ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AFİN DİFERENSİYEL GEOMETRİDE EĞRİLER TEORİSİ

Gizem CANSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

28/05/2015

Gizem CANSU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AFİN DİFERENSİYEL GEOMETRİDE EĞRİLER TEORİSİ

Gizem CANSU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Eş Danışman: Doç. Dr. F. Muazzez ŞİMŞİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmış ve tez konusu hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler, bazı kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, düzlemdeki eğriler önce Öklid düzleminde sonra afin düzlemde incelenerek karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra Öklid eğrilikleri ile afin eğrilikleri arasındaki bağıntı verilerek, karakterizasyonları hakkında bilgiler ve Frenet-Serret çatıları arasındaki geçiş matrisleri ve denklemleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, uzaydaki eğriler önce Öklid uzayında daha sonra afin uzayda incelenmiştir. Shengjin' in formülü kullanılarak afin uzay eğrilerinin karakterizasyonları verilmiştir. Uzaydaki eğrilerin Frenet-Serret çatıları arasındaki geçiş matrisleri ve denklemleri verilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu çalışmanın sonuçları sonuçları ve önemli kullanım alanları verilmiştir.

Mayıs 2015, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: afin geometri, afin eğri, benzer eğriler, afin yay parametresi, afin eğrilik, destek fonksiyonu.

ABSTRACT

Master Thesis

THEORY OF CURVES IN AFFINE GEOMETRY

Gizem CANSU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Co-Supervisor: Doç. Dr. F. Muazzez ŞİMŞİR

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction and general information about the subject of the thesis.

The second chapter preliminaries, some definitions and theorems that will be needed for other sections of the thesis are given.

In the third chapter, Euclidean and affine curves in the plane are examined and their characterizations are given. Also, it is given information about the characterization of curvatures, Euclidean and affine curvature, of curves in the plane. Transition matrix of between Euclidean and afin frame are obtained in the plane.

In the fourth chapter, Euclidean and affine curves are examined in the space. In this section using the Shengjin' s formula, characterizations of space curves are given.Transition matrix of between Euclidean and afin frame are obtained in the plane.

In the fifth chapter, the importance and the results of this study have been given. Also it has mentined their application areas.

May 2015, 60 pages

Key Words: affine geometry, affine curve, affine arc-lenght parameter, affine curvature, support function.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan, desteğini her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya ve eş danışmanım olarak çalışmanın ilerlemesinde bilgi ve öneri ile katkıda bulunan Sayın Doç. Dr. F. Muazzez ŞİMŞİR (Hitit Üniversitesi Matematik Bölümü)'e, destekleriyle hep yanımda olan hocalarım Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'e ve Sayın Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ye teşekkürlerimi sunarım. Yaşadığım sıkıntılı günlerimde her zaman yanımda olup beni destekleyen tezimi sıkılmadan okuyan güzel insan Beyhan UZUNOĞLU' na, sabırla bana ders anlatan güzel anne adayı Zehra ÖZDEMİR' e, tezimin oluşmasında belgelerimle başını sürekli ağrıttığım sabırlı insan Seher KAYA' ya, bu süreçte bana her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen Fatma ATEŞ ve Çağla RAMİS' e emeklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, ailem oldukları için kendimi şanslı hissettiğim, destekleriyle her zaman arkamda olan, çalışmam esnasında sabır ve anlayışla bana yardım eden sevgili anneme, babama, kardeşime, ablama ve enişteme teşekkür ederim. Özel olarak bu süreçte sonsuz sabrıyla bana katlanan, hakkını ödeyemeyeceğim bitanecik annem Cemile CANSU' ya ve her an yanımda olan prensesimin annesi canım ablam Gamze CANSU BORAN' a çok teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, Tübitak Matematik, Fizik Araştırma Destek Grubunun 13F296 numaralı " Harmonik Gönderimler, Afin Manifoldlar ve Bilişim Geometrisine Uygulamaları" başlıklı projesi tarafından desteklenmiştir.

Gizem CANSU
Ankara, Mayıs 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

t	Öklidiyen yay parametresi
s	Afin yay parametresi
u	Keyfi parametre
$\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$	Öklidiyen yay parametresine göre türev
$\alpha' = \dfrac{d\alpha}{ds}$	Afin yay parametresine göre türev
$\det(x, y)$	$\mathbb{R}^2$ nin standart alan formu
$\det(x, y, z)$	$\mathbb{R}^3$ ün standart hacim formu
h	Destek Fonksiyonu
Δ	Diskriminant

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Eğriler; geometrinin en temel konularından birisidir. Matematikte eğriler denince akla ilk gelen en sade kavram; tek boyutlu ve sürekli olan geometrik şekillerdir. Eğriler, düzlemde ve uzayda çok farklı şekillerde bulunabilirler. Öklid uzayında, eğriler teorisiyle ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır ve hala da ağırlıkla çalışılmaktadır fakat afin diferensiyel geometride bu konuyla alakalı yeterli sayıda çalışma yoktur. Son yıllarda bu konudaki çalışmalar öne çıkmaktadır. Bu geometride metrik özellikler kullanılamadığından diğer geometrilerden farklılık göstermektedir.

Afin diferensiyel geometrinin uzun bir geçmişi vardır. Afin diferensiyel geometri kavramını öne süren ilk kişinin 1841'de A.Transon olduğu düşünülmektedir. Fakat 1872 yılında Felix Klein, afin geometrinin adını kendi adını verdiği Klein's Erlangen programında kullanmıştır. W.Blaskche 1937'de afin diferensiyel geometri ile ilgili birçok kitap yayınlayarak bu konuyu ele almıştır. Nomizu, K. ve Sasaki, T' de bu alanda çok önemli çalışmalar yapmışlardır ve 1994 yılında Afin Diferensiyel Geometri adında bir kitap yayınlayarak katkıda bulunmuşlardır. Tzitzeica, Berwald, Liebmann, Pick, Cartan, Calabi, E.Müller'in bu konuda çeşitli çalışmaları ve makaleleri vardır. Son yirmi yıldır bu alanda çok önemli çalışmalar yapılmıştır.

Eğrileri tanımlarken parametreler kullanılır ve kullanılan bu parametreler tek değildir. Özellikle yay parametresi, eğriler için çok önemlidir. Frenet-Serret çatısı yardımıyla eğrilerin karakterlerini belirlemek için eğrilik kavramını tanımlayabiliriz. Eğrilikler tanımlanırken, eğri yay parametresi veya keyfi bir parametre ile tanımlanabilir. Fakat keyfi parametreye göre hesap daha zor olduğundan yay parametresinden yararlanmak daha kullanışlıdır. Eğrilerin düzlemde ve uzayda, Öklidiyen anlamda eğrilikleri tanımlanırken afin anlamında da eğrilikleri tanımlanabilir. Düzlemde ve uzayda eğrilerin, Öklid eğrilikleri tanımlandığı gibi afin eğrilikleri de tanımlanabilir.

Bu tez çalışmasının 3. bölümünde; afin dönüşümler grubu altında invaryant olan düzlemdeki afin eğrilerin özellikleri incelenmiştir. Tezin bu bölümünde düzlemdeki eğrileri önce Öklid düzlemde daha sonra afin düzleminde ele alınarak karakterizasyonları incelenmiştir. Düzlemdeki eğrilerin, Öklid eğrilikleri ile afin eğrilikleri arasındaki bağıntı verilerek karakterizasyonları hakkında bilgi verilmiştir. Frenet-Serret çatıları arasındaki geçiş matrisleri ve denklemleri verilmiştir. Daha sonra bu eğrilerin, yay parametresi yerine destek fonksiyonu yardımıyla da eğriliklerinin bulunabileceği araştırılmıştır. Burada destek fonksiyonunun kullanılmasının nedeni; yay parametresi hesabından daha kolay olmasıdır. Ayrıca destek fonksiyonu yardımıyla Öklidiyen eğrilik ve afin eğrilik hesaplanarak bununla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

4. bölümde, afin dönüşümler grubu altında uzayda invaryant olan afin eğrilerin özellikleri incelenmiştir. Tezin bu bölümünde uzaydaki eğriler önce Öklid uzayda daha sonra Afin uzayında ele alınarak incelenmiştir. Shengjin' in formülü kullanılarak afin uzay eğrilerinin karakterizasyonları verilmiştir. Uzaydaki eğrilerin, Öklid eğrilikleri ile afin eğrilikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Uzaydaki Frenet-Serret çatıları arasındaki geçiş matrisleri ve denklemleri verilmiştir.

Son olarak 5.bölümde ise bu çalışma neticesinde elde edilen sonuçlar verilmiş ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzay ve Afin Uzay

$\mathcal{F}$ bir cisim ve V de, $\mathcal{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Herman Weyi tarafından ortaya konan aksiyomlarla V sayesinde bir afin uzay tanımlanabilir.

Tanım 2.1.1 (Afin Uzay): $A \neq \varnothing$ bir küme ve V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir $n-$*boyutlu* vektör uzayı olsun. Eğer

$$\Psi : A \times A \to V$$

$$(P, Q) \to \Psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

dönüşümü için,

$(A1)\, \forall\ P, Q, R \in A$ için $\Psi\,(P, R) = \Psi\,(P, Q) + \Psi\,(Q, R)$

$(A2)\, \forall\ P \in A$ ve $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ için $\Psi\,(P, Q) = \overrightarrow{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır.

özelliklerini sağlıyorsa A ya V vektör uzayı ile birleşen $n-$ *boyutlu* bir *afin uzay* denir. Ayrıca $(A1)$ ve $(A2)$ özelliklerine ise *afin aksiyomlar* denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.2 (Afin Çatı): V, $n-$ *boyutlu* bir vektör uzayı ve A, V vektör uzayı ile birleşen afin uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta cümlesine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir (Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 2.1.1: $\mathcal{F}^n$ standart afin uzayında bir $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta sisteminin bir afin çatı olması için gerek ve yeter şart

$$\det\begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & ... & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & ... & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & ... & P_{nn} \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır, burada

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_i \end{bmatrix}, \; 1 < i < n$$

dir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.3 (Afin Koordinat Sistemi): V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı, A, V vektör uzayı ile birleşen $n-$ *boyutlu afin uzay* ve $S=\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ kümesi de A da bir afin çatı olsun.

$$\begin{aligned} x_i : A &\rightarrow \mathcal{F} \qquad\qquad 1 \leq i \leq n \iff \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{P_0P_i} \quad a_i \in \mathcal{F} \\ P &\rightarrow x_i(P) = a_i \end{aligned}$$

olmak üzere $(x_1(P), x_2(P), ..., x_n(P))$ sıralı $n-lisine$ P noktasının $S=\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ afin çatısına göre *afin koordinatları*, her bir $x_i(P)$ ye P noktasının $i-$ *yinci afin koordinatı*, x_i fonksiyonuna da A da S afin çatısına göre $i-$ *yinci afin koordinat fonksiyonu* denir. Ayrıca $\overrightarrow{P_0P}$ vektörüne ise P noktasının başlangıç noktası P_0 olan S afin çatısına göre *konum (yer) vektörü* denir (Yüce 2013).

Tanım 2.1.4 (Afin Dönüşüm): A_1 ve A_2 birer afin uzay olmak üzere bir

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

dönüşümüne karşılık gelen Ψ_p dönüşümü herhangi bir $p \in A_1$ noktası için lineer ise f dönüşümüne *afin dönüşüm* denir. f ye karşılık gelen lineer dönüşüme de afin dönüşümle birleşen lineer dönüşüm denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.5 (Afin Otomorfizma): A_1 ve A_2 birer afin uzay olmak üzere bir

$$f : A_1 \to A_2$$

afin dönüşümü birebir ve örten ise afin izormorfizm adını alır. $A_1 = A_2$ olması halinde afin izomorfizme *afin otomorfizm* veya kısaca *afinite* adı verilir (Hacısalihoğlu 1998).

