T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE PORTFÖY ANALİZİNE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Metin YAMAN

Enstitü Anabilim Dalı: **MATEMATİK**

Bu tez 16/07/1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ö. Faruk GÖZÜKIZIL	Prof. Hamdi ARIKAN	Doç. Dr. E. Sabri TÜRKER
Jüri Başkanı	Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı titizlikle yürüten, bilgi ve tecrübesiyle destek olan, her türlü yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a teşekkürü bir borç bilirim.

Yine bu çalışma süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Hamdi ARIKAN'a, Sayın Doç. Dr. Eyüp Sabri TÜRKER'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Metin BAŞARIR'a teşekkür ederim. Ayrıca katkıda bulunan bölüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Tezin yazımında bana yardımcı olan eşime de ayrıca teşekkür ederim.

Metin YAMAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

Ω	Kesin olay veya durum uzayı
$\mathfrak{I}$	Sigma cebir
$\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$	$\mathfrak{R}$ nin ürettiği sigma cebir
$\mathbb{B}(\mathbb{R})$	Borel cebiri
I_A	A cümlesinin karakteristik fonksiyonu
$(\Omega,\mathfrak{I})$	Ölçülebilir uzay
$\mu(A)$	A cümlesinin ölçüsü
$P(A)$	A cümlesinin olasılığı
$(\Omega,\mathfrak{I},P)$	Olasılık uzayı
λ	Lebesgue ölçüsü
P_X	X şans değişkeninin dağılımı
$F(x)$	X şans değişkeninin dağılım fonksiyonu
$E(X)$	X şans değişkeninin beklenen değeri
σ^2	Varyans
I	İndeks kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
X^+	X şans değişkeninin pozitif kısmı
X^-	X şans değişkeninin negatif kısmı
ω	Deneme sonucu, gözlem
$\mu(t)$	Ortalama fonksiyonu
$R(t,s)$	Korelasyon fonksiyonu
$X'(t)$	X(t) sürecinin türevi
$W(t)$	Wiener süreci
$\mathbb{L}^2[0,T]$	$P\left\{\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt < \infty\right\} = 1$ şartını sağlayan bütün karakterize edilemeyen fonksiyonlar sınıfi
$\mathbb{M}^2[0,T]$	$E\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt < \infty$ şartını sağlayan karakterize edilemeyen fonksiyonlar sınıfi
f_x	f fonksiyonunun x değişkenine göre türevi

f_t	f fonksiyonunun t değişkenine göre türevi
f_{xx}	f fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci türevi
exp(X)	X değişkeninin üstel ifadesi
Var(X)	X değişkeninin varyansı
Cov(X,Y)	X ile Y nin kovaryansı
V(t)	t anındaki portföy değeri
S(t)	t anındaki birim başına hisse senedi fiyatı
b(t)	t anındaki birim başına tahvil fiyatı
$C^{2,1}((0,\infty)x(0,T))$	x değişkenine göre iki defa, t ye göre bir kez türevlenebilir sürekli fonksiyonlar uzayı
$(x\text{-H})^+$	(x-H) değerinin sürekli pozitif olması anlamındadır

Kısaltmalar

a.e.	Hemen hemen her yerde (almost everywhere)
a.s.	Hemen hemen kesin (almost surely)
s.t.	Stokastik olarak veya olasılık içinde yakınsaklık
q.m.	Kareli ortalamada yakınsaklık
i.o.	Sonsuz sayıda
w.p.1	Bir olasılıkla yakınsaklık
sup	Üst sınırların en küçüğü (supremum)
max	Maksimum

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Stokastik İntegral, İto Formülü, Stokastik Diferansiyel Denklem, Wiener Süreci

Bu çalışmada öncelikle Wiener sürecine göre stokastik integral tanımı verilip, S(t) stokastik sürecine göre

$$dS(t) = a(t)\, dt + \sigma(t)\, dW(t)$$

stokastik diferansiyeli tanımlanarak stokastik analizde büyük öneme haiz İto Formulü ifade edilmiştir. Daha sonra stokastik diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliği ile çözüm metodları incelenmiştir.

Uygulama bölümünde Portföy analizinde bir yatırım modeline bağlı olarak

$$dS(t) = \mu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dW(t)$$

denklemi ile yönlendiği düşünülen hisse senetleri ve

$$\beta(t) = \beta(0)\, e^{rt}$$

ile tanımlı bonolar için bir oto-finans stratejisinin nasıl belirlenebileceği ve bu şekilde oluşturulan bir yatırım modelinde nasıl bir rasyonel tahmin elde edilebileceği üzerine bazı öneriler getirilerek yorumlar yapılmıştır. Burada μ, riskli bir yatırım aracı olan hisse senetleri için hisse senedi getirisinin ortalamasını, σ^2 ise getirinin varyansını göstermektedir. Risksiz yatırım aracı olan tahviller de ise $\beta(0)$; sabit bir sayıyı, r faiz oranını göstermektedir.

Stochastic Differential Equations and An Application to Portfolio Analysis

SUMMARY

Key Words: Stochastic Integral, Ito Formula, Stochastic Differential Equation, Wiener Process

In this study, it is introduced an application of stochastic differential equations in portfolio analysis. Firstly, it is given the definition of stochastic integral with respect to wiener (brownion motion) process and the definition of stochastic differential with respect to stochastic function S(t) as follows

$$dS(t)=a(t)dt+\sigma(t)dW(t) \qquad (1)$$

where a(t) and $\sigma(t)$ are the coefficient of equation (1). It follows Ito Formula, important in stochastic analysis, given by

$$df(S(t),t)=[f_t(S(t),t)+f_x(S(t),t)a(t)+\frac{1}{2}f_{xx}(S(t),t)\sigma^2(t)]dt+f_x(S(t),t)\sigma(t)dW(t)$$

where $f(x,t)$ are twice continuously differentiable in $x\in(0,\infty)$ and once continuously differentiable in $t\in[0,T]$.

In the last chapter, it is studied on that how one can determine an investment model including stock and bond. The stock whose price S(t) per share at time t is governed by the stochastic diferential equation

$$dS(t)=\mu\, S(t)dt + \sigma\, S(t)dW(t) \quad , t\geq 0$$

where $\mu\neq 0$, $\sigma>0$ are constants, and μ may be interpreted as the mean rate of return, and σ^2 may be interpreted as the variance of the rate of return.

The bond is a riskless asset whose price $\beta(t)$ per share at time t is given by $\beta(t)=\beta(0)e^{rt}$, where $r>0$ is the interest rate and $\beta(0)$ is a positive constant.

Finally, it is indicated that how one might guess the rational value and identify an associated self-financing strategy.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1 Sigma Cebir ve Şans Değişkenleri

Olasılık teorisi, sonuçları şansa bağlı olan denemelerin matematik modelleriyle ilgilenir[1]. Mümkün olası sonuçların kümesi Ω ile gösterilir. Bir gözlenebilir A olayı Ω nın altkümesidir ve $A \subset \Omega$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.1: Ω bir kesin olayı, $\mathfrak{I}$ ise, Ω nın alt cümleleri olan tek denemede gözlenebilecek olayların sınıfını göstersin. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathfrak{I}$ sınıfına bir "**sigma cebir** " denir.

i) $\Omega \in \mathfrak{I}$

ii) Her $A \in \mathfrak{I}$ için $A^c = \Omega \backslash A \in \mathfrak{I}$

iii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathfrak{I}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{I}$

Olasılık teorisinde $\mathfrak{I}$ in elemanlarına **olay**, $(\Omega, \mathfrak{I})$ ikilisine de **ölçülebilir uzay** denir. Ω kesin olayı, $\varnothing$ ise imkansız olayı göstermektedir.

Teorem 1.1.1: Ω bir cümle , $\mathfrak{R}$ ise Ω nın boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathfrak{R}$ yi kapsayan sigma cebirlerin bir en küçüğü vardır.

Tanım 1.1.2 :Bir $\mathfrak{R}$ sınıfını kapsayan sigma cebirlerin en küçüğüne $\mathfrak{R}$ nin ürettiği sigma cebiri denir ve $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3: $\mathbb{R}$ nin tüm açık (a,b) aralıklarının ürettiği sigma cebirine "**Borel cebiri** " denir ve $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4: Ω bir cümle, $\Im$ ise Ω üzerinde bir sigma cebiri olsun. **(Ω,$\Im$)** ikilisine bir "**Ölçülebilir Uzay**", $\Im$ in her bir elemanına da "**Ölçülebilir cümle** " denir. Özel olarak Borel cebirinin elemanlarına "**Borel ölçülebilir cümle**" veya sadece "**Borel cümlesi**" denir.

Tanım 1.1.5: $(\Omega_1,\Im_1)$ ve $(\Omega_2,\Im_2)$ iki ölçülebilir uzay olsun. $X:\Omega_1 \to \Omega_2$ fonksiyonu verilsin. $B\subset\Omega_2$ cümlesinin ters görüntüsü

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in\Omega_1; X(\omega) \in B\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\{X\in B\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6: $(\Omega_1,\Im_1)$ ve $(\Omega_2,\Im_2)$ iki ölçülebilir uzay verilsin. Eğer $B\subset\Omega_2$ cümlesinin tersi $\Im_1$ de ise yani

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in\Omega_1; X(\omega) \in B\} \in \Im_1$$

ise X fonksiyonuna **"ölçülebilir"** denir.

Tanım 1.1.7: Eğer X: $(\Omega, \Im)\to$ (IR,IB) ölçülebilir ise X: $\Omega\to$IR fonksiyonuna **"ölçülebilir fonksiyon"** veya **"$\Im$-ölçülebilir fonksiyon"** denir.

Tanım 1.1.8: IR üzerinde her B borel cümlesi için eğer

$$\{\omega; X(\omega)\in B\}\in\Im$$

ise Ω üzerinde tanımlanan $X(\omega)$ fonksiyonuna bir **"şans değişkeni"** denir.

Tanım 1.1.9: Aşağıdaki şekilde tanımlanan I_A fonksiyonuna, $A\subset\Omega$ kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir.

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ eğer } \omega \in A \\ 0, \text{ eğer } \omega \notin A \end{cases}$$

Teorem 1.1.2: I_A nın ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart A cümlesinin ölçülebilir olmasıdır, yani $A \in \mathfrak{I}$ olmasıdır. Ölçülebilir fonksiyonlar dizisinin limiti ölçülebilirdir.

1.2 Olasılık ve Dağılım Fonksiyonları

Tanım 1.2.1: $(\Omega, \mathfrak{I})$ ölçülebilir uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan, $\mathfrak{I}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonuna "**ölçü fonksiyonu** " veya kısaca "**ölçü**" adı verilir.

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Her $A \in \mathfrak{I}$ için $\mu(A) \geq 0$

iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Tanım 1.2.2: Her $A \in \mathfrak{I}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir "**sonlu ölçü**" denir.

Tanım 1.2.3: Eğer Ω cümlesi herbirinin ölçüsü sonlu olacak biçimde sayılabilir çokluktaki cümlelerin birleşimi olarak yazılabilirse, yani her A_n için $\mu(A_n) < \infty$ olacak biçimde

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ise, μ ölçüsüne "**sigma sonludur**" denir.

Tanım 1.2.4: Eğer $\mu(\Omega) = 1$ ise μ ölçüsüne "**olasılık ölçüsü** " denir. Olasılık ölçüsü **P** ile gösterilir.

Tanım 1.2.5: Ω bir cümle, $\mathfrak{I}$ ise Ω nın altcümlelerinden oluşan bir sigma cebiri olsun. $\mathfrak{I}$ üzerinde tanımlı μ ölçüsünden oluşan $(\Omega, \mathfrak{I}, \mu)$ sıralı üçlüsüne bir "**ölçü uzayı**" denir. Eğer μ bir olasılık ölçüsü ise bu uzaya "**olasılık uzayı**" denir ve

$(\Omega,\Im,P)$ şeklinde gösterilir. A bir cümle olmak üzere PA) ya A cümlesinin olasılığı denir.

Tanım 1.2.6: $(\Omega,\Im,P)$ bir olasılık uzayı ve $A\subset\Omega$ olsun ($A\subset\Im$ olmak zorunda değildir). Eğer $A\subset B$, $P(B)=0$ ve $B\in\Im$ şartlarını sağlayan Ω nın bir B alt cümlesi varsa A cümlesine**"P boştur"** denir.

Tanım 1.2.7: $(\Omega,\Im,P)$ bir olasılık uzayı olsun. Ω nın her bir P-boş alt cümlesi $\Im$ sigma cebirine ait ise $(\Omega,\Im,P)$ uzayına **"tam olasılık uzayı"** denir.

Tanım 1.2.8: IR üzerindeki B borel cümlelerinde tanımlı, bulunduğu aralığı uzunluğuna götüren ölçüye **"Lebesgue ölçüsü"** denir. Bu ölçü $\lambda\{x:a\leq x\leq b\}=b-a$ şeklinde ifade edilir. $\lambda(\mathrm{IR})=\infty$ olduğundan Lebesgue ölçüsü sonlu değildir. Her sayılabilir cümlenin Lebesgue ölçüsü sıfırdır[1].

Tanım 1.2.9: $(\Omega,\Im,P)$ bir olasılık uzayı olsun.

$$P_X(B)=P(X^{-1}(B))=P\{\omega:X(\omega)\in B\}=P[X\in B]$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona X şans değişkeninin **dağılımı** denir ve P_X ile gösterilir. Reel-değerli bir şans değişkeni için P_X dağılımı, IB üzerinde

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leq x\}=P[X\leq x]$$

ile tektürlü tanımlanır.

Tanım 1.2.10: Bir X şans değişkeni verildiğinde $\{X\leq x\}$ olayının $P\{X<x\}$ olasılığına X şans değişkeninin **"dağılım fonksiyonu"** denir ve $F(x)=.P\{X\leq x\}$ ile gösterilir.

Uygulamalarda şans değişkenleri, dağılım fonksiyonları cinsinden tanımlanır. $F(x)$ fonksiyonu verildiğinde X şans değişkeninin dağılım fonksiyonu F olacak biçimde bir X şans değişkeni ve $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı oluşturmak mümkündür. Örnek olarak

$(\Omega,\Im,P)=(\mathbb{R},\mathbb{B},P_F)$ ve $X(\omega)=\omega$ seçilebilir. Burada P_F, F ile $\mathbb{B}$ üzerinde tek türlü tanımlı olasılık ifadesidir. Eğer $\mathbb{B}$ üzerinde F ile üretilen P_F olasılığı lebesgue sürekli ($\mathbb{B}$ cebirine ait sıfır lebesgue ölçülü her cümle için $P_F(N)=0$) ise P_F olasılığı bir yoğunluğa sahiptir diğer bir ifade ile

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

olacak biçimde integrallenebilir bir $f(x)\geq 0$ fonksiyonu vardır.

F dağılım fonksiyonu "**mutlak sürekli**" ($\varepsilon>0$ verildiğinde $I_1,I_2,\ldots,I_n$ sonlu aralıklarında bu aralıkların toplam uzunluğu δ dan küçük iken bu aralıklarda F deki toplam artış ε dan daha küçük olacak biçimde bir δ vardır) ise türevlenebilirdir ve

$$\frac{dF}{dx}=f(x)$$

şeklinde ifade edilir[1].

