s_2s_1s_3s_1s_3,$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= (s_1s_2s_1 - s_2s_1s_2)s_3s_1s_3 - s_1s_2(s_1s_3s_1s_3 - s_3s_1s_3s_1) \\
&= s_1s_2s_3s_1s_3s_1 - s_2s_1s_2s_3s_1s_3 \\
&\equiv s_1s_2s_3s_1s_3s_1s_3 - s_2s_1s_2s_3s_1s_3s_3 \\
&\equiv s_1s_2s_3s_3s_1s_3s_1 - s_2s_1s_2s_3s_1 \\
&\equiv s_1s_2s_1s_3s_1 - s_2s_1s_2s_3s_1 \\
&\equiv s_2s_1s_2s_3s_1 - s_2s_1s_2s_3s_1 \\
&\equiv 0.
\end{aligned}
$$

$(7)\wedge(4): w = s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_3s_1s_3,$

$$
\begin{aligned}
(f,g)_w &= (s_2s_1s_2s_3s_2s_1 - s_3s_2s_1s_2s_3s_2)s_3s_1s_3 - s_2s_1s_2s_3s_2(s_1s_3s_1s_3 - s_3s_1s_3s_1) \\
&= s_2s_1s_2s_3s_2s_3s_1s_3s_1 - s_3s_2s_1s_2s_3s_2s_3s_1s_3 \\
&\equiv s_2s_1s_2s_3s_2s_3s_1s_3s_1 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1s_3 \\
&\equiv s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1s_3s_1s_3 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1s_3s_3 \\
&\equiv s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_3s_1s_3s_1 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1 \\
&\equiv s_2s_1s_3s_3s_2s_3s_2s_1s_3s_1 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1 \\
&\equiv s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_3s_1 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1 \\
&\equiv s_3s_2s_1s_2s_3s_2s_3s_1 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1 \\
&\equiv s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1 - s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_2s_1 \\
&\equiv 0.
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki incelemeler ışığında yapılan tüm kesişim bileşenleri tekil olacaktır. Birleşim bileşiminin olmaması ispatın tamamlanmış olduğunu gösterir. □

R kümesi (1)-(7) bağıntılarından oluşan bir küme olsun. Keyfi bir $u \in G_{24}$ kelimesinin normal formu *C(u)* olmak üzere, 3.2.2. Teorem ve 1.2.5. Lemma (Composition- Diamond Lemma) ile bu *C(u)* normal formunun yapısı aşağıdaki sonuçta verilmiş.

3.2.3. Sonuç: $u \in G_{24}$ kelimesinin normal formu *C(u)*,

$$W s_3^{\alpha} W' s_2^{\beta} W'' s_1^{\gamma} W''',$$

biçimindedir. Buradaki W, W', W'' ve W''' kelimeleri R-indirgenemez kelimelerdir ve $0 \le \alpha, \beta, \gamma < 2$ dir. □

3.2.3. Sonuç ile G_{24} kompleks yansıma grubu ile ilişkili braid grubunun kongrüans sınıfı için kelime problemi ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.4. Sonuç: G_{24} kompleks yansıma grubu ile ilişkili braid grubun kongrüans sınıfı için kelime problemi çözülebilirdir. □

3.3. G_{24} Kompleks Yansıma Grupları ile İlişkili Braid Grup

3.3.1. Teorem (Bessis ve Michel, 2004): G_{24} kompleks yansıma grubu ile ilişkili braid grubu aşağıdaki sunuşa sahiptir. □

$$\wp_{G_{24}} = \langle s,\ t,\ u;\ stst = tsts,\ susu = usus,\ tutu = utut,\ stustus = tustust = ustustu \rangle \qquad (3.1)$$

(3.1) sunuşunda verilen t üreteci ile $usts^{-1}u^{-1}$ ve $susts^{-1}u^{-1}s^{-1}$ yer değiştirildiğinde sırasıyla aşağıdaki sunuşlar elde edilir.

$$\wp_{G_{24}} = \langle s,\ t,\ u;\ sts = tst,\ tut = utu,\ susu = usus,\ sustustus = ustustust \rangle \qquad (3.2)$$

ve

$$\wp_{G_{24}} = \langle s, t, u; sts = tst, tutu = utut, susu = usus, sutsuts = usutsut \rangle . \qquad (3.3)$$

(3.3) ile verilen sunuşun

$$\wp_{G_{24}} = \left\langle \begin{array}{c} s, t, u; sts = tst, tutu = utut, susu = usus, sutsuts = usutsut, \\ ss^{-1} = s^{-1}s = 1, tt^{-1} = t^{-1}t = 1, uu^{-1} = u^{-1}u = 1 \end{array} \right\rangle$$

biçiminde monoid sunuşunu ele alalım. Üreteçlerimizi u>s>t biçiminde sıralayalım. Kelimeleri önce uzunluklarına göre (uzunluğu büyük olan kelime diğerine göre daha büyüktür), uzunlukların eşit olduğu durumda ise üreteçler arasındaki u>s>t sıralamasına göre sıralayalım.

Daha önce belirtmiş olduğumuz gibi, aşağıdaki teorem (tıpkı 3.2.2., 3.2.3., 3.2.4., 3.3.3. ve 3.3.4. numaralı sonuçlar gibi) bu tezin tarafımızdan ispatlanan orijinal sonuçlarındandır.