Eğer bir

$$f : A_1 \to A_2$$

dönüşümü afin izomorfizm ise f^{-1} vardır ve bu dönüşümde afindir, hatta f^{-1} ile birleşen lineer dönüşüm de f ile birleşen Ψ lineer dönüşümünün Ψ^{-1} inversidir (Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 2.1.2: Bir A afin uzayındaki sabit bir $\{x_i\}$ afin koordinat sistemine göre A nın bir f otomorfizminin ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $b \in \mathcal{F}_1^n$, $B \in GL(n, \mathcal{F})$ matrisleri, sırası ile, A nın afin çatısındaki başlangıç noktasının ve birim noktalarının resimleri ile belirtilirler (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.5 (Afin Grup): $\mathcal{F}$ cismi üzerinde $n - boyutlu$ bir afin uzay A olsun. $B \in GL(n, \mathcal{F})$ ve $b \in \mathcal{F}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_{n+1}^{n+1}$$

olan matris grubuna *afin grup* denir ve $A(n, \mathcal{F})$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.6 (İç çarpım uzayı): $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve V de bir vektör uzayı olmak üzere, V de bir

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$\forall v, w \in V$ için

$$(v, w) \to \langle , \rangle (v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına *iç çarpım uzayı* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.7 (Öklid Uzayı): $n-$ *boyutlu* bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına, *Öklid uzayı* denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.8 (Standart İç Çarpım): E^n, $n-$ *boyutlu* Öklid uzayı ve $S = \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ afin çatısı verilsin.
$\forall\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ ,\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E^n$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.9 (Öklid Çatısı): $n-$ boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ noktaları için $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ çatısına dik çatı (Öklid çatısı) denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.10 (Öklid Koordinat Sistemi): E^n, $n-$ *boyutlu* Öklid uzayı ve $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ de ortonormal baz ise S afin çatısına bir *dik çatı* ve karşılık gelen afin koordinat sistemine *dik koordinat sistemi* denir. Ayrıca bu sistemin fonksiyonlarına da *Öklid koordinat fonksiyonları* denir (Yüce 2013).

Uyarı 2.1.1: Her Öklid çatısı bir afin çatı iken her afin çatı bir Öklid çatısı değildir.

Tanım 2.1.11 (Norm): $n-$ *boyutlu* Öklid uzayı E^n de, $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$ için

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün normu denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.12 (Vektörel Çarpım): $3-$boyutlu Öklid uzayı E^3 de $\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in E^3$ için Öklid vektörel çarpımı

$$x\times y=(x_2y_3-y_2x_{3,}x_3y_1-y_3x_{1,}x_1y_2-y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu 2000).

2.2 Eğriler Teorisi

Bu bölümde, eğriler teorisinin temel kavramları ele alınarak eğri tanımıyla birlikte eğriye ait hız vektörü ve parametreleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca düzlemde ve uzayda eğrilerin Frenet formülleri ve eğriliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1 (Eğri): E^n, $n-$ *boyutlu* Öklid uzayı ve I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha: I\subseteq\mathbb{R}\to E^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n uzayı içinde bir *eğri* denir. Ayrıca (I,α) ikilisine eğrinin *koordinat komşuluğu*, I alt kümesine eğrinin *parametre aralığı* ve $t\in I$ reel sayısına eğrinin *parametresi* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.2 (Eğrinin Hız Vektörü): E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha: I\to E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \subset E^n \text{ ve } \alpha^{'}(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

şeklindedir. $\alpha^{'}(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.3 (Skalar Hız Fonksiyonu): E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{array}{rccc} \left\|\alpha^{'}\right\| : & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \rightarrow & \left\|\alpha^{'}(t)\right\| \end{array}$$

olarak tanımlı fonksiyona M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skalar hız fonksiyonu* denir ve $\left\|\alpha^{'}\right\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skalar hızı* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.4 (Regüler Eğri):

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için, hız vektörü sıfırdan farklı ise $(\alpha^{'}(t) \neq 0)$ bu eğriye *regüler eğri* denir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.2.5 (Birim Hızlı Eğri): E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall\ t \in I$ için,

$$\left\|\alpha^{'}(t)\right\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $t \in I$ parametresine *yay parametresi* adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.6 (Yay Uzunluğu): E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığına karşılık gelen

$$\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt, \ t \in I$$

reel sayısına a dan b ye *yay uzunluğu* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Regüler her eğri parametre değişimi ile birim hızlı hale getirilebilir.

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \to f(u) = \textstyle\int_0^t \|\dot{\alpha}(u)\| du \end{aligned}$$

dönüşümü ile verilen α eğrisi birim hızlı hale dönüştürülebilir.

3. DÜZLEMDEKİ EĞRİLER

3.1 Öklid Düzlem Eğrileri

Tanım 3.1.1 (Öklidiyen Düzlemsel Eğri): E^2, $2-boyutlu$ Öklid düzlemi ve I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^2$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha\,(I)$ cümlesine E^2 düzlemi içinde bir **Öklidiyen düzlemsel eğri** denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 3.1.2 (Öklidiyen Düzlemsel Eğrinin Eğriliği): Düzlemde α regüler bir eğri olsun.

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere $\alpha = (a_{1,}\ a_2\ )$ eğrisinin eğriliği:

i) $t \in I$ yay parametresi olmak üzere $\kappa = \|\ddot{\alpha}\,(t)\,\|$,

ii) $u \in I$ yay parametresi değilse $\kappa = \dfrac{|\dot{\alpha}_1(u)\ddot{\alpha}_2(u) - \ddot{\alpha}_1(u)\dot{\alpha}_1(u)|}{\left(\dot{\alpha}_1^2(u) + \dot{\alpha}_2^2(u)\right)^{\frac{3}{2}}}$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 3.1.1:

$$\alpha : (a, b) \rightarrow E^2$$

regüler eğri olsun.

i) α, bir doğru parçasıdır $\Longleftrightarrow$ $\kappa(t) = 0$

ii) α, $r > 0$ yarıçaplı bir çemberin parçasıdır $\Longleftrightarrow$ $|\kappa(t)| = \dfrac{1}{r}$ olmasıdır (Yüce 2013).

Tanım 3.1.3 (Düzlem Frenet-Serret Formülleri): Düzlemde α regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{T}(t) = \dot{\alpha}(t)$, α nın birim teğet vektörü ve $\vec{N}(t)$ birim normal vektörü olmak üzere,

$$\dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t)$$

dir. $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t)\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir.

$t \in I$ yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt} \\ \vec{N} &= \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|} \end{aligned}$$

olmak üzere $\{\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t)\}$ eğrinin Frenet $2-$ayaklısıdır.

α eğrisinin Öklid düzlem Frenet-Serret çatısı $\dot{\alpha} = \overrightarrow{T}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \kappa\overrightarrow{N} \\ \dot{N} &= -\kappa\overrightarrow{T} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\overrightarrow{T}} \\ \dot{\overrightarrow{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \end{bmatrix}$$

Burada $det\left[\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right] = 1$ ve türevler Öklidiyen yay parametresine göre alınmıştır.

3.2 Afin Düzlem Eğrileri

$\mathbb{R}^2$ nin standart alan formu determinantla belirlenir ve $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\det[x, y] = x_1 y_{2-} x_2 y_1$$

olarak tanımlanır. Bu bölümde alan koruyan afin dönüşümler grubu altında invaryant olan düzlemdeki eğrilerin özelliklerini inceleyeceğiz. Alan koruyan afin dönüşümler grubu, $SL(2, \mathbb{R})$ lineer grubunun elemanları ve $\mathbb{R}^2$ nin öteleme grubu tarafından üretilen gruptur.

$$Y = AX + a$$

olmak üzere $X, Y \in \mathbb{R}^2$, $A \in SL(2, \mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}^2$ dir.

Tanım 3.2.1 (Afin Düzlem Eğri):

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det \left[\frac{d\alpha}{dr}(r), \frac{d^2\alpha}{dr^2}(r) \right] \neq 0, \ \forall \ r \in I \text{ ise}$$

α eğrisine *afin eğri* denir (Hu 2012).

Tanım 3.2.2 (Afin Yay Parametre):

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

regüler bir eğri olsun.

$$\det \left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) \right] = 1, \ \forall \ s \in I$$

ise s ye *afin yay parametresi* denir (Hu 2012).

Afin eğriler yay parametresi ile yeniden parametrelendirilebilir.

Tanım 3.2.3 (Afin Eğrinin Eğriliği): Düzlemde regüler bir α eğrisinin afin eğriliği

$$\begin{aligned} k \quad &: \quad I \to \mathbb{R} \\ s \quad &\to \quad k(s) = \det\left[\alpha''(s), \alpha'''(s)\right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

s afin yay parametresi , u herhangi bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d\alpha}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) = \frac{d^2\alpha}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^2u}{ds^2}$$

şeklindedir. Afin yay parametresi olabilmesi için $\det\left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s)\right] = 1$ olmalıdır. Yukarıda bulunan yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 1 &= \det\left[\frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds}, \frac{d^2\alpha}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^2u}{ds^2}\right] \\ &= \det\left[\frac{d\alpha}{du}, \frac{d^2\alpha}{du^2}\right]\left(\frac{du}{ds}\right)^3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan afin yay parametresi fonksiyonu $u_0 \in I$ için,

$$s = \int_{u_0}^{u} \det\left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u)\right]^{\frac{1}{3}} du$$

şeklinde bulunur.

Regüler her afin eğri parametre değişimi ile birim hızlı hale getirilebilir.$u_0 \in I$ için,

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & s \to f(u) = \int_{u_0}^{u} \det\left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u)\right]^{\frac{1}{3}} du \end{aligned}$$

dönüşümü ile verilen α afin eğrisi birim hızlı hale dönüştürülebilir (Buchin 1983).

Tanım 3.2.4 (Düzlem Afin Frenet-Serret Formülleri): Düzlemde, α afin regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\overrightarrow{t} = \alpha'(s)$, α nın birim afin teğet vektörü ve $\overrightarrow{n}(s)$ birim afin normal vektörü olmak üzere,

$$\alpha' = \overrightarrow{t} \quad ve \quad \overrightarrow{n'}(s) = k(s)\overrightarrow{t(s)}$$

dir. $\{\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir.

$s \in I$ afin yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t} &= \alpha'(s),\ \alpha' = \frac{d\alpha}{ds}, \\ \overrightarrow{n} &= \alpha''(s) \end{aligned}$$

olmak üzere $\{\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\}$ eğrinin afin Frenet 2-ayaklısıdır.
α eğrisinin afin Düzlem Frenet Serret çatısı $\alpha' = \overrightarrow{t}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t'} &= \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n'} &= -k\overrightarrow{t} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{t'} \\ \overrightarrow{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \end{bmatrix}$$

Burada $det\left[\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}\right] = 1$ ve türevler afin yay parametresine göre alınmıştır.
det $[\alpha'(s), \alpha''(s)]$ =1 eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\det\left[\alpha''(s), \alpha''(s)\right] + \det\left[\alpha'(s), \alpha'''(s)\right] = 0$$

bulunur. Buradan

$$\alpha'''(s) + \kappa(s)a'(s) = 0$$

eşitliğini elde ederiz.

Not 3.2.1: Sabit afin eğrilikli α regüler eğrisi, aşağıdaki eşitliklerden birine denktir:

$i)$ $k = 0$ ise **parabol,**

$ii)$ $k > 0$ ise **elips,**

$iii)$ $k < 0$ ise **hiperbol** belirtir.

Düzlemde $\boldsymbol{\kappa}$ Öklidiyen eğriliği sabit olan sadece çembersel yaylar ve doğru parçalarıdır. Fakat $\mathbf{k}$ afin eğriliği sabit olan sadece konik yaylardır (Ghosh 1978).

3.3 Düzlemde Afin Eğriler ile Öklid Eğriler Arasındaki İlişki

3.3.1 Afin ile Öklid yay parametresi arasındaki ilişki

Düzlemde bir $\alpha(t) = \gamma(s(t))$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere; $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$ Öklid yay parametresine göre türev ve $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{ds}$ afin yay parametresine göre türev olsun.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \overrightarrow{T} \\ \dot{T} &= \kappa\overrightarrow{N} \\ \dot{N} &= -\kappa\overrightarrow{T} \end{aligned}\right\} \det(T, N) = 1$$

ve

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{t'} &= \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n'} &= -k\,\overrightarrow{t} \end{aligned}\right\} \det(t, n) = 1$$

olduğu bilinmektedir.

$$\overrightarrow{T} = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \quad ve \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\overrightarrow{t}$$

eşitliklerinden $\overrightarrow{T} = \dot{s}\,\overrightarrow{t} = \dot{\alpha}$ bulunur.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\dot{T}} &= \ddot{\alpha} = \kappa\overrightarrow{N} \\ \kappa\overrightarrow{N} &= (\dot{s})^2\,\overrightarrow{n} + \ddot{s}\,\overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{N} &= \left((\dot{s})^2\,\overrightarrow{n} + \ddot{s}\,\overrightarrow{t}\right)\kappa^{-1} \end{aligned}$$

bulunur.