1.3 İntegral ve Beklenen Değer

Tanım 1.3.1: $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı üzerinde reel değerli bir şans değişkeni verilsin. Eğer X şans değişkeni sonlu sayıda $c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n$ farklı değerleri alıyorsa aşağıdaki şekilde tanımlanan E(X) reel sayısına X şans değişkeninin "**beklenen değeri**" denir.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} c_k P(X=c_k) \tag{1.1}$$

$(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı reel değerli şans değişkenleri için integral tanımı aşamalı olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 1.3.2: $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı olsun. $\bigcup_{k=1}^{n} c_k I_{A_k}=\Omega$, $A_k\cap A_r=\varnothing$ $(k\neq r)$ ve $A_k\in\Im$ olmak üzere

$$X=\sum_{k=1}^{n} c_k I_{A_k} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanan X şans değişkenine bir **"basamak fonksiyonu"** denir. Burada I_{A_k}, $A\in\mathfrak{I}$ in karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

Tanım 1.3.3: X şans değişkeni bir basamak fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{\Omega} XdP = \sum_{k=1}^{n} c_k P(A_k) \tag{1.3}$$

yazılabilir. Bu integrale "X in **P**-ye göre integrali" denir.

Tanım 1.3.4: $X \geq 0$ herhangi bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Her $\omega\in\Omega$ için

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} X_n dP = c < \infty$$

olacak biçimde negatif olmayan ölçülebilir basamak fonksiyonlarının artan bir $\{X_n\}$ dizisi vardır. Burada c, $\{X_n\}$ dizisinden bağımsızdır ve $c=\int_{\Omega} XdP$ dir.

Tanım 1.3.5: X herhangi bir ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$X^+ = XI_{(X\geq 0)} = \begin{cases} X, & \text{eğer } X\geq 0 \\ 0, & \text{eğer } X<0 \end{cases}$$

$$X^- = -XI_{(X<0)} = \begin{cases} -X, & \text{eğer } X<0 \\ 0, & \text{eğer } X\geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan X^+ ve X^- fonksiyonlarına X fonksiyonunun **pozitif ve negatif kısmı** denir. Buradan $X = X^+ - X^-$ eşitliği mevcuttur.

Tanım 1.3.6: $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı ve X herhangi bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer $\int_{\Omega} X^{+}dP$ ve $\int_{\Omega} X^{-}dP$ integralleri sonlu ise X fonksiyonu Ω üzerinde **P** ye göre integrallenebilirdir denir ve bu integral $X = X^{+} - X^{-}$ eşitliği ile

$$\int_{\Omega} XdP = \int_{\Omega} X^{+}dP - \int_{\Omega} X^{-}dP \qquad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Olasılık teoride integral, beklenen değer olarak da adlandırılır ve

$$E(X)=\int_{\Omega} XdP \qquad (1.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.3.1: g: IR→ IR ölçülebilir fonksiyon olsun. Buradan $Y= g(x)$ için Y nin beklenen değeri

$$E(Y) = \int_{IR} g(x)dF(x)$$

ve özel olarak $g(x) = x$ için

$$E(X)=\int_{IR} xdF(x) = \int_{IR} xf(x)dx$$

şeklindedir. F, X in dağılım fonksiyonudur. (IR,IB,P_X) olasılık uzayı üzerinde g(x) fonksiyonunun integrali $\int_{IR} g(x)dF(x)$ şeklinde ifade edilir. Bu integrale "**Lebesgue-Stieltjes integrali**" denir.

$(\Omega,\Im,P)$ uzayı yerine (IR,IB,λ) uzayı alınırsa (λ; Lebesgue ölçüsü) oluşan integrale "**Lebesgue integrali**" denir ve bu integral

$$\int_{IR} f(x)dx = \int_{IR} f(x)d\lambda(x)$$

şeklinde ifade edilir. Sınırlı bir aralıkta tanımlı her sınırlı Riemann-integrallenebilir fonksiyon aynı zamanda Lebesgue-integrallenebilir[1].

Tanım 1.3.7: X şans değişkeni için

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{1}{c^2} E|X|^2 \quad (c>0)$$

şeklinde tanımlanan eşitsizliğe "**Chebyshev Eşitsizliği**" denir.

Tanım 1.3.8: $Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sigma^2(X)$ şeklinde ifade edilen Var(X) sayısına X in **varyansı** denir. $(Var(X))^{1/2}$ sayısına ise X in "**standart sapması**" denir.

Tanım 1.3.9: $E(X^k)$ sayısına X in **k-ıncı momenti,** $E(X - E(X))^k$ sayısına X in **k-ıncı merkezi momenti** denir.

Tanım 1.3.10: Cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) sayısına X ve Y nin **kovaryansı** denir.

Teorem 1.3.3 (Monoton Yakınsaklık Teoremi)**:** $\{X_n\}$, negatif olmayan şans değişkenlerinin artan bir dizisi ise

$$\lim_{n \to \infty} E(X_n) = E(\lim_{n \to \infty} X_n) \tag{1.7}$$

yazılır.

Teorem 1.3.4 (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi)**:** $\lim_{n \to \infty} X_n = X$ olacak biçimde şans değişkenleri dizisi $\{X_n\}$ olsun. Buradan

$$\lim_{n \to \infty} E(X_n) = E(X) \tag{1.8}$$

ifadesi yazılır.

1.4 Yakınsaklık Tanımları

Ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı, sürekli fonksiyonlar kümesinin aksine olarak, limit alma işlemine kapalıdır[2].

Tanım 1.4.1: Bir X fonksiyonu A kümesinin, olasılığı sıfır olan noktalarını oluşturan altkümesinin dışındaki tüm noktalarında belli bir özelliğe sahip ise, bu durumda X fonksiyonu A üzerinde bu özelliğe **"hemen hemen heryerde (a.e)"** sahiptir denir.

Teorem 1.4.1: Ölçülebilir fonksiyonlar dizisi hemen hemen her yerde $X(\omega)$ fonksiyonuna yakınsıyor ise $X(\omega)$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

Tanım 1.4.2: Eğer hemen hemen her $\omega \in \Omega$ için

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \tag{1.9}$$

oluyorsa, yani (1.9) eşitliğinin sağlanmadığı noktalar kümesinin olasılığı sıfır ise, Ω uzayı üzerinde tanımlı $X_n(\omega)$ şans değişkenleri dizisi, $X(\omega)$ şans değişkenine **"hemen hemen kesin (a.s)"** yakınsar denir ve

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad \text{a.s.} \tag{1.10}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.4.3: Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0 \tag{1.11}$$

ise, $\{X_n\}$ şans değişkenleri dizisi X şans değişkenine **"stokastik olarak"** veya **"olasılık içinde yakınsar"** denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad \text{s.t.} \tag{1.12}$$

Tanım 1.4.4: $\{X_n\}$, kare-integrallenebilir olacak biçimde ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0$$

ise $\{X_n\}$ dizisi X fonksiyonuna **"kareli ortalama içinde"** yakınsar denir ve

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad \text{q.m.}$$

şeklinde ifade edilir.

1.5 Borel-Cantelli Lemma

Tanım 1.5.1: $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ olasılık uzayında $A_n \in \mathfrak{I}$ olsun. $\{A_n \text{ i.o}\}$ cümlesi $\{\omega : \omega \in A_n$ sonsuz sayıda n için$\}$ şeklinde veya $\{A_n \text{ i.o}\} = \lim_{m\to\infty} \bigcup_{n>m}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.5.1:

(⇒): Eğer $A_n \in \mathfrak{I}$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \;\Rightarrow\; P(A_n \text{ i.o}) = 0 \qquad \text{olur.}$$

(⇐): Eğer $A_n \in \mathfrak{I}$ bağımsız olaylar ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \;\Rightarrow\; P(A_n \text{ i.o}) = 1 \qquad \text{olur.}$$

BÖLÜM 2. STOKASTIK SÜREÇ

2.1 Stokastik Süreçler

Bir şans deneyinin deneme sonucu ω olsun. Her denemenin sonucuna belli bir kurala göre bir **$X(t,\omega)$** fonksiyonu karşılık getirilsin. Buna göre bir "**stokastik süreç**", **t** parametreli ve ω değişkenli bir fonksiyon sınıfı olur. ω lerin tanım bölgesine durum uzayı (state space) denir ve Ω ile gösterilir. **t** lerin tanım kümesine ise index kümesi veya parametre kümesi denir ve $I \subset \mathbb{R}$ ile gösterilir.

$(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı olsun. $\{X(t,\omega);t \in I\}$ ailesine $\mathbb{R}$ durum uzaylı ve I parametre kümeli "**stokastik (şans) süreç**" denir.

Eğer **t** değişken, ω (fixed) değişmez ise **$X(.,\omega)$** bir zaman fonksiyonu (time function) veya örnek fonksiyonu (sample function) olur. ω değişken, **t** değişmez (fixed) olduğu zaman **$X(t,.)$** bir şans değişkeni olur. Son olarak **t** ve ω değişmez (fixed) olduğu zaman **$X(t,\omega)$** bir sayı olur. Çoğu zaman durum değişkeni ihmal edilir ve süreç $\{X(t),\ t \in I\}$ şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak stokastik süreç $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanan şans değişkenlerinin bir sınıfı olmuş olur. Eğer $I \subset \mathbb{R}$ ise bu sürece "**sürekli parametre süreci**", $I \subset \mathbb{N}$ ise bu sürece de "**kesikli parametre süreci**" denir[3].

Tanım 2.1.1: Her $t \in I$ için $EX(t)^2 < \infty$ şartını sağlayan sürece "**ikinci mertebe süreci**" denir.

Tanım 2.1.2: $\{X(t),t \in I\}$ ikinci mertebe süreci olsun. Sürecin **ortalaması fonksiyonu**

$$EX(t) = \mu(t)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.3 : Bir $\{X(t), t \in I\}$ stokastik sürecinin **korelasyon fonksiyonu** $X(t)X(s)$ nin beklenen değeridir ve $R(s,t)$ ile gösterilir.

$$R(s,t) = E[X(s)X(t)]$$

Kovaryans fonksiyonu ise

$$Cov(X(s),X(t)) = E[X(s)\,X(t)] - \mu(s).\mu(t)$$

şeklinde ifade edilir. $EX(t)=0$ ise kovaryans, korelasyon fonksiyonuna eşittir.

$s = t$ alınırsa **Varyans fonksiyonu** elde edilir.

$$Cov(X(t),X(t)) = E[X(s)\,X(t)] - \mu(t).\mu(t)$$

$$Var(X(t)) = E(X(t))^2 - (\mu(t))^2$$

Tanım 2.1.4: Eğer $X_1, X_2, ... X_n$ şans değişkenleri iseler, $X = (X_1, X_2, ... X_n)$ ye n-boyutlu şans değişkeni veya IR^n deki değerlerle bir "**şans değişkeni**" denir.

$F_n(x_1, x_2, ... x_n) = P(X_1 < x_1, ..., X_n < x_n)$ n-boyutlu bir dağılımdır. Tersine n-boyutlu F_n dağılımı için, dağılım fonksiyonu F_n olacak biçimde IR^n deki değerleri ile bir X şans değişkeni ve $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı vardır[4].

Tanım 2.1.5: $F_n(x_1, x_2, ... x_n) = P(X_1 < x_1, ..., X_n < x_n)$ n-boyutlu dağılım olmak üzere $n > 1$ için eğer

$$\lim_{X_n \to \infty} F_n(x_1, x_2, ... x_n) = F_{n-1}(x_1, ... x_{n-1}) \qquad (2.1)$$

ise $\{F_n(x_1, ... x_n)\}$ dağılım fonksiyonları dizisine "**tutarlıdır**" denir.

Tanım 2.1.6: $(\Omega,\Im,P)$ bir olasılık uzayı ve $\{X_n\}$, şans değişkenlerinin bir dizisi olsun. Böyle bir diziye **"sayılabilir stokastik süreç"** ya da bir **"stokastik dizi"** denir.

Teorem 2.1.1: $\{F_n\}$, (2.1) tutarlılık şartını sağlayan n-boyutlu dağılım fonksiyonları dizisi olsun. Buradan $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı ve $n\geq 1$ için

$$P(X_1 < x_1,\ldots,X_n < x_n)=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

olacak biçimde $\{X_n\}$ sayılabilir stokastik süreci vardır.

Tanım 2.1.7: Bir stokastik süreç, $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı $\{X(t)\}$ şans değişkenlerinin bir sınıfıdır. Burada t, $I\subset\mathbb{R}$ aralığında değişir. Bu stokastik süreç $\{X(t),t\in I\}$ ile gösterilir.

2.2 Bazı Süreç Tanımları

Tanım 2.2.1: $\{X(t),\ t\in I\}$ bir stokastik süreç olsun. Sonuçta her $t\in I$ için X(t), $X(t,\omega)$ şans değişkenidir. $t\to X(t,\omega)$ (ω değişmez) fonksiyonlarına sürecin **"örnek yolları"** denir.

Tanım 2.2.2: $s<t$ için $\Im_s\subset\Im_t$ olacak biçimdeki $\Im$ sigma cebirlerinin $\{\Im_t\}_{t\geq 0}$ alt sigma cebirleri sınıfına bir **"filtre"** denir. Eğer aşağıdaki iki şartı sağlarsa $\{\Im_t\}_{t\geq 0}$ ye bir **"standart filtre"** denir[6].

i) $\Im_t$ sağ sürekldir

ii) $\Im_0$, $\Im$ deki P-boş cümlelerin hepsini kapsar.

Tanım 2.2.3: Sigma cebirlerin $\{\Im_t\ ,t\in I\}$ artan sınıfı verildiğinde eğer her $t\in I$ için $X(t)\in\Im_t$ ($\Im_t$ ölçülebilir) ise X süreci bu sınıfa **"uyumludur (adapted)"** denir.

Tanım 2.2.4: Eğer her $t \in [0,T]$ için $\int_0^T E|f(t)|^2 dt < \infty$ ise f(t) stokastik sürecine **"kareli ortalamada integrallenebilir"** denir.

Tanım 2.2.5: Her $t \in [0,T]$ için bir olasılıkla (w.p.1) eğer $X(t) = \overline{X}(t)$ ise X(t) ve $\overline{X}(t)$ stokastik süreçlerine aynı olasılık uzayında **"stokastik olarak denktir"** denir. $\overline{X}(t)$ sürecine X(t) sürecinin **"versiyonu"** denir.

Tanım 2.2.6: Eğer her $\omega \in \Omega$ için $\{(u, X_u(\omega)) : u \in U\}$ kümesi, $\{(t, X_t(\omega);\ t \geq 0\}$ kümesinde yoğun olacak biçimde sayılabilir bir U indis kümesi varsa reel değerli $\{X(t),\ t \geq 0\}$ stokastik sürecine **"ayrılabilir süreç"** denir.

Tanım 2.2.7: Bütün sürekli uyumlu süreçler ile üretilen $(0,\infty) x \Omega$ üzerindeki σ-cebirlere göre ölçülebilir sürece " **tahmin edilebilir (predictable süreç)"** denir.

2.3 Stokastik Süreklilik

Tanım 2.3.1: Eğer hemen hemen her ω için örnek yollar, her $t \in I$ için sürekli fonksiyonlar ise stokastik süreç **"süreklidir"** denir. Eğer hemen hemen her ω için örnek yollar sağ (sol) sürekli ise stokastik süreç sağ (sol) süreklidir.