3.3.2. Teorem: G_{24} kompleks yansıma grubu ile ilişkili braid grubun Gröbner-Shirshov tabanı

(1) $sts = tst$, **(2)** $utut = tutu$,

(3) $usus = susu$, **(4)** $usutsut = sutsuts$,

(5) $st^{n}st = tst^{2}s^{n-1}$, **(6)** $ut^{n}utu = tutuut^{n-1}$,

(7) $us^{n}usu = susuus^{n-1}$, **(8)** $usut^{n'}st = susuts^{n'}$,

(9) $usutst^{n'}utu = sutsutsut^{n'}$,

(10) $us^{n}utsut^{m}st^{k'} = susuutst^{n-2}ut\left(ts^{m-1}\right)^{k'}$,

(11-a) $ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu = tutuut^{k-1}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_NB'_N\right)^{\lambda} sus^{d}$,

(11-b) $ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu = tutuut^{k-1}sus^{m'}\left(B'_1A'_1B'_2A'_2...B'_NA'_N\right)^{\lambda} tut^{d}$,

(11-c) $ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$

$$= tutuut^{k-1}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_NB'_N\right)^{\lambda} sus^{d-1}tsut\left(ts^{h-1}\right)^{P},$$

(11-c)* $ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$

$$= tutuut^{k-1}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_N\right)^{\lambda} sus^{d-1}tsut\left(ts^{h-1}\right)^{P},$$

(12-a) $usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu = sutsutsut^{n'}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_NB'_N\right)^{\lambda} sus^{d}$,

(12-b) $usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utu = sutsut\left(sut^{n'}\right)^{c}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_N\right)^{\lambda} tut^{d}$,

(12-c) $usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$

$$= sutsutsut^{n'}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_NB'_N\right)^{\lambda} sus^{d-1}tsut\left(ts^{h-1}\right)^{P},$$

(12-c)* $usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$

$$= sutsutsut^{n'}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_N\right)^{\lambda} sus^{d-1}tsut\left(ts^{h-1}\right)^{P},$$

(13-a) $us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$

$$= susuus^{k-1}tut^{n'}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_NB'_N\right)^{\lambda} sus^{d},$$

(13-b) $us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu = susuus^{k-1}\left(B'_1A'_1B'_2A'_2...B'_NA'_N\right)^{\lambda} tut^{d}$,

(13-c) $us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$

$$= susuus^{k-1}tut^{n'}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_NB'_N\right)^{\lambda} sus^{d-1}tsut\left(ts^{h-1}\right)^{P},$$

(13-c)* $us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$

$$= susuus^{k-1}tut^{n'}\left(A'_1B'_1A'_2B'_2...A'_N\right)^{\lambda} sus^{d-1}tsut\left(ts^{h-1}\right)^{P},$$

(14) $ss^{-1} = 1$,

(15) $s^{-1}s = 1$,

(16) $tt^{-1} = 1$,

(17) $t^{-1}t = 1$,

(18) $uu^{-1}=1$, **(19)** $u^{-1}u=1$,

bağıntılarından oluşmaktadır. Burada

$k,m,n\geq 2; m^{'}, n^{'}d, h\geq 1; k^{'}, p, c=0,1; A_i = sus^{a_i}; B_i = t^{b_i}ut;\ A_i^{'} = sus^{a_i};\ B_i^{'} = tut^{b_i}$,
$(1\leq i\leq N); \lambda = 0,1$ dir. □

İspat: Teoremde verilmiş olan (Sayı-a), (Sayı-b), (Sayı-c) gösterimleri aşağıdaki üç durum göz önünde bulundurularak sınıflandırılmıştır.

1. **(Sayı-a)** durumları için; sonları $s^{d}usu$ alt kelimesi ile biten bağıntıların sol yanlarıdır ve bu alt kelimeden önce B_N alt kelimesi yer almalıdır.

2. **(Sayı-b)** durumları için; sonları $t^{d}utu$ alt kelimesi ile biten bağıntıların sol yanlarıdır ve bu alt kelimeden önce A_N alt kelimesi yer almalıdır.

3. **(Sayı-c)** durumları için; sonları $s^{d}utsut^{h}st^{p}$ alt kelimesi ile biten bağıntıların sol yanlarıdır ve bu alt kelimeden önce A_N ya da B_N alt kelimelerinden biri yer almalıdır.

(1)-(19) bağıntıları arasındaki tüm içeren ve kesişen bileşkelerin tekil olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bu bağıntılar arasında içeren bileşkeler bulunmadığından sadece kesişen bileşkelerin tekil olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. $k,m,n\geq 2; m^{'}, n^{'}d, h\geq 1; k^{'}, p, c, \lambda = 0,1; A_i = sus^{a_i}; B_i = t^{b_i}ut; B_i^{'} = tut^{b_i}$ $(1\leq i\leq N)$ olmak üzere; öncelikle (1) bağıntısı ile diğer tüm bağıntıların kesişim bileşkelerinden oluşan belirsizlikleri düşünelim. Bu belirsizlikler;

$(1)\wedge(1): w = ststs$, $(1)\wedge(5): w = sts^{n}st$,

$(1)\wedge(14): w = stss^{-1}$, $(5)\wedge(1): w = st^{n}sts$,

$(8)\wedge(1): w = usut^{n^{'}}sts$, $(10)\wedge(1): w = us^{n}utsut^{m}sts$,

$(11-c)\wedge(1): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}sts$,

$(11-c)^{*}\wedge(1): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}sts$,

$(12-c)\wedge(1): w = usutst^{n^{'}}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}sts$,

$(12-c)^{*}\wedge(1): w = usutst^{n^{'}}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}sts$,

$(13-c)\wedge(1): w = us^{k}ust^{n^{'}}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}sts$,

$(13-c)^{*}\wedge(1): w = us^{k}ust^{n^{'}}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}sts$,

$(15)\wedge(1): w = s^{-1}sts$

biçimindedir.

(2) ile (2)-(19) arasındaki bağıntılardan elde edilen belirsizlikler ise;

$(2)\wedge(2): w = ututut$, $(2)\wedge(6): w = utut^{n}utu$,

$(2)\wedge(16): w = ututt^{-1}$,

$(2)\wedge(11-a): w = utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(2)\wedge(11-b): w = utut^{k}uts^{m'}us\left(A_1B_1A_2B_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(2)\wedge(11-c): w = utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(2)\wedge(11-c)^{*}: w = utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(4)\wedge(2): w = usutsutut$, $(6)\wedge(2): w = ut^{n}ututut$,

$(6)\wedge(2): w = ut^{n}utut$, $(9)\wedge(2): w = usutst^{n'}ututut$,

$(11-a)\wedge(2): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutut$,

$(11-b)\wedge(2): w = ut^{k}uts^{m'}us\left(A_1B_1A_2B_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut$,

$(11-b)\wedge(2): w = ut^{k}uts^{m'}us\left(A_1B_1A_2B_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}ututut$,

$(12-a)\wedge(2): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutut$,

$(12-b)\wedge(2): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utut$,

$(13-a)\wedge(2): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutut$,

$(13-b)\wedge(2): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut$,

$(13-b)\wedge(2): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}ututut$,

$(19)\wedge(2): w = u^{-1}utut$

biçimindedir.

