



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**N-BOYUTLU VE YÜKSEK MERTEBEDEN**  
**KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN**  
**İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM**  
**YÖNTEMİ**

**Ömer AÇAN**

**DOKTORA TEZİ**

**Haziran-2016**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

**Haziran-2016**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

**TEZ KABUL VE ONAYI**


Ömer AÇAN tarafından hazırlanan “n-Boyutlu ve Yüksek Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler için İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi” adlı tez çalışması 20/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Jüri Üyeleri**

**İmza**

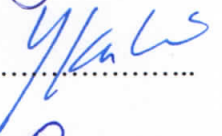
**Başkan**

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

.....  


**Danışman**

Doç. Dr. Yıldırım KESKİN

.....  


**Üye**

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

.....  


**Üye**

Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN

.....  


**Üye**

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ZEKİ

.....  


Yukarıdaki sonucu onaylarım.

.....  


Prof. Dr. Aşır GENÇ

FBE Müdürü

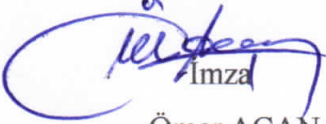
Bu tez çalışması Selçuk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 15101003 nolu proje ile desteklenmiştir.

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



İmza

Ömer AÇAN

20/06/2016

**ÖZET**  
**DOKTORA TEZİ**

**N-BOYUTLU VE YÜKSEK MERTEBEDEN**  
**KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN**  
**İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ**  
**Ömer AÇAN**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Yıldırım KESKİN**

**2016, 59 Sayfa**

**Jüri**

**Doç. Dr. Yıldırım KESKİN**  
**Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**  
**Prof. Dr. Galip OTURANÇ**  
**Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN**  
**Yrd. Doç. Dr. Mustafa ZEKİ**

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diferansiyel denklemlerin çözümünün amaç ve önemi, ikinci bölümde n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak yöntemlerin tarihsel gelişimi ve literatür taraması ayrıntılı bir şekilde verilmektedir. Üçüncü bölümde, n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak yöntemler ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler, dördüncü bölümde 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden Zakharov–Kuznetsov (ZK) denklemi ve 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden Kuramoto-Sivashinsky (KS) denklemi olmak üzere iki tane test problemi verilmektedir. Bu kısmi diferansiyel denklemler üçüncü bölümde verilen yöntemler yardımı ile çözülmektedir. Elde edilen çözümler tablolar ve grafikler ile yorumlanmaktadır. Beşinci bölümde ise sonuçlar ve öneriler verilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Diferansiyel dönüşüm yöntemi, Homotopi analiz yöntemi, İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi, Kuramoto Sivashinsky denklemi, Varyasyonel iterasyon yöntemi, Zakharov Kuznetsov denklemi.

**ABSTRACT**

**Ph.D THESIS**

**N-DIMENSIONAL AND HIGHER ORDER  
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION FOR  
REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD**

**Ömer AÇAN**

**The Graduate School of Natural and Applied Science of Selçuk university  
Department of Mathematics**

**Advisor: Doç. Dr. Yıldırım KESKİN**

**2016, 59 Pages**

**Jury**

**Doç. Dr. Yıldırım KESKİN**

**Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**

**Prof. Dr. Galip OTURANÇ**

**Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN**

**Yrd. Doç. Dr. Mustafa ZEKİ**

This thesis consists of five main sections. The importance and purpose of the solutions of differential equations are given in the first part. In the second part, the methods used to solve n-dimensional and high order partial differential equations are given with in details of the historical development and the literature report detail. In the third section, some definitions and theorems about the methods that will be used to solve n-dimensional and high order partial differential equations are given. The fourth chapter, 3-dimensional and third order Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation and 2-dimensional and fourth order Kuramoto-Sivashinsky (KS) equation are given as two test problems. These partial differential equations by the help of the methods given in the third section are solved. The obtaining solutions are interpreted with tables and graphs. In the fifth chapter we present results and recommendations.

**Keywords:** Differential transform method, Homotopy analysis method, Kuramoto Sivashinsky equation, Reduced differential transform method, Zakharov Kuznetsov equation.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Sayın Yıldray KESKİN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma boyunca destek ve ilgilerini benden esirgemeyen, değerli görüş ve önerilerini benimle paylaşan tez danışmanım Doç. Dr. Sayın Yıldray KESKİN'e ve tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Sayın Durmuş BOZKURT'a ve Yrd. Doç. Dr. Sayın Mustafa ZEKİ'ye teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Doktora Eğitimim boyunca verdiği burs ile çalışmalarımı kolaylaştıran TÜBİTAK'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmamın her aşamasında manevi desteği ile hep yanımda olan anneme babama, eşim Ebrar AÇAN'a, oğlum Muhammed Taha AÇAN'a ve altı gün önce dünyaya gelerek hayatımıza renk katan kızım Behiye Erva AÇAN'a teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

**Ömer AÇAN**  
**KONYA-2016**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
TABLolar DİZİNİ .....	x
KISALTMALAR .....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	3
3. SAYISAL YÖNTEMLER.....	12
3.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi .....	12
3.1.1. Tek-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	12
3.1.2. 2-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi .....	13
3.1.3. n-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi .....	15
3.1.4. Lineer Olmayan Fonksiyonların Dönüşüm Karşılığı.....	16
3.2. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	18
3.2.1. 2-Boyutlu İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	18
3.2.2. n-Boyutlu İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	19
3.2.3. Lineer Olmayan Fonksiyonların Dönüşüm Karşılığı.....	21
3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi .....	23
3.4. Homotopi Analiz Yöntemi .....	24
4. UYGULAMALAR .....	26
4.1. 3-Boyutlu ve Üçüncü Mertebeden Zakharov–Kuznetsov Denklemi .....	26
4.2. 2-Boyutlu ve Dördüncü Mertebeden Kuramoto-Sivashinsky Denklemi .....	36
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	48

<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>49</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>58</b>
<b>YAYINLAR.....</b>	<b>59</b>





## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

- Şekil-4.1.** (a) ZK(2,2) denkleminin analitik çözümü, (b) ZK(2,2) denkleminin RDTM çözümü, (c) ZK(2,2) denkleminin VIM çözümü, (d) RDTM çözümü ile analitik çözüm arasındaki mutlak hata, (e) VIM çözümü ile analitik çözüm arasındaki mutlak hata. 29
- Şekil-4.2.** (a) ZK(3,3) denkleminin analitik çözümü, (b) ZK(3,3) denkleminin RDTM çözümü, (c) ZK(3,3) denkleminin VIM çözümü, (d) RDTM çözümü ile analitik çözüm arasındaki mutlak hata, (e) VIM çözümü ile analitik çözüm arasındaki mutlak hata. 34
- Şekil-4.3.** (4.31) de KS denklemi için 2. iterasyon ile çözümler ve mutlak hata grafikleri.  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $x_0 = -75$ ,  $x = 0$  ve  $0 \leq t \leq 100$ . 40
- Şekil-4.4.** (4.31) de KS denklemi için 2. iterasyon ile çözümler ve mutlak hata grafikleri.  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $x_0 = -75$ ,  $x = 5$  ve  $0 \leq t \leq 100$ . 41
- Şekil-4.5.** (4.31) de KS denklemi için 2. iterasyon ile çözümler ve mutlak hata grafikleri.  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $x_0 = -75$ ,  $x = 10$  ve  $0 \leq t \leq 100$ . 42
- Şekil-4.6.** (4.59) deki KS denklemi için 2. iterasyon ile çözümler ve mutlak hata grafikleri.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.15$ ,  $x_0 = -10$ ,  $x = 0$  ve  $0 \leq t \leq 50$ . 47

## TABLULAR DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
<b>Tablo-3.1.</b> 3-boyutlu lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşümü veren maple kodu.	<b>16</b>
<b>Tablo-3.2.</b> 3-boyutlu lineer olmayan bazı fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tablosu.	<b>17</b>
<b>Tablo-3.3.</b> n-boyutlu lineer olmayan fonksiyonlar için $x_1$ boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşümü veren maple kodu.	<b>21</b>
<b>Tablo-3.4.</b> n-boyutlu lineer olmayan bazı fonksiyonlar için $x_1$ boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu.	<b>22</b>
<b>Tablo-4.1.</b> ZK(2,2) denklemi için 3. iterasyon ile yaklaşık ve analitik çözümlerin karşılaştırılması. ( $\lambda = 0,001$ )	<b>30</b>
<b>Tablo-4.2.</b> ZK(3,3) denklemi için 3. iterasyon ile yaklaşık ve analitik çözümlerin karşılaştırılması. ( $\lambda = 0,001$ )	<b>35</b>

## KISALTMALAR

<b>ADM</b>	:	Adomian ayrışım yöntemi
<b>DTM</b>	:	Diferansiyel dönüşüm yöntemi
<b>HAM</b>	:	Homotopi analiz yöntemi
<b>HPM</b>	:	Homotopi pertürbasyon yöntemi
<b>RDTM</b>	:	İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi
<b>VIM</b>	:	Varyasyonel iterasyon yöntemi
<b>KS</b>	:	Kuramoto-Sivashinsky
<b>ZK</b>	:	Zakharov-Kuznetsov

## 1. GİRİŞ

Evrendeki pek çok fiziksel olgu ve olay, daha iyi anlaşılıp yorumlanabilmesi için matematiksel modellerle ifade edilmiştir. Uygulamalı alanda çalışan bilim adamları fiziksel olayların matematiksel modellemesi üzerinde çalışarak doğadaki bir çok fiziksel olayı adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile açıklamışlardır. Dolayısıyla bu modellerden ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin analitik, yaklaşık ve nümerik çözümlerini hesaplamak, modele karşılık gelen fiziksel olgu ve olayı daha iyi anlamak ve yorumlamak açısından oldukça önemlidir. Ancak ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin çözümleri için analitik yöntemlerin uygun olmaması araştırmacıları yaklaşık ve sayısal çözüm yöntemlerini kullanmaya yönlendirmektedir. Bunun yanında günümüzde artan işlemci hızı ile birlikte bilgisayar kullanımının yaygınlaşması sayesinde bilgisayar algoritmalarını ve sayısal yöntemlerin ilgi odağı haline getirmiştir. Bilgisayar algoritmaları yardımı ile daha hızlı bir şekilde ve daha az hata ile çözüme ulaşmak mümkün olmaktadır (Atkinson ve Han, 2005; Wazwaz, 2010; Liao, 2012).

Son yıllarda literatürde diferansiyel denklemlerin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerden bazıları, diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) (Zhou, 1986), varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) (He, 1999), indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (RDTM) (Keskin ve Oturanc, 2009), homotopi analiz yöntemi (HAM) (Liao, 1992) şeklinde sıralanabilir.

Bu çalışmada n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için aşağıdaki test problemleri ele alınmıştır.

3-boyutlu ve ikinci mertebeden Zakharov Kuznetsov (ZK) denklemi,

$$u_t + auu_x + (\nabla^2 u)_x = 0$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  laplasyendir. Bu denklemin açık hali,

$$u_t + auu_x + (u_{xx} + u_{yy})_x = 0$$

biçiminde ifade edilmektedir. ZK denkleminin başka bir tipi olan 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK(m,m) denklemi,

$$u_t + a(u^m)_x + b(u^m)_{xxx} + k(u^m)_{yyx} = 0, a, b, k > 0$$

şeklinde ifade edilmektedir (Zakharov ve Kuznetsov, 1974; Munro ve Parkes, 2000; Wazwaz, 2005; Inc, 2007).

2-boyutlu ve dördüncü mertebeden Kuramoto-Sivashinsky (KS) denklemi,

$$u_t + uu_x + \gamma u_{xx} + \lambda u_{xxxx} = 0$$

olarak ifade edilmektedir (Sivashinsky, 1977; Sivashinsky, 1980; Porshokouhi ve Ghanbari, 2011; Kurulay ve ark., 2013).

Ele alınan bu problemlerden ilk olarak 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK denkleminin RDTM ve VIM ile yaklaşık çözümü elde edildi. Elde edilen yaklaşık çözümler ve yöntemlerin çözüm hızları karşılaştırıldı. Bunun için ZK(2,2) ve ZK(3,3) denklemleri olmak üzere iki farklı ZK kısmi diferansiyel denklemleri ele alındı. İkinci olarak 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden KS denkleminin RDTM, HAM ve VIM yardımıyla yaklaşık çözümü elde edildi. Elde edilen yaklaşık çözümler karşılaştırıldı. Bunun için iki farklı KS kısmi diferansiyel denklemleri ele alındı. Hesaplamalar yapılırken Maple ve Mathematica yazılım programları kullanıldı.



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan DTM, RDTM, VIM ve HAM olmak üzere yöntemlerin tarihsel gelişim sürecinden ve literatürde yapılan çalışmalardan söz edilecektir.

DTM ilk olarak Zhou (1986) tarafından elektrik devre analizinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Bu yöntemle lineer ve lineer olmayan, adi ve kısmi diferansiyel denklemler basit bir dönüşüm ile cebirsel denklemlere indirgenebilmektedir.

Chen ve Ho (1996), çalışmasında DTM bir özdeğer problemine uygulanarak özdeğer problemini fark denklemleri sistemine dönüştürülmüş, özdeğer ve özfonksiyonları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde var olan diğer yöntemlerin sonuçlarıyla uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Chen ve Liu (1998), çalışmasında DTM lineer olmayan ısı iletimi problemlerine uygulanmıştır.

Yu ve Chen (1998), çalışmasında lineer olmayan üçüncü mertebeden Blasius denklemi DTM yardımı ile çözülmüştür.

DTM, Chen ve Ho (1999) tarafından kısmi diferansiyel denklemlere genişletilerek 2-boyutlu DTM olarak literatüre kazandırılmıştır. 2-boyutlu DTM sayesinde sabit ve değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözülebilmesi sağlanmıştır.

Jang ve ark. (2000), çalışmasında lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için uyarlamalı şebeke adımına dayalı sabit şebeke adımı tekniğini, DTM ile birlikte kullanılarak DTM iyileştirilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar 4. mertebe Runge-Kutta yöntemiyle karşılaştırılarak, DTM ile elde edilen çözümlerin iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Jang ve ark. (2001), çalışmasında 2-boyutlu DTM kullanılmıştır. Eliptik tipten Poisson denklemi, hiperbolik tipten dalga denklemi ile sınır şartında süreksizlik olan parabolik tipten tek-boyutlu sabit olmayan ısı iletim denklemi gibi lineer kısmi diferansiyel denklemler ve hiperbolik tipten lineer olmayan denklemler çözümlenerek kapalı formda tam çözümler elde edilmiştir.

Ayaz (2003), tarafından 2-boyutlu DTM ile ilgili bazı yeni teoremler verilmiştir. Verilen teoremler yardımıyla lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemlerine diferansiyel dönüşüm uygulanarak tam çözümler elde edilmiştir.

Ayaz (2004b), çalışmasında ise 3-boyutlu diferansiyel dönüşüm kavramı tanımlanmıştır. Literatüre yeni dönüşüm formülleri eklenerek lineer ve lineer olmayan

kısmi diferansiyel denklem sistemleri çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar tam ve ADM çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Ayaz (2004a), çalışmasında indeksi 1 olan değişken katsayılı lineer diferansiyel cebirsel denklemlere DTM uygulamış ve seri çözümler elde edilmiştir. Elde edilen seri çözümler tam çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Ayaz ve Oturanc (2004), çalışmasında Burgers denkleminin yaklaşık çözümü DTM ile elde edilmiştir.

Chen ve Ju (2004), çalışmasında sonlu farklar yöntemiyle DTM beraber kullanılarak bir problem çözülmüştür.

Kurnaz ve ark. (2005), çalışmasında kısmi diferansiyel denklemler için n-boyutlu DTM yeni teoremlerle tanıtılmıştır. Bu yöntemle bazı lineer ve lineer olmayan problemler için yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Arikoglu ve Ozkol (2005), çalışmasında integro diferansiyel denklemlerin DTM ile çözülebilmesi için gerekli olan teoremler verilmiştir. Lineer ve lineer olmayan integro diferansiyel denklemler için verilen sınır değer problemleri çözülmüştür. Bu çözümler literatürdeki başka yöntemlerle karşılaştırılarak DTM ile elde edilen seri çözümlerin daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Bildik ve Konuralp (2006), çalışmasında farklı tip kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri VIM, DTM ve ADM yardımı ile elde edilmiş ve kıyaslanmıştır.

Keskin ve ark. (2007), çalışmasında DTM ile pantograf denklemleri ele alınarak çözülmüştür.

Keskin ve Oturanc (2008), çalışmasında lineer olmayan fonksiyonlar için yeni diferansiyel dönüşüm verilmiştir. Bunun ışığında Emden Fowler diferansiyel denklemi çözülmüştür.

Odibat (2008), çalışmasında, lineer ve lineer olmayan ayrılabilir çekirdekli Volterra integral denklemi DTM ile seri çözümünü elde edilmiş ve denklemlerin tam çözümleri ile kıyaslamıştır.

Islam ve ark. (2009), çalışmasında 12. mertebeden özel bir sınır değer problemi DTM yardımı ile çözülmüştür.

Biazar ve Eslami (2010), çalışmasında Telgraf denklemi DTM kullanılarak çözülmüş ve örnekler ile desteklenmiştir.

Yaghoobi ve Torabi (2011), çalışmasında iki tane lineer olmayan ısı transfer problemi DTM ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar VIM ve homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM) sonuçlarıyla kıyaslanmıştır.

Ganji ve ark. (2012), çalışmasında kalabalık trafikte yavaş ilerleme problemine (Jamming geçiş problemine) karşılık gelen lineer olmayan problemi DTM ile çözmüş ve 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Abazari ve Kılıcman (2014), çalışmasında gecikmeli tipten integro diferansiyel denklemlerin uygulaması, DTM üzerinden verilmiştir.

RDTM ilk olarak 2009 yılında Keskin ve Oturanc (2009) tarafından tanıtılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bu yöntem DTM'den yola çıkılarak elde edilmiştir. Bu çalışmada, Üç farklı başlangıç değeri problemi ele alınmıştır.

Keskin ve Oturanc (2010a), çalışmasında RDTM ile genelleştirilmiş KdV denklemleri çözülmüştür. Bununla ilgili üç tane uygulama verilmiştir. Bu uygulamadan ilkinde analitik çözüm elde edilmiştir. İkincisinde elde edilen yaklaşık çözüm analitik çözüm ile kıyaslanmıştır. Son uygulamada ise elde edilen yaklaşık çözüm, analitik ve VIM çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Keskin ve Oturanc (2010c), çalışmasında lineer ve lineer olmayan dalga denklemleri RDTM ile çözülmüştür. Elde edilen çözümler analitik ve VIM çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Keskin ve Oturanc (2010d), çalışmasında homojen ve homojen olmayan gaz dinamik kısmi diferansiyel denklemleri RDTM ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar analitik çözümler ile aynı olduğu görülmüştür.

Keskin ve Oturanc (2010b), çalışmasında Regularized Long Wave (RLW) kısmi diferansiyel denklemlerine RDTM uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürde var olan analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Cenesiz ve ark. (2010), çalışmasında lineer olmayan  $K(m,n)$  tipindeki kısmi diferansiyel denklemlerin RDTM ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Burada  $K(2,2)$  ve  $K(3,3)$  denklemleri özel olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik çözümler ile bir uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Taha (2011), çalışmasında değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemleri için RDTM'nin bir uygulaması verilmiştir.

Taghizadeh ve ark. (2011), çalışmasında bir dalga denklemleri olan lineer olmayan Wu-Zhang kısmi diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümleri RDTM kullanılarak elde edilmiştir.



Hesam ve ark. (2012), çalışmasında RDTM, Fornberg-Whitham tipindeki kısmi diferansiyel denkleminin uygulanmış ve bu denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiştir.

Abazari ve Soltanalizadeh (2012), çalışmasında sığ su dalgaları teorisinde ve magneto-akustik dalga, plazma dalgaları gibi birçok fiziksel olayların modellenmesinde önemli bir rol oynayan Kawahara ve modifiye edilmiş Kawahara denklemi ele alınmıştır. Bu denklem RDTM ile çözülmüş ve literatürde var olan analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır.

İbiş ve Bayram (2012), çalışmasında farklı tipteki lineer olmayan evölüsyon denklemlerinden Korteweg-de Vries Burgers' (KdVB) denklemi, Drinfeld-Sokolov-Wilson denklemi, Coupled Burgers' denklemi ve modifiye edilmiş Burgers' denklemi ele alınmıştır. Bu denklemlerin yaklaşık çözümleri RDTM kullanılarak bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Yıldırım ve ark. (2012), çalışmasında Fisher's denklemi, genelleştirilmiş Fisher's denklemi ve lineer olmayan difüzyon tipindeki Fisher's denkleminin RDTM yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Burada elde edilen sonuçların HPM ve ADM'den daha etkili ve kolay olduğu gösterilmiştir.

Abazari ve Abazari (2012), çalışmasında genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denkleminin DTM ve RDTM ile yaklaşık çözümü araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar hem kendi arasında hem de analitik sonuçlar ile karşılaştırılarak RDTM'nin daha kullanışlı olduğu gösterilmiştir.

Saravanan ve Magesh (2013), çalışmasında Newell-Whitehead-Segel kısmi diferansiyel denklemi RDTM ve ADM ile çözülmüş ve yöntemler çözümlerin grafiğe aktarılmasıyla karşılaştırılmıştır. Bunun sonucunda RDTM'nin ADM'ye göre daha avantajlı olduğu gösterilmiştir.

Rawashdeh (2013), çalışmasında lineer olmayan Biyoloji ve Fizik'de karşılaşılan Fitzhugh-Nagumo kısmi diferansiyel denklemi, RDTM kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar analitik çözüm ile karşılaştırılmış ve RDTM'nin lineer olmayan denklemler için kullanışlı olduğu gösterilmiştir.

Al-Amr (2014), çalışmasında genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov denklemi ve Kaup-Kupersmidt denklemi olmak üzere iki farklı lineer olmayan probleme RDTM uygulanmıştır.

Srivastava ve ark. (2014), çalışmasında  $(1+n)$ -boyutlu Burgers' denklemi RDTM ile yaklaşık çözümü bulunmuştur. Elde edilen sonuçların literatürde daha önce ADM, HPM ve VIM çözümleri ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Acan ve Keskin (2015b), çalışmasında 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK (n,n) denkleminin yaklaşık çözümü RDTM kullanılarak incelenmiştir. Bunun ile ilgili ZK(2,2) ve ZK(3,3) olmak üzere iki uygulama yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Acan ve Keskin (2015a), çalışmasında 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden KS denkleminin yaklaşık çözümü RDTM kullanılarak incelenmiştir. Bunun ile ilgili iki uygulama yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Acan ve Keskin (2016), çalışmasında 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK kısmi diferansiyel denklemi RDTM ve VIM ile yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler ve yöntemlerin çözüm hızları karşılaştırılmıştır.

VIM ilk olarak 1997 yılında He (1997a) tarafından tanıtılmıştır. Bu yöntem, Inokuti ve ark. (1978) tarafından kuantum mekaniğindeki problemleri çözmek için kullanılan Lagrange çarpanı yönteminden yola çıkılarak elde edilmiştir. He (1997a), çalışmasında yöntemin ana hatları lineer olmayan iki adi diferansiyel denklem üzerinde gösterilmiş, yöntem kısmi diferansiyel denklemlere genişletmiştir. Elde edilen sonuçları ADM ile karşılaştırılmıştır.

He (1997b), çalışmasında VIM, gecikmeli diferansiyel denklem ile ifade edilen bir popülasyon büyüme modeline uygulanmıştır.

He (1998a), çalışmasında VIM, lineer adi diferansiyel denklem, lineer olmayan adi diferansiyel denklem ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem üzerinde uygularken Lagrange çarpanının nasıl bulunacağına dair bazı ayrıntılar verilmiştir. Daha sonra bu yöntem 2-boyutlu bir akışı modelleyen denkleme uygulanmış ve daha önce ADM ile elde edilen analitik çözüme yakınsayan seri çözümü yerine direkt olarak analitik çözüm elde edilmiştir. Ayrıca VIM kesirli türevli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

He (1998b), çalışmasında VIM, lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanmış ve bununla ilgili uygulamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar daha önce ADM ile elde edilen sonuçlarla aynı olduğu gösterilmiştir.

He (1999), çalışmasında VIM, literatürde olan beş farklı lineer olmayan probleme uygulanmıştır. Burada Lagrange çarpanının seçimindeki öneminden bahsedilmiş, bu çarpanın doğru seçiminin özellikle lineer problemler için daha hızlı bir şekilde analitik çözüme yakınsayan ardışık yaklaşımlar ortaya koyacağı bir örnekle gösterilmiştir. Lagrange çarpanı seçimin problemdeki lineer olmayan terimlerin kısıtlanmış

varyasyonlar olarak ele alınması ile daha doğru yapılabileceği vurgulanmıştır. Bu şekilde lineer olmayan problemler için de Lagrange çarpanının nasıl seçilmesi gerektiği anlatılmıştır. ADM ile teorik bir karşılaştırma yapılmış ve çalışmanın sonuç bölümünde de yöntemin bazı özellikleri bahsedilmiştir.

He (2000), çalışmasında VIM, otonom diferansiyel denklem sistemlerin çözümünde kullanılmıştır. Çalışmada yöntemin avantaj sağlayan yanlarından bahsedilmiştir. İlk olarak İterasyonun yapıldığı düzeltme fonksiyonları, en iyi şekilde varyasyonel teori ile belirlenen Lagrange çarpanları aracılığıyla oluşturulabileceği, özellikle düzeltme fonksiyonunda kısıtlanmış varyasyonların uygulanması bu çarpanı belirlemeyi daha kolay hale getirilebileceği vurgulanmıştır. Başlangıç yaklaşımı, uygun bilinmeyen sabitler ile keyfi olarak seçilebileceği söylenmiştir. Bu yöntem yoluyla elde edilen yaklaşımlar yalnızca küçük parametreler için değil büyük parametreler için de geçerli olabileceği ifade edilmiştir.

Liu (2004), çalışmasında VIM, lineer olmayan elektrokimyasal sistemlere uygulanmıştır.

Abdou ve Soliman (2005), çalışmasında VIM, Burger's ve coupled Burger's denklemlerin çözümünün elde edilmesinde kullanılmıştır. Elde edilen çözümler ADM'nin çözümleri ile karşılaştırılmış ve VIM'in avantajları ortaya koyulmuştur.

Bildik ve Konuralp (2006), çalışmasında lineer olmayan diferansiyel denklemler için VIM, DTM ve ADM uygulanmış ve bazı örnekler verilmiştir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda VIM'in diğer iki yönteme göre uygunluğu vurgulanmıştır.

Momani ve ark. (2006), çalışmasında lineer olmayan bir sınır değer probleminin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak için VIM kullanılmıştır. ADM ile karşılaştırmalar yapılmış ve bazı problemlerde ADM'nin bazı problemlerde ise VIM'in daha iyi sonuçlar verdiği ifade edilmiştir.

Yusufoglu (2007), çalışmasında Klein-Gordon denkleminin kompakt ve kompakt olmayan yapıların konstrüksiyonu için VIM kullanılmıştır. Burada Klein-Gordon denklemi için kompakt ve solitary çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar ADM ile karşılaştırılmış ve VIM'in daha kullanışlı olduğu söylenmiştir.

Wazwaz (2007), çalışmasında VIM, lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Amaç, VIM'in lineer olmayan terimleri dönüştürmede kullanılacak dönüşümlere gereksinim duymaksızın hesaplamaların boyutlarını düşürme özelliğini ve Lagrange çarpanının seçimiyle hızlı yakınsayan ardışık yaklaşımların elde edilebileceğini göstermek olduğu ifade edilmiştir.

Yusufoglu ve Erbas (2008), çalışmasında lineer olmayan bir diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilen değişken katsayılı av-avcı problemine VIM uygulanmıştır. Farklı iterasyon sayıları ile elde edilen sonuçlar modifiye edilmiş ADM ve HPM sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Geng ve ark. (2009), çalışmasında VIM'in bir modifikasyonu olan piecewise (parçalı) VIM tanıtılmıştır. Bu yöntem Riccati diferansiyel denklemin çözümünde kullanılmıştır. Klasik yöntem ile başlangıç noktası civarında iyi sonuçlar alınırken yöntemin bu modifikasyonunun daha geniş aralıklarda da iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Çözüm aralığı  $n$  eşit parçaya bölündükten sonra her bir alt aralıkta iterasyon formülü kullanılarak elde edilen fonksiyondan bir sonraki alt aralıkta karşılık gelen ilk nokta için bir başlangıç yaklaşımı elde edilmesi şeklinde adım adım işlem devam ettirilmiştir. Bulunan sonuçlarla grafik üzerinde yöntemin klasik hali ve modifiye edilmiş hali karşılaştırılmıştır.

Goh ve ark. (2009), çalışmasında kemirgenlerden bulaşan bir tür virüs salgını modelin bir popülasyondaki hareketliliğini incelemek için VIM kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar klasik Runge-Kutta yönteminin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Buradan elde edilen değerler belirli koşullar altında salgının yayılım davranışı üzerine bazı tespitler yapma imkânı sağlamıştır.

Kıymaz ve Cetinkaya (2010), çalışmasında değişken katsayılı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin büyük bir sınıfı için VIM kullanılarak yaklaşık analitik çözümler elde edilmiş ve bazı örnekler ile desteklenmiştir.

Odibat (2010), çalışmasında VIM'e alternatif bir yaklaşım getirilerek, hata tahmini ve yakınsaklıkla ilgili yeterli koşullar tespit edilmiştir. Farklı diferansiyel denklemler üzerinde tam çözüme yakınsayan iterasyon formülleri özetlenmiştir.

Abdel-Salam ve Al-Khaled (2012), çalışmasında bazı optimizasyon problemlerinin analitik çözümleri VIM yardımıyla elde edilmiştir. Bunu yaparken düzeltme fonksiyonları bulmada Euler denklemleri ile birlikte Lagrange çarpanı kullanılmıştır.

Jafari (2014), çalışmasında lineer olmayan bir sınıf denklemler üzerinde VIM ile ardışık yaklaşım yöntemi karşılaştırılmıştır.

Chang (2016), çalışmasında difüzyon denklemleri için VIM'in yakınsaklığı incelenmiştir.

HAM ilk olarak 1992 yılında Liao (1992) tarafından doktora tezinde tanıtılmıştır. Burada lineer olmayan denklemlere uygulanmıştır. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bu yöntem literatürde bir çok çalışmada kullanılmıştır.

Liao (1997), çalışmasında HAM'ın ana fikri kısaca tanıtılmıştır. Pertürbasyon yönteminden farkı belirtilerek, yöntemin etkinliğini göstermek için örnek problemlere uygulamıştır.

Liao ve Chwang (1998), çalışmasında HAM, lineer olmayan problemlere uygulanmıştır. Burada tek dereceli freedom sistemlerin salınımları için iki tane periyot formülü verilmiş ve bunlar ile ilgili dört örnek uygulaması yapılmıştır.

Liao ve Campo (2002), çalışmasında yarı-sonsuz bir plaka üzerinde, bir laminar viskoz akış için sıcaklık dağılımlarının analitik yaklaşık çözümü için HAM uygulanmıştır.

Liao (2003) tarafından HAM, "*Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*" adıyla kitaplaştırılmıştır.

Liao (2004), çalışmasında tipik lineer olmayan problemler için HAM daha da geliştirilmiş ve sistematik hale getirilerek iki kural tanıtılmıştır. Elde edilen yaklaşık çözüm, analitik sonuçlarla iyi bir uyum sağladığı gösterilmiştir.

He (2004), çalışmasında HAM'ın özel bir hali olan HPM ve HAM karşılaştırılmıştır. HPM'nin daha güçlü olduğunu göstermiştir.

Sun (2005), çalışmasında HAM, Klein-Gordon denklemi ile ifade edilen lineer olmayan gezen dalga problemine uygulanmıştır.

Abbasbandy (2006), çalışmasında HAM, ısı transferi denklemlerine uygulanmış elde edilen sonuçlar HPM ve pertürbasyon yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Abbasbandy (2007), çalışmasında genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denklemi bir analitik yöntem olan HAM ile çözmüştür. Elde edilen sonuçlar ADM sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Tan ve Abbasbandy (2008), çalışmasında kuadratik Riccati diferansiyel denklemi HAM'la çözülmüş ve sonuçlar HPM, ADM ve analitik çözümle karşılaştırılarak verilmiştir.

Rashidi ve ark. (2009), çalışmasında Burger and regularized long wave (RLW) denklemleri HAM yardımıyla yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Elde edilen yaklaşık çözümler HPM çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Abbasbandy (2010), çalışmasında HAM, Kawahara denkleminin gezen-dalga çözümlerinin bir ailesini bulmak için kullanılmıştır. Üstel bir seri olarak elde edilen yaklaşık çözüm makul bir hata ile verilmiştir.

Hassan ve El-Tawil (2011), çalışmasında HAM yüksek mertebeden lineer olmayan problemlere uygulanmış ve örnekler ile desteklenmiştir.

Rashidi ve ark. (2012), çalışmasında HAM, ısı transferi ile gözenekli ortam içinde bir dönen disk üzerinde sürekli akışın yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için uygulanmıştır. Elde edilen seri çözümlerin yakınsaması analiz edilmiştir. Elde edilen çözümlerin geçerliliği 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle karşılaştırılmıştır.

Guerrero ve ark. (2013), çalışmasında sabit bir popülasyonda sigara içme alışkanlığın yayılmasının dinamik modelinin bir yaklaşık analitik çözümünü elde etmek için HAM kullanılmış ve sonuçlar grafiklerle verilmiştir.

Jafarian ve ark. (2014), çalışmasında coupled Ramani denklemleri, HAM yardımıyla çözülmüş ve analitik çözümlerle karşılaştırarak arasında iyi bir uyum olduğu gösterilmiştir.

Shayganmanesh (2015), çalışmasında HAM ve HPM İntegral denklem sistemlerin çözümünde kullanılmış ve HPM, HAM'ın bir özel durumu olduğu gösterilmiştir.

### 3. SAYISAL YÖNTEMLER

Bu bölümde problemlerimizin çözümü için kullanacağımız yöntemler verilecektir.

#### 3.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) ilk olarak 1986 yılında Zhou (1986) tarafından tanıtıldı. Daha sonra birçok yazar bu yönetime katkı sağlayarak yeni özellikler kazandırmışlardır. Bu yöntem, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmaktadır. DTM, tek-boyutlu, 2-boyutlu, n-boyutlu DTM ve lineer olmayan fonksiyonların dönüşüm karşılığı olarak dört başlık altında ele alınabilir. Bu yöntem Pukhov (1986); Zhou (1986); Chen ve Ho (1996); Chen ve Liu (1998); Chen ve Ho (1999); Ayaz (2003; 2004b; 2004a); Ayaz ve Oturanc (2004); Chen ve Ju (2004); Arikoglu ve Ozkol (2005); Kurnaz ve ark. (2005); Arikoglu ve Ozkol (2006b; 2006a); Keskin ve Oturanc (2008); Keskin (2010); Sakar (2012) tarafından yapılan çalışmalarından derlenerek aşağıdaki gibi verilebilir.

##### 3.1.1. Tek-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tek değişkenli  $u(t)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $U(k)$  olmak üzere,  $u(t)$  nin tek-boyutlu diferansiyel dönüşümü,

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=0}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır (Zhou, 1986).  $U(k)$  dönüşüm fonksiyonunun diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) t^k \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Zhou, 1986). (3.1) ve (3.2) eşitlikleri dikkate alındığında

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=0} t^k \quad (3.3)$$

ifadesi elde edilir (Zhou, 1986). Yukarıdaki (3.1) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak tek-boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.1.** (Zhou, 1986)

Tek değişkenli  $u(t)$ ,  $v(t)$  ve  $w(t)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U(k)$ ,  $V(k)$  ve  $W(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde,  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

- (i)  $u(t) = v(t) \pm w(t)$  ise  $U(k) = V(k) \pm W(k)$  olur.
- (ii)  $u(t) = cv(t)$  ise  $U(k) = cV(k)$  olur.
- (iii)  $w(x)=u(t) = \frac{d}{dt}v(t)$  ise  $U(k) = (k+1)V(k+1)$  olur.
- (iv)  $u(t) = v(t)w(t)$  ise  $U(k) = \sum_{s=0}^k V(s)W(k-s)$  olur.

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Zhou (1986) çalışmasına bakılabilir.

**Teorem 3.2.** (Chen ve Ho, 1996)

Tek değişkenli  $u(t)$  ve  $v(t)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U(k)$  ve  $V(k)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $s$  ve  $q \in \mathbb{N}$  olmak üzere

- (i)  $u(t) = \frac{d^s v(t)}{dt^s}$  ise  $U(k) = \frac{(k+s)!}{k!} V(k+s)$  olur.
- (ii)  $u(t) = t^q$  ise  $U(k) = \delta(k-q)$  olur. Burada  $\delta(k-q) = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$  dir.

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Chen ve Ho (1996) çalışmasına bakılabilir.

**3.1.2. 2-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi**

İki değişkenli  $u(x,t)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $U(k,h)$  olmak üzere,  $u(x,t)$  nin 2-boyutlu diferansiyel dönüşümü,

$$U(k,h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} u(x,t) \right]_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır (Chen ve Ho, 1999).  $U(k,h)$  dönüşüm fonksiyonunun diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) (x-x_0)^k (t-t_0)^h \quad (3.5)$$



ile tanımlanır (Chen ve Ho, 1999). (3.4) ve (3.5) eşitlikleri dikkate alındığında

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} u(x, t) \right]_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} (x-x_0)^k (t-t_0)^h \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir (Chen ve Ho, 1999). Yukarıdaki (3.4) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak 2-boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.3.**(Chen ve Ho, 1999)

İki değişkenli  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  ve  $w(x, t)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U(k, h)$ ,  $V(k, h)$  ve  $W(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

- (i)  $u(x, t) = v(x, t) \pm w(x, t)$  ise  $U(k, h) = W(k, h) \pm V(k, h)$  olur.
- (ii)  $u(x, t) = cv(x, t)$  ise  $U(k, h) = cV(k, h)$  olur.
- (iii)  $u(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$  ise  $U(k, h) = (k+1)V(k+1, h)$  olur.
- (iv)  $u(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$  ise  $U(k, h) = (h+1)V(k, h+1)$  olur.

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Chen ve Ho (1999) çalışmasına bakılabilir.

**Teorem 3.4.** (Chen ve Ho, 1999)

İki değişkenli  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  ve  $w(x, t)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U(k, h)$ ,  $V(k, h)$  ve  $W(k, h)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$  olmak üzere;

- (i)  $u(x, t) = \frac{\partial^{r+s} v(x, t)}{\partial^r x \partial^s t}$  ise  $U(k, h) = \frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!} V(k+r, h+s)$  olur.
- (ii)  $u(x, t) = v(x, t)w(x, t)$  ise  $U(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V(r, h-s)W(k-r, s)$  olur.
- (iii)  $u(x, t) = x^p t^q$  ise  $U(k, h) = \delta(k-p, h-q)$  olur.

$$\text{Burada } \delta(k-p, h-q) = \begin{cases} 1, & k=p \text{ ve } h=q \text{ için} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \text{ dir.}$$

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Chen ve Ho (1999) çalışmasına bakılabilir.

### 3.1.3. n-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

$n$  değişkenli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonun diferansiyel dönüşümü,

$$U(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left[ \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_n=0}} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır (Kurnaz ve ark., 2005).  $U(k_1, k_2, \dots, k_n)$  dönüşüm fonksiyonunun diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} U(k_1, k_2, \dots, k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlanır (Kurnaz ve ark., 2005). (3.7) ve (3.8) eşitlikleri dikkate alındığında,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left[ \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_n=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir (Kurnaz ve ark., 2005). Yukarıdaki (3.7) ve (3.8) eşitlikleri kullanılarak n-boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.5.** (Kurnaz ve ark., 2005)

$n$  değişkenli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $V(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ve  $W(k_1, k_2, \dots, k_n)$  verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $c \in \mathbb{R}$  ve her  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  için  $r_i \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$(i) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm w(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ise}$$

$$U(k_1, k_2, \dots, k_n) = V(k_1, k_2, \dots, k_n) \pm W(k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ olur.}$$

$$(ii) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n) = cv(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ise } U(k_1, k_2, \dots, k_n) = cV(k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ olur.}$$

$$(iii) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial v(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \text{ ise}$$

$$U(k_1, k_2, \dots, k_n) = (k_1 + 1)V(k_1 + 1, k_2, \dots, k_n) \text{ olur.}$$

$$(iv) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} v(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^{r_1} x_1 \partial^{r_2} x_2 \dots \partial^{r_n} x_n} \text{ ise}$$

$$U(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + r_1)! (k_2 + r_2)! \dots (k_n + r_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!} V(k_1 + r_1, k_2 + r_2, \dots, k_n + r_n)$$

olur.

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Kurnaz ve ark. (2005) çalışmasına bakılabilir.

### 3.1.4. Linear Olmayan Fonksiyonların Dönüşüm Karşılığı

Üç değişkenli  $u(x, y, t)$  fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu  $U(k, h, s)$  olmak üzere lineer olmayan  $Nu(x, y, t)$ 'nin 3-boyutlu diferansiyel dönüşümü,

$$N(k, h, s) = \frac{1}{k!h!s!} \left[ \frac{\partial^{k+h+s}}{\partial^k \partial^h \partial^s} Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ t=0}}$$

$$N(k, h, s) = \frac{1}{k!h!s!} \left[ \frac{\partial^{k+h+s}}{\partial^k \partial^h \partial^s} N \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} U(k, h, s) x^k y^h t^s \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ t=0}}$$

olarak tanımlanır.

3-boyutlu lineer olmayan fonksiyonların diferansiyel dönüşümünü veren Maple kodu Tablo-3.1 deki gibi ilk kez verilebilir.

Tablo-3.1. 3-boyutlu lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşümü veren maple kodu.	
Fonksiyon	Maple Kodu
$Nu(x, y, t)$	<pre> restart; NF:=Nu(x,y,t): #Linear Olmayan Fonksiyonu m:=1: #Mertebe u[x,y,t]:=sum(sum(sum(u[k,l,p]* x^k*y^l*t^p,k=0..m),l=0..m),p=0..m): NF[x,y,t]:=subs(Nu(x,y,t)=u[x,y,t],NF): s:=expand(NF[x,y,t],x,y,t): vt:=unapply(s,x,y,t): for i from 0 by 1 while i &lt;= m do for j from 0 by 1 while j &lt;= m do for h from 0 by 1 while h &lt;= m do a[i,j,h]:=D[1\$ i, 2\$ j, 3\$ h] (vt)(0,0,0)/i!/j!/h!: print(a[i,j,h],A[i,j,h]):#Dönüşüm Fonksiyonu od:od:od: </pre>

3-boyutlu lineer olmayan bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşüm karşılıkları Tablo-3.2 deki gibi verilebilir.

<b>Tablo-3.2.</b> 3-boyutlu lineer olmayan bazı fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tablosu.	
<b>Fonksiyon</b>	<b>Diferansiyel Dönüşüm Karşılığı</b>
$Nu(x, y, t) = u^m(x, y, t)$	$N(0, 0, 0) = U^m(0, 0, 0)$ $N(0, 0, 1) = mU^{m-1}(0, 0, 0)U(0, 0, 1)$ $N(0, 1, 0) = mU^{m-1}(0, 0, 0)U(0, 1, 0)$ $N(0, 1, 1) = m^2U^{m-2}(0, 0, 0)U(0, 0, 1)U(0, 1, 0) + mU^{m-1}(0, 0, 0)U(0, 1, 1) - mU^{m-2}(0, 0, 0)U(0, 0, 1)U(0, 1, 0)$ $N(1, 0, 0) = mU^{m-1}(0, 0, 0)U(1, 0, 0)$ $N(1, 0, 1) = m^2U^{m-2}(0, 0, 0)U(0, 0, 1)U(1, 0, 0) + mU^{m-1}(0, 0, 0)U(1, 0, 1) - mU^{m-2}(0, 0, 0)U(0, 0, 1)U(1, 0, 0)$ $N(1, 1, 0) = m^2U^{m-2}(0, 0, 0)U(0, 1, 0)U(1, 0, 0) + mU^{m-1}(0, 0, 0)U(1, 1, 0) - mU^{m-2}(0, 0, 0)U(0, 1, 0)U(1, 0, 0)$ $N(1, 1, 1) = m^3U^{m-3}(0, 0, 0)U(0, 1, 0)U(0, 0, 1)U(1, 0, 0) + m^2U^{m-2}(0, 0, 0) \times U(0, 0, 1)U(1, 1, 0) - 3m^2U^{m-3}(0, 0, 0)U(0, 0, 1)U(0, 1, 0) + \dots$
$Nu(x, y, t) = \sin(u(x, y, t))$	$N(0, 0, 0) = \sin(U(0, 0, 0))$ $N(0, 0, 1) = \cos(U(0, 0, 0))U(0, 0, 1)$ $N(0, 1, 0) = \cos(U(0, 0, 0))U(0, 1, 0)$ $N(0, 1, 1) = \cos(U(0, 0, 0))U(0, 1, 1) - \sin(U(0, 0, 0))U(0, 1, 0)U(0, 0, 1)$ $N(1, 0, 0) = \cos(U(0, 0, 0))U(1, 0, 0)$ $N(1, 0, 1) = \cos(U(0, 0, 0))U(1, 0, 1) - \sin(U(0, 0, 0))U(1, 0, 0)U(0, 0, 1)$ $N(1, 1, 0) = \cos(U(0, 0, 0))U(1, 1, 0) - \sin(U(0, 0, 0))U(1, 0, 0)U(0, 1, 0)$ $N(1, 1, 1) = -\sin(U(0, 0, 0))U(1, 0, 0)U(0, 1, 1) - \cos(U(0, 0, 0)) \times U(1, 0, 0)U(0, 1, 0) - \sin(U(0, 0, 0))U(1, 1, 0)U(0, 0, 1) - \sin(U(0, 0, 0))U(0, 1, 0)U(1, 0, 1) + \cos(U(0, 0, 0))U(1, 1, 1)$
$Nu(x, y, t) = e^{u(x, y, t)}$	$N(0, 0, 0) = e^{U(0, 0, 0)}$ $N(0, 0, 1) = e^{U(0, 0, 0)}U(0, 0, 1)$ $N(0, 1, 0) = e^{U(0, 0, 0)}U(0, 1, 0)$ $N(0, 1, 1) = e^{U(0, 0, 0)}(U(0, 1, 0)U(0, 0, 1) + U(0, 1, 1))$ $N(1, 0, 0) = e^{U(0, 0, 0)}U(1, 0, 0)$ $N(1, 0, 1) = e^{U(0, 0, 0)}(U(1, 0, 0)U(0, 0, 1) + U(1, 0, 1))$ $N(1, 1, 0) = e^{U(0, 0, 0)}(U(1, 0, 0)U(0, 1, 0)) + U(1, 1, 0)$ $N(1, 1, 1) = e^{U(0, 0, 0)} \left( U(1, 0, 0)U(0, 1, 0)U(0, 0, 1) + U(1, 1, 0)U(0, 0, 1) + U(0, 1, 0)U(1, 0, 1) + U(1, 0, 0)U(0, 1, 1) + U(1, 1, 1) \right)$

### 3.2. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (RDTM) ilk olarak 2009 yılında Keskin ve Oturanc (2009) tarafından tanıtılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemleri yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bu yöntem, DTM'den yola çıkılarak elde edilmiştir. RDTM, 2-boyutlu, n-boyutlu RDTM ve lineer olmayan fonksiyonlar için dönüşüm karşılığı olarak üç başlık altında ele alınabilir. Bu yöntem Keskin ve Oturanc (2009); Cenesiz ve ark. (2010); Keskin (2010); Keskin ve Oturanc (2010c; 2010b; 2010d); Keskin ve Oturanc (2010a) tarafından yapılan çalışmalarından derlenerek aşağıdaki gibi verilebilir.

#### 3.2.1. 2-Boyutlu İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İki değişkenli  $u(x,t)$  fonksiyonunun  $t$  boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t) \right]_{t=0}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır (Keskin ve Oturanc, 2009).  $U_k(x)$  nin  $t$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır (Keskin ve Oturanc, 2009). (3.11) ve (3.12) eşitlikleri birlikte ele alınırsa,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t) \right]_{t=0} t^k \quad (3.12)$$

ifadesi elde edilir (Keskin ve Oturanc, 2009). Yukarıdaki (3.10) ve (3.11) eşitlikleri kullanılarak indirgenmiş diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.6.** (Keskin ve Oturanc, 2009)

İki değişkenli  $u(x,t)$ ,  $v(x,t)$  ve  $w(x,t)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U_k(x)$ ,  $V_k(x)$  ve  $W_k(x)$  verilen fonksiyonların  $t$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere

(i)  $u(x,t) = v(x,t) \pm w(x,t)$  ise  $U_k(x) = V_k(x) \pm W_k(x)$  olur.

(ii)  $u(x,t) = cv(x,t)$  ise  $U_k(x) = cV_k(x)$  olur.

$$(iii) \quad u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \text{ ise } U_k(x) = (k+1)V_{k+1}(x) \text{ olur.}$$

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Keskin ve Oturanc (2009) çalışmasına bakılabilir.

**Teorem 3.7.** (Keskin ve Oturanc, 2009)

İki değişkenli  $u(x,t)$ ,  $v(x,t)$  ve  $w(x,t)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U_k(x)$ ,  $V_k(x)$  ve  $W_k(x)$  verilen fonksiyonların  $t$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $c \in \mathbb{R}$  ve  $s, q \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$(i) \quad u(x,t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} v(x,t) \text{ ise } U_k(x) = \frac{(k+s)!}{k!} V_{k+s}(x) \text{ olur.}$$

$$(ii) \quad u(x,t) = v(x,t)w(x,t) \text{ ise } U_k(x) = \sum_{s=0}^k V_s(x) W_{k-s}(x) = \sum_{s=0}^k W_s(x) V_{k-s}(x) \text{ olur.}$$

$$(iii) \quad u(x,t) = t^q f(x) \text{ ise } U_k(x) = \delta(k-q) f(x) \text{ olur. Burada } f(x) \text{ analitik fonksiyon ve } \delta(k-q) = \begin{cases} 1, & k=q \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \text{ dir.}$$

**İspat:** Bu teoremin ispatı için Keskin ve Oturanc (2009) çalışmasına bakılabilir.

**Uyarı 3.1.**

Benzer şekilde  $x$  boyunca da RDTM'nin tanım ve teoremleri elde edilebilir.

### 3.2.2. n-Boyutlu İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

$n$  değişkenli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonunun indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonu  $U_k(x_2, \dots, x_n)$  olmak üzere,  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nin  $x_1$  boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_k(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{x_1=0} \quad (3.13)$$

olarak tanımlanır (Keskin, 2010).  $U_k(x_2, \dots, x_n)$  nin  $x_1$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_2, \dots, x_n) x_1^k \quad (3.14)$$

olarak tanımlanır (Keskin, 2010). (3.13) ve (3.14) eşitlikleri birlikte ele alınırsa,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(x, t) \right]_{x_1=0} x_1^k \quad (3.15)$$

ifadesi elde edilir (Keskin, 2010). Yukarıdaki (3.10) ve (3.11) eşitlikleri kullanılarak indirgenmiş diferansiyel dönüşüm için aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.8.** (Keskin, 2010)

$n$  değişkenli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U_k(x_2, \dots, x_n)$ ,  $V_k(x_2, \dots, x_n)$  ve  $W_k(x_2, \dots, x_n)$  verilen fonksiyonların  $x_1$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere

(i)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n) \pm w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ise

$$U_k(x_2, \dots, x_n) = V_k(x_2, \dots, x_n) \pm W_k(x_2, \dots, x_n) \text{ olur.}$$

(ii)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = cv(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ise

$$U_k(x_2, \dots, x_n) = cV_k(x_2, \dots, x_n) \text{ olur.}$$

(iii)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ise

$$U_k(x_2, \dots, x_n) = (k+1)V_{k+1}(x_2, \dots, x_n) \text{ olur.}$$

**Teorem 3.9.** (Keskin, 2010)

$n$  değişkenli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonlarını ele alalım. Sırasıyla  $U_k(x_2, \dots, x_n)$ ,  $V_k(x_2, \dots, x_n)$  ve  $W_k(x_2, \dots, x_n)$  verilen fonksiyonların  $x_1$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olsun. O halde  $c \in \mathbb{R}$  ve  $s, q \in \mathbb{N}$  olmak üzere

(i)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^s}{\partial x_1^s} v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ise

$$U_k(x_2, \dots, x_n) = \frac{(k+s)!}{k!} V_{k+s}(x_2, \dots, x_n) \text{ olur,}$$

(ii)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ise

$$U_k(x_2, \dots, x_n) = \sum_{s=0}^k V_s(x_2, \dots, x_n) W_{k-s}(x_2, \dots, x_n) = \sum_{s=0}^k W_s(x_2, \dots, x_n) V_{k-s}(x_2, \dots, x_n) \text{ olur.}$$

(iii)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^q f(x_2, \dots, x_n)$  ise

$U_k(x_2, \dots, x_n) = \delta(k - q) f(x_2, \dots, x_n)$  olur. Burada  $f(x_2, \dots, x_n)$  analitik

fonsiyon ve  $\delta(k - q) = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$  dir.

### 3.2.3. Lineer Olmayan Fonksiyonların Dönüşüm Karşılığı

$n$  değişkenli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyon olmak üzere, lineer olmayan  $Nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'nin  $x_1$  boyunca hesaplanacak çözümünün  $n$ -boyutlu indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$N_k(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{x_1=0}$$

$$N_k(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} N \left( \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_2, \dots, x_n) x_1^k \right) \right]_{x_1=0}$$

olarak tanımlanır.

$n$ -boyutlu lineer olmayan fonksiyonların  $x_1$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşümünü veren Maple kodu Tablo-3.3 deki gibi verilebilir.

<b>Tablo-3.3.</b> $n$ -boyutlu lineer olmayan fonksiyonlar için $x_1$ boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşümü veren maple kodu.	
<b>Fonksiyon</b>	<b>Maple Kodu</b>
$Nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$	<pre> restart: NF:=Nu(x1,x2,...,xn): #Lineer olmayan Fonk. m:=3: #Mertebe u[x1]:=sum(u[b]*x1^b,b=0..m): NF[x1]:=subs(Nu(x1,x2,...,xn)=u[x1],NF): s:=expand(NF[x1],x1): dx1:=unapply(s,x1): for i from 0 to m do nn[i]:=((D@@i)(dx1)(0)/i!): print(N[i],nn[i]): #Dönüşüm Fonk. od: </pre>



n-boyutlu lineer olmayan bazı fonksiyonların  $x_1$  boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm karşılıkları Tablo-3.4 deki gibi verilebilir.

<b>Tablo-3.4.</b> n-boyutlu lineer olmayan bazı fonksiyonlar için $x_1$ boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu.	
<b>Fonksiyon</b>	<b>İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Karşılığı</b>
$Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = u^m(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$N_0(x_2, \dots, x_n) = U_0^m(x_2, \dots, x_n)$ $N_1(x_2, \dots, x_n) = mU_0^{m-1}(x_2, \dots, x_n)U_1(x_2, \dots, x_n)$ $N_2(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}m(m-1)U_0^{m-2}(x_2, \dots, x_n)U_1^2(x_2, \dots, x_n) + mU_0^{m-1}(x_2, \dots, x_n)U_2(x_2, \dots, x_n)$ $N_3(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)U_0^{m-3}(x_2, \dots, x_n)U_1^3(x_2, \dots, x_n) + m(m-1)U_0^{m-2}(x_2, \dots, x_n)U_2(x_2, \dots, x_n)U_1(x_2, \dots, x_n) + mU_0^{m-1}(x_2, \dots, x_n)U_3(x_2, \dots, x_n)$
$Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \cos(u(x_1, \dots, x_n))$	$N_0(x_2, \dots, x_n) = \cos(U_0(x_2, \dots, x_n))$ $N_1(x_2, \dots, x_n) = -\sin(U_0(x_2, \dots, x_n))U_1(x_2, \dots, x_n)$ $N_2(x_2, \dots, x_n) = -\sin(U_0(x_2, \dots, x_n))U_2(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{2!}\cos(U_0(x_2, \dots, x_n))U_1^2(x_2, \dots, x_n)$ $N_3(x_2, \dots, x_n) = -\sin(U_0(x_2, \dots, x_n))U_3(x_2, \dots, x_n) - \cos(U_0(x_2, \dots, x_n))U_2(x_2, \dots, x_n)U_1(x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{3!}\sin(U_0(x_2, \dots, x_n))U_1^3(x_2, \dots, x_n)$
$Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{u(x_1, x_2, \dots, x_n)}$	$N_0(x_2, \dots, x_n) = e^{U_0(x_2, \dots, x_n)}$ $N_1(x_2, \dots, x_n) = U_1(x_2, \dots, x_n)e^{U_0(x_2, \dots, x_n)}$ $N_2(x_2, \dots, x_n) = \left( U_2(x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2!}U_1^2(x_2, \dots, x_n) \right) e^{U_0(x_2, \dots, x_n)}$ $N_3(x_2, \dots, x_n) = \left( U_3(x_2, \dots, x_n) + U_1(x_2, \dots, x_n) \times \left( U_2(x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{3!}U_1^3(x_2, \dots, x_n) \right) \right) e^{U_0(x_2, \dots, x_n)}$
$Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(u(x_1, \dots, x_n))$	$N_0(x_2, \dots, x_n) = \ln(U_0(x_2, \dots, x_n))$ $N_1(x_2, \dots, x_n) = \frac{U_1(x_2, \dots, x_n)}{U_0(x_2, \dots, x_n)}$ $N_2(x_2, \dots, x_n) = \frac{U_2(x_2, \dots, x_n)}{U_0(x_2, \dots, x_n)} - \frac{1}{2} \frac{U_1^2(x_2, \dots, x_n)}{U_0^2(x_2, \dots, x_n)}$ $N_3(x_2, \dots, x_n) = \frac{U_3(x_2, \dots, x_n)}{U_0(x_2, \dots, x_n)} - \frac{U_2(x_2, \dots, x_n)U_1(x_2, \dots, x_n)}{U_0^2(x_2, \dots, x_n)} + \frac{1}{3} \frac{U_1^3(x_2, \dots, x_n)}{U_0^3(x_2, \dots, x_n)}$

### 3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) ilk olarak 1997 yılında He (1997a) tarafından tanıtıldı. Bu yöntem, Inokuti ve ark. (1978) tarafından kuantum mekaniğindeki problemleri çözmek için kullanılan Lagrange çarpanı yönteminden yola çıkılarak elde edilen bir yöntemdir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bu yöntem, Inokuti ve ark. (1978); He (1997a; 1999; 2000); Karaoğlu (2013) tarafından yapılan çalışmalarından derlenerek aşağıdaki gibi verilebilir.

Lineer olmayan

$$Lu(x_1, x_2, \dots, x_n) + Nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.16)$$

kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada  $L$  lineer,  $N$  lineer olmayan kısmı göstermektedir. Bu denklem için VIM

$$u_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} \lambda(s) \left\{ \begin{array}{l} Lu_m(s, x_2, \dots, x_n) + \\ N\tilde{u}_m(s, x_2, \dots, x_n) - \\ g(s, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \partial s \quad (3.17)$$

formundaki varyasyon fonksiyonu kurulur (He, 1997a; 2000). Burada  $\lambda$ , Lagrange çarpanı olup varyasyon teorisinden hareketle kısmi integral ve  $\tilde{u}_m$  sınırlanmış varyasyon dikkate alınarak hesaplanabilir (Inokuti ve ark., 1978; He, 1997a; 1999; 2000). Daha ayrıntılı olarak  $\lambda$  çarpanının bulunması kısmi integrasyon,

$$\begin{aligned} \int \lambda(s) \frac{\partial}{\partial s} u_m(s, x_2, \dots, x_n) \partial s &= \lambda(s) u_m(s, x_2, \dots, x_n) - \int \lambda'(s) u_m(s, x_2, \dots, x_n) ds, \\ \int \lambda(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} u_m(s, x_2, \dots, x_n) \partial s &= \lambda(s) \frac{\partial}{\partial s} u_m(s, x_2, \dots, x_n) - \lambda'(s) u_m(s, x_2, \dots, x_n) \\ &+ \int \lambda''(s) u_m(s, x_2, \dots, x_n) ds, \end{aligned} \quad (3.18)$$

⋮

denklemleri ile elde edilir. Bulunan  $\lambda$  değerine göre varyasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek aranan çözüm fonksiyonu için rekürans bağıntısı oluşturulur. Başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon  $u_0$  olarak seçilerek  $u_m$  terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur. Son olarak çözüm fonksiyonu,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.19)$$

eşitliğinden elde edilir.

### 3.4. Homotopi Analiz Yöntemi

Homotopi Analiz yöntemi (HAM) ilk olarak 1992 yılında Liao (1992) tarafından doktora tezinde tanıtılmıştır. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bu yöntem Liao (1992; 1997; 2003; 2004; 2009; 2012) tarafından yapılan çalışmalarından derlenerek aşağıdaki gibi verilebilir.

HAM'ı tanıtmak için, Lineer olmayan

$$N[u(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 0 \quad (3.20)$$

kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada  $N$  lineer olmayan bir operatör,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bağımsız değişkenler ve  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bilinmeyen bir fonksiyondur. Liao (1992; 2003; 2012) tarafından verilen sıfırcıncı mertebeden deformasyon denklemi,

$$(q-1)L \left[ \begin{array}{c} \phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q) \\ u_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right] = qhH(x_1, x_2, \dots, x_n)N[\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q)] \quad (3.21)$$

şeklinindedir. Burada  $q \in [0,1]$  bir gömme parametresi,  $h \neq 0$  yardımcı parametre,  $H(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  yardımcı fonksiyon,  $L$  lineer operatör,  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q)$  bilinmeyen bir fonksiyon ve  $u_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nun bir başlangıç tahminidir.  $q=0$  ve  $q=1$  için;

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 0) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ve } \phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.22)$$

sağlanır. Böylelikle  $q=0$  dan  $q=1$  e değiştikçe  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q)$  fonksiyonu  $u_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , başlangıç tahmininden  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  çözümüne doğru değişir.  $q$  ya göre  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q)$  fonksiyonunun Taylor açılımı yapılırsa

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) q^m \quad (3.23)$$

olur. Burada

$$u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.24)$$

şeklinindedir. Eğer lineer operatör, başlangıç tahmini,  $h$  yardımcı parametresi ve yardımcı fonksiyonu yeterince düzgün seçilirse (3.23) serisi  $q=1$  için

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.25)$$

olur.

$$\overrightarrow{u}_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{u_0(x_1, x_2, \dots, x_n), u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \quad (3.26)$$

tanımlansın. (3.21) eşitliğinde  $q$  gömme parametresine göre  $m$  kez türev alınır, daha sonra  $q=1$  yazılırsa ve son olarak  $m!$  sayısına bölünürse  $m$  inci mertebeden deformasyon denklemi,

$$L \left[ \begin{array}{c} u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) - \\ \chi_m u_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right] = hH(x_1, x_2, \dots, x_n) R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. Burada

$$R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x_1, x_2, \dots, x_n; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.28)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

dir. (3.27) denkleminde her iki tarafın  $L^{-1}$  ters operatörü altında görüntüsü alınarak  $u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $m \geq 0$ ) orijinal problemde gelen lineer sınır koşullarına bağlı olarak hesaplanır (Liao, 2003; 2012). Bu hesaplamalar sonucu

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^P u_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.30)$$

elde edilir. Son olarak  $P \rightarrow \infty$  alındığında çözüm fonksiyonu elde edilir.

#### 4. UYGULAMALAR

Bu bölümde üçüncü bölümde verilen yöntemlerin n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için uygulaması yapılacaktır. Yapılan uygulamaların üzerinde yöntemler karşılaştırılacaktır. Bütün hesaplamalar Intel® Core(TM) i5-2430M CPU @ 2.40GHz ve 4.00 GB RAM özellikli bilgisayar ile yapıldı. Uygulamalar iki alt bölümde aşağıdaki gibi verilebilir.

##### 4.1. 3-Boyutlu ve Üçüncü Mertebeden Zakharov–Kuznetsov Denklemi

Bu alt bölümde 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden iki farklı Zakharov–Kuznetsov (ZK) denkleminin RDTM ve VIM ile yaklaşık çözümü elde edildi. Maple ve Mathematica programları kullanılarak yöntemler ile elde edilen yaklaşık çözümler ve yöntemlerin çözüm hızı karşılaştırıldı.

###### Problem 4.1.1

3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK(2,2) denklemini başlangıç şartı ile beraber

$$u_t + (u^2)_x + \frac{1}{8}(u^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u^2)_{yyx} = 0, \quad (4.1)$$

$$u(x, y, 0) = \frac{4}{3} \lambda \sinh^2(x + y) \quad (4.2)$$

ele alalım (Inc, 2007; Acan ve Keskin, 2016). Bu başlangıç değer probleminin analitik çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{4}{3} \lambda \sinh^2(x + y - \lambda t) \quad (4.3)$$

şeklinde verilmektedir (Inc, 2007). Bu problemin RDTM ve VIM yardımıyla çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir:

###### ZK(2,2) denkleminin RDTM ile çözümü:

RDTM dikkate alındığında (4.1) de ZK(2,2) denkleminin indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_{k+1}(x, y) = -\frac{1}{(k+1)} \left( \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x, y) U_r(x, y) \\ + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x, y) U_r(x, y) \\ + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x, y) U_r(x, y) \end{array} \right) \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $U_k$  'lar indirgenmiş dönüşüm fonksiyonlarıdır. (4.2)

başlangıç şartından

$$U_0(x, y) = \frac{4}{3} \lambda \sinh^2(x + y) \quad (4.5)$$

yazılabilir. (4.5) ifadesi (4.4) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse

$$U_1(x, y) = -\frac{32\lambda^2}{9} \sinh(x + y) \cosh(x + y)(10 \cosh^2(x + y) - 7), \quad (4.6)$$

$$U_2(x, y) = \frac{64\lambda^3}{27} (1200 \cosh^6(x + y) - 2080 \cosh^4(x + y) + 968 \cosh^2(x + y) - 79), \quad (4.7)$$

$$U_3(x, y) = -\frac{4096\lambda^4}{243} \sinh(x + y) \cosh(x + y)(23800 \cosh^6(x + y) - 42900 \cosh^4(x + y) + 22665 \cosh^2(x + y) - 3142) \quad (4.8)$$

ifadeleri elde edilir. Aranılan yaklaşık çözüm

$$\tilde{u}_3(x, y, t) = \sum_{k=0}^3 U_k(x, y) t^k \quad (4.9)$$

formundadır. (4.5)-(4.8) ifadeleri (4.9) içinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3(x, y, t) = & -\frac{4096\lambda^4}{243} \sinh(x + y) \cosh(x + y)(23800 \cosh^6(x + y) \\ & - 42900 \cosh^4(x + y) + 22665 \cosh^2(x + y) - 3142)t^3 \\ & + \frac{64\lambda^3}{27} (1200 \cosh^6(x + y) - 2080 \cosh^4(x + y) \\ & + 968 \cosh^2(x + y) - 79)t^2 - \frac{32\lambda^2}{9} \sinh(x + y) \times \\ & \cosh(x + y)(10 \cosh^2(x + y) - 7)t + \frac{4}{3} \lambda \sinh^2(x + y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

3. iterasyon ile ZK(2,2) başlangıç değer probleminin RDTM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

### **ZK(2,2) denkleminin VIM ile çözümü:**

VIM dikkate alındığında (4.1) de ZK(2,2) denklemi için doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left\{ \frac{\partial u_n(x, y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial u_n^2(x, y, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 u_n^2(x, y, \tau)}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 u_n^2(x, y, \tau)}{\partial y^2 \partial x} \right\} d\tau \quad (4.11)$$

şeklinde elde edilir. (4.2) başlangıç şartından

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0) = \frac{4}{3} \lambda \sinh^2(x + y) \quad (4.12)$$

yazılabilir. (4.12) ifadesi (4.11) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse

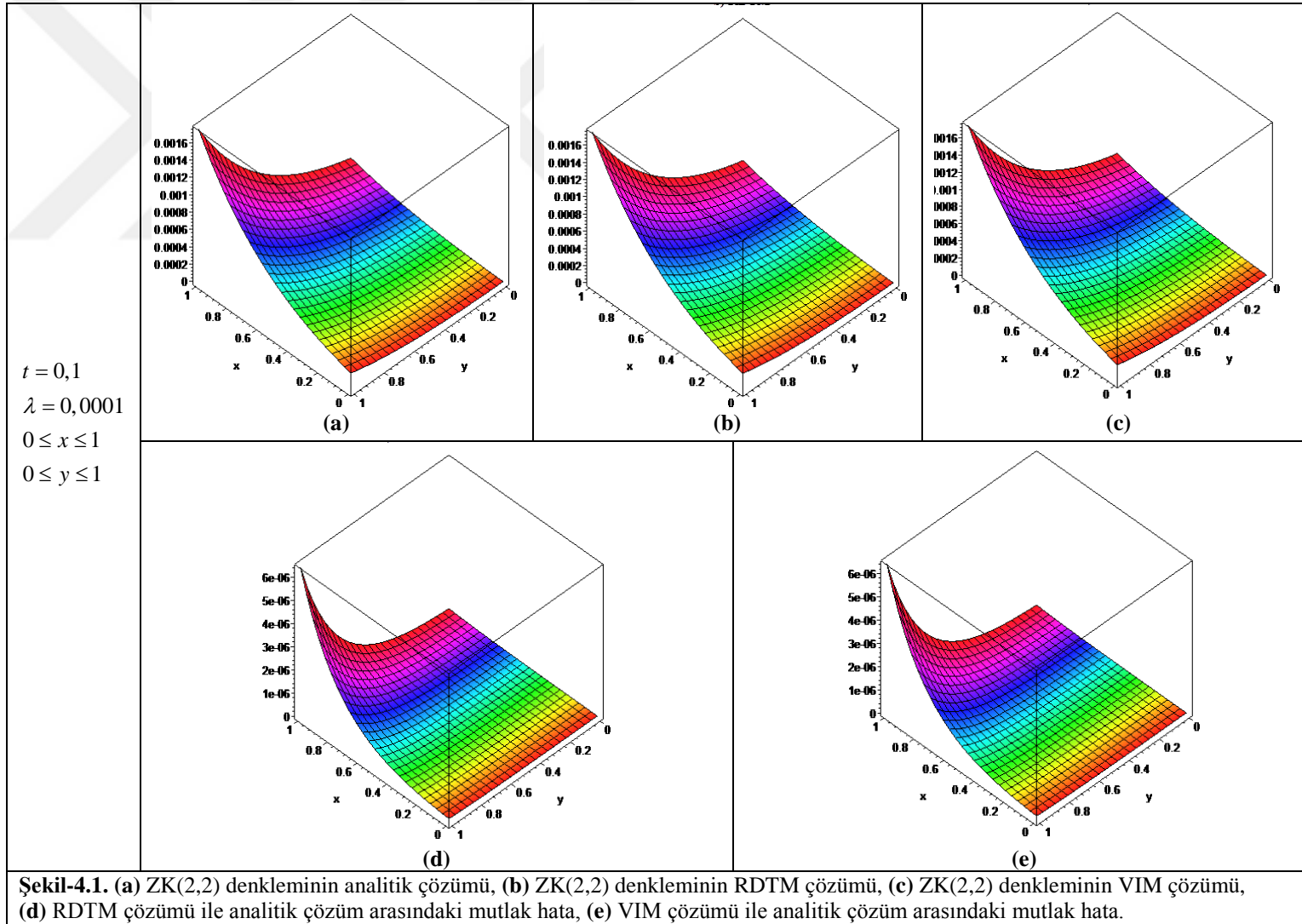
$$u_1(x,t) = \frac{4}{9} \lambda^2 \sinh(x+y) (-80 \cosh^3(x+y) + 56 \cosh(x+y)) t + \frac{4}{3} \lambda \sinh^2(x+y), \quad (4.13)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{4\lambda^4}{243} \begin{pmatrix} -340480 \sinh(x+y) \cosh(x+y) \\ +3481600 \sinh(x+y) \cosh^7(x+y) \\ -5836800 \sinh(x+y) \cosh^5(x+y) \\ +2810880 \sinh(x+y) \cosh^3(x+y) \end{pmatrix} t^3 + \dots, \quad (4.14)$$

$$u_3(x,t) = -\frac{4\lambda^8}{413343} \begin{pmatrix} -216832430571520000 \cosh^9(x+y) \sinh(x+y) \\ -188468533657600000 \cosh^{13}(x+y) \sinh(x+y) \\ +282685285072896000 \cosh^{11}(x+y) \sinh(x+y) \\ +1817174343680000 \cosh^3(x+y) \sinh(x+y) \\ +50425600409600000 \cosh^{15}(x+y) \sinh(x+y) \\ -50575389491200 \sinh(x+y) \cosh(x+y) \\ +89554327017881600 \cosh^7(x+y) \sinh(x+y) \\ -19121568114278400 \cosh^5(x+y) \sinh(x+y) \end{pmatrix} t^7 + \dots \quad (4.15)$$

3. iterasyon ile ZK(2,2) başlangıç değer probleminin VIM ile yaklaşık çözümü elde edilir. Şimdi elde ettiğimiz sonuçları tablosal ve grafiksel olarak ele alalım.

ZK(2,2) kısmi diferansiyel denkleminin, RDTM ve VIM ile yaklaşık çözümleri elde edildi. Her iki yöntem için de üç iterasyon uygulandı. Hesaplamalarda RDTM'nin yaklaşık çözümü 0,047 sn, VIM'in yaklaşık çözümü 0,328 sn zaman aldı. Elde edilen yaklaşık çözüm, literatürde var olan analitik çözüm ve bu çözümler arasındaki mutlak hata analizi Şekil-4.1 ve Tablo-4.1'deki gibi verilebilir.





<b>Tablo-4.1.</b> ZK(2,2) denklemi için 3. iterasyon ile yaklaşık ve analitik çözümlerin karşılaştırılması. ( $\lambda = 0,001$ )							
$x$	$y$	$t$	<b>Analitik Çözüm</b>	<b>RDTM Çözüm</b>	<b>VIM Çözüm</b>	<b>RDTM'nin Mutlak Hatası</b>	<b>VIM'nin Mutlak Hatası</b>
0.0	0.0		0.00000000000005	0.00000000000090	0.00000000000090	$0.900000 \times 10^{-12}$	$0.900000 \times 10^{-12}$
0.0	0.5		0.00003620224186	0.0000361815180	0.0000361815179	$0.207241 \times 10^{-7}$	$0.207241 \times 10^{-7}$
0.0	1.0		0.0001841367078	0.0001839302192	0.0001839302191	$0.2064889 \times 10^{-6}$	$0.2064889 \times 10^{-6}$
0.5	0.0		0.00003620224186	0.0000361815180	0.0000361815179	$0.207241 \times 10^{-7}$	$0.207241 \times 10^{-7}$
0.5	0.5	0.2	0.0001841367078	0.0001839302192	0.0001839302191	$0.2064889 \times 10^{-6}$	$0.2064889 \times 10^{-6}$
0.5	1.0		0.0006044840856	0.0006028025823	0.0006028025833	$0.16815035 \times 10^{-5}$	$0.16815024 \times 10^{-5}$
1.0	0.0		0.0001841367078	0.0001839302192	0.0001839302191	$0.2064889 \times 10^{-6}$	$0.2064889 \times 10^{-6}$
1.0	0.5		0.0006044840856	0.0006028025823	0.0006028025833	$0.16815035 \times 10^{-5}$	$0.16815024 \times 10^{-5}$
1.0	1.0		0.001753809417	0.001741101068	0.001741101237	$0.12708350 \times 10^{-4}$	$0.127081795 \times 10^{-4}$
0.0	0.0		0.00000000000012	0.0000000000019	0.0000000000019	$0.190000 \times 10^{-11}$	$0.190000 \times 10^{-11}$
0.0	0.5		0.00003620067502	0.0000361696074	0.00003616960749	$0.310676 \times 10^{-7}$	$0.310676 \times 10^{-7}$
0.0	1.0		0.0001841318725	0.0001838226047	0.0001838226047	$0.3092675 \times 10^{-6}$	$0.3092675 \times 10^{-6}$
0.5	0.0		0.00003620067502	0.0000361696074	0.00003616960749	$0.310676 \times 10^{-7}$	$0.310676 \times 10^{-7}$
0.5	0.5	0.3	0.0001841318725	0.0001838226047	0.0001838226047	$0.3092675 \times 10^{-6}$	$0.3092675 \times 10^{-6}$
0.5	1.0		0.0006044707294	0.0006019584203	0.0006019584259	$0.2512309 \times 10^{-5}$	$0.251230934 \times 10^{-5}$
1.0	0.0		0.0001841318725	0.0001838226047	0.0001838226047	$0.3092675 \times 10^{-6}$	$0.3092675 \times 10^{-6}$
1.0	0.5		0.0006044707294	0.0006019584203	0.0006019584259	$0.2512309 \times 10^{-5}$	$0.251230934 \times 10^{-5}$
1.0	1.0		0.001753773033	0.001734903389	0.001734904240	$0.18869644 \times 10^{-4}$	$0.18868793 \times 10^{-4}$
Yöntemlerin ZK(2,2) denkleminin çözümündeki hesaplama süresi:						<b>RDTM : 0,047 sn</b>	
						<b>VIM : 0,328 sn</b>	

**Problem 4.1.2.**

Bir diğ er problemimiz olan 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK(3,3) denklemini başlangıç şartı ile beraber

$$u_t + (u^3)_x + 2(u^3)_{xxx} + 2(u^3)_{yyx} = 0, \quad (4.16)$$

$$u(x, y, 0) = \frac{3}{2} \lambda \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \quad (4.17)$$

ele alalım (Inc, 2007; Acan ve Keskin, 2016). Bu başlangıç değ er problemin analitik çözü mü

$$u(x, y, t) = \frac{3}{2} \lambda \sinh\left(\frac{x+y-\lambda t}{6}\right) \quad (4.18)$$

şeklinde verilmektedir (Inc, 2007). Bu problemin RDTM ve VIM yardımıyla çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir:

**ZK(3,3) denkleminin RDTM ile çözü mü:**

RDTM dikkate alındığında (4.16) da ZK(3,3) denkleminin indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_{k+1}(x, y) = -\frac{1}{(k+1)} \left( \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^s U_{k-s}(x, y) U_{s-r}(x, y) U_r(x, y) \\ & + 2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^s U_{k-s}(x, y) U_{s-r}(x, y) U_r(x, y) \\ & + 2 \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^s U_{k-s}(x, y) U_{s-r}(x, y) U_r(x, y) \end{aligned} \right) \quad (4.19)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $U_k$ 'lar indirgenmiş dönüşüm fonksiyonlarıdır. (4.17) başlangıç şartından

$$U_0(x, y) = \frac{3}{2} \lambda \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \quad (4.20)$$

yazılabilir. (15) ifadesi (14) iterasyonu içinde yerine yazıp devam ettirirsek

$$U_1(x, y) = -\frac{3}{8} \lambda^3 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \left( 9 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right) - 8 \right), \quad (4.21)$$

$$U_2(x, y) = \frac{3}{64} \lambda^2 \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \left( \begin{aligned} & 765 \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ & - 729 \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) + 91 \end{aligned} \right), \quad (4.22)$$

$$U_3(x, y) = -\frac{1}{256} \lambda^7 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \begin{pmatrix} -382293 \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ +188181 \cosh^6\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ +234468 \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ -39851 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

ifadeleri elde edilir. Aranan yaklaşık çözüm

$$\tilde{u}_3(x, y, t) = \sum_{k=0}^3 U_k(x, y) t^k \quad (4.24)$$

formundadır. (4.20)-(4.23) ifadeleri (4.24) içinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3(x, y, t) = & \frac{\lambda^7}{256} \begin{pmatrix} -234468 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right) + 382293 \cosh^5\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ + 39851 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) - 188181 \cosh^5\left(\frac{x+y}{6}\right) \end{pmatrix} t^3 \\ & + \frac{\lambda^5}{256} \begin{pmatrix} 9180 \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ - 8748 \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) + 1092 \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \end{pmatrix} t^2 \\ & + \frac{\lambda^3}{256} \begin{pmatrix} -864 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ + 768 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) + 1092 \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \end{pmatrix} t \\ & + \frac{3}{2} \lambda \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

3. iterasyon ile ZK(3,3) başlangıç değer probleminin RDTM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

### **ZK(3,3) denkleminin VIM ile çözümü:**

VIM dikkate alındığında (4.16) de ZK(3,3) denklemi için doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u_n(x, y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial u_n^3(x, y, \tau)}{\partial x} \\ & + 2 \frac{\partial^3 u_n^3(x, y, \tau)}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 u_n^3(x, y, \tau)}{\partial y^2 \partial x} \end{aligned} \right\} d\tau \quad (4.26)$$

şeklinde elde edilir. (4.17) başlangıç şartından

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0) = \frac{3}{2} \lambda \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \quad (4.27)$$

yazılabilir. (4.27) ifadesi (4.26) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse

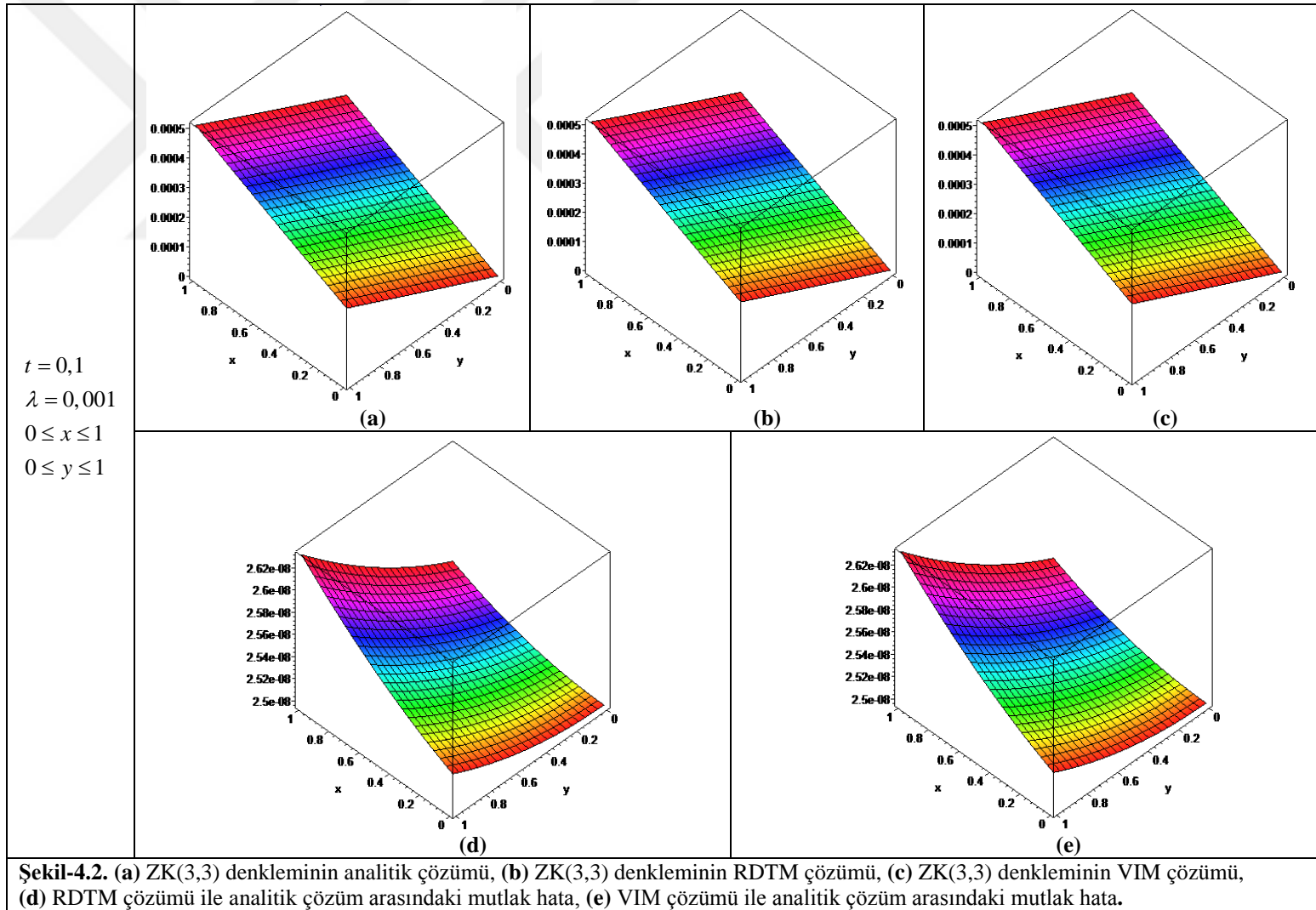
$$u_1(x, y, t) = -\frac{3}{8}\lambda \left( \begin{array}{c} 9\lambda^2 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ -8\lambda^2 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \end{array} \right) t + \frac{3}{2}\lambda \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right), \quad (4.28)$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2048}\lambda \left( \begin{array}{c} 351000\lambda^8 \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ -65664\lambda^8 \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ +295245\lambda^8 \cosh^8\left(\frac{x+y}{6}\right) \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ +1536\lambda^8 \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ -578340\lambda^8 \cosh^6\left(\frac{x+y}{6}\right) \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \end{array} \right) t^4 + \dots, \quad (4.29)$$

$$u_3(x, y, t) = \left( \frac{8604486490532792625}{113958643712} \lambda^{27} \cosh^{25}\left(\frac{x+y}{6}\right) + \dots \right) t^{13} + \dots + \frac{3}{2}\lambda \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \quad (4.30)$$

3. iterasyon ile ZK(3,3) başlangıç değer probleminin VIM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

ZK(3,3) kısmi diferansiyel denklemi, RDTM ve VIM ile yaklaşık çözümleri elde edildi. Her iki yöntem için de üç iterasyon uygulandı. Hesaplamalarda RDTM'nin yaklaşık çözümü 0,171 sn, VIM'in yaklaşık çözümü 3,463 sn zaman aldı. Elde edilen yaklaşık çözüm, literatürde var olan analitik çözüm ve bu çözümler arasındaki mutlak hata analizi Şekil-4.2 ve Tablo-4.2'deki gibi verilebilir.



<b>Tablo-4.2.</b> ZK(3,3) denklemi için 3. iterasyon ile yaklaşık ve analitik çözümlerin karşılaştırılması. ( $\lambda = 0,001$ )							
$x$	$y$	$t$	<b>Analitik Çözüm</b>	<b>RDTM Çözüm</b>	<b>VIM Çözüm</b>	<b>RDTM'nin Mutlak Hatası</b>	<b>VIM'nin Mutlak Hatası</b>
0.0	0.0		-0.0000000500000	-0.0000000000750	-0.0000000000750	$0.4992500001 \times 10^{-7}$	$0.4992500001 \times 10^{-7}$
0.0	0.5		0.0001250945526	0.0001251446462	0.0001251446462	$0.500936 \times 10^{-7}$	$0.500936 \times 10^{-7}$
0.0	1.0		0.0002511083202	0.0002511589208	0.0002511589208	$0.506006 \times 10^{-7}$	$0.506006 \times 10^{-7}$
0.5	0.0		0.0001250945526	0.0001251446462	0.0001251446462	$0.500936 \times 10^{-7}$	$0.500936 \times 10^{-7}$
0.5	0.5	0.2	0.0002511083202	0.0002511589208	0.0002511589208	$0.506006 \times 10^{-7}$	$0.506006 \times 10^{-7}$
0.5	1.0		0.0003788669048	0.0003789183534	0.0003789183534	$0.514486 \times 10^{-7}$	$0.514486 \times 10^{-7}$
1.0	0.0		0.0002511083202	0.0002511589208	0.0002511589208	$0.506006 \times 10^{-7}$	$0.506006 \times 10^{-7}$
1.0	0.5		0.0003788669048	0.0003789183534	0.0003789183534	$0.514486 \times 10^{-7}$	$0.514486 \times 10^{-7}$
1.0	1.0		0.0005092580328	0.0005093106746	0.0005093106746	$0.526418 \times 10^{-7}$	$0.526418 \times 10^{-7}$
0.0	0.0		-0.00000007500000	-0.0000000001125	-0.0000000001125	$0.7488750003 \times 10^{-7}$	$0.7488750003 \times 10^{-7}$
0.0	0.5		0.0001250694658	0.0001251446062	0.0001251446062	$0.751404 \times 10^{-7}$	$0.7514040001 \times 10^{-7}$
0.0	1.0		0.0002510829723	0.0002511588732	0.0002511588732	$0.759008 \times 10^{-7}$	$0.7590080004 \times 10^{-7}$
0.5	0.0		0.0001250694658	0.0001251446062	0.0001251446062	$0.751404 \times 10^{-7}$	$0.7514040001 \times 10^{-7}$
0.5	0.5	0.3	0.0002510829723	0.0002511588732	0.0002511588732	$0.759008 \times 10^{-7}$	$0.7590080004 \times 10^{-7}$
0.5	1.0		0.0003788411198	0.0003789182925	0.0003789182925	$0.771728 \times 10^{-7}$	$0.7717280009 \times 10^{-7}$
1.0	0.0		0.0002510829723	0.0002511588732	0.0002511588732	$0.759008 \times 10^{-7}$	$0.7590080004 \times 10^{-7}$
1.0	0.5		0.0003788411198	0.0003789182925	0.0003789182925	$0.771728 \times 10^{-7}$	$0.7717280009 \times 10^{-7}$
1.0	1.0		0.0005092316313	0.0005093105939	0.0005093105939	$0.789627 \times 10^{-7}$	$0.7896270020 \times 10^{-7}$
Yöntemlerin ZK(3,3) denkleminin çözümündeki hesaplama süresi:						<b>RDTM : 0,171 sn</b>	
						<b>VIM : 3,463 sn</b>	

#### 4.2. 2-Boyutlu ve Dördüncü Mertebeden Kuramoto-Sivashinsky Denklemi

Bu alt bölümde 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden iki farklı Kuramoto-Sivashinsky (KS) denkleminin RDTM, HAM ve VIM yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edildi. Maple ve Mathematica programları kullanılarak yöntemler ile elde edilen yaklaşık çözümler karşılaştırıldı.

##### Problem 4.2.1.

2-boyutlu ve dördüncü mertebeden KS denklemini başlangıç şartı ile beraber

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (4.31)$$

$$u(x, 0) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \left( 11 \tanh^3(\beta(x - x_0)) - 9 \tanh(\beta(x - x_0)) \right) \quad (4.32)$$

şeklinde ele alalım (Porshokouhi ve Ghanbari, 2011; Kurulay ve ark., 2013). Bu başlangıç değer probleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \left( 11 \tanh^3(\beta(x - \alpha t - x_0)) - 9 \tanh(\beta(x - \alpha t - x_0)) \right) \quad (4.33)$$

şeklinde verilmektedir (Porshokouhi ve Ghanbari, 2011; Kurulay ve ark., 2013). Bu problemin RDTM, HAM ve VIM yardımıyla çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir.

##### *KS denkleminin RDTM ile çözümü:*

RDTM dikkate alındığında (4.31) de KS denklemi için indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$(k+1)U_{k+1}(x) = -\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 U_k(x)}{\partial x^4} - \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x) \left( \frac{\partial U_r(x)}{\partial x} \right) \quad (4.34)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $U_k$ 'lar indirgenmiş dönüşüm fonksiyonlarıdır. (4.32) başlangıç şartından

$$U_0(x) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \left( 11 \tanh^3(\beta(x - x_0)) - 9 \tanh(\beta(x - x_0)) \right) \quad (4.35)$$

yazılabilir. (4.35) ifadesi (3.34) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse

$$U_1(x) = -\frac{60\sqrt{209}\beta^2 \sinh(\beta(-x + x_0))}{361 \cosh^7(\beta(-x + x_0))} \begin{pmatrix} 4 \cosh^4(\beta(-x + x_0)) \\ -11 \cosh^2(\beta(-x + x_0)) \\ +16\beta^2 \cosh^4(\beta(-x + x_0)) \\ -24\beta^2 \cosh^2(\beta(-x + x_0)) \\ +330\beta^2 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$U_2(x) = -\frac{60\sqrt{209}\beta^4 \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^{11}(\beta(-x+x_0))} \left( \begin{array}{l} 831600\beta^4 + 165 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ +18600\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -18480\beta^2 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +8\beta^2 \cosh^8(\beta(-x+x_0)) \\ +391440\beta^4 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -1112160\beta^4 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +64\beta^2 \cosh^8(\beta(-x+x_0)) \\ -3776\beta^2 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ +128\beta^4 \cosh^8(\beta(-x+x_0)) \\ -30592\beta^4 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ -112 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \end{array} \right) \quad (4.37)$$

ifadeleri elde edilir. Aranan yaklaşık çözüm

$$\tilde{u}_2(x,t) = \sum_{k=0}^2 U_k(x)t^k \quad (4.38)$$

formundadır. (4.35)-(4.37) ifadeleri (4.38) içinde yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_2(x,t) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (11 \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 9 \tanh(\beta(x-x_0))) + \frac{60\sqrt{209}\beta^2 \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^7(\beta(-x+x_0))} \left( \begin{array}{l} 4 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -11 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +16\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -24\beta^2 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +330\beta^2 \end{array} \right) t + \dots \quad (4.39)$$

2. iterasyon ile KS başlangıç değer probleminin RDTM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

### **KS denkleminin VIM ile çözümü:**

VIM dikkate alındığında (4.31) de KS denklemi için doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left\{ \frac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial \tau} + u_n(x,\tau) \frac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_n(x,\tau)}{\partial x^4} \right\} d\tau \quad (4.40)$$

şeklinde elde edilir. (4.32) başlangıç şartından

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (11 \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 9 \tanh(\beta(x-x_0))) \quad (4.41)$$

yazılabilir. (4.41) ifadesi (4.40) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse



$$u_1(x,t) = -\frac{1}{6859 \cosh^7(\beta(-x+x_0))} \left( \begin{array}{l} -1045\sqrt{209} \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^4(\beta(-x+x_0)) - 13200\beta t \times \\ \sinh(\beta(-x+x_0)) \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ + 4560\sqrt{209}\beta^2 t \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^4(\beta(-x+x_0)) + \dots \end{array} \right), \quad (4.42)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{47045881 \cosh^{15}(\beta(-x+x_0))} \left( \begin{array}{l} 139469589072000\beta^9 t^3 \times \\ \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ - 1290177900\sqrt{209}\beta^4 t^2 \times \\ \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^8(\beta(-x+x_0)) + \dots \end{array} \right) \quad (4.43)$$

2. iterasyon ile KS başlangıç değer probleminin VIM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

#### **KS denkleminin HAM ile çözümü:**

HAM dikkate alındığında başlangıç yaklaşımı

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (11 \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 9 \tanh(\beta(x-x_0))) \quad (4.44)$$

ve c integral sabiti olmak üzere  $L[c] = 0$  özelliğini sağlayan lineer operatör

$$L[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t} \quad (4.45)$$

şeklinde seçilir.  $L^{-1}$  ters operatörü

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt \quad (4.46)$$

olur. (4.31) de KS denkleminde lineer olmayan operatör

$$N[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t} + (\phi(x,t;q))(\phi(x,t;q))_x + (\phi(x,t;q))_{xx} + (\phi(x,t;q))_{xxx} \quad (4.47)$$

olur. Yukarıdaki HAM daki tanımı kullanarak sıfıncı mertebeye deforme denklemini

$$(1-q)L[\phi(x,t;q) - u_0(x,t)] + qhH(x,t)N[\phi(x,t;q)] = 0 \quad (4.48)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $h$  sıfırdan farklı yardımcı parametredir.

$$\phi(x,t;0) = u_0(x,t), \quad \phi(x,t;1) = u(x,t) \quad (4.49)$$

eşitlikleri vardır. Bunun yanında  $m$  inci mertebeden deforme denklemini

$$L[u_m(x,t;q) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = hH(x,t)R(\overline{u_{m-1}}), \quad m \geq 1 \quad (4.50)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\overline{u_{m-1}} = \{u_0(x,t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)\} \quad (4.51)$$

ve

$$R(\overline{u_{m-1}}) = (u_{m-1}(x,t))_t + \sum_{k=0}^{m-1} (u_k(u_{m-1-k})_x) + (u_{m-1})_{xx} + (u_{m-1})_{xxx} \quad (4.52)$$

dir. Böylece  $m \geq 1$  için (4.50)  $m$  inci mertebeden deformasyon denkleminin çözümü

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + hH(x,t)L^{-1}[R(\overline{u_{m-1}})] \quad (4.53)$$

olur. (4.44) başlangıç yaklaşımı ve (4.53) denkleminde

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \begin{pmatrix} 11 \tanh^3(\beta(x-x_0)) \\ -9 \tanh(\beta(x-x_0)) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$u_1(x,t) = \frac{60\sqrt{209}\beta^2 \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^7(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} 4 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -11 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +16\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -224\beta^2 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +330\beta^2 \end{pmatrix} t \quad (4.55)$$

$$u_2(x,t) = \frac{60\sqrt{209}\beta^2 \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^{11}(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} 660\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ +8 \cosh^8(\beta(-x+x_0)) \\ +32\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -448\beta^2 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) + \dots \end{pmatrix} t^2 \quad (4.56)$$

elde edilir. Taylor açılımının

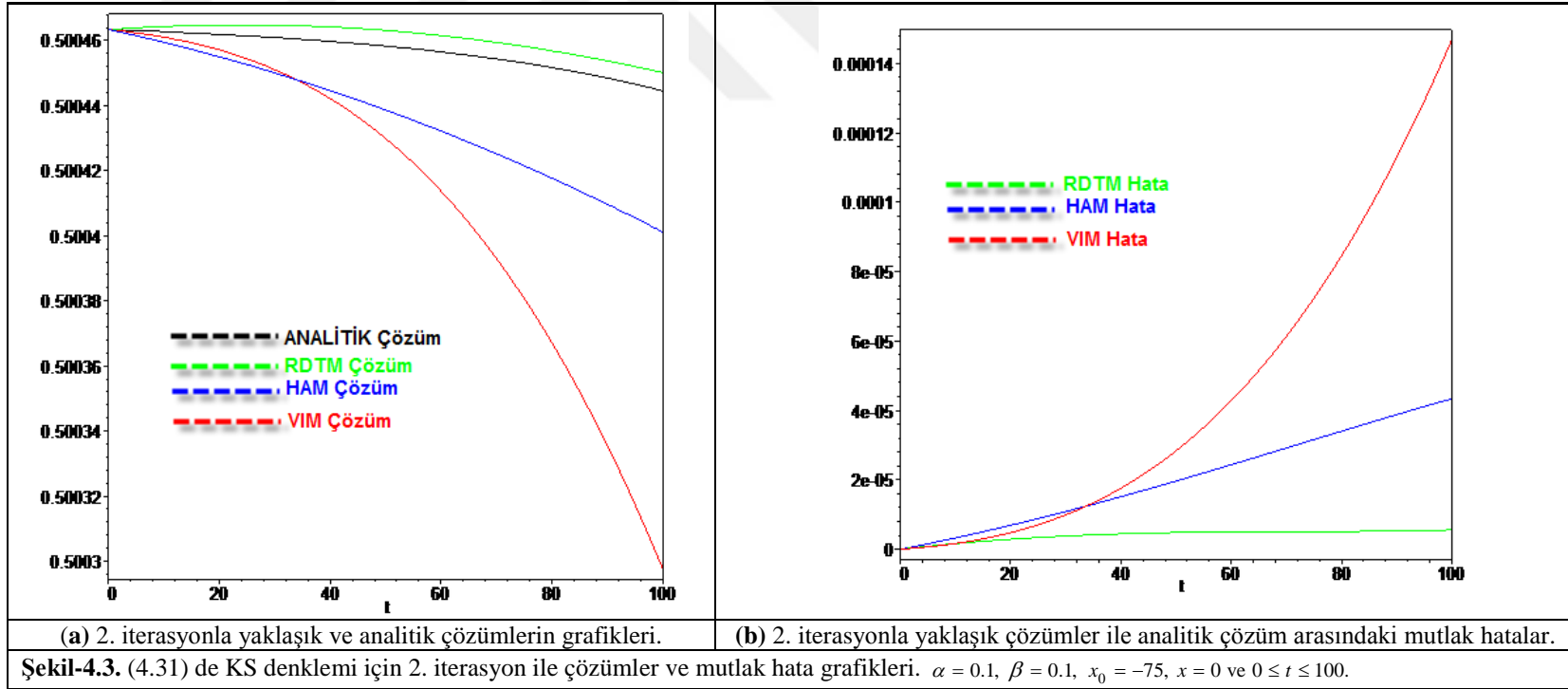
$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots \quad (4.57)$$

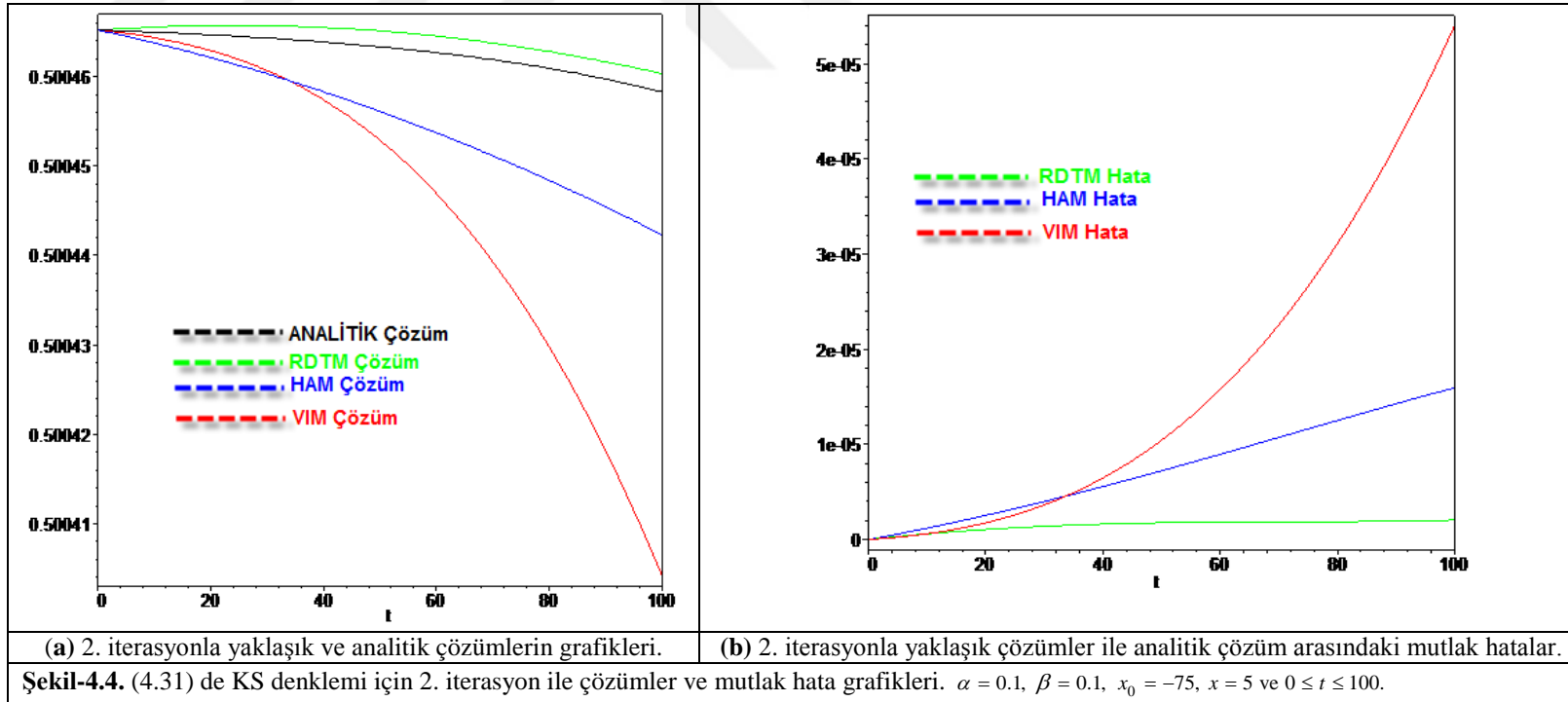
ilk üç terimini kullanarak

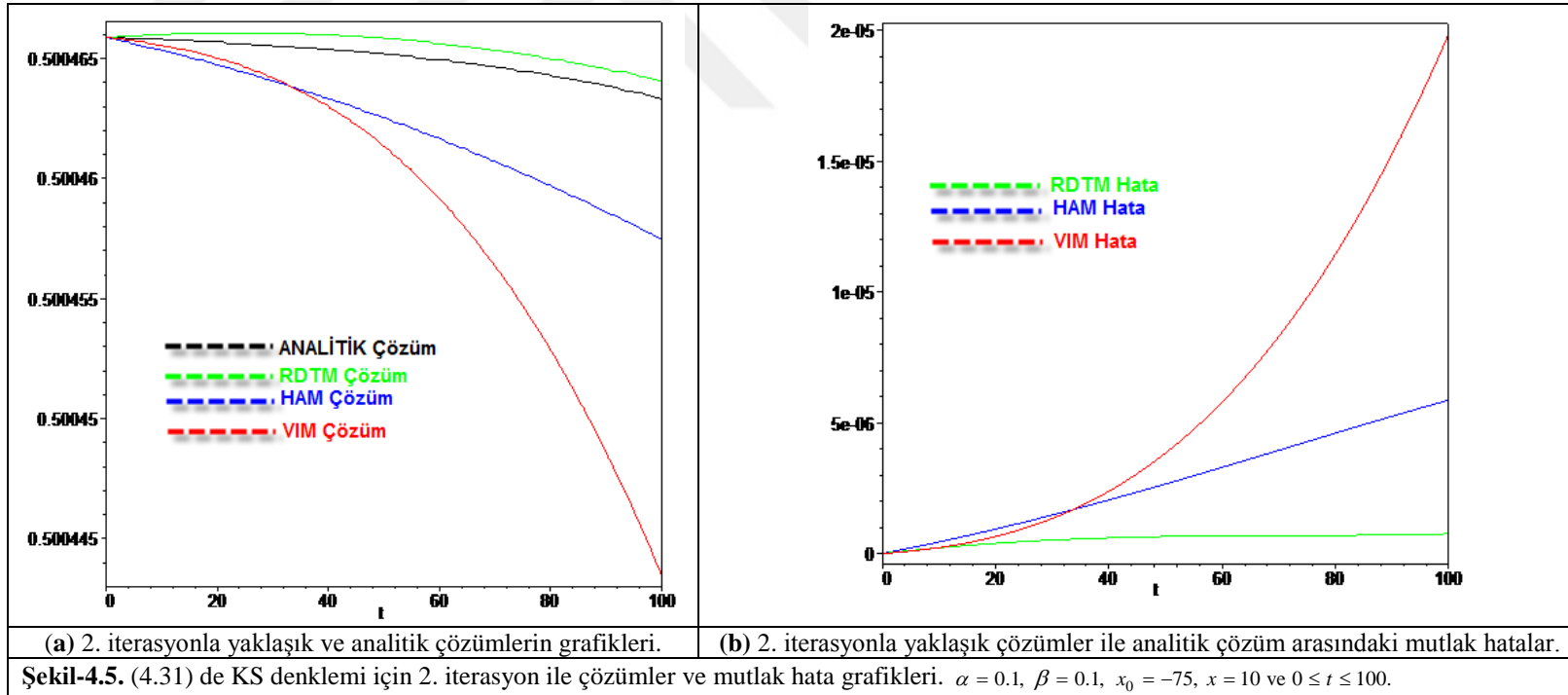
$$\begin{aligned} u(x,t) &\approx u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \\ &= \alpha + \frac{5}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \left( 11 \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 9 \tanh(\beta(x-x_0)) \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.58)$$

2. iterasyon ile KS başlangıç değer probleminin HAM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

Elde edilen yaklaşık çözüm, literatürde var olan analitik çözüm ve bu çözümler arasındaki mutlak hata analizi Şekil-4.3, Şekil-4.4 ve Şekil-4.5'deki gibi verilebilir.







**Problem 4.2.2.**

Bir diğ er problemimiz olan 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden KS denklemi başlangıç şartı ile beraber

$$u_t + uu_x - u_{xx} + u_{xxx} = 0, \quad (4.59)$$

$$u(x, 0) = \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x - x_0)) - 3 \tanh(\beta(x - x_0)) \right) \quad (4.60)$$

şeklinde ele alalım (Porshokouhi ve Ghanbari, 2011). Bu başlangıç değ er probleminin analitik ç özümü

$$u(x, t) = \alpha + \frac{5}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x - \alpha t - x_0)) - 3 \tanh(\beta(x - \alpha t - x_0)) \right) \quad (4.61)$$

şeklinde verilmektedir (Porshokouhi ve Ghanbari, 2011). Bu problemin RDTM, HAM ve VIM yardımıyla ç özümleri ař ağıdaki gibi verilebilir.

**KS denkleminin RDTM ile ç özümü:**

RDTM dikkate alındığında (4.59) de KS denklemi için indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$(k+1)U_{k+1}(x) = \gamma \frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^4 U_k(x)}{\partial x^4} - \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x) \left( \frac{\partial U_r(x)}{\partial x} \right) \quad (4.62)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $U_k$ 'lar indirgenmiş dönüşüm fonksiyonlarıdır. (4.60)

başlangıç şartından

$$U_0(x) = \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x - x_0)) - 3 \tanh(\beta(x - x_0)) \right) \quad (4.63)$$

yazılabilir. (4.63) ifadesi (4.64) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse

$$U_1(x) = \frac{\beta^2 180\sqrt{19} \sinh(\beta(-x + x_0))}{361 \cosh^7(\beta(-x + x_0))} \begin{pmatrix} -\cosh^2(\beta(-x + x_0)) \\ +16\beta^2 \cosh^2(\beta(-x + x_0)) \\ -30\beta^2 \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

$$U_2(x) = -\frac{\beta^4 180 \sqrt{19} \sinh(\beta(-x+x_0))}{361c \cosh^{11}(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} 1560\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ -1680\beta^2 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ -256\beta^2 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ +8\cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ -15 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ +2048\beta^4 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ -31920\beta^4 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ +97440\beta^4 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ -75600\beta^2 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

ifadeleri elde edilir. Aranan yaklaşık çözüm

$$\tilde{u}_2(x,t) = \sum_{k=0}^2 U_k(x)t^k \quad (4.66)$$

formundadır. (4.63)-(4.65) ifadeleri (4.66) da yerlerine yazılırsa

$$\tilde{u}_2(x,t) = \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 3 \tanh(\beta(x-x_0)) \right) + \frac{\beta^2 180 \sqrt{19} \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^7(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} -\cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +16\beta^2 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ -30\beta^2 \end{pmatrix} t + \dots \quad (4.67)$$

2. iterasyon ile KS başlangıç değer probleminin RDTM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

### **KS denkleminin VIM ile çözümü:**

VIM dikkate alındığında (4.59) da KS denklemi için doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left\{ \frac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial \tau} + u_n(x,\tau) \frac{\partial u_n(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_n(x,\tau)}{\partial x^4} \right\} d\tau \quad (4.68)$$

şeklinde elde edilir. (4.60) başlangıç şartından

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 3 \tanh(\beta(x-x_0)) \right) \quad (4.69)$$

yazılabilir. (4.69) ifadesi (4.68) iterasyonu içinde yerine yazılıp devam ettirilirse

$$u_1(x,t) = \frac{1}{6859 \cosh^7(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} 675\beta t \sinh(\beta(-x+x_0)) \\ +6859\alpha \cosh^7(\beta(-x+x_0)) \\ +570\sqrt{19} \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^6(\beta(-x+x_0)) + \dots \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

$$u_2(x,t) = \frac{-\cosh^{-15}(\beta(-x+x_0))}{47045881} \left( \begin{array}{l} 39409070400\sqrt{19}\beta^6 t^2 \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^6(\beta(-x+x_0)) - 2285726083200\sqrt{19} \times \\ \beta^8 t^2 \sinh(\beta(-x+x_0)) \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ + 1773408168000\sqrt{19}\beta^8 t^2 \sinh(\beta(-x+x_0)) \times \\ \cosh^4(\beta(-x+x_0)) + \dots \end{array} \right) \quad (4.71)$$

2. iterasyon ile KS başlangıç değer probleminin VIM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

### **KS denkleminin HAM ile çözümü:**

HAM dikkate alındığında başlangıç yaklaşımı

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 3 \tanh(\beta(x-x_0)) \right) \quad (4.72)$$

ve  $c$  integral sabiti olmak üzere  $L[c] = 0$  özelliğini sağlayan lineer operatör

$$L[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t} \quad (4.73)$$

şeklinde seçilir.  $L^{-1}$  ters operatörü

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt \quad (4.74)$$

olur. (4.59) de KS denkleminde lineer olmayan operatör

$$N[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t} + (\phi(x,t;q))(\phi(x,t;q))_x - (\phi(x,t;q))_{xx} + (\phi(x,t;q))_{xxx} \quad (4.75)$$

yazılabilir. Yukarıdaki HAM'daki tanımı kullanarak sıfırıncı mertebe deformasyon denklemini

$$(1-q)L[\phi(x,t;q) - u_0(x,t)] + qhH(x,t)N[\phi(x,t;q)] = 0 \quad (4.76)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $h$  sıfırdan farklı yardımcı parametredir.

$$\phi(x,t;0) = u_0(x,t), \quad \phi(x,t;1) = u(x,t) \quad (4.77)$$

eşitlikleri vardır. Bunun yanında  $m$ -inci mertebeden deformasyon denklemini

$$L[u_m(x,t;q) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = hH(x,t)R(\overline{u_{m-1}}), \quad m \geq 1 \quad (4.78)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\overline{u_{m-1}} = \{u_0(x,t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)\} \quad (4.79)$$

ve

$$R(\overline{u_{m-1}}) = (u_{m-1}(x,t))_t + \sum_{k=0}^{m-1} (u_k(u_{m-1-k})_x) - (u_{m-1})_{xx} + (u_{m-1})_{xxx} \quad (4.80)$$

dir. Böylece  $m \geq 1$  için (4.78)  $m$ -inci mertebeden deformasyon denkleminin çözümü

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + hH(x,t)L^{-1}[R(\overline{u_{m-1}})]. \quad (4.81)$$



olur. (4.72) başlangıç yaklaşımı ve (4.81) denkleminde

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 3 \tanh(\beta(x-x_0)) \right) \quad (4.82)$$

$$u_1(x,t) = \frac{-180\sqrt{19}\beta^2 \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^7(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} -\cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ +16\beta^2 \cosh^2(\beta(-x+x_0)) \\ -30\beta^2 \end{pmatrix} t \quad (4.83)$$

$$u_2(x,t) = \frac{180\sqrt{19}\beta^2 \sinh(\beta(-x+x_0))}{361 \cosh^{11}(\beta(-x+x_0))} \begin{pmatrix} -60\beta^2 \cosh^4(\beta(-x+x_0)) \\ +32\beta^2 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) \\ -2 \cosh^6(\beta(-x+x_0)) + \dots \end{pmatrix} t^2 \quad (4.84)$$

elde edilir.

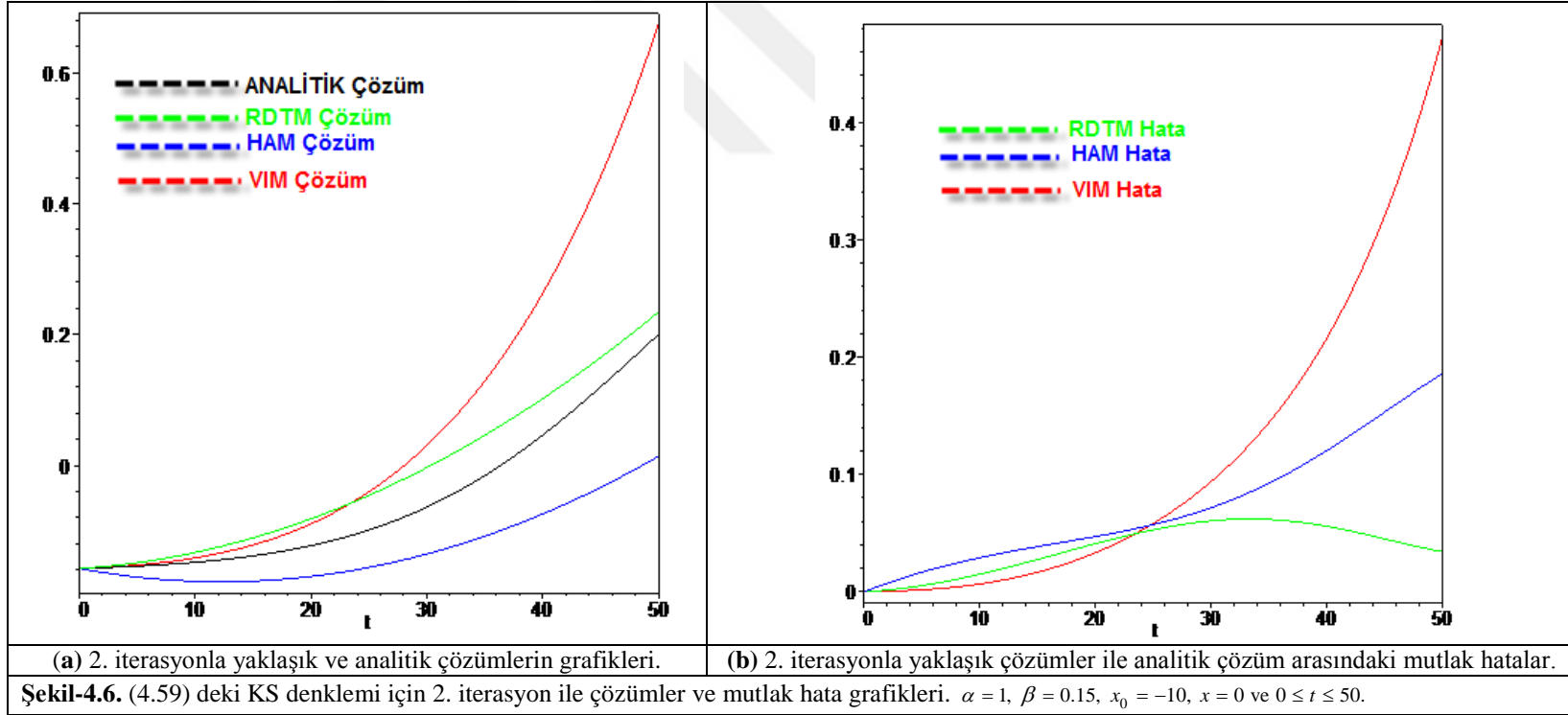
$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots \quad (4.85)$$

Taylor açılımının ilk üç terimini kullanarak

$$\begin{aligned} u(x,t) &\approx u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \\ &= \alpha + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left( \tanh^3(\beta(x-x_0)) - 3 \tanh(\beta(x-x_0)) \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.86)$$

2. iterasyon ile KS başlangıç değer probleminin HAM ile yaklaşık çözümü elde edilir.

Elde edilen yaklaşık çözüm, literatürde var olan analitik çözüm ve bu çözümler arasındaki mutlak hata analizi Şekil-4.6'daki gibi verilebilir.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümleri ele alınmıştır. Bu yaklaşık çözümler elde edilirken RDTM, VIM ve HAM kullanılmıştır.

n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenirken 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden Zakharov–Kuznetsov (ZK) denklemi ve 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden Kuramoto-Sivashinsky (KS) denklemi test problemi olarak seçilmiştir. Hesaplamalarda Intel® Core(TM) i5-2430M CPU @ 2.40GHz ve 4.00 GB RAM özellikli bilgisayar ve yazılım programları olarak Maple 15 ve Mathematica 10 kullanılmıştır.

ZK ve KS denklemleri, RDTM ile yaklaşık çözümünün hesaplanması ilk defa bu çalışmada yapılmıştır (Acan ve Keskin, 2015b; 2015a).

İlk olarak, RDTM ve VIM yardımı ile iki farklı 3-boyutlu ve üçüncü mertebeden ZK(2,2) ve ZK(3,3) kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü üç iterasyon kullanılarak hesaplandı. Elde edilen çözümler, tablolar ve grafikler ile analiz edildi. Tablo-4.1, Tablo-4.2, Şekil-4.1 ve Şekil-4.2 sonuçları bize RDTM ve VIM'in ZK(2,2) test problemi için maksimum  $10^{-4}$  mutlak hata ile ZK(3,3) test problemi için maksimum  $10^{-7}$  mutlak hata ile sonuç verdiğini gösterdi. Fakat RDTM'nin algoritması daha basit olduğundan bilgisayardaki işlem yükü açısından VIM'e göre ZK(2,2) test problemi için yaklaşık olarak 7 kat, ZK(3,3) test problemi için yaklaşık olarak 20 kat daha hızlı sonuç vermektedir.

İkinci olarak, RDTM, VIM ve HAM yardımı ile iki farklı 2-boyutlu ve dördüncü mertebeden KS kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü iki iterasyon kullanılarak hesaplandı. Elde edilen çözümler, grafikler ile analiz edildi. Şekil-4.3, Şekil-4.4, Şekil-4.5 ve Şekil-4.6 sonuçları bize RDTM'nin, VIM ve HAM'a göre daha iyi bir mutlak hata ile sonuç verdiğini gösterdi.

Sonuç olarak, RDTM'nin VIM ve HAM'a göre algoritmasının daha basit olması ve bilgisayarda daha hızlı sonuç vermesi açısından n-boyutlu ve yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde daha uyumlu, basit, kullanışlı ve etkili olduğu görüldü.

**KAYNAKLAR**

- Abazari, R. ve Abazari, M., 2012, Numerical simulation of generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation by RDTM and comparison with DTM, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 (2), 619-629.
- Abazari, R. ve Soltanalizadeh, B., 2012, Reduced differential transform method and its application on Kawahara equations, *Thai Journal of Mathematics*, 11 (1), 199-216.
- Abazari, R. ve Kılıcman, A., 2014, Application of differential transform method on nonlinear integro-differential equations with proportional delay, *Neural Computing and Applications*, 24 (2), 391-397.
- Abbasbandy, S., 2006, The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 360 (1), 109-113.
- Abbasbandy, S., 2007, The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation, *Physics Letters A*, 361 (6), 478-483.
- Abbasbandy, S., 2010, Homotopy analysis method for the Kawahara equation, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11 (1), 307-312.
- Abdel-Salam, H. S. ve Al-Khaled, K., 2012, Variational iteration method for solving optimization problems, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2 (5), 1475-1497.
- Abdou, M. A. ve Soliman, A. A., 2005, Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181 (2), 245-251.
- Acan, O. ve Keskin, Y., 2015a, Approximate solution of Kuramoto–Sivashinsky equation using reduced differential transform method, *Proceedings Of The International Conference On Numerical Analysis And Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, 470003.
- Acan, O. ve Keskin, Y., 2015b, Reduced differential transform method for  $(2+ 1)$  dimensional type of the Zakharov–Kuznetsov ZK  $(n, n)$  equations, *Proceedings Of The International Conference On Numerical Analysis And Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, 370015.
- Acan, O. ve Keskin, Y., 2016, A Comparative Study of Numerical Methods for Solving  $(n+1)$  Dimensional and Third-Order Partial Differential Equations, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, (Kabul Edildi).

- Al-Amr, M. O., 2014, New applications of reduced differential transform method, *Alexandria Engineering Journal*, 53 (1), 243-247.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 1145-1158.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2006a, Solution of differential–difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 181 (1), 153-162.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2006b, Solution of difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 174 (2), 1216-1228.
- Atkinson, K. ve Han, W., 2005, Theoretical numerical analysis, *Springer*.
- Ayaz, F., 2003, On the two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 143 (2–3), 361-374.
- Ayaz, F., 2004a, Applications of differential transform method to differential-algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 152 (3), 649-657.
- Ayaz, F., 2004b, Solutions of the system of differential equations by differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 147 (2), 547-567.
- Ayaz, F. ve Oturanc, G., 2004, An Approximate Solution of Burgers Equation by Differential Transform Method, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 5 (2), 15-24.
- Biazar, J. ve Eslami, M., 2010, Analytic solution for Telegraph equation by differential transform method, *Physics Letters A*, 374 (29), 2904-2906.
- Bildik, N. ve Konuralp, A., 2006, The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (1), 65-70.
- Cenesiz, Y., Keskin, Y. ve Kurnaz, A., 2010, The solution of the nonlinear dispersive  $K(m,n)$  equations by RDT method, *Int. J. Nonlin. Sci*, 9 (4), 461-467.
- Chang, S. H., 2016, Convergence of variational iteration method applied to two-point diffusion problems, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 6805–6810.
- Chen, C. K. ve Ho, S. H., 1996, Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation*, 79 (2–3), 173-188.

- Chen, C. K. ve Ho, S. H., 1999, Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106 (2–3), 171-179.
- Chen, C. K. ve Ju, S. P., 2004, Application of differential transformation to transient advective–dispersive transport equation, *Applied Mathematics and Computation*, 155 (1), 25-38.
- Chen, C. L. ve Liu, Y. C., 1998, Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, *Applied Mathematics and Computation*, 95 (2–3), 155-164.
- Ganji, S. S., Barari, A., Ibsen, L. B. ve Domairry, G., 2012, Differential transform method for mathematical modeling of jamming transition problem in traffic congestion flow, *Central European Journal of Operations Research*, 20 (1), 87-100.
- Goh, S. M., Noorani, M. S. N., Hashim, I. ve Al-Sawalha, M. M., 2009, Variational iteration method as a reliable treatment for the hyperchaotic Rössler system, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (3), 363-372.
- Guerrero, F., Santonja, F. J. ve Villanueva, R. J., 2013, Solving a model for the evolution of smoking habit in Spain with homotopy analysis method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14 (1), 549-558.
- Hassan, H. N. ve El-Tawil, M. A., 2011, A new technique of using homotopy analysis method for solving high-order nonlinear differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34 (6), 728-742.
- He, J. H., 1997a, A new approach to nonlinear partial differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (4), 230-235.
- He, J. H., 1997b, Variational iteration method for delay differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (4), 235-236.
- He, J. H., 1998a, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167 (1), 57-68.

- He, J. H., 1998b, Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167 (1), 69-73.
- He, J. H., 1999, Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 (4), 699-708.
- He, J. H., 2000, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computation*, 114 (2–3), 115-123.
- He, J. H., 2004, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, 156 (2), 527-539.
- Hesam, S., Nazemi, A. ve Haghbin, A., 2012, Reduced differential transform method for solving the Fornberg-Whitham type equation, *Int. J. Nonlinear Sci*, 13 (2), 158-162.
- İbiş, B. ve Bayram, M., 2012, Approximate solutions some nonlinear evolutions equations by using the reduced differential transform method, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1 (3), 288-302.
- Inc, M., 2007, Exact solutions with solitary patterns for the Zakharov–Kuznetsov equations with fully nonlinear dispersion, *Chaos, Solitons & Fractals*, 33 (5), 1783-1790.
- Inokuti, M., Sekine, H. ve Mura, T., 1978, General use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, *Variational method in the mechanics of solids*, 156-162.
- Islam, S. U., Haq, S. ve Ali, J., 2009, Numerical solution of special 12th-order boundary value problems using differential transform method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (4), 1132-1138.
- Jafari, H., 2014, A comparison between the variational iteration method and the successive approximations method, *Applied Mathematics Letters*, 32, 1-5.
- Jafarian, A., Ghaderi, P., Golmankhaneh, A. K. ve Baleanu, D., 2014, Homotopy analysis method for solving coupled Ramani equations, *Rom. J. Phys*, 59, 26-35.
- Jang, M. J., Chen, C. L. ve Liy, Y. C., 2000, On solving the initial-value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 115 (2–3), 145-160.

- Jang, M. J., Chen, C. L. ve Liu, Y. C., 2001, Two-dimensional differential transform for partial differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 121 (2-3), 261-270.
- Karaoğlu, O., 2013, Zamana Bağlı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri İçin Hiperbolik Tanjant ve Varyasyonel Hibrit Yöntemleri, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi*.
- Keskin, Y., Kurnaz, A., Kiris, M. ve Oturanc, G., 2007, Approximate solutions of generalized pantograph equations by the differential transform method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8 (2), 159-164.
- Keskin, Y. ve Oturanc, G., 2008, The Differential Transform Methods for Nonlinear Function and Its Applications, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 9 (1), 69-76.
- Keskin, Y. ve Oturanc, G., 2009, Reduced differential transform method for partial differential equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (6), 741-750.
- Keskin, Y., 2010, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözülmesi, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi*.
- Keskin, Y. ve Oturanc, G., 2010a, Reduced differential transform method for generalized KdV equations, *Mathematical & Computational Applications*, 15 (3), 382-393.
- Keskin, Y. ve Oturanc, G., 2010b, Numerical solution of Regularized Long Wave equation by reduced differential transform method, *Applied Mathematical Sciences*, 4 (25), 1221-1231.
- Keskin, Y. ve Oturanc, G., 2010c, Reduced Differential Transform Method For Solving Linear and Nonlinear Wave Equations, *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A*, 34 (A2), 113-122.
- Keskin, Y. ve Oturanc, G., 2010d, Application of Reduced Differential Transformation Method for Solving Gas Dynamics Equation, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5 (22), 1091-1096.
- Kıymaz, O. ve Cetinkaya, A., 2010, Variational iteration method for a class of nonlinear differential equations, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5 (37), 1819-1826.



- Kurnaz, A., Oturanc, G. ve Kiris, M. E., 2005, n-Dimensional differential transformation method for solving PDEs, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (3), 369-380.
- Kurulay, M., Secer, A. ve Ali, M. M., 2013, A New Approximate Analytical Solution of Kuramoto–Sivashinsky Equation Using Homotopy Analysis Method, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 7 (1), 267-271.
- Liao, S., 1992, The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, *Shanghai Jiao Tong University*.
- Liao, S., 1997, Homotopy analysis method: A new analytical technique for nonlinear problems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (2), 95-100.
- Liao, S. ve Chwang, A., 1998, Application of homotopy analysis method in nonlinear oscillations, *Journal of applied mechanics*, 65 (4), 914-922.
- Liao, S. ve Campo, A., 2002, Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems, *Journal of Fluid Mechanics*, 453, 411-425.
- Liao, S., 2003, Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method, *CRC press*.
- Liao, S., 2004, On the homotopy analysis method for nonlinear problems, *Applied Mathematics and Computation*, 147 (2), 499-513.
- Liao, S., 2009, Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (4), 983-997.
- Liao, S., 2012, Homotopy analysis method in nonlinear differential equations, *Springer*, 565.
- Liu, H. M., 2004, Variational approach to nonlinear electrochemical system, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 5 (1), 95-96.
- Momani, S., Abuasad, S. ve Odibat, Z., 2006, Variational iteration method for solving nonlinear boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 183 (2), 1351-1358.
- Munro, S. ve Parkes, E. J., 2000, Stability of solitary-wave solutions to a modified Zakharov-Kuznetsov equation, *Journal of Plasma Physics*, 64 (4), 411-426.

- Odibat, Z. M., 2008, Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels, *Mathematical and Computer Modelling*, 48 (7–8), 1144-1149.
- Odibat, Z. M., 2010, A study on the convergence of variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (9), 1181-1192.
- Porshokouhi, M. G. ve Ghanbari, B., 2011, Application of He's variational iteration method for solution of the family of Kuramoto–Sivashinsky equations, *Journal of King Saud University - Science*, 23 (4), 407-411.
- Pukhov, G. E., 1986, Differential transformations and mathematical modelling of physical processes, *Naukova Dumka, Kiev*.
- Rashidi, M. M., Domairry, G. ve Dinarvand, S., 2009, Approximate solutions for the Burger and regularized long wave equations by means of the homotopy analysis method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (3), 708-717.
- Rashidi, M. M., Pour, S. M., Hayat, T. ve Obaidat, S., 2012, Analytic approximate solutions for steady flow over a rotating disk in porous medium with heat transfer by homotopy analysis method, *Computers & Fluids*, 54, 1-9.
- Rawashdeh, M., 2013, Using the Reduced Differential Transform Method to Solve Nonlinear PDEs Arises in Biology and Physics, *World Applied Sciences Journal*, 23 (8), 1037-1043.
- Sakar, M. G., 2012, Kesirli Mertebeli Diferansiyel Denklemlerin Analitik ve Nümerik Çözümleri Doktora Tezi, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi*.
- Saravanan, A. ve Magesh, N., 2013, A comparison between the reduced differential transform method and the Adomian decomposition method for the Newell–Whitehead–Segel equation, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21 (3), 259-265.
- Shayganmanesh, A., 2015, Generalizing homotopy analysis method to solve system of integral equations, *Journal of Mathematical Extension*, 5 (1), 21-31.
- Sivashinsky, G. I., 1977, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames-I. Derivation of basic equations, *Acta astronautica*, 4 (11), 1177-1206.
- Sivashinsky, G. I., 1980, On flame propagation under conditions of stoichiometry, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 39 (1), 67-82.
- Srivastava, V. K., Mishra, N., Kumar, S., Singh, B. K. ve Awasthi, M. K., 2014, Reduced differential transform method for solving  $(1+n)$  – Dimensional

- Burgers' equation, *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1 (2), 115-119.
- Sun, Q., 2005, Solving the Klein–Gordon equation by means of the homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, 169 (1), 355-365.
- Taghizadeh, N., Akbari, M. ve Shahidi, M., 2011, Application of reduced differential transform method to the Wu-Zhang equation, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5 (5), 565-571.
- Taha, B. A., 2011, The use of reduced differential transform method for solving partial differential equations with variable coefficients, *Journal of Basrah Researches (Sciences)*, 37 (4), 226-233.
- Tan, Y. ve Abbasbandy, S., 2008, Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 (3), 539-546.
- Wazwaz, A. M., 2005, Nonlinear dispersive special type of the Zakharov–Kuznetsov equation ZK(n,n) with compact and noncompact structures, *Applied Mathematics and Computation*, 161 (2), 577-590.
- Wazwaz, A. M., 2007, The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs, *Computers & Mathematics with Applications*, 54 (7), 895-902.
- Wazwaz, A. M., 2010, Partial differential equations and solitary waves theory, *Springer Science & Business Media*.
- Yaghoobi, H. ve Torabi, M., 2011, The application of differential transformation method to nonlinear equations arising in heat transfer, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38 (6), 815-820.
- Yıldırım, K., İbiş, B. ve Bayram, M., 2012, New solutions of the non linear Fisher type equations by the reduced differential transform, *Nonlinear Sci. Lett. A*, 3 (1), 29-36.
- Yu, L. T. ve Chen, C. K., 1998, The solution of the Blasius equation by the differential transformation method, *Mathematical and Computer Modelling*, 28 (1), 101-111.
- Yusufoglu, E., 2007, Variational iteration method for construction of some compact and noncompact structures of Klein-Gordon equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8 (2), 153-158.

- Yusufođlu, E. ve Erbař, B., 2008, He's variational iteration method applied to the solution of the prey and predator problem with variable coefficients, *Physics Letters A*, 372 (21), 3829-3835.
- Zakharov, V. E. ve Kuznetsov, E. A., 1974, On threedimensional solitons, *Zhurnal Eksp. Teoret. Fiz*, 66, 594-597.
- Zhou, J. K., 1986, Differential transformation and its applications for electrical circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China: 1279-1289.



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Ömer AÇAN  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Mardin/Midyat, 1985  
**e-mail** : omeracan@yahoo.com

### EĞİTİM

<b>Derece</b>	<b>Adı, İlçe, İl</b>	<b>Bitirme Yılı</b>
Lise	: SÇPL, Söğütlü Beldesi, Midyat, Mardin	2002
Üniversite	: Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Merkez, Van	2008
Yüksek Lisans:	Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Merkez, Van	2011

### İŞ DENEYİMLERİ

<b>Yıl</b>	<b>Kurum</b>	<b>Görevi</b>
2011-2014	Siirt Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2014-	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

### UZMANLIK ALANI

Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri

### YABANCI DİLLER

İngilizce

**YAYINLAR**

- Acan, O. ve Keskin, Y., 2015a, Approximate solution of Kuramoto–Sivashinsky equation using reduced differential transform method, *Proceedings Of The International Conference On Numerical Analysis And Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, 470003. **(Doktora Tezinden)**.
- Acan, O. ve Keskin, Y., 2015b, Reduced differential transform method for (2+ 1) dimensional type of the Zakharov–Kuznetsov ZK (n, n) equations, *Proceedings Of The International Conference On Numerical Analysis And Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, 370015. **(Doktora Tezinden)**.
- Acan, O. ve Keskin, Y., 2016, A Comparative Study of Numerical Methods for Solving (n+1) Dimensional and Third-Order Partial Differential Equations, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* (Kabul edildi) **(Doktora Tezinden)**.
- Acan, O. ve Keskin, Y., 2016, 2 Dimensional and Forth Order Kuramoto Sivashinsky Equation and Its Analytical Solution: A Comparative Study of RDTM, VIM and HAM, (Dergiye gönderildi) **(Doktora Tezinden)**.