Teorem 2.3.1: $\{X(t),\ a \leq t \leq b\}$ reel ve ayrılabilir bir süreç olsun. Bazı r,c,ε >0 ve yeteri kadar küçük h >0 için

$$E\left(|X(t+h) - X(t)|^r\right) \leq ch^{1+\varepsilon}$$

varsayılsın. Buradan hemen hemen her örnek fonksiyonu süreklidir. Diğer bir ifade ile hemen hemen her ω için X(.,ω) [a,b] aralığında süreklidir.

İspat : a = 0 , b = 1 varsayalım. Chebyshev eşitsizliği ile

$$P\left\{\left|X(t+h)-X(t)\right|>h^{k}\right\}\leq\frac{E\left|X(t+h)-X(t)\right|^{r}}{h^{rk}}$$
$$\leq\frac{ch^{1+\varepsilon}}{h^{rk}}$$
$$\leq ch^{1+\varepsilon-rk}$$

bulunur. $h\to 0$ için limit alınırsa yukarıdaki ifade sıfıra yakınsar. Eğer $k>0$ seçildiğinde ε-rk >0 olur.

Tanım 2.3.2: Eğer herhangi bir $t\in I$ ve $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n(t)-X(t)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

ise $\{X(t),\ t\in I\}$ stokastik sürecine, **"olasılık içinde"** veya **"stokastik olarak süreklidir"** denir ve

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t)=X(t) \qquad \text{s.t.}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3.3: $\{X(t),\ t\in I)\}$ stokastik süreç olsun. Eğer

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left|X_n(t)-X(t)\right|=0\right\}=1$$

ise $\{X(t)\}$ dizisi X sürecine **"bir olasılıkla (w.p.1)"** veya **"hemen hemen kesin (a.s) yakınsar"** denir ve

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t)=X(t) \qquad \text{a.s.}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3.4: Eğer $E|X(t)| < \infty$ ve

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n(t) - X(t)|^2 = 0$$

ise $\{X(t)\}$ dizisi X sürecine "**kareli ortalama**" içinde yakınsar denir ve

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t) \qquad \text{q.m.}$$

şeklinde gösterilir.

2.4 Stokastik Türev

Eğer

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X'(t)$$

veya

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t)\right)^2 = 0$$

ise X(t) sürecine "**kareli ortalamada türevlenebilirdir**" denir.

2.5 Bağımsız Artışlı Süreçler

Tanım 2.5.1: Eğer X(t) şans değişkenlerinin her sonlu lineer kombinasyonu normal dağılmış ise $\{X(t), t\in T\}$ sürecine "**Gauss süreci**" denir.

Tanım 2.5.2: $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ için $X(t_2) - X(t_1), \ldots\ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ şans değişkenleri bağımsız ise X(t) sürecine "**bağımsız artışlı süreç**" denir. Wiener süreci bağımsız artışlı bir süreçtir.

2.6 Wiener Süreci

Tanım 2.6.1: Aşağıdaki şartları sağlayan $\{X(t),\ t\geq 0\}$ stokastik sürecine bir **"wiener süreci"** veya **"brownion hareketi"** denir.

i) $X(0)=0$

ii) $0\leq t_0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_n$ için $(X(t_k)-X(t_{k-1}))$ $(1\leq k\leq n)$ şans değişkenleri bağımsızdır.

iii) $0\leq s\leq t$ için $W(t)$-$W(s)$ süreci

$$E(X(t)-X(s)) = (t-s)\,\mu$$

$$E(X(t)-X(s))^2=\sigma^2(t-s)$$

ile normal dağılmıştır. Burada μ, $\sigma\neq 0$ reel sabitlerdir. μ ye **"ortalama"**, σ^2 ye ise **"varyans"** denir.

Teorem 2.6.1: Eğer $X(t)$ stokastik süreci, μ ortalama ve σ^2 varyanslı bir wiener süreci ve $0\leq t_0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_n$ ise

$$\mathrm{Cov}\left[X(t_j),X(t_k)\right]=E\left[X(t_j)-EX(t_j)\right]\left[X(t_k)-EX(t_k)\right]$$

$$=\sigma^2\min(t_j,t_k)$$

İspat : Gerçekten de $t_j > t_k$ ise

$$E[X(t_j)-X(t_k)-E(X(t_j)-X(t_k))+X(t_k)-E(X(t_k))][X(t_k)-E(X(t_k))]$$

$$= E[X(t_k)\ -\ E(X(t_k))]^2$$

$$=\sigma^2 t_k$$

Eğer $\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ ise $X(t)$ sürecine **normalleştirilmiş Brownion hareketi** veya sadece **Brownion hareketi** (Wiener süreci) denir.

$W(t)$ şans değişkenleri 0 (sıfır) ortalamaya sahiptir ve $t_1 \le t_2 \le ....\le t_4$ için

$$E[W(t_2)-W(t_1)]\,[W(t_4)-W(t_3)]=0$$

dır. $s \ge a$ ve $t \ge a$ için

$$E[W(s)-W(a)][W(t)-W(a)]=\sigma^2 \min[(s-a),(t-a)]$$

Wiener süreci bir gauss sürecidir. Diğer bir ifade ile $t_1 \le t_2 \le ....\le t_n$ için ve $b_1, b_2, ...b_n$ reel sabitleri için $b_1 W(t_1)+b_2 W(t_2)+.......+b_n W(t_n)$ şans değişkenleri normal olarak dağılmıştır.

Teorem 2.6.2: Hemen hemen her ω için $W(.,\omega)$ wiener süreci $[0,\infty)$ aralığında süreklidir.

İspat: $W(t+h)-W(t)$ süreci 0 ortalama ve $\sigma^2 h$ varyans ile normal dağıldığından Teorem 2.3.1 ile

$$E\left(|W(t+h)-W(t)|^r\right)=E\left(\left|\frac{W(t+h)-W(t)}{\sigma\sqrt{h}}\right|^r\right)\sigma^r h^{r/2}=ch^{r/2}$$

elde edilir. Burada $c=\sigma^r E\left(|Z|^r\right)$ dir. Z değişkeni (0,1) ile normal dağılmış bir şans değişkenidir. Teorem 2.3.1 ile ($r>2$) için hemen hemen her ω için, $W(.,\omega)$ örnek fonksiyonu $[0,n]$ aralığında süreklidir. n keyfi pozitif tamsayıdır. Sonuçta hemen hemen her ω için, $W(.,\omega)$ wiener süreci $[0,\infty)$ aralığında süreklidir.

Teorem 2.6.3: $W(t)$ wiener süreci hiçbir yerde türevlenebilir değildir.

İspat: (ii) özelliği ile yani $W(t)-W(s)$, 0 (sıfır) ortalama ve $(t-s)\sigma^2$ varyanslı normal dağılım göstermesi dolayısıyla

$$E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2=\frac{\sigma^2}{|h|}$$

Buradan limit alınırsa

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2=\infty \tag{2.2}$$

elde edilir. Eğer türevlenebilir olsaydı

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}-W'(t)\right)^2=0 \tag{2.3}$$

ifadesi aşağıdaki ifadeyi ortaya çıkaracaktı.

$$\lim_{h\to 0} E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2=E(W'(t))^2 \tag{2.4}$$

Fakat (2.4) sonucu (2.2) ile çelişmektedir.

2.7 Martingale

Tanım 2.7.1: $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı olsun. Her $n\in IN$ için $E|X_n|<\infty$ ve

$$E(X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots\ldots,X_n)=X_n$$

ise $\{X_n\}$ stokastik sürecine bir **martingale** denir. Eğer her $n\in IN$ için $E|X_n|<\infty$ ve

$$E(X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots\ldots,X_n)\geq X_n$$

ise X(t) sürecine **alt martingale** denir.

Teorem 2.7.1: Eğer $\{X_n\}$ bir alt martingale ise $\varepsilon>0$, $n\geq 1$ için

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k>\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon}EX_n$$

eşitsizliğine "**martingale eşitsizliği**" denir.

Sonuç 2.6.1: $\{X_n\}$ bir martingale ve $\alpha \geq 1$, $n \geq 1$ için $E|X_n|^{\alpha} < \infty$ ise

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} E|X_n|^{\alpha}$$

Lemma 2.6.1: Eğer X(t) süreci bağımsız artışlı ve sıfır ortalamalı bir süreç ise bu süreç bir martingaledir.

BÖLÜM 3. STOKASTİK İNTEGRAL

Bu bölümde W(t) wiener sürecine göre

$$\int_0^T f(t)dW(t) \tag{3.1}$$

stokastik integrali tanımlanacaktır. Burada f(t) bir şans (stokastik) fonksiyon veya sürecidir. Eğer her ω için f fonksiyonu "mutlak sürekli" ise (3.1) integrali

$$f(T)W(T) - \int_0^T f'(t)W(t)dt \tag{3.2}$$

şekilde tanımlanabilir. Fakat f(t) süreci sadece sürekli olduğundan bu integral anlamsızdır. W(t) wiener süreci hiçbir yerde **bir olasılıkla** türevlenemediğinden (3.1) integrali Lebesgue-stieltjes integrali şeklinde ifade edilemez.

3.1 Basamak Fonksiyonları ile İntegral Yaklaşımı

$(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı ve $\{W(t), t>0\}$ bir wiener süreci olsun. Her $t\in[0,T]$ için $\Im_t \subset \Im$ sigma cebirleri aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde tanımlansın.

i) $t_1 < t_2$ için $\Im_{t_1} \subset \Im_{t_2}$, yani artan sigma cebirleri sınıfı

ii) W(t), $\Im_t$ ölçülebilir, yani $(W(s), 0\leq s\leq t)\in\Im_t$

iii) $W(t+s)-W(t)$ süreci, $\Im_t$ sigma cebirine bağlı değildir. Diğer bir ifade ile $\Im(W(t+s) - W(t), s\geq 0)$, $\Im_t$ den bağımsızdır $(t\geq 0)$[5].

Tanım 3.1.1: $0\leq a<b<\infty$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $a\leq t\leq b$ için tanımlı f(t) stokastik sürecine, $\Im_t$ ye göre **"karakterize edilemeyen (nonanticipative) bir fonksiyon"** denir.

i) f(t) ayrılabilir bir süreçtir.

ii) f(t) ölçülebilir bir süreç, yani $[a,b] \times \Omega \to \mathrm{IR}$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

$$(t,\omega) \to f(t,\omega)$$

iii) Her bir $t \in [a,b]$ için f(t), $\mathfrak{I}_t$ ölçülebilirdir.

Şimdi de (3.1) integralinin tanımlanacağı stokastik fonksiyonlar sınıfı tanımlansın.

$$P\left\{\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\right\} = 1 \tag{3.3}$$

şartını sağlayan bütün karakterize edilemeyen fonksiyonlar sınıfı $\mathrm{IL}^2[a,b]$ ile gösterilir.

$$E\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \tag{3.4}$$

şartını sağlayan f(t) fonksiyonlar sınıfı $\mathrm{IM}^2[a,b] \subset \mathrm{IL}^2[a,b]$ ile tanımlanır.

Tanım 3.1.2: $t_k \le t \le t_{k+1}$ $(0 \le k \le r-1)$ iken $f(t)=f(t_k)$ olacak biçimde [a,b] aralığının $a = t_0 \le t_1 \le \ldots\ldots \le t_r = b$ ayrışımı varsa [a,b] aralığında tanımlı f(t) stokastik sürecine **"basamak (step) fonksiyonu"** denir.

Lemma 3.1.1: $f \in \mathrm{IL}^2[a,b]$ olsun.

i) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt = 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.5}$$

olacak biçimde $\mathrm{IL}^2[a,b]$ üzerinde g_n sürekli fonksiyonlar dizisi vardır.

ii) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.6}$$

olacak biçimde $\mathrm{IL}^2[a,b]$ üzerinde f_n basamak fonksiyonlar dizisi vardır.

İspat : i)

$$\rho(t) = \begin{cases} c.\exp\left(\dfrac{-1}{1-t^2}\right) & , \text{eğer } |t| \le 1 \\ 0 & , \text{eğer } |t| > 1 \end{cases}$$

olsun. Burada c sayısı, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$ şartı ile belirlenen bir sabittir. Eğer t<a ise f(t)=0 ve

$$(J_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{a-1}^{b} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) f(s)ds \qquad (2\epsilon < 1) \tag{3.7}$$

tanımlansın. Burada $J_\varepsilon f$ fonksiyonu süreklidir ve

$$(J_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) f(s)ds = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(z)\, f(t-z-\varepsilon)\, dz \tag{3.8}$$

olur. Schwarz eşitsizliğinden

$$\int_a^b (J_\varepsilon f)^2 dt \le \int_a^b \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(z)dz \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(z) f^2(t-z-\varepsilon)dz \right\} dt$$

$$\le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(z) \left\{ \int_{a-1}^{b} f^2(t)dt \right\} dz$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (J_\varepsilon f)^2 dt \le \int_a^b f^2(t)dt \tag{3.9}$$

bulunur. $\int_a^b f^2(t,\omega)dt$ ifadesindeki değişmez (fixed) ω için t<a iken $u_n(t)=0$ olacak biçimdeki u_n fonksiyonları, şans fonksiyonu olmayan sürekli fonksiyonlar olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |u_n(t) - f(t,\omega)|^2 dt = 0 \tag{3.10}$$

olsun. u_n sürekli olduğundan $t \in [a,b]$ aralığında

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (J_\varepsilon u_n)(t) = u_n(t)$$

düzgün yakınsaktır.

$$\int_a^b |(J_\varepsilon f)(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt \le \int_a^b |J_\varepsilon (f(.,\omega) - u_n(.))(t)|^2 dt$$

$$+ \int_a^b |(J_\varepsilon u_n)(t) - u_n(t)|^2 dt + \int_a^b |u_n(t) - f(t,\omega)|^2 dt$$

yazarak ve (3.10) ifadesinde f fonksiyonu yerine f-u_n fonksiyonu alınırsa ve de $\varepsilon \to 0$ için limit alınarak

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b |(J_\varepsilon f)(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt \le 2\int_a^b |u_n(t) - f(t,\omega)|^2 dt$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınır ve (3.10) ifadesi kullanılırsa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b |(J_\varepsilon f)(t) - f(t)|^2 dt = 0 \qquad \text{a.s.}$$

ifadesine ulaşılır. (3.8) ifadesinin sağ tarafındaki integrand ayrılabilir bir süreç yani $\Im_t$ ölçülebilir olduğundan integralin kendisi de $\Im_t$ ölçülebilirdir. $g_n = J_{1/n} f$ almak suretiyle (i) iddiası sağlanır.

ii) $0 \le k < m(b-a)$ olmak üzere eğer $a + \dfrac{k}{m} \le t < a + \dfrac{k+1}{m}$ ise

$$h_{n,m}(t) = g_n\left(\frac{k}{m}\right)$$

olsun. Buradan

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b |h_{n,m}(t) - g_n(t)|^2 dt = 0 \qquad \text{a.s.} \qquad (3.11)$$

yazılır. Herhangi bir $\delta>0$ için

$$P\left\{\int_a^b |f(t)-g_n(t)|^2 dt > \frac{\delta}{2}\right\} < \frac{\delta}{2} \qquad (\text{bazı } n=n_0 \text{ için})$$

ve (3.11) ifadesinden $n=n_0$ ile

$$P\left\{\int_a^b |g_{n_0}(t)-h_{n_0,m}(t)|^2 dt > \frac{\delta}{2}\right\} < \frac{\delta}{2} \qquad (\text{bazı } m=m_0 \text{ için})$$

elde edilir. Sonuçta

$$P\left\{\int_a^b |f(t)-h_{n_0,m_0}(t)|^2 dt > \delta \right\} < \delta$$

bulunur. $\delta = \frac{1}{k}$ ve $h_{n_0,m_0} = \psi_k$ alınırsa $\psi_k \in \mathbb{L}^2[a,b]$ olur ve

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |f(t)-\psi_k(t)|^2 dt = 0 \qquad \text{s.t.}$$

bulunur. Fakat (ii) iddiasını sağlayan $\{\psi_k\}$ nın bir $\{f_n\}$ alt dizisi vardır.