(3) ile diğer bağıntıların kesişmesi durumunda;

$(3)\wedge(3): w = ususus$, $(3)\wedge(4): w = ususutsut$,

$(3)\wedge(7): w = usus^{n}usu$, $(3)\wedge(9): w = ususutst^{n'}utu$,

$(3)\wedge(8): w = ususut^{n}st$, $(3)\wedge(10): w = usus^{n}utsut^{m}st^{p}$,

$(3)\wedge(12-a): w = ususutst^{n'}\,\mathrm{ut}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(3)\wedge(12-b): w = ususutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(3)\wedge(12-c): w = ususutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^{d}\, utsut^{h}st^{p}$,

$(3)\wedge(12-c)^*: w = ususutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h st^p,$

$(3)\wedge(13-a): w = usus^k ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h st^p,$

$(3)\wedge(13-b): w = usus^k us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utu,$

$(3)\wedge(13-c): w = usus^k ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, utsut^h st^p,$

$(3)\wedge(13-c)^*: w = usus^k ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h st^p,$

$(3)\wedge(14): w = ususs^{-1},$ $\qquad$ $(6)\wedge(3): w = ut^{n}utusus,$

$(7)\wedge(3): w = us^{n}ususus,$ $\qquad$ $(9)\wedge(3): w = usutst^{n'}utusus,$

$(11-a)\wedge(3): w = ut^k ut\ \left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, usus,$

$(11-a)\wedge(3): w = ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d usus,$

$(11-b)\wedge(3): w = ut^k uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utusus,$

$(12-a)\wedge(3): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, usus,$

$(12-a)\wedge(3): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, ususus,$

$(12-b)\wedge(3): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^c\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, utusus,$

$(13-a)\wedge(3): w = us^k ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, usus,$

$(13-a)\wedge(3): w = us^k ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} \mathrm{s}^d\, ususus,$

$(13-b)\wedge(3): w = us^k us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utusus,$

$(19)\wedge(3): w = u^{-1}usus$

belirsizlikleri elde edilir.

(4) bağıntısının diğer bağıntılarla oluşturacağı kesişim bileşkeleri ise;

$(4)\wedge(6): w = usutsut^{n}utu,$

$(4)\wedge(11-a): w = usutsut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d usu,$

$(4)\wedge(11-b): w = usutsut^k uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utu,$

$(4)\wedge(11-c): w = usutsut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h st^p,$

$(4)\wedge(11-c)^*: w = usutsut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h st^p,$

$(4)\wedge(16): w = usutsutt^{-1},$

$(6)\wedge(4): w = ut^{n}$ utusutsut, $(7)\wedge(4): w = us^{n}ususutsut,$

$(7)\wedge(4): w = us^{n}usutsut,$ $(9)\wedge(4): w = usutst^{n'}utusutsut,$

$(11-a)\wedge(4): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d} usutsut,$

$(11-a)\wedge(4): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutsut,$

$(11-b)\wedge(4): w = ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutsut,$

$(12-a)\wedge(4): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutsut,$

$(12-a)\wedge(4): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d} ususutsut,$

$(12-b)\wedge(4): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutsut,$

$(13-a)\wedge(4): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutsut,$

$(13-a)\wedge(4): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutsut,$

$(13-b)\wedge(4): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutsut,$

$(19)\wedge(4): w = u^{-1}usutsut$

biçimindedir.

(5) ve (5)-(19) arasındaki bağıntıların kesişimlerinden aşağıdaki belirsizlikler elde edilir.

$(5)\wedge(5): w = st^{n}st^{m}st,$ $(5)\wedge(16): w = st^{n}stt^{-1},$

$(8)\wedge(5): w = usut^{n'}st^{m}st,$ $(10)\wedge(5): w = us^{n}utsut^{m}st^{k}st,$

$(11-c)\wedge(5): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{n}st,$

$(11-c)^{*}\wedge(5): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{n}st,$

$(12-c)\wedge(5): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{m}st,$

$(12-c)^{*}\wedge(5): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{m}st,$

$(13-c)\wedge(5): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{m}st,$

$(13-c)^{*}\wedge(5): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{m}st,$

$(15)\wedge(5): w = s^{-1}st^{n}st.$

(6) bağıntısı ve diğer bağıntılar arasındaki belirsizlikler ise;

$(6)\wedge(6): w = ut^{n}utut^{m}utu,$ $(6)\wedge(7): w = ut^{n}utut^{m}usu,$

$(6)\wedge(8): w = ut^{n}utusut^{m'}st$, $(6)\wedge(9): w = ut^{n}utusutst^{m'}utu$,

$(6)\wedge(10): w = ut^{n}utus^{m}utsut^{k}st^{p}$,

$(6)\wedge(11-a): w = ut^{n}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(6)\wedge(11-b): w = ut^{n}utut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(6)\wedge(11-c): w = ut^{n}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(6)\wedge(11-c)^{*}: w = ut^{n}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(6)\wedge(12-a): w = ut^{n}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(6)\wedge(12-b): w = ut^{n}utusuts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(6)\wedge(12-c): w = ut^{n}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(6)\wedge(12-c)^{*}: w = ut^{n}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(6)\wedge(13-a): w = ut^{n}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(6)\wedge(13-b): w = ut^{n}utus^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(6)\wedge(13-c): w = ut^{n}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(6)\wedge(13-c)^{*}: w = ut^{n}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(6)\wedge(18): w = ut^{n}utuu^{-1}$, $(7)\wedge(6): w = us^{n}usut^{m}utu$,

$(9)\wedge(6): w = usutst^{n'}utut^{m}utu$,

$(11-a)\wedge(6): w = ut^{k}ut\left(A_1B_2A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usut^{n}utu$,

$(11-b)\wedge(6): w = ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{n}utu$,

$(19)\wedge(6): w = u^{-1}ut^{n}utu$

biçimindedir.

