T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST GRUPLAR VE OTOMORFİZMALARI

Esma KANGAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2016

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Esma KANGAL tarafından hazırlanan "*SERBEST GRUPLAR VE OTOMORFİZMALARI*" adlı tez çalışması 03/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan & Danışman **Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK**	
Üye **Yrd. Doç Dr. Nihat AKGÜNEŞ**	
Üye **Yrd. Doç. Dr. Zübeyde ULUKÖK**	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

Bu tez çalışması ÖYP tarafından 2015-ÖYP-074 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Esma KANGAL

Tarih: 03/06/2016

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST GRUPLAR VE OTOMORFİZMALARI

Esma KANGAL

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2016, 66 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Yrd. Doç. Dr. Zübeyde ULUKÖK

Bu tez birinci bölüm olan giriş kısmı dışında 5 ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde temel bilgiler olarak serbest grup, grup sunuşu, grupların otomorfizma grupları, grup genişleme kavramları, karar verme problemleri ve Serre açısından yönlü grafların tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir serbest grubun otomorfizma grubunun üreteçleri Nielsen metodu tanıtılarak elde edilmiştir. Daha sonra bu grubun kelime probleminin çözülebilirliğini araştırmak için iki tür sunuş tanıtılmıştır. Buna ek olarak rankı 2 olan bir serbest grubun otomorfizma grubunun, bazı sonlu ve sonsuz devirli grupların yarı-direkt çarpım ve serbest çarpımlarının bir kombinasyonuna izomorf olduğu gösterilmiş ve bu izomorfizma yardımıyla kelime probleminin çözülebilir olduğu sonucu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak bazı cebirsel yapıların kelime problemi için algoritma oluşturmayı sağlayan yeniden yazma metodunun tanımı ve temel bilgileri verilmiştir. Daha sonra tezimizin ana sonucu olarak rankı n olan bir serbest grubun otomorfizma grubunun kelime probleminin çözülebilirliği bizim tarafımızdan elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, grup teoride önemli bir yeri olan Bass-Serre teorisi üzerinde durulmuştur. Bunun için sırasıyla etki kavramı, ağaçlar ile birleştirilmiş serbest çarpım ve ağaçlar ile HNN-genişlemesi arasındaki ilişki açıklanmıştır. Buna ek olarak grafların ve grupların grafının temel grubu tanıtılmıştır.

Son bölümde ise genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bass-Serre teorisi, kelime problemi, grafların temel grubu, grupların grafı, grupların grafının temel grubu, serbest grup, serbest grubun otomorfizma grubu, yeniden yazma sistemi.

ABSTRACT

Ms.C. THESIS

FREE GROUPS AND THEIR AUTOMORPHISMS

Esma KANGAL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2016, 66 Pages

Jury

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Yrd. Doç. Dr. Zübeyde ULUKÖK

This thesis consists of five main chapters except introduction part.

In the second chapter, a presentation of a group, an automorphism group of a group, the group-extensions, decision problems and the definition of the graph in the sense of Serre are given as fundamentals.

In the third chapter, we introduce Nielsen method which create a generating system for a free group, so the generators of the automorphism group of a free group are obtained. Additionally, in order to show the solvability of word problem for this automorphism group, we give two distinct presentations. Then, it is showed that the automorphism group of a free group with rank two is isomorphic a combination of the semi-direct product and the free product of some cyclic groups (finite and infinite). By using this isomorphism, the solvability of word problem for this group is obtained.

In the fourth chapter, at the beginning the definition and some fundamentals of the rewriting system is given, because this system provide to find an algorithm for word

problem of some algebraic structures. Then we obtain main result of this thesis that the word problem for the automorphism group of a free group with finite rank n has solvable word problem .

In the fifth part, we discourse Bass-Serre theory having great importance in group theory. To do that, we explain group acting on some structures, the relations between trees and amalgamated free products and also trees and HNN-extension. Additionally, we give the definitions for the fundamental groups of a graph and a graph of groups.

In the final chapter, we summarize the results which are obtained from previous chapters.

Anahtar Kelimeler: automorphism group of a free group, free group, fundamental group of a graph, graph of groups, fundamental group of graph of groups, Bass-Serre theory, rewring system, word problem.

ÖNSÖZ

Öncelikle, kendisi ile tanıştığım günden beri değerli bilgilerini, tecrübelerini benimle paylaşan, hayata dair maddi manevi her konuda bana yol gösteren ve bu doğrultuda kendisini her daim örnek aldığım ve öğrencisi olmaktan son derece gurur duyduğum saygıdeğer hocam ve danışmanım Prof. Dr. Ahmet Sinan Çevik'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte benden yardımlarını esirgemeyen desteklerini hissettiğim hocalarıma, özellikle Doç. Dr. Eylem Güzel Karpuz'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her daim sevgilerini hissettiğim bana bu süreçte her konuda yardımcı olan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Doğumuyla hayatımı anlamlandıran canım oğlum Muhammed Bahadır'ıma, hem benimle hem çocuğumla ilgilenen fedakar anneme ve babama, son olarak bana her konuda destek olan ve anlayışla karşılayan eşime sonsuz teşekkür ederim.

2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanları Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkürlerimi sunarım.

Esma KANGAL

KONYA-2016

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Tanımları
1_w	boş kelime
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$\sim$	serbest olarak iki kelimenin denkliği
$F(X)$	X kümesi üzerinde serbest grup
F_n	n üreteçli serbest grup
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$\|X\|$	X kümesinin eleman sayısı
$\mathcal{P}_G$	grup sunuşu
$\sim_{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$ sunuşuna bağlı olarak iki kelimenin denkliği
$[w]_{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$ sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfı
$[1]_{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$ sunuşuna bağlı olarak grubun birimi
$G(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}$sunuşunun temsil ettiği grup
N	normal kapanış
$Aut(G)$	G grubunun otomorfizma grubu
$Inn(G)$	G grubunun iç otomorfizma grubu
$Out(G)$	G grubunun dış otomorfizma grubu
$H \rtimes_\theta K$	H ve K gruplarının yarı-direkt çarpımı
$H * K$	H ve K gruplarının serbest çarpımı
$H *_A K$	H ve K gruplarının birleştirilmiş serbest çarpımı
$G*_\phi$	G grubunun HNN-genişlemesi
$\alpha(e)$	e kenarının başlangıç noktası
$w(e)$	e kenarının bitiş noktası
$\bar{e}$	e kenarının tersi
X^0	X grafının nokta kümesi
X^1	X grafının kenar kümesi
$Cay(G, S)$	G grubunun S üreteç kümesine göre Cayley grafı
$(B, \rightarrow)$	indirgeme sistemi

$>_{ll}$	uzunluk-sözlük sıralaması
$>_{wl}$	ağırlık-sözlük sıralaması
X^*	1_w boş kelimesi ile beraber Xkümesindeki sembollerle oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
$i \cap j$	$i.$ ve $j.$ bağıntıların kesişimi
$\mathcal{O}(x)$	x in yörüngesi
$stab_G(x)$	x in sabitleyicisi

1. GİRİŞ

Bu tezin içeriği serbest gruplar ve bunların otomorfizma grupları üzerinde elde edilen sonuçlardan oluşmaktadır. Özellikle dördüncü bölümde bu tezin orjinal sonucu olan sonlu üreteçli bir serbest grubun kelime probleminin çözülebilirliği bu grupları temsil eden sunuşlar kullanılarak bizim tarafımızdan gösterilmiştir. Bu tezde kullanacağımız grup sunuşlarının temeli Nielsen (1917) çalışmasına dayanmaktadır, yazar bu çalışmada topolojiksel olarak denk olan öz-fonksiyonların (self mapping) sınıflarının bir grup oluşturduğunu ve bu grubun torusun temel grubunun (diğer bir deyişle iki üreteçli bir serbest grubun) otomorfizma grubuna izomorf olduğunu göstermiştir. Daha sonra Nielsen (1918) n üreteçli bir serbest grubun otomorfizma grubunun üreteçlerini elde etmiştir. Aynı sonuç Stouff (1888) ve Vogtmann (2002) çalışmalarında bahsedilmiş olmasına rağmen Nielsen'ın bu çalışmada yapmış olduğu ispat ilk yapılan tam cebirsel ispattır. Nielsen (1921) bir serbest grubun sonlu üreteçli alt gruplarını araştırmak için bu çalışmalarında kullanmış olduğu metodu geliştirmiş ve önemli başka sonuçların elde edilmesine olanak sağlamıştır. Federer ve Jónsson (1950) çalışmasında elde edilen bu sonuçlardan biri her serbest grubun sonlu üreteçli alt grubunun da serbest olması, diğeri ise sonlu üreteçli serbest grubun bir Hopfian grup olmasıdır.

Rankı $n \geq 3$ olan bir serbest grubun otomorfizma grubunun sunuşu Nielsen (1924) çalışmasında elde edilmiştir. Yıllar sonra McCool (1974), McCool (1975a) ve McCool (1975b) çalışmalarında bir serbest grubun otomorfizma grubu için Nielsen'ın bulmuş olduğu sunuşa denk sonlu bir grup sunuşu yeni bir metodla elde edilmiştir. Bunun yanısıra Neumann (1933) ve Armstrong ve ark. (2008) gibi bazı çalışmalarda farklı üreteç sistemleri kullanılarak yeni sunuşlar bulunmuştur.

Yukarıda bahsedilen kelime probleminin kaynağı 1911'e kadar dayanmaktadır. Dehn (1911) en az iki türe sahip olan kompakt çokkatlıların (manifold) temel gruplarını çalışırken verilen uzaylar homotopi denk ve verilen yollar homotopik iken bu yolların bir noktaya daraltılabilir (contractible) olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığı ile ilgilenmiştir. Grup teori terimlerinde kelime problemi olarak karşımıza çıkan bu problem matematiksel mantık veya algoritmalar teorisinde bulunmayan çözülemeyen problemlerin ilk örneklerinden biridir, bu sonuç Novikov (1955) çalışmasında kelime problemi çözülemeyen sonlu sunuşlu grupların var olduğunun gösterilmesi ile elde edilmiştir. Böylece bir grubun çözülebilir kelime problemine sahip olup olmadığını araştırmak önemli çalışma alanlarından biri haline gelmiştir. Bu çalışma alanında kelime probleminin çözülebilirliğini veren algoritmaların elde edilmesini sağlayan Gröbner-Shirshov taban metodu (Bokut ve Chen, 2014) ve yeniden yazma sistemi metodu (Book ve Otto, 1993) gibi bazı yöntemler kullanılabilmektedir. Örneğin Çin monoidinin kelime probleminin çözülebiliriliği gösterilirken Chen ve Qiu (2008) Gröbner-Shirshov taban metodunu, Karpuz (2010) yeniden yazma sistemi metodunu kullanmıştır. Ayrıca Karpuz ve Cevik (2012a), Karpuz ve Cevik (2012b), Karpuz ve ark. (2015), Kocapinar ve ark. (2012),Yunus ve ark. (2015) kaynakları bu metodların kullanıldığı diğer çalışmalara örnek verilebilir. Ayrıca bir serbest grubun otomorfizma grubunun kelime probleminin çözülebilirliğini gösteren Schleimer (2006) çalışmasında polinomsal zaman algoritmasının varlığının elde edilmesi gibi veya Dokovic (1983) çalışmasında bir grubun kelime problemi çözülebilir olan grupların uygun bir genişlemesine izomorf olduğunun gösterilmesi yardımıyla Alt Bölüm 3.4'te bulunan sonuç gibi bu problem için çözüm veren farklı yöntemler de bulunmaktadır.

Yukarıda bahsedilen Dehn (1911) çalışması temel grupları aslında bir serbest grup olan bazı uzayların var olduğunu ifade ediyor. Bu durumda bir grubun yapısının anlaşılmasında serbest gruplar çok büyük bir öneme sahip olduğundan bazı özel uzayların temel grupları üzerinde çalışmak oldukça kullanışlı olmaktadır. Ayrıca uzaylar ailesinin elemanları olan graflar Ahmady ve ark. (2014), Arezoomand ve Taeri (2015), Ates ve Cevik (2008) çalışmalarındaki gibi bazı yapıların cebirsel özelliklerinin incelenmesine yardımcı olmaktadır. Bu bağlamda Bass-Serre teorisinin graf tabanlı yapıların temel grupları üzerinde inşa edildiği Serre (1980) çalışmasında gösterilmiştir. Bu teori ayrıca Bogopolski (2008) ve Baumslag (1993) gibi kaynaklarda da ele alınmıştır.

Bu tezde kullanılan temel bilgiler Baumslag ve Charles III (1994), Cevik (2014b), Barwise (1982), Cevik (2014a), Cohen (1989), Lyndon ve Schupp (2001), Magnus ve ark. (2004), Lyndon ve Schupp (2001) ve Rotman (1995) kaynaklarından faydalanılarak verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Giriş

Çalışmamızın bu bölümü genel itibariyle tezin diğer bölümlerinde ortak anlamda kullanılacak ifadeleri açıklamaya yönelik olacaktır. İlk olarak Alt Bölüm 2.2'de tezin ana konusunu oluşturan *serbest gruplar* tanıtılacaktır. Daha sonra bir grubun yapısı hakkında detaylı bilgilere ulaşılmasında araç olarak kullanılan *sunuş kavramı* üzerinde durulacak (Alt Bölüm 2.3) ve bir grup sunuşundan aynı grubun farklı bir sunuşunu elde etmeyi sağlayan *Tietze dönüşümleri* açıklanacaktır (Alt Bölüm 2.4). Ayrıca bir grubun otomorfizmalarından bahsedilerek, otomorfizmalar grubuyla alakalı temel bilgiler Alt Bölüm 2.5'de verilecektir.

Bu çalışmanın üçüncü ve beşinci bölümlerinde kullanılacak olan bazı *grup genişleme* kavramları tanıtılacaktır (Alt Bölüm 2.6). Bunlara ek olarak karar verme problemleri başlığı altında (Alt Bölüm 2.7) dördüncü bölümde asıl hedefimiz olan *kelime problemi* açıklanacaktır. Ayrıca Alt Bölüm 2.8'de tezimizin beşinci bölümünde Bass-Serre teorisinin esas teoreminin elde edilmesinde yapı taşı olarak kulanılan özel bir graf tanıtılacaktır.

2.2. Serbest Gruplar

Serbest gruplar, üreteçler ve bağıntılar ile temsil edilen gruplar üzerinde çalışma alanı olarak tanıtabileceğimiz birleştirilmiş grup teorisi için oldukça önemlidir (Lyndon ve Schupp, 2001). Bunun sebebi, aşağıda Önerme 2.3 ile ifade edilecek sonuca göre, sonlu veya sonsuz her grubun bir serbest grubun bölüm grubuna izomorf olmasıdır. Dolayısıyla, çalışmamıza serbest grubun tanım ve özelliklerini inceleyerek başlayacağız.

X boştan farklı bir küme olmak üzere, bu kümenin elemanlarına birebir karşılık gelen ve $x \in X$ elemanlarının tersleri olarak adlandıracağımız elemanlardan oluşan kümeyi $X^{-1} = \{x^{-1};\ x \in X\}$ ile gösterelim. Burada $X^{\pm} = X \cup X^{-}$ olmak kaydıyla, $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanı *harf* olarak adlandırılır. Ayrıca $n \in \mathbb{N}, x_i \in X,\ \epsilon_i = \pm 1\ (1 \leq i \leq n)$ için,

$$w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} \tag{2.1}$$

ifadesine *kelime* adı verilir. Eğer $n = 0$ ise w kelimesine *boş kelime* (1_w), ayrıca $n = 0$ veya $n > 0$ iken $\epsilon_i = +1\ (1 \leq i \leq n)$ ise w kelimesine *pozitif kelime* denir. Bununla beraber herhangi bir w kelimesinin *tersi*

$$w^{-1} = x_n^{-\epsilon_n} x_{n-1}^{-\epsilon_{n-1}} \cdots x_1^{-\epsilon_1} \tag{2.2}$$

ile gösterilir.

(2.1) de verilen bir w kelimesi için bu kelimenin *uzunluğu* tanım itibariyle içindeki harflerin sayısıdır ve $l(w)$ notasyonuyla gösterilir. Bununla beraber w nun içindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu $l_x(w) = \sum\limits_{x_i = x} |\epsilon_i|$ olup, özel olarak w boş bir kelimeyse $l_x(w) = 0$ dır.

X üzerinde (2.1) de tanımlandığı gibi w ve u iki kelime olmak üzere aralarında wu ile göstereceğimiz ve w dan sonra u kelimesinin ardışık olarak yazılması şeklinde ifade edeceğimiz bir işlem tanımlanabilecektir. Asıl itibariyle bu bir ikili işlem olup, bu ikili işlem altında X üzerindeki tüm pozitif kelimelerin kümesi birim elemanı 1_w olan ve X^* ile gösterilen bir *serbest monoid* tanımlar.

X den elde edilen kelimelerin kümesi üzerinde

(I) $x^{\epsilon} x^{-\epsilon}\ (\epsilon = \pm 1)$ formundaki ters harf çiftlerinin silinmesi,

$(\mathbf{I}^{-1})$ $x^{\epsilon} x^{-\epsilon}\ (\epsilon = \pm 1)$ formundaki ters harf çiftlerinin eklenmesi

işlemleri tanımlansın. Bu işlemler aracılığıyla herhangi w ve w' kelimeleri için,

$$w \sim w' \iff \text{aralarında sonlu sayıda (I)}^{\pm}\ \textit{işlemleri uygulanabilir}$$

kuralı ile verilen $\sim$ bağıntısı tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısı olup, w ve w' kelimelerine birbirine *serbest olarak denktir* denir.

Genel bir yaklaşımla, w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. X üzerindeki kelimelerin tüm serbest denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ olsun. $F(X)$ üzerinde iyi tanımlı $[w][u] = [wu]$ işlemi tanımlanabilir. $F(X)$ bu işlem altında bir gruptur ve *serbest grup* olarak adlandırılır (Johnson, 1997). Ayrıca herhangi bir karışıklığa yol açmadıkça bazı durumlarda X üzerindeki bir w kelimesinin $[w]$ serbest denklik sınıfı için w yazılabileceğini belirtmeliyiz.

2.2.1. $F(X)$ serbest grubunun özellikleri

Aşağıda serbest grupların bazı özellikleri detaylı bir şekilde açıklanacaktır.

a) $F(X)$ serbest grubu $X_0 = \{[x]; x \in X\}$ kümesi ile üretilir.

X üzerinde bir $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ kelimesi

$$[w] = [x_1^{\epsilon_1}][x_2^{\epsilon_2}] \cdots [x_n^{\epsilon_n}] = [x_1]^{\epsilon_1}[x_2]^{\epsilon_2} \cdots [x_n]^{\epsilon_n}$$

şeklinde X_0 kümesinin elemanları ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak yazılabildiğinden X_0 kümesi $F(X)$ grubunun üreteç kümesi olarak elde edilir. Buna ek olarak X kümesine $F(X)$ serbest grubunun tabanı denir ve X üreteç kümesinin eleman sayısına rank ($|X|$) adı verilir.

b) Evrensel dönüşüm özelliği

Teorem 2.1 (Cohen, 1989) *G sonsuz bir grup ve $\theta_0 : X \to G$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\theta : F(X) \to G$ şeklinde tanımlanan ve θ_0 fonksiyonunun genişlemesi olan tek bir grup homomorfizması vardır.*

Not 2.2 *Dikkat edilirse yukarıdaki teoremde G grubu sonsuz mertebeli alınmıştır. Çünkü sonlu olma durumunda ilgili θ homomorfizmasının elde edilememe ihtimali vardır. Bununla birlikte, daha önceden de belirtildiği gibi, her grubun bir serbest grubun homomorfik görüntüsü olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla G grubunun sonlu olma durumunda Teorem* 2.1 *sonucunda tanımlanan θ homomorfizması θ_0 fonksiyonuna bakılmaksızın direkt olarak aranır.*

Aşağıda verilen önermenin ispatında Teorem 2.1 kullanılacaktır.

c) Her grup bir serbest grubun bölüm grubuna izomorftur.

Önerme 2.3 (Lyndon ve Schupp, 2001) *Sonlu veya sonsuz üreteçli her grup, bir serbest grubun homomorfik görüntüsüdür. Özel olarak n üreteçli her grup rankı n olan bir serbest grubun bölüm grubuna izomorftur.*

İspat A üreteç kümesi olmak üzere G bir grup olsun. A kümesinin her bir elemanının bire bir karşılığı olan $X = \{x_a : a \in A\}$ kümesi seçilsin. Bu durumda $\phi_0 : X \to G,\ x_a \to a$ kuralı ile verilen bir fonksiyon var olup, bu fonksiyon Teorem 2.1'den tek bir $\phi : F(X) \to G$ homomorfizmasına genişletilebilir. Böylece $A \subseteq Im(\phi)$ olduğundan $Im(\phi) = G$ elde edilir.

Bu sonuç kullanılarak birinci izomorfizma teoreminden $G \cong F(X)/Ker(\phi)$ sonucuna ulaşılır.

d) Normal form teoremi

X üzerinde tanımlanan u, w ve v kelimeri için $w' = uwv$ ise w ya w' nün bir alt kelimesi denir. X üzerindeki bir kelime $x^{\epsilon}x^{-\epsilon}$ $(x \in X, \epsilon = \pm 1)$ formunda alt kelimeler içermiyorsa *indirgenmiş kelime* olarak adlandırılır. Buna ek olarak, bir $w = x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n}$ $(n \geq 0, x_i \in X, \epsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n)$ kelimesi indirgenmiş ve $x_1^{\epsilon_1} \neq x_n^{\epsilon_n}$ ise *devirsel indirgenmiş* olarak adlandırılır.

Teorem 2.4 (Cohen, 1989) *$F(X)$ serbest grubunun elemanı olan her bir denklik sınıfında tek bir indirgenmiş kelime vardır.*

Yukarıdaki teorem bir sonraki alt bölümde vereceğimiz grup sunuşlarının elde edilmesi açısından oldukça önemlidir

e) Rankları eşit olan serbest gruplar izomorftur.

Yukarıda verilen üçüncü özellik göz önüne alındığında, gruplar arasındaki bir izomorfizmanın araştırılmasında serbest gruplar arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki önerme önemli bir araçtır.

Önerme 2.5 (Lyndon ve Schupp, 2001) *$F(X) \cong F(Y)$ olması için gerek ve yeter şart $|X| = |Y|$ eşitliğinin sağlanmasıdır.*

f) Bir serbest grubun merkezi

$Z(.)$ herhangi bir grubun merkezini göstermek üzere, serbest grupların rankı ile bu grupların merkezi arasında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Önerme 2.6 *$|X| > 1$ iken $Z(F(X)) = \{1\}$ olduğu elde edilir.*

2.3. Grup Sunuşları

Grup teorinin en önemli unsurlarından biri olan sunuş kavramı, bir cebirsel yapının birçok özelliği hakkında bilgi vermekle beraber, bu cebirsel yapı ile ilgili birçok problemin çözümüne de ışık tutmaktadır. Bu problemlerden biri Max Dehn tarafından literatüre kazandırılan kelime problemidir (Alt Bölüm 2.7). Bu bağlamda tezimizin ana konusu olan bir serbest grubun otomorfizma grubunun kelime problemi bu grupların sunuşları üzerinde inceleneceğinden bu bölümde sunuş kavramına yönelik bilgiler verilecektir.