Lemma 3.1.2: $f\in \mathbb{M}^2[a,b]$ olsun. Buradan

i) $$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |f(t)-k_n(t)|^2 dt = 0 \qquad (3.12)$$

olacak biçimde $\mathbb{M}^2[a,b]$ üzerinde k_n sürekli fonksiyonların bir dizisi vardır.

ii) $$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |f(t)-1_n(t)|^2 dt = 0 \qquad (3.13)$$

olacak biçimde $\mathbb{M}^2[a,b]$ de 1_n sınırlı basamak fonksiyonların bir dizisi vardır.

İspat: i) g_n lemma 3.1.1 deki gibi olsun. Herhangi bir N>0 için

$$\phi_N(t) = \begin{cases} t, & \text{eğer } |t| \le N \\ \dfrac{Nt}{|t|}, & \text{eğer } |t| > N \end{cases}$$

olsun. $|\phi_N(t) - \phi_N(s)| \le |t-s|$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\phi_N(f(t)) - \phi_N(g_n(t))|^2 dt \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt = 0 \qquad \text{a.s.}$$

bulunur.

$$\int_a^b |\phi_N(f(t)) - \phi_N(g_n(t))|^2 dt \le 4N^2(b-a)$$

olduğu için Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |\phi_N(f(t)) - \phi_N(g_n(t))|^2 dt = 0 \tag{3.14}$$

ifadesine ulaşılır. Sonra da $f \in \mathbb{M}^2[a,b]$ olduğu için

$$E\int_a^b |\phi_N(f(t)) - f(t)|^2 dt \le 4 \lim_{N\to\infty} \iint_{\{|f|>N\}} |f(t)|^2 dtdP = 0 \tag{3.15}$$

dir. (3.15) ve (3.14) den her k>0 için

$$E\int_a^b |\phi_N(g_n(t)) - f(t)|^2 dt < \frac{1}{k}$$

olacak biçimde N=N(k) ve n=n(k,N) vardır. N=N(k) ve n = n(k,N) iken $h_k = \phi_N(g_n)$ almak suretiyle ve de $h_k(t)$ nin karakterize edilemeyen fonksiyon olduğunu belirtmek suretiyle (i) iddiası doğrulanır. (ii) iddiası da benzer şekilde ispatlanır. f_n, lemma 3.1.1 deki şekilde iken 1_n fonksiyonları $\phi_N(f_n)$ formundadır. Bu fonksiyonlar basamak fonksiyonudur.

3.2 Basamak Fonksiyonları için Stokastik İntegral Tanımı

Tanım 3.3.1: f(t), $\mathbb{L}^2[a,b]$ de bir basamak fonksiyonu ve $t_k \le t \le t_{k+1}$ ise $f(t) = f(t_k)$ olsun. Burada $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_r = b$ $(0<k<r-1)$ dir. Buradan hareketle

$$\sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

şans değişkeni

$$\int_a^b f(t)dW(t)$$

ile gösterilir ve buna f(t) fonksiyonunun W(t) wiener sürecine göre "**stokastik integrali**" denir. Aynı zamanda İto integrali de denir.

Lemma 3.2.1: c_1, c_2 ve $f_1, f_2 \in \mathbb{L}^2[a,b]$ basamak fonksiyonları olsun. Buradan $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathbb{L}^2[a,b]$ ve

$$\int_a^b [c_1 f_1 + c_2 f_2]\, dW(t) = c_1 \int_a^b f_1 dW(t) + c_2 \int_a^b f_2 dW(t) \tag{3.16}$$

elde edilir.

İspat: $$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)(t)\, dW(t) = \sum_{k=0}^{r-1} (c_1 f_1 + c_2 f_2)(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} (c_1 f_1)(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] + \sum_{k=0}^{r-1} (c_2 f_2)(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

$$= c_1 \sum_{k=0}^{r-1} f_1(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] + c_2 \sum_{k=0}^{r-1} f_2(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(t)\, dW(t) + c_2 \int_a^b f_2(t)\, dW(t)$$

Lemma 3.2.2: Eğer $f \in IM^2[a,b]$ üzerinde bir basamak fonksiyonu ise

i) $$E\int_a^b f(t)\, dW(t) = 0 \tag{3.17}$$

ii) $$E\left|\int_a^b f(t)\, dW(t)\right|^2 = E\int_a^b f^2(t)\, dt \tag{3.18}$$

İspat: i) $f(t_k)$, $\mathfrak{I}_{t_k}$ ölçülebilir olduğu için $f(t_k)$ ve $W(t_{k+1})-W(t_k)$ bağımsızdır. Sonuçta, $E|f(t_k)| < \infty$ olduğundan

$$E\, f(t_k)\, [W(t_{k+1})-W(t_k)] = E\, f(t_k)\, E\, [W(t_{k+1})-W(t_k)] = 0$$

ve buradan da k üzerinde toplam alınırsa

$$E\int_a^b f(t) dW(t) = 0$$

elde edilir.

ii) $$E\int_a^b f^2(t)\, dt = \sum_{k=0}^{r-1} E\, f^2(t_k)(t_{k+1}-t_k) \tag{3.19}$$

sonlu olduğundan $Ef^2(t_k) < \infty$ olur. Yine $f^2(t)$ ve $[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2$ bağımsız ve de $Ef^2(t) < \infty$ ile $E[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 < \infty$ sonlu olduklarından

$$Ef^2(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 < \infty$$

olur. Schwarz eşitsizliğinden

$$E|f(t_i)f(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)]| < \infty \tag{3.20}$$

bulunur. Eğer i>k ise $[W(t_{i+1})-W(t_i)]$ şans değişkeni, $f(t_i)f(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)]$ den bağımsızdır. (3.20) eşitsizliğinden ve de $E|W(t_{i+1})-W(t_i)| < \infty$ olduğu için

$$Ef(t_k)f(t_i)[W(t_{k+1})-W(t_k)][W(t_{i+1})-W(t_i)] = 0$$

elde edilir. Sonuçta

$$E\left|\int_a^b f(t)\,dW(t)\right|^2 = \sum_{k=0}^{r-1} E\,f^2(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} E\,f^2(t_k)E[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} E\,f^2(t_k)(t_{k+1}-t_k)$$

$$= E\int_a^b f^2(t)\,dt$$

Lemma 3.2.3: Herhangi bir basamak fonksiyonu $f \in \mathbb{L}^2[a,b]$ için ve herhangi $\varepsilon>0$, $N>0$ için

$$P\left\{\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\int_a^b f^2(t)dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2} \tag{3.21}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Her f(t) fonksiyonu $\phi_N(t)$ basamak fonksiyonu ile ilgili olsun. Eğer f(t), $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında sabit ise k=0,1,....,m-1 için

$$\phi_N(t)=\begin{cases} f(t), \text{ eğer } \sum_{j=0}^{k} f^2(t_j)(t_{j+1}-t_j) \le N \text{ ise} \\ 0 \quad , \text{ eğer } \sum_{j=0}^{k} f^2(t_j)(t_{j+1}-t_j) > N \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Burada $t_j \le t \le t_{j+1}$ olduğunda $f(t)=f(t_j)$ dir. Eğer $f(t)\in \mathbb{L}^2[a,b]$ ise $\phi_N(t)\in \mathbb{L}^2[a,b]$ ve

$$\int_a^b \phi^2{}_N(t)dt=\sum_{j=0}^{s} f^2(t_j)(t_{j+1}-t_j)$$

bulunur. Burada s, $s\le r-1$ iken $\sum_{j=0}^{s} f^2(t_j)(t_{j+1}-t_j)\le N$ olacak biçimde en büyük tamsayıdır. Buradan da

$$E\int_a^b \phi_N^2(t)dt\le N$$

bulunur. Eğer $\int_a^b f^2(t)dt\le N$ ise her $t\in[a,b]$ için $f(t)-\phi_N(t)=0$ olur. Böylece

$$P\left\{\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|>\varepsilon\right\}\le P\left\{\left|\int_a^b \phi_N(t)dW(t)\right|>\varepsilon\right\}+P\left\{\int_a^b f^2(t)dt>N\right\}$$

bulunur. Chebyshev eşitsizliği ile

$$P\left\{\left|\int_a^b \phi_N(t)dW(t)\right|>\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}E\left|\int_a^b \phi_N(t)dW(t)\right|^2\le\frac{N}{\varepsilon^2}$$

olduğundan

$$P\left\{\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|>\varepsilon\right\}\le\frac{N}{\varepsilon^2}+P\left\{\int_a^b f^2(t)dW(t)>N\right\}$$

elde edilir.

3.3 Herhangi Bir Fonksiyon için İntegral Tanımı

Şimdi de $\mathbb{L}^2[a,b]$ üzerindeki herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu için stokastik integral tanımlanacaktır. Lemma 3.1.1 vasıtasıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2 dt = 0 \quad \text{s.t.} \tag{3.22}$$

olacak biçimde $f_n \in \mathbb{L}^2[a,b]$ basamak fonksiyonları dizisi vardır. Buradan

$$\lim_{n,m\to\infty} P\left\{\int_a^b |f_n(t)-f_m(t)|^2 dt\right\} = 0 \quad \text{s.t.}$$

yazılır. Lemma 3.2.3 den $\varepsilon > 0$ ve $\rho > 0$ için

$$P\left\{\left|\int_a^b f_n(t)dW(t) - \int_a^b f_m(t)dW(t)\right| > \varepsilon\right\} \le \rho + P\left\{\int_a^b |f_n(t)-f_m(t)|^2 dt > \varepsilon^2\rho\right\}$$

bulunur. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dW(t) = \int_a^b f(t)dW(t) \quad \text{s.t.}$$

elde edilir.

$$\int_a^b f(t)dW(t)$$

integraline $W(t)$ wiener sürecine göre $f(t)$ fonksiyonunun **"stokastik integrali"** denir. Yukarıdaki tanım $\{f_n\}$ dizisinden bağımsızdır. Eğer $\{g_n\}$ dizisi,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(t)-f(t)|^2 dt = 0 \quad \text{s.t.}$$

olacak biçimde $\mathbb{L}^2[a,b]$ üzerinde f(t) ye yakınsayan basamak fonksiyonların bir başka dizisi ise, $\{h_n\}$ dizisi $h_{2n} = f_n$, $h_{2n+1} = g_n$ olmak şartıyla olasılık dahilinde f(t) ye yakınsar. Sonuçta $\left\{\int_a^b h_n(t)dW(t)\right\}$ dizisi olasılık anlamında yakınsaktır. Buradan $\int f_n dW(t)$ ve $\int g_n dW(t)$ nin limitleri stokastik olarak eşittir.

Teorem 3.3.1: $f_1, f_2 \in \mathbb{L}^2[a,b]$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olsun. $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathbb{L}^2[a,b]$ ve

$$\int_a^b [c_1 f_1 + c_2 f_2]\, dW(t) = c_1 \int_a^b f_1 dW(t) + c_2 \int_a^b f_2 dW(t) \tag{3.23}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2: Eğer $f \in \mathbb{M}^2[a,b]$ ise

$$E\int_a^b f(t)dW(t) = 0 \tag{3.24}$$

$$E\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|^2 = E\int_a^b f^2(t)dt \tag{3.25}$$

elde edilir.

İspat : Lemma 3.1.2 ile $\mathbb{M}^2[a,b]$ üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0$$

olacak biçimde f_n basamak fonksiyonları dizisi vardır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b f_n^2(t)dt = E\int_a^b f^2(t)dt \tag{3.26}$$

sonucu elde edilir. Lemma 3.2.2 ile

$$E\int_a^b f_n(t)dW(t)=0 \tag{3.27}$$

$$E\left|\int_a^b f_n(t)\, dW(t)\right|^2 = E\int_a^b f_n^2(t)dt \tag{3.28}$$

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left|\int_a^b f_n(t)dW(t) - \int_a^b f_m(t)dW(t)\right|^2$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} E\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt = 0 \tag{3.29}$$

olur. Stokastik integral tanımından

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dW(t) = \int_a^b f(t)dW(t) \qquad \text{s.t.}$$

elde edilir. (3.29) ifadesi kullanılarak $\mathbb{L}^2(\Omega)$ üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dW(t) = \int_a^b f(t)dW(t)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$E\int_a^b f(t)dW(t) = \lim_{n\to\infty} E\int_a^b f_n(t)dW(t)$$

$$E\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|^2 = \lim_{n\to\infty} E\left|\int_a^b f_n(t)dW(t)\right|^2$$

ifadeleri elde edilir. (3.27), (3.28), (3.26) ifadeleri ile (3.24) ve (3.25) ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.3: Eğer $f \in \mathbb{L}^2[a,b]$ ise ve herhangi bir $\varepsilon>0$, $N>0$ için

$$P\left\{\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\int_a^b f^2(t)dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2} \tag{3.30}$$

eşitsizliği yazılır.

İspat: Lemma 3.1.1 ile

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0 \tag{3.31}$$

olacak biçimde $f_n \in \mathbb{L}^2[a,b]$ basamak fonksiyonları dizisi vardır. Stokastik integral tanımı ile

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dW(t) = \int_a^b f(t)dW(t) \qquad \text{s.t.} \tag{3.32}$$

yazılır. Lemma 3.2.3, f_n fonksiyonuna uygulanırsa

$$P\left\{\left|\int_a^b f_n(t)dW(t)\right| > \varepsilon'\right\} \le P\left\{\int_a^b f_n^2(t)dt > N'\right\} + \frac{N'}{(\varepsilon')^2}$$

elde edilir. $n\to\infty$ için limit alınır ve (3.31) ile (3.32) kullanılırsa, $\varepsilon>\varepsilon'$, $N<N'$ için

$$P\left\{\left|\int_a^b f(t)dw(t)\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\int_a^b f^2(t)dt > N\right\} + \frac{N'}{(\varepsilon')^2}$$

sonucuna ulaşılır. $\varepsilon' \uparrow \varepsilon$ ve $N' \downarrow N$ ile (3.30) elde edilir.

Teorem 3.3.4: $f,\ f_n \in IL^2[a,b]$ olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0 \qquad \text{s.t.} \tag{3.33}$$

varsayılsın. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) dW(t) = \int_a^b f(t) dW(t) \qquad \text{s.t.} \tag{3.34}$$

ifadesine ulaşılır.

İspat : Teorem 3.3.3 ile $\varepsilon>0$, $\rho>0$ için

$$P\left\{\left|\int_a^b (f_n(t) - f(t)) dW(t)\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \varepsilon^2 \rho\right\} + \rho$$

yazılabilir. $n\to\infty$ için limit alınarak (3.33) kullanılırsa (3.34) elde edilir.