Şimdi ise (7) ve diğer bağıntıların kesişimlerinden elde edilen belirsizlikleri verelim.

$(7)\wedge(7): w = us^{n}usus^{m}usu$, $(7)\wedge(8): w = us^{n}usut^{m'}st$,

$(7)\wedge(8): w = us^{n}ususut^{m'}st$ $(7)\wedge(9): w = us^{n}usutst^{m'}utu$,

$(7)\wedge(9): w = us^{n}ususutst^{m'}utu$, $(7)\wedge(10): w = us^{n}usus^{k}utsut^{m}st^{p}$,

$(7)\wedge(11-a): w = us^{n}usut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(7)\wedge(11-b): w = us^{n}usut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(7)\wedge(11-c): w = us^{n}usut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$,

$(7)\wedge(11-c)^{*}: w = us^{n}usut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{P}$,

$(7)\wedge(12-a): w = us^{n}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(7)\wedge(12-a): w = us^{n}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(7)\wedge(12-b): w = us^{n}ususuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(7)\wedge(12-b): w = us^{n}usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(7)\wedge(12-c): w = us^{n}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(7)\wedge(12-c)^{*}: w = us^{n}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(7)\wedge(12-c): w = us^{n}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(7)\wedge(12-c)^{*}: w = us^{n}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(7)\wedge(13-a): w = us^{n}usus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usu$,

$(7)\wedge(13-b): w = us^{n}usus^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utu$,

$(7)\wedge(13-c): w = us^{n}usus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(7)\wedge(13-c)^{*}: w = us^{n}usus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(7)\wedge(18): w = us^{n}usuu^{-1}$,

$(9)\wedge(7): w = usutst^{n'}utus^{m}usu$,

$(11-a)\wedge(7): w = ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{n}usu$,

$(11-b)\wedge(7): w = ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{n}usu$,

$(12-a)\wedge(7): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{m}usu$,

$(12-b)\wedge(7): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{m}usu$,

$(13-a)\wedge(7): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{m}usu$,

$(13-b)\wedge(7): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{m}usu$,

$(19)\wedge(7): w = u^{-1}us^{n}usu$

biçimindedir.

(8) ve diğer bağıntılar arasındaki kesişim bileşkeleri;

$(8)\wedge(16): w=usut^{n'}stt^{-1}$, $(9)\wedge(8): w=usutst^{n}utusut^{m'}st$,

$(11-a)\wedge(8): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{n'}st$,

$(11-a)\wedge(8): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususut^{n'}st$,

$(11-b)\wedge(8): w=ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utusut^{n'}st$,

$(12-a)\wedge(8): w=usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{m'}st$,

$(12-a)\wedge(8): w=usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususut^{m'}st$,

$(12-b)\wedge(8): w=usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}t^{d}utusut^{m'}st$,

$(13-a)\wedge(8): w=us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{m'}st$,

$(13-a)\wedge(8): w=us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususut^{m'}st$,

$(13-b)\wedge(8): w=us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utusut^{m'}st$,

$(19)\wedge(8): w=u^{-1}usut^{n'}st$

biçimindedir.

(9) ile (9)-(19) bağıntılarının kesişimlerinden elde edilen belirsizlikler ise aşağıdaki gibidir.

$(9)\wedge(9): w=usutst^{n'}utusutst^{m'}utu$, $(9)\wedge(10): w=usutst^{n'}utus^{k}utsut^{m}st^{p}$,

$(9)\wedge(11-a): w=usutst^{n'}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$,

$(9)\wedge(11-b): w=usutst^{n'}utut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utu$,

$(9)\wedge(11-c): w=usutst^{n'}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(9)\wedge(11-c)^{*}: w=usutst^{n'}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(9)\wedge(12-a): w=usutst^{n'}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$,

$(9)\wedge(12-b): w=usutst^{n'}utusuts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}t^{d}utu$,

$(9)\wedge(12-c): w=usutst^{n'}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(9)\wedge(12-c)^{*}: w=usutst^{n'}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(9)\wedge(13-a): w=usutst^{n'}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$,

$(9)\wedge(13-b): w=usutst^{n'}utus^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utu$,

$(9)\wedge(13-c): w=usutst^{n'}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(9)\wedge(13-c)^{*}: w=usutst^{n'}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}st^{p}$,

$(9)\wedge(18): w=usutst^{n'}utuu^{-1}$,

$(11-a)\wedge(9): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usutst^{n'}utu$,

$(11-a)\wedge(9): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususutst^{n'}utu$,

$(11-b)\wedge(9): w=ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utusutst^{n'}utu$,

$(12-a)\wedge(9): w=usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususutst^{m'}utu$,

$(12-a)\wedge(9): w=usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usutst^{m'}utu$,

$(12-b)\wedge(9): w=usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}t^{d}utusutst^{m'}utu$,

$(13-a)\wedge(9): w=us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususutst^{m'}utu$,

$(13-a)\wedge(9): w=us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usutst^{m'}utu$,

$(13-b)\wedge(9): w=us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utusutst^{m'}utu$,

$(19)\wedge(9): w=u^{-1}usutst^{n'}utu$

biçimindedir.

(10) ile diğer bağıntılar arasındaki kesişim bileşkelerinden elde edilen belirsizlikler;

$(10)\wedge(14): w=us^{n}utsut^{m}ss^{-1}$, $(10)\wedge(16): w=us^{n}utsut^{m}stt^{-1}$,

$(11-a)\wedge(10): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}utsut^{n}st^{p}$,

$(11-b)\wedge(10): w=ut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utus^{n}utsut^{m}st^{p}$,

$(12-a)\wedge(10): w=usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}utsut^{n}st^{p}$,

$(12-b)\wedge(10): w=usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}t^{d}utus^{m}utsut^{n}st^{p}$,

$(13-a)\wedge(10): w=us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}utsut^{n}st^{p}$,

$(13-b)\wedge(10): w=us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{d}utus^{m}utsut^{n}st^{p}$,

$(19)\wedge(10): w=u^{-1}us^{n}utsut^{m}st^{k'}$

biçimindedir.

