T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMLARI

Yunus YUMAK

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2018
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Yunus YUMAK tarafından hazırlanan "Soft İdeal Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Ayrışımları" adlı tez çalışması 28/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Dr. Öğr. Üyesi Yusuf BECEREN	....
Danışman Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI	....
Üye Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN	....
Üye Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ali Haydar KOCAMAN	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

Bu tez çalışması Selçuk Üniversitesi ÖYP Kurum Koordinatörlüğü tarafından 2015-ÖYP-126 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Yunus YUMAK

28.12.2018

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SOFT İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMLARI

Yunus YUMAK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

2018, 56 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Yusuf BECEREN
Dr. Öğr. Üyesi Ali Haydar KOCAMAN

Bu çalışmamızın ilk bölümde araştırmacılar tarafından daha önce verilmiş olan soft kümelerle ilgili temel kavramları ve bunların özelliklerini verdik. İkinci bölümde ise, bazı yeni zayıf soft küme kavramalarını verdik ve bunların mevcut diğer soft küme çeşitleriyle olan ilişkilerini inceledik. Ayrıca soft düzenli- $\tilde{I}$ -kapalı kümeler yardımıyla soft sürekliliğin bir ayrışımını elde ettik. Takip eden bölümde ise, soft $f_{\tilde{I}}$ -küme olarak isimlendirdiğimiz yeni bir soft küme çeşidini tanıttık ve bunun özelliklerini inceledik. Ek olarak ta yeni soft süreklilik çeşitleri verdik ve bunlar arasındaki ilişkileri bir tablo yardımıyla ifade ettik. Ayrıca soft Hayashi-Samuels uzay tanımını yaptık ve daha önce elde edilen özellikleri bu uzay üzerinde ayrıntılı bir şekilde çalıştık. Çalışmamızın son bölümünde ise soft $\tilde{I}$ -son dereceli bağlantısız uzay olarak adlandırdığımız yeni bir soft uzay çeşidi tanımladık ve bunu kullanarak mevcut soft kümeler arasındaki ilişkileri yeniden gözden geçirip bazı eşdeğerlikler elde ettik. Tüm elde edilen bu özellikleri soft süreklilik çeşitleri üzerinde de kullanarak çalışmamızı tamamladık.

Anahtar Kelimeler: Soft düzenli- $\tilde{I}$ -kapalı küme, Soft $f_{\tilde{I}}$ -küme, Soft Hayashi-Samuels uzay, Soft $\tilde{I}$ -son dereceli bağlantısız uzay.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

DECOMPOSITIONS OF CONTINUITY IN SOFT IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

Yunus YUMAK

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

2018, 56 Pages

Jury
Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Asst. Prof. Dr. Yusuf BECEREN
Asst. Prof. Dr. Ali Haydar KOCAMAN

In the first part of this study we have given the basic concepts about soft sets and their properties given earlier by the researchers. In the second part, we gave notions of some new weak soft set and examined their relation to other existing soft sets. We also obtained a separation of soft continuity by using soft regular $\tilde{I}$ -closed sets. In the following section, we introduce a new kind of soft set called soft $f_{\tilde{I}}$ -set, and we examine its properties. In addition, we have given new types of soft continuity, and we have expressed the relationships between them by the aid of a table. We have also made definition of soft Hayashi-Samuels space and we have worked the previously obtained properties on the space in detail. In the last part of our work, we have defined a new soft space type called soft $\tilde{I}$ -exremally disconnected space, and using this, we have re-examined the relations between the existing soft sets and obtained some equivalents. We have completed our work using all these acquired properties on soft continuity types.

Anahtar Kelimeler: Soft regular $\tilde{I}$ -closed set, Soft $f_{\tilde{I}}$ -set, Soft Hayashi-Samuels space, soft $\tilde{I}$ -exremally disconnected space.

ÖN SÖZ

"Soft İdeal Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Ayrışımları" isimli bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI yönetiminde, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak hazırlanmıştır.

Yapılan tüm çalışmalarda, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI'ya saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca hayatımın her devresinde emeklerini benden esirgemeyen aile büyüklerime ve çalışmalarım esnasında göstermiş oldukları sabırdan dolayı da, çocuklarıma ve özellikle eşim Neslihan YUMAK'a sevgilerimi sunarım.

Yüksek Lisans ve doktora öğrenimim boyunca; gerek sarf malzeme, gerekse seyahat harcamaları konusunda resmi süreçleri titizlikle takip eden ve her türlü maddi desteği sağlayan Selçuk Üniversitesi ÖYP Kurum Koordinatörlüğü personeline teşekkür ederim.

Yunus YUMAK
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
X	: Evren küme
$P(X)$	: Güç kümesi
$\subseteq$	: Alt küme
$\supseteq$	: Kapsama
ϕ	: Boş küme
$\tilde{\subseteq}$	: Soft alt küme
$\tilde{\not\subseteq}$	: Soft alt küme değil
Φ	: Boş soft küme
$\tilde{X}$	: Tam soft küme
τ	: Soft topoloji
(X,τ,E)	: Soft topolojik uzay
$SK(X)_E$	: X 'deki tüm soft kümelerin ailesi
$(F,E)^{\circ}$	: (F,E) 'nin soft içi
$(F,E)^{-}$	: (F,E) 'nin soft kapanışı
$N_{\tau}(x_e)$	: x_e 'nin soft komşuluklar ailesi
$\tilde{I}$	: Soft ideal
$(X,\tau,\tilde{I},E)$	: Soft ideal topolojik uzay
$-*$	: Soft yıldız kapanış operatörü

Kısaltmalar

$S\alpha A(X)$	: X 'deki tüm soft α -açık kümelerin ailesi
$SöA(X)$	: X 'deki tüm soft ön-açık kümelerin ailesi
$SdK(X)$	: X 'deki tüm soft düzenli kapalı kümelerin ailesi
$SyA(X)$	: X 'deki tüm soft yarı açık kümelerin ailesi
$S\beta A(X)$	: X 'deki tüm soft β -açık kümelerin ailesi
$S\tilde{I}A(X)$	: X 'deki tüm soft $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesi
$Sy\tilde{I}A(X)$	: X 'deki tüm soft yarı- $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesi
$S\alpha\tilde{I}A(X)$	: X 'deki tüm soft α - $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesi
$Sö\tilde{I}A(X)$	: X 'deki tüm soft ön- $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesi
$S\beta\tilde{I}A(X)$	: X 'deki tüm soft β - $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesi

$S_k^*(X)_{\tilde{I}}$	: X ’deki tüm soft $*$-kendi içinde yoğun kümelerin ailesi
$S\tau^* K(X)_{\tilde{I}}$	: X ’deki tüm soft τ^*-kapalı kümelerin ailesi
$S_m^*(X)_{\tilde{I}}$	: X ’deki tüm soft $*$-mükemmel kümelerin ailesi
$S\alpha^*\tilde{I}A(X)$	: X ’deki tüm soft α^*-$\tilde{I}$-açık kümelerin ailesi
$SC_{\tilde{I}}(X)$	: X ’deki tüm soft $C_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesi
$S\tilde{I}yK(X)$	: X ’deki tüm soft $\tilde{I}$-yerel kapalı kümelerin ailesi
$SA(X)$	: X ’deki tüm soft A-kümelerin ailesi
$Sd\tilde{I}K(X)$	: X ’deki tüm soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümelerin ailesi
$SA_{\tilde{I}}(X)$	: X ’deki tüm soft $A_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesi
$Sf_{\tilde{I}}(X)$	: X ’deki tüm soft $f_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesi
$hS\tilde{I}A(X)$	: X ’deki tüm hemen hemen soft-$\tilde{I}$-açık kümelerin ailesi
$St_{\tilde{I}}(X)$	: X ’deki tüm soft $t_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesi
$Sy\tilde{I}d(X)$	: X ’deki soft yarı-$\tilde{I}$-düzenli kümelerin ailesi
$Sg\beta\tilde{I}A(X)$	: X ’deki tüm soft güçlü β-$\tilde{I}$- açık kümelerin ailesi
$Shg\tilde{I}A(X)$	: X ’deki tüm soft hemen hemen güçlü $\tilde{I}$-açık kümelerin ailesi
$Szd\tilde{I}K(X)$	: X ’deki tüm soft zayıf düzenli $\tilde{I}$-açık kümelerin ailesi
$SSBU$	: Soft son dereceli bağlantısız uzay
$S\tilde{I}SBU$	: Soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısız uzay

1. GİRİŞ

İnsanoğlunun yaşadığı dünyayı tanımak istemesi ve onun önüne çıkardığı zorluklarla mücadele etme arzusu şüphesiz ilk insandan beri devam edegelmiştir. Bu arzu ve istek onu bir arayışa itmiş ve öğrenmek, bilmek, çözüm üretmek gibi becerileri sürekli artarak devam etmiştir. Deneme yanılma yoluyla elde edilen bu bilgi ve tecrübelerin hiç şüphesiz bir sistematiği olmalıydı. Matematik bilimi belki de bu manada tüm insanlığın ortak bir dili olarak büyük katkılar sunmuştur. Matematik bilimi hem bu sistematiği anlamlı kılmış hem de kendini sürekli yenileyecek bir yapıya bürünmüştür. Dünya tarihini, özellikle de sanayi devri dünya tarihini takip edenler çok iyi bilir ki; matematikte yapılan ileri düzey çalışmalar ile sanayide yapılan atılımlar bir paralellik arz etmektedir. Hatta matematikteki bu hızlı ilerleyiş çoğu zaman teknolojik ilerlemelerinde önüne geçmiş, ona yol gösterir hale gelmiştir. Ortaçağ doğu dünyasında genelde astronomi, savaş teknikleri, şehir planlamaları ve tıp gibi alanların gelişmesinde öncülük eden matematik bilimi, Rönesans sonrası batı dünyasında durdurulamaz bir yükselişe geçmiş ve bunun sonucu olarak ta sanayi devriminin başlamasında önemli bir rol oynamıştır. Dünyaya yön veren bilimsel gelişmeleri yapan bilim adamlarından birçoğunun aynı zamanda matematikçi oluşları bir tesadüf değildir.

20. ve 21. Yüzyıldaki yaşanılan teknolojik gelişmeler baş döndürücü bir hızla devam etmektedir. Buhar çağı, petrol çağı, bilgisayar çağı sürekli düşen periyotlarla birbirini takip ederken günümüz dünyası yazılım ve yapay zekâ çağına doğru hızla bir giriş yaptı. Önceden aylar ya da yıllarla ifade edilen sürelerde tamamlanan işler artık günlere hatta saatlere düşen zamanlarda tamamlanabilmektedir. O yüzden sürekli kendini yenileyen, çözümler üreten bilimsel yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Hiç şüphesiz matematik alanında atılan tüm teoriler de işte bu ihtiyaçtan kaynaklanmaktadır. Bir örnek verecek olursak, tarihsel gelişimi eski çağlara kadar giden Bulanık Mantık (Fuzzy Logic) kavramı modern anlamda ilk kez Zadeh(1965) tarafından ortaya atılmış fakat batı dünyasından beklenen ilgiyi görmemiştir. Aksine birçok eleştirinin de hedefi haline gelmiştir. Başta Japonya olmak üzere, uzak doğu ülkelerinde gereken ilgiyi görmüş ve kısa zaman içerisinde tıp, sosyoloji, mühendislik, matematik, ekonomi, yapay zekâ, akıllı sistemler, robotik, psikoloji, sinyal işleme ve ulaştırma problemleri gibi birçok alanda karşılaşılan problemlerin çözümünde temel alınan bir konu haline dönüşmüştür. Benzer şekilde; Pawlak (1982) tarafından ortaya atılan Kaba Küme

Teorisi (Theory of Rough Set) de yapay zekâ, öğrenen makineler, bilgi edinme, karar analizi, veri tabanlarındaki bilgilerin araştırılması, uzmanlaşmış sistemler, muhakeme ve örüntü tanıma gibi alanlarda temel öneme sahip olduğu görülmektedir. Bizim tez çalışmamızda kullandığımız soft küme kavramını ise Molodtsov (1999) ortaya atmıştır. O mühendislik, tıp, ekonomi ve çevre bilimi gibi bazı alanlarda karşılaşılan belirsizlikleri çözmek için kullanılan bulanık küme, olasılık ve aralık matematiği gibi teorilerin kullanılan objeleri tanımlamada yetersiz kaldığını belirtmiş, evren kümenin elemanlarının taşıdığı özellikleri de dikkate alacak bu yeni teoriyi tanıtmıştır. Ayrıca bu teoriyi Riemann integrali, oyun teorisi ve ölçü teorisi gibi birçok alana da başarıyla uygulamıştır. Teorinin ortaya çıkışından kısa bir süre sonra birçok bilim insanı, bu teorinin özelliklerini çalışmışlar ve matematik, istatistik, mühendislik ve tıp gibi alanlara da uygulamışlardır. (Maji ve Roy, 2002; Yüksel ve ark., 2013; Yüksel ve ark., 2015)

Biz bu tez çalışmamızda soft kümelerin topolojik ve ideal yapıları üzerinde durduk. Çalışmamızı dört temel parçaya ayırdık şöyle ki, ilk bölümde araştırmacılar tarafından daha önce literatüre kazandırılmış ve bugün soft kümeler, soft topolojik uzaylar ve soft ideal topolojik uzaylar için temel kavram niteliğinde ki özellikleri verdik. İkinci bölümde ise, bazı yeni zayıf soft küme kavramalarını verdik ve bunların mevcut diğer soft küme çeşitleri ile ve birbirleri ile olan ilişkilerini inceledik. Ayrıca bu soft kümelerden olan soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümeler yardımıyla soft sürekliliğin bir ayrışımını elde ettik. Takip eden bölümde ise, soft $f_{\tilde{I}}$-küme olarak isimlendirdiğimiz yeni bir soft küme çeşidini tanıttık ve bunun özelliklerini inceledik. Ek olarak ta; yeni soft süreklilik çeşitleri verdik ve bunlar arasındaki ilişkileri bir tablo yardımıyla ifade ettik. Ayrıca, soft Hayashi-Samuels uzay kavramını tanıtarak bu kavram sayesinde elde edilen özellikleri ayrıntılı bir şekilde verdik. Çalışmamızın son bölümünde ise; soft ideal kavramı yardımıyla soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısız uzay olarak adlandırdığımız yeni bir soft uzay çeşidi tanımladık. Soft lokal fonksiyon yardımıyla elde ettiğimiz bu soft uzay çeşidini kullanarak mevcut soft kümeler arasındaki ilişkileri yeniden gözden geçirip bunlar arasında bazı eşdeğerlikleri elde ettik. Tüm elde edilen bu özellikleri soft süreklilik çeşitleri üzerinde de kullanarak çalışmamızı tamamladık.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Soft Küme Teorisi ilk kez, Molodtsov (1999) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Molodtsov'a göre olasılık teorisi, fuzzy küme teorisi gibi belirsizlikleri ortadan kaldırmak için kullanılan teoriler, sahip oldukları bazı zorluklar sebebiyle her zaman kullanışlı olmamaktadır. "Soft set theory-First results" isimli çalışmasında yazar soft kümelerin, bazı belirsizlikleri ortadan kaldıran kullanışlı bir matematiksel araç olduğunu belirtmiş, ayrıca; bu teorinin ilk sonuçlarını elde ederek gelecekte karşılaşılacak bazı problemlerden bahsetmiştir. Yazar, ayrıca; soft kümelerin bu zorlukları nasıl ortadan kaldırdığını ve bazı kullanım alanlarını örneklerle açıklamış, ek olarak ta; soft kümelere ait bazı işlemleri de tanıtmıştır. Soft küme ile ilgili ilk sonuçların verilmesinin ardından Maji ve ark. (2003), *soft kümelere ait görüntü kümesi, soft alt küme, iki soft kümenin eşitliği, bir soft kümenin değili, bir soft kümenin tümleyeni, boş soft küme, tam soft küme, iki soft kümenin kesişimi* ve *iki soft kümenin birleşimi* gibi temel kavramları tanıtmışlar ve bunlarla ilgili bazı önermeler ortaya atmışlardır. Feng ve ark. (2008) tarafında yayınlanan "Soft semirings" isimli çalışmada *iki soft kümenin kesişimi* için daha kullanışlı bir tanım vermişlerdir. Ayrıca bu çalışmada yazarlar herhangi sayıda ki soft kümenin birleşiminin de yine bir soft küme olacağını göstermişlerdir. Ali ve ark. (2009) soft kümeler için *rölatif tümleyen* kavramını ve ayrıca soft kümeler için *genişletilmiş kesişim* ve *kısıtlanmış birleşim* tanımlarını vermişlerdir.

Soft kümeler üzerinde topolojik yapılar ilk kez Shabir ve Naz (2011) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada *iki soft kümenin farkı* ve *De Morgan kurallarının* soft kümeler üzerinde uygulanabilirliği gibi yeni ifadeler tanıtıldıktan sonra soft topolojik uzaylar tanımlanmıştır. Tanım yapılırken genel topolojide bildiğimiz açıklar aksiyomları soft kümelere uyarlanmıştır. Açıklar aksiyomunu sağlayan boştan farklı bir X kümesi üzerindeki soft kümeler soft açık, bunların rölatif tümleyeni olan soft kümeler de soft kapalı olarak adlandırılmıştır. Soft topoloji kavramından faydalanılarak soft komşuluk ve soft kapanış kavramları tanımlanmış ve soft kapanış kavramıyla ilgili birçok özellik ve önermeler verilip, gereken ispatlar yapılmış ve çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca; genel topolojide bilinen ayırma aksiyomları, soft topolojik uzaylara uyarlanarak, soft T_0-, soft T_1-, soft T_2-, soft T_3-, soft T_4- ve soft normal uzay kavramları verilerek bunların birbirleri ile olan ilişkileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Hussain ve Ahmad (2011), *bir elemanın soft kümeye aitliği*, *soft iç nokta*, *bir soft kümenin içi*, *bir soft kümenin dışı*, *bir soft kümenin sınırı* gibi kavramları verip, bunlarla ilgili özellikleri göstermişlerdir. Ahmad ve Kharal (2011), evren kümeler arasında bir u dönüşümü ve parametre kümeleri arasında da bir p dönüşümü alarak iki soft küme arasında f_{pu} ile ifade edilen yeni bir *soft fonksiyon* tanımı yapmışlardır. Yine bu tanımdan faydalanarak f_{pu}^{-1} ile gösterilen soft ters görüntü dönüşümünü tanıtmışlardır. Ayrıca hem soft fonksiyon altında hem de soft ters görüntü dönüşümü altında soft birleşim ve soft keşişim kavramlarının özellikleri üzerinde durulmuştur. Çalışmanın sonunda da soft kümelerin medikal çalışmalara bir uygulaması verilmiştir. Zorlutuna ve ark. (2012), herhangi sayıdaki soft kümenin birleşimi, kesişimi ve De Morgan kurallarının bunlara uygulanışı ile ilgili tanımları vermişledir. *Soft nokta kavramı* da, ilk kez bu yazarlar tarafından literatüre kazandırılmıştır. Soft nokta kavramı kullanılarak yeni bir *soft komşuluk*, *soft iç*, *soft kapanış* kavramları verilmiştir. Fakat bu tanım daha sonra Bayramov ve Aras (2013) tarafından güncellenerek daha yaygın kullanılan bir soft nokta kavramı ortaya çıkmıştır. Biz de bu tez çalışmamız da son tanımlanan soft nokta kavramını kullandık. Ayrıca çalışmada soft kompaktlık ve soft dizi kavramları da yer almaktadır.

Soft zayıf açık(kapalı) kümeler hakkında yapılan ilk çalışmalar Chen (2013) ile başlamıştır. Chen; *soft yarı açık küme*, *soft yarı kapalı küme* tanımlarını vermiş bunlar yardımıyla da *soft yarı iç* ve *soft yarı kapanış* kavramlarını tanımlamıştır. Ayrıca bu zayıf soft küme çeşitleri ile soft açık ve soft kapalı kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ek olarak soft yarı ayırma aksiyomları çalışılarak yeni soft uzay çeşitleri literatüre kazandırılmıştır. Arockiarani ve Lancy (2013); sabit bir evren kümesi üzerinde bir parametre kümesi yardımıyla tanımlı soft topolojik uzaylarda, *soft genelleştirilmiş β-kapalı kümeleri* ve *soft genelleştirilmiş yarı β-kapalı kümeleri* tanıtmışlar ve bunların bazı özelliklerini incelemişlerdir. Yüksel ve ark. (Yüksel ve ark., 2014); *soft düzenli genelleştirilmiş kapalı(açık) kümeleri* çalışmışlar, bunlarla ilgili teorem ve önermeleri ispatları ile birlikte vermişlerdir. Yumak ve Kaymakçı (2015); *soft β-açık kümeler* üzerine çalışma yapmış, tanıtılan bu yeni soft zayıf küme çeşidinin literatürde var olan diğer soft küme çeşitleri ile olan ilişkileri incelenmiştir. Tüm bu ilişkilerden elde edilen sonuçlar bir tablo aracılığı ile verilmiş, ters yönlü gerektirmelerin olmadığı yerlerde ters örnekler yapılmıştır. Ayrıca soft β-açık kümeler yardımıyla yeni soft zayıf süreklilik çeşitleri tanıtılmış ve bunların sahip olduğu özellikler incelenmiştir.

Soft kümeler üzerinde ideal kavramı ise Kandil ve ark. (2014) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Onlar, boştan farklı bir X kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir soft küme ailesinin, sonlu soft birleşim ve soft alt küme olma bağıntılarına göre kapalı olması durumunda *soft ideal* olarak adlandırılacağını söylemişlerdir. Soft ideallere örnek olarak ta soft minimal ideali, soft maksimal ideali, X 'in sonlu soft alt kümelerinin ideali, X 'in sayılabilir soft alt kümelerinin ideali ve X 'in hiçbir yerde yoğun değil soft alt kümelerinin ideali gibi soft ideal çeşitleri verilmiştir. Soft lokal fonksiyon kavramı da yine aynı yazarlar tarafından ilk olarak verilmiş, soft lokal fonksiyona ait özellikler ispatları ile birlikte gösterilmiştir. Bununla birlikte soft lokal fonksiyon kavramı yardımıyla, yeni bir kavram olan *soft yıldız kapanış operatörü* tanıtılmış ve buna ait özellikler verilmiştir. Ek olarak, bir (X,τ,E) soft topolojik uzayı ile birlikte verilen bir soft ideal ve soft yıldız kapanış operatörü yardımıyla τ 'dan daha ince olan bir τ^* soft topolojisinin nasıl tanımlanabileceği ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. En son olarak ta çalışmada soft topolojilerle soft ideallerin hangi şartlar altında uyumlu olacaklarına dair bilgilere yer verilmiştir. Kandil ve ark. (2015); "γ-Operation and Decompositions of Some Forms of Soft Continuity in Soft Topological Spaces via Soft Ideals" isimli çalışmalarında, soft ideal topolojik uzaylarda soft açık kümelerden daha zayıf olan yeni bazı soft küme çeşitlerini soft iç, soft kapanış, soft lokal fonksiyon, soft yıldız kapanış işlemlerini kullanarak elde etmişler ve bunların birbirleriyle olan ilişkilerini, hangi şartlar altında birbirlerine eşdeğer olduklarını ispatları ile birlikte vermişlerdir. Ek olarak; birbirlerinden bağımsız olan ve sadece tek yönlü gerektirme barındıran durumlarda ters örnekler verilmiştir. Ayrıca, bu zayıf soft kümeler yardımıyla yeni soft zayıf süreklilik çeşitleri tanımlanmış ve soft sürekliliğin bazı ayrışımları elde edilmiştir.

3. SOFT KÜMELER, SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR VE SOFT İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR

3.1. Soft Kümeler

3.1.1. Tanım. (Molodtsov, 1999) X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olmak üzere; $F:E\to P(X)$ şeklinde tanımlanan dönüşüme X üzerinde bir *soft küme* denir ve (F,E) şeklinde gösterilir. Diğer bir ifadeyle; bir **soft küme**, X kümesinin parametrelenmiş bir ailesidir. $e\in E$ için, $F(e)\subseteq X$ kümesi (F,E) soft kümesinin *e-yaklaşım kümesi* olarak düşünülebilir. Kolaylıkla görülebilir ki; bir soft küme, klasik anlamda bir küme değildir.

Bu tez çalışması boyunca; X üzerinde E parametre kümesi yardımıyla yazılabilecek tüm soft kümelerin ailesini $SK(X)_E$ ile göstereceğiz.

3.1.1. Örnek. X, bir klinikteki 7 hastanın ve E de, bazı hastalık isimlerinin kümesi olmak üzere;

$$X=\{h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ h_6,\ h_7\}$$

$$E=\{e_1(kanser),\ e_2(hemodiyaliz),\ e_3(kansızlık),\ e_4(epilepsi)\}$$

şeklinde verilsin. Kabul edelim ki,

$$F(e_1)=\{h_1,\ h_4\}$$

$$F(e_2)=\{h_2,\ h_5\}$$

$$F(e_3)=\{h_3,\ h_4,\ h_7\}$$

$$F(e_4)=\phi$$

olsun. Bu durumda,

$$(F,\ E)=\{F(e_i):\ \ i=1,2,3,4\}$$

$$=\{\{h_1,\ h_4\},\ \{h_2,\ h_5\},\ \{h_3,\ h_4,\ h_7\},\ \phi\}$$

olarak elde edilir.

3.1.2. Tanım. (Maji ve ark., 2003) X, evren kümesi ile E parametre kümesi verilsin. $A,B\subseteq E$ olmak üzere; X üzerindeki (F,A) ve (G,B) soft kümeleri için eğer;

i. $A \subseteq B$,

ii. her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$

şartları sağlanıyorsa, (F, A) soft kümesine, $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B})$ ***'nin soft alt kümesi*** denir ve $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A}) \tilde{\subseteq} (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B})$ şeklinde gösterilir.

3.1.3. Tanım. (Maji ve ark., 2003) X evren kümesi ile E parametre kümesi verilsin. X üzerindeki (F, E) soft kümesi; eğer

i. her $e \in E$ için, $F(e) = \phi$ ise; ***boş soft küme*** olarak isimlendirilir ve $\boldsymbol{\Phi}$ gösterilir,

ii. her $e \in E$ için, $F(e) = X$ ise; ***tam soft küme*** olarak isimlendirilir ve $\tilde{\boldsymbol{X}}$ şeklinde gösterilir.

3.1.4. Tanım. (Maji ve ark., 2003) X evren kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin $(A, B \subseteq E)$. $C = A \cup B$ olmak üzere her $e \in C$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \quad e \in A - B \\ G(e) & , \quad e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & , \quad e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $H : C \to P(X)$ dönüşümüne, $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A})$ ***ve*** $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B})$ ***soft kümelerinin soft birleşimi*** denir ve $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A}) \tilde{\cup} (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{H}, \boldsymbol{C})$ şeklinde gösterilir.

3.1.4. Tanım. (Feng ve ark., 2008) X evren kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin $(A, B \subseteq E)$. $D = A \cap B$ olmak üzere; her $e \in D$ için, $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanan $H : D \to P(X)$ dönüşümüne, $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A})$ ***ve*** $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B})$ ***soft kümelerinin soft kesişimi*** denir ve $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A}) \tilde{\cap} (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{H}, \boldsymbol{C})$ şeklinde gösterilir.

3.1.5. Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) (F, E), X üzerinde bir soft küme ve $x \in X$ olsun. Eğer her $e \in E$ için, $x \in F(e)$ oluyorsa; $\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ ***'ye aittir*** denir ve $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ şeklinde gösterilir. Eğer en az bir $e \in E$ ve $x \in X$ için, $x \notin F(e)$ ise; $\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ ***'ye ait değildir*** denir ve $\boldsymbol{x} \notin (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ şeklinde gösterilir.

3.1.6. Tanım. (Ali ve ark., 2009) (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Her $e \in E$ için, $F'(e) = X - F(e)$ şeklinde tanımlanan $F' : E \to P(X)$ dönüşümüne, $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ***'nin rölatif tümleyeni*** denir ve $(\boldsymbol{F'},\boldsymbol{E})$ veya $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})'$ şeklinde gösterilir.

3.1.7. Tanım. (Ahmad ve Kharal, 2011) $X \neq \phi$, $Y \neq \phi$ evren kümeleri A ve B de, sırasıyla; X ve Y deki elemanlarla ilişkili parametre kümeleri olsun. Ayrıca; $u : X \to Y$, $p : A \to B$ fonsiyonları ile $f_{pu} : SK(X)_A \to SK(Y)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Buna göre;

i. Eğer $(F,A) \in SK(X)_A$ ise, (F,A)'nın f_{pu} altındaki görüntüsü olan $f_{pu}(F,A) = (f_{pu}(F), p(A))$, $SK(Y)_B$ içinde bir soft kümedir ve her $b \in B$ için,

$$f_{pu}(F)(b) = \begin{cases} \bigcup\limits_{a \in p^{-1}(b) \cap A} u(F(a)) & , \quad p^{-1}(b) \cap A \neq \phi \\ \phi & , \quad diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

ii. Eğer $(G,B) \in SK(Y)_B$ ise, (G,B)'nin f_{pu} altındaki ters görüntüsü olan $f_{pu}^{-1}(G,B) = (f_{pu}^{-1}(G), p^{-1}(B))$, $SK(X)_A$ içinde bir soft kümedir ve her $a \in A$ için,

$$f_{pu}^{-1}(G)(a) = \begin{cases} u^{-1}(G(p(a))) & , \quad p(a) \in B \\ \phi & , \quad diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.2. Soft Topolojik Uzaylar

3.2.1. Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) $X \neq \phi$ evren kümesi ve E parametre kümesi verilsin. Ayrıca τ, X üzerindeki soft kümelerin boştan farklı bir ailesi olsun. Eğer τ ailesi, aşağıdaki şartları sağlarsa; τ'ya, ***X üzerinde bir soft topoloji,***

(X,τ,E) üçlüsüne de, ***X* üzerinde bir soft topolojik uzay** denir. Ayrıca; τ 'nun her bir elemanı, ***X* 'de bir soft açık küme** olarak isimlendirilir.

i. Φ ve $\tilde{X}$, τ 'ya aittir,

ii. τ 'daki elemanların herhangi birleşimleri τ 'ya aittir,

iii. τ 'daki herhangi iki elemanın arakesiti τ 'ya aittir.

3.2.2. Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. X 'deki her soft açık kümenin rölatif tümleyenine ***X* 'de bir soft kapalı küme** denir.

Bu tez çalışması boyunca, τ, soft açıkların ailesini göstermek üzere, X üzerindeki tüm soft kapalı kümelerin ailesi $\boldsymbol{\tau'}$ ile gösterilecektir.

3.2.1. Örnek. $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ evren kümesi ve $E=\{e_1,\ e_2\}$ parametre kümesi verilsin. $(F_1,E)=\{\{x_1\},\ \phi\}$, $(F_2,E)=\{\{x_2\},\ \phi\}$, $(F_3,E)=\{\{x_1,\ x_2\},\ \phi\}$ olmak üzere,

i. Φ ve $\tilde{X}$, τ 'ya aittir,

ii. $(F_1,E)\ \tilde{\cup}\ (F_2,E)=\ \{\{x_1,\ x_2\},\ \phi\}=(F_3,E)\in\tau$,

$(F_1,E)\ \tilde{\cup}\ (F_3,E)=\ \{\{x_1,\ x_2\},\ \phi\}=(F_3,E)\in\tau$,

$(F_2,E)\ \tilde{\cup}\ (F_3,E)=\ \{\{x_1,\ x_2\},\ \phi\}=(F_3,E)\in\tau$,

$(F_1,E)\ \tilde{\cup}\ (F_2,E)\ \tilde{\cup}\ (F_3,E)=\ \{\{x_1,\ x_2\},\ \phi\}=(F_3,E)\in\tau$.

iii. $(F_1,E)\ \tilde{\cap}\ (F_2,E)=\ \Phi\in\tau$,

$(F_1,E)\ \tilde{\cap}\ (F_3,E)=\ (F_1,E)\in\tau$,

$(F_2,E)\ \tilde{\cap}\ (F_3,E)=\ (F_2,E)\in\tau$,

$(F_1,E)\ \tilde{\cap}\ (F_2,E)\ \tilde{\cap}\ (F_3,E)=\Phi\in\tau$.

olduğundan; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi, X üzerinde bir soft topolojidir.

3.2.3. Tanım. (Hussain ve Ahmad, 2011) (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SK(X)_E$ olsun. Buna göre;

i. (F,E)'nin kapsadığı tüm soft açık kümelerin birleşimine $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ***'nin soft içi*** denir ve $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})^{\circ}$ şeklinde gösterilir. Kolayca görülebilir ki; $(F,E)^{\circ}$, (F,E)'nin kapsadığı en büyük soft açıktır.

ii. $x \in X$ noktasının (F,E)'nin bir ***soft iç noktası*** olması için gerek ve yeter şart $x \in (G,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir $(G,E) \in \tau$ olmasıdır.

3.2.4. Tanım. (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. (F,E)'yi kapsayan tüm soft kapalı kümelerin kesişimine $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ***'nin soft kapanışı*** denir ve $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})^{-}$ şeklinde gösterilir. Kolayca görülebilir ki; $(F,E)^{-}$, (F,E)'yi kapsayan en küçük soft kapalıdır.

3.2.1. Önerme. (Hussain ve Ahmad, 2011) (X,τ,E) bir soft topolojik uzay, (F,E) ve (G,E) de, X üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler vardır;

i. $\Phi^{\circ} = \Phi$, $\Phi^{-} = \Phi$, $\tilde{X}^{\circ} = \tilde{X}$ ve $\tilde{X}^{-} = \tilde{X}$,

ii. $(F,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,E)$, $(F,E) \tilde{\subseteq} (F,E)^{-}$,

iii. $((F,E)^{\circ})^{\circ} = (F,E)^{\circ}$, $((F,E)^{-})^{-} = (F,E)^{-}$,

iv. $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \Rightarrow (F,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} (G,E)^{\circ}$,

$(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \Rightarrow (F,E)^{-} \tilde{\subseteq} (G,E)^{-}$,

v. $(F,E)^{\circ} \tilde{\cap} (G,E)^{\circ} = \left((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\right)^{\circ}$,

$(F,E)^{\circ} \tilde{\cup} (G,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} \left((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\right)^{\circ}$,

vi. $\left((F,E) \tilde{\cap} (G,E)\right)^{-} \tilde{\subseteq} (F,E)^{-} \tilde{\cap} (G,E)^{-}$,

$\left((F,E) \tilde{\cup} (G,E)\right)^{-} = (F,E)^{-} \tilde{\cup} (G,E)^{-}$.

3.2.5. Tanım. (Bayramov ve Aras, 2013) (X,τ,E) soft topolojik uzayı ve bir (F,E) soft kümesi verilsin. Eğer bir $e \in E$ için, $F(e) = \{x\}$ ve tüm $e' \in E - \{e\}$ elemanları için $F(e') = \phi$ oluyorsa; (F,E) soft kümesine, ***soft nokta*** denir ve $(\boldsymbol{x_e},\boldsymbol{E})$ veya $\boldsymbol{x_e}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

3.2.6. Tanım. (Zorlutuna ve ark., 2012) (X,τ,E) soft topolojik uzayı ve bir $x_e=(F,E)$ soft noktası verilsin. $e\in E$ için, $F(e)\subseteq G(e)$ oluyorsa, $\boldsymbol{x_e}$ ***soft noktası*** $\boldsymbol{(G,E)}$ ***'ye aittir*** denir ve $\boldsymbol{x_e \in (G,E)}$ şeklinde gösterilir.

3.2.7. Tanım. (Zorlutuna ve ark., 2012) (X,τ,E) soft topolojik uzayı üzerinde (F,E), (G,E) soft kümeleri ve bir x_e soft noktası verilsin. Eğer $x_e\in(H,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ olacak şekilde bir (H,E) soft açık kümesi varsa; (G,E) 'ye, $\boldsymbol{x_e}$ ***soft noktasının bir soft komşuluğu*** denir. (Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(H,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ olacak şekilde bir (H,E) soft açık kümesi varsa, (G,E) 'ye (F,E) soft kümesinin bir ***soft komşuluğu*** denir.) x_e soft noktasının tüm soft komşuluklar ailesi $\boldsymbol{N_\tau(x_e)}$ ile gösterilir.

3.2.8. Tanım. (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SK(X)_E$ olsun. Bu durumda (F,E) soft kümesi,

i. eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(((F,E)^\circ)^-)^\circ$ ise ***soft*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***-açık***, (Arockiarani ve Lancy, 2013)

ii. eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^-)^\circ$ ise ***soft ön-açık***, (Arockiarani ve Lancy, 2013)

iii. eğer $(F,E)=((F,E)^\circ)^-$ ise ***soft düzenli kapalı***, (Yüksel ve ark., 2014)

iv. eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^\circ)^-$ ise ***soft yarı-açık***, (Chen, 2013)

v. eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(((F,E)^-)^\circ)^-$ ise ***soft*** $\boldsymbol{\beta}$ ***-açık***, (Arockiarani ve Lancy, 2013)

olarak isimlendirilir.

Bu çalışma boyunca X üzerindeki tüm soft α-açık kümelerin ailesini $S\alpha A(X)$, tüm soft ön-açık kümelerin ailesini $SöA(X)$, tüm soft düzenli kapalı kümelerin ailesini $SdK(X)$, tüm soft yarı açık kümelerin ailesini $SyA(X)$ ve tüm soft β-açık kümelerin ailesini $S\beta A(X)$ ile göstereceğiz.

3.3. Soft İdeal Topolojik Uzaylar

3.3.1. Tanım. (Kandil ve ark., 2014) $X\neq\phi$ evren kümesi ve E parametre kümesi verilsin. Ayrıca $\tilde{I}$, aynı E parametre kümesi ile X üzerindeki soft kümelerin boştan farklı bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa; $\tilde{I}$ 'ya, X üzerinde bir ***soft ideal*** denir.

i. $(F,E)\in\tilde{I}$ ve $(G,E)\in\tilde{I}$ ise, $(F,E)\tilde{\cup}(G,E)\in\tilde{I}$,

ii. $(F,E)\in\tilde{I}$ ve $(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ ise, $(G,E)\in\tilde{I}$.

Bu çalışma boyunca $(X,\tau,\tilde{I},E)$ ile X üzerindeki soft ideal topolojik uzayı göstereceğiz.

3.3.1. Örnek. (Kandil ve ark., 2014) $X\neq\phi$ evren kümesi ve E parametre kümesi verilsin. Bu durumda, aşağıdaki ailelerin her biri X üzerinde bir soft idealdir.

i. $\tilde{I} = \{\Phi\}$,

ii. $\tilde{I} = SK(X)_E$,

iii. $\tilde{I}_f = \{ (F,E) \in SK(X)_E :\ (F,E)$, sonlu bir soft kümedir},

iv. $\tilde{I}_c = \{ (F,E) \in SK(X)_E :\ (F,E)$, sayılabilir bir soft kümedir},

v. $\tilde{I}_{(F,E)} = \{ (G,E) \in SK(X)_E :\ (G,E)\tilde{\subseteq}(F,E) \}$,

vi. $\tilde{I}_n = \{ (G,E) \in SK(X)_E :\ ((G,E)^-)^\circ = \Phi \}$

3.3.2. Tanım. (Kandil ve ark., 2014) $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay ve (F,E) bir soft küme olsun. Bu durumda;

$$(F,E)^* = F_E^* = \tilde{\bigcup}\left\{x_e :\ O_{x_e}\tilde{\cap}(F,E)\notin\tilde{I},\ \forall O_{x_e}\in\tau\right\}$$

şeklinde tanımlanan $(F,E)^*$ soft kümesine, (F,E)'nin ***soft lokal fonksiyonu*** denir. Burada O_{x_e}, x_e soft noktasını içeren soft açık kümeyi göstermektedir.

3.3.3. Tanım. (Kandil ve ark., 2014) $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay ve (F,E) bir soft küme olsun. $-*\ : SK(X)_E \rightarrow SK(X)_E$ operatörü, $(F,E)^{-*} = (F,E)\ \tilde{\cup}\ (F,E)^*$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $-*$ operatörüne ***soft yıldız kapanış operatörü*** denir. $-*$ operatörü Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağlar.

3.3.1. Teorem. (Kandil ve ark., 2014) (X,τ,E) soft topolojik uzayı üzerinde (F,E), (G,E) soft kümeleri ile $\tilde{I}$ ve $\tilde{J}$ soft idealleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

i. $\Phi^* = \Phi$,

ii. $(F,E)\ \tilde{\subseteq}\ (G,E) \Rightarrow (F,E)^*\ \tilde{\subseteq}\ (G,E)^*$,

iii. $\tilde{I} \tilde{\subseteq} \tilde{J} \Rightarrow (F,E)^{*_{\tilde{J}}} \tilde{\subseteq} (F,E)^{*_{\tilde{I}}}$,

iv. $(F,E)^* = ((F,E)^*)^- \tilde{\subseteq} (F,E)^-$,

v. $(F,E)^*$ soft kapalı kümedir,

vi. $((F,E)^*)^* \tilde{\subseteq} (F,E)^*$,

vii. $[(F,E) \tilde{\cup} (G,E)]^* = (F,E)^* \tilde{\cup} (G,E)^*$,

viii. $\tilde{\bigcup}_\alpha (F_\alpha,E)^* = \left(\tilde{\bigcup}_\alpha (F_\alpha,E)\right)^*$,

ix. $[(F,E) \tilde{\cap} (G,E)]^* \tilde{\subseteq} (F,E)^* \tilde{\cap} (G,E)^*$,

x. $(G,E) \in \tilde{I} \Rightarrow [(F,E) \tilde{\cup} (G,E)]^* = (F,E)^* = [(F,E) - (G,E)]^*$,

xi. $(G,E) \in \tau \Rightarrow (G,E) \tilde{\cap} (F,E)^* \tilde{\subseteq} [(G,E) \tilde{\cap} (F,E)]^*$.

3.3.4. Tanım. (Kandil ve ark., 2015) $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay ve $(F,E) \in SK(X)_E$ olsun. Bu durumda (F,E) soft kümesi,

i. eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^*)^\circ$ ise, ***soft*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$ ***-açık***,

ii. eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^\circ)^{-*}$ ise, ***soft yarı-*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$ ***-açık***,

iii. eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^\circ)^{-*})^\circ$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***-*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$ ***-açık***,

iv. eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^{-*})^\circ$ ise, ***soft ön-*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$ ***-açık***,

v. eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^\circ)^-$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{\beta}$ ***-*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$ ***-açık***,

olarak isimlendirilir.

Bu çalışma boyunca X üzerindeki tüm soft $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesini $S\tilde{I}A(X)$, tüm soft yarı- $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesini $Sy\tilde{I}A(X)$, tüm soft α - $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesini $S\alpha\tilde{I}A(X)$ tüm soft ön- $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesini $Sö\tilde{I}A(X)$ ve tüm soft β - $\tilde{I}$ -açık kümelerin ailesini $S\beta\tilde{I}A(X)$ ile göstereceğiz.

4. SOFT DÜZENLİ-$\tilde{I}$-KAPALI KÜMELER İLE SOFT SÜREKLİLİĞİN BİR AYRIŞIMI

4.1. Bazı Zayıf Soft Küme Çeşitleri

4.1.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay ve $(F,E)\in SK(X)_E$ olsun. Bu durumda (F,E) soft kümesi,

i. eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(F,E)^*$ ise, ***soft *-kendi içinde yoğun***,

ii. eğer $(F,E)^*\tilde{\subseteq}(F,E)$ ise, ***soft τ^*-kapalı***,

iii. eğer $(F,E)=(F,E)^*$ ise, ***soft *-mükemmel***,

iv. eğer $(F,E)^\circ=(((F,E)^\circ)^{-*})^\circ$ ise ***soft α^*-$\tilde{I}$-açık***,

v. (G,E) soft açık küme ve (H,E) soft α^*-$\tilde{I}$-açık küme olmak üzere, eğer $(F,E)=(G,E)\tilde{\cap}(H,E)$ ise ***soft $C_{\tilde{I}}$-küme***,

vi. (G,E) soft açık küme ve (H,E) soft *-mükemmel küme olmak üzere, eğer $(F,E)=(G,E)\tilde{\cap}(H,E)$ ise ***soft $\tilde{I}$-yerel kapalı***,

vii. (G,E) soft açık küme ve (H,E) soft düzenli kapalı küme olmak üzere, eğer $(F,E)=(G,E)\tilde{\cap}(H,E)$ ise ***soft A-küme***,

olarak isimlendirilir.

Bu çalışma boyunca X üzerindeki tüm soft *-kendi içinde yoğun kümelerin ailesini $S_k^*(X)_{\tilde{I}}$, tüm soft τ^*-kapalı kümelerin ailesini $S\tau^*K(X)_{\tilde{I}}$, tüm soft *-mükemmel kümelerin ailesini $S_m^*(X)_{\tilde{I}}$, tüm soft α^*-$\tilde{I}$-açık kümelerin ailesini $S\alpha^*\tilde{I}A(X)$, tüm soft $C_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesini $SC_{\tilde{I}}(X)$, tüm soft $\tilde{I}$-yerel kapalı kümelerin ailesini $S\tilde{I}yK(X)$ ve tüm soft A-kümelerin ailesini $SA(X)$ ile göstereceğiz.

4.1.1. Örnek. $X=\{x_1,x_2\}$ evren kümesi ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametre kümesi verilsin. $(F_1,E)=\{\{x_1\},\{x_2\}\}$, $(F_2,E)=\{\{x_1,x_2\},\{x_2\}\}$, $(F_3,E)=\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi, X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca; $(G_1,E)=\{\phi,\{x_1\}\}$, $(G_2,E)=\{\{x_1\},\phi\}$, $(G_3,E)=\{\{x_1\},\{x_1\}\}$ ve

$(K,E)=\{\phi,\{x_2\}\}$ olmak üzere, $\tilde{I}_1=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$, $\tilde{I}_2=\{\Phi\}$ ve $\tilde{I}_3=\{\Phi,\ (K,E)\}$ aileleri ise; X üzerinde birer soft ideal belirtirler. Buna göre;

i. $(H,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}$ soft kümesi için, $(H,E)^*=\{\{x_2\},\phi\}\tilde{\subseteq}(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in S_k^*(X)_{\tilde{I}_1}$ olarak elde edilir.

ii. $(H,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}$ soft kümesi için, $(H,E)\tilde{\subseteq}\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2\}\}=(H,E)^*$ olduğundan; $(H,E)\in S\tau^*K(X)_{\tilde{I}_2}$ olarak elde edilir.

iii. $(H,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}$ soft kümesi için, $(H,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}=(H,E)^*$ olduğundan; $(H,E)\in S_m^*(X)_{\tilde{I}_3}$ olarak elde edilir.

iv. $(H,E)=\{\{x_2\},\{x_1\}\}$ soft kümesi için, $(H,E)^\circ=\Phi$ ve $((H,E)^\circ)^*=\Phi$ olduğundan; $((H,E)^\circ)^{-*}=(H,E)^\circ\tilde{\cup}((H,E)^\circ)^*=\Phi$ olacaktır. Buradan $(((H,E)^\circ)^{-*})^\circ=\Phi=(H,E)^\circ$ yazılabilir. Böylece $(H,E)\in S\alpha^*\tilde{I}_1A(X)$ olarak elde edilir.

v. $(F_2,E)=\{\{x_1,x_2\},\{x_2\}\}\in\tau$, $(H,E)=\{\{x_2\},\{x_1\}\}\in S\alpha^*\tilde{I}_1A(X)$ ve $(L,E)=\{\{x_2\},\phi\}$ soft kümeleri verilsin. $(L,E)=(F_2,E)\tilde{\cap}(H,E)$ olduğundan; $(L,E)\in SC_{\tilde{I}_1}(X)$ olarak elde edilir.

vi. $(F_3,E)=\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}\in\tau$, $(H,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}\in S_m^*(X)_{\tilde{I}_3}$ ve $(L,E)=\{\{x_1\},\phi\}\in S\tilde{I}_3yK(X)$ soft kümeleri verilsin. $(L,E)=(F_3,E)\tilde{\cap}(H,E)$ olduğundan; $(L,E)\in SC_{\tilde{I}_1}(X)$ olarak elde edilir.

vii. $((\tilde{X})^\circ)^-=\tilde{X}$ olduğundan; $\tilde{X}\in SdK(X)$ ifadesi, kolaylıkla yazılabilir. Ayrıca; $(F_1,E)=\{\{x_1\},\{x_2\}\}\in\tau$ soft kümesi için, $(F_1,E)=\tilde{X}\tilde{\cap}(F_1,E)$ olduğundan; $(F_1,E)\in SA(X)$ olarak elde edilir.

4.2. Soft Düzenli-$\tilde{I}$-Kapalı Kümeler

4.2.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayı üzerindeki bir (F,E) soft kümesi için, eğer $(F,E)=((F,E)^\circ)^*$ ise; (F,E) soft kümesine, ***soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme*** denir.

Biz $(X,\tau,\tilde{I},E)$'deki tüm soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümelerin ailesini $\boldsymbol{Sd\tilde{I}K(X)}$ ile göstereceğiz.

4.2.1. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için eğer

i. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ ise; $(F,E)\in S\alpha^{*}\tilde{I}A(X)$ ve $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ sağlanır.

ii. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ ise; $(F,E)\in S_{k}^{*}(X)_{\tilde{I}}$ ve $(F,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ sağlanır.

İspat.

i. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olsun. 4.2.1. Tanım gereği $((F,E)^{\circ})^{*}=(F,E)$ dir. Bu durumda, $((F,E)^{\circ})^{-*}$ = $(F,E)^{\circ}\,\tilde{\cup}\,((F,E)^{\circ})^{*}$ = $(F,E)^{\circ}\,\tilde{\cup}\,(F,E)$ = (F,E) eşitliği kolayca elde edilir. Buradan $(F,E)^{\circ}=(((F,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}$ ve $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}$ olduğundan $(F,E)\in S\alpha^{*}\tilde{I}A(X)$ ve $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ elde edilir.

ii. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olsun. 4.2.1. Tanım gereği $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{*}$ eşitliği vardır. Ayrıca $(F,E)^{\circ}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)$ dir. Burada 3.3.1. Teorem ii) yardımıyla $((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{*}$ ifadesi elde edilir. O halde $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{*}$ kolayca yazılır. 4.1.1. Tanım i) gereğince $(F,E)\in S_{k}^{*}(X)_{\tilde{I}}$ elde edilir. Diğer taraftan; $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{*}$ eşitliği için yine 3.3.1. Teorem ii) ve vi) sırasıyla kullanılırsa; $(F,E)^{*}=(((F,E)^{\circ})^{*})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}=(F,E)$ ifadesi kolayca bulunur. Buradan 4.1.1. Tanım ii) gereğince $(F,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ elde edilmiş olur.

4.2.1. Uyarı. 4.2.1. Önermede verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde sırasıyla gösterilmiştir.

4.2.1. Örnek. 4.1.1. Örnekteki verileri göz önüne alalım. Buna göre;

i. $(H,E)=\{\{x_2\},\{x_1\}\}\in S\alpha^{*}\tilde{I}_1A(X)$ olduğu 4.1.1. Örnek iv) de gösterilmişti. Diğer taraftan; $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\neq(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\notin Sd\tilde{I}_1K(X)$ elde edilir.

ii. $(F_2,E)=\{\{x_1,x_2\},\{x_2\}\}\in\tau$ soft kümesi verilsin. $(F_2,E)^{\circ}=\{\{x_1,x_2\},\{x_2\}\}$ ve $((F_2,E)^{\circ})^{*}$ = $\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2\}\}$ dir. Bu ifadeler kullanılarak $((F_2,E)^{\circ})^{-*}$ = $(F_2,E)^{\circ}\,\tilde{\cup}\,((F_2,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2\}\}\,\tilde{\supseteq}\,(F_2,E)$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki $(F_2,E)\in Sy\tilde{I}_2A(X)$ dir. Diğer taraftan, $((F_2,E)^{\circ})^{*}$ = $\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2\}\}\neq(F_2,E)$ olup $(F_2,E)\notin Sd\tilde{I}_2K(X)$ yazılır.

iii. $(H,E)=\{\{x_2\},\{x_1\}\}$ soft kümesi verilsin. $(H,E)^{*}=\{\{x_2\},\{x_1\}\}=(H,E)$ olduğundan, $(H,E)\in S_m^{*}(X)_{\tilde{I}_3}$ dir. Diğer taraftan, $(H,E)^{\circ}=\Phi$ ve $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\neq(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\notin Sd\tilde{I}_3K(X)$ elde edilir.

4.2.1. Sonuç. Her soft düzenli-$\tilde{I}$ -kapalı küme, soft $*$-mükemmel kümedir.

İspat. 4.1.1. Tanım i), ii) ve 4.2.1. Önerme ii) kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

4.2.2. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayındaki her soft düzenli-$\tilde{I}$ -kapalı küme, soft düzenli kapalı kümedir.

İspat. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olsun. 4.2.1. Tanım gereği $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{*}$ dir. 3.3.1. Teorem *v)* kullanılarak $(F,E)^{-}=(((F,E)^{\circ})^{*})^{-}=((F,E)^{\circ})^{*}=(F,E)$ elde edilir. Ayrıca; 3.3.1. Teorem iv) gereği $((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{-}$ olur ve böylece $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{-}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-}=(F,E)$ yazılır. Buradan (F,E) = $((F,E)^{\circ})^{-}$ olup, $(F,E)\in SdK(X)$ elde edilir.

4.2.2. Uyarı. 4.2.2. Önermede verilen ifadenin tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

4.2.2. Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$, $(F_2,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$, (F_3,E) = $\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca;

$(G_1,E)=\{\{x_4\},\phi\}$, $(G_2,E)=\{\phi,\{x_4\}\}$, $(G_3,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi ise X üzerinde bir soft ideal belirtir.

$(H,E)=\{\{x_2,x_4\},X\}$ soft kümesi için, $(H,E)^{\circ}=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$ ve buradan $((H,E)^{\circ})^{-}=\{\{x_2,x_4\},X\}=(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in SdK(X)$ olur. Ayrıca; $(H,E)^{\circ}=\{\{x_4\},\{x_4\}\}\in\tilde{I}$ olduğundan; $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\neq(H,E)$ olup, buradan $(H,E)\notin Sd\tilde{I}K(X)$ elde edilir.

4.2.3. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay olsun. $\tilde{I}_n$, X 'deki tüm soft hiçbir yerde yoğun değil kümelerin ailesini göstermek üzere; $\tilde{I}=\tilde{I}_n$ veya $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olsun. Bu durumda;

i. $(F,E)\in SK(X)_E$ soft kümesinin soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart soft düzenli kapalı küme olmasıdır.

ii. $(F,E)\in SK(X)_E$ soft kümesinin soft ön-$\tilde{I}$-açık küme olması için gerek ve yeter şart soft ön-açık küme olmasıdır.

iii. $(F,E)\in SK(X)_E$ soft kümesinin soft α-$\tilde{I}$-açık küme olması için gerek ve yeter şart soft α-açık küme olmasıdır.

İspat.

i. $\Rightarrow$ 4.2.2. Önerme gereği açıktır.

$\Leftarrow$ Eğer $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olarak alırsak, bu durumda $(F,E)^{*}=(F,E)^{-}$ olur. Buradan $((F,E)^{\circ})^{*}=((F,E)^{\circ})^{-}$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki; $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olarak seçilirse, soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalılık ve soft düzenli kapalılık kavramları eşdeğerdir.

Eğer $\tilde{I}=\tilde{I}_n$ olarak alırsak, bu durumda $(F,E)^{*}=(((F,E)^{-})^{\circ})^{-}$ olur. Buradan $((F,E)^{\circ})^{*}$ = $((((F,E)^{\circ})^{-})^{\circ})^{-}$ = $((F,E)^{\circ})^{-}$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki; $\tilde{I}=\tilde{I}_n$ olarak seçilirse, soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalılık ve soft düzenli kapalılık kavramları eşdeğerdir.

ii. $\Rightarrow$ Kandil ve ark. (2015), her soft ön-$\tilde{I}$-açık kümenin, soft ön-açık küme olduğunu göstermişlerdir.

$\Leftarrow$ Eğer $\tilde{I} = \{\Phi\}$ olarak alırsak, bu durumda $(F,E)^* = (F,E)^-$ olur. Ayrıca; $(F,E) \in SöA(X)$ ise, $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^-)^\circ$ dir. $((F,E)^{-*})^\circ$ $=$ $\left((F,E)\tilde{\cup}(F,E)^*\right)^\circ$ $\tilde{\supseteq}$ $(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^*)^\circ$ $=$ $(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^-)^\circ$ $=$ $((F,E)^-)^\circ \tilde{\supseteq} (F,E)$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki; $\tilde{I} = \{\Phi\}$ olarak seçilirse, soft ön-$\tilde{I}$-açıklık ve soft ön-açıklık kavramları eşdeğerdir.

Eğer $\tilde{I} = \tilde{I}_n$ olarak alırsak, bu durumda $(F,E)^* = (((F,E)^-)^\circ)^-$ dir. Ayrıca $(F,E) \in SöA(X)$ ise, $((F,E)^{-*})^\circ$ $=$ $\left((F,E)\tilde{\cup}(F,E)^*\right)^\circ$ $\tilde{\supseteq}$ $(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^*)^\circ$ $=$ $(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((((F,E)^-)^\circ)^-)^\circ$ $=$ $(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^-)^\circ$ $=$ $((F,E)^-)^\circ \tilde{\supseteq} (F,E)$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki; $\tilde{I} = \tilde{I}_n$ olarak seçilirse, soft ön-$\tilde{I}$-açıklık ve soft ön-açıklık kavramları eşdeğerdir.

iii. 1) $\tilde{I} = \{\Phi\}$ olması durumunda, $(F,E)^* = (F,E)^-$ olduğundan $(F,E)^{-*} = (F,E) \tilde{\cup} (F,E)^* = (F,E) \tilde{\cup} (F,E)^- = (F,E)^-$ eşitliği elde edilir.

2) $\tilde{I} = \tilde{I}_n$ olması durumunda, $(F,E)^* = (((F,E)^-)^\circ)^-$ olduğundan $(((F,E)^\circ)^{-*})^\circ$ $=$ $\left[(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^\circ)^*\right]^\circ$ $=$ $\left[(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((((F,E)^\circ)^-)^\circ)^-\right]^\circ$ $=$ $\left[(F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^\circ)^-\right]^\circ$ $= (((F,E)^\circ)^-)^\circ$ eşitliği elde edilir. Bu da gösteriyor ki, $\tilde{I} = \{\Phi\}$ veya $\tilde{I} = \tilde{I}_n$ olarak seçilirse, soft α-$\tilde{I}$-açıklık ile soft α-açıklık kavramları eşdeğerdir.

4.2.3. Uyarı. Kandil ve ark. (2015), her soft açık kümenin, soft α-$\tilde{I}$-açık küme olduğunu göstermişlerdir. Bu yüzden soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalılık ve soft α-$\tilde{I}$-açıklık (dolayısıyla soft açıklık) kavramları birbirinden bağımsızdır. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

4.2.3. Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$, $(F_2,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$, $(F_3,E)=$ $\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca; $(G_1,E)=\{\{x_4\},\phi\}$, $(G_2,E)=\{\phi,\{x_4\}\}$, $(G_3,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi ise X üzerinde bir soft ideal belirtir.

$(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$ soft kümesini alalım. Gerçekten; $((F_1,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\neq(F_1,E)$ olduğundan, (F_1,E) soft açık küme olmasına rağmen, (F_1,E) soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı bir küme değildir. Ayrıca; X, E ve τ aynı olmak üzere, $(H_1,E)=\{\{x_3\},\phi\}$, $(H_2,E)=\{\{x_4\},\phi\}$ ve $(H_3,E)=\{\{x_3,x_4\},\phi\}$ kümelerini içeren $\tilde{I}_1=\{\Phi,\ (H_1,E),\ (H_2,E),\ (H_3,E)\}$ soft ailesini alalım. Bu durumda $\tilde{I}_1$, X üzerinde bir soft ideal oluşturur. $(H,E)=\{\{x_2,x_4\},X\}$ soft kümesi için, $(H,E)^{\circ}$ $=$ $\{\{x_4\},\{x_4\}\}$ ve $((H,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_2,x_4\},X\}=(H,E)$ elde edilir ki; bu da (H,E) soft kümesinin soft düzenli-$\tilde{I}_1$-kapalı bir küme olduğunu gösterir. Diğer taraftan, $((H,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_2,x_4\},X\}$ olduğundan, $((H,E)^{\circ})^{-*}=(H,E)^{\circ}\,\tilde{\cup}\,((H,E)^{\circ})^{*}=$ $\{\{x_2,x_4\},X\}$ ve $(((H,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\{\{x_4\},\{x_4\}\}\,\tilde{\nsupseteq}\,(H,E)$ olarak elde edilir. Bu da gösteriyor ki (H,E) bir soft α-$\tilde{I}_1$-açık küme değildir.

4.2.4. Uyarı. Yukarıda tanımları verilen soft küme çeşitleri arasındaki ilişkileri aşağıdaki tabloda verdik.

soft τ^{*}*-kapalı*		*soft* α^{*}-$\tilde{I}$*-açık*		*soft* α-$\tilde{I}$*-açık*
$\uparrow$		$\uparrow$		$\downarrow$
soft $*$*-mükemmel*	$\leftarrow$	*soft düzenli-*$\tilde{I}$*-kapalı*	$\rightarrow$	*soft yarı-*$\tilde{I}$*-açık*
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
*soft *-kendi içinde yoğun*		*soft düzenli kapalı*		*soft yarı açık*

Tablo 1

Tablo 1'de verilen soft küme çeşitlerinden bazılarının bir diğerinden bağımsız kavramlar olduklarını aşağıdaki örneklerde gösterdik.

4.2.4. Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E=\{e\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E)=\{x_1,x_3\}$, $(F_2,E)=\{x_4\}$, $(F_3,E)=\{x_1,x_3,x_4\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca; $(G_1,E)=\{x_3\}$, $(G_2,E)=\{x_4\}$, $(G_3,E)=\{x_3,x_4\}$ olmak üzere; $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi ise, X üzerinde bir soft ideal belirtirler. Buna göre;

i. $(F_1,E)=\{x_1,x_3\}$ soft açık kümesi için, $(F_1,E)^*=\{x_1,x_2,x_3\}\tilde{\nsubseteq}(F_1,E)$ ve $(((F_1,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\left[(F_1,E)^{\circ}\tilde{\cup}((F_1,E)^{\circ})^*\right]^{\circ}=\{x_1,x_3\}=(F_1,E)^{\circ}$ olduğundan (F_1,E) bir soft α^*-$\tilde{I}$-açık kümedir fakat soft τ^*-kapalı küme değildir.

ii. $(H,E)=\{x_2,x_4\}$ soft açık kümesi için, $(H,E)^*=\{x_2\}\tilde{\subseteq}(H,E)$ olduğundan, (H,E) bir soft τ^*-kapalı kümedir. Bununla birlikte $((H,E)^{\circ})^{-*}=\{x_4\}^{-*}=\Phi$ ve buradan $(((H,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\Phi\neq\{x_4\}=(H,E)^{\circ}$ olduğundan, (H,E) bir soft α^*-$\tilde{I}$-açık küme değildir.

i) ve ii) den kolayca görülür ki, soft α^*-$\tilde{I}$-açıklık ve soft τ^*-kapalılık kavramları birbirinden bağımsızdır.

4.2.5. Örnek. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, 4.2.4. Örnekteki soft ideal topolojik uzay olsun. Buna göre;

i. $(F_1,E)=\{x_1,x_3\}$ soft açık kümesi için, $(F_1,E)^*=\{x_1,x_2,x_3\}\tilde{\supseteq}(F_1,E)$ ve $((F_1,E)^{\circ})^{-}=(F_1,E)^{-}=\{x_1,x_2,x_3\}\neq(F_1,E)$ olduğundan, (F_1,E) soft $*$-kendi içinde yoğun kümedir fakat soft düzenli kapalı küme değildir.

ii. $(H,E)=\{x_2,x_4\}$ soft açık kümesi için, $(H,E)^*=\{x_2\}\tilde{\nsupseteq}(H,E)$ ve $((H,E)^{\circ})^{-}=\{x_4\}^{-}=\{x_2,x_4\}=(H,E)$ olduğundan, (H,E) soft düzenli kapalı kümedir fakat soft $*$-kendi içinde yoğun küme değildir.

i) ve ii) den kolayca görülür ki, soft düzenli kapalılık ve soft $*$-kendi içinde yoğun küme olma kavramları birbirinden bağımsızdır.

4.2.6. Örnek. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, 4.2.4. Örnekteki soft ideal topolojik uzay olsun. Buna göre; $(L,E)=\{x_2,x_3,x_4\}$ soft açık kümesi için, $(((L,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\{x_4\}=(L,E)^{\circ}$ olduğundan, (L,E) soft α^*-$\tilde{I}$-açık kümedir fakat $((L,E)^{\circ})^{-*}=\{x_4\}\tilde{\not\supseteq}\{x_2,x_3,x_4\}=(L,E)$ ve $(((L,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\{x_4\}\tilde{\not\supseteq}(L,E)$ olduğundan, (L,E) ne soft yarı-$\tilde{I}$-açık kümedir ne de soft α-$\tilde{I}$-açık kümedir.

4.2.7. Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E)=\{\phi,\{x_3\}\}$, $(F_2,E)=\{\{x_1\},\{x_3\}\}$, $(F_3,E)=\{\{x_1,x_2\},\{x_3\}\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca; $(G_1,E)=\{\{x_1\},\phi\}$, $(G_2,E)=\{\{x_3\},\phi\}$, $(G_3,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$ $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi ise X üzerinde bir soft ideal belirtirler. Buna göre;

$(K,E)=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\}\}$ soft açık kümesini gözönüne alalım, $((K,E)^{\circ})^{-*}=(K,E)^{\circ}\tilde{\cup}((K,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_1,x_2\},\{x_3\}\}\tilde{\cup}\tilde{X}=\tilde{X}\tilde{\supseteq}(K,E)$ ve $((K,E)^{\circ})^{-*}=\tilde{X}\tilde{\supseteq}(K,E)$ olduğundan, (K,E) soft α-$\tilde{I}$-açık küme ve soft yarı-$\tilde{I}$-açık kümedir. Ancak, $(((K,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\tilde{X}\neq(K,E)^{\circ}$ olduğundan, (K,E) soft α^*-$\tilde{I}$-açık küme değildir.

4.2.6. ve 4.2.7. Örneklerden anlaşılıyor ki, soft yarı-$\tilde{I}$-açıklık (soft α-$\tilde{I}$-açıklık) ve soft α^*-$\tilde{I}$-açıklık kavramları birbirinden bağımsızdır.

4.3. Soft $A_{\tilde{I}}$-Kümeler

4.3.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer $\tilde{X}^*=\tilde{X}$ ise; $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayına, ***soft Hayashi-Samuels uzayı*** denir.

4.3.1. Örnek. 4.1.1. Örnekteki $(X,\tau,\tilde{I}_1,E)$ soft ideal topolojik uzayı için, $\tilde{X}^*=\tilde{X}$ olduğundan; $(X,\tau,\tilde{I}_1,E)$, bir soft Hayashi-Samuels uzayıdır.

4.3.2. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayının herhangi bir (F,E) soft alt kümesi, $(G,E)\in\tau$ ve $(H,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olmak üzere; $(F,E)=(G,E)\tilde{\cap}(H,E)$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu durumda (F,E) soft kümesine ***soft*** $\boldsymbol{A_{\tilde{I}}}$***-küme*** denir ve $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayındaki tüm soft $A_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesi, $\boldsymbol{SA_{\tilde{I}}(X)}$ ile gösterilir.

4.3.1. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayındaki bir (F,E) soft alt kümesi için aşağıdaki özellikler vardır.

i. Eğer (F,E) soft açık küme ve $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft Hayashi-Samuels uzay ise; bu durumda (F,E), bir soft $A_{\tilde{I}}$-kümedir.

ii. Eğer (F,E) soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme ise; bu durumda (F,E), bir soft $A_{\tilde{I}}$-kümedir.

İspat. $\tilde{X} \in \tau$ ve $\tilde{X} \in Sd\tilde{I}K(X)$ olduğundan ispat açıktır.

4.3.1. Uyarı. 4.3.1. Önermede verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

4.3.2. Örnek. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, 4.2.4. Örnekteki gibi olsun.

i. $(H,E)=\{x_1,x_2,x_3\}$ olsun. $(H,E)^{\circ}=\{x_1,x_3\} \neq \{x_1,x_2,x_3\}=(H,E)$ ve $((H,E)^{\circ})^{*}=\{x_1,x_2,x_3\}=(H,E)$ olduğundan, (H,E) soft açık küme değildir fakat soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümedir. Bununla beraber $(H,E)=\tilde{X}\,\tilde{\cap}\,(H,E)$ ve $\tilde{X}\in\tau$ olduğundan, (H,E) aynı zamanda bir soft $A_{\tilde{I}}$-kümedir.

ii. $(K,E)=\{x_1,x_3\}$ olsun. $((K,E)^{\circ})^{*}=\{x_1,x_2,x_3\}\neq(K,E)$ olduğundan, (K,E) bir soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme değildir. *i)*'de gösterdik ki (H,E) bir soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümedir. Buradan $(K,E)\in\tau$ ve $(K,E)=(K,E)\,\tilde{\cap}\,(H,E)$ olduğundan, (K,E) bir soft $A_{\tilde{I}}$-kümedir.

4.3.2. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayındaki bir (F,E) soft alt kümesi için aşağıdaki özellikler vardır:

i. Eğer (F,E) bir soft $A_{\tilde{I}}$-küme ise; (F,E), soft $C_{\tilde{I}}$-küme ve soft $\tilde{I}$-yerel kapalı kümedir.

ii. Eğer (F,E) bir soft $A_{\tilde{I}}$-küme ise; (F,E) bir soft A-kümedir.

İspat. 4.2.1. ve 4.2.2. Önerme yardımıyla ispat kolayca yapılabilir.

4.3.2. Uyarı. 4.3.2. Önermede verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

4.3.3. Örnek. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, 4.2.4. Örnekteki gibi olsun. Buna göre;

i. $(H,E)=\{x_1,x_2\}$ olsun. $(((H,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\Phi=(H,E)^{\circ}$ olduğundan, (H,E) soft α^*-$\tilde{I}$-açık kümedir. Ayrıca, $\tilde{X}\in\tau$ ve $(H,E)=\tilde{X}\,\tilde{\cap}\,(H,E)$ olduğundan; (H,E), soft $C_{\tilde{I}}$-kümedir. Üstelik, $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\neq(H,E)$ ve (H,E)'yi içeren tek soft açık $\tilde{X}$ olduğundan; (H,E), soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme değildir ve dolayısıyla da (H,E) soft $A_{\tilde{I}}$-küme değildir. $(H,E)^{*}=\{x_1,x_2,x_3\}\neq(H,E)$ olduğundan; (H,E), soft $*$-mükemmel küme değildir ve sonuç olarak (H,E) soft $\tilde{I}$-yerel kapalı küme değildir.

ii. $(H,E)=\{x_2\}$ olsun. $(H,E)^{*}=\{x_2\}=(H,E)$ ve $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\neq(H,E)$ olduğundan; (H,E), soft $*$-mükemmel kümedir ancak soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme değildir. Dolayısıyla soft $\tilde{I}$-yerel kapalı kümedir ancak soft $A_{\tilde{I}}$-küme değildir. Üstelik, $(((H,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}=\Phi=(H,E)^{\circ}$ olduğundan; (H,E), soft α^*-$\tilde{I}$-açık kümedir ve dolayısıyla (H,E), soft $C_{\tilde{I}}$-kümedir.

iii. $(H,E)=\{x_2,x_4\}$ olsun. $((H,E)^{\circ})^{-}=\{x_2,x_4\}=(H,E)$ ve $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\neq(H,E)$ olduğundan; (H,E), soft düzenli kapalı kümedir ancak soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme değildir. Böylece (H,E), soft A-kümedir ancak soft $A_{\tilde{I}}$-küme değildir.

4.3.3. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft Hayashi-Samuels uzayınındaki bir (F,E) soft alt kümesi için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir.

i. (F,E), soft açık kümedir,

ii. (F,E), soft α-$\tilde{I}$-açık ve soft $A_{\tilde{I}}$-kümedir,

iii. (F,E), soft ön- $\tilde{I}$ -açık ve soft $A_{\tilde{I}}$ -kümedir.

İspat.

$\boldsymbol{i}) \rightarrow \boldsymbol{ii})$ $(F,E) \in \tau$ olsun. Kandil ve ark. (2015) gösterdi ki; her soft açık küme, soft α - $\tilde{I}$ -açık kümedir. Diğer taraftan, $\tilde{X} \in Sd\tilde{I}K(X)$ ve $(F,E) = (F,E) \tilde{\cap} \tilde{X}$ olduğundan; $(F,E) \in SA_{\tilde{I}}(X)$ elde edilir.

$\boldsymbol{ii}) \rightarrow \boldsymbol{iii})$ Her soft α - $\tilde{I}$ -açık küme, soft ön- $\tilde{I}$ -açık küme olduğundan ispat açıktır.

$\boldsymbol{iii}) \rightarrow \boldsymbol{i})$ $(F,E) \in Sö\tilde{I}A(X)$ ve $(F,E) \in SA_{\tilde{I}}(X)$ olsun. Bu durumda $(G,E) \in \tau$ ve $(H,E) \in Sd\tilde{I}K(X)$ olmak üzere; $(F,E) = (G,E) \tilde{\cap} (H,E)$ şeklinde yazılabilir. $(F,E) \in Sö\tilde{I}A(X)$ olduğu için, $(F,E) = (G,E) \tilde{\cap} (H,E) \tilde{\subseteq} \left(\left[(G,E) \tilde{\cap} (H,E)\right]^{-*}\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} \left((G,E)^{-*} \tilde{\cap} (H,E)^{-*}\right)^{\circ}$ yazılır. Ayrıca, 4.2.1. Sonuca göre $(H,E) \in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ ve $(H,E)^{-*} = (H,E)$ olduğu kullanılarak $(F,E) = (G,E) \tilde{\cap} (H,E) \tilde{\subseteq} \left((G,E)^{-*} \tilde{\cap} (H,E)^{-*}\right)^{\circ} = \left((G,E)^{-*} \tilde{\cap} (H,E)\right)^{\circ} = \left((G,E)^{-*}\right)^{\circ} \tilde{\cap} (H,E)^{\circ}$ elde edilir. Sonuç olarak; $(F,E) = (G,E) \tilde{\cap} (H,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \tilde{\cap} \left((G,E)^{-*}\right)^{\circ} \tilde{\cap} (H,E)^{\circ} = (G,E)^{\circ} \tilde{\cap} \left((G,E)^{-*}\right)^{\circ} \tilde{\cap} (H,E)^{\circ} = \left[(G,E) \tilde{\cap} (G,E)^{-*} \tilde{\cap} (H,E)\right]^{\circ} = \left[(G,E) \tilde{\cap} (H,E)\right]^{\circ}$ olur ki bu durumda (F,E) bir soft açık kümedir.

4.4. Soft Sürekliliğin Bir Ayrışımı

4.4.1. Tanım. (X_1, τ_1, A) ile (X_2, τ_2, B) birer soft topolojik uzay ve $u : X_1 \rightarrow X_2$ ile $p : A \rightarrow B$ birer fonksiyon olmak üzere; $f_{pu} : SK(X_1)_A \rightarrow SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu},

i. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in \tau_1$ ise, ***soft sürekli fonksiyon,*** (Zorlutuna ve ark., 2012)

ii. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in S\alpha A(X_1)$ ise, ***soft $\boldsymbol{\alpha}$-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2014)

iii. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in SöA(X_1)$ ise, ***soft ön-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2014)

iv. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in SyA(X_1)$ ise, ***soft yarı-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2014)

v. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in S\beta A(X_1)$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{\beta}$***-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2014)

vi. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in SA(X_1)$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{A}$***-sürekli fonksiyon***,

olarak adlandırılır.

4.4.2. Tanım. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$ ile $(X_2,\tau_2,\tilde{J},B)$ birer soft ideal topolojik uzay ve $u: X_1 \to X_2$ ile $p: A \to B$ birer fonksiyon olmak üzere; $f_{pu}: SK(X_1)_A \to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu},

i. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in S\tilde{I}A(X_1)$ ise, ***soft*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$***-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2015)

ii. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in S\alpha\tilde{I}A(X_1)$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{\alpha}$***-***$\tilde{\boldsymbol{I}}$***-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2015)

iii. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in Sö\tilde{I}A(X_1)$ ise, ***soft ön-*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$***-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2015)

iv. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in S\tilde{I}yK(X_1)$ ise, ***soft-*** $\tilde{\boldsymbol{I}}$***-yerel sürekli fonksiyon***,

v. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in SC_{\tilde{I}}(X_1)$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{C}_{\tilde{I}}$***-sürekli fonksiyon***,

vi. her $(G,B) \in \tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B) \in SA_{\tilde{I}}(X_1)$ ise, ***soft*** $\boldsymbol{A}_{\tilde{I}}$***-sürekli fonksiyon***,

olarak adlandırılır.

4.4.1. Örnek. 4.4.1. ve 4.4.2. Tanımlarda verilen yeni soft süreklilik çeşitleri için aşağıda birer örnek verdik.

i. $(X,\tau,\tilde{I}_3,E)$, 4.1.1. Örnekteki soft ideal topolojik uzay olsun. Ayrıca $Y=\{y_1,y_2\}$ ve $V=\{v_1,v_2\}$ kümeleri verilsin. $(H,V)=\{\{y_2\},\{y_1\}\}$ olmak üzere, $\varphi=\{\tilde{Y},\ \Phi,\ (H,V)\}$ ailesi, Y üzerinde bir soft topolojidir. Eğer

$u(x_1) = y_1$, $u(x_2) = y_2$, $p(e_1) = v_1$ ve $p(e_2) = v_2$ olarak tanımlanırsa $f_{pu} : SK(X)_E \to SK(Y)_V$ soft fonksiyonu, soft-$\tilde{I}$ -yerel sürekli fonksiyondur.

ii. $(X, \tau, \tilde{I}, E)$ 4.4.2. Örnekteki soft ideal topolojik uzay olsun. Ayrıca $Y = \{y_1, y_2\}$ ve $V = \{v\}$ kümeleri verilsin. $(H,V) = \{y_1\}$ olmak üzere, $\varphi = \{\tilde{Y}, \Phi, (H,V)\}$ ailesi, Y üzerinde bir soft topolojidir. Eğer $u(x_1) = u(x_2) = y_1$, $u(x_3) = u(x_4) = y_2$ ve $p(e) = v$ olarak tanımlanırsa $f_{pu} : SK(X)_E \to SK(Y)_V$ soft fonksiyonu, soft $C_{\tilde{I}}$ -sürekli fonksiyondur.

iii. Soft ideal topolojik uzay ve soft topolojik uzay olarak *ii)* de verilenleri alalım. Eğer $u(x_2) = u(x_4) = y_1$, $u(x_1) = u(x_3) = y_2$ ve $p(e) = v$ olarak tanımlanırsa $f_{pu} : SK(X)_E \to SK(Y)_V$ soft fonksiyonu, soft A-sürekli fonksiyondur.

iv. Soft ideal topolojik uzay ve soft topolojik uzay olarak *ii)* de verilenleri alalım. Eğer $u(x_1) = u(x_2) = u(x_3) = y_1$, $u(x_4) = y_2$ ve $p(e) = v$ olarak tanımlanırsa $f_{pu} : SK(X)_E \to SK(Y)_V$ soft fonksiyonu, soft $A_{\tilde{I}}$ -sürekli fonksiyondur.

4.4.1. Önerme. $(X_1, \tau_1, \tilde{I}, A)$ ile $(X_2, \tau_2, \tilde{J}, B)$ birer soft ideal topolojik uzay olmak üzere; $f_{pu} : SK(X_1)_A \to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. Eğer f_{pu} soft $A_{\tilde{I}}$ -sürekli ise, soft-$\tilde{I}$ -yerel süreklidir;

ii. Eğer f_{pu} soft $A_{\tilde{I}}$ -sürekli ise, soft $C_{\tilde{I}}$ -süreklidir.

iii. Eğer f_{pu} soft $A_{\tilde{I}}$ -sürekli ise, soft A-süreklidir.

İspat. 4.3.2. Önerme yardımıyla ispat kolayca yapılabilir.

4.4.1. Uyarı. 4.4.1. Önermede verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

4.4.2. Örnek.

i. 4.4.1. Örnek *i)* de, f_{pu} fonksiyonunun soft-$\tilde{I}$-yerel sürekli olup, soft $A_{\tilde{I}}$-sürekli olmadığını gösterdik.

ii. 4.4.1. Örnek *ii)* de, f_{pu} fonksiyonunun soft $C_{\tilde{I}}$-sürekli olup, soft $A_{\tilde{I}}$-sürekli olmadığını gösterdik.

iii. 4.4.1. Örnek *iii)* de, f_{pu} fonksiyonunun soft A-sürekli olup, soft $A_{\tilde{I}}$-sürekli olmadığını gösterdik.

4.4.1. Teorem. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$ soft Hayashi-Samuels uzay ve (X_2,τ_2,B) soft topolojik uzay olmak üzere; $f_{pu}:SK(X_1)_A \rightarrow SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu için, aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. f_{pu}, soft süreklidir;

ii. f_{pu}, soft α-$\tilde{I}$-sürekli ve soft $A_{\tilde{I}}$-süreklidir;

iii. f_{pu}, soft ön-$\tilde{I}$-sürekli ve soft $A_{\tilde{I}}$-süreklidir.

İspat. 4.3.3. Önermenin sonucu olarak elde edilir.

4.4.2. Önerme. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$ ile $(X_2,\tau_2,\tilde{J},B)$ birer soft ideal topolojik uzay ve $\tilde{I}=\tilde{I}_n$ (veya $\tilde{I}=\{\Phi\}$) olsun. Bu durumda; $f_{pu}:SK(X_1)_A \rightarrow SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. f_{pu} soft süreklidir,

ii. f_{pu} soft-α-sürekli ve soft A-süreklidir,

iii. f_{pu} soft ön-sürekli ve soft A-süreklidir.

İspat. $\tilde{I}=\tilde{I}_n$ (veya $\tilde{I}=\{\Phi\}$) olarak seçilirse $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$ bir soft Hayashi-Samuels uzayı olur. Bu durumda 4.4.1. Teorem ile 4.2.3. Önerme *ii)* ve *iii)* takip edilerek ispat elde edilebilir.

5. SOFT $f_{\tilde{I}}$-KÜME

5.1. Soft $f_{\tilde{I}}$-Küme ve Bazı Karakterizasyonları

5.1.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayındaki bir (F,E) soft alt kümesi için, eğer $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}$ sağlanıyor ise; (F,E) soft kümesine, ***soft*** $\boldsymbol{f_{\tilde{I}}}$***-küme*** denir.

Bu çalışma boyunca X üzerindeki tüm soft $f_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesini $\boldsymbol{Sf_{\tilde{I}}(X)}$ ile göstereceğiz.

5.1.1. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayı verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $Sd\tilde{I}K(X)\,\tilde{\subseteq}\,Sf_{\tilde{I}}(X)$,

ii. $Sf_{\tilde{I}}(X)\,\tilde{\subseteq}\,Sy\tilde{I}A(X)$,

iii. $Sf_{\tilde{I}}(X)\,\tilde{\subseteq}\,S_k^{*}(X)_{\tilde{I}}$.

İspat.

i. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olsun. Bu durumda $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{*}$ dir. Buradan $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}$ olduğu açıktır. O halde $(F,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ elde edilir.

ii. $(F,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ olsun. Bu durumda $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}$ dir. Buradan $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{-*}$ olduğu açıktır. O halde $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ elde edilir.

iii. $(F,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ olsun. Bu durumda $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}$ dir. Buradan $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{*}$ olduğu açıktır. O halde $(F,E)\in S_k^{*}(X)_{\tilde{I}}$ elde edilir.

5.1.1. Uyarı. Yukarıda tanımları verilen bazı soft küme çeşitleri arasındaki ilişkiler, 4.2.1., 4.2.2. ve 5.1.1. Önermeler, 4.2.1. Sonuç, Kandil ve ark. (2015) ve Yumak ve Kaymakcı (2015) çalışmalarındaki bazı sonuçlar kullanılarak aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$
\begin{array}{ccccccc}
S\alpha^{*}\tilde{I}A(X) & \leftarrow & Sd\tilde{I}K(X) & \rightarrow & S_m^{*}(X)_{\tilde{I}} & \rightarrow & S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Sf_{\tilde{I}}(X) & \rightarrow & S_k^{*}(X)_{\tilde{I}} & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
\tau & & Sy\tilde{I}A(X) & \rightarrow & SyA(X) & & \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
S\alpha\tilde{I}A(X) & & S\beta\tilde{I}A(X) & \rightarrow & S\beta A(X) & & \\
 & \searrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
S\tilde{I}A(X) & \rightarrow & S\ddot{o}\tilde{I}A(X) & \rightarrow & S\ddot{o}A(X) & &
\end{array}
$$

Tablo 2

5.1.2. Uyarı. Tablo 2’de verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

5.1.1. Örnek. 4.2.2. Örnekteki $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayını gözönüne alalım.

i. $(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}\in\tau$ için, $((F_1,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\,\tilde{\supseteq}\,(F_1,E)$ olduğundan, $(F_1,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ olmasına rağmen $(F_1,E)\notin Sd\tilde{I}K(X)$ sağlanır.

ii. $(H,E)=\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_4\}\}$ soft kümesi için, $((H,E)^{\circ})^{-*}=\tilde{X}\,\tilde{\supseteq}\,(H,E)$ ve $((H,E)^{\circ})^{*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\,\tilde{\not\supseteq}\,(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ sağlanır, ancak $(H,E)\notin Sf_{\tilde{I}}(X)$ olur.

iii. $(H,E)=\{\{x_1\},\{x_2\}\}$ soft kümesi için, $(H,E)^{*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\,\tilde{\supseteq}\,(H,E)$, $((H,E)^{\circ})^{*}=\Phi\,\tilde{\not\supseteq}\,(H,E)$ ve $(H,E)^{*}\neq(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in S_k^{*}(X)_{\tilde{I}}$ olur. Ancak $(H,E)\notin Sf_{\tilde{I}}(X)$ ve $(H,E)\notin S_m^{*}(X)_{\tilde{I}}$ elde edilir.

iv. $(H,E)=\{\{x_1,x_2,x_3\},X\}$ soft kümesi için, $(H,E)^{*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\,\tilde{\subseteq}\,(H,E)$ ve $(H,E)^{*}\neq(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ olur. Ancak $(H,E)\notin S_m^{*}(X)_{\tilde{I}}$ sağlanır.

v. $(H,E)=\{\{x_2,x_4\},\{x_4\}\}$ soft kümesi için, $((H,E)^{\circ})^{-}=\{\{x_2,x_4\},X\}\tilde{\supseteq}$ (H,E) ve $((H,E)^{\circ})^{-*}=\{\{x_4\},\{x_4\}\}\tilde{\not\supseteq}(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in SyA(X)$ sağlanır, ancak $(H,E)\notin Sy\tilde{I}A(X)$ olur.

vi. $(H,E)=\{\{x_2,x_4\},\phi\}$ soft kümesi için, $(((H,E)^{-})^{\circ})^{-}=\{\{x_2,x_4\},X\}\tilde{\supseteq}$ (H,E) ve $(((H,E)^{-*})^{\circ})^{-}=\Phi\tilde{\not\supseteq}(H,E)$ olduğundan; $(H,E)\in S\beta A(X)$ olur. Ancak $(H,E)\notin S\beta\tilde{I}A(X)$ sağlanır.

5.1.3. Uyarı. Tablo 2 deki diğer özelliklerin terslerinin genelde doğru olmadığı, 4.2.1. ve 4.2.2. Örnekler ile Kandil ve ark. (2015) ve Yumak ve Kaymakçı (2015) tarafından yapılan çalışmalarda gösterilmiştir.

5.1.2. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, soft ideal topolojik uzay ve Δ keyfi bir indis kümesi olmak üzere; aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. Eğer $\{(F_\alpha,E):\ \alpha\in\Delta\}\tilde{\subseteq}Sf_{\tilde{I}}(X)$ ise; $\tilde{\bigcup}_{\alpha\in\Delta}(F_\alpha,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$,

ii. Eğer $(F,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ ve $(H,E)\in\tau$ ise; $\left[(F,E)\tilde{\cap}(H,E)\right]\in Sf_{\tilde{I}}(X)$.

İspat.

i. $\{(F_\alpha,E):\ \alpha\in\Delta\}\tilde{\subseteq}Sf_{\tilde{I}}(X)$ olduğundan; her $\alpha\in\Delta$ için, $(F_\alpha,E)\tilde{\subseteq}((F_\alpha,E)^{\circ})^{*}$ dir. Burada 3.3.1. Teorem *viii)* ve 3.2.1. Önerme *v)* kullanılarak $\tilde{\bigcup}_{\alpha\in\Delta}(F_\alpha,E)\tilde{\subseteq}\tilde{\bigcup}_{\alpha\in\Delta}((F_\alpha,E)^{\circ})^{*}\tilde{\subseteq}\left(\tilde{\bigcup}_{\alpha\in\Delta}(F_\alpha,E)^{\circ}\right)^{*}\tilde{\subseteq}\left(\left[\tilde{\bigcup}_{\alpha\in\Delta}(F_\alpha,E)\right]^{\circ}\right)^{*}$ elde edilir ki, bu durumda $\tilde{\bigcup}_{\alpha}(F_\alpha,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ elde edilir.

ii. $(F,E)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ ve $(H,E)\in\tau$ olsun. O halde $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^{\circ})^{*}$ ve $(H,E)\tilde{\subseteq}(H,E)^{\circ}$ dir. Bu ifadeler ile 3.3.1. Teorem ve 3.2.1. Önermedeki özellikler kullanılarak, $\left[(F,E)\tilde{\cap}(H,E)\right]\tilde{\subseteq}\left[((F,E)^{\circ})^{*}\ \tilde{\cap}\ (H,E)^{\circ}\right]\tilde{\subseteq}$

$\left[(F,E)^{\circ} \tilde{\cap} (H,E)^{\circ}\right]^{*} = \left(\left[(F,E)\tilde{\cap}(H,E)\right]^{\circ}\right)^{*}$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki, $\left[(F,E)\tilde{\cap}(H,E)\right] \in Sf_{\tilde{I}}(X)$ olur.

5.1.1. Sonuç. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, soft ideal topolojik uzay ve Δ, keyfi bir indis kümesi olmak üzere; aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. Eğer $\{(F_{\alpha},E):\ \alpha\in\Delta\} \tilde{\subseteq} Sd\tilde{I}K(X)$ ise; $\tilde{\bigcup}_{\alpha\in\Delta}(F_{\alpha},E) \in Sf_{\tilde{I}}(X)$,

ii. Eğer $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ ve $(H,E)\in\tau$ ise; $\left[(F,E)\tilde{\cap}(H,E)\right] \in Sf_{\tilde{I}}(X)$.

İspat. 5.1.1. ve 5.1.2. Önermeler yardımıyla ispat kolayca yapılabilir.

5.1.2. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için, eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-}$ ise; (F,E) soft kümesine, ***hemen hemen soft-$\tilde{I}$-açık küme*** denir.

Bu çalışma boyunca $(X,\tau,\tilde{I},E)$ üzerindeki tüm hemen hemen soft-$\tilde{I}$-açık kümelerin ailesini $\boldsymbol{hS\tilde{I}A(X)}$ ile göstereceğiz.

5.1.3. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. Eğer $\tilde{I}=\{\Phi\}$ (veya $\tilde{I}=\tilde{I}_n$) ise; soft $f_{\tilde{I}}$-küme, soft yarı-$\tilde{I}$-açık küme ve soft yarı açık küme kavramları çakışıktır.

ii. Eğer $\tilde{I}=SK(X)_E$ ise, soft $f_{\tilde{I}}$-küme ve hemen hemen soft-$\tilde{I}$-açık küme kavramları çakışıktır.

İspat.

i. **a)** $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olsun. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için, $(F,E)^{*}=(F,E)^{-}$ ve $(F,E)^{-*}=(F,E)\tilde{\cup}(F,E)^{*}=(F,E)^{-}$ dir. Buradan $((F,E)^{\circ})^{*}=((F,E)^{\circ})^{-}=((F,E)^{\circ})^{-*}$ olduğundan, soft $f_{\tilde{I}}$-küme, soft yarı-$\tilde{I}$-açık küme ve soft yarı açık küme kavramları çakışıktır.

b) $\tilde{I} = \tilde{I}_n$ olsun. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için, $(F,E)^* = (((F,E)^-)^\circ)^-$ dir. Buradan $((F,E)^\circ)^* = ((((F,E)^\circ)^-)^\circ)^- = ((F,E)^\circ)^-$ ve $((F,E)^\circ)^{-*} = (F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^\circ)^* = (F,E)^\circ \tilde{\cup} ((F,E)^\circ)^- = ((F,E)^\circ)^-$ olup, $((F,E)^\circ)^* = ((F,E)^\circ)^{-*} = ((F,E)^\circ)^-$ elde edilir. O halde soft $f_{\tilde{I}}$-küme, soft yarı-$\tilde{I}$-açık küme ve soft yarı açık küme kavramları çakışıktır.

ii. $\tilde{I} = SK(X)_E$ olsun. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için, $(F,E)^* = \Phi$ dir. Buradan $(((F,E)^*)^\circ)^- = \Phi = ((F,E)^\circ)^*$ elde edilir. O halde soft $f_{\tilde{I}}$-küme ve hemen hemen soft-$\tilde{I}$-açık küme kavramları eşdeğerdir.

5.1.4. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için, eğer $(F,E) \in \tau$ ve $(F,E) \in S_k^*(X)_{\tilde{I}}$ ise; $(F,E) \in Sf_{\tilde{I}}(X)$ olur.

İspat. $(F,E) \in \tau$ ve $(F,E) \in S_k^*(X)_{\tilde{I}}$ olsun. Bu durumda $(F,E) = (F,E)^\circ$ ve $(F,E) \tilde{\subseteq} (F,E)^*$ dir. O halde $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^\circ)^*$ olup $(F,E) \in Sf_{\tilde{I}}(X)$ elde edilir.

5.1.5. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayı ile bu uzayda bir (F,E) soft alt kümesi verilsin. $(F,E) \in Sd\tilde{I}K(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E) \in Sf_{\tilde{I}}(X)$ ve $(F,E) \in S\tau^*K(X)_{\tilde{I}}$ olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow$ 4.2.1. Sonuç ve 5.1.1. Önerme *i)* yardımıyla kolayca yapılabilir.

$\Leftarrow$ $(F,E) \in Sf_{\tilde{I}}(X)$ ve $(F,E) \in S\tau^*K(X)_{\tilde{I}}$ olsun. Bu durumda $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^\circ)^*$ ve $(F,E)^* \tilde{\subseteq} (F,E)$ dir. Ayrıca, $(F,E)^\circ \tilde{\subseteq} (F,E)$ olduğundan; $((F,E)^\circ)^* \tilde{\subseteq} (F,E)^*$ dir. Böylece $((F,E)^\circ)^* \tilde{\subseteq} (F,E)^* \tilde{\subseteq} (F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^\circ)^*$ olup, $(F,E) = ((F,E)^\circ)^*$ elde edilir ki; buradan $(F,E) \in Sd\tilde{I}K(X)$ olur.

5.2. Soft $t_{\tilde{I}}$-Küme ve Soft Yarı-$\tilde{I}$-Düzenli Küme

5.2.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının bir (F,E) soft alt kümesi için, eğer

i. $(F,E)^{\circ}=((F,E)^{-*})^{\circ}$ ise; (F,E) soft kümesi ***soft $t_{\tilde{I}}$-küme***,

ii. (F,E), hem soft $t_{\tilde{I}}$-küme hem de soft yarı-$\tilde{I}$-açık küme ise; (F,E) soft kümesi ***soft yarı-$\tilde{I}$-düzenli küme***,

olarak isimlendirilir.

Bu çalışma boyunca X üzerindeki tüm soft $t_{\tilde{I}}$-kümelerin ailesini $\boldsymbol{St_{\tilde{I}}(X)}$, tüm soft yarı-$\tilde{I}$-düzenli kümelerin ailesini de $\boldsymbol{Sy\tilde{I}d(X)}$ ile göstereceğiz.

5.2.1. Uyarı. Aşağıdaki örnekte soft $t_{\tilde{I}}$-küme ve soft yarı-$\tilde{I}$-açık küme kavramlarının birbirinden bağımsız olduklarını gösterdik.

5.2.1. Örnek. 4.2.2. Örnekteki $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayını alalım.

i. $(H,E)=\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_4\}\}$ olsun. Buradan $((H,E)^{\circ})^{-*}=\tilde{X}\ \tilde{\supseteq}\,(H,E)$ ve $(H,E)^{\circ}=\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_4\}\}\neq\tilde{X}=((H,E)^{-*})^{\circ}$ olduğundan; (H,E) soft yarı-$\tilde{I}$-açık kümedir ancak soft $t_{\tilde{I}}$-küme değildir.

ii. $(K,E)=\{\{x_2,x_4\},\phi\}$ olsun. Buradan $(K,E)^{\circ}=\Phi=((K,E)^{-*})^{\circ}$ ve $((K,E)^{\circ})^{-*}=\Phi\ \tilde{\not\supseteq}\,(K,E)$ olduğundan; (K,E), soft $t_{\tilde{I}}$-kümedir ancak soft yarı-$\tilde{I}$-açık küme değildir.

5.2.1. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayı verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $Sd\tilde{I}K(X)\ \tilde{\subseteq}\ Sy\tilde{I}d(X)$,

ii. $Sy\tilde{I}d(X)\ \tilde{\subseteq}\ Sy\tilde{I}A(X)$,

iii. $Sy\tilde{I}d(X)\ \tilde{\subseteq}\ St_{\tilde{I}}(X)$,

iv. $S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}\ \tilde{\subseteq}\ St_{\tilde{I}}(X)$.

İspat.

i. $(H,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olsun. Tablo 2 ye göre, $(H,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ dir. Ayrıca, $(H,E)=((H,E)^{\circ})^{*}\Rightarrow (H,E)^{\circ}=(((H,E)^{\circ})^{*})^{\circ}$ ....(1) ve $(H,E)=((H,E)^{\circ})^{*}$ $\Rightarrow$ $(H,E)^{-*}$ $=$ $(((H,E)^{\circ})^{*})^{-*}$ $=$ $((H,E)^{\circ})^{*}\tilde{\cup}(((H,E)^{\circ})^{*})^{*}$ $=$ $((H,E)^{\circ})^{*}$ $\Rightarrow$ $((H,E)^{-*})^{\circ}=(((H,E)^{\circ})^{*})^{\circ}$ ....(2) yazılabilir. O halde (1) ve (2) den $(H,E)^{\circ}=((H,E)^{-*})^{\circ}$ dir. Bu da gösteriyor ki, $(H,E)\in St_{\tilde{I}}(X)$. Böylece $(H,E)\in$ $Sy\tilde{I}d(X)$ elde edilmiş olur.

ii. 5.2.1. Tanımın direk sonucudur.

iii. 5.2.1. Tanımın direk sonucudur.

iv. $(H,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ olsun. Bu durumda $(H,E)^{*}\tilde{\subseteq}(H,E)$ dir. Buradan, $((H,E)^{-*})^{\circ}=\left((H,E)\tilde{\cup}(H,E)^{*}\right)^{\circ}=(H,E)^{\circ}$ olduğundan, $(H,E)\in St_{\tilde{I}}(X)$ elde edilir.

Tablo 2 ve 5.2.1. Önerme yardımıyla aşağıdaki tabloyu verdik.

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{soft düzenli-}\tilde{I}\textit{-kapalı} & \rightarrow & \textit{soft } *\textit{-mükemmel} & \rightarrow & \textit{soft } \tau^{*}\textit{-kapalı} \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\textit{soft yarı-}\tilde{I}\textit{-düzenli} & & \rightarrow & & \textit{soft } t_{\tilde{I}}\textit{-küme} \\
\downarrow & & & & \\
\textit{soft yarı-}\tilde{I}\textit{-açık} & & & &
\end{array}$$

Tablo 3

5.2.2. Uyarı. 5.2.1. Önermede verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekde gösterdik.

5.2.2. Örnek. 4.2.2. Örnekteki $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayını alalım. Yani; $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$, $(F_2,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$, $(F_3,E)=$ $\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca; $(G_1,E)=\{\{x_4\},\phi\}$, $(G_2,E)=\{\phi,\{x_4\}\}$,

$(G_3, E) = \{\{x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tilde{I} = \{\Phi, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ ailesi ise X üzerinde bir soft ideal belirtir.

i. $(F_1, E) = \{\{x_1, x_3\}, \phi\}$ soft açık kümesini alalım. $((F_1, E)^{-*})^{\circ} = \{\{x_1, x_3\}, \phi\}$ $= (F_1, E)^{\circ}$ ve $((F_1, E)^{\circ})^{-*} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \tilde{\supseteq} (F_1, E)$ olduğundan, $(F_1, E) \in St_{\tilde{I}}(X)$ ve $(F_1, E) \in Sy\tilde{I}A(X)$ dir. 5.2.1. Tanım gereği $(F_1, E) \in$ $Sy\tilde{I}d(X)$ olur. $(F_1, E) \notin Sd\tilde{I}K(X)$ olduğunu, 5.1.1. Örnekte göstermiştik.

ii. $(H, E) = \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$ olsun. 5.2.1. Örnekte $(H, E) \in Sy\tilde{I}A(X)$ ve $(H, E) \notin St_{\tilde{I}}(X)$ olduğunu gösterdik. O halde $(H, E) \notin Sy\tilde{I}d(X)$ olur.

iii. $(K, E) = \{\{x_2, x_4\}, \phi\}$ olsun. 5.2.1. Örnekte $(K, E) \in St_{\tilde{I}}(X)$ ve $(K, E) \notin Sy\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterdik. O halde $(H, E) \notin Sy\tilde{I}d(X)$ olur.

iv. $(K, E) = \{\{x_2, x_4\}, \phi\}$ olsun. 5.2.1. Örnekte $(K, E) \in St_{\tilde{I}}(X)$ olduğunu gösterdik. Ancak $(K, E)^* = \{\{x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \tilde{\not\subseteq} (K, E)$ olduğundan, $(H, E) \notin S\tau^* K(X)_{\tilde{I}}$ olur.

Diğer özelliklerle ilgili ters örnekler 4.2.1. ve 5.2.1. Örneklerde gösterilmiştir.

5.2.2. Önerme. $(X, \tau, \tilde{I}, E)$ uzayı ile bu uzaydaki herhangi bir (F, E) soft alt kümesi verilsin. $(F, E) \in Sd\tilde{I}K(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F, E) \in Sy\tilde{I}A(X)$ ve $(F, E) \in S_m^*(X)_{\tilde{I}}$ olmasıdır.

İspat.

Gerek şart 4.2.1. Önerme ile verildiği için sadece yeter şartın ispatını vereceğiz.

$\Leftarrow$ $(F, E) \in Sy\tilde{I}A(X)$ ve $(F, E) \in S_m^*(X)_{\tilde{I}}$ olsun. $(F, E) \in Sy\tilde{I}A(X)$ olduğundan; 3.3.4. Tanım ii) gereği $(F, E) \tilde{\subseteq} ((F, E)^{\circ})^{-*}$ sağlanır. Bu bağıntının soft lokal fonksiyonu alınırsa; 3.3.3. Tanım gereği $(F, E)^* \tilde{\subseteq} (((F, E)^{\circ})^{-*})^* =$ $\left[(F, E)^{\circ} \tilde{\cup} ((F, E)^{\circ})^*\right]^* = ((F, E)^{\circ})^* \tilde{\cup} (((F, E)^{\circ})^*)^* = ((F, E)^{\circ})^*$ elde edilir. Soft lokal fonksiyon sıra korur olduğundan, $(F,E)^* = ((F,E)^\circ)^*$ sağlanır. Ayrıca, $(F,E) \in S_m^*(X)_{\tilde{I}}$ olduğundan; 4.4.1. Tanım gereği $(F,E) = (F,E)^*$ sağlanır. Böylece; $(F,E) = ((F,E)^\circ)^*$ elde edilir; bu da $(F,E) \in Sd\tilde{I}K(X)$ olduğunu gösterir.

5.2.1. Teorem. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ herhangi bir soft ideal topolojik uzay olmak üzere; aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

i. $\tilde{X}^* = \tilde{X}$;

ii. $\tau \tilde{\cap} \tilde{I} = \{\Phi\}$;

iii. $(F,E) \in \tilde{I}$ ise, $(F,E)^\circ = \Phi$;

iv. Her $(F,E) \in \tau$ için, $(F,E) \tilde{\subseteq} (F,E)^*$.

İspat.

i) $\Rightarrow$ ***ii)*** $\tilde{X}^* = \tilde{X}$ olsun. Bu durumda her $x_e \in \tilde{X}$ ve her $x_e \in (F,E) \in \tau$ için, $(F,E) \tilde{\cap} \tilde{X} = (F,E) \notin \tilde{I}$ dır. Böylece $\tau \tilde{\cap} \tilde{I} = \{\Phi\}$ elde edilmiş olur.

ii) $\Rightarrow$ ***iii)*** $\tau \tilde{\cap} \tilde{I} = \{\Phi\}$ olsun. Bu durumda $\Phi \neq (F,E) \in \tilde{I}$ soft kümesi için, $(F,E) \notin \tau$ dir. Varsayalım ki $(F,E)^\circ \neq \Phi$ olsun. O halde $x_e \in (F,E)^\circ$ olacak şekilde bir $x_e \in \tilde{X}$ soft noktası vardır. Soft iç nokta tanımına göre, $x_e \in (H,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir $(H,E) \in \tau$ vardır. 3.3.1. Tanım *ii)* ye göre, $(H,E) \in \tilde{I}$ olur ki, bu $\tau \tilde{\cap} \tilde{I} = \{\Phi\}$ olmasıyla çelişir. O halde $(F,E)^\circ = \Phi$ dir.

iii) $\Rightarrow$ ***iv)*** $(F,E) \in \tau$ ve $x_e \in (F,E)$ olarak alalım. Kabul edelim ki $x_e \notin (F,E)^*$ olsun. Bu durumda, $(H,E) \tilde{\cap} (F,E) = (K,E) \in \tilde{I}$ olacak şekilde bir $x_e \in (H,E) \in \tau$ vardır. $x_e \in (F,E)$ ve $x_e \in (H,E)$ olduğundan; $x_e \in (K,E) \neq \Phi$ dır. Ayrıca $(K,E) \in \tilde{I}$ olup, *iii)* gereği $(K,E) = (K,E)^\circ = \Phi$ olur ki; bu bir çelişkidir. O halde $x_e \in (F,E)^*$ ve dolayısıyla $(F,E) \tilde{\subseteq} (F,E)^*$ elde edilir.

iv) $\Rightarrow$ ***i)*** Soft lokal fonksiyonun tanımı gereği, $\tilde{X}^* \tilde{\subseteq} \tilde{X}$ sağlanır. Ayrıca, $\tilde{X} \in \tau$ olduğundan *iv)* gereği $\tilde{X} \tilde{\subseteq} \tilde{X}^*$ olur. Böylece $\tilde{X}^* = \tilde{X}$ kolaylıkla elde edilir.

5.2.3. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft Hayashi-Samuels uzay ve $(F,E)\in SK(X)_E$ olmak üzere; aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

i. $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$;

ii. $(F,E)\in Sy\tilde{I}d(X)$ ve $(F,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$;

iii. $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ ve $(F,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$.

İspat.

i) $\Rightarrow$ ***ii)*** ve ***ii)*** $\Rightarrow$ ***iii)*** gerektirmeleri, Tablo 3 te açıkça görülebildiği için sadece ***iii)*** $\Rightarrow$ ***i)*** gerektirmesini ispatlayacağız.

iii) $\Rightarrow$ ***i)*** $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ ve $(F,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ olsun. $(F,E)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,E)$ ve lokal fonksiyon sıra korur olduğundan, $((F,E)^{\circ})^{*}\tilde{\subseteq}(F,E)^{*}$ sağlanır. Ayrıca; $(F,E)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ olduğundan; $(F,E)^{*}\tilde{\subseteq}(F,E)$ olur. Sonuç olarak,

$$((F,E)^{\circ})^{*}\tilde{\subseteq}(F,E)\text{ ....(1)}$$

elde edilir. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, soft Hayashi-Samuels uzay olduğundan; 5.2.1. Teorem *iv)* gereği, $(F,E)^{\circ}\in\tau$ için, $(F,E)^{\circ}\tilde{\subseteq}((F,E)^{\circ})^{*}$ sağlanır. Üstelik, $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ olduğunda; $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^{\circ})^{-*}$ olur. Buradan,

$$(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^{\circ})^{-*}=(F,E)^{\circ}\tilde{\cup}((F,E)^{\circ})^{*}=((F,E)^{\circ})^{*}\text{ ....(2)}$$

elde edilir, böylece 4.2.1 Tanım gereği $(F,E)\in Sd\tilde{I}K(X)$ olur.

5.3. Soft $f_{\tilde{I}}$-Kümeler Yardımıyla Soft Düzenli-$\tilde{I}$-Sürekliliğin Bir Ayrışımı

5.3.1. Tanım. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$ soft ideal topolojik uzay, (X_2,τ_2,B) bir soft topolojik uzay ve $u:X_1\to X_2$ ile $p:A\to B$ birer fonksiyon olmak üzere, $f_{pu}:SK(X_1)_A\to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu},

i. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Sy\tilde{I}A(X)$ ise, ***soft yarı-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon***, (Kandil ve ark., 2015)

ii. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Sd\tilde{I}K(X)$ ise, ***Soft düzenli-*** $\tilde{I}$ ***-sürekli fonksiyon***,

iii. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in S\alpha^{*}\tilde{I}A(X)$ ise; ***soft*** α^{*}***-***$\tilde{I}$ ***-sürekli fonksiyon***,

iv. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Sf_{\tilde{I}}(X)$ ise; ***soft*** $f_{\tilde{I}}$ ***-sürekli fonksiyon***,

v. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Sy\tilde{I}d(X)$ ise; ***soft yarı-*** $\tilde{I}$ ***-düzenli sürekli fonksiyon***,

vi. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in S_m^{*}(X)_{\tilde{I}}$ ise; ***soft*** $*$***-mükemmel sürekli fonksiyon***,

vii. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in S\tau^{*}K(X)_{\tilde{I}}$ ise; ***soft*** τ^{*}***-sürekli fonksiyon***,

viii. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in S_k^{*}(X)_{\tilde{I}}$ ise; ***soft*** $*$***-kendi içinde yoğun sürekli fonksiyon***,

olarak adlandırılır.

5.3.1. Uyarı. Aşağıdaki tablodaki soft süreklilik ilişkileri, 5.3.1. Tanım, Tablo 2 ve Kandil ve ark. (2015) tarafından yapılan çalışmadaki sonuçlardan elde edilmiştir.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\textit{Soft } \alpha^{*}\text{-}\tilde{I}\text{-}\textit{sür.} & \leftarrow & \textit{Soft düz.-}\tilde{I}\text{-}\textit{sür.} & \rightarrow & \textit{Soft *-mük. sür.} & \rightarrow & \textit{Soft } \tau^{*}\text{-}\textit{sür.} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \textit{Soft } f_{\tilde{I}}\text{-}\textit{sürekli} & \rightarrow & \textit{Soft *-k.i.y. sür.} & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
\textit{Soft sürekli} & & \textit{Soft yarı-}\tilde{I}\text{-}\textit{sür.} & \rightarrow & \textit{Soft yarı-sürekli} & & \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
\textit{Soft } \alpha\text{-}\tilde{I}\text{-}\textit{sür.} & & \textit{Soft } \beta\text{-}\tilde{I}\text{-}\textit{sürekli} & \rightarrow & \textit{Soft } \beta\text{-}\textit{sürekli} & & \\
 & \searrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
\textit{Soft } \tilde{I}\text{-}\textit{sürekli} & \rightarrow & \textit{Soft ön-}\tilde{I}\text{-}\textit{sür.} & \rightarrow & \textit{Soft ön-sürekli} & &
\end{array}
$$

Tablo 4

5.3.2. Uyarı. Tablo 4 de verilen bazı ilişkilerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

5.3.1. Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ evren kümesi ve $A=\{e_1\}$ parametre kümesi verilsin. $(F_1,A)=\{x_1\}$, $(F_2,A)=\{x_1,x_2\}$, $(F_3,A)=\{x_1,x_2,x_3\}$, $(F_4,A)=\{x_1,x_3,x_4\}$, $(F_5,A)=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ olmak üzere, $\tau_1=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,A),\ (F_2,A),\ (F_3,A),\ (F_4,A),\ (F_5,A)\}$ ailesi, X üzerinde bir soft topoloji belirtir. $(G_1,A)=\{x_2\}$, $(G_2,A)=\{x_3\}$ ve $(G_3,A)=\{x_2,x_3\}$ olmak üzere; $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,A),(G_2,A),\ (G_3,A)\}$ ailesi ise; X üzerinde bir soft ideal belirtir. Ayrıca $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ evren kümesi ile $B=\{e_2\}$ parametre kümesi verildiğinde, $(L,B)=\{y_1,y_2\}$ olmak üzere; $\tau_2=\{\tilde{Y},\ \Phi,\ (L,B)\}$ ailesi, Y üzerinde bir soft topoloji belirtir. Buna göre;

i. $u:X\to Y$, $u(x_1)=y_1$, $u(x_2)=y_1$, $u(x_3)=y_2$, $u(x_4)=y_3$, $u(x_5)=y_3$ ve $p:A\to B$, $p(e_1)=e_2$ olmak üzere; $f_{pu}:SK(X)_A\to SK(Y)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu}, soft $f_{\tilde{I}}$-sürekli olmasına rağmen soft düzenli-$\tilde{I}$-sürekli değildir. Ayrıca f_{pu}, soft $*$-kendi içinde yoğun sürekli olmasına rağmen soft $*$-mükemmel sürekli değildir.

ii. $u:X\to Y$, $u(x_1)=y_3$, $u(x_2)=y_1$, $u(x_3)=y_1$, $u(x_4)=y_3$, $u(x_5)=y_2$ ve $p:A\to B$, $p(e_1)=e_2$ olmak üzere; $f_{pu}:SK(X)_A\to SK(Y)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu} fonksiyonu, soft α^*-$\tilde{I}$-sürekli olmasına rağmen soft düzenli-$\tilde{I}$-sürekli değildir. Ayrıca f_{pu} fonksiyonu, soft τ^*-sürekli olmasına rağmen soft $*$-mükemmel sürekli değildir.

iii. $u:X\to Y$, $u(x_1)=y_3$, $u(x_2)=y_3$, $u(x_3)=y_3$, $u(x_4)=y_3$, $u(x_5)=y_2$ ve $p:A\to B$, $p(e_1)=e_2$ olmak üzere; $f_{pu}:SK(X)_A\to SK(Y)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu} fonksiyonu, soft $*$-mükemmel sürekli olmasına rağmen soft düzenli-$\tilde{I}$-sürekli değildir. Ayrıca f_{pu} fonksiyonu, soft $*$-kendi içinde yoğun sürekli olmasına rağmen soft $f_{\tilde{I}}$-sürekli değildir.

5.3.1. Teorem. $(X_1, \tau_1, \tilde{I}, A)$ ile $(X_2, \tau_2, \tilde{J}, B)$ birer soft ideal topolojik uzay ve $u : X_1 \to X_2$ ile $p : A \to B$ birer fonksiyon olmak üzere; $f_{pu} : SK(X_1)_A \to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Buna göre aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. f_{pu}, soft düzenli-$\tilde{I}$ -süreklidir;

ii. f_{pu}, hem soft yarı-$\tilde{I}$ -sürekli hem de soft $*$-mükemmel süreklidir.

İspat. 5.2.2. Önerme kullanılarak elde edilir.

5.3.2. Teorem. $(X_1, \tau_1, \tilde{I}, A)$ ile $(X_2, \tau_2, \tilde{J}, B)$ birer soft ideal topolojik uzay ve $u : X_1 \to X_2$ ile $p : A \to B$ birer fonksiyon olmak üzere; $f_{pu} : SK(X_1)_A \to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Buna göre aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. f_{pu}, soft düzenli-$\tilde{I}$ -süreklidir;

ii. f_{pu}, hem soft $f_{\tilde{I}}$ -sürekli hem de soft τ^* -süreklidir.

İspat. 5.1.5. Önerme kullanılarak elde edilir.

5.3.3. Teorem. $(X_1, \tau_1, \tilde{I}, A)$ soft Hayashi-Samuels uzay ve (X_2, τ_2, B) soft topolojik uzay olmak üzere; $f_{pu} : SK(X_1)_A \to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Buna göre aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. f_{pu}, soft düzenli-$\tilde{I}$ -süreklidir;

ii. f_{pu}, hem soft yarı-$\tilde{I}$ -düzenli sürekli hem de soft τ^* -süreklidir;

iii. f_{pu}, hem soft yarı-$\tilde{I}$ -sürekli hem de soft τ^* -süreklidir.

İspat. 5.2.3. Önerme kullanılarak elde edilir.

6. SOFT $\tilde{I}$-SON DERECELİ BAĞLANTISIZ UZAYLAR

6.1. Soft Güçlü β-$\tilde{I}$- Açık ve Soft Hemen Hemen Güçlü $\tilde{I}$-Açık Kümeler

6.1.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının bir (F,E) soft alt kümesi verildiğinde; eğer

i. $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ ise; (F,E) kümesine, ***soft güçlü β-$\tilde{I}$- açık küme***,

ii. $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}$ ise; ***soft hemen hemen güçlü $\tilde{I}$- açık küme***,

denir.

$(X,\tau,\tilde{I},E)$'deki tüm soft güçlü β-$\tilde{I}$- açık kümelerin ailesini, $\boldsymbol{Sg\beta\tilde{I}A(X)}$ ve tüm soft hemen hemen güçlü $\tilde{I}$-açık kümelerin ailesini $\boldsymbol{Shg\tilde{I}A(X)}$ ile göstereceğiz.

6.1.1. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ herhangi bir soft ideal topolojik uzayı olmak üzere; aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $S\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,Shg\tilde{I}A(X)$,

ii. $S\ddot{o}\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,Sg\beta\tilde{I}A(X)$,

iii. $Shg\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,Sg\beta\tilde{I}A(X)$,

iv. $Sy\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,Sg\beta\tilde{I}A(X)$,

v. $hS\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,S\beta\tilde{I}A(X)$,

vi. $Sg\beta\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,S\beta\tilde{I}A(X)$,

vii. $Shg\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,hS\tilde{I}A(X)$.

İspat.

i. $(F,E)\in S\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{*})^{\circ}$ olur. 3.3.3. Tanım gereği $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-*}\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}$ elde edilir, bu da $(F,E)\in Shg\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

ii. $(F,E)\in S\ddot{o}\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{\circ}$ olur. 3.3.3. Tanım gereği $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-*}\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ elde edilir, bu da $(F,E)\in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

iii. $(F,E) \in Shg\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}$ olur. 3.3.3. Tanım gereği $(F,E)^{*} \tilde{\subseteq} (F,E)^{-*}$ olduğu biliniyor. Soft lokal fonksiyon ve soft iç operatörü sıra korur olduğundan; $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-*} \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ elde edilir, bu da $(F,E) \in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

iv. $(F,E) \in Sy\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^{\circ})^{-*}$ olur. 3.3.3. Tanım gereği $(F,E) \tilde{\subseteq} (F,E)^{-*}$ olduğu biliniyor. Soft lokal fonksiyon ve soft iç operatörü sıra korur olduğundan; $(F,E) \tilde{\subseteq} ((F,E)^{\circ})^{-*} \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ elde edilir, bu da $(F,E) \in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

v. $(F,E) \in hS\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-}$ olur. 3.3.3. Tanım gereği $(F,E)^{*} \tilde{\subseteq} (F,E)^{-*}$ olduğu biliniyor. Soft iç ve soft kapanış operatörü sıra korur olduğundan; $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-} \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-}$ elde edilir, bu da $(F,E) \in S\beta\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

vi. $(F,E) \in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ olur. 3.3.3. Tanım ve 3.3.1. Teorem iv) gereği $(F,E)^{-*} \tilde{\subseteq} (F,E)^{-}$ olduğu biliniyor. Bu bağıntıda (F,E) yerine $((F,E)^{-*})^{\circ}$ yazılarak, $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ $\tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-}$ elde edilir, bu da $(F,E) \in S\beta\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

vii. $(F,E) \in Shg\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}$ olur. 3.3.3. Tanım ve 3.3.1. Teorem iv) gereği $(F,E)^{-*} \tilde{\subseteq} (F,E)^{-}$ olduğu biliniyor. Bu bağıntıda (F,E) yerine $((F,E)^{*})^{\circ}$ yazılarak, $(F,E) \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-*} \tilde{\subseteq} (((F,E)^{*})^{\circ})^{-}$ elde edilir, bu da $(F,E) \in hS\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

6.1.1. Uyarı. 6.1.1. Önermede verilen özelliklerin terslerinin genelde doğru olmadığını aşağıdaki örneklerde gösterdik.

6.1.1. Örnek. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, 4.2.2. Örnek ile verilen soft ideal topolojik uzay olsun. Yani; $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$, $(F_2,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$, $(F_3,E)=$ $\{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca; $(G_1,E)=\{\{x_4\},\phi\}$, $(G_2,E)=\{\phi,\{x_4\}\}$, $(G_3,E)=\{\{x_4\},\{x_4\}\}$ olmak üzere; $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi ise X üzerinde bir soft ideal belirtir. Buna göre;

i. $(L,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}$ olsun. $((L,E)^*)^\circ=\{\{x_1,x_3\},\phi\}\ \tilde{\not\supseteq}\ (L,E)$ ve $(((L,E)^*)^\circ)^{-*}$ $=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\ \tilde{\supseteq}\ (L,E)$ olduğundan; $(L,E)\in Shg\tilde{I}A(X)$ ve $(L,E)\notin S\tilde{I}A(X)$ dir.

ii. $(L,E)=\{\{x_1,x_2\},\phi\}$ olsun. $((L,E)^{-*})^\circ=\{\{x_1,x_3\},\phi\}\ \tilde{\not\supseteq}\ (L,E)$ ve $(((L,E)^{-*})^\circ)^{-*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\ \tilde{\supseteq}\ (L,E)$ olduğundan; $(L,E)\in$ $Sg\beta\tilde{I}A(X)$ ve $(L,E)\notin Sö\tilde{I}A(X)$ dir.

iii. $(L,E)=\{\{x_1,x_4\},\{x_4\}\}$ olsun. $(((L,E)^*)^\circ)^{-*}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\ \tilde{\not\supseteq}$ (L,E) ve $(((L,E)^{-*})^\circ)^{-*}=\tilde{X}\ \tilde{\supseteq}\ (L,E)$ olduğundan; $(L,E)\in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ ve $(L,E)\notin Shg\tilde{I}A(X)$ dir.

iv. $(L,E)=\{\{x_1,x_4\},\{x_4\}\}$ olsun. $((L,E)^\circ)^{-*}=\Phi\ \tilde{\not\supseteq}\ (L,E)$ ve $(((L,E)^{-*})^\circ)^{-*}=$ $\tilde{X}\ \tilde{\supseteq}\ (L,E)$ olduğundan; $(L,E)\in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ ve $(L,E)\notin Sy\tilde{I}A(X)$ dir.

v. $(L,E)=\{\{x_1,x_4\},\{x_4\}\}$ olsun. $(((L,E)^*)^\circ)^-=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}\ \tilde{\not\supseteq}$ (L,E) ve $(((L,E)^{-*})^\circ)^-=\tilde{X}\ \tilde{\supseteq}\ (L,E)$ olduğundan; $(L,E)\in S\beta\tilde{I}A(X)$ ve $(L,E)\notin hS\tilde{I}A(X)$ dir.

6.1.2. Örnek. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E)=\{\{x_1,x_3\},\phi\}$, $(F_2,E)=\{\{x_4\},\phi\}$, $(F_3,E)=$ $\{\{x_1,x_3,x_4\},\phi\}$ olmak üzere; $\tau=\{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi, X üzerinde bir soft topoloji,

$(G_1,E)=\{\{x_3\},\phi\}$, $(G_2,E)=\{\{x_4\},\phi\}$, $(G_3,E)=\{\{x_3,x_4\},\phi\}$ olmak üzere; $\tilde{I}=\{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi de X üzerinde bir soft ideal belirtirler.

$(L,E)=\{\{x_2,x_4\},\phi\}$ soft kümesini ele alalım. $(((L,E)^{-*})^{\circ})^{-}=\{\{x_2,x_4\},X\}\ \tilde{\supseteq}\ (L,E)$ olduğundan; $(L,E)\in S\beta\tilde{I}A(X)$ sağlanır. Üstelik $(((L,E)^{-*})^{\circ})^{-*}=\{\{x_4\},\phi\}\ \tilde{\not\supseteq}\ (L,E)$ olduğu için $(L,E)\notin Sg\beta\tilde{I}A(X)$ olduğu elde edilir.

6.1.2. Uyarı. Yukarıda tanımları verilen soft küme çeşitleri arasındaki ilişkileri aşağıdaki tabloda verildik.

soft açık				
$\downarrow$				
soft α-$\tilde{I}$-*açık*	$\rightarrow$	*soft yarı*-$\tilde{I}$-*açık*		
$\downarrow$		$\downarrow$		
soft ön-$\tilde{I}$-*açık*	$\rightarrow$	*soft güçlü* β-$\tilde{I}$-*açık*	$\rightarrow$	*soft* β-$\tilde{I}$-*açık*
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
soft $\tilde{I}$-*açık*	$\rightarrow$	*soft hemen hemen güçlü* $\tilde{I}$-*açık*	$\rightarrow$	*hemen hemen soft* $\tilde{I}$-*açık*

Tablo 5

6.2. Soft $\tilde{I}$-Son Dereceli Bağlantısız Uzaylar

6.2.1. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayındaki herhangi bir (F,E) soft kümesi için, eğer $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{-*}$ ise; (F,E) soft kümesine, ***soft zayıf düzenli-$\tilde{I}$-kapalı küme*** denir.

Bu çalışma boyunca biz X üzerindeki tüm soft zayıf düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümelerin ailesini $\boldsymbol{Szd\tilde{I}K(X)}$ ile göstereceğiz.

6.2.2. Tanım. (Asaad, 2017) (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer her $(F,E)\in\tau$ için, $(F,E)^{-}\in\tau$ oluyorsa, (X,τ,E) uzayına ***soft son dereceli bağlantısız uzay*** denir ve kısaca $\boldsymbol{SSBU}$ olarak yazılır.

6.2.3. Tanım. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzay olsun. Eğer her $(F,E)\in\tau$ için, $(F,E)^{-*}\in\tau$ oluyorsa, (X,τ,E) uzayına ***soft*** $\tilde{I}$ ***-son dereceli bağlantısız uzay*** denir ve kısaca ***S$\tilde{I}$SBU*** olarak yazılır.

6.2.1. Önerme. Bir $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayı verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

i. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, bir $S\tilde{I}SBU$ dır;

ii. $Sy\tilde{I}A(X)\,\tilde{\subseteq}\,S\ddot{o}\tilde{I}A(X)$;

iii. $Szd\tilde{I}K(X)\,\tilde{\subseteq}\,\tau$.

İspat.

$\boldsymbol{i})\Rightarrow\boldsymbol{ii})$ $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{-*}$ dir. Ayrıca i) gereği $((F,E)^{\circ})^{-*}\in\tau$ olur. O halde $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{-*}=(((F,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{\circ}$ elde edilir ki bu da $(F,E)\in S\ddot{o}\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

$\boldsymbol{ii})\Rightarrow\boldsymbol{iii})$ $(F,E)\in Szd\tilde{I}K(X)$ olsun. 6.2.1. Tanım gereği, $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{-*}$ sağlanır. Dolayısıyla $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ olur. O halde hipotez ii) gereği $(F,E)\in S\ddot{o}\tilde{I}A(X)$ olur yani; $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{\circ}$ sağlanır. Üstelik $(F,E)=((F,E)^{\circ})^{-*}\Rightarrow(F,E)^{*}=(((F,E)^{\circ})^{-*})^{*}=\left((F,E)^{\circ}\,\tilde{\cup}\,((F,E)^{\circ})^{*}\right)^{*}=((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\cup}\,(((F,E)^{\circ})^{*})^{*}=((F,E)^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{\circ})^{-*}=(F,E)$ olduğunda; $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{\circ}=(F,E)^{\circ}$ elde edilir ki bu da $(F,E)\in\tau$ olduğunu gösterir.

$\boldsymbol{iii})\Rightarrow\boldsymbol{i})$ $(F,E)\in\tau$ için, $(F,E)^{-*}\in Szd\tilde{I}K(X)$ olduğunu göstermeliyiz. $((F,E)^{-*})^{\circ}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-*}$ olduğundan, $(((F,E)^{-*})^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{*}=\left((F,E)\,\tilde{\cup}\,(F,E)^{*}\right)^{*}=(F,E)^{*}\,\tilde{\cup}\,((F,E)^{*})^{*}=(F,E)^{*}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-*}$ olur ki, buradan $(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}=((F,E)^{-*})^{\circ}\,\tilde{\cup}\,(((F,E)^{-*})^{\circ})^{*}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-*}$ elde ederiz. Yani

$$(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}\,\tilde{\subseteq}\,(F,E)^{-*}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

olur. Diğer taraftan, $(F,E)\in\tau$ olduğundan; Tablo 2’den $(F,E)\in S\ddot{o}\tilde{I}A(X)$ olur, yani; $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{\circ}$ ve buradan da

$$(F,E)^{-*} \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*} \ldots\ldots\ldots(4)$$

elde edilmiş olur. (3) ve (4) den $(F,E)^{-*} = (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ yazılır ve bu da gösteriyor ki, $(F,E)^{-*} \in Szd\tilde{I}K(X)$ dir. Ek olarak iii) den $(F,E)^{-*} \in \tau$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki, $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzay bir $S\tilde{I}SBU$ dır.

6.2.1. Örnek. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ soft ideal topolojik uzayı için eğer $\tilde{I} = SK(X)_E$ ise, bu durumda $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ olur.

6.2.1. Uyarı. Soft son dereceli bağlantısızlık ve soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısızlık kavramları aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi birbirinden bağımsızdır.

6.2.2. Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E) = \{\{x_1\},\phi\}$, $(F_2,E) = \{\{x_2\},\phi\}$ ve $(F_3,E) = \{\{x_1,x_2\},\phi\}$ olmak üzere, $\tau = \{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topoloji, $\tilde{I} = \{\Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi de X üzerinde bir soft ideal belirtirler. Bu durumda her $(F,E) \in \tau$ için $(F,E)^* = \Phi$ ve buradan da $(F,E)^{-*} = (F,E) \tilde{\cup} (F,E)^*$ $= (F,E)$ olduğundan, $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ dır. Diğer taraftan, $(F_1,E) = \{\{x_1\},\phi\} \in \tau$ için, $(F_1,E)^- = \{\{x_1,x_3\},X\} \notin \tau$ olduğundan, $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $SSBU$ değildir.

6.2.3. Örnek. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ ve $E = \{e_1,e_2\}$ kümelerini gözönüne alalım. $(F_1,E) = \{\{x_1\},\phi\}$, $(F_2,E) = \{\{x_1,x_3\},\phi\}$, $(F_3,E) = \{\{x_1,x_2,x_4\},\phi\}$, $(F_4,E) = \{\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\phi\}$ olmak üzere; $\tau = \{\tilde{X},\ \Phi,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft topolojidir. Ayrıca $(G_1,E) = \{\{x_1\},\phi\}$, $(G_2,E) = \{\{x_4\},\phi\}$ ve $(G_3,E) = \{\{x_1,x_4\},\phi\}$ olmak üzere; $\tilde{I} = \{\Phi,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ ailesi de X üzerinde bir soft ideal belirtir. Bu durumda her $(F,E) \in \tau$ için $(F,E)^- = X$ olduğundan, $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $SSBU$ dır. Diğer taraftan, $(F_3,E) = \{\{x_1,x_2,x_4\},\phi\} \in \tau$ için, $(F_3,E)^* = \{\{x_2,x_4,x_5\},X\}$ ve buradan da $(F_3,E)^{-*} = (F_3,E) \tilde{\cup} (F_3,E)^* =$ $\{\{x_1,x_2,x_4,x_5\},X\} \notin \tau$ olduğundan; $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ değildir.

6.2.2. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay için $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olsun. Bu durumda; $(X,\tau,\tilde{I},E)$ uzayının $S\tilde{I}SBU$ olması için gerek ve yeter şart $SSBU$ olmasıdır.

İspat. Eğer $\tilde{I}=\{\Phi\}$ ise; biliyoruz ki $(F,E)^{*}=(F,E)^{-}$ ve dolayısıyla $(F,E)^{-*}=(F,E)^{-}$ dir. Sonuç olarak, her $(F,E)\in\tau$ için, $(F,E)^{-*}=(F,E)^{-}$ olduğundan; ispat kolaylıkla elde edilir.

6.2.3. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay olsun. Eğer her $(F,E),(G,E)\in\tau$ için, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$ ise; bu durumda $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)^{-*}=\Phi$ olur.

İspat. Hipotez gereği (F,E), $(G,E)\in\tau$ olduğu ve 3.3.1. Teorem xi) kullanılarak $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)^{-*}$ $=$ $(F,E)\tilde{\cap}\left((G,E)\tilde{\cup}(G,E)^{*}\right)$ $=$ $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)\tilde{\cup}$ $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)^{*}\right)\tilde{\subseteq}\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)\tilde{\cup}\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)^{*}=\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)^{-*}$ elde edilir yani; $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)^{-*}\tilde{\subseteq}\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)^{-*}$ sağlanır. Diğer taraftan, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$ ve $\Phi^{-*}=\Phi$ olduğundan, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)^{-*}\tilde{\subseteq}$ $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)^{-*}=\Phi$ olur ki, bu da $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)^{-*}=\Phi$ olduğunu gösterir.

6.2.4. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ olsun. Eğer her (F,E), $(G,E)\in\tau$ için, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$ ise; bu durumda $(F,E)^{-*}\tilde{\cap}(G,E)^{-*}=\Phi$ sağlanır.

İspat. 6.2.3. Önerme ve 6.2.3. Tanım gereği, ispat açıktır.

6.2.5. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir soft ideal topolojik uzay olsun. Eğer her $(F,E),(G,E)$ soft alt kümesi için, $(F,E)^{-*}\tilde{\cap}(G,E)^{-*}=\Phi$ ise; bu durumda $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$ sağlanır.

İspat. $(F,E)\tilde{\subseteq}(F,E)^{-*}$ ve $(G,E)\tilde{\subseteq}(G,E)^{-*}$ olduğundan, $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)\tilde{\subseteq}$ $(F,E)^{-*}\tilde{\cap}(G,E)^{-*}=\Phi$ elde edilir ki; bu da $(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$ olduğunu gösterir.

6.2.6. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ olsun. Eğer her (F,E), $(G,E)\in\tau$ için, "$(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E)^{-*}\tilde{\cap}(G,E)^{-*}=\Phi$ olmasıdır" şeklindeki özellik sağlanır.

İspat. 6.2.4. ve 6.2.5. Önerme gereği, ispat açıktır.

6.2.7. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ ve $(F,E)\in SK(X)_E$ olsun. Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E)\in S\alpha\tilde{I}A(X)$,

ii. $(F,E)\in S\ddot{o}\tilde{I}A(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E)\in Sg\beta\tilde{I}A(X)$,

iii. $(F,E)\in S\tilde{I}A(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E)\in Shg\tilde{I}A(X)$.

İspat.

i. Yeter şart Kandil ve ark. (2015) tarafından verildiğinden sadece gerek şartı ispatlayacağız. $(F,E)\in Sy\tilde{I}A(X)$ alalım. Bu durumda, 3.3.4. Tanım gereği $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^{\circ})^{-*}$ sağlanır. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, $S\tilde{I}SBU$ olduğundan; 6.2.3. Tanım gereği $(F,E)^{\circ}\in\tau$ için, $((F,E)^{\circ})^{-*}\in\tau$ sağlanır. Buradan, $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^{\circ})^{-*}=(((F,E)^{\circ})^{-*})^{\circ}$ elde edilir ki bu da $(F,E)\in S\alpha\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

ii. Gerek şartı 6.1.1. Önerme ii) ile verildi. Diğer taraftan, $(F,E)\in Sg\beta\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, 6.1.1. i) Tanım gereği $(F,E)\tilde{\subseteq}(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}$ sağlanır. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ $S\tilde{I}SBU$ olduğundan; 6.2.3. Tanım gereği $((F,E)^{-*})^{\circ}\in\tau$ için, $(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}\in\tau$ sağlanır. Böylece,

$$(F,E)\tilde{\subseteq}\ (((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}=((((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*})^{\circ}\ \ldots\ldots..(5)$$

elde edilir. Bununla beraber, $((F,E)^{-*})^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,E)^{-*}$ olduğundan ve soft yıldız kapanış operatörü Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağladığından $(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*}\tilde{\subseteq}\ ((F,E)^{-*})^{-*}=(F,E)^{-*}$ ve böylece

$$((((F,E)^{-*})^{\circ})^{-*})^{\circ}\tilde{\subseteq}((F,E)^{-*})^{\circ}\ \ldots\ldots...(6)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (5) ve (6) den $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{-*})^{\circ}$ olur ki bu da $(F,E)\in Sö\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

iii. Gerek şart 6.1.1. Önerme i) ile verildi. Diğer taraftan, $(F,E)\in Shg\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, 6.1.1. Tanım ii) gereği $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}$ sağlanır. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $S\tilde{I}SBU$ olduğundan, 6.2.3. Tanım gereği $((F,E)^{*})^{\circ}\in\tau$ için, $(((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}\in\tau$ sağlanır. Buradan, $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{*})^{\circ})^{-*}$ = $((((F,E)^{*})^{\circ})^{-*})^{\circ}\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{*})^{-*})^{\circ}=\left((F,E)^{*}\,\tilde{\cup}\,((F,E)^{*})^{*}\right)^{\circ}\,\tilde{\subseteq}$ $\left((F,E)^{*}\,\tilde{\cup}\,(F,E)^{*}\right)^{\circ}=((F,E)^{*})^{\circ}$ ve $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,((F,E)^{*})^{\circ}$ olur ki bu da $(F,E)\in S\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

6.2.8. Önerme. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $SSBU$ ve $(F,E)\in SK(X)_E$ olsun. Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(F,E)\in S\tilde{I}A(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E)\in hS\tilde{I}A(X)$,

ii. Eğer $(F,E)\in S\beta\tilde{I}A(X)$ ise, $(F,E)\in SöA(X)$ dir.

İspat.

i. Gerek şart Tablo 5 ile verildi. Diğer taraftan, $(F,E)\in hS\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, 5.1.2. Tanım gereği $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{*})^{\circ})^{-}$ sağlanır. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $SSBU$ olduğundan; 6.2.2. Tanım gereği $((F,E)^{*})^{\circ}\in\tau$ için, $(((F,E)^{*})^{\circ})^{-}\in\tau$ sağlanır. Bu ifadeler ve 3.3.1. Teorem iv) özelliği kullanılarak, (F,E) $\tilde{\subseteq}$ $(((F,E)^{*})^{\circ})^{-}$ = $((((F,E)^{*})^{\circ})^{-})^{\circ}$ $\tilde{\subseteq}$ $(((F,E)^{*})^{-})^{\circ}$ = $((F,E)^{*})^{\circ}$ elde edilir ki bu da $(F,E)\in S\tilde{I}A(X)$ olduğunu gösterir.

ii. $(F,E)\in S\beta\tilde{I}A(X)$ olsun. Bu durumda, 3.3.4. Tanım v) gereği $(F,E)\,\tilde{\subseteq}\,(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-}$ sağlanır. $(X,\tau,\tilde{I},E)$ bir $SSBU$ olduğundan; 6.2.2. Tanım gereği $((F,E)^{-*})^{\circ}\in\tau$ için, $(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-}\in\tau$ sağlanır. Böylece, 3.3.1. Teorem *iv)* özelliği de kullanılarak $(F,E)\,\tilde{\subseteq}$ $(((F,E)^{-*})^{\circ})^{-}$ =

$$((((F,E)^{-*})^{\circ})^{-})^{\circ} \tilde{\subseteq} (((F,E)^{-*})^{-})^{\circ} = \left[\left((F,E)\tilde{\cup}(F,E)^{*}\right)^{-}\right]^{\circ} =$$

$\left[(F,E)^{-}\tilde{\cup}((F,E)^{*})^{-}\right]^{\circ} = ((F,E)^{-})^{\circ}$ elde edilir yani; $(F,E)\tilde{\subseteq}((F,E)^{-})^{\circ}$ olur ki bu da $(F,E)\in SöA(X)$ olduğunu gösterir.

6.2.1. Sonuç. $(X,\tau,\tilde{I},E)$, $S\tilde{I}SBU$ ve $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olsun. $(F,E)\in SK(X)_{E}$ soft alt kümesi için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(F,E)\in S\tilde{I}A(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(F,E)\in hS\tilde{I}A(X)$,

ii. Eğer $(F,E)\in S\beta\tilde{I}A(X)$ ise; $(F,E)\in SöA(X)$ olur.

İspat. 6.2.2. ve 6.2.8. Önermeler yardımıyla ispat kolaylıkla yapılabilir.

6.3. Soft $\tilde{I}$ -Son Dereceli Bağlantısız Uzaylar Üzerinde Soft Fonksiyonlar

6.3.1. Tanım. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$ bir soft ideal topolojik uzay, (X_2,τ_2,B) bir soft topolojik uzay ve $u:X_1\to X_2$ ile $p:A\to B$ birer fonksiyon olmak üzere, $f_{pu}:SK(X_1)_A\to SK(X_2)_B$ soft fonksiyonu verilsin. Bu durumda f_{pu},

i. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Shg\tilde{I}A(X_1)$ ise; ***soft hemen hemen güçlü $\tilde{I}$ -sürekli fonksiyon***,

ii. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Szd\tilde{I}K(X_1)$ ise, ***soft zayıf düzenli- $\tilde{I}$ -sürekli fonksiyon***,

iii. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in Sg\beta\tilde{I}A(X_1)$ ise, ***soft güçlü β-$\tilde{I}$ -sürekli fonksiyon***,

iv. her $(G,B)\in\tau_2$ için, $f_{pu}^{-1}(G,B)\in hS\tilde{I}A(X_1)$ ise, ***hemen hemen soft $\tilde{I}$ -sürekli fonksiyon,***

olarak adlandırılır.

6.3.1. Teorem. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$, $S\tilde{I}SBU$ ve $f_{pu}:(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)\to(X_2,\tau_2,B)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. Eğer f_{pu}, soft yarı-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon ise, o aynı zamanda soft ön $\tilde{I}$-sürekli fonksiyondur,

ii. Eğer f_{pu}, soft zayıf düzenli-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon ise, o aynı zamanda soft sürekli fonksiyondur,

İspat. 6.2.1. Önerme yardımıyla ispatlar kolaylıkla yapılabilir.

6.3.2. Teorem. $(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)$, $S\tilde{I}SBU$ ve $f_{pu}:(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)\to(X_2,\tau_2,B)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. f_{pu} soft fonksiyonunun soft yarı-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart soft α-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olmasıdır,

ii. f_{pu} soft fonksiyonunun soft ön $\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart soft güçlü β-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olmasıdır,

iii. f_{pu} soft fonksiyonunun soft $\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart soft hemen hemen güçlü $\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olmasıdır.

İspat. 6.2.7. Önerme yardımıyla ispatlar kolayca yapılabilir.

6.3.3. Teorem. $\tilde{I}=\{\Phi\}$ olmak üzere; $(X,\tau,\tilde{I},E)$ $S\tilde{I}SBU$ olsun. Buna göre $f_{pu}:(X_1,\tau_1,\tilde{I},A)\to(X_2,\tau_2,B)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. f_{pu} soft fonksiyonunun soft $\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart hemen hemen soft $\tilde{I}$-sürekli fonksiyon olmasıdır,

ii. Eğer f_{pu}, soft β-$\tilde{I}$-sürekli fonksiyon ise, o aynı zamanda soft ön $\tilde{I}$-sürekli fonksiyondur.

İspat. 6.2.2. Önerme ve 6.2.1. Sonuç yardımıyla ispatlar kolaylıkla yapılabilir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

7.1. Sonuçlar

Bu çalışmanın amacı; soft kümeler yardımıyla tanımlanan soft ideal topolojik uzaylarda soft açık kümelerden daha zayıf bazı yeni soft küme çeşitleri tanıtmak, bunların birbirleri ile olan ilişkilerini incelemektir. Ayrıca bu soft kümeler yardımıyla yeni süreklilik çeşitleri tanımlayıp süreklilik için bazı ayrışımlar elde etmektir. Bu amaç doğrultusunda çalışmamızın dördüncü bölümünde; soft lokal fonksiyon ve soft yıldız kapanış operatörlerini kullanarak bazı yeni soft küme tanımları verdik ve özellikle bunlardan soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümelerin özellikleri üzerinde çalıştık. Soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümelerin tanımladığımız kümelerden hangisinden daha zayıf, hangisinden daha güçlü olduğunu ispatlar yaparak gösterdik. Aralarında eşdeğerlik olmadığını ise ters örneklerle açıkladık. Bulunan tüm ilişkileri de Tablo 1 aracılığı ile sunduk. Soft idealin özel olarak seçilmesi durumunda eşdeğer olan soft küme çeşitlerini gösterdik. Yine bu bölümde, soft Hayashi-Samuel olarak isimlendirdiğimiz bir uzay çeşidini ve soft düzenli-$\tilde{I}$-kapalı kümeler yardımıyla elde edilen soft $A_{\tilde{I}}$-kümeleri tanımladık. Uzayın soft Hayashi-Samuel olması durumunda tanımladığımız soft kümelerden hangilerinin diğerleri ile eşdeğer olduğunu elde ettik. Soft $A_{\tilde{I}}$-kümelerin sahip olduğu özellikleri de inceledikten sonra bu bölümün sonunda, tanımladığımız yeni soft kümeler yardımıyla yeni zayıf soft süreklilik çeşitleri verdik ardından da soft süreklilik için bir ayrışımını elde ettik.

Beşinci bölümde ise, soft $f_{\tilde{I}}$-küme, hemen hemen soft-$\tilde{I}$-açık küme, soft $t_{\tilde{I}}$-küme ve soft yarı-$\tilde{I}$-düzenli küme tanımlarını verdik. Bu bölümde özellikle çalışmalarımızı soft $f_{\tilde{I}}$-kümeler üzerine yoğunlaştırdık. Soft $f_{\tilde{I}}$-kümelerin herhangi bir soft birleşiminin ve sonlu soft arakesitlerinin de yine soft $f_{\tilde{I}}$-küme olduğunu elde ettik. Ayrıca soft $f_{\tilde{I}}$-kümelerle diğer tanımladığımız soft küme çeşitleri arasındaki ilişkileri inceleyip tüm ilişkiler Tablo 2 yardımıyla gösterilmiştir. Bu bölümde tanımlanan diğer zayıf soft küme çeşitleri yardımıyla yeni soft süreklilik çeşitleri verip özelliklerini inceledik ve soft düzenli-$\tilde{I}$-sürekliliğin bir ayrışımını elde ettik.

Son olarak altıncı bölümde, soft güçlü β-$\tilde{I}$- açık küme ve soft hemen hemen güçlü $\tilde{I}$- açık küme tanımlarını verip bunların diğer soft küme çeşitleri ile olan ilişkilerini inceledik. Ters örnekler yardımıyla geçişmelerin olmadığı durumları ispatladık. Tüm elde edilen ilişkileri Tablo 5 de gösterdik. Bundan sonra yeni bir soft uzay çeşidi olan soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısız uzay kavramını verdik. Uzayın soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısız uzay seçilmesi durumunda elde edilen özellikleri ve varsa eşdeğer durumları inceledik. Soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısız uzay ile soft son dereceli bağlantısız uzay kavramlarının birbirinden bağımsız kavramlar olduklarını ters örnekler yardımıyla gösterdik. Bu bölümün sonunda ise zayıf soft sürekli fonksiyonların, soft $\tilde{I}$-son dereceli bağlantısız uzaylar üzerinde sahip oldukları karakterizasyonları ele alarak çalışmamızı tamamladık.

7.2. Öneriler

Çalışmamızda birçok yeni soft küme çeşidini tanımladık fakat bunlardan seçtiğimiz bazılarının karakterizasyonlarını inceledik. Soft ideal topolojik uzaylar üzerine çalışmalar yapan araştırmalar diğerleri için de benzer çalışmalar yapabilirler. Ayrıca tanımlanan bu soft kümeler yardımıyla, soft alt uzaylar, soft kompaktlık, soft bağlantılılık ve soft ayırma aksiyomları gibi konular yeniden ele alınabilir.

Benzer şekilde tanımladığımız soft uzay çeşitleri kullanılarak literatürde bulunan soft küme çeşitlerinin yeni karakterizasyonları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Ahmad, B. ve Kharal, A., 2011, Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation*, 7, 471-481.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X. Y., Min, W. K. ve Shabir, M., 2009, On some new operations in soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications*, 57 (9), 1547-1553.

Arockiarani, I. ve Lancy, A. A., 2013, Generalized Soft gβ-Closed Sets and Soft gsβ-Closed Sets in Soft Topological Spaces, *International Journal of Mathematical Archive*, 4 (2), 1-7.

Asaad, B. A., 2017, Results on soft extremally disconnectedness of soft topological spaces, *Journal of Mathematics and Computer Science-Jmcs*, 17 (4), 448-464.

Bayramov, S. ve Aras, C. G., 2013, Soft local compact and soft paracompact spaces, *Journal of Mathematics and System Science*,, 3, 122-130.

Chen, B., 2013, Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7 (1), 287-294.

Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X. Z., 2008, Soft semirings, *Computers & Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.

Hussain, S. ve Ahmad, B., 2011, Some properties of soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 62 (11), 4058-4067.

Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. ve Abd El-Latif, A. M., 2014, Soft Ideal Theory Soft Local Function and Generated Soft Topological Spaces, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8 (4), 1595-1603.

Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. ve Abd El-Latif, A. M., 2015, γ-Operation and Decompositions of Some Forms of Soft Continuity in Soft Topological Spaces via Soft Ideals, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 9, 385-402.

Maji, P. K. ve Roy, A. R., 2002, An application of soft sets in a decision making problem, *Computers & Mathematics with Applications*, 44 (8-9), 1077-1083.

Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A. R., 2003, Soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications*, 45 (4-5), 555-562.

Molodtsov, D., 1999, Soft set theory - First results, *Computers & Mathematics with Applications*, 37 (4-5), 19-31.

Pawlak, Z., 1982, Rough Sets, *International Journal of Computer & Information Sciences*, 11 (5), 341-356.

Shabir, M. ve Naz, M., 2011, On soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 61 (7), 1786-1799.

Yumak, Y. ve Kaymakci, A. K., 2015, Soft Beta-Open Sets and Their Applications *Journal of New Theory*, 4, 80-89.

Yüksel, S., Dizman, T., Yildizdan, G. ve Sert, U., 2013, Application of soft sets to diagnose the prostate cancer risk, *Journal of Inequalities and Applications*, 1, 1-11.

Yüksel, S., Tozlu, N. ve Ergül, Z. G., 2014, Soft Regular Generalized Closed Sets in Soft Topological Spaces, *International Journal of Mathematical Analysis*, 8 (8), 355-367.

Yüksel, S., Tozlu, N. ve Dizman, T. H., 2015, An Application of Multicriteria Group Decision Making by Soft Covering Based Rough Sets, *Filomat*, 29 (1), 209-219.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Zorlutuna, I., Akdag, M., Min, W. K. ve Atmaca, S., 2012, Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3 (2), 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Yunus YUMAK
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Ereğli\25.02.1981
Telefon	**:**	03322233956
Faks	**:**	
e-mail	**:**	yunusyumak@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece	Adı	İlçe	İl	Bitirme Yılı
Lise	: Ereğli Lisesi	Ereğli	Konya	1998
Üniversite	: Atatürk Üniversitesi	Yakutiye	Erzurum	2003
Tezsiz Yük.Lis.	: Atatürk Üniversitesi	Yakutiye	Erzurum	2005
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi	Selçuklu	Konya	2014
Doktora	: Selçuk Üniversitesi	Selçuklu	Konya	2018

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2010-2012	Muş Alparslan Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2012-2019	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI:
Topoloji

YABANCI DİLLER:
İngilizce

YAYINLAR

1. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*Soft β-open Sets and Their Applications*", Journal of New Theory, 4, 80-89, (2015). **(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır)**

2. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*Soft Idealization of a Decomposition Theorem*", Filomat, 30(3), 741-751, (2016). (SCI-E) **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

3. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*On some subsets of soft sets and soft continuity via soft ideals*", Journal of Mathematical Analysis, 8(6), 142-154, (2017). (ESCI) **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

4. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*On a new type of soft topological spaces via soft ideals*", Miskolc Mathematical Notes, **(Gönderildi) (Doktora tezinden yapılmıştır)**

BİLDİRİLER

1. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*Soft beta-open sets and their applications*", The 2nd Abu Dhabi University Annual International Conference: Mathematical Science and its Applications, 2013, AbuDhabi/UAE. **(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır)**

2. Y. Yumak and A. Keskin Kaymakcı, "*A Decomposition of Soft Continuity via Soft Ideal*", 2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, (ICRAPAM 2015), 3-6 JUNE 2015, Istanbul/TURKEY. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

3. Y. Yumak and A. Keskin Kaymakci, "*On Soft RIC-Continuous Functions*", 3rd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, (ICRAPAM 2016), 19-23 May 2016, Bodrum/TURKEY. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

4. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*On soft I-extremally disconnected spaces*", International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), 10-12 May 2017, YTU, Istanbul/TURKEY. **(Doktora tezinden yapılmıştır)**

5. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*Some New Separation Axioms for Soft b-open Sets*", 3 rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress (IRSYSC 2017), 24-26 May 2017, Selcuk University, Konya/TURKEY.

6. Y. Yumak, A. Keskin Kaymakcı, "*On Soft b-open Sets and Some New Seperation Axioms*". International Conference on Science and Technology (ICONST 2018), 5-9 September 2018, UBT, Prizren/KOSOVA.