Teorem 3.3.5: Eğer $f \in IL^2[a,b]$ ve sürekli ise ve de $\lim_{n\to\infty} \max(t_{n,k+1} - t_{n,k}) = 0$ ile $[a,b]$ aralığının $a = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots\ldots < t_{n,m_n} = b$ ayrışımı için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} f(t_{n,k})\left[W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})\right] = \int_a^b f(t) dW(t) \qquad \text{s.t.} \tag{3.35}$$

eşitliği yazılır.

İspat: g_n basamak fonksiyonları, $0 \le k \le m_n$-1 iken eğer $t_{n,k} \le t \le t_{n,k+1}$ ise $g_n(t) = f(t_{n,k})$ şeklinde olsun. Hemen hemen her ω için $t \in [a,b]$ de

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = f(t)$$

düzgün yakınsar. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(t)-f(t)|^2\,dt = 0 \qquad \text{a.s.}$$

bulunur. Teorem 3.3.4 ile

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(t)dW(t) = \int_a^b f(t)dW(t) \qquad \text{s.t.}$$

elde edilir.

$$\int_a^b g_n(t)dW(t) = \sum_{k=0}^{m_n-1} f(t_{n,k})\left[W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})\right]$$

olduğu için (3.35) iddiası sağlanır.

Teorem 3.3.5: $f\in I\!M^2[0,T]$ olsun. Herhangi bir $\delta>0$ için

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)dW(s)\right| > \delta\right\} \le \frac{1}{\delta^2}E\int_0^T f^2(s)ds \qquad (3.36)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.3.6: $f\in I\!M^2[0,T]$ olsun. Buradan

$$E\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)dW(s)\right|^2\right\} \le 4E\left|\int_0^T f(t)dW(t)\right|^2 = 4E\int_0^T f^2(t)dt$$

ifadesi elde edilir.

BÖLÜM 4. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. Stokastik Diferansiyel

Tanım 4.1.1: Her $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ için

$$\xi(t_2)-\xi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t)dW(t) \tag{4.1}$$

bağıntısını sağlayan $\xi(t)$ stokastik sürecinin diferansiyeli

$$d\xi(t)=a(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $a(t)\in \mathbb{L}^1[a,b]$ ve $\sigma(t)\in \mathbb{L}^2[a,b]$ dir. Buradaki $\xi(t)$ süreci, karakterize edilemeyen ve sürekli bir fonksiyondur. Stokastik diferensiyel, lineerlik özelliğine sahiptir[4].

Lemma 4.1.1: $t_1 < t_2$ için $t_1 = t_{n,o} < t_{n,1} < \ldots\ldots < t_{n,n} = t_2$ aralık ayrışımı verilsin ve $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{k} (t_{n,k+1} - t_{n,k}) = 0$ olsun. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})\right]^2 = (t_2 - t_1) \qquad \text{s.t.}$$

elde edilir.

İspat: $\zeta_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left[W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})\right]^2$ olsun. Buradan

$$E\zeta_n = t_2 - t_1$$

ve $\left[W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})\right]^2$ değişkenlerinin bağımsızlığından

$$\mathrm{Var}\zeta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Var}\left[W(t_{n,k+1})-W(t_{n,k})\right]^2$$

yazılabilir. Fakat

$$\mathrm{Var}\left[W(t_{n,k+1})-W(t_{n,k})\right]^2\le E\left[W(t_{n,k+1})-W(t_{n,k})\right]^4=3\ (t_{n,k+1}-t_{n,k})^2$$

olduğu için

$$\mathrm{Var}\zeta_n\le 3\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{n,k+1}-t_{n,k}\right)^2\le 3\lim_{n\to\infty}\max(\ t_{n,k+1}-t_{n,k}\ )\ (t_2-t_1)=0$$

bulunur. Chebyshev eşitsizliğinden

$$P\{|\zeta_n-E\zeta_n|>\varepsilon\}\le\frac{\mathrm{Var}\zeta_n}{\varepsilon^2}=0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1: $t_1<t_2$ için

$$\int_{t_1}^{t_2}W(t)dW(t)=\frac{1}{2}[W(t_2)]^2-\frac{1}{2}[W(t_1)]^2-\frac{1}{2}(t_2-t_1)$$

İspat : $t_1<t_2$ için $t_1=t_{n,o}<t_{n,1}<\ldots\ldots<t_{n,n}=t_2$ ve $\lim_{n\to\infty}\max\ (t_{n,k+1}-t_{n,k})=0$ ise

$$\int_{t_1}^{t_2}W(t)dW(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}W(t_{n,k})\left[W(t_{n,k+1})-W(t_{n,k})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left[W(t_{n,k+1})\right]^2-\left[W(t_{n,k})\right]^2-\left[W(t_{n,k+1})-W(t_{n,k})\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[W(t_2)]^2-\frac{1}{2}[W(t_1)]^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(t_{n,k+1})-W(t_{n,k})\right]^2$$

Buradaki limit olasılık anlamında limittir ve Lemma 4.1.1 ile t_2-t_1 e yakınsar.

Sonuçta

$$\int_{t_1}^{t_2} W(t)dW(t) = \frac{1}{2}[W(t_2)]^2 - \frac{1}{2}[W(t_1)]^2 - \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \tag{4.3}$$

veya

$$d(W(t))^2 = dt + 2W(t)dW(t) \tag{4.4}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.2 : $t_1 < t_2$ için $d(tW(t)) = t\,dW(t) + W(t)\,dt$ bulunur.

İspat:

$$\int_{t_1}^{t_2} t dW(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n,k})\left[W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})\right] \quad \text{s.t.}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(t_{n,k})W(t_{n,k+1}) - (t_{n,k})W(t_{n,k})\right] \tag{4.5}$$

ve

$$\int_{t_1}^{t_2} W(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{n,k+1})\left[(t_{n,k+1}) - (t_{n,k})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(t_{n,k+1})W(t_{n,k+1}) - (t_{n,k})W(t_{n,k+1})\right] \tag{4.6}$$

(4.5) ve (4.6) ifadeleri toplanırsa

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(t_{n,k+1})W(t_{n,k+1}) - (t_{n,k})W(t_{n,k})\right]$$

$$= t_2 W(t_2) - t_1 W(t_1)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$d(tW(t)) = tdW(t) + W(t)\,dt \tag{4.7}$$

olur.

Teorem 4.1.1:

$$d\xi_1(t) = a_1(t)dt + \sigma_1(t)dW(t)$$

$$d\xi_2(t) = a_2(t)dt + \sigma_2(t)dW(t)$$

ise çarpımın diferansiyeli aşağıdaki gibidir.

$$d[\xi_1(t)\xi_2(t)] = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt \tag{4.8}$$

veya $0 \le t_1 < t_2 \le T$ için integre edilmiş hali

$$\xi_1(t_2)\xi_2(t_2) - \xi_1(t_1)\xi_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \xi_1(t)a_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \xi_1(t)\sigma_2(t)dW(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \xi_2(t)a_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \xi_2(t)\sigma_1(t)dW(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt \tag{4.9}$$

İspat : Öncelikle $[t_1, t_2]$ aralığında $a_1(t) = a_1$, $\sigma_1(t) = \sigma_1$, $a_2(t) = a_2$, $\sigma_2(t) = \sigma_2$ sabit olsunlar. Bu durumda ispat için (4.4) ve (4.7) ifadelerini gerçeklemek yeterlidir.

Şimdi a_i, σ_i (i=1,2) katsayıları $[t_1, t_2]$ aralığında basamak fonksiyonu olsun. $[t_1, t_2]$ aralığı ardışık aralıklar halinde yazılır ve de bu aralıklarda toplam alınırsa (4.9) ifadesine ulaşılır.

Şimdi de genel durum için a_i ve σ_i ler (i=1,2)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left| a_{i,n}(t) - a_i(t) \right| dt = 0 \qquad \text{a.s.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left|\sigma_{i,n}(t)-\sigma_i(t)\right|dt=0 \qquad \text{a.s.}$$

olacak biçimde $a_{i,n}$, $\sigma_{i,n}$ karakterize edilemeyen basamak fonksiyonlar ile yaklaştırılsın ve

$$\xi_{i,n}(t)=\xi_i(0)+\int_0^t a_{i,n}(s)ds+\int_0^t \sigma_{i,n}(s)dW(s)$$

olsun. Sonuçta

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\left|\xi_{i,n}(t)-\xi_i(t)\right|=0 \qquad \text{s.t.}$$

ve de $t\in[0,T]$ için

$$\lim_{n'\to\infty}\xi_{i,n'}(t)=\xi_i(t) \qquad \text{a.s.} \tag{4.10}$$

düzgün yakınsayacak biçimde bir $\xi_{i,n'}$ alt dizisi vardır. (4.10) ile

$$\lim_{n=n'\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\xi_{i,n}(t)\sigma_{j,n}(t)dW(t)=\int_{t_1}^{t_2}\xi_i(t)\sigma_j(t)dW(t) \qquad \text{s.t.}$$

bulunur . Aynı şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\xi_{i,n}(t)a_{j,n}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\xi_i(t)a_j(t)dt \qquad \text{a.s.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\sigma_{1,n}(t)\sigma_{2,n}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\sigma_1(t)\sigma_2 dt \qquad \text{a.s.}$$

elde edilir. (4.9) denklemi $a_{i,n}$, $\sigma_{i,n}$, $\xi_{i,n}$ için yazılır ve de $n\to\infty$ için limit alınırsa (4.9) iddiasına ulaşılır.

Teorem 4.1.2: $\xi(t)$ stokastik süreci,

$$d\xi(t) = a(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

stokastik diferansiyeline sahip olsun. $f(t,x)$, $(t,x)\in[0,\infty)x\mathrm{IR}$ için sürekli bir fonksiyon ve $f_t(t,x))$, $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$ sürekli türevlere sahip olsun. $f(t,\xi(t))$ aşağıdaki şekilde verilen bir stokastik diferansiyele sahiptir.

$$d\, f(t,\xi(t)) = [\, f_t(t,\xi(t)) + f_x(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\xi(t))\ \sigma^2(t)+)]\, dt$$

$$+ f_x(t,\xi(t))\sigma(t)dW(t) \tag{4.11}$$

(4.11) formülüne **"İto formülü"** denir. Eğer W(t) sürekli türevlenebilir olsaydı toplam diferansiyel teoreminden $\frac{1}{2} f_{xx}(t,\xi(t))\sigma^2(t)dt$ terimi olmayacaktı.

İspat : İspat basamak basamak yapılacaktır.

Adım 1: $m \geq 2$ için (m tamsayı)

$$d[W(t)]^m = m[W(t)]^{m-1}dW(t) + \frac{m(m-1)}{2}[W(t)]^{m-2}\, dt \tag{4.12}$$

Bu tümevarımla gösterilebilir. m=2 için Teorem 4.1.1 den bulunur. m>2 olsun. m = k için sağlandığı varsayılsın ve m=k+1 için ispatlansın. Teorem 4.1.1 kullanılarak

$$d[W(t)]^{k+1} = d[(W(t))^k W(t)] = (W(t))^k dW(t) + W(t)d(W(t))^k + k(W(t))^{k-1}dt$$

$$= (W(t))^k dW(t) + W(t)[k(W(t))^{k-1}dW(t) + \frac{k(k-1)}{2}(W(t))^{k-2}dt]$$
$$+ k(W(t))^{k-1}dt$$

$$= (k+1)(W(t))^k dW(t) + \frac{k(k+1)}{2}(W(t))^{k-1}dt$$

Stokastik diferansiyelin lineerlik özelliğinden herhangi bir $f(x)$ polinomu için

$$df(W(t))=f'(W(t))dW(t)+\frac{1}{2}f''(W(t))dt \qquad (4.13)$$

elde edilir.

Adım 2: $Q(t,x) = g(t)f(x)$ olsun. Burada $f(x)$ bir polinom ve $g(t)$, $t\geq 0$ için sürekli türevlenebilir fonksiyondur. Teorem 4.1.1 ve (4.13) ile

$$dQ(t,W(t)) = d[g(t)f(W(t))]= f(W(t))dg(t)+ g(t)df(W(t))$$

$$= g(t)[f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt\,] + f(W(t))\,g'(t)dt$$

$$= [\,f(W(t))\,g'(t) + \frac{1}{2}g(t)f''(W(t))]\,dt + g(t)f'(W(t))dW(t)$$

Yani $0\leq t_1 < t_2\leq T$ için

$$Q[t_2,W(t_2)] - Q[t_1,W(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2}\left[Q_t(t,W(t))+\frac{1}{2}Q_{xx}(t,W(t))\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}Q_x(t,W(t))dW(t) \qquad (4.14)$$

yazılır.

Adım 3: $Q(t,x)=\sum_{i=1}^{m}g_i(t)f_i(x)$ için (4.14) formülü geçerlidir. Burada $f_i(x)$ ler polinom, $g_i(t)$ ise sürekli türevlenebilir fonksiyondur. $Q_n(t,x)$,

$$Q_n(t,x)\to f(t,x)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}Q_n(t,x)\to f_x(t,x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q_n(t,x)\to f_{xx}(t,x)\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}Q_n(t,x)\to f_t(t,x)$$

olacak biçimde polinomlar dizisi olsun. Buradan

$$Q_n[t_2,W(t_2)]-Q_n[t_1,W(t_1)]=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q_n(t,W(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q_n(t,W(t))\right]dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}Q_n(t,W(t))dW(t) \qquad (4.15)$$

yazılır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q_n(t,W(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q_n(t,W(t))\right]dt \qquad \text{a.s.}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[f_t(t,W(t))+\frac{1}{2}f_{xx}(t,W(t))\right]dt$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial}{\partial x}Q_n(t,W(t))-f_x(t,W(t))\right|^2 dt=0 \qquad \text{a.s.}$$

olacağı açıktır. (4.15) ifadesinde $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$f[t_2,W(t_2)]-f[t_1,W(t_1)]=\int_{t_1}^{t_2}\left[f_t(t,W(t))+\frac{1}{2}f_{xx}(t,W(t))\right]dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}f_x(t,W(t))dW(t) \qquad (4.16)$$

bağıntısına ulaşılır.

Adım 4: (4.16) ifadesi,

$$\phi(t,W(t))=f(t,\ \xi_1+a_1t+\sigma_1W(t))$$

sürecine genişletilebilir. Burada ξ_1, a_1, b_1 $\Im_{t_1}$ e göre ölçülebilir şans değişkenleridir. Yani $\xi=\xi_1+a_1t+\sigma_1W(t)$ iken

$$\phi[t_2,W(t_2)]-\phi[t_1,W(t_1)]=\int_{t_1}^{t_2}\left[f_t(t,\xi(t))+f_x(t,\xi(t))a_1+\frac{1}{2}f_{xx}(t,\xi(t))\sigma_1^2\right]dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} f_x(t,\xi(t))\sigma_1 dW(t) \qquad (4.17)$$

bulunur. (4.17) denkleminin ispatı (4.16) denkleminin ispatının bir tekrarıdır.