X bir küme olsun ve bu küme üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme R olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\mathcal{P} = \langle X; R \rangle$$

gösterimine bir *grup sunuşu* denir. Burada X ve R sırasıyla üreteç kümesi ve bağıntı kümesi olarak adlandırılır. Eğer üreteç kümesi ve bağıntı kümesi sonlu ise $\mathcal{P}$ ye sonlu sunuş denir.

$\mathcal{P}$ sunuşu ile temsil edilen bir grubu tanımlamak için X den elde edilen kelimeler üzerinde (I) ve (I^{-1}) operasyonlarına ek olarak

(II) w kelimesinin içinde r^{ϵ} $(r \in R, \epsilon = \pm 1)$ alt kelimesi varsa bu alt kelimenin silinmesi,

(II^{-1}) w kelimesinde herhangi bir posizyona r^{ϵ} $(r \in R, \epsilon = \pm 1)$ kelimesinin eklenmesi

operasyonları kullanılmaktadır.

X kümesi üzerinde tanımlı w_1 ve w_2 kelimeleri için w_1 kelimesinden sonlu sayıda (I)$^{\pm 1}ve$ (II)$^{\pm 1}$ işlemlerinin uygulanması ile w_2 kelimesi elde ediliyorsa w_1 ve w_2 kelimelerine $\mathcal{P}$ sunuşuna göre denk kelimeler denir ve bu denklik $w_1 \sim_{\mathcal{P}} w_2$ ile gösterilir. Bu bağıntı X den elde edilen tüm kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olup, bu bağıntı sonucu oluşan w kelimesini içeren denklik sınıfı genellikle $[w]_{\mathcal{P}}$ ile gösterilir. Bu denklik sınıfları üzerinde iyi tanımlı

$$[w_1]_{\mathcal{P}}[w_2]_{\mathcal{P}} = [w_1 w_2]_{\mathcal{P}}$$

çarpma işlemi tanımlanabilir. Tüm denklik sınıflarının kümesi bu çarpma işlemi altında birim elemanı $[1]_{\mathcal{P}}$ olan bir grup oluşturur ve bu grup $G(\mathcal{P})$ ile gösterilir.

$G \cong G(\mathcal{P})$ ise G grubu $\mathcal{P}$ ile sunuluyor denir. $N = \{[r] : r \in R\}$ kümesi bu grubun normal kapanışı olsun. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.7 (Johnson, 1997) *$G(\mathcal{P}) \cong F(X)/N$ dir.*

Sunuşu verilen bir grup ile bilinen bir grup arasındaki homomorfizmanın araştırılmasında aşağıda verilen lemma çok kullanışlıdır.

Lemma 2.8 (Johnson, 1997) *$G(\mathcal{P}) = \langle X|R \rangle$ sunuşu verilsin ve H bir grup olsun. $\theta' : X \to H,\ x \to h_x\ (h_x \in H)$ fonksiyonunun $\theta : G(\mathcal{P}) \to H,\ [x] \to h_x$ homomorfizmasına genişlemesi için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ ve $\forall r \in R$ için r de her bir x yerine $\theta'(x)$ yazılması sonucu $1 \in H$ elde edilmesidir.*

2.4. Tietze Dönüşümleri

Herhangi bir G grubunun birden çok sunuş ile temsil edilebileceği gerçeği bilinmektedir (Magnus ve ark., 2004). Grupların sunuşları yardımıyla elde edilen etkililik, p-Cockcroft gibi cebirsel özellikler düşünüldüğünde, birbirinden farklı sunuşlar üzerinde işlem yapmak önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla bu sunuşları birbirine dönüştürebilen Tietze dönüşümleri de grup teoride oldukça önemlidir.

Ayrıca bir G grubunun kelime probleminin çözülebilirliğini gösteren algoritmanın elde edilmesinde G grubunun farklı sunuşları üzerinde işlem yapmak (Alt Bölüm 2.7) kolaylık açısından farklılık gösterebilmektedir. Bu durum bir grubun birden fazla sunuşa sahip olmasını araştırmacılar için önemli bir avantaja dönüştürmektedir. Bu tür bir avantaj tezimizin dördüncü bölümünde ana teoremimizi elde etmeye yönelik kullanılacaktır. Aşağıda bize bu avantajı sağlayan Tietze dönüşümleri tanımlanmıştır.

Herhangi bir G grubunun

$$\mathcal{P}_G = \langle X; R \rangle$$

sunuşunu göz önüne alalım. G grubunun diğer sunuşlarını elde etmeyi sağlayan *Tietze dönüşümleri*, sırasıyla,

(T1) R bağıntı kümesinin elemanlarından türetilen (elde edilebilen) herhangi bir r kelimesinin, R kümesine eklenmesi,

(T2) Herhangi bir $r \in R$ elemanı, bağıntı kümesinin diğer elemanlarından türetiliyorsa bu r elemanının R bağıntı kümesinden silinmesi,

(T3) $w \notin X$ olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir w kelimesi için üreteç kümesine yeni bir a sembolünün ve bağıntı kümesine $a = w$ bağıntısının eklenmesi,

(T4) $a \in X$ için bağıntı kümesi $a = w$ şeklinde bir elemana sahip olmak üzere, üreteç kümesinden a üreteci ve bağıntı kümesinden $a = w$ bağıntısı silinerek, geriye kalan diğer bağıntılarda a üreteci bulunuyorsa bunların w kelimesi ile yer değiştirilmesi

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümler, bir sunuşa uygulanması esnasında $\xrightarrow{Ti}$ ile sembolize edilmektedir.

Teorem 2.9 (Magnus ve ark., 2004) *$\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$ sunuşlarının aynı grubu tanımlamaları için gerek ve yeter şart $\mathcal{P}_1$ sunuşuna sonlu sayıda* (T1), (T2), (T3), (T4) *operasyonlarının uygulanmasıyla $\mathcal{P}_2$ sunuşunun elde edilmesidir.*

Örnek 2.10 (Magnus ve ark., 2004) *Verilen iki*

$$\mathcal{P}_1 = \left\langle a, b, c; b^2, (bc)^2 \right\rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \left\langle x, y, z; y^2, z^2 \right\rangle$$

sunuşunun aslında izomorf bir grup tanımladıkları, Tietze dönüşümleri aracılığıyla aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} \langle a, b, c\,; b^2, (bc)^2 \rangle \quad & \xrightarrow{T3} \langle a, b, c, x, z\,; b^2, (bc)^2, x = a, z = bc \rangle \\ & \xrightarrow{T1\&T4} \langle b, c, x, z\,; b^2, (bc)^2, c = b^{-1}z \rangle \\ & \xrightarrow{T4} \langle b, x, z\,; b^2, z^2 \rangle \\ & \xrightarrow{T1\&T2} \langle x, y, z\,; y^2, z^2 \rangle \,. \end{aligned}$$

2.5. Otomorfizma Grubu

Otomorfizma kavramı matematiğin graf teori, lineer cebir, topoloji gibi farklı dallarında karşımıza çıkmakla beraber bu kavram üzerinde grup teori alanında bir çok çalışma yapılmıştır (Nielsen, 1924; Armstrong ve ark., 2008; Bridson ve Vogtmann, 2003; Levitt, 2009; Vogtmann, 2002). Ayrıca bu kavram vasıtasıyla yeni cebirsel yapılar inşa edilmiştir. Örneğin otomorfizmalar yarı-direkt çarpım gibi bir çok grup-genişleme yapılarının elde edilmesinde etkili bir araç olarak kullanılmaktadır

(Alt Bölüm 2.6.1). Bu bölümde bir grubun otomorfizmaları ile beraber otomorfizma grubunun tanımı ve yapısı hakkında bazı bilgiler verilecektir, bu materyallerle ilgili daha detaylı bilgiler Rotman (1995) kaynağından elde edilebilir.

Bir G grubundan yine kendi üstüne olan birebir ve örten homomorfizmaya *otomorfizma* denir. Bu grubun tüm otomorfizmalarının kümesi bileşke işlemi altında bir grup olup, G grubunun *otomorfizma grubu* olarak adlandırılır ve $Aut(G)$ ile gösterilir. Aslında bu grup G grubunun elemanlarının permütasyon grubu S_G nin bir alt grubudur.

G nin $\phi : G \to G$, $x \to gxg^{-1}(g \in G)$ şeklinde tanımlanan otomorfizmalarına *iç otomorfizma* denir. Bir G grubunun iç otomorfizmalarının kümesi bileşke işlemi altında *iç otomorfizma grubu* ($Inn(G)$) olarak adlandırılan bir gruptur. Bununla birlikte $Aut(G)$ nin iç otomorfizma olmayan her elemanı ise dış otomorfizma olarak adlandırılır.

Önerme 2.11 (Rotman, 1995) *Herhangi bir G grubu için,*

$$G/Z(G) \cong Inn(G) \quad \textit{ve} \quad Inn(G) \lhd Aut(G)$$

daima doğrudur.

Yukarıda verilen sonuç Önerme 3.9'in ispatında kullanılacaktır.

İspat Aşağıda verilen ψ homomorfizmasının çekirdeği $Ker(\psi)$ olarak gösterilsin. $\psi : G \to Inn(G)$, $g \to \psi_g$ öyle ki $\psi_g(x) = gxg^{-1}$ olarak tanımlansın.

$\psi_{g_1g_2}(x) = g_1g_2x(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2xg_2^{-1}g_1^{-1} = (\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2})(x)$ eşitliğinden elde edilen $\psi(g_1g_2) = \psi_{g_1g_2} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$ sonucu ψ nin bir homomorfizma olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned}
\forall g \in Ker(\psi) \quad &\iff \psi_g = \text{birim otomorfizma} \\
&\iff \psi_g(x) = gxg^{-1} = x \; (\forall x \in G) \\
&\iff gx = xg \\
&\iff \forall g \in Z(G)
\end{aligned}$$

sonucu $Ker(\psi) = Z(G)$ olduğu görülür. Bu sonuç göz önüne alındığında birinci izomorfizma teoreminden $G/Z(G) \cong Inn(G)$ olduğu elde edilir.

$\phi(x) = a$ olmak üzere $\forall \psi_g \in Inn(G)$ ve $\forall \phi \in Aut(G)$ için

$$\begin{aligned}
\phi\psi_g\phi^{-1}(x) \quad &= \phi\psi_g(a) = \phi(gag^{-1}) \\
&= \phi(g)\phi(a)\phi^{-1}(g) \\
&= \phi(g)x\phi^{-1}(g) \\
&= \psi_{\phi(g)}(x)
\end{aligned}$$

olduğundan $\phi\psi_g\phi^{-1} \in Inn(G)$ elde edillir. Böylece $Inn(G)$ iç otomorfizmalar grubu $Aut(G)$ otomorfizma grubunun normal alt grubudur.

Teorem 2.11 sonucu $Aut(G)/Inn(G)$ bölüm grubunun varlığından bahsedilir, bu grup G nin *dış otomorfizma grubu* ($Out(G)$) olarak adlandırılır.

Sonuç 2.12 (Rotman, 1995) *G bir abelyan grup olsun. Bu durumda G nin tüm otomorfizmaları bir iç otomorfizmadır. Böylece $Out(G) = Aut(G)/Inn(G) \cong \{1\}$ elde edilir.*

Klein-4 ve 6 mertebeli permütasyon grubu sırasıyla K_4 ve S_3 sembolleri ile gösterilsin.

Örnek 2.13 (Rotman, 1995) *K_4 ve S_3 gruplarının otomorfizma grupları için daima*

$$Aut(K_4) \cong S_3 \cong Aut(S_3)$$

sağlanır.

Bu örnekten izomorf olmayan grupların otomorfizma gruplarının izomorf olabileceği sonucu çıkarılır.

Örnek 2.14 (Rotman, 1995) *$G =< x >$ sonsuz mertebeli devirli grup olmak üzere $\phi \in Aut(G)$ ise $\phi(x)$ bu grubun bir üretecidir. G grubunun üreteçleri sadece x ve x^{-1} olduğundan G grubunun iki otomorfizması vardır. Bu durumda*

$$Aut(\mathbb{Z}) \cong Aut(G) \cong \mathbb{Z}_2$$

sonucu elde edilir.

Bu örnek sonsuz mertebeli bir grubun otomorfizma grubunun sonlu mertebeli olabileceğini göstermektedir.

Otomorfizma gruplarının grup genişlemeleri için öneminden yukarıda bahsedilmişti. Aşağıdaki bölümde inşasında otomorfizmaların araç olarak kullanıldığı yarı-direkt çarpıma ek olarak bazı grup genişleme kavramları tanıtılacaktır.

2.6. Grup Genişlemeleri

Grup genişleme kavramı verilen gruplardan bu grupları içeren daha geniş bir grup elde etme metodu olarak düşünülebilir. Bu bölümde Cevik (2014b), Bogopolski (2008), Johnson (1997) ve Lyndon ve Schupp (2001) kaynakları kullanılarak sırasıyla yarı-direkt çarpım , serbest çarpım, birleştirilmiş serbest çarpım ve HNN-genişleme-si olarak adlandırılan grup genişlemeleri üzerinde durulacaktır .

2.6.1. Yarı-direkt çarpım

H ve K grup olmak üzere $\theta : H \to K$, $h \to \theta_h$ ($\theta_h \in Aut(K)$ bir homomorfizma olsun. Ayrıca $G = \{(h, k) : h \in H, k \in K\}$ şeklinde tanımlanan bir G kümesi iyi tanımlı

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, \theta_{h_2}(k_1)k_2)$$

ikili işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba, K nın H ile olan yarı direk çarpım grubu denir ve $G = K \rtimes_\theta H$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.15 (Johnson, 1997) *H ve K grupları sırasıyla*

$$y \to k_y \ (y \in Y), \quad x \to a_x \ (x \in X)$$

dönüşümleri altında

$$\mathcal{P}_H = \langle Y; S\rangle \quad ve \quad \mathcal{P}_K = \langle X; R\rangle$$

sunuşlarıyla temsil edilsin. Bu durumda $G = H \rtimes_\theta K$ yarı-direkt çarpım grubu

$$\mathcal{P} = \langle Y, X \ ; S, R, T\rangle$$

sunuşuna sahiptir, öyle ki $T = \{yx\lambda_{yx}^{-1}x^{-1} | y \in Y, x \in X\}$ ve λ_{yx} sembolü ile $\theta_{a_x}(k_y) \in H$ elemanını Y üzerinde temsil eden bir kelime gösterilmektedir.

2.6.2. Serbest çarpım

H ve K gruplarının serbest çarpım grubunu tanımlamak için ilk olarak bu grupların izomorfik kopyaları düşünülerek $H \cap K = \{1\}$ olarak kabul edilecektir. $1 \leq i \leq n$ için $g_i \in (H \cup K) - \{1\}$ ve g_i, g_{i+1} ardışık harfleri aynı grubun elemanı olmamak üzere $g_1g_2 \cdots g_n$ formundaki ifadelerin kümesi G ile gösterilsin. Bu küme içinde $n = 0$ için $1 \in G$ ve $1.x = x.1 = x$ olarak kabul edilsin. Buna göre

G kümesinin $x = g_1 g_2 \cdots g_n$ ve $y = h_1 h_2 \cdots h_m$ $(m, n \geq 1)$ şeklinde tanımlanan elemanlarının arasında

$$x.y = \begin{cases} g_1 \cdots g_n h_1 \cdots h_m; & g_n \in H, h_1 \in K \text{ veya } g_n \in K, h_1 \in H \text{ ise,} \\ g_1 \cdots g_{n-1} z h_2 \cdots h_m; & g_n, h_1 \in H \text{ veya } g_n, h_1 \in K \text{ ve } z = g_n h_1 \neq 1 \text{ ise,} \\ g_1 \cdots g_{n-1} h_2 \cdots h_m; & g_n, h_1 \in H \text{ veya } g_n, h_1 \in K \text{ ve } g_n h_1 = 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

çarpımı tanımlansın. G kümesi bu işlem altında bir grup olup, aslında H ve K gruplarının *serbest çarpım grubu* olarak adlandırılır ve $H * K$ olarak gösterilir.

Teorem 2.16 (Bogopolski, 2008) *$X \cap Y = \emptyset$ olmak üzere H ve K grupları sırasıyla*

$$\mathcal{P}_H = \langle X; R \rangle \quad \textit{ve} \quad \mathcal{P}_K = \langle Y; S \rangle$$

sunuşlarına sahip olsun. Bu durumda $G = H * K$ grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle X, Y \ ; \ R, S \rangle$$

olarak tanımlanır.

2.6.3. Birleştirilmiş serbest çarpım

H ve K iki farklı grup iken $A \leq H$ ve $B \leq K$ olsun. Ayrıca bu alt gruplar arasında bir $\phi : A \to B$ izomorfizması tanımlı olsun. ϕ izomorfizması aracılığıyla A ve B alt gruplarının özdeşleştirilmesi (amalgamated) ile oluşan H ve K nın *birleştirilmiş serbest çarpım grubu* aslında $H * K$ serbest çarpım grubunun, $\{\phi(a)a^{-1} \mid a \in A\}$ kümesinin normal kapanışı ile elde edilen bölüm grubudur. Elde edilen yeni bölüm grubu genellikle $H *_{A=B} K$ veya $H *_A K$ ile gösterilir. Buna ek olarak H ve K gruplarının sunuşları sırasıyla

$$\mathcal{P}_H = \langle X \ ; \ R \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_K = \langle Y \ ; \ S \rangle$$

olmak üzere $G = H *_{A=B} K$ birleştirilmiş serbest çarpım grubu $\forall a \in A$ için

$$\mathcal{P}_G = \langle X, Y \ ; \ R, S, a = \phi(a) \ \rangle$$

sunuşu ile temsil edilir.

Bir birleştirilmiş serbest çarpım grubu için her elemanının tek bir normal forma sahip olduğu Bogopolski (2008) ve Lyndon ve Schupp (2001) kaynaklarından elde edilen bilgiler ışığında aşağıda ifade edilecektir. Bunun için ilk olarak A nın H içindeki sağ kosetlerinin bir temsilci sistemi T_A ve B nin H içindeki sağ kosetlerinin bir temsilci sistemi T_B olarak tanımlansın. Ayrıca A ve B kosetleri 1 ile temsil edilsin. Bu durumda $\bar{x} \in A$ (B) ve $\tilde{x} \in T_A$ (T_B) olmak üzere her $x \in H *_{A=B} K$ elemanı tek bir şekilde $x = \bar{x}\tilde{x}$ formunda yazılabilir.

Teorem 2.17 (Bogopolski, 2008) *Herhangi bir* $\forall f \in H *_{A=B} K$ *elemanı*

1) $x_0 \in A$ *veya* $x_0 \in B$,

2) $i \geq 1$ *için* $x_i \in T_A - \{1\}$ *veya* $x_i \in T_B - \{1\}$,

3) x_i, x_{i+1} *terimleri farklı temsilci sistemlerine ait olması,*

şartları sağlanmak üzere tek bir şekilde $f = x_0 x_1 \cdots x_n$ *olarak yazılabilir.*

Bu sonuç Alt Bölüm 5.3'de verilen Teorem 5.15'ün ispatında ara adım olarak kullanılacaktır.

2.6.4. HNN-genişlemesi

G bir grup olmak üzere $A, B \leq G$ alt grupları için bir $\phi : A \to B$ izomorfizması tanımlı olsun. $< t >$ sonsuz devirli grup ve $\{t^{-1}at(\phi(a))^{-1} | a \in A\}$ kümesinin normal kapanışı N olmak üzere G grubunun A, B alt gruplarına ve ϕ izomorfizmasına göre *HNN-genişlemesi* tanımı itibariyle $G* < t >$ çarpım grubunun N normal kapanışı ile olan bölüm grubudur. Genellikle $G*_\phi$ olarak gösterilen bu grup için G ye *taban*, t ye *sabit harf* ve A, B ye *ilişkilendirilmiş alt gruplar* denir.

G grubunun sunuşu $\langle X|R \rangle$ olmak üzere bu grubun HNN-genişlemesi $G*_\phi$ grubunun sunuşu $\forall a \in A$ için

$$\left\langle X, t | R, t^{-1}at = \phi(a) \right\rangle$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$G*_\phi$ grubunun her elemanı için tek bir normal formun varlığı aşağıda Bogopolski (2008) ve Lyndon ve Schupp (2001) kaynaklarından faydalanılarak ifade edilecektir. Bir önceki alt bölümdekine benzer olarak A ve B ilişkilendirilmiş alt gruplarının G içindeki sağ kosetlerinin bir temsilci sistemi sırasıyla T_A ve T_B ile gösterilsin. A ve B kosetleri yine 1 ile temsil edilsin.

Teorem 2.18 (Bogopolski, 2008) *Her $x \in G*_{\phi}$ elemanı, $g_i \in G$ $(0 \leq i \leq n)$ ve $\epsilon = \pm 1$ olmak üzere*

1) $g_0 \in G$,

2) $\epsilon_i = -1$ ise $g_i \in T_A$,

3) $\epsilon_i = 1$ ise $g_i \in T_B$,

4) $t^{\epsilon}t^{-\epsilon}$ şekilde ters çiftlerinin olmaması,

şartlarını sağlayan tek bir $x = g_0 t^{\epsilon_1} g_2 \cdots t^{\epsilon_n} g_n$ temsiline sahiptir.

Bu sonuç Alt Bölüm 5.4'de ifade edilen Teorem 5.18'in ispatında yardımcı bir unsur olarak kullanılmaktadır.

2.7. Karar Verme Problemleri

Max Dehn tarafından 1911'de üç temel karar verme problemi *Kelime problemi, eşlenik problemi* ve *izomorfizma problemi* isimleriyle literatüre kazandırılmıştır. Bu problemler $\langle X; R \rangle$ sunuşuna sahip bir G grubu için, sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

i) X üzerinde tanımlı herhangi bir w kelimesinin G grubunun birim elemanını temsil edip etmediğine (veya herhangi iki kelimenin aynı elemanı temsil edip etmediğine) sonlu adımda karar verilmesi,

ii) X üzerinde tanımlı herhangi iki w_1 ve w_2 kelimelerinin G grubunun eşlenik elemanları olup olmadığına karar verilmesi,

iii) Yukarıda verilen sunuştan farklı bir sunuşa sahip olan herhangi bir G' grubunun G grubuna izomorf olup olmadığına sonlu adımda karar verilmesidir.

Genel anlamda, yukarıda belirtilen karar verme problemlerinin herhangi bir grupta sağlanması (veya *çözülebilir* olması) problemine çalışmak, önemli bir takım teoremleri literatüre kazandırmıştır. Bununla beraber grup cebirsel yapısı için, çözülebilir eşlenik problemi aslında çözülebilir kelime problemini gerektirmektedir. Ancak bu gerektirme monoid veya yarıgruplar için kesinlikle doğru değildir. Bu bilgilerle birlikte çözülebilir *olmayan* yapıların varlığının aranması ve bunların sınıflandırılması yine üstünde çalışılan konulardandır. Bu konuyla ilgili en temel ve önemli sonuç aşağıda verilmiştir:

Teorem 2.19 (Rotman, 1995) (Novikov-Boone-Britton) *Kelime problemi çözülemeyen sonlu sunuşlu gruplar vardır.*

Kelime problemi çözülebilir gruplara örnekler şu şekildedir: Sonlu gruplar (Baumslag ve Charles III, 1994), en fazla bir bağıntılı sunuşa sahip gruplar, sonlu üreteçli ve her a ve b üreteç sembolü çifti için $ab = ba$ bağıntısını içeren sunuşların temsil ettiği gruplar verilebilir (Magnus ve ark., 2004). Bununla beraber kelime problemi serbest gruplar için de çözülebilirdir ve bu pozitif sonucu veren algoritma aşağıda verilmiştir (Rotman, 1995).