$\det(T, N) = 1$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} \dot{s} & 0 \\ \ddot{s}\kappa^{-1} & (\dot{s})^2 \kappa^{-1} \end{vmatrix} = 1$$

olup determinant değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} (\dot{s})^3 \kappa^{-1} &= 1 \\ (\dot{s})^3 &= \kappa \\ \dot{s} &= (\kappa)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece afin yay parametresi ile Öklidiyen yay parametresi arasındaki bağıntı,

$$\frac{ds}{dt} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde elde edilir (Ghosh 1978).

3.3.2 Afin ile Öklid Frenet-Serret çatıları arasındaki ilişki

Düzlemde bir $\alpha(t) = \gamma(s(t))$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere; $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$ Öklid yay parametresine göre türev ve $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{ds}$ afin yay parametresine göre türev olsun. Bölüm 3.3.1 de afin yay parametresi ile Öklidiyen yay parametresi arasındaki bağıntıyı $\overrightarrow{T} = \dot{s}\,\overrightarrow{t}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{T} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}\,\overrightarrow{t}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak $\dot{s}^3 = \kappa$ elde edilir.
$\dot{s}^3 = \kappa$ eşitliğinin türevini alınırsa, $\ddot{s} = \dfrac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{2}{3}}\dot{\kappa}$ bulunur. $\overrightarrow{N} = \left((\dot{s})^2\,\overrightarrow{n} + \ddot{s}\,\overrightarrow{t}\right)\kappa^{-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\,\overrightarrow{t} + (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\,\overrightarrow{n}$$

bulunur.

Bu durumda çatılar arasındaki geçiş matrisi aşağıdaki gibidir:

i) Öklid çatıdan afin çatıya geçiş matrisi,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{-\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T} &= (\kappa)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{N} &= \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\overrightarrow{t} + (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\overrightarrow{n} \end{aligned}$$

ii) Afin çatıdan Öklid çatıya geçiş matrisi ise,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t} &= (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{n} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{T}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\overrightarrow{T} + (\kappa)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{N} \end{aligned}$$

3.3.3 Afin ile Öklid eğrilikler arasındaki ilişki

Düzlemde bir $\alpha(t) = \gamma(s(t))$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere; $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ Öklid yay parametresine göre türev ve $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$ afin yay parametresine göre türev olsun. α eğrisinin afin türevlerini alalım.

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\overrightarrow{T} \\ \alpha'' &= -\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\overrightarrow{T} + (\kappa)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{N} \\ \alpha''' &= \left(\frac{5}{9}(\kappa)^{-3}(\dot{\kappa})^2 - \frac{1}{3}(\kappa)^{-2}\ddot{\kappa} - \kappa\right)\overrightarrow{T} \end{aligned}$$

Afin eğrilik $k = \det\left[\alpha'', \alpha'''\right]$ olarak tanımlıdır. Bulunan türevler yerleri yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
k &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3}\left(\kappa\right)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & \left(\kappa\right)^{\frac{1}{3}} \\ \dfrac{5}{9}\left(\kappa\right)^{-3}\left(\dot{\kappa}\right)^{2} - \dfrac{1}{3}\left(\kappa\right)^{-2}\ddot{\kappa} - \kappa & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(\kappa\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}\left(\kappa\right)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa} - \frac{5}{9}\left(\kappa\right)^{-\frac{8}{3}}\left(\kappa\right)^{-2}
\end{aligned}
$$

şeklinde olup k ve κ arasındaki ilişki;

$$
k = \frac{9\kappa^{4} - 5\left(\dot{\kappa}^{2}\right) + 3\ddot{\kappa}}{9\kappa^{\frac{8}{3}}}
$$

şeklindedir. Benzer şekilde eğer

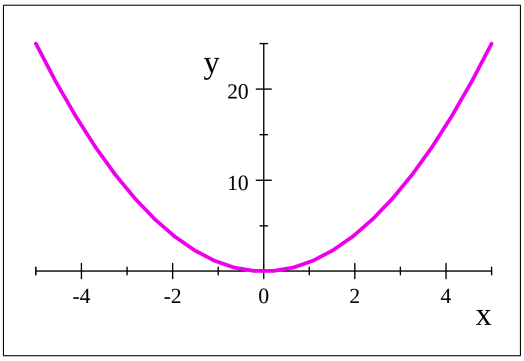
$i)$ $k = 0$ ise **parabol,**

$ii)$ $k > 0$ ise **elips,**

$iii)$ $k < 0$ ise **hiperbol** şeklinde bulunur (Ghosh 1978).

3.3.4 Afin düzlem eğri örnekleri

Örnek 3.1: $\alpha(u) = (u, u^2)$ eğrisini göz önüne alalım.



Şekil 3.1 α eğrisi

Türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha^{'}(u) &= (1, 2u) \\
\alpha^{''}(u) &= (0, 2)
\end{aligned}$$

bulunur. Afin yay parametresi ise,

$$\begin{aligned}
s &= \int_{u_0}^{u} \det \left|\alpha^{'}(u), \alpha''(u)\right|^{\frac{1}{3}} du \\
&= \int_{u_0}^{u} \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{3}} du \\
&= 2^{\frac{1}{3}} u
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $u = 2^{-\frac{1}{3}} s$ yerine yazılırsa,

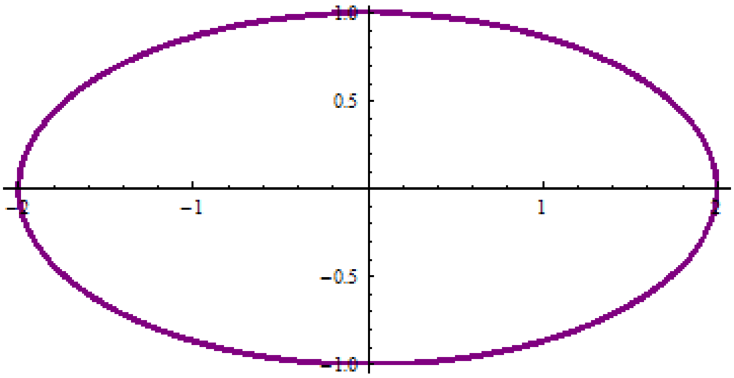
$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= (2^{-\frac{1}{3}} s, 2^{-\frac{2}{3}} s^2) \\
\alpha^{'}(s) &= (2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}} s) \\
\alpha^{''}(s) &= (0, 2^{\frac{1}{3}}) \\
a'''(s) &= (0, 0)
\end{aligned}$$

bulunur. Afin eğrilik,

$$\begin{aligned}
k(s) &= \det\left[\alpha''(s), \alpha'''(s)\right] \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 2^{\frac{1}{3}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve $k(s) = 0$ olduğundan α, bir **parabol** belirtir.

Örnek 3.2: $\beta(u) = (a\cos u, b\sin u)$ eğrisini ele alalım.



Şekil 3.2 β eğrisi

Türevleri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\beta^{'}(u) &= (-a\sin u, b\cos u) \\
\beta^{''}(u) &= (-a\cos u, -b\sin u)
\end{aligned}
$$

bulunur. Afin yay parametresi ise,

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{u_0}^{u} \det\left[\beta^{'}(u), \beta''(u)\right]^{\frac{1}{3}} du \\
&= \int_{u_0}^{u} \begin{vmatrix} -a\sin u & b\cos u \\ -a\cos u & -b\sin u \end{vmatrix}^{\frac{1}{3}} du \\
&= (ab)^{\frac{1}{3}} u
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. $u = (ab)^{-\frac{1}{3}} s$ yerine yazılırsa,

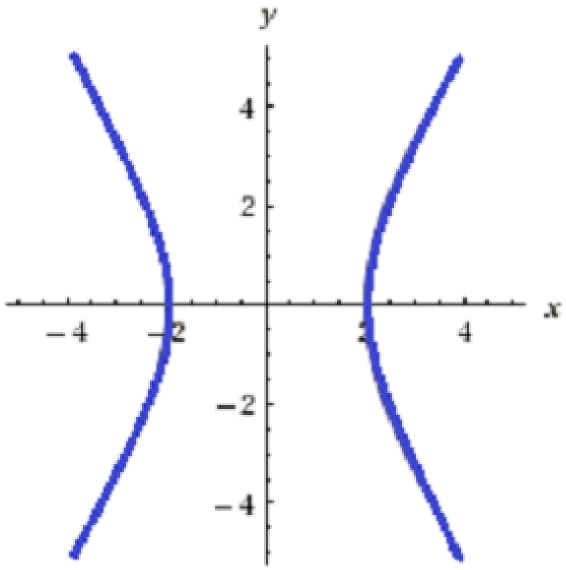
$$
\begin{aligned}
\beta(s) &= (a\cos(ab)^{-\frac{1}{3}} s, b\sin(ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\
\beta^{'}(s) &= (-a(ab)^{-\frac{1}{3}} \sin(ab)^{-\frac{1}{3}} s, b(ab)^{-\frac{1}{3}} \cos(ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\
\beta^{''}(s) &= (-a(ab)^{-\frac{2}{3}} \cos(ab)^{-\frac{1}{3}} s, -b(ab)^{-\frac{2}{3}} \sin(ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\
\beta^{'''}(s) &= (a(ab)^{-1} \sin(ab)^{-\frac{1}{3}} s, -b(ab)^{-1} \cos(ab)^{-\frac{1}{3}} s)
\end{aligned}
$$

bulunur.Afin eğrilik

$$
\begin{aligned}
k(s) &= \det\left[\alpha''(s), \alpha'''(s)\right] \\
&= \begin{vmatrix} -a\,(ab)^{-\frac{2}{3}}\cos{(ab)^{-\frac{1}{3}}}\,s & -b\,(ab)^{-\frac{2}{3}}\sin{(ab)^{-\frac{1}{3}}}\,s \\ a\,(ab)^{-1}\sin{(ab)^{-\frac{1}{3}}}\,s & -b\,(ab)^{-1}\cos{(ab)^{-\frac{1}{3}}}\,s \end{vmatrix} \\
&= (ab)^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir ve $k(s) > 0$ olduğundan β, bir **elips** belirtir.

Örnek 3.3: $\gamma(u) = (a\cosh u, b\sinh u)$ eğrisini göz eğrisini alalım.



Şekil 3.3 γ eğrisi

Türevleri alınırsa,

$$\gamma^{'}(u) = (a\sinh u, b\cosh u)$$

$$\gamma^{''}(u) = (a\cosh u, b\sinh u)$$

buluruz.

Afin yay parametresi ise,

$$\begin{aligned} s &= \int_{u_0}^{u} \left[\det \alpha^{'}(u), \alpha''(u)\right]^{\frac{1}{3}} du \\ &= \int_{u_0}^{u} \begin{vmatrix} a\sinh u & b\cosh u \\ a\cosh u & b\sinh u \end{vmatrix}^{\frac{1}{3}} du \\ &= (-ab)^{\frac{1}{3}} u \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $u = (-ab)^{-\frac{1}{3}} s$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (a\cosh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s, b\sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\ \gamma^{'}(s) &= (a(-ab)^{-\frac{1}{3}} \sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s, b(-ab)^{-\frac{1}{3}} \cosh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\ \gamma^{''}(s) &= (a(-ab)^{-\frac{2}{3}} \cosh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s, b(-ab)^{-\frac{2}{3}} \sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\ \gamma^{'''}(s) &= (a(-ab)^{-1} \sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s, b(-ab)^{-1} \cosh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s) \end{aligned}$$

bulunur. Afin eğrilik

$$\begin{aligned} k(s) &= \det[\alpha''(s), \alpha'''(s)] \\ &= \begin{vmatrix} a(-ab)^{-\frac{2}{3}} \cosh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s & b(-ab)^{-\frac{2}{3}} \sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s) \\ a(-ab)^{-1} \sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s & b(-ab)^{-1} \cosh(-ab)^{-\frac{1}{3}} s) \end{vmatrix} \\ &= -(ab)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve $k(s) < 0$ olduğundan γ, bir **hiperbol** belirtir.

3.4 Konik Yayların Destek Fonksiyonu ile Afin Eğrilik Hesabı

3.4.1 Konik yayların destek fonksiyonları

Konik yayların eğriliklerini destek fonksiyonları yardımıyla hesaplayabiliriz. Önceki bölümde görüldüğü gibi yay parametresi hesabı oldukça zor olduğu için eğrilerin karakterizasyonları, destek fonksiyonları yardımıyla da ifade edilebilir.

Teorem 3.4.1:

$$E: \quad \frac{x^2(s)}{a^2} + \frac{y^2(s)}{b^2} = 1 \ , \ c = -\frac{1}{a^2b^2}$$

olmak üzere elipsin destek fonksiyonu h yardımıyla Öklidiyen eğriliği

$$\kappa = ch^3$$

olarak hesaplanır (Kim, D and Kim, Y.H. 2007).

İspat:

$$X(s) = (x(s), y(s))$$

E nin konum vektörü olsun ve

$$Z(s) = (\frac{x(s)}{a^2}, \frac{y(s)}{b^2})$$

E nin normal yönündeki vektör olsun. $Z(s)$ vektörünün türevi,

$$Z'(s) = (\frac{x'(s)}{a^2}, \frac{y'(s)}{b^2})$$

şeklindedir. Burada

$$\langle X(s), Z(s) \rangle = \frac{x^2(s)}{a^2} + \frac{y^2(s)}{b^2} = 1$$

olup birim normal vektörünü;

$$N = -\frac{Z(s)}{\|Z(s)\|}$$

olarak hesaplayabiliriz.

Destek fonksiyonu;

$$h(s) = \langle X(s), N(s) \rangle$$

şeklinde olmak üzere,

$$h(s) = \left\langle X(s), -\frac{Z(s)}{\|Z(s)\|} \right\rangle = -\frac{1}{\|Z(s)\|}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N = -\frac{Z(s)}{\|Z(s)\|} = h(s)Z(s) = h(s)(\frac{x(s)}{a^2}, \frac{y(s)}{b^2})$$

yazılabilir. Bu durumda teğet vektörü;

$$\begin{aligned} Z'(s) &= (\frac{x'(s)}{a^2}, \frac{y'(s)}{b^2}) \\ &= -\frac{h(s)}{a^2b^2}(-y(s), x(s)) \end{aligned}$$

$$T(s) = (x'(s)), y'(s)) = -h(s)\left(\frac{-y(s)}{b^2}, \frac{x(s)}{a^2}\right)$$

bulunur.

Teğet vektörü ve normal vektörü birbirine dik olduğundan $\langle T(s), N(s)\rangle = 1$ dir. Öklidiyen eğrilik $\kappa = \langle T'(s), N(s)\rangle$ şeklinde tanımlıdır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \kappa &= \langle T'(s), N(s)\rangle \\ &= \langle T'(s), h(s)Z(s)\rangle \\ &= h(s)\langle T'(s), Z(s)\rangle \\ &= -h(s)\langle T(s), Z'(s)\rangle \\ &= h(s)\left\langle -h(s)\left(\frac{-y(s)}{b^2}, \frac{x(s)}{a^2}\right), \frac{-h(s)}{a^2b^2}(-y(s), x(s))\right\rangle \\ &= \frac{h^3(s)}{a^2b^2}\left(\frac{x^2(s)}{a^2} + \frac{y^2(s)}{b^2}\right) \\ &= \frac{h^3(s)}{a^2b^2} \end{aligned}$$

bulunur.

Aynı şekilde destek fonksiyonu yardımıyla hiberbolün eğriliği

$$\kappa = \frac{h^3(s)}{a^2b^2}$$

ve parabolün eğriliği

$$\kappa = -\frac{p^2}{8}h^3(s)$$

bulunur.

3.4.2 Destek fonksiyonu ile afin eğrilik hesabı

Konik yaylar için destek fonksiyonları yardımıyla Öklidiyen eğrilikleri yukarıda hesaplanmıştır. Burada afin ve Öklidiyen eğrilikler arasında bulduğumuz bağıntıda destek fonksiyonu yerine yazılarak afin eğrilikle ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

$$k = \frac{9\kappa^4 - 5\left(\dot{\kappa}^2\right) + 3\ddot{\kappa}}{9\kappa^{\frac{8}{3}}}$$

Elips ve hiperboller için Öklidiyen eğrilik $\kappa = ch^3$, $c \in \mathbb{R}$ olarak tanımlanmıştır. Burada türevler alınırsa,

$$\begin{aligned}
\dot{\kappa} &= 3ch^2\dot{h} \\
\ddot{\kappa} &= 3c\left[2h\left(\dot{h}\right)^2 + \ddot{h}h^2\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$$k = \frac{9\kappa^4 - 5\left(\dot{\kappa}^2\right) + 3\ddot{\kappa}}{9\kappa^{\frac{8}{3}}}$$

denkleminde yerine yazılarak;

$$k = \frac{h^8 - 3t^3\left(\dot{h}\right)^2 + t^3h\ddot{h}}{h^4t^2}, \; t = c^{\frac{-2}{3}}$$

elde edilir.Dolayısıyla,

elips için

$$h^8 - 3t^3\left(\dot{h}\right)^2 + t^3 h\ddot{h} > 0$$

hiperbol için

$$h^8 - 3t^3\left(\dot{h}\right)^2 + t^3 h\ddot{h} < 0$$

bulunur.

Paraboller için Öklidiyen eğrilikleri

$$\kappa = ch^{-3},\ c = \frac{-p^2}{8}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada türevler alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= -3ch^{-4}\dot{h} \\ \ddot{\kappa} &= -3c\left[-4h^{-5}\left(\dot{h}\right)^2 + \ddot{h}h^{-4}\right]\end{aligned}$$

bulunur.

$$k(s) = \frac{9\kappa^4 - 5\left(\dot{\kappa}^2\right) + 3\kappa\ddot{}}{9\kappa^{\frac{8}{3}}}$$

denkleminde yerine yazılarak;

$$k(s) = \frac{1 - t^3h^{-4}\left(\dot{h}\right)^2 - t^3h^5\ddot{h}}{h^4t^2},\ t = c^{-\frac{2}{3}}$$

elde edilir.

Paraboller için $k(s) = 0$ olduğundan

$$1 - t^3 h^{-4} \left(\dot{h}\right)^2 - t^3 h^5 \ddot{h} = 0$$

şeklindedir.

Bu bölümde tanımlanan destek fonksiyonun geometrik yorumu ise; regüler birim hızlı bir düzlem eğrisinin, teğet vektörünün orjinden ne kadar uzaklaştığını hesaplamamıza yardımcı olmasıdır. Böylece uzun işlemler yapmadan eğrinin eğriliğini destek fonksiyonu yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz.

4. UZAYDA EĞRİLER

4.1 Öklid Uzay Eğriler

Tanım 4.1.1 (Öklidiyen Uzay Eğri): E^3, $3-boyutlu$ Öklid uzayında ve I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^3$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^3 uzayı içinde bir *Öklidiyen uzay eğri* denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 4.1.2 (Öklidiyen Uzay Eğrinin Eğriliği): Uzayda α regüler bir eğri olsun. $\kappa : I \to \mathbb{R}$ olmak üzere α eğrisinin eğriliği;

i) $t \in I$ yay parametresi olmak üzere $\kappa = \|\ddot{\alpha}(t)\|$,

ii) $u \in I$ yay parametresi değilse $\kappa = \dfrac{\|\dot{\alpha}(u) \wedge \ddot{\alpha}(u)\|}{\|\dot{\alpha}(u)\|^3}$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu 1998).

Not 4.1.1: $\alpha : (a,b) \to E^3$ regüler eğri olsun.

i) $\kappa = 0 \iff \alpha$, bir doğrudur

ii) $\tau = 0 \iff \alpha$, bir düzlemsel eğiridir.

iii) $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = 0 \iff \alpha$ eğrisi bir çemberdir.

iv) $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = sabit \iff \alpha$ eğrisi bir dairesel helistir.

v) $\dfrac{\tau}{\kappa} = sabit \iff \alpha$ eğrisi bir silindirik helistir (Yüce 2013).

Tanım 4.1.3 (Öklid Uzayı Frenet-Serret Formülleri): Uzayda α regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{T}(t) = \dot{\alpha}(t)$, α nın birim teğet vektörü, $\vec{N}(t)$ birim normal vektörü ve $\overrightarrow{B(t)}$ birim binormal vektörü olmak üzere; $\dot{\overrightarrow{T}}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t)$ şeklindedir ve $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \overrightarrow{B(t)}\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir.

i) $t \in I$ yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|} \\
\vec{B}(t) &= \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)
\end{aligned}$$

olmak üzere $\{\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t), \vec{B}(t)\}$ eğrinin Frenet 3-ayaklısıdır.

ii) $u \in I$ yay parametresi değilse α eğrisi için,

$$\begin{aligned}
\vec{T}(u) &= \frac{\dot{\alpha}(u)}{\|\dot{\alpha}(u)\|} \\
\vec{N}(u) &= \overrightarrow{B}(u)\Lambda\overrightarrow{T}(u) \\
\vec{B}(u) &= \frac{\dot{\alpha}(u) \wedge \ddot{\alpha}(u)}{\|\dot{\alpha}(u)\Lambda\ddot{\alpha}(t)\|}
\end{aligned}$$

olmak üzere $\{\overrightarrow{T}(u), \overrightarrow{N}(u), \overrightarrow{B}(u)\}$ eğrinin Frenet 3-ayaklısıdır.

α eğrisinin Öklid uzay Frenet-Serret çatısı $\dot{\alpha} = \overrightarrow{T}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{T}} &= \kappa\overrightarrow{N} \\
\dot{\overrightarrow{N}} &= -\kappa\overrightarrow{T} + \tau\overrightarrow{B} \\
\dot{\overrightarrow{B}} &= -\tau\overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\overrightarrow{T}} \\ \dot{\overrightarrow{N}} \\ \dot{\overrightarrow{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{B} \end{bmatrix}$$

Burada $det\left[\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\right] = 1$ ve türevler Öklidiyen yay parametresine alınmıştır.

Tanım 4.1.4 (Öklid Uzayı Frenet Düzlemleri): $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı regüler $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun.

i) $\{T(s), N(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **oskülator düzlem** denir.

ii) $\{T(s), B(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlem** denir.

iii) $\{B(s), N(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlem** denir.

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir Öklid uzay eğri olsun. Burada $s_0 \in I$ olmak üzere eğrinin $\alpha(s_0)$ noktasının komşuluğunda, Frenet düzlemlerini inceleyeceğiz.
$\alpha(s)$ eğrisinin, $\alpha(s_0)$ noktasındaki Öklidiyen eğriliğini κ ve Öklidiyen torsiyonun τ ile gösterelim. α fonksiyonun s_0 noktası komşuluğunda Taylor açılımı $h = s - s_0$ olmak üzere yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\alpha(s) - \alpha(s_0) &= h\dot{\alpha}(s_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\alpha}(s_0) + \frac{h^3}{3!}\dddot{\alpha}(s_0) + ... \\
&= hT + \frac{h^2}{2!}(\kappa N) + \frac{h^3}{3!}\left(\dot{\kappa}N - \kappa^2 + \kappa\tau B\right) + ... \\
&\cong hT + \frac{h^2}{2!}\kappa N + \frac{h^3}{3!}\kappa\tau B
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ vektörü, $\alpha(s_0)$ noktasından $\alpha(s)$ noktasına giden vektördür.
$\alpha(s) - \alpha(s_0)$ vektörünün $\{T, N, B\}$ ortonormal çatısına göre bileşenlerine x, y, z denirse;

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) \cong hT + \frac{h^2}{2!}(\kappa N) + \frac{h^3}{3!}\kappa\tau B$$

eşitliğine göre yaklaşık olarak

$$x = h$$
$$y = \frac{h^2}{2!}\kappa$$
$$z = \frac{h^3}{3!}\kappa\tau$$

yazılabilir.

4.2 Afin Uzay Eğriler

$\mathbb{R}^3$ nin standart hacim formu determinantla belirlenir. $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ için,

$$\begin{aligned} \det[x, y, z] &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 \end{aligned}$$

dir.

Bu bölümde hacim koruyan afin dönüşümler grubu altında uzayda invaryant kalan eğrilerin özelliklerini inceleyeğiz. Hacim koruyan afin dönüşümler grubu $SL(3, \mathbb{R})$ ve $\mathbb{R}^3$ nin öteleme grubu tarafından üretilen gruptur.

$$Y = AX + a$$

Burada $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $A \in SL(3, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^3$ şekildedir.

Tanım 4.2.1 (Afin Uzay Eğri):

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det\left[\frac{d\alpha}{dr}(r), \frac{d^2\alpha}{dr^2}(r), \frac{d^3\alpha}{dr^3}(r)\right] \neq 0, \forall\ r \in I \text{ ise}$$

α eğrisine **afin uzay eğrisi** denir (Hu 2012).

Tanım 4.2.2 (Afin Uzay Eğri Yay Paramatresi):

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

regüler bir eğri olsun.

$$\det\left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s), \frac{d^3\alpha}{ds^3}(s)\right] = 1$$

ise s ye **afin uzay yay parametresi** denir (Hu 2012).

s afin yay parametresi, u herhangi bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d^2\alpha}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^2u}{ds^2}$$

$$\frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{d^3\alpha}{du^3}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{d^2u}{ds^2}\frac{du}{ds} + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^3u}{ds^3}$$

şeklindedir. Burada s nin afin yay parametresi olabilmesi için

$$\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$$

olmalıdır. Buradan afin yay parametresi fonksiyonu $u_0 \in I$ için,

$$s = \int_{u_0}^{u} \det \left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u) \frac{d^3\alpha}{du^3}(u) \right]^{\frac{1}{6}} du$$

şeklinde hesaplanabilir.

Tanım 4.2.3 (Afin Uzay Eğrinin Eğriliği):

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

uzay eğrisinin afin eğriliği

$$k(s) = \det \left[\alpha'(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s) \right]$$

olarak tanımlanır (Santaló 1946).

Tanım 4.2.4 (Afin Uzay Eğrinin Torsiyonu):

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

uzay eğrisinin afin torsiyonu

$$\tau_\alpha(s) = -\det \left[\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s) \right]$$

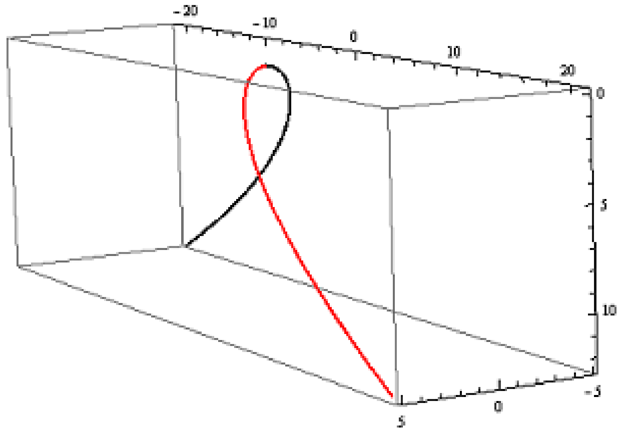
olarak tanımlanır (Santaló 1946).

$\det \left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s) \right] = 1$ eşitliğinin türevini alınırsa,

$$\alpha''''(s) + \tau_\alpha(s)\alpha'(s) + k(s)\alpha''(s) = 0$$

olarak bulunur.

Örnek 4.1: $\alpha(u) = (u, \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{6}u^3)$ eğrisini ele alalım.



Şekil 4.1 ϕ afin uzay eğrisi

Türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha'(u) &= (1, u, \frac{1}{2}u^2) \\ \alpha''(u) &= (0, 1, u) \\ \alpha'''(u) &= (0, 0, 1) \\ \alpha''''(u) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

bulunur. Afin yay parametresi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} s &= \int_{u_0}^{u} \det \left| \alpha^{'}(u), \alpha''(u), \alpha'''(u) \right|^{\frac{1}{6}} du \\ &= \int_{u_0}^{u} \begin{vmatrix} 1 & u & \frac{1}{2}u^2 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{6}} du \end{aligned}$$

$s = 1$ elde edilir. $\varphi(s)$, afin yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir birim hızlı afin uzay eğridir.

$\varphi(s)$ eğrisinin afin eğriliği,

$$\begin{aligned} k(s) &= -\det\left[\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s)\right] \\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$k(s) = 0$ bulunur.

$\varphi(s)$ eğrisinin afin torsiyonu ise,

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(s) &= \det\left[\alpha'(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s)\right] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & s & \frac{1}{2}s^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\tau_\alpha(s) = 0$ bulunur.

Tanım 4.2.5 (Afin Uzay Frenet-Serret Formülleri): Uzayda afin yay parametresine göre türevler alınarak afin teğet vektör $\vec{t} = \alpha'$, afin normal vektör $\vec{n} = \alpha''$ ve afin binormal vektör $\vec{b} = \alpha'''$ yardımıyla $\alpha' = \overrightarrow{t}$ olmak üzere afin çatı;

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t'} &= \alpha'' = \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n'} &= \alpha''' = \vec{b} \\ \vec{b}' &= \alpha'''' = -\tau_\alpha \alpha' - k\alpha'' \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada ,

$$\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$$

dir (Santaló 1946).

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{t'} \\ \overrightarrow{n'} \\ \vec{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tau & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

Burada $det\left[\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \vec{b}\right] = 1$ ve türevler afin yay parametresine göre alınmıştır.

Tanım 4.2.5 (Afin Uzayında Frenet Düzlemleri): Afin uzayda birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun.

i) $\{t(s), n(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **oskülator düzlem** denir.

ii) $\{t(s), b(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlem** denir.

iii) $\{b(s), n(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlem** denir.

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir afin uzay eğrisi olsun. Burada $s_0 \in I$ olmak üzere eğrinin $\alpha(s_0)$ noktası komşuluğunda, Frenet düzlemlerini inceleyeceğiz.

$\alpha(s)$ eğrisinin, $\alpha(s_0)$ noktasındaki afin eğriliğini k ve afin eğriliğini τ_α ile gösterelim. α fonksiyonun s_0 noktası komşuluğunda Taylor açılımı $h = s - s_0$ olmak üzere yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha(s)-\alpha(s_0) &= (s-\frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4-\frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5)\alpha'(s_0)+(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{4!}ks^4-\frac{1}{5!}(k'+\tau_\alpha)s^5) \\
&\quad \alpha''(s_0)+(\frac{1}{3!}s^3-\frac{1}{5!}s^5)\alpha'''(s_0)+... \\
&= (s-\frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4-\frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5)t+(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{4!}ks^4-\frac{1}{5!}(k'+\tau_\alpha)s^5)n+ \\
&\quad (\frac{1}{3!}s^3-\frac{1}{5!}ks^5)b+... \\
&\cong (s-\frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4-\frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5)t+(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{4!}ks^4-\frac{1}{5!}(k'+\tau_\alpha)s^5)n+ \\
&\quad (\frac{1}{3!}s^3-\frac{1}{5!}ks^5)b
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha(s)-\alpha(s_0)$ vektörü, $\alpha(s_0)$ noktasından $\alpha(s)$ noktasına giden vektördür.

$\alpha(s)-\alpha(s_0)$ vektörünün $\{t,n,b\}$ ortonormal çatısına göre bileşenlerine x,y,z denirse;

$$\alpha(s)-\alpha(s_0)\cong(s-\frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4-\frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5)t+(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{4!}ks^4-\frac{1}{5!}(k'+\tau_\alpha)s^5)n+(\frac{1}{3!}s^3-\frac{1}{5!}ks^5)b$$

eşitliğine göre yaklaşık olarak

$$\begin{aligned}
x &= s-\frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4-\frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5 \\
y &= \frac{1}{2}s^2-\frac{1}{4!}ks^4-\frac{1}{5!}(k'+\tau_\alpha)s^5 \\
z &= (\frac{1}{3!}s^3-\frac{1}{5!}ks^5)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

4.3 Uzayda Afin Eğriler ile Öklid Eğriler Arasındaki İlişki

4.3.1 Afin ile Öklid yay parametresi arasındaki ilişki

Uzayda bir $\alpha(t)=\gamma(s(t))$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere; $\dot{\alpha}=\dfrac{d\alpha}{dt}$ Öklid yay parametresine göre türev ve $\alpha'=\dfrac{d\alpha}{ds}$ afin yay parametresine göre türev olsun. $\dot{\alpha}=\overrightarrow{T}$ ve $\alpha'=\overrightarrow{t}$ eşitliklerinden,

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overrightarrow{T}} &= \kappa\overrightarrow{N} \\ \dot{\overrightarrow{N}} &= -\kappa\overrightarrow{T}+\tau\overrightarrow{B} \\ \dot{\overrightarrow{B}} &= -\tau\overrightarrow{N} \end{aligned}\right\} \det(T,N,B)=1$$

ve

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{t'} &= \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n'} &= \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b'} &= -\tau_\alpha\overrightarrow{t}+k\overrightarrow{n} \end{aligned}\right\} \det(t,n,b)=1$$

şeklinde elde edilir. Bölüm 3.3.1 deki afin ile Öklid yay parametresi arasında bulunan

$$\frac{ds}{dt}=(\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

bağıntısı uzayda da geçerlidir (Ghosh 1978).

4.3.2 Uzayda afin ile Öklid Frenet-Serret çatıları arasındaki ilişki

Uzayda bir $\alpha(t)=\gamma(s(t))$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere; $\dot{\alpha}=\dfrac{d\alpha}{dt}$ Öklid yay parametresine göre türev ve $\alpha'=\dfrac{d\alpha}{ds}$ afin yay parametresine göre türev olsun. Bölüm 3.3.2 de

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T} &= (\kappa)^{\frac{1}{3}}\,\overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{N} &= \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\,\dot{\kappa}\,\overrightarrow{t}+(\kappa)^{-\frac{1}{3}}\,\overrightarrow{n} \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde hesaplanmıştır. $\overrightarrow{N}=\dfrac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\,\dot{\kappa}\,\overrightarrow{t}+(\kappa)^{-\frac{1}{3}}\,\overrightarrow{n}$ denkleminin türevi alınırsa,

$$-\kappa\overrightarrow{T}+\tau\overrightarrow{B}=\left(-\frac{5}{9}\kappa^{-\frac{8}{3}}(\dot{\kappa})^2+\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}\right)\overrightarrow{t}+\overrightarrow{b}$$

bulunur. (4.1) deki denklemler kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
-\kappa\left(\kappa\right)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{t}+\tau\overrightarrow{B} &= \left(-\frac{5}{9}\kappa^{-\frac{8}{3}}\left(\dot{\kappa}\right)^{2}+\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}\right)\overrightarrow{t}+\overrightarrow{b} \\
\tau\overrightarrow{B} &= \left(-\frac{5}{9}\kappa^{-\frac{8}{3}}\left(\dot{\kappa}\right)^{2}+\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}+\kappa^{\frac{4}{3}}\right)\overrightarrow{t}+\overrightarrow{b}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan uzayda Öklid binormal vektörü ile afin binormal vektörü arasındaki geçiş,

$$
\overrightarrow{B}=\left(-\frac{5}{9}\kappa^{-\frac{8}{3}}\left(\dot{\kappa}\right)^{2}+\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}+\kappa^{\frac{4}{3}}\right)\tau^{-1}\overrightarrow{t}+\overrightarrow{b}\,\tau^{-1}
$$

şeklinde hesaplanır. Çatılar arasındaki geçiş matrisi ise aşağıdaki gibidir:

i) Öklid çatıdan afin çatıya geçiş matrisi,

$$
\begin{bmatrix}\overrightarrow{T}\\ \overrightarrow{N}\\ \overrightarrow{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa^{\frac{1}{3}} & 0 & 0\\ \frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & \kappa^{-\frac{1}{3}} & 0\\ \left(-\frac{5}{9}\kappa^{-\frac{8}{3}}\left(\dot{\kappa}\right)^{2}+\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}+\kappa^{\frac{4}{3}}\right)\tau^{-1} & 0 & \tau^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overrightarrow{t}\\ \overrightarrow{n}\\ \overrightarrow{b}\end{bmatrix}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{T} &= \left(\kappa\right)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{t} \\
\overrightarrow{N} &= \frac{1}{3}\left(\kappa\right)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\,\overrightarrow{t}+\left(\kappa\right)^{-\frac{1}{3}}\overrightarrow{n} \\
\overrightarrow{B} &= \left(-\frac{5}{9}\kappa^{-\frac{8}{3}}\left(\dot{\kappa}\right)^{2}+\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}+\kappa^{\frac{4}{3}}\right)\tau^{-1}\overrightarrow{t}+\overrightarrow{b}\,\tau^{-1}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

ii) Afin çatıdan Öklid çatıya geçiş matrisi,

$$
\begin{bmatrix}\overrightarrow{t}\\ \overrightarrow{n}\\ \overrightarrow{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa^{-\frac{1}{3}} & 0 & 0\\ -\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & \kappa^{\frac{1}{3}} & 0\\ \left(\frac{5}{9}\kappa^{-3}\left(\dot{\kappa}\right)^{2}-\frac{1}{3}\kappa^{-2}\ddot{\kappa}-\kappa\right) & 0 & \tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overrightarrow{T}\\ \overrightarrow{N}\\ \overrightarrow{B}\end{bmatrix}
$$

olup,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{t} &= (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\overrightarrow{T} \\
\overrightarrow{n} &= -\overrightarrow{T}\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\overrightarrow{T} + (\kappa)^{\frac{1}{3}}\overrightarrow{N} \\
\overrightarrow{b} &= \left(\frac{5}{9}\kappa^{-3}(\dot{\kappa})^{2} - \frac{1}{3}\kappa^{-2}\ddot{\kappa} - \kappa\right)\overrightarrow{T} + \tau\overrightarrow{B}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.4 Afin Uzay Eğrilerin Karakterizasyonları

Afin uzay eğrilerini karakterize etmek için,

$$\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$$

denkleminin türevini alırsak,

$$\alpha''''(s) + k(s)\alpha''(s) + \tau_{\alpha}\alpha'(s) = 0 \tag{4.2}$$

denklemini elde ederiz.

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \\ \alpha'''(s) \end{bmatrix} = \left[\underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tau_{\alpha}(s) & -k(s) & 0 \end{matrix}}_{\Omega}\right]\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \\ \alpha'''(s) \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Afin uzay eğrilerinin temel teoremine göre, afin eğrilikler $\mathbb{R}^3$deki afin dönüşümler altında belirlenebilir. Aşağıda (4.2) denklemindeki başlangıç değer probleminin çözümü yardımıyla sabit eğrilikli eğriler elde edilir. Bu eğrileri bulmak için aşağıdaki önerme kullanılacaktır.

Önerme 4.4.1 (Shengjin' in Formülü):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a \neq 0)$$

tek değerli kübik denklemi için,

$$A = b^2 - 3ac$$

$$B = bc - 9ad$$

$$C = c^2 - 3bd$$

eşitlikleri tanımlanarak

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

hesaplanırsa aşağıdaki çözümler elde edilir:

(1) Eğer $A = B = 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} = -\frac{c}{b} = -\frac{3d}{c}$$

şeklinde elde edilir.

(2) Eğer $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = -\frac{b}{a} + m, \ x_2 = x_3 = \frac{m}{2}, \ (m = \frac{B}{A}, A \neq 0)$$

şeklinde elde edilir.

(3) Eğer $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2} \left(\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}\right)}{3a}$$

$$x_2 = x_3 = \frac{-2b + \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} \pm \sqrt{3}}{6a}$$

ve

$$\left(y_1, y_2 = Ab + \frac{3a}{2}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)\right)$$

şeklinde elde edilir.

(4) Eğer $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{A}\cos\frac{\theta}{3}}{3a}$$

$$x_2 = x_3 = \frac{-b + \sqrt{A}\left(\cos\frac{\theta}{3} \pm \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)}{3a}$$

ve

$$\theta = \arccos t,\ t = \frac{2Ab - 3aB}{2\sqrt{A^3}},\ A > 0,\ \ -1 < t < 1$$

şeklinde elde edilir.

Shengjin' in formülünü kullanılarak (4.3) denklemindeki Ω katsayılar matrisinin özdeğerlerini hesaplamak için,

$$|\lambda I - \Omega| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\tau_\alpha & -k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + k\lambda + \tau_\alpha = 0 \tag{4.4}$$

tek değişkenli kübik denklem olan (4.4) denkleminde $a = 1$, $b = 0$, $c = k$, $d = -\tau_\alpha$ değerleri elde edilir. Bulunan bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} A &= b^2 - 3ac = -3k \\ B &= bc - 9ad = -9\tau_\alpha \\ C &= c^2 - 3bd = k^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

olarak hesaplanır.

(4.5) denkleminde hesaplanan bu değerler kullanılarak,

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4AC \\ &= 81\tau_\alpha^2 + 12k^3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde ifade edilebilir (Hu 2012).

Yukarıda bulunan değerlerin sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 4.4.1: Sabit afin eğrilikli ve sabit afin torsiyonlu bir nondegenere afin uzay eğrisi α, aşağıdaki eşitliklerden birine eşdeğerdir:

(1) $A^2 + B^2 = 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \left(s, \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{6}s^3\right)$$

şeklinde bulunur.

(2) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \left(e^{\sigma s}, se^{\sigma s}, -\frac{1}{18\sigma^5}e^{-2\sigma s}\right)$$

$$\sigma = \left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde bulunur.

(3) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \begin{cases} k^2\left(-k^{\frac{1}{2}}s, \sin\left(k^{\frac{1}{2}}s\right), \cos\left(k^{\frac{1}{2}}s\right)\right), \text{ eğer } \tau_a = 0 \\ \dfrac{1}{2\sigma_1\sigma_2\left(9\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}, \text{ eğer } \tau_a \neq 0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a+\sqrt{12k^3+81\tau_a^2}\right)}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a-\sqrt{12k^3+81\tau_a^2}\right)}{2}}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a+\sqrt{12k^3+81\tau_a^2}\right)}{2}}-\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a-\sqrt{12k^3+81\tau_a^2}\right)}{2}}\right)$$

şeklinde bulunur.

(4) $A^2+B^2\neq 0$ ve $\Delta = B^2-4AC<0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s)=\begin{cases} -k^2\left(-(-k)^{\frac{1}{2}}s,\sinh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right),\cosh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right)\right), \text{ eğer } \tau_a=0 \\ \dfrac{1}{4\sigma_1\sigma_2\left(9\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)\left(\sigma_1^2-\sigma_2^2\right)}e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}, \text{ eğer } \tau_a\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{3}\sqrt{-3k}\cos(\frac{1}{3}\arccos(\frac{27}{2}\tau_a(-3k)^{-\frac{3}{2}}))\\ \sigma_2 &= \sqrt{-k}\sin(\frac{1}{3}\arccos(\frac{27}{2}\tau_a(-3k)^{-\frac{3}{2}}))\end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Hu 2012).

İspat: Shengjin in formülü kullanılarak bu dört durum incelenirse:

(1) $A^2+B^2=0$ durumunda $k=\tau_a=0$ olarak hesaplanır. Bu koşulda (4.4) denkleminin kökleri,

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

şeklinde elde edilir. Bu kökler yardımıyla (4.4) diferensiyel denkleminin temel çözümleri 1, s ve s^2 bulunur. Bu temel çözümler kullanılarak (4.4) diferensiyel denkleminin çözümü,

$$\alpha'(s)=c_1+c_2s+c_3s^2,\ \ c_i(i=1,2,3)\ \mathbb{R}^3\text{de sabit vektörler}$$

şeklinde yazabiliriz. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için

$\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$ olmalıdır. $\alpha'(s)$ eşitliğinin türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= c_1 + c_2 s + c_3 s^2 \\ \alpha''(s) &= c_2 + 2c_3 s \\ \alpha'''(s) &= 2c_3 \end{aligned}$$

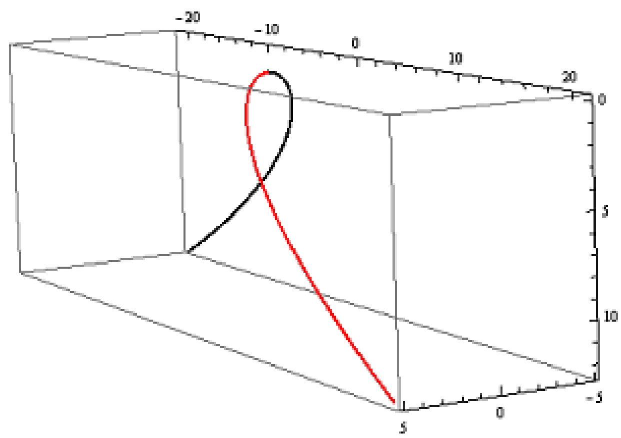
bulunur. Burada $c_0 = (0,\ 0,\ 0)$, $c_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $c_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $c_3 = \left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

seçilerek $\det[c_1, c_2, c_3] = \dfrac{1}{2}$ bulunur ve s afin yay parametresi olur.

Böylece $A^2 + B^2 = 0$ durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s) = \left(s, \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{6}s^3\right) + c_0$$

şeklinde elde edebiliriz. Bu eğrinin grafiği aşagıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.2 $k,\ \tau_a = 0$ için afin uzay eğrisi

(2) $A^2+B^2\neq 0$ ve $\Delta = B^2-4AC=0$ durumunda $k=-\left(\dfrac{3\tau_a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<0$ olarak hesaplanır. Bu koşulda (4.4) denkleminin kökleri,

$$\lambda_1=\lambda_2=\sigma,\ \lambda_3=-2\sigma,\ \sigma=\left(\frac{\tau_a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde elde edilir. Bu kökler yardımıyla (4.4) diferensiyel denkleminin temel çözümleri $e^{\sigma s}$, $se^{\sigma s}$ ve $e^{-2\sigma s}$ bulunur. Bu temel çözümler kullanılarak (4.4) diferensiyel denkleminin çözümü,

$$\alpha'(s)=c_1e^{\sigma s}+c_2se^{\sigma s}+c_3e^{-2\sigma s},\ c_i(i=1,2,3)\ \mathbb{R}^3\text{de sabit vektörler}$$

şeklinde olur. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için
$\det[\alpha'(s),\alpha''(s),\alpha'''(s)]=1$ olmalıdır. Türevler alınırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= c_1e^{\sigma s}+c_2se^{\sigma s}+c_3e^{-2\sigma s}\\
\alpha''(s) &= c_1\sigma e^{\sigma s}+c_2\left(e^{\sigma s}+s\sigma e^{\sigma s}\right)-2\sigma c_3e^{-2\sigma s}\\
\alpha'''(s) &= c_1\sigma^2e^{\sigma s}+c_2\left(2\sigma e^{\sigma s}+s\sigma^2e^{\sigma s}\right)+4\sigma^2c_3e^{-2\sigma s}
\end{aligned}$$

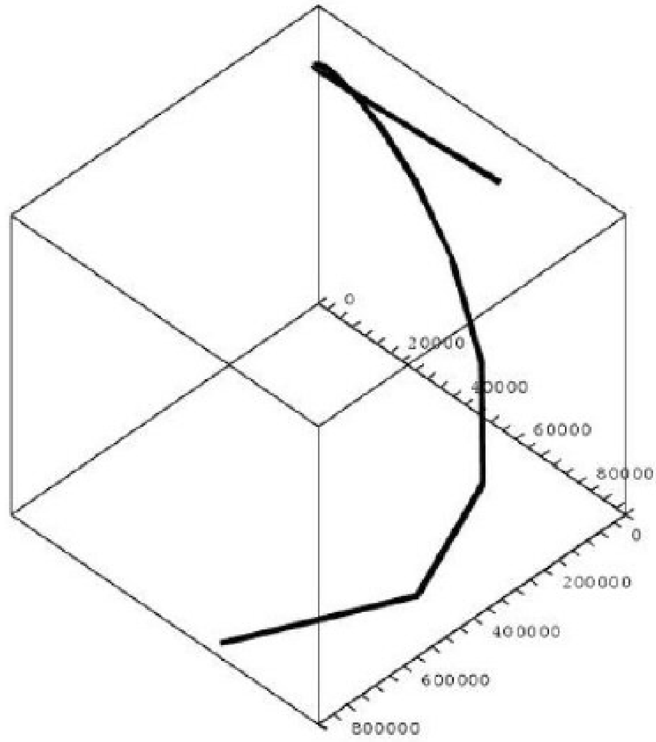
bulunur. Burada $c_0=(0,\,0,\,0)$, $c_1=(\sigma,\,0,\,0)$, $c_2=(0,\,\sigma,\,0)$, $c_3=\left(0,\ 0,\ \frac{1}{9\sigma^4}\right)$

seçilerek $\det[c_1,c_2,c_3]=\dfrac{1}{9\sigma^2}$ bulunur ve s afin yay parametresi olur. Böylece

$A^2+B^2\neq 0$ ve $\Delta=B^2-4AC=0$ durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s)=\left(e^{\sigma s},se^{\sigma s},-\frac{1}{18\sigma^5}e^{-2\sigma s}\right)+c_0$$

şeklinde elde edebiliriz. Bu eğrinin grafiği aşagıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.3 $k < 0$ ve $\tau_a > 0$ için afin uzay eğrisi

(3) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ durumunda (4.4) denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = -2\sigma_{1,}\ \lambda_2 = \sigma_1 + i\sigma_2,\ \ \lambda_3 = \sigma_1 - i\sigma_2$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a + \sqrt{12k^3 + 81\tau_a^2}\right)}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a - \sqrt{12k^3 + 81\tau_a^2}\right)}{2}}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a + \sqrt{12k^3 + 81\tau_a^2}\right)}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_a - \sqrt{12k^3 + 81\tau_a^2}\right)}{2}}\right)$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.4) diferensiyel denkleminin temel çözümleri $e^{-2\sigma_1 s}$, $e^{\sigma_1 s}\cos(\sigma_2 s)$ ve $e^{\sigma_1 s}\sin(\sigma_2 s)$ olarak elde edilir. Burada temel çözümler kullanılarak (4.4) diferensiyel denkleminin çözümünü,

$\alpha'(s) = c_1 e^{-2\sigma_1 s} + c_2 e^{\sigma_1 s}\cos(\sigma_2 s) + c_3 e^{\sigma_1 s}\sin(\sigma_2 s),\ c_i(i=1,2,3)$ $\mathbb{R}^3$de sabit vektörler

şeklinde yazabiliriz. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için $\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$ olmalıdır.

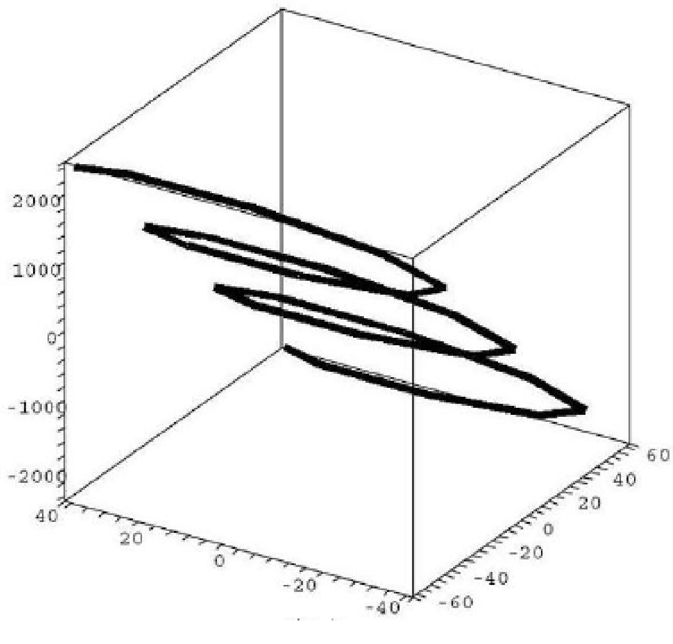
(a) $\tau_a = 0$ durumunda, $\sigma_1 = 0$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = k^{-\frac{3}{2}}$ olarak hesaplanır. Burada

$$c_0 = (0,0,0),\ c_1 = (-k^{-\frac{1}{2}}, 0, 0),\ c_2 = (0, k^{-\frac{1}{2}}, 0),\ c_3 = \left(0,\ 0,\ -k^{-\frac{1}{2}}\right)$$

seçilerek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s) = \left(k^2\left(-k^{\frac{1}{2}}s, \sin\left(k^{\frac{1}{2}}s\right), \cos\left(k^{\frac{1}{2}}s\right)\right)\right) + c_0$$

şeklinde elde edebiliriz. Bu eğrinin grafiği aşagıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.4 $k > 0$ ve $\tau_a = 0$ için afin uzay eğrisi

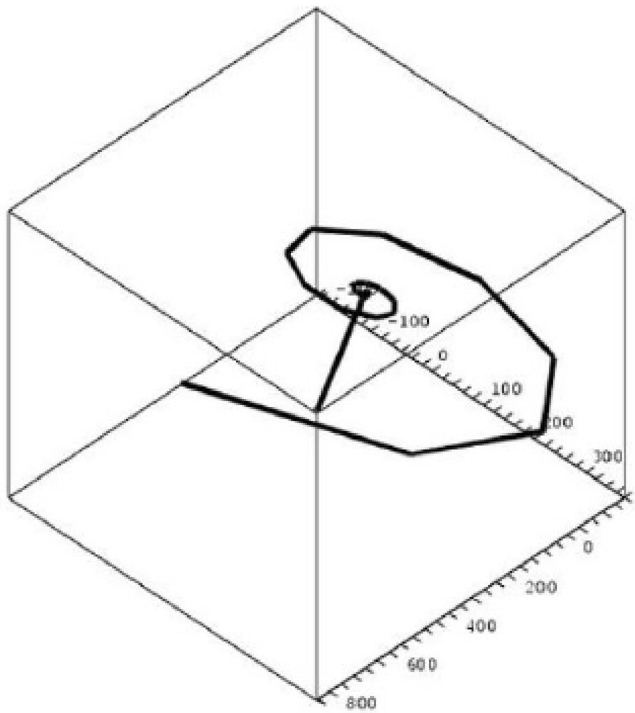
(**b**) $\tau_a \neq 0$ durumunda, $\sigma_1 \neq 0$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{(9\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sigma_2}$ buluruz. Burada

$$c_0 = (0,0,0),\ c_1 = (\frac{1}{\sigma_2\left(9\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}, 0, 0),\ c_2 = (0, \sigma_2, \sigma_1),\ c_3 = (0,\ \sigma_1,\ \ -\sigma_2)$$

seçersek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\left(9\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)} e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s} + c_0$$

şeklinde elde edebiliriz. Bu eğrinin grafiği aşagıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.5 $k > 0$ ve $\tau_a > 0$ için afin uzay eğrisi

(4) $A^2+B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2-4AC<0$ durumunda (4.4) denkleminin kökleri,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -2\sigma_1, \lambda_2 = \sigma_1+\sigma_2,\ \lambda_3 = \sigma_1-\sigma_2 \\
\sigma_1 &= \frac{1}{3}\sqrt{-3k}\cos(\frac{1}{3}\arccos(\frac{27}{2}\tau_a(-3k)^{-\frac{3}{2}})) \\
\sigma_2 &= \sqrt{-k}\sin(\frac{1}{3}\arccos(\frac{27}{2}\tau_a(-3k)^{-\frac{3}{2}})) \\
k &< 0,\ \frac{27}{2}\tau_a\,(-3k)^{-\frac{3}{2}} \in (-1,1)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Buradan (4.4) diferensiyel denkleminin temel çözümleri $e^{-2\sigma_1 s}$, $e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}$ ve $e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}$ bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$\alpha'(s) = c_1e^{-2\sigma_1 s}+c_2e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}+c_3e^{(\sigma_1-\sigma_2)s},\ c_i(i=1,2,3)\ \mathbb{R}^3\text{de sabit vektörler}$$

olarak hesaplanır. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için $\det\left[\alpha'(s),\alpha''(s),\alpha'''(s)\right]=1$ olmalıdır.

(a) $\tau_a=0$ durumunda, $\sigma_1=0$, $\sigma_2=k$ ve $\det[c_1,c_2,c_3]=\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}$ olarak hesaplanır.

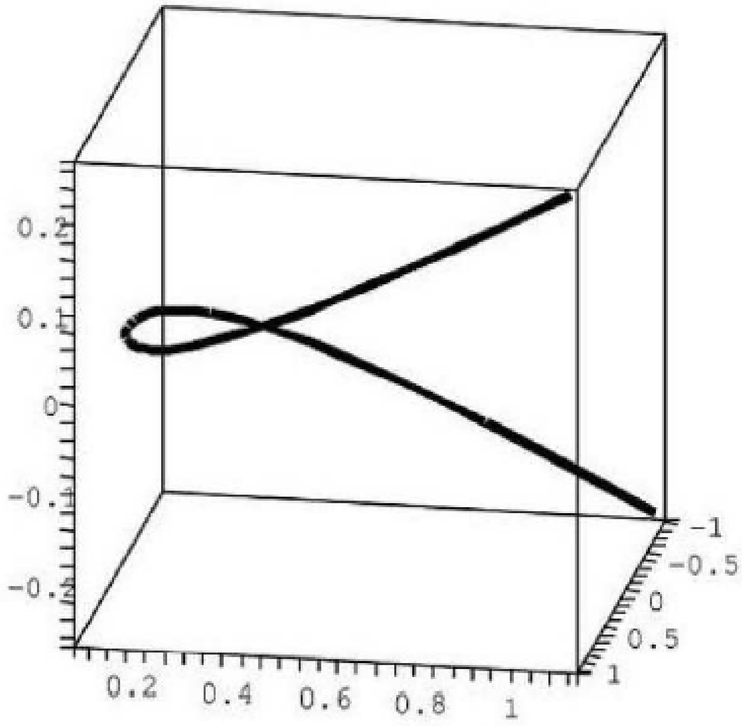
Burada $c_0=(0,0,0)$, $c_2=(0,\frac{1}{2}\,(-k)^{-\frac{1}{2}}\,,\frac{1}{2}\,(-k)^{-\frac{1}{2}})$, $c_3=\left(0,\ \frac{1}{2}\,(-k)^{-\frac{1}{2}}\,,\ \ -\frac{1}{2}\,(-k)^{-\frac{1}{2}}\right)$

seçilerek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2+B^2\neq 0$ ve $\Delta=B^2-4AC<0$

durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s)=\left(-k^2\left(-\,(-k)^{\frac{1}{2}}\,s,\sinh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right),\cosh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right)\right)\right)+c_0$$

şeklinde elde edebiliriz. Bu eğrinin grafiği aşagıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.6 $k < 0$ ve $\tau_a = 0$ için afin uzay eğrisi

(**b**) $\tau_a \neq 0$ durumunda

$\sigma_1 + \sigma_2 \neq 0$, $\sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{2\sigma_2\left(\sigma_2^2 - 9\sigma_1^2\right)}$ olarak hesaplanır. Burada

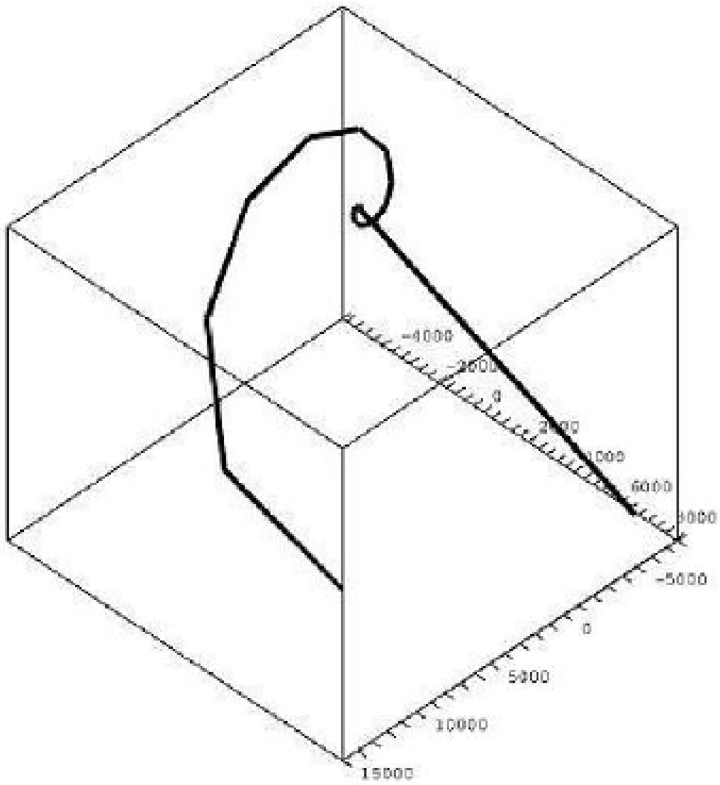
$c_0 = (0,0,0)$, $c_1 = (0, (\sigma_1 + \sigma_2), 0)$, $c_2 = (0, 0, (\sigma_1 - \sigma_2))$, $c_3 = \left(\frac{1}{2\sigma_2\left(\sigma_2^2 - 9\sigma_1^2\right)\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)},\ 0,\ 0\right)$

seçilerek s, afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = B^2 - 4AC < 0$

durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{4\sigma_1\sigma_2\left(9\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)} e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s} \right) + c_0$$

şeklinde elde edebiliriz. Bu eğrinin grafiği aşagıdaki gibi çizilebilir.

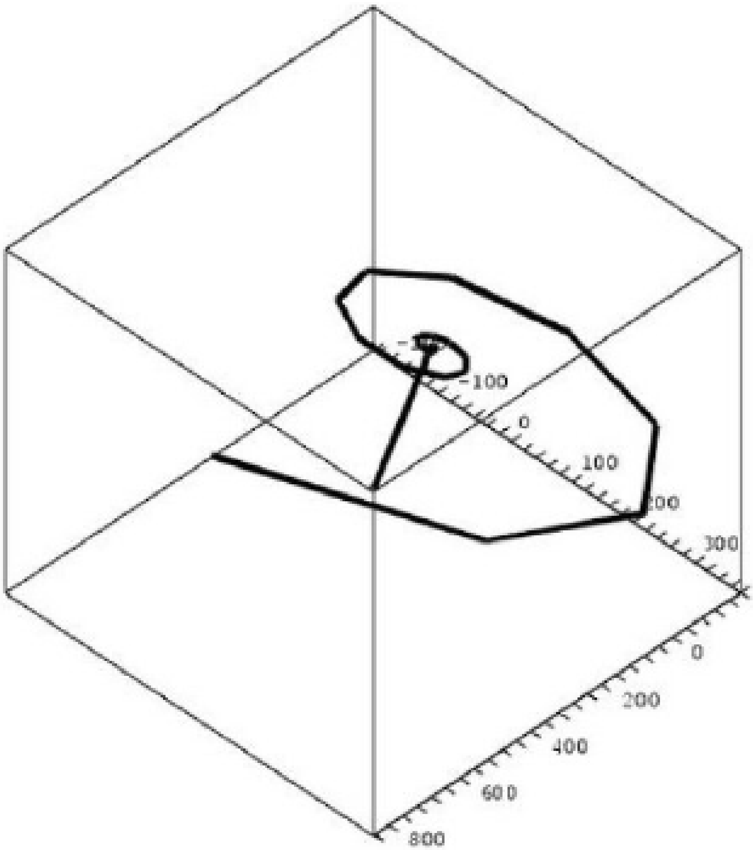


Şekil 4.7 $k < 0$ ve $\tau_a \neq 0$ için afin uzay eğrisi

Böylece teoremin ispatını bitirebiliriz (Hu 2012).

Sabit Afin eğrilik ve sabit afin torsiyonun $k \neq 0$ ve $\tau_a \neq 0$ durumlarına göre grafikleri çizilirse,

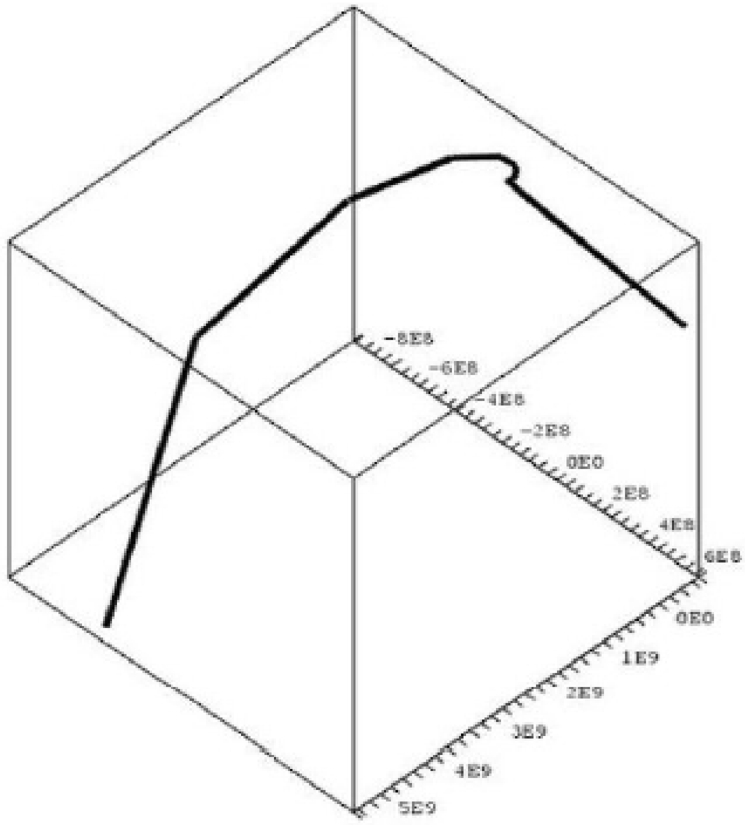
i) $k > 0$ ve $\tau_a > 0$ durumunda,



Şekil 4.8 $k > 0$ ve $\tau_a > 0$ için afin uzay eğrisi

şeklinde elde edilir.

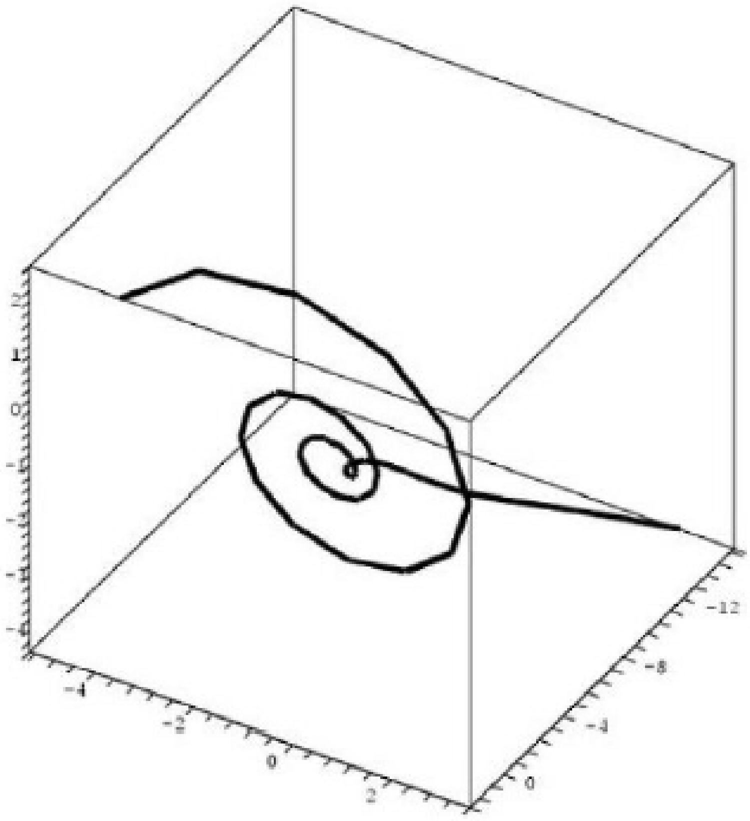
ii) $k < 0$ ve $\tau_a < 0$ durumunda,



Şekil 4.9 $k < 0$ ve $\tau_a < 0$ için afin uzay eğrisi

şeklinde elde edilir.

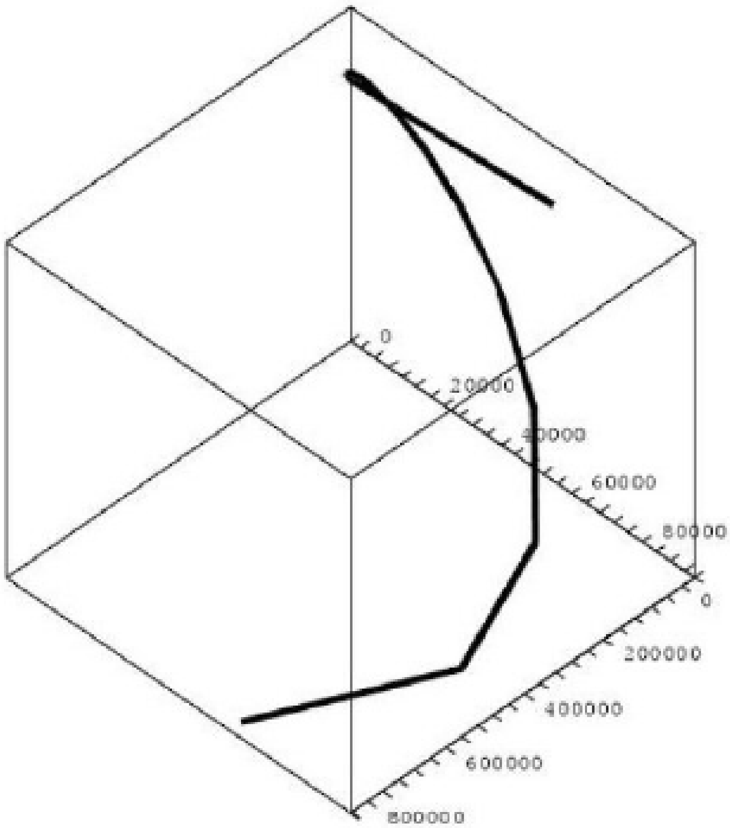
iii) $\tau_a < 0 < k$ durumunda,



Şekil 4.10 $\tau_a < 0 < k$ için afin uzay eğrisi

şeklinde elde edilir.

iv) $k < 0 < \tau_a$durumunda,



Şekil 4.11 $k < 0 < \tau_a$ için afin uzay eğrisi

şeklinde elde edilir (Nadjafikhah and Shirayeh 2011).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında; Afin Diferensiyel Geometride Eğriler Teorisinin, afin dönüşümler grubu altında incelenmesidir. Eğriler düzlemde ve uzayda iki kısımda incelenmiştir. Ayrıca afin 1-manifoldların eğri olduğu incelenmiştir. Ayrıca eğrilerin karakterizasyonları hakkında destek fonksiyoları kullanılarak yeni bağıntılar verilmiştir. Afin Diferensiyel Geometride eğriler konusu eski bir konudur fakat hala bu konu hakkında çalışmalar yapılmaktadır. Günümüzdeki teknolojinin temeli afin dönüşümler kullanılır. Bu bakımdan bu tez çalışması bu konuda çalışanlar için önemli bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

Blaschke, W. 1923. Vorlesungen ¨uber Differentialgeometrie II. Affine Differential geometrie ,Springer, Berlin

Buchin, S.1983. Affine Differential Geometry. Gordon and Breach, China

Ghosh, J. 1978. Curves and Surfaces In Geometric Modelling: Theory and Algorithms

Guggenheimer, H. 1963. Differential Geometry, Dover Publications, Inc., New York.

Hacısalihoğlu, H.H. 1998. H. Diferensiyel Geometri, Cilt 1,2. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara

Hacısalihoğlu, H.H. 2000. Dönüşümler ve Geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara

Hu, N. 2012. Affine Geometry of Space Curves and Homogenous Surfaces, Department of Mathematics Graduate School of Science Hokkaaido University

Izumıya, S. and Sano, T. 1998. Generic Affine Differential Geometry of Plane Curves,
Proceedings of the Edinburg Mathematical Society, 41, 315-324

Izumıya, S. and Sano, T. 1998. Generic Affine Differential Geometry of Space Curves,
Proceedings of the Edinburg Mathematical Society, 128A, 301-314

Kim, D.S. and Kim, Y.H. 2007. A characterization of ellipses, Amer.Math. Monthly,114, 66-70.

Kobayashi, S. and Nomuzi, K. 1969. Foundations of Differential Geometry Vol II, Interscience Publishers

Korkmaz, B. 2012. Diferensiyel Geometri:Eğriler Ve Yüzeyler, Tüba Yayınları, Ankara

Nadjafikhah, M, and Shirayeh, M. A. 2011. Claassification Of Curves in Affine Geometry, Dynamıcal systems, Vol. 13, pp. 191-200.

Nomizu, K. and Sasaki, T. 1994. Affine differential geometry, Cambridge Univ. Press

O.Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York,

Ozan, Y. 2015. Web Sitesi: http://www.metu.edu.tr/~ozan/ozan19052015.pdf Erişim Tarihi: 19.05.2015

Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara, (2001)

Santaló, L.A. 1964. Web Sitesi: http://www.ams.org/journals/bull/1946-52-08/ S0002-9904-1946-08609-7/S0002-9904-1946-08609-7.pdf Erişim Tarihi: 20.06.2014

Yu, Y. and Liu, H. 2008. A characterization of parabola, Bulletin of the Korean . Mathematical Soc. 45, 631–634, .

Yüce, S. (2013). Diferensiyel Geometri, Sürat ÜniversiteYayınları, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gizem CANSU
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 24.09.1990
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Yahya Kemal Beyatlı Lisesi (2008)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2013)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı , (*Eylül* 20

Katıldığı Sempozyum ve Seminerler

1. 9 Ankara Matematik Günleri, (12-13 Haziran 2014)
2. XII. Geometri Sempozyumu, "On Curvatures of Planar Curves"
   adlı çalışma sunulmuştur (23-26 Haziran 2014).
3. Atılım Geometri Topoloji Çalıştayı (15-16 Mayıs 2015)