Adım 5: Eğer $a(t)$, $\sigma(t)$ basamak fonksiyonu için

$$f(t_2,\xi(t_2))-f(t_1,\xi(t_1))=\int_{t_1}^{t_2}\left[f_t(t,\xi(t))+f_x(t,\xi(t))a(t)+\frac{1}{2}f_{xx}(t,\xi(t))\sigma^2(t)\right]dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} f_x(t,\xi(t))\sigma(t)dW(t) \qquad (4.18)$$

yazılır. $[t_1,t_2]$ aralığı, a ve σ ların sabit olduğu ardışık aralıklara ayrılsın. (4.17) ifadesinde $[t_1,t_2]$ yerine her aralığın uç noktaları alınırsa ve de n üzerinde toplam alınırsa (4.18) bulunur.

Adım 6: a_i ve σ_i ler

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^T |a_i(t)-a(t)|dt=0 \qquad \text{a.s} \qquad (4.19)$$

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^T |\sigma_i(t)-\sigma(t)|^2 dt=0 \qquad \text{s.t.} \qquad (4.20)$$

olacak biçimde karakterize edilemeyen fonksiyonlar olsun ve de

$$\xi_i(t)=\xi(0)+\int_0^t a_i(s)ds+\int_0^t \sigma_i(s)dW(s)$$

olsun. Buradan

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{0\le t\le T}|\xi_i(t)-\xi(t)|=0 \qquad \text{s.t.}$$

olur. Sonuçta $\{i'\}$ altdizisi için

$$\lim_{i=i'\to\infty} \sup_{0\le t\le T} |\xi_i(t) - \xi(t)| = 0 \qquad \text{a.s.} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) ve (4.20) den

$$\lim_{i=i'\to\infty} \int_0^T |f_x(t,\xi_i(t))\sigma_i(t) - f_x(t,\xi(t))\sigma(t)|^2 dt = 0 \qquad \text{s.t.}$$

ve yine

$$\lim_{i=i'\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} f_x(t,\xi_i(t))\sigma_i(t)dW(t) = \int_{t_1}^{t_2} f_x(t,\xi(t))\sigma(t)dW(t) \qquad \text{s.t.}$$

elde edilir. (4.19), (4.20),(4.21) ifadelerinden

$$\lim_{i=i'\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left[f_t(t,\xi_i(t)) + f_x(t,\xi_i(t))a_i(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\xi_i(t))\sigma_i(t)^2 \right] dt \qquad \text{s.t.}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[f_t(t,\xi(t)) + f_x(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\xi(t))\sigma^2(t) \right] dt$$

olduğu kolayca bulunur. (4.18) ifadesini $a = a_i$, $\sigma = \sigma_i$, $\xi = \xi_i$ için yazarak ve de $i = i' \to\infty$ alarak (4.18) ifadesi genel a ve σ için bulunmuş olur.

Teorem 4.1.3: $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ olsun ve

$$\int_0^T E\sigma_1^2(t)dt < \infty \quad , \quad \int_0^T E\sigma_2^2(t)dt < \infty$$

olsun . Buradan

$$E\int_0^T \sigma_1(t)dW(t) \int_0^T \sigma_2(t)dW(t) = \int_0^T E\sigma_1(t)\sigma_2(t)dt$$

elde edilir.

İspat :

$$E\int_0^T \sigma_1(t)dW(t)\int_0^T \sigma_2(t)dW(t)=\frac{1}{2}E\left[\int_0^T(\sigma_1(t)+\sigma_2(t))dW(t)\right]^2$$

$$-\frac{1}{2}E\left(\int_0^T \sigma_1(t)dW(t)\right)^2-\frac{1}{2}E\left(\int_0^T \sigma_2(t)dW(t)\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^T E(\sigma_1(t)+\sigma_2(t))^2dt-\frac{1}{2}\int_0^T E\sigma_1^2(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T E\sigma_2^2(t)dt$$

$$=\int_0^T E\sigma_1(t)\sigma_2(t)dt$$

4.2 Stokastik Diferansiyel Denklemler

$$d\eta(t)=a(t,\eta(t)dt+\sigma(t,\eta(t))dW(t) \tag{4.22}$$

denklemine **"stokastik diferansiyel denklemi"** denir. $a(t,x)$ ve $\sigma(t,x)$ fonksiyonları (4.22) denkleminin katsayılarıdır ve $(t,x)\in(0,T)x(-\infty,\infty)$ için tanımlı ve de ölçülebilir fonksiyonlardır. W(t), wiener sürecidir. Aşağıdaki şartları sağlayan $\eta(t)$ sürecine **"(4.22) denkleminin çözümüdür"** denir.

i) $\Im_t$, ölçülebilir $\eta(s)$ ve W(s) değişkenlerine göre sigma cebiri göstermek üzere W(t+s) - W(t) süreci, $\Im_t$ ye bağlı değildir.

ii) $a(t,\eta(t))\in\mathbb{L}^1[0,T]$ ve $\sigma(t,\eta(t))\in\mathbb{L}^2[0,T]$

iii) [0,T] aralığında $\eta(t)$ süreci

$$d\eta(t)=\bar{a}(t)dt+\bar{\sigma}(t)dW(t)$$

stokastik diferansiyeline sahiptir. Burada $\bar{a}(t)=a(t,\eta(t),\ \bar{\sigma}(t)=\sigma(t,\eta(t))$ dir.

Eğer $\eta(t)$, (4.22) denkleminin çözümü ise $t>0$ için $\eta(0)$, $W(t)-W(0)$ sürecinden bağımsızdır. Stokastik integral tanımı kullanılarak (4.22) denklemi

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) \tag{4.23}$$

şekilde ifade edilebilir. Eğer $\sigma(t,x) = 0$ ise (4.22) denklemine **"adi diferansiyel denklem"** denir ve her $\omega\in\Omega$ için çözülür.

İto formülü kullanılarak (4.22) denkleminin dönüşümleri düşünülsün. $\eta(t)$, (4.22) denkleminin bir çözümü, $f(t,x)$ ise $(t,x)\in[0,T]x(-\infty,\infty)$ için tanımlı ve sürekli fonksiyon ayrıca $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$ türevlerine sahip olsun. Her $t\in[0,T]$ için $f(t,x)$ fonksiyonuna ters olan bir $g(t,x)$ fonksiyonu vardır. Yani $f(t,g(t,x))=x$ ve $g(t,f(t,x)) = x$ dir. $\zeta(t) = f(t,\eta(t))$ olsun. Buradan $\eta(t) = g(t,\zeta(t))$ ve de

$$d\zeta(t) = [f_t(t,\eta(t)) + f_x(t,\eta(t))\, a(t,\eta(t)) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\eta(t))\, \sigma^2(t,\eta(t))]\, dt$$
$$+ f_x(t,\eta(t))\sigma(t,\eta(t))dW(t)$$

denklemi yazılabilir. Sonuçta $\zeta(t)$ süreci

$$d\zeta(t)=\bar{a}(t,\zeta(t))dt+\bar{\sigma}(t,\zeta(t))dW(t)$$

denklemini sağlar. Burada

$$\bar{a}(t,x)=f_t(t,g(t,x))+f_x(t,g(t,x))a(t,g(t,x))+\frac{1}{2}f_{xx}(t,g(t,x))\sigma^2(t,g(t,x)) \tag{4.24}$$

$$\bar{\sigma}(t,x)=f_x(t,g(t,x))\sigma(t,g(t,x)) \tag{4.25}$$

Fonksiyonun bu şekildeki yazılımı diferansiyel denkleminin daha uygun bir forma (katsayıları değiştirmekle) dönüşmesini sağlar. Burada iki türlü analizden sözetmek mümkündür.

i) $\bar{\sigma}(t,x) = 1$ yani $f_x(t,x)\sigma(t,x) = 1$ veya

$$f_x(t,x)=\frac{1}{\sigma(t,x)}, \qquad f(t,x)=\int_0^x \frac{1}{\sigma(t,y)}dy \tag{4.26}$$

Bu şekildeki analiz ancak $\sigma(t,x)>0$ ve $\sigma_x(t,x)$ sürekli ise mümkündür.

ii) $\bar{a}(t,x)=0$ olsun. Bu durumda $f(t,x)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}+a(t,x)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}=0 \tag{4.27}$$

denklemini sağlar. Eğer $a(t,x)$ ve $\sigma(t,x)$ katsayıları t parametresinden bağımsız ise $f(t,x)$ için daha açık bir ifade bulunabilir. Bu durumda (4.27) denklemi

$$a(x)f'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)=0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü ise

$$f(x)=C_1+C_2\int_0^x \exp\left\{-\int_0^x \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}dz$$

şeklindedir.

4.2.1 Katsayıları t parametresine bağlı stokastik diferansiyel denklem

$$d\eta(t)=a(t)dt+\sigma(t)\,dW(t) \tag{4.28}$$

denkleminin çözümü

$$\eta(t)=\eta(0)+\int_0^t a(s)ds+\int_0^t \sigma(s)dW(s)$$

formundadır. Bu bağımsız artışlı bir gauss sürecidir. Çünkü $\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s)dW(s)$ normal dağılmıştır. Buradan

$$E[\eta(t)-\eta(0)]=\int_0^t a(s)ds$$

$$\mathrm{Var}\,[\eta(t)-\eta(0)] = \int_0^t \sigma^2(s)ds$$

elde edilir.

4.2.2 (4.22) denkleminin (4.28) denklemine indirgeme koşulu

$\zeta(t) = f(t,\eta(t))$ olsun. $\zeta(t)$ sürecinin

$$d\zeta(t) = \bar{a}(t)dt + \bar{\sigma}(t)\, dW(t)$$

stokastik diferansiyel denklemini sağlaması için (4.24) ve (4.25) denklemlerinden

$$f_t(t,x)+a(t,x)\, f_x(t,x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,x)\, \sigma^2(t,x) = \bar{a}(t) \qquad (4.29)$$

$$f_x(t,x)\sigma(t,x) = \bar{\sigma}(t) \qquad (4.30)$$

olması gerekir. Bu denklemlerin sağ yanları x değişkenine bağlı olmadığı için $g(t,x)$ yerine x yazılabilir. (4.30) denkleminden

$$f_x(t,x) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\sigma(t,x)} \qquad (4.31)$$

yazılır. (4.29) denklemi x değişkenine göre türetilirse

$$f_{tx} + \frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)f_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f_{xx}(t,x)\right] = 0 \qquad (4.32)$$

elde edilir. (4.31) denkleminin x ve t ye göre ikinci türevleri

$$f_{tx}(t,x) = \frac{\bar{\sigma}_t(t)\sigma(t,x) - \bar{\sigma}(t)\sigma_t(t,x)}{\sigma^2(t,x)}$$

$$f_{xx} = -\frac{\bar{\sigma}(t)\sigma_x(t,x)}{\sigma^2(t,x)}$$

bulunur. Bu türevler (4.32) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\bar{\sigma}_t(t)\sigma(t,x)}{\sigma^2(t,x)}-\frac{\bar{\sigma}(t)(t)\sigma_t(t,x)}{\sigma^2(t,x)}+\frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\bar{\sigma}(t)}{\sigma(t,x)}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\left(-\frac{\bar{\sigma}(t)\sigma_x(t,x)}{\sigma^2(t,x)}\right)\right]=0$$

veya

$$\frac{\bar{\sigma}_t(t)}{\bar{\sigma}(t)}=\sigma(t,x)\left[\frac{\sigma_t(t,x)}{\sigma^2(t,x)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a(t,x)}{\sigma(t,x)}\right)+\frac{1}{2}\sigma_{xx}(t,x)\right] \tag{4.33}$$

denklemine ulaşılır. (4.33) denklemi x değişkenine göre türetilirse (4.22) denkleminin (4.28) denklemine indirgeme şartı elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sigma(t,x)\left[\frac{\sigma_t(t,x)}{\sigma^2(t,x)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a(t,x)}{\sigma(t,x)}\right)+\frac{1}{2}\sigma_{xx}(t,x)\right]\right\}=0 \tag{4.34}$$

Eğer (4.34) denklemi sağlanırsa (4.33) denkleminin sağ tarafi sadece t ye bağlı olur. (4.33) denkleminden $\bar{\sigma}(t)$ ve $f_x(t,x)=\dfrac{\bar{\sigma}(t)}{\sigma(t,x)}$ ile $f(t,x)$ belirlenebilir. (4.33) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f_t(t,x)a(t,x)f_x(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f_{xx}(t,x)\right]=0$$

denklemine denktir. Köşeli parantez içindeki ifade x değişkeninden bağımsızdır ve $\bar{a}(t)$ olarak alınabilir. Eğer $a(t,x)=a(x)$ ve $\sigma(t,x)=\sigma(x)$ ise (4.33) denklemi

$$\frac{\bar{\sigma}'(t)}{\bar{\sigma}(t)}=\sigma(x)\left[\frac{1}{2}\sigma''(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{a(x)}{\sigma(x)}\right)\right]$$

haline dönüşür. Bu denklemin sol tarafi sadece t parametresine, sağ taraf ise x değişkenine bağlı olduğundan

$$\frac{\bar{\sigma}'(t)}{\bar{\sigma}(t)}=\sigma(x)\left[\frac{1}{2}\sigma''(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{a(x)}{\sigma(x)}\right)\right]=C \tag{4.35}$$

olur. C sabit bir sayıyı göstermektedir. Sonuçta $\bar{\sigma}(t)=e^{Ct}$ ve (4.31) denkleminden

$$f(t,x)=e^{Ct}\int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}$$

bulunur. Buradan

$$\bar{a}(t)=e^{Ct}\left[C\int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}+\frac{a(x)}{\sigma(x)}-\frac{1}{2}\sigma'(x)\right]$$

elde edilir.

4.2.3 Lineer stokastik diferansiyel denklem

x değişkenine lineer bağlı $a(t,x)$ ve $\sigma(t,x)$ fonksiyonlarından oluşan bir lineer denklem

$$d\eta(t)=[\alpha(t)+\beta(t)\eta(t)]dt+[\gamma(t)+\delta(t)\eta(t)]dW(t) \tag{4.36}$$

şeklinde ifade edilir. $\alpha(t)=0$ ve $\gamma(t)=0$ ise bu lineer denkleme **"homojen denklem"** denir .

$$d\eta(t)=[\beta(t)\eta(t)]dt+[\delta(t)\eta(t)]dW(t) \tag{4.37}$$

(4.37) homojen denklemin çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilir. $\eta(0)>0$ varsayılsın. Süreklilikten dolayı belirli aralıkta $\eta(t)>0$ dır. $\zeta(t)=\log\eta(t)$ olsun. İto formülü kullanılırsa

$$d\zeta(t)=\frac{1}{\eta(t)}\beta(t)\eta(t)dt-\frac{1}{2}\frac{1}{\eta^2(t)}\delta^2(t)\eta^2(t)dt+\frac{1}{\eta(t)}\delta(t)\eta(t)dW(t)$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$d\zeta(t)=[\beta(t)-\frac{1}{2}\delta^2(t)]dt+\delta(t)dW(t)$$

$$\zeta(t)=\zeta_0+\int_0^t(\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s))ds+\int_0^t\delta(s)dW(s)$$

$$\eta(t)=\eta(0)\exp\left\{\int_0^t(\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s))ds+\int_0^t\delta(s)dW(s)\right\} \tag{4.38}$$

(4.38) formülü (4.37) denkleminin çözümünü ifade eder.