Örnek 2.20 (Rotman, 1995) $\langle x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n; \emptyset \rangle$ *sunuşlu bir serbest grup için,*

1) $l(w) = 0$ veya 1 ise üçüncü adıma geçiniz. $l(w) \geq 2$ ise $x_i x_i^{-1}$ veya $x_i^{-1} x_i$ formundaki ilk komşu harflerin altını çiziniz; eğer bu şekilde bir çift yoksa son iki harfin altını çiziniz; ikinci adıma geçiniz,

2) Altı çizilmiş harf çifti $x_i x_i^{-1}$ veya $x_i^{-1} x_i$ formunda ise bu çifti siliniz ve birinci adıma geçiniz ; aksi takdirde üçüncü adıma geçiniz ,

3) Kelime boş ise $w = 1$ yazınız ; kelime boş değilse $w \neq 1$ yazınız, adımlarından oluşan algoritma kelime probleminin çözülebilirliğini göstermektedir.

2.8. Graflar

Bir graf noktalardan ve her biri bu noktaları veya sadece noktanın kendisini birleştiren ve kenar olarak adlandırılan çizgiler topluluğundan oluşur. Matematiksel ifadesiyle bir X grafı $V(X)$ nokta kümesi ve $E(X)$ kenar kümesinden oluşan geometrik bir yapıdır.

Fizik, kimya, biyoloji gibi bilim dallarında bazı problemlerin matematiksel temsili olarak kullanılan graflar, sadece bu bilim dalları için değil matematiğin alt dallarında bir çok probleme cevap bulabilmek için de bir araç olarak kullanılır. Bunun nedeni büyük bir yapı üzerinde çalışırken, grafların daha dar (işlem yapması daha kolay) bir alanda çalışma yapılmasına olanak sağlamasından kaynaklanmaktadır. Bundan dolayı cebirsel yapıların sahip olduğu özellikleri saptamak için graflar kullanılabilmektedir (Ates ve Cevik, 2008; Ahmady ve ark., 2014;Arezoomand ve Taeri, 2015). Bu bağlamda tezimizin beşinci bölümünde tanıtılacak olan Bass-Serre

(Serre, 1980) teorisinin elde edilmesinde de aşağıda tanımı verilecek olan yönlü graflar kullanılmaktadır.

2.8.1. Serre açısından yönlü graflar

Bir X grafı için noktalar kümesi X^0, kenarlar kümesi X^1 ile gösterilip, bu kümeler üzerinde aşağıdaki fonksiyonlar tanımlı olmalıdır:

$\alpha : X^1 \to X^0$ (Kenarları başlangıç noktasına taşıyan fonksiyon)

$w : X^1 \to X^0$ (Kenarları bitiş noktasına taşıyan fonksiyon)

$^- : X^1 \to X^1$ ($e \in X^1$ için $\bar{\bar{e}} = e$, $\bar{e} \neq e$, $\alpha(e) = w(\bar{e})$ ve $\alpha(\bar{e}) = w(e)$ olacak şekilde $e \to \bar{e}$ kuralı ile tanımlanan fonksiyon), öyle ki herhangi bir $e \in X^1$ kenarı için $\alpha(e)$ ve $w(e)$ noktaları sırasıyla *başlangıç noktası* ve *bitiş noktası* olarak adlandırılır.

Bir X grafının karşılıklı olarak birbirinin tersi olan her bir $\{e, \bar{e}\}$ kenar çiftinden sadece biri seçilirse bu grafa *yönlendirilmiş graf* denir. Ayrıca seçilen kenar *pozitif yönlü* diğeri de *negatif yönlü kenar* olmak üzere pozitif yönlü kenarların kümesi X_+^1 , negatif yönlü kenarların kümesi X_-^1 ile gösterilir ve X_+^1 kümesi X grafının bir *yönlendirilmesi* olarak adlandırılır.

$w(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ $(i = 1, 2, \cdots n-1)$ olacak şekilde X grafının kenarlarının $p = e_1, e_2, \cdots e_n$ dizisine $\alpha(e_1)$ ile başlayan ve $w(e_n)$ ile biten *yol* denir. X grafının herhangi bir v noktası, başlangıç ve bitiş noktası v olan 0 uzunluklu (*dejenere*) yol olarak kabul edilir. Ayrıca $p = e_1e_2 \cdots e_n$ yolu için $p^{-1} = \bar{e}_n\bar{e}_{n-1} \cdots \bar{e}_2\bar{e}_1$ olup, bir dejenere yol için $p = p^{-1}$ sonucu elde edilir. Bir p yolu dejenere veya $p = e_1e_2 \cdots e_n$ yolu için $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ $(1 \leq i < n)$ ise p ye *indirgenmiş yol* denir. Ayrıca bir p yolunun başlangıç ve bitiş noktası aynıysa *kapalı yol* olarak adlandırılır.

Bir X grafında herhangi u ve v noktası arasında u dan v ye bir yol var ise bu grafa *bağlantılı graf* denir. Bunun yanısıra bu grafta başlangıç ve bitiş noktası hariç, noktaları ve kenarları hiç tekrarlanmadan oluşan kapalı yol *devir* ve hiç devir içermeyen bağlantılı graf *ağaç* olarak adlandırılır. Bu tanımdan bir ağaçta herhangi u ve v noktaları arasında tek bir indirgenmiş yolun var olduğu söylenebilir. Böylece bir graf üzerinde en büyük alt ağaç seçilerek herhangi iki nokta arasında tek bir indirgenmiş yol elde edilir. Aşağıda verilen önerme bu olanağı sağlamaktadır.

Önerme 2.21 (Serre, 1980) *Bağlantılı X grafının en büyük alt ağacı T olsun. Bu* *durumda T ağacı X grafının tüm noktalarını içerir.*

Buraya kadar yönlü bir grafın temel unsurları ve tanımları üzerinde durulmuştur. Ancak Bass-Serre teorisinin esas teoreminin ifade edilmesinde (Bölüm 4) küçük bir araç olarak kullanılan, gruplar arasında işlemi koruyan homomorfizmalar gibi graflar arasında kenarları koruyan ve *morfizma* olarak adlandırılan bir fonksiyon tezin anlaşılırlığını arttırmak için tanıtılmalıdır. Buna göre bir $p : X \to Y$ *morfizması*; X^0 ve X^1 kümelerinden Y^0 ve Y^1 kümelerine noktaları noktalara, kenarları kenarlara taşıyan, $p(\alpha(e)) = \alpha(p(e))$, $p(w(e)) = w(p(e))$, $p(\bar{e}) = \overline{p(e)}$ koşullarını sağlayan bir fonksiyondur. Ayrıca p morfizması birebir ve örten ise *izomorfizma* ve bir grafın kendi üstüne olan izomorfizmasıysa *otomorfizma* olarak adlandırılır.

$x \in X$ noktasının *starı* başlangıç noktası x olan tüm kenarların kümesi olup, bu kümenin eleman sayısı x noktasının derecesine ($deg(x)$) eşittir. Buna ek olarak $p : X \to Y$ bir morfizma olmak üzere $\forall x \in X$ için $p|_{star(x)} : X \to Y$ birebir (örten) ise p ye *yerel birebir (örten)* denir.

2.8.2. Cayley grafı

Cayley grafını tanıtmak için ilk olarak bu grafı da kapsayan daha genel bir grafın tanımı verilecektir.

G bir grup ve $S \subseteq G$ olmak üzere nokta kümesi G nin elemanları, pozitif yönlü kenarlarının kümesi $G \times S$ ve bir $(g, s) \in G \times S$ kenarı için $\alpha((g, s)) = g$ ve $w((g, s)) = gs$ şartlarını sağlayan graf $\Gamma(G, S)$ ile gösterilsin. Bununla birlikte (g, s) kenarının tersi (gs, s^{-1}) olarak kabul edilsin, ancak burada s^{-1} elemanı G nin elemanı olarak değil sembol olarak düşünülecektir.

Önerme 2.22 (Bogopolski, 2008) *$\Gamma(G, S)$ grafının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart S nin üreteç kümesi olmasıdır.*

İspat ($\Longrightarrow$) $\Gamma(G, S)$ grafı bağlantılıysa herhangi bir $g \in G$ için 1 den g ye bir yol vardır. Böylece G nin tüm elemanları $\Gamma(G, S)$ grafının kenarlarının etiketlerinden üretildiğinden S kümesinin bu grubun üreteç kümesi olduğu sonucuna varılır.

($\Longleftarrow$) S üreteç kümesi ise her $g_1, g_2 \in G$ için g_1 den g_2 ye bir yol vardır. O halde $\Gamma(G, S)$ grafı bağlantılıdır.

Tanım 2.23 *Bogopolski, 2008*(Cayley Grafı) *G bir grup ve S bu grubun üreteç kümesi olsun. Bu durumda $\Gamma(G, S)$ grafına Cayley grafı denir ve $Cay(G, S)$ ile gösterilir.*

3. BİR SERBEST GRUBUN OTOMORFİZMA GRUBU

3.1. Giriş

Bu bölümde $Aut(F_n)$ grubunun iki tür sunuşu Nielsen (1924); Armstrong ve ark. (2008) çalışmalarına bağlı olarak tanıtılacaktır. Ayrıca $Aut(F_2)$ grubunun hangi tür grupların bir genişlemesi olduğu ve buna bağlı olarak bu grubun kelime problemi üzerinde durulacaktır.

3.2. Nielsen Metodu

Bir serbest grup için yeni üreteç sistemleri oluşturmayı sağlayan Nielsen metodu, bir serbest grubun otomorfizma grubunun üreteçlerinin de elde edilmesini sağlamaktadır.

Tanım 3.1 (Johnson, 1997) *$F(X)$ serbest grubunun $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ sonlu sıralı alt kümesi üzerinde $1 \leq n$ ve $i \neq k$ olmak üzere*

N0) *$u_i = e$ (birim) ise u_i nin silinmesi ve u_k nın sabit bırakılması,*

N1) *u_i yerine u_i^{-1} nin yazılması ve u_k nın sabit bırakılması,*

N2) *u_i yerine u_iu_j $(i \neq j)$ nin yazılması ve u_k nın sabit bırakılması,*

N3) *u_i ile u_j $(i \neq j)$ nin yerlerinin değiştirilmesi ve u_k nın sabit bırakılması,*

şeklinde tanımlanan işlemler elemanter Nielsen dönüşümü olarak adlandırılır.

Elemanter Nielsen dönüşümlerinin sonlu bir dizisine *Nielsen dönüşümü* denir. Eğer bu sonlu dizi hiç (N0) içermiyorsa *düzenli Nielsen dönüşümü* olarak adlandırılır.

Teorem 3.2 (Johnson, 1997) *Düzenli Nielsen dönüşümleri bir grup oluşturur.*

Not 3.3 *Yukarıdaki teoremde ifade edilen düzenli Nielsen dönüşümlerinin oluşturduğu bu grup,* u_i $(1 \leq i \leq n)$ *sembolleri tarafindan üretilen bir serbest grubun otomorfizma grubudur.*

Bu tez boyunca rankı n olan bir serbest grup F_n ve otomorfizma grubu $Aut(F_n)$ ile gösterilsin.

3.3. $Aut(F_n)$ Otomorfizma Grubunun Sunuşu

Bir serbest grubun otomorfizma grubu bir çok grup teorisyeninin dikkatini çeken önemli bir çalışma alanıdır. Örneğin, 1924 yılında bir serbest grubun otomorfizma grubu için ilk sunuş bulunmuş (Nielsen, 1924), bunun yanısıra Neumann (1933), McCool (1974) ve Armstrong ve ark. (2008) gibi çalışmalarda $Aut(F_n)$ için birbirinden farklı sunuşlar elde edilmiştir. Nielsen (1924) ve McCool (1974) sonsuz mertebeli üreteçler kullanırken, Neumann (1933) sadece en fazla n mertebeli üreteçleri kullanmıştır. Armstrong ve ark. (2008) çalışmasında verilen sunuşun en önemli özelliğiyse üreteçlerinin 2 mertebeli olmasıdır. Dördüncü bölümde $Aut(F_n)$ için kelime probleminin araştırılması, Nielsen (1924) ve Armstrong ve ark. (2008) çalışmalarında elde edilen sunuşlar üzerinde olacaktır. Bu yüzden aşağıda sırasıyla bu sunuşlar tanıtılacaktır.

Bu bölüm boyunca x_i $(1 \leq i \leq n)$ sembolleri F_n grubunun serbest üreteçleri olmak üzere, i, k alt indisleri $1, 2, \cdots, n$ dizisindeki farklı tamsayıları göstersin, ayrıca $j(\neq i, k)$ ile sembolize edilen alt indis $1, 2, \cdots, n$ dizisindeki tüm tamsayıları gösteren bir değişken olsun.

3.3.1. Birinci tür sunuş

Bölüm 3.2'de tanımlanan elemanter Nielsen dönüşümlerine karşılık gelen $Aut(F_n)$ in *elemanter otomorfizmaları*

$$\sigma_{i,k} : x_i \to x_k, x_k \to x_i, x_j \to x_j, \qquad \tau_i : x_i \to x_i^{-1}, x_k \to x_k, x_j \to x_j,$$

$$U_{i,k} : x_i \to x_i x_k, x_k \to x_k, x_j \to x_j, \qquad V_{i,k} : x_i \to x_k x_i, x_k \to x_k, x_j \to x_j$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca bu otomorfizmaların, $Aut(F_n)$ grubunun üreteçleri olduğu Magnus ve ark. (2004) çalışmasında ifade edilmektedir.

$\sigma_{i,k}$ otomorfizmaları F_n serbest grubunun üreteçlerinin permütasyon grubu S_n simetrik grubunu üretir. Buna ek olarak $\sigma_{i,k}$ ve τ_i elemanter otomorfizmaları genişletilmiş simetrik grup adı verilen Ω_n grubunun üreteçleridir.

Aşağıdaki teoremde kullanılan $Q_{i,k}$ notasyonunun hem $U_{i,k}$ hem de $V_{i,k}$ yı ayrı ayrı temsil ettiği kabul edilsin. Ayrıca $\epsilon = \pm 1$ ve farklı harfler birbirine eşit olmayan sayıları temsil etsin.

Teorem 3.4 (Nielsen, 1924) *$Aut(F_n)$ grubu $\sigma_{i,k}, \tau_i, U_{i,k}$ ve $V_{i,k}$ elemanter otomorfizmaları tarafindan üretilir ve $Aut(F_n)$ grubunun bağıntıları*

$1)\ \sigma_{i,k} = \sigma_{k,i}, \qquad 2)\ \sigma_{i,k}^2 = 1,$

$3)\ \sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}, \qquad 4)\ \sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r},$

$5)\ \tau_i^2 = 1, \qquad 6)\ \tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i,$

$7)\ \tau_j\sigma_{i,k} = \sigma_{i,k}\tau_j, \qquad 8)\ \sigma_{i,k}\tau_i\sigma_{i,k} = \tau_k,$

$9)\ Q_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}Q_{i,k}, \qquad 10)\ Q_{i,k}\tau_r = \tau_r Q_{i,k},$

$11)\ \sigma_{i,k}Q_{i,k} = Q_{k,i}\sigma_{i,k}, \qquad 12)\ \sigma_{i,j}Q_{i,k} = Q_{j,k}\sigma_{i,j},$

$13)\ \sigma_{i,j}Q_{k,i} = Q_{k,,j}\sigma_{i,j}, \qquad 14)\ Q_{i,k}\tau_k Q_{i,k} = \tau_k,$

$15)\ V_{i,k}\tau_i U_{i,k} = \tau_i, \qquad 16)\ U_{i,k}\tau_i\sigma_{i,k}V_{i,k} = U_{k,i},$

$17)\ U_{i,k}V_{k,i}^{-1}V_{i,k} = \tau_k\sigma_{i,k}, \qquad 18)\ Q_{i,k}Q_{l,m} = Q_{l,m}Q_{i,k},$

$19)\ Q_{i,k}Q_{l,k} = Q_{l,k}Q_{i,k}, \qquad 20)\ U_{i,k}V_{i,k} = V_{i,k}U_{i,k},$

$21)\ U_{i,k}V_{i,l} = V_{i,l}U_{i,k},$

$22)\ U_{i,k}U_{k,l}^{\epsilon}U_{i,k}^{-1}U_{k,l}^{-\epsilon} = U_{i,l}^{\epsilon} = U_{k,l}^{-\epsilon}U_{i,k}U_{k,l}^{\epsilon}U_{i,k}^{-1},$

$23)\ V_{i,k}V_{k,l}^{\epsilon}V_{i,k}^{-1}V_{k,l}^{-\epsilon} = V_{i,l}^{\epsilon} = V_{k,l}^{-\epsilon}V_{i,k}V_{k,l}^{\epsilon}V_{i,k}^{-1},$

$24)\ U_{i,k}V_{k,l}^{\epsilon}U_{i,k}V_{k,l}^{-\epsilon} = U_{i,l}^{-\epsilon} = V_{k,l}^{-\epsilon}U_{i,k}^{-1}V_{k,l}^{\epsilon}U_{i,k},$

$25)\ V_{i,k}^{-1}U_{k,l}^{\epsilon}V_{i,k}U_{k,l}^{-\epsilon} = V_{i,l}^{-\epsilon} = U_{k,l}^{-\epsilon}V_{i,k}^{-1}U_{k,l}^{\epsilon}V_{i,k},$

kelime denklemlerinden oluşur.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.4 den elde edilmiştir.

Sonuç 3.5 *Ω_n grubunun üreteçleri $\sigma_{i,k}$ ve τ_i olmak üzere bağıntıları*

$1)\ \sigma_{i,k} = \sigma_{k,i}, \qquad 2)\ \sigma_{i,k}^2 = 1,$

$3)\ \sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}, \qquad 4)\ \sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r},$

$5)\ \tau_i^2 = 1, \qquad 6)\ \tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i,$

$7)\ \sigma_{i,k}\tau_j = \tau_j\sigma_{i,k}, \qquad 8)\ \sigma_{i,k}\tau_i\sigma_{i,k} = \tau_k,$

kelime denklemlerinden oluşur.

3.3.2. İkinci tür sunuş

$\eta : x_1 \to x_2^{-1}x_{1,}\ x_2 \to x_2^{-1},\ x_k \to x_k, (k > 2)$ şeklinde tanımlanan bir otomorfizma olsun. Bu otomorfizmanın üreteç olarak bulunduğu $Aut(F_n)$ in diğer sunuşları aşağıdaki teorem ve sonuçlarda ifade edilmiştir.

Teorem 3.6 (Armstrong ve ark., 2008) *Rankı $n \geq 4$ olan bir serbest grubun otomorfizma grubu $Aut(Fn)$ in üreteçleri Ω_n ve η dır. Bağıntı kümesi Ω_n grubunun bağıntılarına ek olarak*

1) $\eta^2 = 1,$	2) $(\sigma_{1,2}\eta)^3 = 1,$
3) $(\eta\tau_i)^2 = 1\ (i > 2),$	4) $(\eta\sigma_{i,j})^2 = 1\ (i,\ j > 2),$
5) $((\eta\tau_1)^2\tau_2)^2 = 1,$	6) $(\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta\sigma_{1,2})^4 = 1,$
7) $\sigma_{1,2}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta\ \sigma_{1,2}(\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta)^2 = 1,$	8) $(\sigma_{1,4}\sigma_{2,3}\eta)^4 = 1,$

kelime denklemlerinden oluşur.

Sonuç 3.7 (Armstrong ve ark., 2008) *$Aut(F_3)$ grubu Ω_3 ve η ile üretilir. Bu grubun bağıntı kümesi Ω_3 grubunun bağıntıları ve*

1) $\eta^2 = 1,$	2) $(\sigma_{1,2}\eta)^3 = 1,$
3) $(\eta\tau_3)^2 = 1,$	4) $((\eta\ \tau_1)^2\tau_2)^2 = 1,$
5) $(\eta\sigma_{1,3}\tau_2\eta\sigma_{1,2})^4 = 1,$	6) $(\sigma_{1,4}\sigma_{2,3}\eta)^4 = 1,$
7) $\sigma_{1,2}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta\ \sigma_{1,2}(\sigma_{2,3}\eta\sigma_{1,3}\tau_2\eta)^2 = 1,$	

kelime denklemlerinden oluşur.

Sonuç 3.8 (Armstrong ve ark., 2008) *$Aut(F_2)$ grubu Ω_2 and η ile üretilir. Bu grubun bağıntı kümesi Ω_2 grubunun bağıntıları ve*

1) $\eta^2 = 1,$	2) $(\sigma_{1,2}\eta)^3 = 1,$
3) $(\eta\tau_3)^2 = 1,$	4) $((\eta\ \tau_1)^2\tau_2)^2 = 1,$

kelime denklemlerinden oluşur.

Alt Bölüm 3.3.1 ve Alt Bölüm 3.3.2'lerden anlaşılacağı üzere Nielsen (1924) çalışmasında bulunan sunuşun üreteç ve bağıntı kümesinin elemanlarının sayısı oldukça fazlayken Armstrong ve ark. (2008)'de verilen sunuş oldukça az sayıda üreteç ve bağıntılara sahiptir. Ayrıca bu sunuşun formu $n \geq 4$ için daha önce belirtilen genişletilmiş simetrik grup Ω_n in büyüklüğüne bağlıdır. Böylece bağıntı sayısının az olması bu sunuş üzerinde $Aut(F_n)$ in tam yeniden yazma sisteminin elde edilmesini önemli ölçüde kolaylaştıracaktır (Bölüm 4).

3.4. $Aut(F_2)$ Grubunun Yapısı

Bu alt bölümde esas amacımız, $Aut(F_2)$ grubunun çözülebilir kelime problemine sahip olduğunu ifade ve ispat etmektir.

İkinci bölümde (Alt Bölüm 2.3) belirtildiği üzere, verilen bir grubun çözülebilir kelime problemine sahip olduğunun gösterilebilmesi için ilk olarak bu grubun en ideal sunuşunun elde edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, $Aut(F_2)$ grubunun istenilen sunuşu Dokovic (1983) çalışmasında ifade ve ispat edilmiştir. Bu çalışmada otomorfizma gruplarıyla ilgili elde edilen sunuş, Alt Bölüm 2.3'de verdiğimiz grup sunuşlarından daha farklı bir formatta elde edilmiş olup, yukarıda belirttiğimiz en ideal forma daha yakın niteliktedir. Dolayısıyla kelime probleminin çözümüne yönelik, daha faydalı bir formattadır.

Amacımıza ulaşabilmek için yukarıda belirttiğimiz sunuşu detaylı olarak aşağıdaki şekilde inceleyebiliriz. Bunun için sıradaki sonuç önemlidir.

Önerme 3.9 (Dokovic, 1983) *F_2 serbest grubunun otomorfizma grubu için*

$$Aut(F_2) \cong \Big((\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3) \Big) \rtimes (\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2)$$

izomorfizması daima vardır.

Önerme 3.9'in ispatını aşağıdaki şekilde yapabiliriz:

İspat İki üreteçli bir serbest grup, üç mertebeli iki devirli grubun serbest çarpım grubu ve 8 mertebeli D_4 dihedral grubu sırasıyla

$$F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle x, y;\ \rangle\,, \quad \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 = \Big\langle a, b\ ;\ a^3 = 1, b^3 = 1 \Big\rangle\,,$$

$$D_4 = \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \Big\langle c, d\ ; c^4 = d^2 = (cd)^2 = 1 \Big\rangle$$

sunuşları ile temsil edilsin.

Alt Bölüm 3.2'de ifade edilen Nielsen dönüşümleri kullanılarak F_2 nin otomorfizmaları elde edilebilir. Sıralı bir $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ kümesi üzerinde Ni Nielsen dönüşümünün uygulanması $\overset{Ni}{\to}$ sembolü ile gösterilsin. Bu durumda

$$(x, y) \overset{N3}{\to} (y, x) \overset{N2}{\to} (yx, x) \overset{N1}{\to} (x^{-1}y^{-1}, x)$$
$$(x, y) \overset{N3}{\to} (y, x) \overset{N1}{\to} (y^{-1}, x) \overset{N2}{\to} (y^{-1}, xy^{-1})$$

dönüşümleri sonucu

$$\alpha : \quad x \to x^{-1}y^{-1}, \quad y \to x$$
$$\beta : \quad x \to y^{-1}, \quad y \to xy^{-1}$$

kuralları ile verilen F_2 grubunun otomorfizmaları elde edilir.

Gerekli işlemler yapıldığında $\alpha^3 = \beta^3 = 1$ olduğu görülür. Böylece $a \to \alpha$ ve $b \to \beta$ kuralları ile verilen $\theta : \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 \to Aut(F_2)$ homomorfizması Lemma 2.8'den elde edilir. Bu θ homomorfizmasına karşılık gelen yarı-direkt çarpım grubu

$$H = F_2 \rtimes_\theta (\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)$$

Lemma 2.15'den x, y, a, b ile üretilir ve

$$a^3 = b^3 = 1, \ axa^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \ aya^{-1} = x, \ bxb^{-1} = y^{-1}, \ byb^{-1} = xy^{-1} \quad (3.1)$$

bağıntılarına sahiptir.

H grubunun D_4 grubu ile yarı-direkt çarpım grubunu oluşturmak için bir $\varphi : D_4 \to Aut(H)$ homomorfizmasının tanımlanması gereklidir. Bunun için ilk olarak H nin

$$\gamma : \quad x \to y^{-1}, \quad y \to x, \quad a \to b, \quad b \to xa; \quad (3.2)$$
$$\delta : \quad x \to y, \quad y \to x, \quad a \to y^{-1}a^{-1}, \quad b \to b^{-1} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanan γ ve δ otomorfizmalarına sahip olduğu gösterilecektir.

Lemma 2.8'in sonucu olarak,

$$\gamma(a^3) = b^3 = 1,$$
$$\gamma(b^3) = (xa)^3 = ayxa^2y = ayxa^{-1}y = aya^{-1}x^{-1} = aya^{-1}x^{-1} = 1$$
$$\gamma(axa^{-1}yx) = by^{-1}b^{-1}xy^{-1} = by^{-1}yb^{-1} = 1$$
$$\gamma(aya^{-1}x^{-1}) = bxb^{-1}y = y^{-1}y = 1$$
$$\gamma(bxb^{-1}y = xay^{-1}a^{-1}x^{-1}x) = xaa^{-1}x^{-1} = 1$$
$$\gamma(byb^{-1}yx^{-1}) = xaxa^{-1}x^{-1}xy = xaxa^{-1}y = xx^{-1} = 1$$

olduğundan γ bir homomorfizmadır. γ homomorfizmasının bire bir ve örtenliği için $\{x, y^{-1}, b, xa\}$ nın H için bir üreteç kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. $\{x, y, a, b\}$ ile üretilen her bir kelime x yerine x, y yerine $(y^{-1})^{-1}$, b yerine b ve a yerine $x^{-1}xa$ yazılarak elde edilebilir. Öyleyse $\{x, y^{-1}, b, xa\}$ kümesi H nin üreteç kümesi olduğundan γ homomorfizması H nin bir otomorfizmasıdır. Benzer şekilde δ fonksiyonunun H nin bir otomorfizması olduğu gösterilebilir.

(3.2) ve (3.3)'de verilen γ ve δ otomorfizmaları için $\gamma^4 = \delta^2 = (\gamma\delta)^2 = 1$ eşitliği sağlanır. Buna bağlı olarak $\varphi : D_4 \to Aut(H)$, $c \to \gamma$ ve $d \to \delta$ homomorfizması vardır (Lemma 2.8). H grubunun D_4 dihedral grubu ile yarı-direkt çarpım grubu

$$G = H \rtimes_{\varphi} D_4 = (F_2 \rtimes_{\theta} (\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3)) \rtimes_{\varphi} D_4$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Lemma 2.15 sonucu G nin üreteçleri x, y, a, b, c, d olup, bağıntı kümesi H ve D_4 ün bağıntılarına ek olarak

$$cxc^{-1} = y^{-1}, \quad cyc^{-1} = x, \quad cac^{-1} = b, \quad cbc^{-1} = xa, \tag{3.4}$$

$$dxd = y, \quad dad = y^{-1}a^{-1}, \quad dbd = b^{-1}, \tag{3.5}$$

kelime denklemlerinden oluşur.

$\phi : G \to Aut(F_2)$ kanonikal homomorfizma olsun, öyle ki $\phi_z : t \to ztz^{-1}$ olmak üzere $z \to \phi_z$ kuralı ile verilen ϕ nin F_2 ile kısıtlanışı $\phi|_{F_2} : F_2 \to Aut(F_2)$ bir homomorfizmadır.

(3.1), (3.4) ve (3.5)'de verilen bağıntılar kullanılarak $\forall g \in G$ ve $\forall f \in F_2$ için $gfg^{-1} \in F_2$ olduğu sonucuna ulaşılır, kısacası $F_2 \lhd G$ dir. Ayrıca Teorem 2.11'de verilen sonuç kullanılarak $Z(F_2) = \{1\}$ olduğu için $Inn(F_2) \cong F_2$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $\phi|_{F_2}$ homomorfizmasının $Inn(F_2)$ üzerine birebir ve örten olduğu elde edilir. Bu yüzden $\bar{G} = G/F_2$ için $\bar{\phi} : \bar{G} \to Out(F_2)$ indüklenmiş fonksiyonunun izomorfizma olması, ϕ homomorfizmasının da bir izomorfizma olduğu gerçeğini verdiğinden, ispata $\bar{\phi}$ nin izomorfizma olduğu gösterilerek devam edilecektir. Bu ispat için, $Out(F_2) \cong GL(2, \mathbb{Z})$ olduğu bilindiğinden (Lyndon ve Schupp, 2001) $\bar{\phi} : \bar{G} \to GL(2, \mathbb{Z})$ nin izomorfizma olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ilk olarak aşağıda $\bar{G}$ ve $GL(2, \mathbb{Z})$ gruplarının sunuşları ifade edilecektir.

G grubunun sunuşu kullanılarak $\bar{G}$ nin sunuşu

$$\Big\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \quad ; \quad \bar{a}^3 = \bar{b}^3 = \bar{c}^4 = \bar{d}^2 = (\bar{c}\bar{d})^2 = 1, \quad \bar{c}\bar{a}\bar{c}^{-1} = \bar{b}, \quad \bar{c}\bar{b}\bar{c}^{-1} = \bar{a}, \\ \bar{d}\bar{a}\bar{d} = \bar{a}^{-1}, \quad \bar{d}\bar{b}\bar{d} = \bar{b}^{-1} \Big\rangle$$

olarak elde edilir. Bu sunuş üzerinde Tietze dönüşümleri yapılarak (bağıntılarda $\bar{a}$ olan yere $\bar{c}\bar{b}\bar{c}^{-1}$ yaz ve $\bar{a}$ yı üreteç kümesinden sil)

$$\Big\langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \quad ; \quad \bar{b}^3 = \bar{c}^4 = \bar{d}^2 = (\bar{c}\bar{d})^2 = 1, \quad \bar{c}^2\bar{b}\bar{c}^{-2} = \bar{b}, \quad \bar{d}^2 = 1, \quad (\bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{c}^{-1})^2 = 1, \\ (\bar{b}\bar{d})^2 = 1 \Big\rangle$$

şeklinde $\bar{G}$ için yeni bir sunuş oluşturulur.

$GL(2,\mathbb{Z})$ grubunun sunuşu ise Lyndon ve Schupp (2001) çalışmasında

$$\left\langle A,B,C;\; A^6=(AC)^2=(BC)^2=A^3B^2=1\right\rangle,$$

öyle ki $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ olarak tanımlanmıştır.

Bu sunuşlar aracılığıyla $\bar{\phi}:\bar{G}\to GL(2,\mathbb{Z})$ nin

$$\bar{\phi}(\bar{b})=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad \bar{\phi}(\bar{c})=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \bar{\phi}(\bar{d})=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

kuralları altında bir homomorfizma olduğu göstermek oldukça kolaydır (Lemma 2.8). Buna benzer olarak

$$\psi:GL(2,\mathbb{Z})\to\bar{G},\quad A\to\bar{b}\bar{c}^2,\quad B\to\bar{c}^{-1},\quad C\to\bar{d}$$

kuralları ile verilen ψ fonksiyonu

$$\psi(A^6)=(\bar{b}\bar{c}^2)^6=\bar{b}^6\bar{c}^{12}=1,$$
$$\psi(ACAC)=\bar{b}\bar{c}\bar{c}\bar{d}\bar{b}^2\bar{d}=\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{c}^3\bar{b}\bar{c}^2\bar{d}=\bar{b}\bar{d}\bar{c}^6\bar{b}\bar{c}^2\bar{d}=\bar{b}\bar{d}\bar{c}^2\bar{b}\bar{c}^2\bar{d}=\bar{b}\bar{d}\bar{b}\bar{c}^4\bar{d}=\bar{b}\bar{d}\bar{b}\bar{d}=1,$$
$$\psi(BCBC)=\bar{c}^{-1}\bar{d}\bar{c}^{-1}\bar{d}=1,$$
$$\psi(A^3B^2)=\bar{b}\bar{c}^2\bar{b}\bar{c}^2\bar{b}\bar{c}^2\bar{c}^{-1}=\bar{b}^3\bar{c}^4=1$$

eşitliklerini sağladığından bir homomorfizmadır. Ayrıca $\bar{\phi}$ homomorfizmasının birebir ve örten olduğunu göstermek için $\psi\circ\bar{\phi}$ ve $\bar{\phi}\circ\psi$ bileşke fonksiyonlarının birim fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre

$$\psi\circ\bar{\phi}(\bar{b})=\psi(AB^2)=\bar{b}\bar{c}^2\bar{c}^{-2}=\bar{b},$$
$$\psi\circ\bar{\phi}(\bar{c})=\psi(B^3)=\bar{c}^{-3}=\bar{c},$$
$$\psi\circ\bar{\phi}(\bar{d})=\psi(C)=\bar{d}$$

olduğundan dolayı $\psi\circ\bar{\phi}=id_{\bar{G}}$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\bar{\phi}\circ\psi=id_{GL(2,(Z))}$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\bar{G}\cong Out(F_2)$, diğer bir deyişle

$$G=\Big(F_2\rtimes_\theta(\mathbb{Z}_3*\mathbb{Z}_3)\Big)\rtimes_\varphi D_4\cong Aut(F_2)$$

sonucu elde edilir.

Aşağıdaki lemma $Aut(F_2)$ için daha basit bir sunuşun elde edilmesinde kullanılacaktır.

Lemma 3.10 (Dokovic, 1983) *K üreteçleri u, v, w ve bağıntıları*

$$u^3 = v^4 = w^2 = (vw)^2 = v^2uv^2wuw = [uvu, v^2] = 1$$

olan bir grup iken $u \to a,\ v \to c,\ w \to d$ kuralları altında $f : K \to G$ bir izomorfizmadır.

İspat Lemma 2.8 sonucu

$$\begin{aligned}
&f(u^3) = a^3 = 1, \qquad f(v^4) = c^4 = 1,\\
&f(w^2) = d^2 = 1, \qquad f(uw)^2 = (ad)^2 = 1,\\
&f(v^2uv^2wuw) = c^2ac^2dad = cbc^3dad = xac^4dad = xay^{-1}a^{-1} = xx^{-1} = 1,\\
&f([uvu, v^2]) = acac^2a^{-1}c^{-1}a^{-1}c^{-2} = acacb^{-1}a^{-1}c^{-2} = aya^{-1}x^{-1} = 1
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığı için f bir homomorfizmadır. Aynı şekilde

$$x \to v^2uv^2u^{-1}, \quad y \to (u^{-1}w)^2, \quad a \to u, \quad b \to vuv^{-1}, \quad c \to v, \quad d \to w$$

kuralları ile verilen $g : G \to K$ bir homomorfizmadır. Bu fonksiyonların bileşkeleri $f \circ g = id_G$ ve $g \circ f = id_K$ olduğu için f bir izomorfizmadır.

Sonuç 3.11 (Dokovic, 1983) *$\epsilon = \gamma|_{F_2}$ ve $\xi = \delta|_{F_2}$ olsun. O halde $Aut(F_2)$ grubu, üreteçleri α, ϵ, ξ ve bağıntıları $\alpha^3 = \epsilon^4 = \xi^2 = (\epsilon\xi)^2 = \epsilon^2\alpha\epsilon^2\xi\alpha\xi = [\alpha\epsilon\alpha, \epsilon^2] = 1$ kelime denklemleri olan bir sunuşa sahiptir.*

İspat Teorem 3.9 ve Lemma 3.10 sonucu $u \to \alpha, v \to \epsilon, w \to \xi$ olarak tanımlanan $\phi \circ f : K \to Aut(F_2)$ bir izomorfizmadır.

Daha önce Alt Bölüm 2.7'da sonlu gruplar veya serbest gruplar gibi bazı grupların çözülebilir kelime problemine sahip olduğunu ifade etmiştik, ancak bu alt bölümde $Aut(F_2)$ nin kelime probleminin çözülebilir olduğunu göstermek için, bu tür grupların (kelime problemi çözülebilen grupların) genişlemeleri için de kelime probleminin araştırılması gerekmektedir. Aşağıda verilen lemmalar bu konuda gerekli bilgiyi bize sunmaktadır.

Lemma 3.12 (Baumslag ve Charles III, 1994) *H ve K çözülebilir kelime problemine sahip iki grup olsun. O halde $H * K$ serbest çarpım grubunun kelime problemi çözülebilirdir.*

Lemma 3.13 *H ve K çözülebilir kelime problemine sahip iki grup ise $H \rtimes K$ yarı-direkt çarpım grubunun kelime problemi çözülebilirdir.*

İspat H grubu çözülebilir kelime problemine sahip olduğu için $h \in H$ elemanının 1_H birim elemanına eşit olup olmadığına karar veren bir algoritma vardır. Bu algoritma A_1 olarak adlandırılsın. Aynı durum K grubu için de geçerli olduğundan kelime probleminin çözülebilirliğini veren bir A_2 algoritması vardır.

$H \rtimes K$ yarı-direkt çarpım grubunun her elemanı $h \in H$ ve $k \in K$ için (h, k) sıralı ikililerinden oluşmaktadır (Alt Bölüm 2.6.1). O halde $(h, k) \in H \rtimes K$ için

1. $h \in H$ için A_1 algoritması

   a. $h = 1$ kararını veriyorsa ikinci adıma geçiniz,

   b. $h \neq 1$ kararını veriyorsa üçüncü adıma geçiniz,

2. $k \in K$ için A_2 algoritması

   a. $k = 1$ kararını veriyorsa dördüncü adıma geçiniz,

   b. $k \neq 1$ kararını veriyorsa üçüncü adıma geçiniz,

3. $h \neq 1$ veya $k \neq 1$ kararı verildiğinden dolayı $(h, k) \neq (1_H, 1_K)$ yazınız,

4. $h = 1$ ve $k = 1$ kararı verildiğinden dolayı $(h, k) = (1_H, 1_K)$ yazınız,

adımlarına sahip algoritma ile herhangi $(h, k) \in H \rtimes K$ elemanının birim elemana eşit olup olmadığına karar verilebilir. Böylece $H \rtimes K$ yarı-direkt çarpım grubunun kelime problemi çözülebilirdir.

Önerme 3.9, Lemma 3.12, Lemma 3.13 ve Sonuç 3.11 kullanılarak aşağıda verilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.14 *İki üreteçli bir serbest grubun otomorfizma grubu $Aut(F_2)$ çözülebilir kelime problemine sahiptir.*

4. $AUT(F_N)$ GRUBUNUN KELİME PROBLEMİ

4.1. Giriş

Schleimer (2006) serbest grupların otomorfizma grubunun kelime probleminin polinomsal zaman çözümüne sahip olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte bu bölümdeki amacımız, rankı n olan bir serbest grubun otomorfizma grubu $Aut(F_n)$ in kelime probleminin çözülebilir olduğunu farklı bir metodla göstermektir. Bu amaca yönelik Alt Bölüm 4.2'de pozitif kelime yeniden yazma sistemi metodu tanıtılacaktır (Book ve Otto, 1993). Daha sonra Alt Bölüm 4.3'de $Aut(F_n)$ için Sonuç 3.5, Teorem 3.6, Sonuç 3.7 ve Sonuç 3.8'de verilen sunuşlar üzerinde Tietze dönüşümleri yapılarak elde edilen yeni sunuşun tam yeniden yazma sistemine ve bunun bir sonucu olarak çözülebilir kelime problemine sahip olduğu bizim tarafımızdan gösterilecektir.

4.2. Yeniden Yazma Sistemi

Bu alt bölümde ilk olarak yeniden yazma soyut manada düşünülecek ve yeniden yazma bağıntılarının sahip olması gereken özellikleri açıklamak için ikili bağıntıya sahip olan nesnelerin kümesi üzerinde durulacaktır. Ayrıca ”elmas kuralı, noetherian” gibi terimler tanımlanacaktır. Daha sonra pozitif kelime yeniden yazma sistemi ile ilgili bilgiler verilecek, bu sistem üzerinde normal formu elde edebilmek için gereken şartlar tanıtılacaktır.

4.2.1. Soyut indirgeme sistemleri

B nesnelerin bir kümesi ve $\rightarrow$ bir ikili bağıntı olsun. $\rightarrow^{-1}$ gösterimi $\rightarrow$ bağıntısının tersini ve o sembolü bağıntıların bileşke işlemini göstersin. Ayrıca bazı notasyonlar

(a) $\rightarrow^0$ birim bağıntı,

(b) $\rightarrow^n = \rightarrow o \rightarrow^{n-1}$ $(n > 0)$,

(c) $\rightarrow^* = \cup_{n\geq 0} \rightarrow^n$ ve $\rightarrow^+ = \cup_{n>0} \rightarrow^n$,

(d) $\leftrightarrow = \rightarrow \cup \rightarrow^{-1}$,

(e) $\leftrightarrow^0$ birim bağıntı,

(f) $\leftrightarrow_n = \leftrightarrow o \leftrightarrow_{n-1}$ $(n > 0)$,

(g) $\leftrightarrow^+ = \cup_{n>0}$ ve $\leftrightarrow^* = \cup_{n\geq 0} \leftrightarrow^n$.

olarak kabul edilsin.

Yukarıda verilen $\rightarrow^*$ bağıntısı yansıma ve geçişkenlik özelliğine sahiptir ve $\leftrightarrow_*$ bağıntısı B üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Aslında bu bağıntı $\rightarrow$ bağıntısını içeren en küçük denklik bağıntısıdır.

B nesnelerin bir kümesi ve B üzerinde bir ikili bağıntı $\rightarrow$ olsun. Buna göre $\rightarrow$ bağıntısı *indirgeme bağıntısı* ve $S = (B, \rightarrow)$ yapısı *indirgeme sistemi* olarak adlandırılır. Ayrıca $x \in B$ için $x \rightarrow y$ olacak şekilde bir $y \in B$ yoksa x nesnesine *indirgenemez* denir; aksi takdirde x nesnesi *indirgenebilirdir*.

$(B, \rightarrow)$ indirgeme sisteminde $x, y \in B$ olmak üzere x nesnesinin y nesnesine denk olması için $x \leftrightarrow^* y$ şartı sağlanmalıdır. Buna göre $x, y \in B$ için $x \leftrightarrow^* y$ şartı sağlanıyor ve y indirgenemez ise y nesnesine x in *normal formu* denir.

B deki her nesne için tek bir normal form bulunsun. Bu durumda her $x, y \in B$ için $x \leftrightarrow^* y$ olması için gerek ve yeter şart x ve y nesnelerinin normal formlarının birbirine eşit olmasıdır. Buna ek olarak, her $w \in B$ için $[w]$ denklik sınıfı içinde tek bir normal form bulmayı sağlayan bir algoritmanın varlığı, iki nesnenin birbirine eşit olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığına işaret eder, yani kelime probleminin çözülebilir olduğunu gösterir.

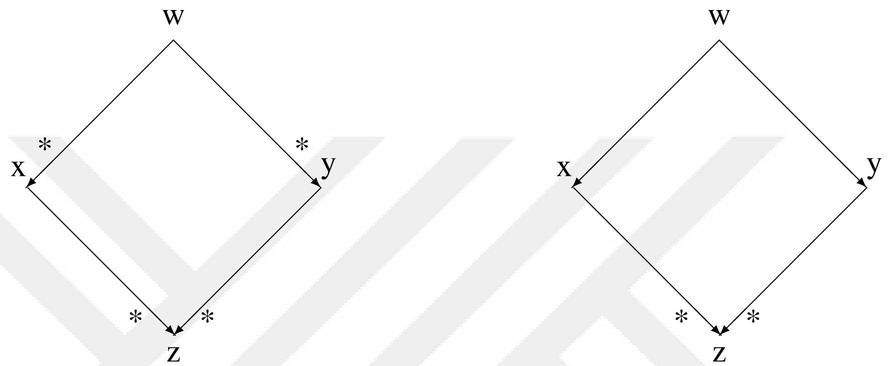
Şimdi tek bir normal formun varlığını garanti eden durumlar ele alınacaktır. Buna göre $S = (B, \rightarrow)$ bir indirgeme sistemi için,

(a) Her $w, x, y \in B$ için $w \rightarrow^* x$ ve $w \rightarrow^* y$ indirgemeleri var iken $x \rightarrow^* z$ ve $y \rightarrow^* z$ indirgemeleri olacak şekilde bir $z \in B$ var ise S indirgeme sistemi *elmas kuralını* sağlar denir;

(b) Her $w, x, y \in B$ için, $w \to x$ ve $w \to y$ indirgemeleri var iken $x \to^* z$ ve $y \to^* z$ indirgemeleri olacak şekilde bir $z \in B$ varsa S indirgeme sistemi *yerel olarak elmas kuralını* sağlar denir;

(c) $x_i \to x_{i+1}$ ($\forall i \geq 0$) indirgemeleri olacak şekilde $x_0, x_1, \cdots$ sonsuz dizisi yoksa $\to$ bağıntısı *noetherian* olarak adlandırılır;

(d) S sistemi elmas kuralını sağlayan noetherian bir indirgeme sistemi ise *tam indirgeme sistemi* olarak adlandırılır.



Şekil 4.1. Elmas kuralı ve yerel elmas kuralı

Sonuç 4.1 (Book ve Otto, 1993) *Elmas kuralını sağlayan bir* $S = (B, \to)$ *indirgeme sistemi için* $[x]$ $(\forall x \in B)$ *denklik sınıfı en fazla bir normal form içerir.*

Lemma 4.2 (Book ve Otto, 1993) $(B, \to)$ *indirgeme sisteminin* $\to$ *bağıntısı noetherian ise her* $x \in B$ *için* $[x]$ *denklik sınıfı bir normal forma sahiptir.*

Teorem 4.3 (Book ve Otto, 1993) $S = (B, \to)$ *bir indirgeme sistemi ve* $\to$ *bağıntısı noetherian olsun. Bu durumda* S *nin elmas kuralını sağlayan sistem olması için gerek ve yeter şart* S *nin yerel olarak elmas kuralını sağlamasıdır.*

Teorem 4.4 (Book ve Otto, 1993) $S = (B, \to)$ *tam indirgeme sistemi ise her* $x \in B$ *için* $[x]$ *denklik sınıfı tek bir normal forma sahiptir.*

4.2.2. Pozitif kelimeler için yeniden yazma sistemi

Grup, monoid ve yarı grupların kelime problemini incelemek için pozitif kelime yeniden yazma sistemi kullanılmaktadır. Bu sistemi tanıtmak için bazı tanımlara ihtiyaç duyulacaktır. Buna göre Alt Bölüm 2.2'de tanımlandığı gibi sembollerin bir kümesi olan herhangi bir X kümesi için $x_1x_2\cdots x_n$ $(x_i \in X)$ *pozitif kelime* olarak adlandırılır. Boş pozitif kelime ile beraber X in tüm sembollerinden oluşan pozitif kelimelerin kümesi X^* ile gösterilir. Böylece X^* aslında boş kelimesi birim elemanı simgeleyen X tarafından üretilen bir monoiddir. Burada X kümesi *alfabe* olarak adlandırılır. Daha önce kelimenin uzunluğu $l(w)$ olarak tanımladığımız uzunluk fonksiyonu pozitif kelimeler için de geçerlidir (Alt Bölüm 2.2).

Tanım 4.5 (Book ve Otto, 1993) *X bir alfabe olsun. X üzerindeki R yeniden yazma sistemi $X^* \times X^*$ kümesinin bir alt kümesidir. Her bir $(r_1, r_2) \in R$ elemanı yeniden yazma kuralı olarak adlandırılır. Bir R yeniden yazma sistemi için X^* üzerinde bir tek-adım indirgeme bağıntısı " $u, v \in X^*$ olmak üzere $u \to_R v$ olması için gerek ve yeter şart bazı $x, y \in X^*$ kelimeleri için $u = xr_1y,\ v = xr_2y$ olacak şekilde $(r_1, r_2) \in R$ elemanının var olmasıdır" şeklinde tanımlansın. X^* üzerinde R yeniden yazma sistemini kullanarak oluşturduğumuz $\to_R^*$ indirgeme bağıntısı $\to_R$ bağıntısının yansımalı geçişken kapanışıdır (yani $\to_R$ nin sonlu adımda bileşke işlemidir).*

Buna göre R kümesi, X üzerinde bir pozitif kelime yeniden yazma sistemi ise $(X^*, \to_R)$ bir indirgeme sistemidir. Bir R pozitif kelime yeniden yazma sistemi düşünüldüğünde nesnelerin kümesi sonlu bir X alfabesi için X^* kümesidir ve X^* üzerindeki ikili bağıntı $\to_R$ dır. Bu yüzden sıklıkla bir indirgeme sistemi düşünüldüğünde $(X^*, \to_R)$ yerine sadece R kullanılacaktır.

4.2.3. Normal form için gerekli sıralama

Alt Bölüm 4.2.1'de elmas kuralını ve noetherian olma özelliklerini sağlayan herhangi bir indirgeme sisteminde her nesnenin tek bir normal forma sahip olduğu belirtilmişti. Bu bölümde indirgeme bağıntısı noetherian olan pozitif kelime yeniden yazma sistemi aracılığı ile elde edilen algoritma üzerinde durulacaktır. Bu algoritma bir x pozitif kelimesi için $x \to^* \bar{x}$ olacak şekilde indirgenemez $\bar{x}$ pozitif kelimesini hesaplayacaktır. Bu yüzden bu algoritma için indirgeme bağıntısının noetherian olması çok önemlidir. Aşağıda indirgeme bağıntısının noetherian olmasını sağlayacak olan bir teknik üzerinde durulacaktır.

X^* üzerinde ikili bir $>$ bağıntısı, yansıma özelliğine sahip olmayan, anti-simetrik ve geçişkenlik özelliğini sağlayan bir bağıntı ise *katı kısmi sıralama* olarak adlandırılır. Bir $>$ bağıntısı katı kısmi sıralama ise ve her $x, y \in X^*$ için $x > y$, $x = y$, $y > x$ durumlarından biri sağlanıyorsa *lineer sıralamadır.* Ayrıca $>$ bağıntısı her $u, v, x, y \in X^*$ için $u > v$ iken $xuy > xvy$ ise *kabul edilebilir* olarak adlandırılır. Aşağıda X^* üzerinde kabul edilebilir kısmi sıralama örnekleri verilmiştir.

$X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ olsun.

(a) $l(x) > l(y)$ iken $x > y$ olsun. Bu şekilde tanımlanan sıralama X^* üzerindeki *uzunluk sıralaması* olarak adlandırılır.

(b) $w : X \to \mathbb{N}^+$ her bir harfi bir pozitif tam sayı ile ilişkilendiren bir fonksiyon olsun. w fonksiyonunu kullanarak *ağırlık sıralamasını* $w(x) > w(y)$ ise $x > y$ şeklinde tanımlarız. Burada w fonksiyonu X^* dan $\mathbb{N}$ ye $w(e) = 0$ ve $w(xa_i) = w(x) + w(a_i)$ $(x \in X^*)$ olarak tanımlanan fonksiyondur.

(c) $u, v, z \in X^*$, $1 \leq i, j \leq n$ ve $i > j$ olmak üzere $x = ua_iv$ ve $y = ua_jz$ ise $x >_{lex} y$ veya $x = yz$ iken boş olmayan z dizisi var ise $x >_{lex} y$ olsun. Bu şekilde tanımlanan sıralama *sözlük sıralaması* olarak adlandırılır.

(d) Uzunluk sıralaması ve sözlük sıralamasının $l(x) > l(y)$ iken $x >_{ll} y$ veya $l(x) = l(y)$ iken $x >_{lex} y$ ise $x >_{ll} y$ olacak şekilde beraber kullanıldığı sıralamaya *uzunluk-sözlük sıralaması* denir.

Ağırlık sıralaması ve sözlük sıralaması da uzunluk-sözlük sıralamasındaki gibi beraber kullanılırsa *ağırlık-sözlük sıralaması* $>_{wl}$ elde edilir.

Yukarıdaki tüm bağıntılar X^* üzerinde kabul edilebilir kısmi sıralamalardır. Ayrıca uzunluk ve ağırlık sıralaması lineer değildir ancak sözlük sıralaması, uzunluk-sözlük ve ağırlık-sözlük sıralamaları lineerdir.

X^* üzerinde $>$ bağıntısı katı kısmi sıralama olsun. $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$ formunda sonsuz bir zincir yoksa bu sıralamaya *iyi yapılı sıralama* denir. Eğer $>$ bağntısı lineer ve iyi-yapılı sıralama ise *iyi-sıralama* olarak adlandırılır. Örneğin uzunluk ve ağırlık sıralaması iyi-yapılı sıralamadır. Bununla birlikte her dizi sonlu uzunluğa veya sonlu ağırlığa sahip olduğu için uzunluk-sözlük ve ağırlık-sözlük sıralamaları iyi sıralamalardır. Ayrıca X birden fazla harf içerirse sözlük sıralaması iyi yapılı bir sıralama değildir, bunun nedenii $a_2 >_{lex} a_1a_2 >_{lex} a_1a_1a_2 >_{lex} \cdots >_{lex} a_1^i a_2 >_{lex} a_1^{i+1}a_2 >_{lex} \cdots$ sonsuz azalan dizisinin var olmasıdır.

Kabul edilebilir iyi-yapılı sıralamalarla alakalı açıklamada bulunulmasının nedeni aşağıdaki sonuçtur.

Teorem 4.6 (Book ve Otto, 1993) *X üzerinde R bir pozitif kelime yeniden yazma sistemi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(a) *$\rightarrow_R$ indirgeme bağıntısı noetheriandır.*

(b) *Her bir $(r_1, r_2) \in R$ için $r_1 > r_2$ olacak şekilde X^* üzerinde kabul edilebilir iyi-yapılı kısmi sıralama vardır.*

Bu teoremden de anlaşılacağı üzere noetherian bir yeniden yazma sistemi elde edilmek isteniyorsa X^* üzerinde kabul edilebilir iyi-yapılı kısmi sıralama seçilmelidir. Bu bilgiler ışığında gerekli sıralama seçildiğinde elmas kuralını ve noetherian olma durumunu sağlayan bir pozitif kelime yazma sistemi için her kelime için tek bir normal form vardır, böylece Teorem 4.4 den aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.7 *X üzerinde bir yeniden yazma sistemi R olmak üzere $(X^*, \rightarrow_R)$ indirgeme sistemi (R yeniden yazma sistemi) tam ise X^* içindeki her bir pozitif kelime için tek bir normal form vardır. Bu yüzden $\rightarrow_R$ indirgeme bağıntısı altında X^* için kelime problemi çözülebilirdir.*

Tüm bu bilgilerin ışığı altında $Aut(F_n)$ grubunun tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu bir sonraki alt bölümde gösterilecektir.

4.3. $Aut(F_n)$ Otomorfizma Grubunun Tam Yeniden Yazma Sistemi

Dördüncü bölümün amacı Alt Bölüm 3.1 de $Aut(F_n)$ in kelime probleminin çözülebilir olduğunu göstermek olarak belirtilmişti. Bu alt bölümde amacımıza Alt Bölüm 3.3.2'de verilen $Aut(F_n)$ in sunuşları kullanılarak ulaşılacaktır. Bu sunuşun üreteçlerin mertebesinin 2 olması, bu üreteçlerin ve bağıntıların sayısının önemli ölçüde az olması $Aut(F_n)$ grubu için tam yeniden yazma sistemi bulmayı kolaylaştıracaktır.

İlk olarak bu sunuşlarda Ω_n alt grubunun bağıntıları yer aldığından bu alt grup üzerinde Tietze dönüşümleri uygulanarak bağıntıların daha az sayıda buna bağlı olarak kesişmelerin saysının da oldukça az olması sağlanacaktır. O halde Ω_n grubunun Sonuç 3.5'de verilen sunuşu üzerinde her $\sigma_{k,i}$ $(k > i)$ yerine $\sigma_{i,k}$ $(i < k)$ yazılması, üreteç kümesinden $\sigma_{k,i}$ üreteçlerinin çıkarılması ve $\sigma_{k,i} = \sigma_{i,k}$ bağıntısının silinmesi şeklinde tanımlanan Tietze dönüşümünü (Alt Bölüm 2.4) uygulayalım. Bu dönüşümün etkilerini her bağıntı için aşağıda adım adım gösterelim:

1. $\sigma_{i,k}^2 = 1$ için

   (a) $i < k$ ise $\sigma_{i,k}^2 = 1$ $(i < k)$,

   (b) $i > k$ ise $\sigma_{k,i}^2 = 1$ $(k < i)$.

   Genel olarak bu dönüşüm sonucu oluşan yeni bağıntının $\sigma_{i,k}^2 = 1$ $(i < k)$ olduğu elde edilir.

2. $\sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}$ için

   (a) $i < k$ ise,

      i. $r < s$ ise $\sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}$,

      ii. $r > s$ ise $\sigma_{i,k}\sigma_{s,r} = \sigma_{s,r}\sigma_{i,k}$,

   (b) $i > k$ ise,

      i. $r < s$ ise $\sigma_{k,i}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{k,i}$,

      ii. $r > s$ ise $\sigma_{k,i}\sigma_{s,r} = \sigma_{s,r}\sigma_{k,i}$.

   Bu bağıntı için genel olarak $\sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}$ $(i < k)$ $(r < s)$ $(i < r)$ bağıntısı elde edilir.

3. $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$ için

   (a) $i < k < r$ ise $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$,

   (b) $r < k < i$ ise $\sigma_{k,i}\sigma_{r,k} = \sigma_{r,i}\sigma_{k,i} = \sigma_{r,k}\sigma_{r,i}$,

   (c) $i > k$ ve $k < r$ ise

      i. $i < r$ ise $\sigma_{k,i}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{k,i} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$,

      ii. $i > r$ ise $\sigma_{k,i}\sigma_{k,r} = \sigma_{r,i}\sigma_{k,i} = \sigma_{k,r}\sigma_{r,i}$,

   (d) $i < k$ ve $k > r$ ise

i. $i < r$ ise $\sigma_{i,k}\sigma_{r,k} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{r,k}\sigma_{i,r}$,

ii. $i > r$ ise $\sigma_{i,k}\sigma_{r,k} = \sigma_{r,i}\sigma_{i,k} = \sigma_{r,k}\sigma_{r,i}$.

Bu bağıntının genel hali $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$ $(i < k < r)$ dir.

4. $\tau_j\sigma_{i,k} = \sigma_{i,k}\tau_j$ için

   (a) $i < k$ ise $\tau_j\sigma_{i,k} = \sigma_{i,k}\tau_j$,

   (b) $i > k$ ise $\tau_j\sigma_{k,i} = \sigma_{k,i}\tau_j$,

   Oluşan yeni bağıntının genel hali $\tau_j\sigma_{i,k} = \sigma_{i,k}\tau_j$ $(i < k)$ dır.

5. $\sigma_{i,k}\tau_i\sigma_{i,k} = \tau_k$ için

   (a) $i < k$ ise $\sigma_{i,k}\tau_i\sigma_{i,k} = \tau_k$,

   (b) $i > k$ ise $\sigma_{k,i}\tau_i\sigma_{k,i} = \tau_k$.

   Genel olarak $\sigma_{i,k}\tau_i\sigma_{i,k} = \tau_k$ $(i < k)$ olur.

Ayrıca $\tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i$ bağıntısı üzerinde T2 Tietze dönüşümü sonucu bu bağıntıya denk $\tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i$ $(i > k)$ bağıntısı elde edilir.

Böylece Ω_n alt grubu için gerekli Tietze dönüşümleri uygulandıktan sonra aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.8 *Ω_n alt grubu $1 < i, k < n$ ve i, k indisleri birbirinden farklı olmak üzere olmak üzere $\sigma_{i,k}$ $(i < k)$ ve τ_i ile üretilir ve bu grubun bağıntıları*

1) $\sigma_{i,k}^2 = 1$,	2) $\sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}$ $(i < k)$ $(r < s)$,
3) $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k}$ $(i < k < r)$,	4) $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$ $(i < k < r)$,
5) $\sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$ $(i < k < r)$,	6) $\sigma_{i,k}\sigma_{i,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{k,r}$ $(i < k < r)$,
7) $\sigma_{i,k}\sigma_{i,r} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,k}$ $(i < k < r)$,	8) $\sigma_{i,r}\sigma_{k,r} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,k}$ $(i < k < r)$,
9) $\tau_i^2 = 1$,	10) $\tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i$ $(i > k)$,
11) $\sigma_{i,k}\tau_j = \tau_j\sigma_{i,k}$ $(i < k)$,	12) $\sigma_{i,k}\tau_i = \tau_k\ \sigma_{i,k}$ $(i < k)$,
13) $\sigma_{i,k}\tau_k = \tau_i\sigma_{i,k}$ $(i < k)$,	

kelime denklemlerinden oluşur.

Buna ek olarak bulunacak olan kesişmelerin sayısının daha az olması için $Aut(F_n)$ in Alt Bölüm 3.3.2'de verilen sunuşu üzerinde T1 ve T2 Tietze dönüşümleri (2.4)'e uygulanarak

1. $\eta\tau_i^2 = 1$ bağıntısı için $\tau_i\eta = \eta\tau_i$,

2. $(\eta\sigma_{i,k})^2 = 1$ $(i, k > 2)$ bağıntısı için $\sigma_{i,k}\eta = \eta\sigma_{i,k}$ $(i,\ k > 2)$,

3. $((\eta\tau_1)^2\tau_2)^2 = 1$ bağıntısı için $\tau_2(\tau_1\eta)^2 = (\eta\tau_1)^2\tau_2$,

4. $(\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta\sigma_{1,2})^4 = 1$ bağıntısı için $(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4 = 1$,

5. $\sigma_{1,2}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta\ \sigma_{1,2}(\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta)^2 = 1$ bağıntısı için

   $\sigma_{1,2}\eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta = 1$,

6. $(\sigma_{1,4}\sigma_{2,3}\eta)^4 = 1$ bağıntısı için $(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4 = 1$

bağıntıları elde edilir.

Bu dönüşümlerle beraber Lemma 4.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9 *$Aut(F_n)$ $(n \geq 4)$ grubunun üreteç kümesi $1 \leq i, k, r, j \leq n$ ve farklı harfle temsil edilen indisler birbirlerinden farklı olmak üzere $\sigma_{i,k}$ $(i < k), \tau_i$ ve η den oluşur ve bağıntıları*

1) $\sigma_{i,k}^2 = 1$,	2) $\sigma_{i,k}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}$ $(i < k)$ $(r < s)$ $(i < r)$,
3) $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{i,k}$ $(i < k < r)$,	4) $\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$ $(i < k < r)$,
5) $\sigma_{i,r}\sigma_{i,k} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}$ $(i < k < r)$,	6) $\sigma_{i,k}\sigma_{i,r} = \sigma_{i,r}\sigma_{k,r}$ $(i < k < r)$,
7) $\sigma_{i,k}\sigma_{i,r} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,k}$ $(i < k < r)$,	8) $\sigma_{i,r}\sigma_{k,r} = \sigma_{k,r}\sigma_{i,k}$ $(i < k < r)$,
9) $\tau_i^2 = 1$,	10) $\tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i$ $(i > k)$,
11) $\sigma_{i,k}\tau_j = \tau_j\sigma_{i,k}$ $(i < k)$,	12) $\sigma_{i,k}\tau_i = \tau_k\ \sigma_{i,k}$ $(i < k)$,
13) $\sigma_{i,k}\tau_k = \tau_i\sigma_{i,k}$ $(i < k)$,	14) $\eta^2 = 1$,
15) $(\sigma_{1,2}\eta)^3 = 1$,	16) $\tau_i\eta = \eta\tau_i$ $(i > 2)$,
17) $\sigma_{i,k}\eta = \eta\sigma_{i,k}$ $(i,\ k > 2)$,	18) $\tau_2(\tau_1\eta)^2 = (\eta\tau_1)^2\tau_2$,
19) $(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4 = 1$,	

20) $\sigma_{1,2}\eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta = 1$,

21) $(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4 = 1$,

kelime denklemlerinden oluşur.

Yukarıda verilen sunuş $\mathcal{P}_n$ $(n \geq 4)$ sunuşu olarak adlandırılsın.

Teorem 4.10 *$\mathcal{P}_n$ sunuşu ile verilen bir serbest grubun otomorfizma grubunun sadece bağıntılarından oluşan yeniden yazma sistemi tamdır.*

İspat Üreteçler arasındaki sıralama $\sigma_{1,2} > \sigma_{1,3} > \cdots > \sigma_{1,n} > \sigma_{2,3} > \sigma_{2,4} > \cdots > \sigma_{2,n} > \cdots > \sigma_{(n-1),n} > \tau_n > \tau_{n-1} > \cdots > \tau_1 > \eta$ olsun. 1-13 arasındaki kuralların aynı zamanda sonlu genişletilmiş simetrik grubunun (Alt Bölüm 3.3.1) bağıntıları olduğu biliniyor. Bu durumda bir sonlu grubun her elemanı belli bir sıralamaya göre bir kelimeye indirgeneceğinden 1-13 arasındaki bağıntıların birbiri ile olan kesişmelerinin elmas kuralını sağladığı aşikardır. Bu yüzden bazı kesişmeler için elmas kuralının sağlandığını ve noetherian olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{array}{ll} 1 \cap 2 : w = \sigma_{i,k}^2 \sigma_{r,s}, & 1 \cap 12 : w = \sigma_{i,k}^2 \tau_i, \\ 2 \cap 2 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{p,q}, & 2 \cap 4 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{s,m}, \\ 3 \cap 11 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\tau_j, & 4 \cap 12 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\tau_k \end{array}$$

kesişmelerinin indirgenme durumlarını inceleyelim.

1. $1 \cap 2 : w = \sigma_{i,k}^2 \sigma_{r,s} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{r,s} \\ \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{i,k} \rightarrow \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}^2 \rightarrow \sigma_{r,s} \end{cases},$

2. $1 \cap 12 : w = \sigma_{i,k}^2 \tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_i \\ \sigma_{i,k}\tau_k\sigma_{i,k} \rightarrow \tau_i\sigma_{i,k}^2 \rightarrow \tau_i \end{cases},$

3. $2 \cap 2$ kesişimi için üç durum vardır:

   a. i, k, p, q birbirinden farklı ise

   $$2 \cap 2 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{p,q} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}\sigma_{p,q} \rightarrow \sigma_{r,s}\sigma_{p,q}\sigma_{i,k} \rightarrow \sigma_{p,q}\sigma_{r,s}\sigma_{i,k} \\ \sigma_{i,k}\sigma_{p,q}\sigma_{r,s} \rightarrow \sigma_{p,q}\sigma_{i,k}\sigma_{r,s} \rightarrow \sigma_{p,q}\sigma_{r,s}\sigma_{i,k} \end{cases},$$

   b. $k = q, i, p$ birbirinden farklı ise

   $$2 \cap 2 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{p,k} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}\sigma_{p,k} \rightarrow \sigma_{r,s}\sigma_{p,k}\sigma_{i,p} \rightarrow \sigma_{p,k}\sigma_{r,s}\sigma_{i,p} \\ \sigma_{i,k}\sigma_{p,k}\sigma_{r,s} \rightarrow \sigma_{p,k}\sigma_{i,p}\sigma_{r,s} \rightarrow \sigma_{p,k}\sigma_{r,s}\sigma_{i,p} \end{cases},$$

   c. $k = p, i, q$ birbirinden farklı ise

   $$2 \cap 2 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{k,q} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}\sigma_{k,q} \rightarrow \sigma_{r,s}\sigma_{k,q}\sigma_{i,q} \rightarrow \sigma_{k,q}\sigma_{r,s}\sigma_{i,q} \\ \sigma_{i,k}\sigma_{k,q}\sigma_{r,s} \rightarrow \sigma_{k,q}\sigma_{i,q}\sigma_{r,s} \rightarrow \sigma_{k,q}\sigma_{r,s}\sigma_{i,q} \end{cases},$$

4. $2 \cap 4 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{r,s}\sigma_{s,m} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{r,s}\sigma_{i,k}\sigma_{s,m} \rightarrow \sigma_{r,s}\sigma_{s,m}\sigma_{i,k} \rightarrow \sigma_{s,m}\sigma_{r,m}\sigma_{i,k} \\ \sigma_{i,k}\sigma_{s,m}\sigma_{r,m} \rightarrow \sigma_{s,m}\sigma_{i,k}\sigma_{r,m} \rightarrow \sigma_{s,m}\sigma_{r,m}\sigma_{i,k} \end{cases},$

5. $3 \cap 11$ için iki durum vardır:

   a. $j \neq i$ ise

   $$3 \cap 11 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\tau_j \rightarrow \begin{cases} \sigma_{i,r}\sigma_{i,k}\tau_j \rightarrow \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}\tau_j \rightarrow^* \tau_j\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \\ \sigma_{i,k}\tau_j\sigma_{k,r} \rightarrow \tau_j\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} \rightarrow \tau_j\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \end{cases},$$

b. $j = i$ ise

$$3 \cap 11 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\tau_i \to \begin{cases} \sigma_{i,r}\sigma_{i,k}\tau_i \to \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}\tau_i \to^* \tau_k\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \\ \sigma_{i,k}\tau_i\sigma_{k,r} \to \tau_k\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} \to \tau_k\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \end{cases},$$

6. $4 \cap 12 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\tau_k \to \begin{cases} \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}\tau_k \to \sigma_{k,r}\tau_k\sigma_{i,r} \to \tau_r\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \\ \sigma_{i,k}\tau_r\sigma_{k,r} \to \tau_r\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} \to \tau_r\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \end{cases},$

1-13 arasındaki bağıntılar ile 14-21 arasındaki bağıntıların kesişmelerinden bazıları

$$\begin{aligned}
&1 \cap 15 : w = \sigma_{1,2}(\sigma_{1,2}\eta)^3, \\
&1 \cap 17 : w = \sigma_{i,k}^2\eta \ \ (i, k > 2), \\
&1 \cap 19 : w = \sigma_{1,2}^2\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3, \\
&1 \cap 20 : w = \sigma_{1,2}^2\eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta, \\
&1 \cap 21 : w = \sigma_{2,3}(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4, \\
&4 \cap 17 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\eta \ \ (k, r > 2), \\
&4 \cap 21 : w = \sigma_{1,2}(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4, \\
&12 \cap 16 : w = \sigma_{i,k}\tau_i\eta \ (i > 2), \\
&12 \cap 18 : w = \sigma_{2,k}\tau_2(\tau_1\eta)^2
\end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer durumlarda yapılacak indirgemeler, bu kesişmelerdekine benzerdir. Şimdi bu kesişmeler için elmas kuralını ve Noetherian olma durumunu inceleyelim.

1. $1 \cap 15 : w = \sigma_{1,2}(\sigma_{1,2}\eta)^3$ için

$$w \to \begin{cases} \eta(\sigma_{1,2}\eta)^2 \\ \sigma_{1,2} \end{cases} \equiv \begin{cases} (\sigma_{1,2}\eta)^3 \to 1 \\ \sigma_{1,2}^2 \to 1 \end{cases},$$

2. $1 \cap 17 : w = \sigma_{i,k}^2\eta$ için

$$w \to \begin{cases} \eta \\ \sigma_{i,k}\eta\sigma_{i,k} \to \eta\sigma_{i,k}^2 \to \eta \end{cases},$$

3. $1 \cap 19 : w = \sigma_{1,2}(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4$ için

$$w \to \begin{cases} \eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3 \\ \sigma_{1,2} \end{cases} \equiv \begin{cases} \sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3 \to 1 \\ \sigma_{1,2}^2 \to 1 \end{cases},$$

4. $1 \cap 20 : w = \sigma_{1,2}^2\eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta$ için

$$w \rightarrow \begin{cases} \eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta \\ \sigma_{1,2} \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} \sigma_{1,2}\eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta \rightarrow 1 \\ \sigma_{1,2}^2 \rightarrow 1 \end{cases},$$

5. $1 \cap 21 : w = \sigma_{2,3}(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4$ için

$$w \rightarrow \begin{cases} \sigma_{1,4}\eta(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^3 \\ \sigma_{2,3} \end{cases} \equiv \begin{cases} (\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4 \rightarrow 1 \\ \sigma_{2,3}^2 \rightarrow 1 \end{cases},$$

6. $4 \cap 17$ için iki durum vardır:

a. $i = 1, 2$ ise

$$4 \cap 17 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\eta \rightarrow \begin{cases} \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}\eta \\ \sigma_{i,k}\eta\sigma_{k,r} \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\sigma_{i,r}\eta \rightarrow \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}^2\eta \rightarrow \eta\sigma_{k,r} \\ \sigma_{i,k}^2\eta\sigma_{k,r} \rightarrow \eta\sigma_{k,r} \end{cases},$$

b. $i > 2$ ise

$$4 \cap 17 : w = \sigma_{i,k}\sigma_{k,r}\eta \rightarrow \begin{cases} \sigma_{k,r}\sigma_{i,r}\eta \rightarrow \sigma_{k,r}\eta\sigma_{i,r} \rightarrow \eta\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \\ \sigma_{i,k}\eta\sigma_{k,r} \rightarrow \eta\sigma_{i,k}\sigma_{k,r} \rightarrow \eta\sigma_{k,r}\sigma_{i,r} \end{cases},$$

7. $4 \cap 21 : w = \sigma_{1,2}(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^4$ için

$$w \rightarrow \begin{cases} \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\sigma_{1,4}\eta(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^3 \rightarrow^* \sigma_{2,3}\sigma_{3,4}\sigma_{1,3}\eta(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^3 \\ \sigma_{1,2} \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} \sigma_{1,2}\sigma_{2,3}\sigma_{3,4}\sigma_{1,3}\eta(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^3 \rightarrow^* \sigma_{2,3}\sigma_{3,4}^2\sigma_{1,4}\eta(\sigma_{2,3}\sigma_{1,4}\eta)^3 \rightarrow^* 1 \\ \sigma_{1,2}^2 \rightarrow 1 \end{cases},$$

8. $12 \cap 16 : w = \sigma_{i,k}\tau_i\eta$ için

$$w \rightarrow \begin{cases} \tau_k\sigma_{i,k}\eta \rightarrow \tau_k\eta\sigma_{i,k} \rightarrow \eta\tau_k\sigma_{i,k} \\ \sigma_{i,k}\eta\tau_i \rightarrow \eta\sigma_{i,k}\tau_i \rightarrow \eta\tau_k\sigma_{i,k} \end{cases},$$

9. $12 \cap 18 : w = \sigma_{2,k}\tau_2(\tau_1\eta)^2$ için

$$w \rightarrow \begin{cases} \tau_k\sigma_{2,k}(\tau_1\eta)^2 \rightarrow \tau_k\tau_1\sigma_{2,k}\eta\tau_1\eta \\ \sigma_{2,k} \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} \sigma_{2,k}\tau_k\tau_1\sigma_{2,k}\eta\tau_1\eta \rightarrow^* \tau_2\tau_1\sigma_{2,k}^2\eta\tau_1\eta \rightarrow^* 1 \\ \sigma_{2,k}^2 \rightarrow 1 \end{cases}.$$

14-21 arasındaki bağıntıların 14-21 arasındaki bağıntılarla kesişmelerinden bazılarını inceleyelim:

$$15 \cap 15 : w = (\sigma_{1,2}\eta)^5,$$
$$15 \cap 19 : w = (\sigma_{1,2}\eta)^2(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4,$$
$$15 \cap 20 : w = (\sigma_{1,2}\eta)^3\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta,$$
$$16 \cap 14 : w = \tau_i\eta^2,$$
$$17 \cap 14 : w = \sigma_{i,k}\eta^2,$$
$$18 \cap 14 : w = \tau_2\tau_1\eta\tau_1\eta^2,$$
$$19 \cap 14 : w = (\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta^2.$$

1. $15 \cap 15 : w = (\sigma_{1,2}\eta)^5 \to \begin{cases} (\sigma_{1,2}\eta)^2 \\ (\sigma_{1,2}\eta)^2 \end{cases},$

2. $15 \cap 19 : w = (\sigma_{1,2}\eta)^2(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4$için

$$w \to \begin{cases} \tau_2\sigma_{1,3}\eta(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3 \\ (\sigma_{1,2}\eta)^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} (\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4 \to 1 \\ (\sigma_{1,2}\eta)^3 \to 1 \end{cases},$$

3. $15 \cap 20 : w = (\sigma_{1,2}\eta)^3\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta \to$ için

$$\begin{aligned} w \ &\to \begin{cases} \tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta \\ (\sigma_{1,2}\eta)^2 \end{cases} \\ &\equiv \begin{cases} \sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta \to 1 \\ (\sigma_{1,2}\eta)^3 \to 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

4. $16 \cap 14 : w = \tau_i\eta^2 \to \begin{cases} \tau_i\eta\tau_i \to \eta^2\tau_i \to \tau_i \\ \tau_i \end{cases},$

5 $17 \cap 14 : w = \sigma_{i,k}\eta^2 \to \begin{cases} \eta\sigma_{i,k}\eta \to \eta^2\sigma_{i,k} \to \sigma_{i,k} \\ \sigma_{i,k} \end{cases},$

6. $18 \cap 14 : w = \tau_2\tau_1\eta\tau_1\eta^2 \to \begin{cases} \eta \\ \tau_2\tau_1\eta\tau_1 \end{cases} \equiv \begin{cases} \eta^2 \to 1 \\ \tau_2(\tau_1\eta)^2 \to 1 \end{cases},$

7. $19 \cap 14 : w = (\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta^2$ için

$$w \to \begin{cases} \eta \\ (\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^3\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3} \end{cases} \equiv \begin{cases} \eta^2 \to 1 \\ (\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4 \to 1 \end{cases}.$$

Rankı $n \geq 4$ olan bir serbest grubun otomorfizma grubunun tam yeniden yazma sistemini elde etmek için yapılan Tietze dönüşümlerini (Alt Bölüm 2.4) aynı şekilde Sonuç 3.7 ve Sonuç 3.8'de verilen $Aut(F_3)$ ve $Aut(F_2)$ nin sunuşlarına da uygulanır ve sırasıyla aşağıdaki sunuşlar elde edilir.

Sonuç 4.11 *$Aut(F_3)$ otomorfizma grubunun sunuşu $\mathcal{P}_3$ için $(1 \leq i, k \leq 3)$ olmak üzere $\{\sigma_{i,k}, \tau_i, \eta\}$ üreteç kümesini oluşturur ve bağıntı kümesi*

1) $\sigma_{i,k}^2 = 1,$	2) $\sigma_{1,2}\sigma_{2,3} = \sigma_{1,3}\sigma_{1,2},$
3) $\sigma_{1,2}\sigma_{2,3} = \sigma_{2,3}\sigma_{1,3},$	4)$\sigma_{1,3}\sigma_{1,2} = \sigma_{2,3}\sigma_{1,3},$
5) $\sigma_{1,2}\sigma_{1,3} = \sigma_{1,3}\sigma_{2,3},$	6)$\sigma_{1,2}\sigma_{1,3} = \sigma_{2,3}\sigma_{1,2},$
7) $\sigma_{1,3}\sigma_{2,3} = \sigma_{2,3}\sigma_{1,2},$	8) $\tau_i^2 = 1,$
9) $\tau_i\tau_k = \tau_k\tau_i \ (i > k),$	10) $\sigma_{i,k}\tau_j = \tau_j\sigma_{i,k} \ (i < k),$
11) $\sigma_{i,k}\tau_i = \tau_k\sigma_{i,k} \ (i < k),$	12) $\sigma_{i,k}\tau_k = \tau_i\sigma_{i,k} \ (i < k),$
13) $\eta^2 = 1,$	14) $(\sigma_{1,2}\eta) = 1,$
15) $\tau_3\eta = \eta\tau_3,$	16) $\tau_2(\tau_1\eta)^2 = (\eta\tau_1)^2\tau_2,$
17) $(\sigma_{1,2}\eta\tau_2\sigma_{1,3}\eta)^4 = 1,$	18) $\sigma_{1,2}\eta\ \tau_2\ \sigma_{1,3}\ \eta\ \sigma_{2,3}\sigma_{1,3}\eta\tau_2\ \sigma_{1,3}\eta\sigma_{2,3}\eta\ \sigma_{1,3}\tau_2\eta = 1,$

elemanlarından oluşur.

Sonuç 4.12 *$Aut(F_2)$ otomorfizma grubunun sunuşu $\mathcal{P}_2$ için $\{\sigma_{1,2}, \tau_1, \tau_2, \eta\}$ üreteç kümesini oluşturur ve bağıntı kümesi*

1)$\sigma_{1,2}^2 = 1,$	2) $\tau_1^2 = 1,$	3)$\tau_2^2 = 1,$	4)$\sigma_{1,2}\tau_1 = \tau_2\sigma_{1,2},$
5)$\sigma_{1,2}\tau_2 = \tau_1\sigma_{1,2},$	6)$\tau_2\tau_1 = \tau_1\tau_2,$	7)$\eta^2 = 1,$	8)$\sigma_{1,2}\eta\sigma_{1,2} = \eta\sigma_{1,2}\eta,$
9)$\tau_2(\tau_1\eta)^2 = (\eta\tau_1)^2\tau_2,$			

elemanlarından oluşur.

Teorem 4.13 *$\mathcal{P}_2$ ve $\mathcal{P}_3$ sunuşları ile verilen $Aut(F_2)$ ve $Aut(F_3)$ grupları sadece bağıntılarından oluşan tam yeniden yazma sistemlerine sahiptir.*

İspat Teorem 4.10'ün ispatına benzerdir.

Teorem 4.10 ve Teorem 4.13 sonucu $\mathcal{P}_n$ $(n \geq 2)$ nin elemanlarının normal formu için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.14 *Her $w \in Aut(F_n)$ $(n \geq 2)$ kelimesi için normal form $N(w)$ ile gösterilsin.*

$$k_{i+1} < k_i \quad \textit{veya} \quad k_{i+1} = k_i \textit{ iken } r_{i+1} < r_i$$

olmak üzere

$$A_j = \eta^{\gamma}\tau_1^{\delta_1}\tau_2^{\delta_2}\cdots\tau_n^{\delta_n}\sigma_{k_1,r_1}^{\epsilon_1}\sigma_{k_2,r_2}^{\epsilon_2}\sigma_{k_3,r_3}^{\epsilon_3}\cdots\sigma_{k_{m_j},r_{m_j}}^{\epsilon_{m_j}} \quad (\delta_i, \epsilon_i = 0, 1)$$

olarak kabul edilsin. Bu durumda W_i $(1 \leq i \leq r)$ alt kelimeleri indirgenmiş olmak üzere normal form

$$N(w) = W_1 A_1 W_2 A_2 W_3 A_3 \cdots W_r A_r$$

olarak tanımlanır.

Böylece Lemma 4.7 ve Sonuç 4.14'ten aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.15 *$\mathcal{P}_n$ sunuşuna sahip olan n $(n \geq 2)$ üreteçli bir serbest grubun otomorfizma grubunun kelime problemi çözülebilirdir.*

Not 4.16 Örnek 2.14*'te sonsuz devirli bir grubun otomorfizma grubunun $\mathbb{Z}_2$ ye izomorf olduğu bahsedilmişti. Bu durumda bir üreteçli serbest grubun otomorfizma grubu $\mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf olduğundan sonlu bir grup olup, kelime problemi çözülebilirdir.*

5. BASS-SERRE TEORİSİ

5.1. Giriş

Bir grubun yapısını anlamak için uygun bir geometrik obje üzerine grup etkisi çalışmak cebirde oldukça önemlidir. Bass-Serre teorisi bu yaklaşımla temellendirildiğinden ve grup teoride önemli bir yeri olan birleştirilmiş serbest çarpım ve HNN-genişlemesi yapılarına evrensel bir noktadan bakmayı sağladığından bu alanda yapılacak olan çalışmalara önemli katkılarda bulunmaktadır.

Bu bölümde asıl amacımız, graflar üzerine etki eden grupların yapısı hakkında bilgi veren Bass-Serre teorisini daha detaylı olarak incelemektir (Serre, 1980; Bogopolski, 2008). Bu bağlamda Bass-Serre teorisinin esas teoremini elde etme (Alt Bölüm 5.7) amacına yönelik temel yapı taşları sırasıyla tanıtılacak ve açıklanacaktır. İlk olarak bu alt bölümde bir grubun sırasıyla küme üzerine ve buna bağlı olarak graf üzerine etkisi tanıtılacaktır. Daha sonra Alt Bölüm 5.2'de ağaçlar ve serbest gruplar arasındaki ilişki incelenecek ayrıca Nielsen-Schreier Teoremi ispat edilecektir. Bunlara ek olarak iki grubun birleştirilmiş serbest çarpım grubunun veya bir grubun HNN-genişlemesinin etki ettiği ağaçların varlığı sırasıyla Alt Bölüm 5.3 ve Alt Bölüm 5.4'de ifade edilecektir. Alt Bölüm 5.5'de grupların grafı ve bunların temel gruplarına (Alt Bölüm 5.6) geçişte ara bir adım olarak kullanılan grafların temel grubu üzerinde durulacaktır.

5.1.1. Kümeler üstünde etki kavramı

Bass-Serre teorisinin ağaçlara etki eden grupların yapısı hakkında bilgiler verdiği yukarıda belirtilmişti. Bir grubun graflara etkisinden bahsedilmeden önce temel olarak bir grubun küme üzerine etkisi açıklanmalıdır. Bu nedenle ilk olarak aşağıda bir grubun küme üzerine etkisinin tanımı ve bazı temel bilgiler verilecektir (Cevik, 2014b).

Tanım 5.1 (Cevik, 2014b) *$M \neq \emptyset$ bir küme ve G bir grup olsun. G grubunun M kümesi üzerine (soldan) etki etmesi için gerek ve yeter şart $G \times M \to M$ şeklinde tanımlanacak olan fonksiyonun aşağıdaki şartları sağlamasıdır:*

(E0) *$\forall g \in G$ ve $\forall m \in M$ için, $g.m$ elemanının bir anlamı (karşılığı) vardır.*

(E1) *$\forall g \in G$ ve $\forall m \in M$ için $g.m \in M$ dir.*

(E2) *$\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall m \in M$ için $(g_1g_2).m = g_1.(g_2.m)$ eşitliği sağlanır.*

(E3) *$\forall m \in M$ için, $1_G.m = m$ dir.*

Not 5.2 *G grubunun M kümesi üzerindeki sağdan etkisi Tanım 5.1'dekine benzer olarak $(m, g) \to (m).g = mg$ kuralı altında tanımlanacak $M \times G \to M$ fonksiyonunun, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall m \in M$ için, $m.g \in G$, $m.(g_1g_2) = (mg_1)g_2$ ve $m.1_G = m$ şartlarını sağlaması olarak verilir.*

Örnek 5.3 (Cevik, 2014b) *Her G grubu kendi üstüne eşlenik olma işlemi ile etki eder. Bunun anlamı, bir G grubunun kendi üstüne eşlenik etkisi, $\forall g, m \in G$ için, $g.m = gmg^{-1}$ olarak tanımlanır.*

(E0, E1) *G bir grup olduğu için $g.m = gmg^{-1} \in G$ dir.*

(E2) *$\forall g_1, g_2, m \in G$ için*

$$(g_1g_2).m = (g_1g_2)m(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2mg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1.(g_2mg_2^{-1}) = g_1.(g_2.m)$$

(E3) *$\forall m \in G$ için, $1_G.m = 1_Gm1_G^{-1} = m$ dir.*

Örnek 5.4 (Cevik, 2014b) *G herhangi bir grup, $H \leq G$ ve M kümesi H nin G içindeki tüm sol kosetlerinin kümesi olsun. G grubunun M kümesi üzerine etkisi, $\forall g, m \in G$ için gmH çarpımı ile tanımlanır.*

G grubu bir M kümesi üzerine etki etsin.

$$u\beta v \iff \exists g \in G \text{ öyle ki } gu = v$$

kuralı ile tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Bir $m \in M$ elemanının $\beta-denklik$ sınıfı G grubunun M kümesi üzerindeki etkisi altında elde edilen m elemanının yörüngelerinin kümesi olarak adlandırılır ve

$$\mathcal{O}(m) = \{g.m; g \in G\}$$

olarak gösterilir. Ayrıca $m \in M$ için

$$stab_G(m) = \{g \in G; g.m = m\} \subseteq G$$

kümesine m elemanının G içindeki sabitleyicisi denir.

Önerme 5.5 (Cevik, 2014a) *Her bir $m \in G$ elemanı için $stab_G(m) \leq G$ elde edilir.*

5.1.2. Bir grubun bir graf üzerine etkisi

Bu bölüm boyunca kullanılacak olan graflar aksi belirtilmedikçe Alt Bölüm 2.8'de tanımlanan yönlü graflar olarak düşünülecektir.

Tanım 5.6 (Bogopolski, 2008) *X bir graf olmak üzere G grubunun X grafına etki etmesi için $\forall g \in G$ ve $e \in X^1$ için aşağıdaki şartların sağlanması gerekmektedir:*
•$g\alpha(e) = \alpha(ge)$,
•$g\bar{e} = \overline{ge}$,
•*G grubu X^0 ve X^1 kümeleri üzerine (soldan) etki eder.*

G grubu X grafı üzerine etki eden bir grup olmak üzere, $\forall e \in X^1$ kenarı ve $g \in G$ elemanı için $ge \neq \bar{e}$ ise G grubu X grafı üzerine *kenarlarda inversiyon olmadan etki ediyor* denir. Ayrıca $\forall v \in X^0$ noktası ve aşikar olmayan $\forall g \in G$ elemanı için $gv \neq v$ ise bu etkiye *serbest* denir.

Bir önceki alt bölümde grupların kümeler üzerine etkisi sonucu elde edilen yörünge kümesi açıklanmıştı. Buna benzer olarak G grubu X grafı üzerine kenarlarda inversiyon olmadan etki eden bir grup olmak üzere $x \in X^0 \cup X^1$ için $\mathcal{O}(x) = \{gx; g \in G\}$ kümesi x in bu etkiye göre yörüngesini ifade eder.

$G \backslash X$ bölüm grafi noktaları $v \in X^0$ için $\mathcal{O}(v)$ ve kenarları $e \in X^1$ için $\mathcal{O}(e)$ olan, ayrıca

- $gv = \alpha(e)$ olacak şekilde $g \in G$ var ise $\mathcal{O}(v)$ noktası $\mathcal{O}(e)$ kenarının başlangıç noktası,
- $\mathcal{O}(e)$ kenarının tersi $\mathcal{O}(\bar{e})$,

şartlarını sağlayan yönlü graftır.

$p : X \to G \setminus X$, $p(x) = \mathcal{O}(x)$ $(x \in X^0 \cup X^1)$ fonksiyonu grafların bir morfizmasıdır (Alt Bölüm 2.8) ve *projeksiyon* olarak adlandırılır. Bölüm grafı $G \setminus X$ in bir y noktası veya kenarı için y nin p fonksiyonuna göre herhangi bir öngörüntüsü y nin *özel öngörüntüsü* olarak adlandırılır.

Not 5.7 *G/X bölüm grafının bir kenarı e olmak üzere $\alpha(e)$ nin özel öngörüntüsü v olsun. Bu durumda başlangıç noktası v olan e nin bir özel öngörüntüsü vardır.*

Önerme 5.8 (Serre, 1980) *G grubu X grafi üzerine kenarlarda inversiyon olmadan etki etsin. $G \setminus X$ grafının T' alt ağacı için $p|_T : T \to T'$ izomorfizma olacak şekilde X içinde bir T alt ağacı vardır.*

İspat T' alt ağacı içine bire bir iz düşümü olan X içindeki tüm alt ağaçların kümesi düşünülsün. Kapsama bağıntısı düşünüldüğünde bu küme kısmi sıralıdır ve elemanlarının artan zinciri bir üst sınıra sahiptir. Zorn'un Lemmasından (Barwise, 1982) bu kümenin bir T en büyük elemanına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $p(T) = T'$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $p(T) \neq T'$ olarak kabul edilsin bu durumda başlangıç noktası $p(T)$ içinde ve bitiş noktası $T' - p(T)$ de olan bir e' kenarı vardır. O halde Not 5.7'den T alt ağacına başka kenarlar eklenir, bu durum T nin en büyük ağaç olması ile çelişir. Böylece $p(T) = T'$ elde edilir.

Önerme 5.8'de ifade edilen T alt ağacı T' alt ağacının X içindeki *özel öngörüntüsü* olarak adlandırılır.

Bunun yanısıra Alt Bölüm 2.8.2'de bir G grubunun S kümesine göre $\Gamma(G, S)$ grafının kenarları (g, t) $(g \in G, t \in S)$ olarak tanımlanmıştı. Bu grafın bir (g, t) kenarının etiketi t olsun. Buna göre G grubu $\Gamma(G, S)$ grafı üzerine $g \in G$ için g' noktasını gg' noktasına, (g', t) kenarını (gg', t) kenarına taşıyacak şekilde etki eder. Bu etki serbest ve kenarlarda inversiyon olmayan bir etkidir.

Örnek 5.9 *$G =< t >$ grubu 4 mertebeli bir devirli grup olmak üzere $Cay(G, \{t\})$ grafi aşağıda soldaki şekilde gibidir. Bu grafa t^i elemanının etkisi sonucu oluşan graf aşağıda sağdaki şekilde gösterilmiştir.*

Bu şekillerden G nin her bir elemanının bu grafa etkisi sonucu grafın yine kendisinin yani grafın herhangi bir otomorfizması altındaki görüntüsünün elde edildiği anlaşılmaktadır. Yani G den $Aut(Cay(G, < t >))$ ye bir homomorfizma elde

Şekil 5.1.

edilmektedir. Bu durumda Baumslag (1993) kaynağında verilen "bir G grubundan bir grafin otomorfizmalarının grubuna bir homomorfizma var ise G bu grafa etki ediyor denir " gerçeği kullanılarak G nin $Cay(G, S)$ grafina etki ettiğini söylenir.

Ayrıca bu sonuç Tanım 5.6'de tanımlanan graflar üzerine grup etkisine göre aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$Cay(G, <t>)$ nin her bir kenarı $e = (g, t)$ $(\alpha(e) = g, w(e) = gt$ ve $\bar{e} = (gt, t^{-1}))$ için

$$t^i.\alpha(e) = t^i g = \alpha(t^i e)$$
$$t^i \bar{e} = (t^i gt, t^{-1}) = \overline{(t^i g, t)} = \overline{t^i e}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca G grubu kendi üzerine $G \times G \to G$, $(g, s) \to gs$ şeklinde etki eder. Bu durumda $Cay(G, <t>)$ grafının noktaları G grubunun elemanları olduğu için G grubu Cayley grafının nokta kümesi üzerine aşikar olarak etki etmektedir. Ayrıca her bir $e = (g, t)$ kenarı için $t^i \in G$ elemanının bu kenara etkisi sonucu elde edilen $t^i.e = t^i.(g, t) = (t^i g, t)$ kenarı yine G nin Cayley grafının kenar kümesinin elemanıdır. O halde G grubu $Cay(G, <t>)$ nin kenar kümesine etki etmektedir. Böylece G grubu $Cay(G, <t>)$ grafina etki ediyor denir.

5.2. Ağaçlar ve Serbest Gruplar

Bu bölümde bir serbest grubun herhangi bir alt grubunun da bir serbest grup olduğunu ifade eden Nielsen-Schreier teoremi ispat edilecektir. Bu ispatta ağaçlar üzerine olan etki kullanılır. Bu teknik yine ağaçlar üzerine etki eden grupların Bass-Serre teorisine öncülük etmiştir. İlk olarak Nielsen-Schreier Teoreminin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki önerme ve teoremi ifade edelim.

Önerme 5.10 (Serre, 1980) *G bir grup ve $S \subseteq G$ olsun. Bu durumda $\Gamma(G, S)$ grafının (Alt Bölüm 2.8.2) ağaç olması için gerek ve yeter şart G nin S ile üretilen bir serbest grup olmasıdır.*

İspat $e = (g,t)$ kenarının etiketini $s(e) = t$ olarak tanımlansın. Bu durumda $w(e) = \alpha(e)s(e)$ ve herhangi $e_1e_2\cdots e_n$ yolu için $w(e_n) = \alpha(e_1)s(e_1)s(e_2)\cdots s(e_n)$ olur.

($\Longleftarrow$) S kümesi ile üretilen bir serbest grup G olsun. Böylece Not 2.22'den $\Gamma(G,S) = Cay(G,S)$ grafı bağlantılıdır. $\Gamma(G,S) = Cay(G,S)$ nin içinde bir $e_1e_2\cdots e_n$ kapalı indirgenmiş yolu var olsun. Bu durumda $w(e_n) = \alpha(e_1)$ olduğundan $s(e_1)s(e_2)\cdots s(e_n) = 1$ elde edilir. S kümesi G nin bir tabanı olduğu için $s(e_i) = s(e_{i+1})^{-1}$ olacak şekilde bir i indeksi var olduğu için $e_i = \bar{e}_{i+1}$ eşitliği elde edilir. Bu durum $e_1e_2\cdots e_n$ in indirgenmiş yol olması ile çelişir. O zaman $\Gamma(G,S) = Cay(G,S)$ bağlantılı ve içinde hiç indirgenmiş kapalı yol bulundurmayan bir graf, diğer bir deyişle ağaçtır.

($\Longrightarrow$) $\Gamma(G,S)$ bir ağaç olsun. Buna göre $\Gamma(G,S)$ bağlantılı olup, Not 2.22 sonucu S bu grubun üreteç kümesidir. Böylece $\Gamma(G,S) = Cay(G,S)$ olduğu elde edilir. G grubunun bağıntıları bu grubun Cayley grafında devir şeklinde olacağı için, G nin üreteç elemanları arasında hiç bağıntı yoktur. Böylece bu grubun bir serbest grup olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç 5.11 (Bogopolski, 2008) *Herhangi bir serbest grup bir ağaç üzerine serbest olarak ve kenarlarda inversiyon olmadan etki eder.*

İspat Üreteç kümesi S olan bir G serbest grubu $Cay(G,S)$ üzerine soldan çarpma ile etki eder. Ayrıca herhangi bir $v \in Cay(G,S)$ noktası için $gv = v$ eşitliği sonucu $g = 1$ elde edildiğinden bu etki serbesttir. Şimdi $\alpha(e) = v_1$, $w(e) = v_2$ olmak üzere $ge = \bar{e}$ eşitliğini sağlayan bir $g \in G$ ve $e \in Cay(G,S)$ var olsun. Bu durumda $gv_1 = v_2$, $gv_2 = v_1$ ve $v_1s(e) = v_2$ olduğundan $gv_1s(e) = v_1$ elde edilir, ancak bu durum G grubunun hiç bağıntı içermemesi ile çelişir. Bu yüzden G bir ağaç üzerine kenarlarda inversiyon olmadan etki eder.

O halde Önerme 5.10'ten $Cay(G,S)$ grafı bir ağaçtır. Böylece bir serbest grup bir ağaç üzerine serbest olarak ve kenarlarda inversiyon olmadan etki eder.

Bu çıkarımın tersi de doğrudur ve aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir.

Teorem 5.12 (Bogopolski, 2008) *G grubu bir X ağacı üzerine serbest şekilde ve kenarlarda inversiyon olmadan etki etsin. Bu durumda G grubu bir serbest grup ve rankı $G \setminus X$ bölüm grafının (yine bu grafin herhangi bir yönlendirmesi için)* *en büyük alt ağacına göre pozitif yönlendirilmiş kenarlarının sayısına eşittir. Özel olarak $G \setminus X$ sonlu ise rankı*

$$rank(G) = |(G \setminus X)^1_+| - |(G \setminus X)^0| + 1$$

formülü ile hesaplanır.

Sonuç 5.13 (Serre, 1980) (Nielsen-Schreier Teoremi) *Bir serbest grubun herhangi bir alt grubu serbesttir.*

İspat G grubu üreteç kümesi S olan bir serbest grup olsun, Sonuç 5.11'den G grubu $Cay(G, S)$ ağacı üzerine serbest olarak ve kenarlarda inversiyon olmadan etki eder. Bu durumda herhangi bir $H \leq G$ alt grubu da bu ağaç üzerine kenarlarda inversiyon olmadan serbestçe etki etmektedir. Böylece Teorem 5.12'den H grubu serbesttir.

Teorem 5.14 (Serre, 1980) (Schreier Formülü) *Sonlu ranklı olan bir serbest grup G ve H grubu G nin n sonlu indeksli alt grubu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$rank(H) - 1 = n(rank(G) - 1).$$

5.3. Ağaçlar ve Birleştirilmiş Serbest Çarpım

Bu bölümde ağaçlar ve birleştirilmiş serbest çarpım arasındaki ilişki açıklanacaktır. Bunun için ilk olarak bazı gösterimler ve tanımlar ifade edilecektir. G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere G/H ile H nin G içindeki tüm sol kosetlerinin kümesini gösterelim.

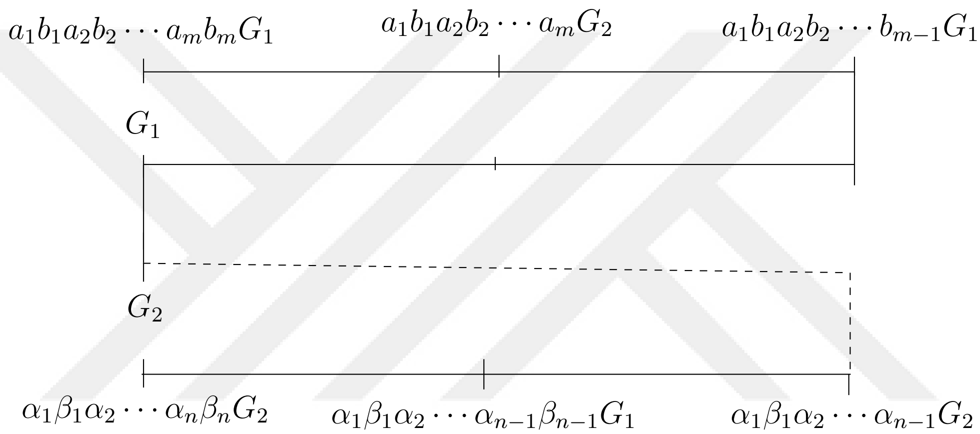
Aşağıdaki teoremde *segment* olarak adlandırılan iki nokta ve ortak ters kenarlardan oluşan bağlantılı bir graf kullanılacaktır. Ayrıca bu teorem ve ispatı için Bogopolski (2008) çalışmasının yanısıra Baumslag (1993)'den faydalanılmıştır.

Teorem 5.15 (Bogopolski, 2008) *$G = G_1 *_A G_2$ olsun. G grubunun kenarlarda inversiyon olmadan etki ettiği ve G/X bölüm grafi bir segment olan X ağacı vardır. Buna ek olarak bu segmentin X grafi içinde bir özel öngörüntüsü, noktalarının sabitleyicileri G_1 ve G_2, kenarının sabitleyicisi A olan bir segmenttir.*

İspat Nokta kümesi $X^0 = G/G_1 \cup G/G_2$ ve kenar kümesi $X^1_+ = G/A$ olan, $\alpha(gA) = gG_1$, $w(gA) = gG_2$ şartlarını sağlayan bir X grafı için $\widetilde{T}$ sembolü noktaları G_1, G_2 ve pozitif yönlü kenarı A olan X grafı içinde bir segment olsun. Bu durumda G grubu X grafı üzerine soldan çarpma ile etki eder.

İlk olarak X grafının bağlantılı olduğunu gösterilecektir. Bunun için herhangi bir $fG_1 \in G/G_1$ ve $gG_2 \in G/G_2$ noktaları arasında bir yolun var olduğunu göstermek yeterlidir. $a_i, \alpha_i \in G_1$ ve $b_i, \beta_i \in G_2$ olmak üzere $f = a_1b_1a_2b_2\cdots a_mb_m$ ve $g = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n$ olsun.

Aşağıda verilen Şekil 4.2 herhangi fG_1 ve gG_2 noktaları arasında bir yolun var olduğunu göstermektedir, bunun sonucu olarak X grafı bağlantılıdır.



Şekil 5.2.

Son olarak X grafının hiç devir içermediği gösterilecektir. O halde X içinde $e_1e_2\cdots e_n$ kapalı yolu var olsun ve G nin içinden alınan x_1 elemanı için $\alpha(e_1) = x_1G_1 = G_1$ olarak kabul edilsin. Bu durumda $e_1e_2\cdots e_n$ yolu kapalı kabul edildiği için $w(e_n) = \alpha(e_1) = G_1$ olmalıdır. Komşu noktalar farklı alt grupların kosetleri olduğu için n çift sayı olmak zorundadır ve buna bağlı olarak $\alpha(e_2) = x_1G_2$, $\alpha(e_3) = x_1y_1G_1, \cdots, \alpha(e_n) = x_1y_1\cdots x_{n/2}y_{n/2}$ olacak şekilde $x_i \in G_1 - A$ ve $y_i \in G_2 - A$ elemanları vardır. Bu durumda $w(e_n) = \alpha(e_1) = G_1$ olduğundan $x_1y_1\cdots x_{n/2}y_{n/2}G_1 = G_1$ ve buna bağlı olarak $x_1y_1\cdots x_{n/2}y_{n/2} \in G_1$ elde edilir. Ancak bu durum birleştirilmiş serbest çarpımın normal formunun tekliği ile çelişmektedir. O halde X grafı içinde hiç devir içermeyen bağlantılı bir graf kısacası bir ağaçtır.

Not 5.16 *gG_1 noktasının derecesi $|G_1 : A|$ ve $stab_G(gG_1) = gG_1g^{-1}$ olarak elde edilir ve gG_2 formundaki noktalar için de benzer durumlar geçerlidir.*

Yukarıda tanımlanan X grafının bölüm grafı başlangıç ve bitiş noktası G_1 ve G_2 olan A kenarından oluşur. Bu kenarın bir özel ön görüntüsü yine başlangıç ve bitiş noktası G_1 ve G_2 olan A kenarıdır. Bu noktaların ve kenarın sabitleyicileri Not 5.16'den $stab_G(G_1) = G_1$, $stab_G(G_2) = G_2$ ve böylece $stab_G(A) = A$ olarak elde edilir.

Teorem 5.17 (Bogopolski, 2008) *G grubu bir X ağacı üzerine G/X bölüm grafı bir segment olacak şekilde kenarlarda inversiyon olmadan etki etsin. Bu segmentin X içinde herhangi bir özel öngörüntüsünü $\widetilde{T}$ ile gösterelim. Bu özel öngörüntünün noktaları P, Q ve kenarı e olmak üzere sırasıyla G_P, G_Q ve G_e bu noktaların ve kenarın sabitleyicileri olsun. Bu durumda $\varphi : G_P *_{G_e} G_Q \to G$ homomorfizması G_P ve G_Q üzerinde birim fonksiyon olan bir izomorfizmadır.*

İspat İlk olarak $G = \langle G_P, G_Q \rangle$ olduğu gösterilecektir. $G' = \langle G_P, G_Q \rangle$ ve $G' < G$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $G'.\widetilde{T}$ ve $(G - G').\widetilde{T}$ ayrıktır. Bu durum daha ayrıntılı olarak şu şekilde açıklanabilir. P ve Q noktaları G grubunun etkisi altında denk olmadığı için $g' \in G'$ ve $g \in G - G'$ olmak üzere $g'P = gQ$ ve $g'Q = gP$ olamaz. $R \in \{P, Q\}$ olmak üzere $g'R = gR$ eşitliği $g \in g'G_R \subseteq G'$ nü işaret ettiği için bu eşitlik de imkansızdır. X bir ağaç bu yüzden iki boştan farklı alt grafların birleşimi olamayacağından bu bir çelişkidir.

φ nin birebir olduğunu elde etmek için ardışık terimler $g_i \in G_P - G_e$ veya $g_{i+1} \in G_Q - G_e$ olmak üzere $g_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_2 g_1 \neq 1 (n \geq 2)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Genelleme bozulmadan $g_1 \in G_P - G_e$ olarak ve özellikle $d(Q, g_1 Q) = 2$ olarak kabul edilsin. Bu yüzden g_1 in P noktası çevresinde bir dönme olarak X ağacı üzerine etki ettiği düşünülsün. Bu dönme P ve Q noktalarından geçen herhangi bir indirgenmiş yolu P ve $g_1 Q$ noktalarından geçen indirgenmiş yola taşır. Benzer olarak g_2 elemanı X ağacı üzerine Q noktasının çevresinde dönme olarak etki etsin. Bunları kullanarak i çift sayısı için $d(Q, g_i \cdots g_2 g_1 Q) = i$ veya i tek sayısı için $d(Q, g_i \cdots g_2 g_1 Q) = i+1$ olduğu ispatlanır. Bu yüzden $g_n g_{n-1} \cdots g_1 \neq 1$ $(n \geq 2)$ dir.

5.4. Ağaçlar ve HNN-genişlemesi

Bu bölümde ağaçlara etki eden grupların HNN-genişlemesi ile bağlantısı üzerinde durulacaktır. Bu ilişki bir nokta ve birbirlerinin tersi olan iki kenardan oluşan ve döngü olarak adlandırılan graf aracılığı ile gösterilmektedir.

Teorem 5.18 (Bogopolski, 2008) *Bir $\varphi : A \to B$ izomorfizması aracılığı ile A ve B grupları H grubunun birbirine izomorf alt grupları olmak üzere*

$$G = \langle H, t | t^{-1}at = \varphi(a), a \in A \rangle$$

grubu H nin bir HNN-genişlemesi olsun. Bu durumda G/X bölüm grafi bir döngü olacak şekilde G grubunun kenarlarda inversiyon olmadan etki ettiği bir X ağacı vardır. Dahası noktalarının ve kenarlarının G grubundaki sabitleyicileri sırasıyla H ve tHt^{-1} olan X grafi içinde bir $\widetilde{Y}$ segmenti vardır.

İspat $X^0 = G/H$, $X^1_+ = G/A$, $\alpha(gA) = gH$, $w(gA) = gtH$ olacak şekilde bir X grafı düşünülsün. Noktaları H, tH ve pozitif yönlü kenarı A olan X içinde bir segment $\widetilde{Y}$ olsun. G grubu bu şekilde tanımlanan X grafı üzerine soldan çarpma ile etki eder. İspatı Teorem 5.15'ün ispatı ile benzerdir.

Teorem 5.19 (Bogopolski, 2008) *G grubu bir X ağacı üzerine $Y = G/X$ bölüm grafi döngü olacak şekilde kenarlarda inversiyon olmadan etki etsin. X içinde herhangi bir segment $\widetilde{Y}$ için bu segmentin noktaları P, Q ve kenarları $e, \bar{e}$ olsun. Ayrıca G_P, G_Q ve $G_e = G_{\bar{e}}$ sırasıyla bu noktaların ve kenarların G grubu içindeki sabitleyicilerini göstersin. Buna ek olarak $Q = xP$ olacak şekilde herhangi bir $x \in G$ var olsun (böylece $orb_G(P) = orb_G(Q)$ olur). Ayrıca $G_{e'} = x^{-1}G_e x$ olmak üzere $\varphi : G_e \to G_{e'}$, $g \to x^{-1}gx$ kurallı bir izomorfizma olsun. Bu durumda $G_{e'} \leq G_P$ için,*

$$\langle G_P, t | t^{-1}at = \phi(a), a \in G_e \rangle \to G,$$

dönüşümü G_P üzerinde birim fonksiyon olan ve t yi x e taşıyan bir izomorfizmadır.

İspat İspatı Teorem 5.17'ün ispatı ile benzerdir.

5.5. Bir Grafın Temel Grubu

X bağlantılı bir graf ve taban noktası x olsun. Bu graf üzerinde x noktasında başlayan ve biten tüm yolların kümesi $P(X,x)$ ile gösterilsin. Bu durumda bu kümenin herhangi iki elemanı $p = e_1e_2\cdots e_k$ ve $q = e_1'e_2'\cdots e_n'$ yollarının çarpımları $pq = e_1e_2\cdots e_ke_1'e_2'\cdots e_n'$ yine $P(X,x)$ kümesinin içindedir. Bu çarpma işlemi altında $P(X,x)$ kümesi x dejenere yolu birim eleman olarak kabul edilen bir monoid tanımlar. Bununla birlikte bir X grafı en az bir kenar içeriyorsa $P(X,x)$ kümesi bu çarpma altında bir grup değildir. Ama bu durum $e_1\cdots e_ie\bar{e}e_{i+1}\cdots e_m$ ve $e_1\cdots e_ie_{i+1}\cdots e_m$ yolları eşit alınarak geliştirilebilir. Bu küme üzerinde bu yolların denk kabul edilmesini sağlayacak bir bağıntı şu şekilde tanımlanabilir. $p_1, p_2 \in P(X,x)$ için $p_1 \equiv p_2$ olması için gerek ve yeter şart p_2 yolunun p_1 yolundan $e\bar{e}$ $(e \in X)$ alt yollarının silinmesi veya eklenmesi ile elde edilebilir olmasıdır. Özel olarak iki yol birbirine denk ise bunlara *homotopik* denir. Ayrıca bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntı sonucu oluşan denklik sınıflarına *homotopi sınıfı* denir ve $[p]$ ile gösterilir. Bu yüzden $P(X,x)$ kümesi denklik (homotopi) sınıflarına ayrılır. Şimdi $[p]$ ve $[q]$ denklik sınıfları arasında $[p].[q] = [pq]$ çarpımını tanımlayalım. Bu çarpım iyi tanımlıdır ve her bir denklik sınıfının içinde tek bir indirgenmiş yol vardır. $P(X,x)$ in denklik sınıflarının kümesi bu çarpım altında bir grup olup, bu gruba X grafının x noktasına göre *esas grubu* denir ve $\pi_1(X,x)$ ile gösterilir.

Not 5.20 *1. Yukarıdakilere benzer olarak X grafı içinde herhangi kapalı olması zorunlu olmayan bir p yolu için de homotopi sınıfı $[p]$ tanımlanabilir. Ayrıca daha önce X grafı üzerindeki p, q yolları için p nin bitiş noktası q nun başlan-gıç noktası ile aynı olması durumunda p, q yolları üzerinde bir çarpım tanımla-mıştık, bunu kullanarak $[p]$ ve $[q]$ denklik sınıfları arasında da $[p][q] = [pq]$ çarpımı tanımlanabilir. Böyle bir kısmi çarpım altında X grafının tüm yollarının denklik sınıflarının kümesi bu çarpım altında bir grupoid tanımlar. Bu grupoide X grafının temel grupoidi denir.*

2. *x_1 noktası X in bir diğer noktası olsun. Bu durumda $\pi_1(X,x)$ den $\pi_1(X,x_1)$ grubuna bir izomorfizma vardır ve bu izomorfizma q yolu x den x_1 e sabit bir yol olmak üzere $[p] \to [qpq^{-1}]$ olarak tanımlanır.*

Aşağıdaki teorem bağlantılı bir X grafının temel grubunun bir serbest grup olduğunu gösterecektir. Bunun için ilk olarak X in içinde bir T en büyük ağacını seçelim. Böylece herhangi bir $v \in X^0$ noktası için T ağacı üzerinde x noktasından v noktasına tek bir indirgenmiş yol vardır. Bu indirgenmiş yol p_v ile gösterilmek üzere her bir $e \in X^1$ kenarı için , $p_e = p_{\alpha_e} e p_{w(e)}^{-1}$ yolu tanımlansın. Buna göre $[p_{\bar{e}}] = [p_e]^{-1}$ olduğu aşikar olarak elde edilir.

Teorem 5.21 *X bir bağlantılı graf, T bu grafin en büyük ağacı ve $x \in X^0$ olsun. Bu durumda X_+^1 kümesi X in bir yönlendirmesi olmak üzere $\pi_1(X, x)$ temel grubu üreteç kümesi $S = \{[p_e] | e \in X_+^1 - T^1\}$ olan bir serbest gruptur.*

İspat F üreteç kümesi $\{x_e; e \in X_+^1 - T^1\}$ olan bir serbest grup olsun. Bu durumda $\Phi : F \to \pi_1(X, x)$, $\Phi([x_e]) = p_e$ izomorfizmasının varlığını göstermek yeterli olacaktır. Teorem2.1'den Φ nin homomorfizma olduğu söylenir. Bu homomorfizmanın izomorfizma olduğunu göstermek için tersini bulmak yeterlidir, yani $\Psi \circ \Phi = id_F$, $\Phi \circ \Psi = id_{\pi_1(X,x)}$ olacak şekilde $\Psi : \pi_1(X, x) \to F$ homomorfizması bulunmalıdır. Bunun için

$$\psi : X \to F, \ e \to 1(e \in T), \ e \to [x_e] \ (e \in X_+^1 - T), \ \bar{e} \to [x_e]^{-1} \ (\bar{e} \in X_+^1 - T)$$

olsun. Bu etiketlemeyi kullanarak herhangi bir p yolu için p deki her e kenarının yerine $\psi(e)$ nin yazılması sonucu $\psi(p)$ elde edilsin. Böylece

$$\Psi : \pi_1(X, x) \to F, \ \Psi[p] = \psi(p)$$

dönüşümünün homomorfizma olduğu Teorem2.1'den elde edilir.

$$\Phi \circ \Psi(p_e) = \Phi(\psi(p_{\alpha_e} e p_{w(e)}^{-1})) = \Phi(1[x_e]1) = p_e$$

$$\Psi \circ \Phi[x_e] = \Psi(p_e) = \psi(p_{\alpha_e} e p_{w(e)}^{-1}) = 1[x_e]1 = [x_e]$$

olması sonucu $\Psi \circ \Phi = id_F$ ve $\Phi \circ \Psi = id_{\pi_1(X,x)}$ elde edilir bu durum Φ nin bir izomorfizma olduğunu göstermektedir.

5.6. Grupların Grafı ve Bunların Temel Grupları

Bu bölümde birleştirilmiş serbest çarpım ve HNN-genişlemesinin genellemesi olan grupların grafının temel grubu tanımlanacaktır.

Tanım 5.22 (Bogopolski, 2008) *Y bağlantılı bir graf olmak üzere $(\mathcal{G}, Y)$ grupların grafi, noktaları $\forall v \in Y^0$ için G_v nokta grupları, kenarları $\forall e \in Y^1$ için G_e kenar grupları olan ve $\forall e \in Y^1$ için $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)}$ monomorfizmasına ayrıca $G_e = G_{\bar{e}}$ eşitliğine sahip olan grafa grupların grafi denir.*

Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere $\alpha_{\bar{e}} : G_{\bar{e}} \to G_{\alpha(\bar{e})}$ monomorfizması da grupların grafının bir ögesidir. Ayrıca $\alpha_{\bar{e}} = w_e$ olduğu aşikar olan bu monomorfizma $w_e : G_e \to G_{w(e)}$ olarak kullanılabilir.

Aşağıda $(\mathcal{G}, Y)$ grupların grafının temel grubu, ilk önce bir noktaya göre sonra da en büyük alt ağaca göre tanımlanacak ve bu grupların birbirine izomorf olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle yeni bir notasyon tanıtalım. $F(\mathcal{G}, Y)$ notasyonu tüm G_v nokta grupları ile $\{t_e | e \in Y^1\}$ tabanlı bir serbest grubun serbest çarpımının $\{t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e(w(e))^{-1}, t_e t_{\bar{e}}\ (e \in Y^1, g \in G_e)\}$ kümesinin normal kapanışı ile olan bölüm grubunu ifade etsin.

Tanım 5.23 (Bogopolski, 2008) *$(\mathcal{G}, Y)$ grupların bir grafi ve Y grafının bir noktası P olsun. $(\mathcal{G}, Y)$ grupların grafının P noktasına göre $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P)$ temel grubu $F(\mathcal{G}, Y)$ nin bir alt grubudur. Başlangıç noktası P olan $e_1 e_2 \cdots e_n$ yolu Y de kapalı bir yol ve $g_0 \in G_P$, $g_i \in G_{w(e_i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P)$ temel grubu tanımı itibariyle $F(\mathcal{G}, Y)$ grubunun $g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} \cdots t_{e_n} g_n$ formundaki elemanlarından oluşur.*

Grupların grafının temel grubunun en büyük alt ağaca göre tanımı aşağıda verilecektir.

Tanım 5.24 (Bogopolski, 2008) *$(\mathcal{G}, Y)$ grupların bir grafi olsun ve Y grafının en büyük alt ağacı T olsun. $(\mathcal{G}, Y)$ grupların grafının T ağacına göre $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ temel grubu $F(\mathcal{G}, Y)$ grubunun $\{t_e\ (e \in T^1)\}$ kümesinin normal kapanışı ile bölüm grubudur.*

Teorem 5.25 (Bogopolski, 2008) *$(\mathcal{G}, Y)$ grupların bir grafi, Y grafının bir noktası P ve en büyük alt ağacı T olsun. $p : F(\mathcal{G}, Y) \to \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ kanonikal homomorfizmasının $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P)$ alt grubu ile kısıtlanışı $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ üzerine bir izomorfizmadır.*

İspat P noktasından farklı herhangi bir $v \in Y$ noktası için T ağacı üzerinde P den v ye tek bir indirgenmiş $e_1 e_2 \cdots e_k$ yolu vardır. $F(\mathcal{G}, Y)$ grubunun bu yola karşılık gelen $t_{e_1}t_{e_2}\cdots t_{e_k}$ elemanı γ_v ile gösterilsin ve $\gamma_P = 1$ olsun. Şimdi $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ grubunun üreteç kümesinden $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P)$ grubuna $g \to \gamma_v g \gamma_v^{-1}$ $(g \in G_v, v \in Y^0)$ ve $t_e \to \gamma_{\alpha(e)} t_e \gamma_{w(e)}^{-1}$ $(e \in Y^1)$ kuralları altında bir q' fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda bu q' fonksiyonunun $q : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \to \pi_1(\mathcal{G}, Y, P)$ homomorfizmasına genişleyebileceğini göstermek ve $q \circ p$ ve $p \circ q$ homomorfizmalarının birim olduğunu göstermek yeterlidir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.26 (Bogopolski, 2008) *Herhangi bir P noktasına ve herhangi bir T ağacına göre $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P)$ ve $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ temel grupları izomorftur.*

5.7. Bass-Serre Teorisinin Esas Teoremi

Bu bölümde graflara etki eden grupların yapısının HNN-genişlemesi ve birleştirilmiş serbest çarpımın genellemesi olduğu gösterilecektir.

$p : X \to Y$ fonksiyonu X ağacından Y bağlantılı grafına bir morfizma ve T ağacı Y grafının en büyük alt ağacı olsun.

- $\widetilde{T} \subseteq \widetilde{Y}$,
- $\widetilde{Y}^1 - \widetilde{T}^1$ kümesindeki her bir kenarın başlangıç ve bitiş noktası $\widetilde{T}$ da,
- p fonksiyonu $\widetilde{T}$ yı T üzerine ayrıca $\widetilde{Y}^1 - \widetilde{T}^1$ kümesini $Y^1 - T^1$ üzerine izomorf olacak şekilde taşıyor,

  ise X ağacının $(\widetilde{T}, \widetilde{Y})$ alt ağaç çiftine (T, Y) *grafların çiftinin özel öngörüntüsü* denir.

Herhangi bir $v \in Y^0 (= T^0)$ noktası için, $\widetilde{v}$ bu noktanın $\widetilde{T}^0$ daki öngörüntüsü ve herhangi bir $e \in Y^1$ kenarı için $\widetilde{e}$ bu kenarın $\widetilde{Y}^1$ deki öngörüntüsü olsun.

Teorem 5.27 (Bogopolski, 2008) *$(\mathcal{G}, Y)$ grafların grubunun T en büyük alt ağacına göre temel grubu $G = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ olsun. O halde $G/X \cong Y$ ve X ağacının noktalarının ve kenarlarının sabitleyicileri sırasıyla G_v $(v \in Y^0)$ ve $\alpha_e(G_e)$ $(e \in Y^1)$ gruplarının G içindeki kanonikal görüntülerine eşlenik olacak şekilde G grubu bir X ağacı üzerine kenarlarda inversiyon olmadan etki eder.*

Dahası bu etkiye karşılık gelen $p : X \to Y$ projeksiyonu için

1) Herhangi $\widetilde{v} \in \widetilde{T}^0$ noktasının (başlangıç noktası $\widetilde{T}^0$ de olan herhangi $\widetilde{e} \in \widetilde{Y}^1$ kenarının) sabitleyicisi G_v ye $(\alpha_e(G_e))$ eşit olacak şekilde,

2) Eğer $\widetilde{e} \in \widetilde{Y}^1$ kenarının bitiş noktası $\widetilde{T}^0$ da değilse, t_e^{-1} bu noktayı $\widetilde{T}^0$ içine taşıyacak şekilde,

(T, Y) çiftinin bir $(\widetilde{T}, \widetilde{Y})$ özel öngörüntüsü vardır.

İspat Bu teoremin ispatı Teorem 5.15 ve Teorem 5.18'in ispatlarına benzerdir. Bu yüzden sadece X, $\widetilde{T}$ ve $\widetilde{Y}$ grafları ve G nin X üzerine etkisi tanımlanacaktır. Herhangi bir $v \in Y^0$ noktası için G_v grubunun G grubundaki kanonikal görüntüsüne ve $e \in Y_+^1$ kenarı için G_e gruplarının $\alpha_e(G_e)$ alt grubunun kanonikal görüntülerine eşit olduğu kabul edilsin.

X grafının nokta kümesi $X^0 = \cup_{v \in Y^0} G/G_v$ ve pozitif yönlü kenarlarının kümesi $X_+^1 = \cup_{e \in Y_+^1} G/G_e$ olarak tanımlansın (burada tüm birleşimler ayrık ve tüm kosetler sol kosettir). Ayrıca $\alpha(gG_e) = gG_{\alpha(e)}$, $w(gG_e) = gt_eG_{w(e)}$, $(g \in G)$, $(e \in Y_+^1)$ olsun. Böylece G grubu X grafı üzerine soldan çarpma ile etki eder.

Yukarıda tanımlanan X grafının gG_v noktasının derecesi ise

$$\sum_{e \in star(v) \subseteq Y^0} |G_v : \alpha_e(G_e)|$$

eşitliği yardımıyla bulunur.

T ağacının özel öngörüntüsü $\widetilde{T}$ için nokta kümesi $\widetilde{T}^0 = \cup_{v \in T^0} G_v$ ve pozitif yönlü kenarlarının kümesi $\widetilde{T}_+^1 = \cup_{e \in T_+^1} G_e$ dir.

$\widetilde{Y}$ grafı $\widetilde{T}$ nın noktalarına ve kenarlarına ek olarak $t_eG_{w(e)}$ noktalarından, G_e $(e \in Y_+^1 - T_+^1)$ kenarlarından ve bunların terslerinden oluşur.

Tanım 5.28 (Bogopolski, 2008) *Bir G grubu bir X ağacı üzerine kenarlarda inversiyon olmadan etki etsin. $Y = G/X$ bölüm grafı, $p : X \to Y$ kanonikal projeksiyon, Y nin en büyük alt ağacı T ve (T, Y) çiftinin özel öngörüntüsü $(\widetilde{T}, \widetilde{Y})$ olsun.*

Şimdi $(\mathcal{G}, Y)$ grupların grafı aşağıdaki gibi tanımlansın. Y grafının her bir noktası veya kenarı için G_y grubu y ye karşılık gelen $\widetilde{y}$ özel öngörüntüsünün $stab_G(\widetilde{y})$ sabitleyicisine eşitlensin. $w(\widetilde{e}) \notin \widetilde{T}^0$ olan her bir $e \in Y^1 - T^1$ için $w(\widetilde{e}) = t_e\widetilde{w(e)}$ olacak şekilde rastgele $t_e \in G$ elemanı seçilsin ve $t_{\bar{e}} = t_e^{-1}$ olsun.

Her bir $e \in Y^1$ için $w_e : G_e \to G_{w(e)}$ gömme fonksiyonu aşağıdaki şekilde *tanımlanır:*

$$w_e(g) = \begin{cases} g; w(\widetilde{e}) \in \widetilde{T}^0 ise \\ t_e^{-1} g t_e; w(\widetilde{e}) \in \widetilde{Y}^0 - \widetilde{T}^0 \end{cases}$$

Teorem 5.29 (Bogopolski, 2008) (Bass-Serre Teorisinin Esas Teoremi) G *grubu bir* X *ağacına kenarlarda inversiyon olmadan etki etsin. Bu durumda Tanım 5.28'de ifade edildiği gibi* G *grubundan grupların grafi* $(\mathcal{G}, Y)$ *nin temel grubu* $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ *üzerine bir kanonikal izomorfizma vardır. Bu izomorfizma* $stab_G(\widetilde{v}) \to G_v$ $(v \in Y^0)$ *birim izomorfizmasının bir genişlemesidir ve* $e \in Y^1 - T^1$ *için* t_e *yi* t_e *ye taşır.*

İspat Teorem 5.17 ve Teorem 5.19'nın ispatına benzerdir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tez altı bölümde toplanmış olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölüm tezin içeriği ve elde edilen sonuçların kısaca anlatıldığı literatür özeti niteliğindedir.

Tezin ikinci bölümünde serbest grupların tanımı ve yapısı, bu grupların diğer gruplar ile olan ilişkisi ve buna bağlı olarak grup sunuşları tanıtılmıştır. Ayrıca tezin ana konusu olan kelime problemi ve diğer bölümlerde araç olarak kullanılan temel tanım ve teoremler açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde bir serbest grubun otomorfizma grubunun üreteç sistemi-nin Nielsen metodu kullanılarak elde edildiği ifade edilmiş, bu gruplar için iki tür sunuş tanıtılmıştır. Ayrıca $Aut(F_2)$ grubu için kelime probleminin çözülebilirliği dördüncü bölümde kullanılan yöntemden farklı bir şekilde gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde $Aut(F_n)$ grubunun kelime probleminin çözülebilir olduğu yeniden yazma sistemi metodu aracılığıyla bizim tarafımızdan gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise grup teori için önemli bir yere sahip olan Bass-Serre teorisi gerekli temel bilgiler ışığında açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

Ahmady, A., Bell, J. P., ve Mohar, B. (2014). Integral cayley graphs and groups. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 28(2):685–701.

Arezoomand, M. ve Taeri, B. (2015). A classification of finite groups with integral bi-cayley graphs. *Transactions on Combinatorics*, 4(4):55–61.

Armstrong, H., Forrest, B., ve Vogtmann, K. (2008). A presentation for aut (fn). *Journal of Group Theory*, 11(2):267–276.

Ates, F. ve Cevik, A. S. (2008). Separability and efficiency under standard wreath product in terms of cayley graphs. *JOURNAL OF MATHEMATICS*, 38(3).

Barwise, J. (1982). *Handbook of mathematical logic*, volume 90. Elsevier.

Baumslag, G. (1993). *Topics in combinatorial group theory*. Birkhäuser.

Baumslag, G. ve Charles III, F. (1994). *Algorithms and classification in combinatorial group theory*, volume 23. Springer Science & Business Media.

Bogopolski, O. V. (2008). *Introduction to group theory*. European Mathematical Society.

Bokut, L. A. ve Chen, Y. (2014). Gröbner–shirshov bases and their calculation. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 4(3):325–395.

Book, R. V. ve Otto, F. (1993). *String-rewriting systems*. Springer.

Bridson, M. R. ve Vogtmann, K. (2003). Homomorphisms from automorphism groups of free groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 35(06):785–792.

Cevik, A. S. (2014a). *Cebire giris*. Nobel yayınları.

Cevik, A. S. (2014b). *Soyut cebir-özel konular*. Nobel Yayınları.

Chen, Y. ve Qiu, J. (2008). Gröbner–shirshov basis for the chinese monoid. *Journal of Algebra and its Applications*, 7(05):623–628.

Cohen, D. E. (1989). *Combinatorial group theory: a topological approach*, volume 14. Cambridge University Press.

Dehn, M. (1911). Über unendliche diskontinuierliche gruppen. *Mathematische Annalen*, 71(1):116–144.

Dokovic, D. (1983). The structure of the automorphism group of a free group on two generators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88(2):218–220.

Federer, H. ve Jónsson, B. (1950). Some properties of free groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(1):1–27.

Johnson, D. L. (1997). *Presentations of groups*. Number 15. Cambridge university press.

Karpuz, E. ve Cevik, A. S. (2012a). Gröbner-shirshov bases for extended modular, extended hecke, and picard groups. *Mathematical Notes*, 92(5-6):636–642.

Karpuz, E. G. (2010). Complete rewriting system for the chinese monoid. *Appl. Math. Sci*, 4:1081–1087.

Karpuz, E. G., Ateş, F., Cevik, A. S., ve others (2015). Gröbner-shirshov bases of some weyl groups. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 45(4):1165–1175.

Karpuz, E. G. ve Cevik, A. S. (2012b). On the solvability of word problem by adian graphs.

Kocapinar, C., Karpuz, E. G., Ateş, F., ve Cevik, A. S. (2012). Gröbner-shirshov bases of the generalized bruck-reilly-extension. In *Algebra Colloquium*, volume 19, s. 813–820. World Scientific.

Levitt, G. (2009). Counting growth types of automorphisms of free groups. *Geo-*

metric and Functional Analysis, 19(4):1119–1146.

Lyndon, R. C. ve Schupp, P. E. (2001). *Combinatorial group theory*. Springer.

Magnus, W., Karrass, A., ve Solitar, D. (2004). *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Courier Corporation.

McCool, J. (1974). A presentation for the automorphism group of a free group of finite rank. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):259–266.

McCool, J. (1975a). On nielsen's presentation of the automorphism group of a free group. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3):265–270.

McCool, J. (1975b). Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group. *Journal of Algebra*, 35(1):205–213.

Neumann, B. (1933). Die automorphismengruppe der freien gruppen. *Mathematische Annalen*, 107(1):367–386.

Nielsen, J. (1917). Die isomorphismen der allgemeinen, unendlichen gruppe mit zwei erzeugenden. *Mathematische Annalen*, 78(1):385–397.

Nielsen, J. (1918). Über die isomorphismen unendlicher gruppen ohne relation. *Mathematische Annalen*, 79(3):269–272.

Nielsen, J. (1921). Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien. *Matematisk tidsskrift. B*, s. 77–94.

Nielsen, J. (1924). *Die Gruppe der dreidimensionalen Gitter-transformationen*, volume 5. AF Høst.

Novikov, P. S. (1955). On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. VA Steklova*, 44:3–143.

Rotman, J. (1995). *An introduction to the theory of groups*, volume 148. Springer Science & Business Media.

Schleimer, S. (2006). Polynomial-time word problems. *arXiv preprint math/0608563*.

Serre, J. (1980). Trees springer-verlag. *New York/Berlin*.

Stouff, X. (1888). Sur la transformation des fonctions fuchsiennes. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 5, s. 219–326. Société mathématique de France.

Vogtmann, K. (2002). Automorphisms of free groups and outer space. *Geometriae Dedicata*, 94(1):1–31.

Yunus, G., Gao, Z., ve Obul, A. (2015). Gröbner-shirshov basis of quantum groups. In *Algebra Colloquium*, volume 22, s. 495–516. World Scientific.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

AdıSoyadı: Esma KANGAL
Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Yeri ve Tarihi :Yenimahalle 14.06.1990
Telefon :05321571512
Faks :
e-mail :esmakangal@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	Özel Samanyolu Fen Lisesi Keçiören/ANKARA	2007
Lisans	Fatih Üniversitesi Büyükçekmece/İSTANBUL	2012
Yüksek Lisans	Selçuk Üniveritesi Selçuklu/KONYA	2016

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-	Selçuk Üniversitesi	ArŞ. Gör.

UZMANLIK ALANI

Matematik, Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER

YDS :90

BELİRTMEK İSTEDİĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

Fatih Üniversitesi Matematik (İngilizce) Bölümü 3.95 mezuniyet ağırlıklı not ortalaması ile bölüm birinciliği

YAYINLAR

How Effects Efficiency on the Word Problem for Monoids? (Kabul edildi)

Yapılan Bildiriler

1) "International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal" Bursa, 23-26 Haziran 2014, katılımcı.

2) "2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2015)" İstanbul, 3-6 Haziran 2015, "The Word Problem On Special Cases" başlıklı sunumla konuşmacı.

3) "AAA Arbeitstagung Allgemeine Algebra 91" Brno, Czech Republic, 5-7 Şubat 2016, " The Word Problem for Aut(Fn)" başlıklı sunumla konuşmacı.

4) "Ischia Group Theory 2016" Ischia, Italy, 29 Mayıs- 2 Nisan 2016, "Rewriting System of the Automorphism Group of a Free Group " başlıklı poster sunumu.

5)"4th Cemal Koc Algebra Days" Ankara, Turkey, 22-23 Nisan 2016, "Gröbner Shirshov Basis of Aut(Fn)" başlıklı poster sunumu.