Şimdi $(11-a)$, $(11-b)$, $(11-c)$, $(11-c)^{*}$, $(12-a)$, $(12-b)$, $(12-c)$, $(12-c)^{*}$, $(13-a)$, $(13-b)$, $(13-c)$, $(13-c)^{*}$ bağıntılarının kendi aralarındaki ve (15)-(19) bağıntıları ile olan kesişim bileşkelerinden oluşan belirsizlikleri verelim.

$$(11-a)\wedge(11-a): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{n'}usu,$$

$$(11-a)\wedge(11-b): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{m}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{n'}utu,$$

$$(11-a)\wedge(11-c): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(11-c)^{*}: w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(12-a): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}usu,$$

$$(11-a)\wedge(12-a): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}usu,$$

$$(11-a)\wedge(12-b): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}t^{m'}utu,$$

$$(11-a)\wedge(12-b): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}t^{m'}utu,$$

$$(11-a)\wedge(12-c): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(12-c)^{*}: w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(12-c): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(12-c)^{*}: w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}ususutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(13-a): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}usu,$$

$$(11-a)\wedge(13-b): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda}t^{n'}utu,$$

$$(11-a)\wedge(13-c): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(13-c)^{*}: w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usus^{m}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda}s^{m'}utsut^{h}st^{p},$$

$$(11-a)\wedge(18): w=ut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usuu^{-1},$$

$$(11-b)\wedge(11-a): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utut^m ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{n'} usu,$$

$$(11-b)\wedge(11-b): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utut^m uts^{n'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^h utu,$$

$$(11-b)\wedge(11-c): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utut^m ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{n'} utsut^h st^P,$$

$$(11-b)\wedge(11-c)^*: w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utut^m ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{n'} utsut^h st^P,$$

$$(11-b)\wedge(12-a): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utusutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^h usu,$$

$$(11-b)\wedge(12-b): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utusuts\left(t^{n'} ut\right)^c \left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^h utu,$$

$$(11-b)\wedge(12-c): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utusutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^q utsut^h st^p,$$

$$(11-b)\wedge(12-c)^*: w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utusutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^q utsut^h st^p,$$

$$(11-b)\wedge(13-a): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utus^m ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^h usu,$$

$$(11-b)\wedge(13-b): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utus^m us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{n'} utu,$$

$$(11-b)\wedge(13-c): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utus^m ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^q utsut^h st^p,$$

$$(11-b)\wedge(13-c)^*: w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utus^m ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^q utsut^h st^p,$$

$$(11-b)\wedge(18): w = ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d utuu^{-1},$$

$$(11-c)\wedge(14): w = ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h ss^{-1},$$

$$(11-c)^*\wedge(14): w = ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h ss^{-1},$$

$$(11-c)\wedge(16): w = ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h stt^{-1},$$

$$(11-c)^*\wedge(16): w = ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h stt^{-1},$$

$$(12-a)\wedge(11-a): w = usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d usut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{m'} usu,$$

$$(12-a)\wedge(11-b): w = usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d usut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^h utu,$$

$$(12-a)\wedge(11-c): w = usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d usut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{m'} utsut^h st^P,$$

$$(12-a)\wedge(11-c)^*: w = usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d usut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{m'} utsut^h st^P,$$

$$(12-a)\wedge(12-a): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(12-a)\wedge(12-a): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(12-a)\wedge(12-b): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usuts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(12-a)\wedge(12-b): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususuts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(12-a)\wedge(12-c): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-a)\wedge(12-c)^{*}: w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-a)\wedge(12-c): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-a)\wedge(12-c)^{*}: w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-a)\wedge(13-a): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(12-a)\wedge(13-b): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^{\lambda} t^{m'}utu,$$

$$(12-a)\wedge(13-c): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-a)\wedge(13-c): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-a)\wedge(18): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usuu^{-1},$$

$$(12-b)\wedge(11-a): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(12-b)\wedge(11-b): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{k}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(12-b)\wedge(11-c): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-b)\wedge(11-c)^{*}: w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{k}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-b)\wedge(12-a): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(12-b)\wedge(12-b): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{d}utusuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(12-b)\wedge(12-c): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-b)\wedge(12-c)^{*}: w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-b)\wedge(13-a): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(12-b)\wedge(13-b): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{q}utu,$$

$$(12-b)\wedge(13-c): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-b)\wedge(13-c)^{*}: w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{k}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$$(12-b)\wedge(18): w = usuts\left(t^{n'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{d}utuu^{-1},$$

$$(12-c)\wedge(14): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}ss^{-1},$$

$$(12-c)^{*}\wedge(14): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}ss^{-1},$$

$$(12-c)\wedge(16): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}stt^{-1},$$

$$(12-c)^{*}\wedge(16): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{d}utsut^{h}stt^{-1},$$

$$(13-a)\wedge(11-a): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{m'}usu,$$

$$(13-a)\wedge(11-b): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usut^{m}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(13-a)\wedge(11-c): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{P},$$

$$(13-a)\wedge(11-c)^{*}: w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{P},$$

$$(13-a)\wedge(12-a): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(13-a)\wedge(12-a): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$$

$$(13-a)\wedge(12-b): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usuts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(13-a)\wedge(12-b): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usususts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$$

$$(13-a)\wedge(12-c): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$$

$(13-a)\wedge(12-c)^{*}: w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-a)\wedge(12-c): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-a)\wedge(12-c)^{*}: w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}ususutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-a)\wedge(13-a): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{m}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$

$(13-a)\wedge(13-b): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{m}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$

$(13-a)\wedge(13-c): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{m}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-a)\wedge(13-c)^{*}: w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usus^{m}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-a)\wedge(18): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{d}usuu^{-1},$

$(13-b)\wedge(11-a): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{m'}usu,$

$(13-b)\wedge(11-b): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{m}uts^{m'}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$

$(13-b)\wedge(11-c): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-b)\wedge(11-c)^{*}: w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utut^{m}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-b)\wedge(12-a): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$

$(13-b)\wedge(12-b): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utusuts\left(t^{m'}ut\right)^{c}\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$

$(13-b)\wedge(12-c): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-b)\wedge(12-c)^{*}: w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utusutst^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-b)\wedge(13-a): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{m}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{h}usu,$

$(13-b)\wedge(13-b): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{m}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{h}utu,$

$(13-b)\wedge(13-c): w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{m}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-b)\wedge(13-c)^{*}: w = us^{k}us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^{d}utus^{m}ust^{m'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_N\right)^{\lambda} s^{q}utsut^{h}st^{p},$

$(13-b)\wedge(18): w = us^k us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^\lambda t^d utuu^{-1},$

$(13-c)\wedge(14): w = us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d utsut^h ss^{-1},$

$(13-c)^*\wedge(14): w = us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^\lambda s^d utsut^h ss^{-1},$

$(13-c)\wedge(16): w = us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d utsut^h stt^{-1},$

$(13-c)^*\wedge(16): w = us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^\lambda s^d utsut^h stt^{-1},$

$(19)\wedge(11-a): w = u^{-1}ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d usu,$

$(19)\wedge(11-b): w = u^{-1}ut^k uts^{m'} us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^\lambda t^d utu,$

$(19)\wedge(11-c): w = u^{-1}ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d utsut^h st^p,$

$(19)\wedge(11-c)^*: w = u^{-1}ut^k ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^\lambda s^d utsut^h st^p,$

$(19)\wedge(12-a): w = u^{-1}usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d usu,$

$(19)\wedge(12-b): w = u^{-1}usuts\left(t^{n'} ut\right)^c \left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^\lambda t^d utu,$

$(19)\wedge(12-c): w = u^{-1}usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d utsut^h st^p,$

$(19)\wedge(12-c)^*: w = u^{-1}usutst^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^\lambda s^d utsut^h st^p,$

$(19)\wedge(13-a): w = u^{-1}us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d usu,$

$(19)\wedge(13-b): w = u^{-1}us^k us\left(B_1A_1B_2A_2\ldots B_NA_N\right)^\lambda t^d utu,$

$(19)\wedge(13-c): w = u^{-1}us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_NB_N\right)^\lambda s^d utsut^h st^p,$

$(19)\wedge(13-c)^*: w = u^{-1}us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2\ldots A_N\right)^\lambda s^d utsut^h st^p.$

Son olarak (15)-(19) arasındaki bağıntıların kendi aralarındaki kesişimlerinden elde edilen belirsizlikleri verelim.

$(14)\wedge(15): w = ss^{-1}s,$ $\qquad$ $(15)\wedge(14): w = s^{-1}ss^{-1},$

$(16)\wedge(17): w = tt^{-1}t,$ $\qquad$ $(17)\wedge(16): w = t^{-1}tt^{-1},$

$(18)\wedge(19): w = uu^{-1}u,$ $\qquad$ $(19)\wedge(18): w = u^{-1}uu^{-1}.$

(1)-(19) arasındaki bağıntıların yukarıda elde edilen mümkün olan tüm kesişim bileşkeleri tekildir. Bunlardan bazılarını aşağıda gösterelim.

$(9)\wedge(2): w = usutst^{n'}utut,$

$$(f,g)_w = \left(usutst^{n'}utu - sutsutsut^{n'}\right)t - usutst^{n'}\left(utut - tutu\right)$$

$$= usutst^{n'}utut - sutsutsut^{n'}t - usutst^{n'}utut + usutst^{n'}tutu$$

$$= usutst^{n'}tutu - sutsutsut^{n'}t$$

$$\equiv sutsutsut^{n'+1} - sutsutsut^{n'+1} \equiv 0 .$$

Bir başka örnek olarak $(13-b)\wedge(2)$ kesişim bileşkesini düşünelim.

$(13-b)\wedge(2): w = us^k us\left(B_1A_1B_2A_2...B_NA_N\right)^{\lambda} t^d ututut$,

$\underline{\lambda=1}$ için; $(f,g)_w = \left(us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d utu - susuus^{k-1}B_1^{'}A_1^{'}B_2^{'}A_2^{'}...B_N^{'}A_N^{'}tut^d\right)tut$

$$-us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d ut\left(utut - tutu\right)$$

$$= us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d ututut - susuus^{k-1}B_1^{'}A_1^{'}B_2^{'}A_2^{'}...B_N^{'}A_N^{'}tut^d tut$$

$$-us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d ututut + us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d uttutu$$

$$= us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d ututut - susuus^{k-1}B_1^{'}A_1^{'}B_2^{'}A_2^{'}...B_N^{'}A_N^{'}tut^d tut$$

$$\equiv us^k usB_1A_1B_2A_2...B_NA_Nt^d ututut - susuus^{k-1}B_1^{'}A_1^{'}B_2^{'}A_2^{'}...B_N^{'}A_N^{'}tut^{d+1}ut$$

$$\equiv susuus^{k-1}B_1^{'}A_1^{'}B_2^{'}A_2^{'}...B_N^{'}A_N^{'}tut^{d+1}ut - susuus^{k-1}B_1^{'}A_1^{'}B_2^{'}A_2^{'}...B_N^{'}A_N^{'}tut^{d+1}ut \equiv 0.$$

elde edilir.

$(12-a)\wedge(4): w = usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d ususutsut$,

$\underline{\lambda=1}$ için; $w = usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^d ususutsut$ elde edilir. $(f,g)_w = (usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^d usu$

$$-sutsutsut^{n'}sus^{a_1}tut^{b_1}sus^{a_2}tut^{b_2}...sus^{a_N}tut^{b_N}sus^d)sutsut$$

$$-usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^d us\left(usutsut - sutsuts\right)$$

$$= usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}ust^d ususutsut$$

$$-sutsutsut^{n'}sus^{a_1}tut^{b_1}sus^{a_2}tut^{b_2}...sus^{a_N}ust^{b_N}sus^d sutsut$$

$$-usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^d ususutsut$$

$$+usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^d ususutsuts$$

$$= usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^d ususutsuts$$

$$-sutsutsut^{n'}sus^{a_1}tut^{b_1}sus^{a_2}tut^{b_2}...sus^{a_N}ust^{b_N}sus^d sutsut$$

$$\equiv usutst^{n'}uts^{a_1}ust^{b_1}ust^{a_2}ust^{b_2}ut...s^{a_N}ust^{b_N}uts^{d}susuutsut$$

$$-sutsutsut^{n'}sus^{a_1}tut^{b_1}sus^{a_2}tut^{b_2}...sus^{a_N}tut^{b_N}sus^{d+1}utsut$$

$$\equiv sutsutsut^{n'}sus^{a_1}tut^{b_1}sus^{a_2}tut^{b_2}...sus^{a_N}tut^{b_N}sus^{d+1}utsut$$

$$-sutsutsut^{n'}sus^{a_1}tut^{b_1}sus^{a_2}tut^{b_2}...sus^{a_N}tut^{b_N}sus^{d+1}utsut \equiv 0.$$

elde edilir. Bir başka örnek olarak $(7)\wedge(3)$ kesişim bileşkesini düşünelim. Bu durumda

$(7)\wedge(3): w = us^{n}usus,$

$$(f,g)_w = \left(us^{n}usu - susuus^{n-1}\right)s - us^{n}\left(usus - susu\right)$$

$$= us^{n}usus - susuus^{n-1}s - us^{n}usus + us^{n}susu$$

$$= us^{n}susu - susuus^{n-1}s \equiv us^{n+1}usu - susuus^{n}$$

$$\equiv susuus^{n} - susuus^{n} \equiv 0.$$

elde edilir. Şimdi ise aşağıdaki örneği inceleyelim.

$(19)\wedge(8): w = u^{-1}usut^{n'}st,$

$$(f,g)_w = \left(u^{-1}u-1\right)sut^{n'}st - u^{-1}\left(usut^{n'}st - susuts^{n'}\right)$$

$$= u^{-1}usut^{n'}st - sut^{n'}st - u^{-1}usut^{n'}st + u^{-1}susuts^{n'}$$

$$= u^{-1}susuts^{n'} - sut^{n'}st$$

$$\equiv uu^{-1}susuts^{n'} - usut^{n'}st \equiv 0.$$

elde edilir.

$(19)\wedge(12-a): w = u^{-1}usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu,$

$$(f,g)_w = \left(u^{-1}u-1\right)sutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$$

$$-u^{-1}\left(usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu - sutsutsut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}sus^{d}\right)$$

$$= u^{-1}usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu - sutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$$

$$-u^{-1}usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu + u^{-1}sutsutsut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}sus^{d}$$

$$= u^{-1}sutsutsut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}sus^{d} - sutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$$

$$\equiv uu^{-1}sutsutsut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}sus^{d} - usutst^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}usu$$

$$\equiv 0.$$

elde edilir. Son olarak aşağıdaki kesişim bileşimini inceleyelim.

$(13-c)\wedge(16): w = us^{k}ust^{n'}ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda}s^{d}utsut^{h}stt^{-1},$

$$(f,g)_w = \left(us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h st - susuus^{k-1} tut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} sus^{d-1} tsutts^{h-1}\right)t^{-1}$$

$$-us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h s\left(tt^{-1}-1\right)$$

$$= us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} s^d utsut^h s$$

$$-susuus^{k-1} tut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} sus^{d-1} tsutts^{h-1} t^{-1}$$

$$\equiv us^k ust^{n'} ut\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} utsut^h st$$

$$-susuus^{k-1} tut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} sus^{d-1} tsutts^{h-1} t^{-1} t$$

$$\equiv susuus^{k-1} tut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} sus^{d-1} tsutts^{h-1}$$

$$-susuus^{k-1} tut^{n'}\left(A_1B_1A_2B_2...A_NB_N\right)^{\lambda} sus^{d-1} tsutts^{h-1} t^{-1} t$$

$$\equiv 0.$$

elde edilir. □

R kümesi (1)-(19) bağıntılarından oluşan bir küme olsun. Keyfi bir $u \in G_{24}$ kelimesinin normal formu *C(u)* olmak üzere, 3.3.2. Teorem ve 1.2.5. Lemma (Composition-Diamond Lemma) ile bu *C(u)* normal formunun yapısı aşağıdaki sonuçta verilmiş.

3.3.3. Sonuç: $u \in G_{24}$ kelimesinin normal formu *C(u)*,

$$Wt^{\alpha_1}u^{\alpha_2}t^{\alpha_3}W' s^{\varepsilon_1}u^{\varepsilon_2}s^{\varepsilon_3}W''$$

biçimindedir. Buradaki W, W', W'' kelimeleri R-indirgenemez kelimelerdir ve $1 \le i \le 3$ için $0 \le \alpha_i, \varepsilon_i \le n$, $n \in \mathbb{N}$ dir. □

3.3.3. Sonuç ile G_{24} kompleks yansıma grubu ile ilişkili braid grubunun kelime problemi ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.4. Sonuç: G_{24} kompleks yansıma grubu ile ilişkili braid grubun kelime problemi çözülebilirdir. □

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Tez dört ana bölüm altında toplanmış olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin ilk bölümünde grup ve monoid ile ilgili genel tanımlar ve teoremler verilmiş, Gröbner-Shirshov metodu ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son yıllarda oldukça geniş bir çalışma alanına sahip olan bu metotla ilgili yapılan bazı önemli çalışmalar listelenmiştir.

İkinci bölümde bilinen yapılan üzerinde Gröbner-Shirshov tabanlar incelenmiş bunun bir sonucu olarak kelime probleminin çözülebilirliği ile ilgili sonuçlar açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde ise literatürde olağanüstü braid gruplar olarak da incelenen kompleks yansıma grupları için tanımlar ve sunuşları verilmiştir. Orijinal bir sonuç olarak verilen bu bölümde kompleks yansıma gruplarından G_{24} için Gröbner-Shirshov taban bulunarak kelime problemi çözülebilirliği ile ilgili sonuç açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

Adian S. I., 1966, Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups, *Proc. Steklov Inst. Math,* 85, 1-152.

Adian S. I., Durnev V. G., 2000, Decision problems for groups and semigroups, *Russian Math. Surveys,* 55(2), 207-296.

Artin E., 1947, Theory of braids, *Ann. of Math.*, 48(2), 101-126.

Ateş, F., Karpuz Güzel, E., Kocapınar, C., Çevik, A.S., 2011, Gröbner-Shirshov bases of some monoid, *Discrete mathematics,* 311 (12), 1064-1071.

Baumslag, G., 1993, Topics in combinatorial group theory, Birkhäuser, Basel.

Bergman, G. M., 1978, The diamond lemma for ring theory, *Adv. Math.*, 29, 178-218.

Bessis D., Michel J., 2004, Explicit presentations for exceptional braid groups, *Experimental Mathematics,* 13(3), 257-266.

Bokut., L. A., 1976, *Imbeddings into simple associative algebras, Algebra in Logic.,* 15, 117-142.

Bokut, L. A., 2008,Gröbner-Shirshov basis for the Braid group in Artin-Garside generators, *J. Symbolic Computation.,* 43, 397-405.

Bokut, L. A., 2009,Gröbner-Shirshov basis for the Braid group in the Birman-Ko-Lee generators, J. Algebra, 321, 361-376.

Bokut, L. A., Chen, Y. Q., Zhao, X. G., 2009, Gröbner-Shirshov bases for free inverse semigroups, *Internat. J. Algebra Comput.,* 19, 129-143.

Broué M., Malle G., Rouquier R., 1998, Complex reflection groups, braid groups, hecke algebras, *J. reine angew. Math.,* 500, 127-190.

Buchberger, B., 1965, An Algorithm for Finding a Basis for the Residue Class Ring of a Zero- Dimensional Ideal, Ph.D. Thesis, University of Innsbruck.

Chen, Y.Q., 2008, Gröbner-Shirshov basis for Schreier extensions of groups, *Commun. Algebra,* 36, 1609-1625.

Chen, Y.Q., Qui, J.J, 2008, Gröbner-Shirshov basis for the Chinese monoid, *Journal of Algebra and Its Appl.,* 7(5), 623-628.

Chen, Y.Q., Zhong, C.Y., 2008, Gröbner-Shirshov bases for HNN extentions of groups and for the Alternating group, *Comm. in Algebra*, 36, 94-103.

Chen, Y. Q., Zhong. C.Y., 2011, Gröbner-Shirshov basis for some one-relator groups, *Algebra Colloq.,* 19, 99-116.

Chen, Y. Q., Zhong. C.Y., 2013, Gröbner-Shirshov basis for braid groups in Adjan-Thurston generators, *Algebra Colloq.,* 20, 309-318.

Cohen D. C., Suciu A. I., 1998, Homology of iterated semidirect product of free groups, *J. Pure and Applied Algebra*, 126, 87-120.

Cohen A. M., 1976, Finite Complex Reflection Groups, *Ann Scient. Ec.Norm. Sup.*, (4) 9, 379-436.

Cohen, D. E., 1989, Combinatorial group theory, topological approach, Cambridge University. Press.

Çevik, A. S., 2010, Cebire Giriş, *Nobel yayıncılık ve Dağıtım.*

Güzel, E. 2006, "Grup ve Monoid Cebirsel Yapısında Karar Verme Problemleri", Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.*

Güzel, E. 2009, "Geometrik Metotlar Altında Kelime Problemi ve Sonuçları", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.*

Howlett R. B., Shi J. Y., 2000, On regularity of finite reflection groups, *Manuscripta Mathematica*, 102(3), 325-333.

Howie, John M., Ruskuc, N., 1994, Constructions and Presentations for Monoids, *Communications in Algebra*, 22 (15), 6209-6224.

Karpuz Güzel E., 2015, Gröbner-Shirshov bases of some semigroup constructions, *Algebra Colloquium,* 22(1), 35-46.

Kocapinar, C., Karpuz Güzel, E., Ateş, F., Çevik, A. S., 2012, Gröbner-Shirshov bases of the generalized Bruck-Reilly extension, Algebra Colloquium, 19 (Spec 1), 813-820.

Lyndon, R. C., Schupp, P. E., 1977, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag.

Rotman, J. J., 1988, An Introduction to the Theory of groups, *Wm. C. Brown Publishers*, Third Edition, Lowa.

Ruscuc, N., 1999, Presentations for subgroups of monoids, *Journal of Algebra,* 220, 365-380.

Shephard G.C., Todd J.A., 1954, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math*, 6, 274-304.

Shi J.Y., 2002, Certain imprimitive reflection groups and their generic versions, *Trans. Am. Math. Soc.,* 354, 2115-2129.

Shi, J-Y., 2005, Simple root systems and presentations for certain complex reflection grup, *Communication in Algebra*, 33 (6) 1765-1783.

Shirshov, A.I.,1962, Some algorithmic problems for Lie algebras, *Siberian Math. J.*, 3, 292-296.

Shirshov, A. I., 1999, Certain algorithmic problem for Lie algebras, *Sibirsk. Mat. Z.,* 3 (1962) 292-296 (in Russian); English translation in SIGSAM Bull. 33(2) 3-6.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Nurten URLU
Uyruğu	:	Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Konya\ 09.09.1991
Telefon	:	05068478007
Faks	:	
e-mail	:	n.urlu91@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Özel Diltaş Lisesi, Meram, Konya**	**2009**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2013**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2015**
Doktora	:		

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

İNGİLİZCE

YAYINLAR

Yapılan Bildiriler

1. Urlu, N., Güzel Karpuz, E., Çevik, A.S., "Gröbner-Shirshov Bases of Some Exceptional Braid Group", ICRAPAM 2014, Antalya, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

2. Urlu, N., Güzel Karpuz, E., Çevik, A.S., "Gröbner-Shirshov Basis of an Exceptional Braid Group", ICJMS 2015, Antalya, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.

3. Urlu, N., Güzel Karpuz, E., Çevik, A.S., " Gröbner-Shirshov Bases For Some Algebraic Stractures", ICRAPAM 2015, İstanbul, konferansının özet kitapçığında basılmıştır.