4.2.4 Homojen olmayan denklem

Homojen olmayan (4.36) stokastik diferansiyel denkleminin çözümü için $\eta(t)$ ile ilgili yeni bir $\zeta(t)$ fonksiyonu $\zeta(t)=\eta_0(t)\eta(t)$ şeklinde olsun. Burada

$$\eta_0(t) = \exp[-\int_0^t(\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s))ds - \int_0^t\delta(s)dW(s)]$$

Yukarıdaki denklemin diferansiyeli alınırsa

$$d\eta_0(t) = \eta_0(t)\left[\left(-\beta(t)+\frac{1}{2}\delta^2(t)\right)dt-\delta(t)dW(t)\right]$$

ifadesi bulunur. Sonuçta

$$d\zeta(t) = \eta(t)d\eta_0(t)+\eta_0(t)d\eta(t)\text{-} [\gamma(t)+\delta(t)\eta(t)]\eta_0(t)\delta(t)dt$$

$$= \eta(t)\eta_0(t)\ [\frac{1}{2}\ \delta^2(t) - \beta(t)]dt - \eta(t)\eta_0(t)\delta(t)dW(t)$$

$$+ \eta_0(t)\ [\alpha(t) + \beta(t)\ \eta(t)\ ]dt + \eta_0(t)[\gamma(t)+\delta(t)\eta(t)]dW(t)$$

$$- \delta(t)\ [\gamma(t) + \delta(t)\eta(t)]\eta_0(t)\ dt$$

$$= \eta_0(t)[\ \alpha(t)\text{-}\gamma(t)\delta(t)\text{-}\frac{1}{2}\eta(t)\delta^2(t)]dt + \eta_0(t)\gamma(t)dW(t)$$

ve

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t\eta_0(s)\left[\alpha(s)-\gamma(s)\delta(s)-\frac{1}{2}\eta(s)\delta^2(s)\right]ds + \int_0^t\gamma(s)\eta_0(s)dW(s)$$

bulunur. Bağıntıda $\zeta(t)$ için $\eta_0(t)$ yazılırsa ve $\eta(t)$, $\zeta(t)$ ile ifade edilirse aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$\eta(t) = \exp\left\{\int_0^t \left[\beta(s) - \frac{1}{2}\delta^2(s)\right]ds + \int_0^t \delta(s)dW(s)\right\}$$

$$x\left[\eta(0) + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s (\beta(u) - \frac{1}{2}\delta^2(u))du - \int_0^s \delta(u)dW(u)\right\}[\alpha(s) - \gamma(s)\delta(s) - \frac{1}{2}\eta(s)\delta^2(s)]ds\right.$$

$$\left. + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s (\beta(u) - \frac{1}{2}\delta^2(u))du - \int_0^s \delta(u)dW(u)\right\}\gamma(s)dW(s)\right]$$

4.2.5 Lineer hale indirgenebilen denklem

(4.22) ve (4.36) denklemindeki katsayılar t den bağımsız olsun. Eğer denklem, $f(x)$ in tersi $g(x)$ ve $\zeta(t)=f(\eta(t))$ ile lineer hale indirgenebilecek ise

$$a(g(x))f'(g(x)) + \frac{1}{2}\sigma^2(g(x))\, f''(g(x)) = \alpha + \beta x$$

$$\sigma(g(x))f'(g(x)) = \gamma + \delta x$$

olacak biçimde α, β, γ ve δ sabitlerine ihtiyaç duyulur. Bu denklemlerde $x=f(z)$ yazılırsa

$$a(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) = \alpha + \beta f(x)$$

$$\sigma(x)\, f'(x) = \gamma + \delta\, f(x) \qquad (4.39)$$

elde edilir. $\delta \neq 0$ varsayılsın. $G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(z)}dz$ almak suretiyle

$$f(x) = Ce^{\delta G(x)} - \frac{\gamma}{\delta}$$

bulunur. Bunu (4.39) ifadesinin birincisinde yerine yazılırsa

$$\left\{\frac{a(x)}{\sigma(x)}\delta+\frac{1}{2}\sigma^2(x)\left[\frac{\delta^2}{\sigma^2(x)}-\delta\frac{\sigma'(x)}{\sigma^2(x)}\right]\right\}C.e^{\delta G(x)}=\beta Ce^{\delta G(x)}-\beta\frac{\gamma}{\delta}+\alpha$$

$$\left[\frac{a(x)}{\sigma(x)}\delta+\frac{1}{2}\delta^2-\beta-\frac{\delta}{2}\sigma'(x)\right]e^{\delta G(x)}=\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\delta C}$$

elde edilir.

$$Z(x)=\frac{a(x)}{\sigma(x)}-\frac{1}{2}\sigma'(x)$$

olsun. Bu ifade denklemde yerine yazılır ve de türev alınırsa

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)Z'(x)\right)}{Z'(x)}\right]=0 \qquad (4.40)$$

şartı bulunur. (4.40) sağlandığında $f(x)=C\exp\{\delta\, G(x)\}$ ifadesi başlangıçtaki denklemi lineer forma indirger. C bir sabit sayı ve

$$\delta=-\frac{\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)Z'(x)\right)}{Z'(x)}$$

olmaktadır. $\delta=0$ ise

$$f(x)=\gamma\, G(x)+C$$

$$\left[\frac{a(x)}{\sigma(x)}-\frac{1}{2}\sigma'(x)\right]\gamma=\beta\,\gamma\, G(x)+C_1$$

bulunur. Sonuç olarak lineerliğe indirgeme şartı

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)Z'(x)\right]=0$$

olur.

4.3 Stokastik Diferansiyel Denklem Çözümlerinin Varlık ve Tekliği

$a(t,x)$ ve $\sigma(t,x)$ katsayıları $(t,x)\in[0,T]x\mathbb{R}$ için ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $0\le t\le T$ için $\eta(0)$ başlangıç şartı ile

$$d\eta(t) = a(t,\eta(t))\,dt + \sigma(t,\eta(t))\,dW(t)$$

veya (4.41)

$$\eta(t) = \eta(0)+\int_0^t a(s,\eta(s))ds+\int_0^t \sigma(s,\eta(s))dW(s)$$

denklemlerini sağlayan $\eta(t)$ stokastik sürecine (4.41) denkleminin çözümü denir. Burada $a(t,\eta(t))\in\mathbb{L}^1[0,T]$ ve $\sigma(t,\eta(t))\in\mathbb{L}^2[0,T]$ dir.

Eğer $\sigma(t,x)=0$ ise (4.41) denklemi adi diferansiyel denklem olur. $\sigma(t,x)\neq 0$ için varlık ve teklik ispatı aşağıdaki biçimde verilir.

Teorem 3.3.1: $a(t,x)$ ve $\sigma(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]x\mathbb{R}$ için ölçülebilir ve

$$|a(t,x)-a(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K\,|x-y|$$

$$|a(t,x)|^2+ |\sigma(t,x)|^2 \le K^2(1+|x|^2) \qquad (4.42)$$

olsun. K sabit bir sayıyı göstermektedir. $\eta(0)$, $E|\eta(0)|^2<\infty$ olacak şekilde $\Im\{W(t), 0\le t\le T\}$ den bağımsızdır. Buradan (4.41) denkleminin $\mathbb{M}^2[0,T]$ üzerinde tek bir çözümü vardır.

Eğer $\eta_1(t)$ ve $\eta_2(t)$ süreçleri (4.41) denkleminin iki çözümü ise

$$P\{\eta_1(t)=\eta_2(t)\}=1 \quad \text{dir.}$$

İspat : Önce teklik ispatlansın. Bunun için $E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|^2=0$ bulunması yeterlidir. $\eta_1(t)$ ve $\eta_2(t)$, (4.41) denkleminin iki çözümü olsun. Yani

$$\eta_1(t)=\eta(0)+\int_0^t a(s,\eta_1(s))ds+\int_0^t \sigma(s,\eta_1(s))dW(s)$$

$$\eta_2(t)=\eta(0)+\int_0^t a(s,\eta_2(s))ds+\int_0^t \sigma(s,\eta_2(s))dW(s)$$

olsun. Buradan

$$\eta_1(t)-\eta_2(t)=\int_0^t [a(s,\eta_1(s))-a(s,\eta_2(s))]ds+\int_0^t [\sigma(s,\eta_1(s))-\sigma(s,\eta_2(s))]dW(s)$$

yazılır. Üsteki denklemin önce karesi sonra beklenen değeri alınır ve de schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|^2=$$

$$E\left|\int_0^t [a(s,\eta_1(s))-a(s,\eta_2(s))]ds+\int_0^t [\sigma(s,\eta_1(s))-\sigma(s,\eta_2(s))]dW(s)\right|^2$$

$$\leq 2Et\int_0^t |a(s,\eta_1(s))-a(s,\eta_2(s))|^2 ds+2E\left|\int_0^t [\sigma(s,\eta_1(s))-\sigma(s,\eta_2(s))]dW(s)\right|^2$$

$$\leq 2tK^2\int_0^t E|\eta_1(s)-\eta_2(s)|^2 ds+2K^2\int_0^t E|\eta_1(s)-\eta_2(s)|^2 ds$$

$$\leq 2(t+1)K^2\int_0^t E|\eta_1(s)-\eta_2(s)|^2 ds$$

Teoremin ispatı için $\alpha(t)=E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|^2$ fonksiyonu $\alpha(t)\leq c\int_0^t \alpha(s)ds$ $(\alpha(0)=0)$ ifadesini sağlayacak şekilde olsun. c pozitif bir sabittir. Buradan $\alpha(t)=0$ ve $E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|^2=0$ bulunur. Sonuç olarak $P\{\eta_1(t)=\eta_2(t)\}=1$ elde edilir.

Şimdi de (4.41) denklemi için çözümün varlığı ispatlansın. η_0, $\Im_0$-ölçülebilir; W(t), $\Im_t$ ölçülebilir ve $\Im\{W(t+s)-W(s), 0\leq s\leq T-t\}$, $\Im_t$ den bağımsız olacak biçimde sigma cebirlerin artan sınıfi $\Im_t\{0\leq t\leq T\}$ olsun. $\Im_t$, η_0 ve $\Im\{W(s), s\leq t\}$ ile üretilen sigma cebir olarak alınabilir. Burada η_0, $\Im\{W(s), 0\leq s\leq T\}$ den bağımsız varsayılır.

Şimdi $\eta_0(t)=\eta_0$ ve

$$\eta_{m+1}(t)=\eta_0+\int_0^t a(s,\eta_m(s))ds+\int_0^t \sigma(s,\eta_m(s))dW(s) \tag{4.43}$$

tanımlansın. Tümevarım varsayımları $\eta_m \in IM^2[0,T]$ ve

$$E|\eta_{k+1}(t)-\eta_k(t)|^2 \leq \frac{(Mt)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (0\leq k\leq m-1) \tag{4.44}$$

olur. Burada M sabit sayısı K ve T ye bağlıdır. $\eta_0 \in \Im_0$ olduğu için m=0 ise η_{m+1} iyi tanımlıdır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|\eta_1(t)-\eta_0(t)|^2 \leq 2\left|\int_0^t a(s,\eta_0(s))ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s,\eta_0(s))dW(s)\right|^2$$

yazılır. Beklenen değer ve (4.42) Lipshitz şartı ile

$$E|\eta_1(t)-\eta_0(t)|^2 \leq 2K^2t^2(1+E|\eta_0|^2)+2K^2t\ (1+E|\eta_0|^2)$$

$$\leq Mt$$

elde edilir. Burada $M\geq 2K^2(T+1)(1+E|\eta_0|^2)$ dir. Sonuçta $\eta_1 \in IM^2[0,T]$ bulunur ve m=0 için (4.44) sağlanır.

Şimdi de $m\geq 0$ için varsayım kabul edilsin ve m+1 için ispatlansın. $\eta_m \in IM^2[0,T]$ olduğu için (4.42) kullanılarak $a(t,\eta_m(t))\in IM^2[0,T]$ ve $\sigma(t,\eta_m(t))\in IM^2[0,T]$ bulunur. Sonuç olarak (4.43) denkleminin sağındaki integraller iyi tanımlıdır. Schwarz eşitsizliğinden

$$|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le 2\left|\int_0^t [a(s,\eta_m(s))-a(s,\eta_{m-1}(s))ds]\right|^2$$

$$+2\left|\int_0^t [\sigma(s,\eta_m(s)-\sigma(s,\eta_{m-1}(s))]dW(s)\right|^2 \qquad (4.45)$$

elde edilir. Beklenen değer alınır ve (4.42) kullanılırsa

$$E|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le 2K^2tE\int_0^t|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2ds+2K^2E\int_0^t|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2ds$$

olur. Buradan $M \ge 2K^2(T+1)$ için

$$E|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le M\int_0^t E|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2ds$$

bulunur. (4.44) ifadesinin sağ tarafında $k=m-1$ yazılırsa

$$E|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le M\int_0^t \frac{(Ms)^m}{m!}ds=\frac{(Mt)^{m+1}}{(m+1)!}$$

olur. Sonuçta (4.44) ifadesi $k=m$ için sağlanır. $\eta_{m+1} \in IM^2[0,T]$ olduğu için tümevarım $m+1$ için ispatlanmış olur. (4.45) den yine

$$\sup_{0\le t\le T}|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le 2TK^2\int_0^T|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2ds$$

$$+2\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t [\sigma(s,\eta_m(s)-\sigma(s,\eta_{m-1}(s)]dW(s)\right|^2$$

Beklenen değer, Teorem 4.3.6 ve (4.44) kullanılarak

$$E\sup_{0\le t\le T}|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le 2TK^2\int_0^T E|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2ds$$

$$E\sup_{0\le t\le T}|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|^2 \le 2TK^2\int_0^T E|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2 ds$$

$$+8K^2\int_0^T E|\eta_m(s)-\eta_{m-1}(s)|^2 ds$$

$$\le C\,\frac{(M.T)^m}{m!}$$

elde edilir. Burada $C=K^2(2T+8)T$ dir. Chebyshev eşitsizliğinden

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|>\frac{1}{2m}\right\}\le 2^{2m}C.\frac{(MT)^m}{m!}$$

eşitsizliği yazılır. $\sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{2m}\frac{(MT)^m}{m!}\right)<\infty$ olduğundan Borel-Cantelli lemması ile

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_{m+1}(t)-\eta_m(t)|>\frac{1}{2m}\text{i.o}\right\}=0$$

bulunur.

$$\lim_{m\to\infty} a(t,\eta_m(t))=a(t,\eta(t)) \quad \text{a.s}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sigma(t,\eta_m(t))=\sigma(t,\eta(t)) \quad \text{a.s}$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T|\sigma(t,\eta_m(t))-\sigma(t,\eta(t))|^2 dt=0 \qquad \text{s.t.}$$

olduğundan (4.43) denkleminde $m\to\infty$ için limit alınırsa

$$\eta(t)=\eta(0)+\int_0^t a(s,\eta(s))ds+\int_0^t \sigma(s,\eta(s))dW(s) \tag{4.46}$$

denklemi elde edilir. $\eta(t)$, (4.41) denkleminin bir çözümüdür. (4.43) ifadesinden

$$E\left|\eta_{m+1}(t)\right|^2 \le 3E\left|\eta_0\right|^2 + 3E\left|\int_0^t a(s,\eta_m(s))ds\right|^2 + 3E\left|\int_0^t \left|\sigma(s,\eta_m(s))\right|dW(s)\right|^2$$

$$\le C\left(1+E\left|\eta_0\right|^2\right) + C\int_0^t E\left|\eta_m(s)\right|^2 ds$$

bulunur. Burada C sabiti K ve T ye bağlıdır. Tümevarım ile

$$E\left|\eta_{m+1}(t)\right|^2 \le \left[C + C^2 t + C^3 t^2 + \ldots + C^{m+2}\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\right]\left[1+E\left|\eta_0\right|^2\right]$$

$$\le C\left[1+E\left|\eta_0\right|^2\right]e^{Ct}$$

olur. $m\to\infty$ ve Fatou Lemması kullanılarak

$$E\left|\eta(t)\right|^2 \le C(1+E\left|\eta_0\right|^2)\, e^{Ct}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\eta(t) \in IM[0,T]$ dir.

4.4 Uygulama: Portföy Problemi

$W(t)$, $(\Omega,\Im,P)$ tam olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir Wiener süreci olsun. $\{\Im_t\}$ ise $W(t)$ ile üretilen standart filtre olsun.

Hisse senetleri ve tahvil işlemleri yapan bir finans merkezi düşünülsün. Bir risk yatırımı olan hisse senetleri için $S(t)$, t anındaki hisse başı fiyatı olsun. $S(t)$ sürecinin

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW(t) \qquad (t\ge 0) \qquad (4.47)$$

stokastik diferansiyeli ile yönlendiği varsayılsın. Burada $\mu\ne 0$, $\sigma>0$ ve $S(0)>0$ sabitlerdir.

(4.47) denklemi

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{4.48}$$

şeklinde yazılabilir. Burada μ değeri hisse senetleri için hisse senedi getirisinin ortalaması, σ^2 ise varyansı olarak kabul edilebilir. (4.47) denklemindeki katsayılar Lipshitz şartlarını sağlar. Bu denklemin S(0) başlangıç şartıyla tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right\} \qquad (t \geq 0) \tag{4.49}$$

şeklindedir.

Risksiz bir yatırım aracı olan bonolar (devlet tahvili) için $\beta(t)$, t anındaki tahvil başına fiyatı göstersin. $\beta(t)=\beta(0)\, e^{rt}$ formülü ile ifade edilir. $r>0$ faiz oranı ve $\beta(0)$ ise pozitif bir sabittir.

Bir yatırımcının t anında hisse senetlerinden a tane hisse aldığı ve bunları t+h süre sonra sattığı varsayılırsa gerçekleşen sermaye kazancı **a(S(t+h)-S(t))** olur. Genel olarak bir yatırımcının $(t_0,t_1],(t_1,t_2],\ldots\ldots,(t_{n-1},t_n]$ zaman aralıklarının herbirinde sabit miktarda hisse senetleriyle tüm [0,T] süresince elindeki hisse senetlerini kontrol ettiği kabul edilsin. Burada $t_0=0$ ve $t_n= T$ dir. Herhangi bir t anında eldeki hisse senedi miktarını gösteren süreç , $t\in[0,T]$ olmak üzere

$$a(t) = \sum_{i=1}^{n} a(t_i) I_{(t_{i-1},t_i]}(t)$$

şeklinde ifade edilir. [0,T] aralığında gerçekleşen sermaye kazancı da

$$\sum_{i=1}^{n} a(t_i)\left(S(t_i) - S(t_{i-1})\right) \tag{4.50}$$

şeklinde olur. (4.50) formülü **a** sürecinin **dS** e göre stokastik integralidir ve

$$\int_0^T a(t)dS(t) \tag{4.51}$$

şeklinde yazılır. (4.47) denklemi (4.50) ifadesinde yerine yazılırsa (4.52) ifadesi elde edilir.

$$\int_0^T a(t)dS(t)=\mu\int_0^T a(t)S(t)dt+\sigma\int_0^T a(t)S(t)dW(t) \qquad (4.52)$$

Şimdi de spekülatör olmayan bir yatırımcı düşünülsün. a(t), $(t_{i-1},t_i]$ süresince geçerli olan bilgilere bağlı şans değişkenleri olsun (yani $a(t)\in\Im_t$). $\{a(t),\ t\in[0,T]\}$ süreci tahmin edilebilir bir süreç olur. a(t) süreci integrallenebilen tahmin edilebilir bir süreç kabul edilerek hisse senetleri için sürekli ticaret modeli kurulabilir. (4.51) ifadesi bu şekildeki bir yatırım stratejisinde sermaye kazancını ifade eder. Aynı şekilde $b=\{b(t),\ t\in[0,T]\}$ süreci ile de bonolar için sürekli ticaret modeli kurulabilir. Burada b(t) süreci, $t\in[0,T]$ için

$$\int_0^t b(s)d\beta(s) \qquad (4.53)$$

olacak biçimde tahmin edilebilir bir süreçtir. (4.53) ifadesi böyle bir yatırımdan gerçekleşen sermaye kazancını gösterir. **(a,b)** ikilisine bir **"ticaret stratejisi"** denir. Her $t\in[0,T]$ için, eğer

$$a(t)S(t)+b(t)\beta(t)=a(0)S(0)+b(0)\beta(0)+\int_0^t a(s)dS(s)+\int_0^t b(s)d\beta(s) \qquad (4.54)$$

ise bu stratejiye **"oto-finans"** stratejisi denir. (4.54) denkleminin sol tarafındaki kısma şu andaki **"Portföy değeri"** denir ve V(t) ile gösterilir. Portföy değeri ilk yatırım ile son ana kadarki sermaye kazancının toplamıdır. a(t), b(t) değerleri pozitif olabildiği gibi negatifte olabilir. Fakat toplam Portföy değeri negatif olamaz. a(t), b(t) nin negatif değerleri kısa süreli satışlar anlamına gelir.

Şimdi de t=T anında yatırımcısına H sabit fiyattan yeni bir hisse senedi alabilmesi için t=0 anında yatırımcının bir hisse senedi alabilmesi mümkün olsun. Bu **H** fiyatına **"işlem fiyatı"** denir. Eğer t=T anında hisse senedi fiyatı $S(T)\leq H$ ise, senede işlem uygulanmaz ve senet değer kaybetmiş olur. Diğer yandan $S(T)>H$ ise, senet sahibi H fiyattan bir hisse senedi alabilir ve bunu S(T)-H net kar elde etmek için S(T) fiyattan satabilir. Sonuçta senet, yatırımcısına t=T anında $(S(T)-H)^+$ net kar bırakır.

Bu finans modelinde cevap aranması gereken soru, t=0 anında bu opsiyona ödenmesi gerekli olan "**tahmini değer**" ne olmalıdır? şeklinde olacaktır. Black ve Scholes, "tahmini değer" için çeşitli çözümler ortaya koymuşlardır[14].

Bir yatırımcı bu şekildeki tahmini değeri hisse senedi ve bonoya t=0 anında yatırdıktan sonra, sanki opsiyon satın alınmış gibi $(S(T)-H)^+$ miktarını elde edebilmek için oto-finans stratejisine göre kendi portföy değerini yönlendirebilir.

Şimdi tahmini değerin ve ilgili bir oto-finans stratejisinin nasıl belirlenmesi lazım geldiği incelenecektir. Her $t\in[0,T]$ için

$$V(t)=f(S(t),T-t) \tag{4.55}$$

olacak biçimdeki V(t) portföy değeri ile alakalı bir **(a,b)** oto-finans stratejisi bulunmaya çalışılsın. Burada $f\in C^{2,1}((0,\infty)x[0,T])$ ve $V(T)=(S(T)-H)^+$ dir. $C^{2,1}((0,\infty)x[0,T])$, $f(x,s)$ reel-değerli fonksiyonlar uzayını göstermektedir. $f(x,t)$, x e göre iki kez, $t\in[0,T]$ ye göre bir kez türevlenebilir fonksiyondur. (4.55) ile tanımlı V(t) sürecine İto formulü uygulanırsa

$$\begin{aligned} V(t)-V(0) &= \int_0^t f_x(S(u),T-u)dS(u)-\int_0^t f_s(S(u),T-u)du \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S^2(u) f_{xx}(S(u),T-u)du \end{aligned} \tag{4.56}$$

denklemi elde edilir. Diğer yandan V(t) değerinin (a,b) stratejisine karşılık bir değer alabilmesi için gerek ve yeter şart her $t\in[0,T]$ için

$$V(t)-V(0)=\int_0^t a(u)dS(u)+\int_0^t b(u)d\beta(u)$$

ve (4.57)

$$b(t)=\frac{(V(t)-a(t)S(t))}{\beta(t)}$$

olmasıdır. (4.56) ve (4.57) denklemleri karşılaştırılarak ve de $\beta(t)=\beta(0)e^{rt}$ yazılarak her $t\in[0,T]$ için

$$a(t)=f_x(S(t),T-t) \tag{4.58}$$

$$r\big(f(S(t),T-t)-S(t)f_x(S(t),T-t)\big)=-f_s(S(t),T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)f_{xx}(S(t),T-t)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan $(x,s)\in(0,\infty)x[0,T]$ için

$$f_s=\frac{1}{2}\sigma^2x^2f_{xx}+rxf_x-rf \tag{4.59}$$

kısmi diferansiyel denklemine ulaşılır. $f(x,0)=(x\text{-}H)^+$ ise başlangıç şartıdır. (4.59) parabolik bir denklemdir ve $f(x,0)=(x\text{-}H)^+$ başlangıç şartıyla bir çözüm bulunabilir.

$$\alpha=\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}\right) \qquad \text{ve} \qquad \gamma=\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2+\alpha\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-r$$

olmak üzere

$$f(x,s)=(c_1\ln|x|+c_2)x^{\alpha}e^{\gamma s}$$

ifadesi (4.59) denkleminin bir çözümüdür. $f(x,0)=(c_1\ln|x|+c_2)x^{\alpha}=(x\text{-}H)^+$ ifadesi $s=0$ anındaki yatırım miktarını göstermektedir.

Sonuç olarak α ile γ arasında bir bağıntının mevcut olduğu görülmektedir. Varyansın ve faiz oranının değişik değerlerine karşılık farklı değerler ortaya çıkmaktadır. Yine bu şekilde belirlenecek bir tahmini değerin ortalamaya bağlı olmadığı gözükmektedir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR

Bölüm 4.4. deki problemde, hisse senetleri ve bonolardan oluşan bir portföy yönetiminde (a,b) ikilisi ile ifade edilen yatırım stratejisinde dönem sonunda kar edebilmek için dönem başında miktar olarak ne kadar yatırım yapılması gerektiği üzerine çalışmalar yapılmıştır. $f(S(0),T)$ ile ifade edilen tahmini değerin ortalamaya bağlı olmadığı, fakat hisse senetleri getirisinin varyansına ve bonolardaki faiz oranlarına bağlı olduğu ortaya çıkmıştır. $a(t)$ ile ifade edilen hisse senetlerinin her $t\in[0,T]$ için daima pozitif çıktığı, $b(t)$ ile ifade edilen bonoların ise negatif değerler de alabileceği ortaya çıkmıştır. Bu durumda hisse senetleri için kısa satışlara gerek olmadığı şeklinde bir kanaata varılmıştır.

Tahmini değer $f(S(0),T)$, q ile ifade edilsin. Başlangıçtaki opsiyon fiyatı ise p olsun. Eğer $p>q$ ise $t=0$ anında aşağıdaki şekilde bir strateji takip etmek uygun olur.

i) Opsiyon p fiyattan satılır ve

ii) (a,b) yatırım stratejisine göre hisse senetleri ve bonolarda q miktarında yatırım yapılır. Bu stratejiye göre başlangıç karı $p-q>0$ olacaktır. $t=T$ anında son portföy değeri $a(T)S(T)+b(T)\beta(T)=(S(T)-H)^+$ olur.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Stokastik analiz, iktisat ve mühendislik dallarında bir çok uygulama alanı olan son yılların en popüler konularından birisidir. Stokastik integral ve stokastik diferansiyel denklem uygulamaları ile yakından ilgilenen okuyucular için [1], [4], [6], [9] kaynakları önerilir.

Bölüm 4.4. deki problemde okuyucu farklı çözüm yolları arayarak değişik yorumlar ortaya koyabilir. α ve γ nın farklı değerlerine karşılık farklı sonuçlar ve yorumlar elde edilebilir. Yine okuyucu portföy probleminde farklı bir strateji ortaya koyarak bu stratejiye göre bir yatırım modeli oluşturabilir. Bölüm 4.4. deki problemle daha yakından ilgilenenler için [6], [14], [18] kaynakları önerilir.

KAYNAKLAR

[1] ARNOLD, L., "Stochastic Differential Equations", A Wiley-Interscience Pub., 1971.

[2] KOLMOGOROV, A.N., FEMİN, S.V., "Ölçüm, Lebesgue İntegrali ve Hilbert Uzayları", (Çeviri: Karaçay, T., Ataman, Y., H.Ü.,), A.P., N.Y., 1961.

[3] PAPOULIS, A., "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", A.P., 1965.

[4] FRIEDMAN, A., "Stochastic Differential Equations and Applications", Vol.I., A.P., N.Y., 1975.

[5] BERGER, M.A., MIZEL, V.J., "An Extension of The Stochastic Integral", The Annals of Probability, Vol. 10, No.2, 435-450, 1982.

[6] CHUNG, K.L., WILLIAM, R.J., "Introduction to Stochastic Integration", Second Edition, Birkhäuse, Boston, 1990.

[7] DOOB, J.L., "Stochastic Processes", John Wiley & Sons Inc., New York, 1952.

[8] BREIMAN, L., "Probability", Addison-Wesley Pub. Company, U.S.A., 1968.

[9] GIHMANN, I.I., SKOROHOD, A.V., "Stochastic Differential Equations", Moscow, 1972.

[10] ASH, R.B., GARDNER, M.F., "Topics in Stochastic Processes", A.P., N.Y., 1975.

[11] PARZEN, E., "Stochastic Processes", N.Y., America, 1962.

[12] WINKLER, G., WEIZSÄCKER, H., "Stochastic Integrals", Wiesbaden, 1990.

[13] GIHMANN, I.I., SKOROHOD, A.V., "The Theory of Stochastic Processes", Volume I., Moscow, 1965.

[14] BLACK, F., SCHOLES, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities ", J.Polit., Economy, 81, 637-659, 1973.

[15] BURRIL, C.W., "Measure, Integration, and Probability", M.Graw Hill, 1972.

[16] MCKEAN, H.P., "Stochastic Integrals", New Hampshire, 1968.

[17] KRENER, A.J., "A Formal Approach to Stochastic Integration and Differential Equations", Stochastic, Volume 3., 105-125, 1979.

[18] HARRİSON, J.M., PLİSKA, S.R., "Martingales and Stochastic Integrals in The Theory of Continuous Trading", Stoch. Proc. Appl., 11, 215-260, 1981.

ÖZGEÇMİŞ

Metin YAMAN, Şubat 1969 yılında Kocaeli-Kandıra'da doğdu. İlk-orta-lise tahsilini İzmit'te tamamladı. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümünden 1992 yılında mezun oldu. Aynı yıl Bartın Anadolu İ.H.L.'e Matematik Öğretmeni olarak atandı. Ekim 1993 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak girdi. Halen bu görevini sürdürmektedir. 1994 yılında Matematik Bölümünde Yüksek Lisansa başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır.