T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS *k*-HORADAM DİZİSİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ GAUSSIAN *k*-HORADAM DİZİSİ ve *r*-HANKEL MATRİSLER

Hasan GÖKBAŞ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

NİSAN – 2020
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Hasan GÖKBAŞ tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Kompleks k-Horadam Dizisi İle Genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam Dizisi ve r-Hankel Matrisler" adlı tez çalışması 22.04.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Süleyman SOLAK	…………………
Danışman Dr. Öğretim Üyesi Hasan KÖSE	…………………
Üye Prof. Dr. Bünyamin AYDIN	SÖZLÜ ONAYI ALINMIŞTIR.
Üye Doç. Dr. Necati TAŞKARA	…………………
Üye Doç. Dr. Kamil ARI	…………………

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Hasan GÖKBAŞ

Tarih: 22.04.2020

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS *k*-HORADAM DİZİSİ İLE GAUSSIAN *k*-HORADAM DİZİSİ ve *r*-HANKEL MATRİSLER

Hasan GÖKBAŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Hasan KÖSE

2020, 90 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Bünyamin AYDIN
Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Doç. Dr. Kamil ARI
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Dr. Öğretim Üyesi Hasan KÖSE

Bu çalışmada başlangıç şartları verilen genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam dizisi $\mathrm{KH}_{k,n+2}=\mathrm{H}_{k,n+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]+\mathrm{H}_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]$ ve genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam dizisi $\mathrm{GH}_{k,n+2}=\mathrm{H}_{k,n}\left[f^2(k)+g(k)+if(k)\right]+\mathrm{H}_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]$ rekürans bağıntılarıyla tanımlanmış ve bu dizilerin temel özellikleri incelenmiştir. Bu dizilerin kısmı toplam formülleri elde edilmiştir. Daha sonra bu sayı dizileri için önemli bazı eşitlikler verilmiştir.

Hankel matris yardımıyla *r*-Hankel matris tanımlanmış, elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayılarından oluşan bu matrislerin normları hesaplanmıştır. Ayrıca elemanları bazı sayı dizileri olan bu matrislerin norm değerleri için hesaplamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam, Genelleştirilmiş Kompleks *k*-Horadam, *r*-Hankel.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

GENERALİZED COMPLEX *k*-HORADAM SEQUENCE, GENERALİZED GAUSSIAN *k*-HORADAM SEQUENCE AND *r*-HANKEL MATRİCES

Hasan GÖKBAŞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

2020, 90 Pages

Jury
Prof. Dr. Bünyamin AYDIN
Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Doç. Dr. Kamil ARI
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

In this study generalized complex *k*-Horadam sequence, $KH_{k,n+2} = \mathrm{H}_{k,n+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]+\mathrm{H}_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]$ and Gaussian *k*-Horadam sequence $GH_{k,n+2} = \mathrm{H}_{k,n}\left[f^2(k)+g(k)+if(k)\right]+\mathrm{H}_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]$ with initial conditions are defined by means of their recurrence connections and main principles of these sequences are examined. Subsequently, certain significant equations are given for these numerical sequences.

r-Hankel matrix is defined in wiev of Hankel matrix. Moreover, the norms of these matrices, whose constituents are composed of generalized complex *k*-Horadam and generalized Gaussian *k*-Horadam numbers, are computed. In addition, calculations are conducted for the norm values of these matrices, some of whose constituents are composed of certain numerical sequences.

Keywords: Generalized Gaussian *k*-Horadam, Generalized Kompleks *k*-Horadam, *r*-Hankel.

ÖNSÖZ

Genelleştirilmiş Kompleks k-Horadam Dizisi İle Genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam Dizisi ve r-Hankel Matrisler isimli bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Yapılan tüm çalışmalarda bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE'ye saygı ve şükranlarımı sunarım. Hayatım boyunca emeklerini esirgemeyen, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz sevgi ve hürmetlerimi sunarım.

Hasan GÖKBAŞ
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar kümesi
F_n	: *n*. Fibonacci sayısı
L_n	: *n*. Lucas sayısı
P_n	: *n*. Pell sayısı
Q_n	: *n*. Pell-Lucas sayısı
$F_{k,n}$	: *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
$L_{k,n}$	: *n*. genelleştirilmiş Lucas sayısı
$P_{k,n}$	: *n*. genelleştirilmiş Pell sayısı
$Q_{k,n}$	: *n*. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı
$H_{k,n}$	: *n*. genelleştirilmiş Horadam sayısı
KF_n	: *n*. kompleks Fibonacci sayısı
KL_n	: *n*. kompleks Lucas sayısı
KH_n	: *n*. kompleks Horadam sayısı
GF_n	: *n*. Gaussian Fibonacci sayısı
GL_n	: *n*. Gaussian Lucas sayısı
GH_n	: *n*. Gaussian Horadam sayısı
$\|A\|_E$	: *A* matrisinin Euclidean normu
$\|A\|_2$	: *A* matrisinin spectral normu
$\|A\|_1$	: *A* matrisinin sütun normu
$\|A\|_\infty$	: *A* matrisinin satır normu
$\|A\|_p$	: *A* matrisinin l_p normu

$c_1(A)$	: A matrisinin maksimum sütun normu
$r_1(A)$	: A matrisinin maksimum satır normu
$\rho(A)$	: A matrisinin spectral yarıçapı
A_n	: a_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare matris
$\overline{A_n}$	: A_n matrisinin eşleniği
A_n^T	: A_n matrisinin transpozesi
A_n^*	: A_n matrisinin eşlenik transpozesi
A_n^{-1}	: A_n matrisinin tersi
I_n	: birim matris
λ_k	: A_n matrisinin k. öz değeri
$T(x)$	: t_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare Toeplitz matris
$T_r(x)$	: t_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare r-Toeplitz matris
$H(x)$	: h_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare Hankel matris
$H_r(x)$	: h_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare r-Hankel matris

1. GİRİŞ

Sayılar Teorisi'nin çalışma alanının bir parçası, rekürans ilişkili olan sayı dizileridir. Rekürans ilişkili sayı dizileri birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bunlar üzerine çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Sayı dizilerinin bu kadar büyük öneme sahip olması, vücudumuzda ve çevremizdeki nesnelerdeki uyumla karşılaşmamızdan kaynaklanmaktadır. Bir ayçiçeğindeki taneciklerin şaşırtıcı düzeninin, çam yapraklarının düzeniyle gösterdiği inanılmaz benzerlik verilebilecek örneklerden sadece bir tanesidir. Bu benzerliklerin "altın sayı", "gümüş sayı" ve "bronz sayı" gibi bir sayıyla ifade edilme çabaları etrafımızdaki sayısız göz alıcı şeylerde görülebilmektedir.

Rekürans sayı dizileri, rasyonel fonksiyonları temsil eden kuvvet serileri teorisi, pseudo rastgele sayı üreteçleri, dinamik zeta fonksiyonları, Poincare serileri, lineer rekürans dizilerinden oluşan Diophantine denklem sınıflarının çözüm dizileri gibi bilimin temel başlıklarını oluşturan birçok alanın ilerlemesinde önemi büyük olmuştur. Bu şekildeki diziler nümerik analizin önemli alanı olan yaklaşım teoride, şifre biliminde, bilgisayarla grafik çizimlerinde ve zaman serileri analizinde sıkça kullanılmaktadır **(Civciv, 2009).**

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizilerini tanımlayarak bu dizilerin bazı özelliklerini araştırmaktır. r-Hankel matrisi tanımlamak ve elemanları genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizileri olan bu özel matrislerin normları için sınırları hesaplamaktır.

1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmanın bu kısmında, birçok alanda çalışma konusu olan, uygulama alanları günbegün genişleyen rekürans ilişkili sayı dizileri ve sayı dizileri yardımıyla tanımlanan Toeplitz, Hankel ve Circulant matrislerin normları üzerine literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilecektir.

Horadam, “Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions” isimli çalışmasında, kompleks Fibonacci sayılarını $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$KF_n = F_n + iF_{n+1}$$

şeklinde tanımlamış, bazı özelliklerini ele almış ve bazı bağıntılar elde etmiştir **(Horadam, 1963)**.

Horadam, “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers” isimli makalesinde, kendi ismiyle anılacak dizisini tanımlamış ve tanımlanan dizinin genel özelliklerini ele almıştır **(Horadam, 1965)**.

Horadam, “Applications of Modified Pell Numbers to Representations” isimli çalışmasında, modified Pell dizisini tanımlayarak, modified Pell dizisinin özelliklerini incelemiştir. Pozitif ve negatif tam sayıların modified Pell dizileriyle temsillerini bulmuş, min-max dizisini elde etmiş ve bu dizinin özelliklerini incelemiştir **(Horadam, 1994)**.

Karner ve ark., “Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices” isimli makalelerinde, sağ circulant, sol circulant, ters sağ circulant ve ters sol circulant matrisleri tanımlayarak spectral ayrışımlarını incelemişlerdir **(Karner, Schneid & Ueberhuber, 2003)**.

Solak, “On The Norms of Circulant Matrices with The Fibonacci and Lucas Numbers” isimli makalesinde, elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin Spektral ve Euclidean normları için sınırlar elde etmiştir **(Solak, 2005)**.

Cerin ve Gianella, “On Sums of Pell Numbers” isimli çalışmalarında, Pell sayılarının çarpımlarının toplamları, karelerinin toplamları ve ardışık toplamları için formüller vermişlerdir **(Cerin & Gianella, 2007)**.

Yalçıner, “Spectral Norms of Some Special Circulant Matrices” isimli makalesinde, elamanları Catalan sayılarından oluşan circulant matrisin spectral normu için sınırlar bulmuştur **(Yalçiner, 2008)**.

Shen ve Cen, “On the Bounds for the Norms of *r*-Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers” isimli çalışmalarında elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan *r*-circulant matrislerin spectral normları için sınırlar elde etmişlerdir. İlave olarak bu matrislerin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının da spectral normları için sınırlar bulmuşlardır **(Shen & Cen, 2010)**.

Shen ve Cen, “On the Spectral Norms of *r*-Circulant Matrices with the *k*-Fibonacci and *k*-Lucas Numbers” isimli çalışmalarında, elemanları *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarından oluşan *r*-circulant matrislerin spectral normları için sınırlar elde etmişlerdir **(Shen & Cen, 2010)**.

İpek, “On the Spectral Norms of Circulant Matrices with Classical Fibonacci and Lucas Numbers Entries” isimli makalesinde, elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spectral normlarını bulmuştur **(İpek, 2011)**.

Uslu ve ark., “The Relations among *k*-Fibonacci, *k*-Lucas and Generalized *k*-Fibonacci and *k*-Lucas Numbers and the Spectral Norms of the Matrices of Involving These Numbers” isimli çalışmalarında, *k*-Fibonacci, *k*-Lucas ve genelleştirilmiş *k*-Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi bulmuşlardır. *k*-Lucas ve genelleştirilmiş *k*-Fibonacci sayılarını içeren circulant matrislerin spectral normlarının alt ve üst sınırlarını hesap etmişlerdir **(Uslu, Taskara & Uygun, 2011)**.

Yazlık ve Taşkara, “Spectral Norm, Eigenvalues and Determinant of Circulant Matrix Involving Generalized *k*-Horadam Numbers” isimli çalışmalarında, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından oluşan circulant matrisin spectral normunu, özdeğerlerini ve determinantını hesaplamışlardır **(Yazlik & Taskara, 2012)**.

Shen, “On the Norms of Toeplitz Matrices Involving *k*-Fibonacci and *k*-Lucas Numbers” isimli makalesinde, elemanları *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarından oluşan Toeplitz matrislerin spectral normları için sınırlar elde etmişlerdir. İlave olarak bu matrislerin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının da spectral normları için sınırlar bulmuştur **(Shen, 2012)**.

Aşçı ve Gürel, "Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials" isimli çalışmada, Gaussian Jacobsthal ve Gaussian Jacobsthal Lucas polinomlarını ve sayılarını tanımlayarak pek çok özelliklerini vermişler **(Asci & Gurel, 2013)**.

Koshy, "Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications" isimli çalışmasında,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisiyle klasik Pell sayı dizisi $\{P_n\}_{n\geq 0}$ arasında

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde bir ilişki sunmakta ve Pell sayıları için çeşitli özdeşlikler ve eşitsizlikler vermektedir. Benzer şekilde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisiyle *n*-inci klasik Pell sayısı P_n arasında

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix}$$

bağıntısı vardır. Koshy, bu çalışmasında ayrıca Pell-Lucas sayıları için de çeşitli özdeşlikler ve eşitsizlikler vermektedir **(Koshy, 2014)**.

Vasco ve ark., "*k*-Pell, *k*-Pell-Lucas and Modified *k*-Pell Numbers: Some Identities and Norms of Hankel Matrices" isimli çalışmalarında, *k*-Pell, *k*-Pell-Lucas ve modified *k*-Pell dizi terimlerini içeren bazı tanımlar ve elemanları bu dizinin elemanları olan Hankel matris için bazı sonuçlar bulmuşlardır **(Vasco, Catarino, Campos, Aires & Borges, 2015)**.

Altınışık ve ark., "Determinants and inverses of circulant matrices with complex Fibonacci numbers" isimli çalışmalarında, elemanları kompleks Fibonacci sayıları olan circulant matrislerin deteminantlarını ve terslerini hesaplamışlardır **(Altınışık, Yalçın & Büyükköse, 2015)**.

Türkmen ve Gökbaş, "On the Spectral Norm of *r*-Circulant Matrices with the Pell and Pell-Lucas Numbers" isimli çalışmalarında, elemanları Pell ve Pell-Lucas sayılarından oluşan *r*-circulant matrislerin spectral normları için sınırlar bulmuşlardır **(Türkmen & Gökbaş, 2016)**.

Kızılateş ve Tuğlu, "On The Bounds Fort The Spectral Norms of Geometric Circulant Matrices" isimli çalışmalarında, elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci olan geometrik circulant matrisi tanımlamışlar ve bu matrislerin spectral normları için sınırlar belirlemişlerdir **(Kızılateş & Tuglu, 2016)**.

Solak ve Bahşi, "On The Norms Of Circulant Matrices With The Complex Fibonacci And Lucas Numbers" isimli çalışmada, elemanları kompleks Fibonacci sayıları olan circulant matrislerin normları için hesaplamalar yapmışlar, Kompleks Fibonacci sayılarının altın oran değerini vermişlerdir **(Solak & Bahşi, 2016)**.

Gökbaş ve Türkmen, "On the Norms of *r*-Toeplitz Matrices İnvolving Fibonacci and Lucas Numbers" isimli çalışmalarında, *r*-Toeplitz matrisi tanımlamış, elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan *r*-Toeplitz matrislerin spectral normları için sınırlar bulmuşlardır **(Gökbaş & Türkmen, 2016)**.

Halıcı ve Öz, "On Gaussian Pell Polynomials and Their Some Properties" isimli çalışmada, Gaussian Pell polinomlarını tanımlamışlar bazı özelliklerini ele almışlardır **(Halici & Öz, 2018)**.

Yağmur ve Karaaslan, "Gaussian Modified Pell Sequence and Gaussian Modified Pell Polynomial Sequence" isimli çalışmada, Gaussian Modified polinomlarını tanımlamışlar, Binet ve bazı toplam formüllerini vermişlerdir. Gaussian Modified Pell ve Gaussian Modified Pell polinomlarını içeren Catalan, Cassini ve d'Ocagne eşitsizliklerini vermişlerdir **(Yagmur & Karaaslan, 2018)**.

Halıcı ve Öz, “On Some Gaussian Pell and Pell-Lucas Numbers” isimli çalışmada, Gaussian Pell ve Pell-Lucas sayılarını tanımlamışlar bazı özelliklerini ele almışlardır **(Halici & Öz, 2016)**.

Tossavainen ve ark., “On the spectral and Frobenius norm of a generalized Fibonacci *r*-circulant matrix” isimli çalışmalarında, elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan *r*-circulant matrislerin spectral ve Frobenius normları için sınır hesaplamaları yapmışlardır **(Merikoski, Haukkanen, Mattila & Tossavainen, 2018)**.

Pacheenburawana ve Sintunavarat, “On the spectral norms of *r*-circulant matrices with the Padovan and Perrin sequences” isimli çalışmada, elemanları Padovan ve Perrin sayıları olan *r*-circulant matrislerin spectral normları için hesaplamalar yapmışlardır **(Pacheenburawana & Sintunavarat, 2018)**.

1.3. Temel Kavramlar

Bu bölümde, literatürde önemli bir yer tutan Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri tanımlanacak ve bu sayı dizileriyle ilgili temel bazı özellikler verilecektir.

Tanım 1. 3. 1. $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere,

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, \quad n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine Pell dizisi ve bu dizinin elemanlarına Pell sayıları denir.

Pell dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünüldüğünde negatif indisli Pell sayıları $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ formülü ile elde edilir.

$a_0, a_1, ..., a_n$ sonlu dizisinin üreteç fonksiyonu $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ şeklindedir. $P_0 = 0,$ $P_1 = 1$ ve $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ olmak üzere, Pell sayıları bir kuvvet serisi yardımıyla elde edilebilir.

$$f(x) = P_0x^0 + P_1x^1 + P_2x^2 + ... + P_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} P_nx^n$$

fonksiyonu Pell dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere,

$$2xf\left(x\right)=2P_0x^1+2P_1x^2+2P_2x^3+\ldots+2P_{n-1}x^n+\ldots$$

$$x^2f\left(x\right)=\qquad P_0x^2+P_1x^3+P_2x^4+\ldots+P_{n-2}x^n+\ldots$$

$$f\left(x\right)-2xf\left(x\right)-x^2f\left(x\right)=P_0+\left(P_1-2P_0\right)x^1+\left(P_2-2P_1-P_0\right)x^2+\ldots+\left(P_n-2P_{n-1}-P_{n-2}\right)x^n+\ldots$$

$$f\left(x\right)-2xf\left(x\right)-x^2f\left(x\right)=x$$

$$f\left(x\right)\left[1-2x-x^2\right]=x$$

$$f\left(x\right)=\frac{x}{1-2x-x^2}$$

elde edilir. Üreteç fonksiyonu yardımıyla ve $\alpha=1+\sqrt{2}$ ve $\beta=1-\sqrt{2}$ olmak üzere;

Pell sayılarının Binet formülü

$$P_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

şeklinde bulunur **(Horadam, 1971)**.

Pell sayıları arasındaki bazı bağıntılar,

$$P_{n+1}P_{n-1}-P_n^2=\left(-1\right)^n$$

$$P_{2n+1}=2\sum_{k=0}^{n}P_{2k}+1$$

$$P_{2n}=2\sum_{k=0}^{n-1}P_{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}P_k=\frac{1}{2}\left(P_{n+1}+P_n-1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}P_k^2=\frac{P_kP_{k+1}}{2}$$

şeklindedir **(Koshy, 2014)**.

Tanım 1. 3. 2. $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ olmak üzere,

$$Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}, \quad n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine Pell-Lucas dizisi ve bu dizinin elemanlarına Pell-Lucas sayıları denir.

Pell-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünüldüğünde negatif indisli Pell-Lucas sayıları $Q_{-n} = (-1)^n Q_n$ formülü ile elde edilir.

$a_0, a_1, ..., a_n$ sonlu dizisinin üreteç fonksiyonu $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ şeklindedir. $Q_0 = 2,$ $Q_1 = 2$ ve $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ olmak üzere, Pell-Lucas sayıları bir kuvvet serisi yardımıyla elde edilebilir.

$$f(x) = Q_0x^0 + Q_1x^1 + Q_2x^2 + ... + Q_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} Q_nx^n$$

fonksiyonu Pell-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere,

$$2xf(x) = 2Q_0x^1 + 2Q_1x^2 + 2Q_2x^3 + ... + 2Q_{n-1}x^n + ...$$

$$x^2 f(x) = \qquad Q_0x^2 + Q_1x^3 + Q_2x^4 + ... + Q_{n-2}x^n + ...$$

$$f(x) - 2xf(x) - x^2 f(x) = Q_0 + (Q_1 - 2Q_0)x^1 + (Q_2 - 2Q_1 - Q_0)x^2 + ... + (Q_n - 2Q_{n-1} - Q_{n-2})x^n + ...$$

$$f(x) - 2xf(x) - x^2 f(x) = 2 - 2x$$

$$f(x)\left[1 - 2x - x^2\right] = 2 - 2x$$

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

eşitliği elde edilir. Üreteç fonksiyonu yardımıyla $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere Pell-Lucas sayılarının Binet formülü

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde bulunur **(Horadam, 1971)**.

Pell-Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar,

$$Q_{n+1}Q_{n-1}-Q_n^2=8(-1)^{n-1}$$

$$Q_{2n+1}=2\sum_{k=0}^{n}Q_{2k}-2$$

$$Q_{2n}=2\sum_{k=0}^{n-1}Q_{2k+1}+2$$

$$\sum_{k=0}^{n}Q_k=\frac{1}{2}\left(Q_{n+1}+Q_n\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}Q_k^2=\frac{Q_kQ_{k+1}+4}{2}$$

şeklindedir **(Koshy, 2014)**.

Pell ve Pell-Lucas sayıları arasında

$$P_{n+1}+P_{n-1}=Q_n$$

$$P_{n+1}-P_n=\frac{Q_n}{2}$$

$$P_n+P_{n-1}=\frac{Q_n}{2}$$

$$Q_{n+1}+Q_{n-1}=8P_n$$

$$Q_n+Q_{n-1}=4P_n$$

$$Q_{n+1}-Q_n=P_n$$

$$Q_nP_n=P_{2n}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}Q_i=2P_n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}P_i=\frac{Q_n-2}{4}$$

$$Q_n^2-8P_n^2=4(-1)^n$$

$$Q_n^2+Q_{n+1}^2=8P_{2n+1}$$

$$Q_n^2 + Q_{n+1}^2 = 8\left(P_n^2 + P_{n+1}^2\right)$$

bağıntıları bulunmaktadır **(Reix, 2005)**.

Tanım 1. 3. 3. Pell dizisi için ardışık sayıların limitleri oranı,

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n}$$

$$x = 2 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}}$$

$$x = 2 + \frac{1}{x}$$

olur. Bu eşitlik çözümünden $x^2 - 2x - 1 = 0$ ve $x = 1 \mp \sqrt{2}$ olarak bulunur. $x > 0$ olmak üzere, $x = 1 + \sqrt{2}$ şeklindedir **(Koshy, 2014)**.

Tanım 1. 3. 4. Pell-Lucas dizisi için ardışık sayıların limitleri oranı,

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2Q_n + Q_{n-1}}{Q_n}$$

$$= 2 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}}$$

$$x = 2 + \frac{1}{x}$$

olur. Bu eşitlik çözümünden $x^2 - 2x - 1 = 0$ ve $x = 1 \mp \sqrt{2}$ olarak bulunur. $x > 0$ olmak üzere, $x = 1 + \sqrt{2}$ şeklindedir **(Koshy, 2014)**.

Tanım 1. 3. 5. Ardışık Pell ve Pell-Lucas sayılarının limitleri oranı,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1} - Q_n}{Q_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n + Q_{n-1}}{Q_n}$$

$$=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}$$

şeklindedir **(Koshy, 2014)**.

Tanım 1. 3. 6. $\forall k>0$ reel sayısı için $P_{k,0}=0$, $P_{k,1}=1$ olmak üzere,

$$P_{k,\mathrm{n}+1}=2P_{k,n}+kP_{k,n-1},\quad n\geq 1$$

ile tanımlanan $\{P_{k,\mathrm{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *k*-Pell dizisi ve bu dizinin elemanlarına *k*-Pell sayıları denir.

k-Pell dizisinin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi, $r^2-2r-k=0$ olup bu denklemin kökleri $r_1=1+\sqrt{1+k}$ ve $r_2=1-\sqrt{1+k}$ ayrıca $r_2<0<r_1$ olmak üzere $r_1+r_2=2$, $r_1-r_2=2\sqrt{1+k}$ ve $r_1r_2=-k$ elde edilir. *k*-Pell sayılarının Binet formülü

$$P_{k,n}=\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}$$

şeklindedir. *k*=1 alınmasıyla $r_1=1+\sqrt{2}$ kökü “gümüş oran” olarak isimlendirilir **(Catarino, 2013)**.

Tanım 1. 3. 7. $\forall k>0$ reel sayısı için $Q_{k,0}=2$, $Q_{k,1}=2$ olmak üzere,

$$Q_{k,\mathrm{n}+1}=2Q_{k,n}+kQ_{k,n-1},\quad n\geq 1$$

ile tanımlanan $\{Q_{k,\mathrm{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine *k*-Pell-Lucas dizisi ve bu dizinin elemanlarına *k*-Pell-Lucas sayıları denir.

k-Pell-Lucas dizisinin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi, $r^2-2r-k=0$ olup bu denklemin kökleri $r_1=1+\sqrt{1+k}$ ve $r_2=1-\sqrt{1+k}$ ayrıca $r_2<0<r_1$ olmak üzere $r_1+r_2=2$, $r_1-r_2=2\sqrt{1+k}$ ve $r_1r_2=-k$ elde edilir. *k*-Pell-Lucas sayılarının Binet formülü

$$Q_{k,n}=r_1^n+r_2^n$$

şeklindedir **(Catarino & Vasco, 2013)**.

Tanım 1. 3. 8. $s>0,\ t\neq 0\, ve\, s^2+t>0$ olacak şekilde s ve t reel sayıları için $P_0(s,t)=0,\ P_1(s,t)=1$ ve

$$P_{n+1}(s,t)=2sP_n(s,t)+tP_{n-1}(s,t),\ \ n\geq 1$$

rekürans ilişkisi ile tanımlanan $\{P_n(s,t)\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine (s,t)-Pell dizisi veya genelleştirilmiş Pell dizisi denir ve bu dizinin elemanlarına genelleştirilmiş Pell sayıları denir **(Gulec & Taskara, 2012)**.

Tanım 1. 3. 9. $s>0,\ t\neq 0\, ve\, s^2+t>0$ olacak şekilde s ve t reel sayıları için $Q_0(s,t)=2,\ Q_1(s,t)=2s$ ve

$$Q_{n+1}(s,t)=2sQ_n(s,t)+tQ_{n-1}(s,t),\ \ n\geq 1$$

rekürans ilişkisi ile tanımlanan $\{Q_n(s,t)\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine (s,t)-Pell-Lucas dizisi veya genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi denir ve bu dizinin elemanlarına genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları denir **(Gulec & Taskara, 2012)**.

Tanım 1. 3. 10. *k* > 0, *f(k)* ve *g(k)* *k*'nın skaler değerli polinomları olsun. $f^2(k)+4g(k)>0,\ H_{k,0}=a, H_{k,1}=b$ olmak üzere,

$$H_{k,n+2}=f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan $\{H_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi ve bu dizinin elemanlarına da genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları denir.

Ayrıca,

$$H_{k,n}=r_1H_{k,n-1}+\left(H_{k,1}-r_1H_{k,0}\right)r_2^{n-1} \qquad (1.1)$$

$X=H_{k,1}-r_1H_{k,0}$ *ve* $Y=H_{k,1}-r_2H_{k,0}$ *ve* $\forall n\in\mathbb{N}$ için olmak üzere,

$$H_{k,n}=\frac{Xr_1^n-Yr_2^n}{r_1-r_2} \qquad (1.2)$$

$$H_{k,m}H_{k,n} - H_{k,m+r}H_{k,n-r} =$$

$$\frac{\left[-g(k)\right]^{n-r}\left(H_{k,1}H_{k,r} - H_{k,0}H_{k,r+1}\right)\left(H_{k,1}H_{k,m-n+r} - H_{k,0}H_{k,m-n+r+1}\right)}{H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1}f(k)} \tag{1.3}$$

eşitlikleri geçerlidir **(Yazlik & Taskara, 2012)**.

Çizelge 1. 3. 1. Pell, Pell-Lucas, *k*-Pell ve *k*-Pell-Lucas sayılarının ilk birkaç teriminin gösterimi

n	0	1	2	3	4	5	6	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	…
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	…
$P_{k,n}$	0	1	2	4+k	8+4k	k^2+12k+16	$6k^2$+32k+32	…
$Q_{k,n}$	2	2	4+2k	8+6k	$2k^2$+16k+16	$10k^2$+40k+32	$2k^3 + 36k^2$+96k+64	…

1.4. Matris Normları

Bu bölümde vektör normları, matris normlarıyla ilgili tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1. 4. 1. F reel ya da kompleks sayılar cismi ve V, F cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere, $\|.\|: V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ şeklinde ifade edilen ve aşağıdaki üç aksiyomu sağlayan $\|.\|$ dönüşümüne *vektör normu*, üzerinde norm tanımlanmış vektör uzayına da *normlu uzay* denir **(Horn & Johnson, 1991)**.

I. $\forall v \in V$ için $\|v\| \geq 0$ ve $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

II. $\alpha \in F$ ve $\forall v \in V$ için $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

III. $u, v \in V$ için $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Tanım 1. 4. 2. $M_{mn}(F)$, elemanları F cisminden alınan $m\times n$ matrislerin kümesi ve $A, B\in M_{mn}(F), \alpha\in F$ olmak üzere, $\|.\|: M_{mn}(F)\rightarrow \mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ şeklinde ifade edilen ve aşağıdaki dört aksiyomu sağlayan $\|.\|$ dönüşümüne *matris normu* denir.

I. $0\leq\|A\|$ ve $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$

II. $\alpha\in F$ ve $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$

III. $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

IV. $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

Bir A matrisinin normu genel anlamda $\|A\|$ şeklinde gösterilir. Bu aksiyomlardan ilk üçü sağlanıyorsa bu norma *genelleştirilmiş matris normu* denir **(Horn & Johnson, 1991).**

x herhangi bir vektör olmak üzere matris normları ile vektör normları arasında $\|Ax\|\leq\|A\|\|x\|$ şeklinde bir ilişki vardır. Bu eşitsizliği sağlayan $\|A\|$ matris normuna, $\|x\|$ vektör normuyla uygundur denir **(Horn & Johnson, 1991).**

Tanım 1. 4. 3. A, $n\times n$ tipinde bir matris olmak üzere aşağıdaki tanımlamalar geçerlidir **(Horn & Johnson, 1991).**

I. $\|A\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ifadesine A matrisinin *Euclidean (Frobenius) normu* denir.

II. $A^*=(\overline{A})^T$ için $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}=\sigma_{\max}(A)$ ifadesine A matrisinin *spectral normu* denir.

III. $\|A\|_l=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ ifadesine A matrisinin *sütun normu* denir.

IV. $\|A\|_\infty=\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ ifadesine A matrisinin *satır normu* denir.

V. $1 \le p < \infty$ için $\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesine *A* matrisinin l_p *normu* denir.

VI. $c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ ifadesine *A* matrisinin *maksimum sütun uzunluk normu* denir.

VII. $r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ ifadesine *A* matrisinin *maksimum satır uzunluk normu* denir.

A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere yukarıda verilen normlar arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur **(Horn & Johnson, 1991)**.

I. $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \le \|A\|_2 \le \|A\|_E$

II. $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

III. $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m} \|A\|_\infty$

IV. $\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n} \|A\|_1$

Tanım 1. 4. 4. $A = \left[a_{ij} \right]$, $n \times n$ tipinde bir matris ve λ_i değerleri *A* matrisinin öz değerleri olmak üzere *A* matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerine *A* matrisinin *spectral yarıçapı* denir ve $\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} \left(|\lambda_i| \right)$ şeklinde gösterilir **(Horn & Johnson, 1991)**.

Tanım 1. 4. 5. $A = \left[a_{ij} \right]$, ve $B = \left[b_{ij} \right]$, $n \times n$ tipinde matrisler olmak üzere $A \circ B = \left[a_{ij} b_{ij} \right]$ şeklinde verilen çarpıma *A* ve *B* matrislerinin Hadamard çarpımı denir **(Horn & Johnson, 1991)**.

Teorem 1. 4. 6. $\rho(A), A$ matrisinin spectral yarıçapı ve $\|A\|$, A matrisinin normu olmak üzere $\rho(A) \leq \|A\|$ eşitsizliği vardır **(Horn & Johnson, 1991)**.

Teorem 1. 4. 7. *A, B, C* $n \times n$ tipinde matrisler ve $A = B \circ C$ olmak üzere, $\|A\|_2 \leq r_1(B) c_1(C)$ eşitsizliği vardır **(Horn & Johnson, 1991)**.

2. KOMPLEKS *k*-HORADAM VE GAUSSIAN *k*-HORADAM SAYILARI

Bu bölümde, genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayı dizileri tanımlanacak; kompleks Pell, kompleks Pell-Lucas, Gaussian Pell ve Gaussian Pell-Lucas sayı dizileri için elde edilen özellikler gösterilecektir.

2.1. Genelleştirilmiş Kompleks *k*-Horadam ve Genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam Dizilerinin Özellikleri

Tanım 2. 1. 1. $k>0$, $f(k)$ ve $g(k)$ k'nın skaler değerli polinomları olsun. $i^2=-1,\ H_{k,0}=a,\ H_{k,1}=b$ olmak üzere,

$$KH_{k,n+2}=H_{k,n+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]+H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right] \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan $\left\{KH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine kompleks *k*-Horadam dizisi ve bu dizinin elemanlarına da kompleks *k*-Horadam sayıları denir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

(2.1)'de verilen rekürans bağıntısı düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
KH_{k,n+2}&=H_{k,n+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]+H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]\\
&=f(k)H_{k,n+1}+if^2(k)H_{k,n+1}+ig(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}+if(k)g(k)H_{k,n}\\
&=f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}+i\left(+f^2(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n+1}+f(k)g(k)H_{k,n}\right)\\
&=H_{k,n+2}+i\left[f(k)\left(f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}\right)+g(k)H_{k,n+1}\right]\\
&=H_{k,n+2}+i\left[f(k)H_{k,n+2}+g(k)H_{k,n+1}\right]
\end{aligned}$$

$$KH_{k,n+2}=H_{k,n+2}+iH_{k,n+3} \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir.

Çizelge 2. 1. 1. Genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayılarının ilk birkaç teriminin gösterimi

n	0	1	2	…
KH	$a + ib$	$b + i(f(k)b+g(k)a)$	$f(k)b + g(k)a + i(f^2(k)b+f(k)g(k)a+g(k)b)$	…

(2.1)'de verilen rekürans bağıntısında, $f(k)$, $g(k)$, a ve b özel değerleri için $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks k-Horadam dizisi literatürde yer alan diğer sayı dizilerine indirgenir. Örneğin, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde;

- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=1$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i, 1+i, 1+2i, ...\}$ kompleks Fibonacci dizisine,
- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=1$, $a=2$ ve $b=1$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2+i, 1+3i, 3+4i, ...\}$ kompleks Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i, 1+2i, 2+5i, ...\}$ kompleks Pell dizisine,
- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $a=2$ ve $b=2$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in N}=\{2+2i, 2+6i, 6+14i, ...\}$ kompleks Pell-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=2$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i, 1+i, 1+3i, ...\}$ kompleks Jacobsthal dizisine,
- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=2$, $a=2$ ve $b=1$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2+i, 1+5i, 5+7i, ...\}$ kompleks Jacobsthal-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=k$, $g(k)=1$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i, 1+ik, k+ik^2+i, ...\}$ kompleks k-Fibonacci dizisine,

- ✓ $f(k)$=k, $g(k)$=1, a=2 ve b=k için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2+ik,\ k+ik^2+2i,\ k^2+2+ik^3+3ik,\ ...\}$ kompleks k-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)$=2, $g(k)$=k, a=0 ve b=1 için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i,\ 1+2i,\ 2+4i+ik,\ ...\}$ kompleks k-Pell dizisine,
- ✓ $f(k)$=2, $g(k)$=k, a=2 ve b=2 için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2+2i,\ 2+2ik+4i,\ 4+2k+8i+6ik,\ ...\}$ kompleks k-Pell-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)$=k, $g(k)$=2, a=0 ve b=1 için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i,\ 1+ik,\ k+2i+ik^2,\ ...\}$ kompleks k-Jacobsthal dizisine,
- ✓ $f(k)$=k, $g(k)$=2, a=2 ve b=k için, $\{KH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2+ik,\ k+ik^2+4i,\ k^2+4+ik^3+6ik,\ ...\}$ kompleks k-Jacobsthal-Lucas dizisine,

indirgenir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

Tanım 2. 1. 2. $k>0$, $f(k)$ ve $g(k)$ k'nın skaler değerli polinomları olsun. $i^2=-1,\ H_{k,0}=a,\ H_{k,1}=b$ olmak üzere,

$$GH_{k,n+2}=H_{k,n}\left[f^2(k)+g(k)+if(k)\right]+H_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right] \tag{2.3}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine Gaussian k-Horadam dizisi ve bu dizinin elemanlarına da Gaussian k-Horadam sayıları denir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

(2.3)'de verilen rekürans bağıntısı yeniden düzenlendiğinde,

$$GH_{k,n+2} = H_{k,n+2} + iH_{k,n+1} \tag{2.4}$$

eşitliği elde edilir.

Çizelge 2. 1. 2. Genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayılarının ilk birkaç teriminin gösterimi

n	0	1	2	…
GH	$a + i\frac{b-f(k)a}{g(k)}$	$b + ia$	$f(k)b + g(k)a + ib$	…

(2.3)'de verilen rekürans bağıntısında, $f(k)$, $g(k)$, a ve b özel değerleri için $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Gaussian k-Horadam dizisi literatürde yer alan diğer sayı dizilerine indirgenir. Örneğin, $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde;

- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=1$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{i, 1, 1+i, ...\}$ Gaussian Fibonacci dizisine,
- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=1$, $a=2$ ve $b=1$ için, $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2-i, 1+2i, 3+i, ...\}$ Gaussian Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{i, 1, 2+i, ...\}$ Gaussian Pell dizisine,
- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $a=2$ ve $b=2$ için, $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2-2i, 2+2i, 6+2i, ...\}$ Gaussian Pell-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=1$, $g(k)=2$, $a=0$ ve $b=1$ için, $\{GH_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{i}{2}, 1, 1+i, ...\}$ Gaussian Jacobsthal dizisine,

- $f(k)$=1, $g(k)$=2, a=2 ve b=1 için, $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\frac{4-i}{2},1+2i,5+i,...\}$ Gaussian Jacobsthal-Lucas dizisine,
- $f(k)$=k, $g(k)$=1, a=0 ve b=1 için, $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{i,1,k+i,...\}$ Gaussian k-Fibonacci dizisine,
- $f(k)$=k, $g(k)$=1, a=2 ve b=k için, $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2-ik,k+2i,k^2ik+2,...\}$ Gaussian k-Lucas dizisine,
- $f(k)$=2, $g(k)$=k, a=0 ve b=1 için,
  $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{46k^2-86k+40+29ik^2-48ik+20i,-19k^2+36k-16-12ik^2+20ik-8i,...\}$
  Gaussian k-Pell dizisine,
- $f(k)$=2, $g(k)$=k, a=2 ve b=2 için,
  $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{-130k^2+244k-112-82ik^2+136ik-56i,54k^2-100k+48+34ik^2-56ik+24i,...\}$
  Gaussian k-Pell-Lucas dizisine,
- $f(k)$=k, $g(k)$=2, a=0 ve b=1 için,
  $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\frac{3k^3-10k^2+17k-10+3ik^2-10ik+11i}{8},\frac{-k^3+6k^2-7k+6-ik^2+6ik-5i}{4},...\}$
  Gaussian k-Jacobsthal dizisine,
- $f(k)$=k, $g(k)$=2, a=2 ve b=k için,
  $\left\{GH_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\frac{-7k^3+34k^2-45k+34-7ik^2+34ik-31i}{8},\frac{5k^3-14k^2+27k-14+5ik^2-14ik+17i}{4},...\}$
  Gaussian k-Jacobsthal-Lucas dizisine,

indirgenir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

Kompleks Pell (***KP$_n$***), kompleks Pell-Lucas (***KQ$_n$***), Gaussian Pell (***GP$_n$***), Gaussian Pell-Lucas (***GQ$_n$***) sayılarının ilk birkaç terimi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 2. 1. 3. Kompleks Pell, Kompleks Pell-Lucas, Gaussian Pell ve Gaussian Pell-Lucas sayılarının ilk birkaç teriminin gösterimi

n	0	1	2	3	4	5	6	…
KP	i	1+2i	2+5i	5+12i	12+29i	29+70i	70+169i	…
KQ	2+2i	2+6i	6+14i	14+34i	34+82i	82+198i	198+478i	…
GP	i	1	2+i	5+2i	12+5i	29+12i	70+29i	…
GQ	2-2i	2+2i	6+2i	14+6i	34+14i	82+34i	198+82i	…

Lemma 2. 1. 3. $n \geq 1$, $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam, $KH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. kompleks *k*-Horadam ve $GH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. Gaussian *k*-Horadam sayıları olmak üzere,

$$KH_{k,n+2} - GH_{k,n+2} = H_{k,n}\left[if(k)\left(f^2(k)+2g(k)-1\right)\right] + H_{k,n-1}\left[ig(k)\left(f^2(k)+g(k)-1\right)\right]$$

eşitliği geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$KH_{k,n+2} - GH_{k,n+2} = \left(H_{k,n+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right] + H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]\right)$$

$$-\left(H_{k,n}\left[f^2(k)+g(k)+if(k)\right] + H_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]\right)$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$KH_{k,n+2} - GH_{k,n+2} = \left(\left[f(k)H_{k,n}+g(k)H_{k,n-1}\right]\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right] + H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]\right)$$

$$-\left(H_{k,n}\left[f^2(k)+g(k)+if(k)\right] + H_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]\right)$$

$$KH_{k,n+2} - GH_{k,n+2} = H_{k,n}\left[if(k)\left(f^2(k)+2g(k)-1\right)\right] + H_{k,n-1}\left[ig(k)\left(f^2(k)+g(k)-1\right)\right]$$

elde edilir.■

Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde,

$$KH_{k,n+2}-GH_{k,n+2}=i\left[H_{k,n+3}-H_{k,n+1}\right]$$

olur.

Lemma 2. 1. 4. $n\geq 1$, $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam, $KH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. kompleks *k*-Horadam ve $GH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. Gaussian *k*-Horadam sayıları olmak üzere,

$$\begin{aligned}KH_{k,n+2}+GH_{k,n+2}&=H_{k,n}\left[2f^{2}(k)+2g(k)+if^{3}(k)+2ifg(k)+if(k)\right]\\&\quad+H_{k,n-1}\left[2fg(k)+if^{2}g(k)+ig^{2}(k)+ig(k)\right]\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$\begin{aligned}KH_{k,n+2}+GH_{k,n+2}&=\left(H_{k,n+1}\left[f(k)+if^{2}(k)+ig(k)\right]+H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]\right)\\&\quad+\left(H_{k,n}\left[f^{2}(k)+g(k)+if(k)\right]+H_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]\right)\end{aligned}$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}KH_{k,n+2}+GH_{k,n+2}&=\left(\left[f(k)H_{k,n}+g(k)H_{k,n-1}\right]\left[f(k)+if^{2}(k)+ig(k)\right]+H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]\right)\\&\quad+\left(H_{k,n}\left[f^{2}(k)+g(k)+if(k)\right]+H_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}KH_{k,n+2}+GH_{k,n+2}&=H_{k,n}\left[2f^{2}(k)+2g(k)+if^{3}(k)+2ifg(k)+if(k)\right]\\&\quad+H_{k,n-1}\left[2fg(k)+if^{2}g(k)+ig^{2}(k)+ig(k)\right]\end{aligned}$$

elde edilir.■

Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde,

$$KH_{k,n+2}+GH_{k,n+2}=2H_{k,n+2}+i\left[H_{k,n+3}+H_{k,n+1}\right]$$

olur.

Lemma 2. 1. 5. $n\geq 0$, $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam, $KH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. kompleks *k*-Horadam ve $GH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. Gaussian *k*-Horadam sayıları olmak üzere,

$$\left|KH_{k,n+2}-GH_{k,n+2}\right|=H_{k,n+1}\left(f^{2}(k)+g(k)-1\right)+H_{k,n}\left(f(k)g(k)\right)$$

eşitliği geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$\left|KH_{k,n+2}-GH_{k,n+2}\right|=\left|\left(H_{k,n+1}\left[f(k)+if^{2}(k)+ig(k)\right]+H_{k,n}\left[g(k)+if(k)g(k)\right]\right)\right.$$

$$\left.-\left(H_{k,n}\left[f^{2}(k)+g(k)+if(k)\right]+H_{k,n-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]\right)\right|$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\left|KH_{k,n+2}-GH_{k,n+2}\right|=\left|\left(\left[f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}\right]+i\left[\left(f^{2}(k)+g(k)\right)H_{k,n+1}+f(k)g(k)H_{k,n}\right]\right)\right.$$

$$\left.-\left(\left[\left(f^{2}(k)+g(k)\right)H_{k,n}+f(k)g(k)H_{k,n-1}\right]+i\left[f(k)H_{k,n}+g(k)H_{k,n-1}\right]\right)\right|$$

$$\left|KH_{k,n+2}-GH_{k,n+2}\right|=\sqrt{\left[\left(f^{2}(k)+g(k)-1\right)H_{k,n+1}+f(k)g(k)H_{k,n}\right]^{2}}$$

$$\left|\mathrm{KH}_{k,\mathrm{n}+2}-\mathrm{GH}_{k,\mathrm{n}+2}\right|=\left(f^{2}(k)+g(k)-1\right)\mathrm{H}_{k,n+1}+f(k)g(k)\mathrm{H}_{k,n}$$

elde edilir.■

Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde,

$$\left|\mathrm{KH}_{k,\mathrm{n}+2}-\mathrm{GH}_{k,\mathrm{n}+2}\right|=\mathrm{H}_{k,n+3}-\mathrm{H}_{k,n+1}$$

olur.

Kompleks Pell (***KP***KP_n) ve Gaussian Pell (GP_n) sayıları arasındaki farkın modülü, kompleks Pell-Lucas (KQ_n) ve Gaussian Pell-Lucas (GQ_n) sayıları arasındaki farkın modülüyle ilgili birkaç terim aşağıda verilmiştir.

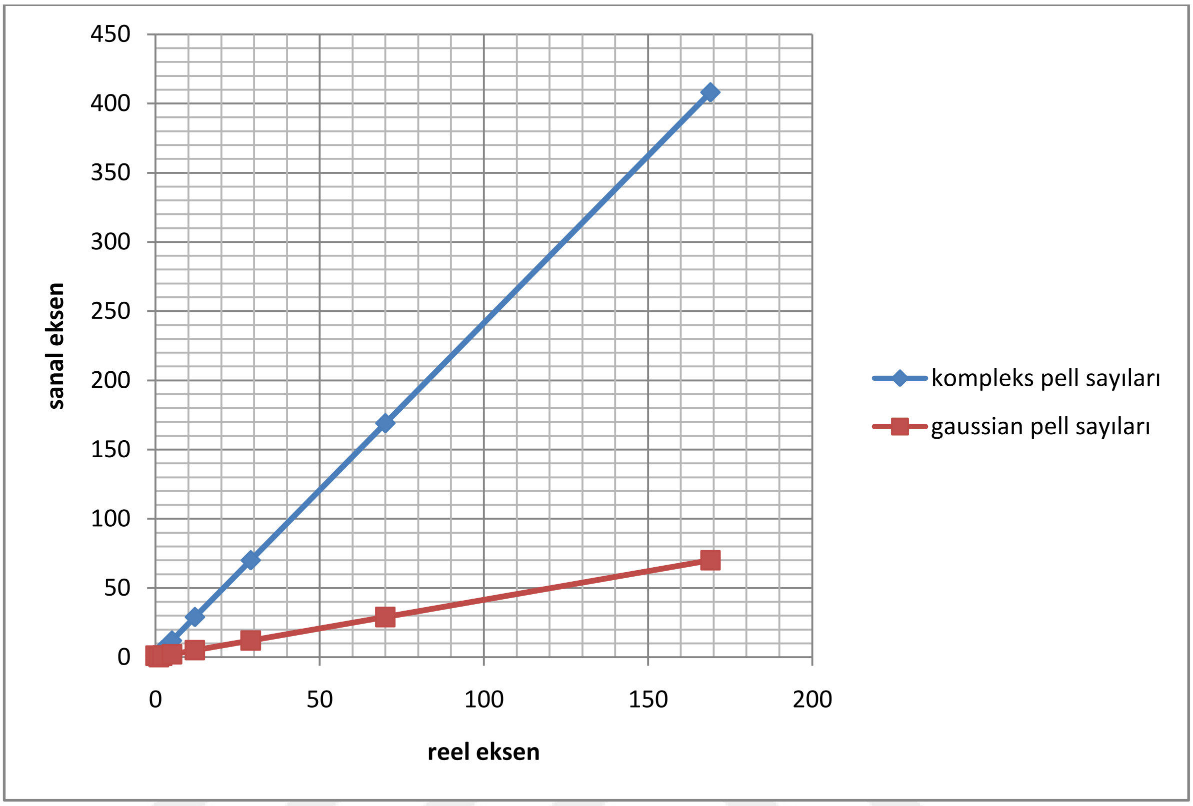
Çizelge 2. 1. 4. Kompleks Pell ve Gaussian Pell sayıları arasındaki farkın modülüyle ilgili ilk birkaç teriminin gösterimi

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
KP	**0**+i	**1**+2i	**2**+5i	**5**+12i	**12**+29i	**29**+70i	**70**+169i	**169**+408i	…
GP	0+i	1	2+i	5+2i	12+5i	29+12i	70+29i	169+70i	…
|KP - GP|	**0**	**2**	**4**	**10**	**24**	**58**	**140**	**338**	…

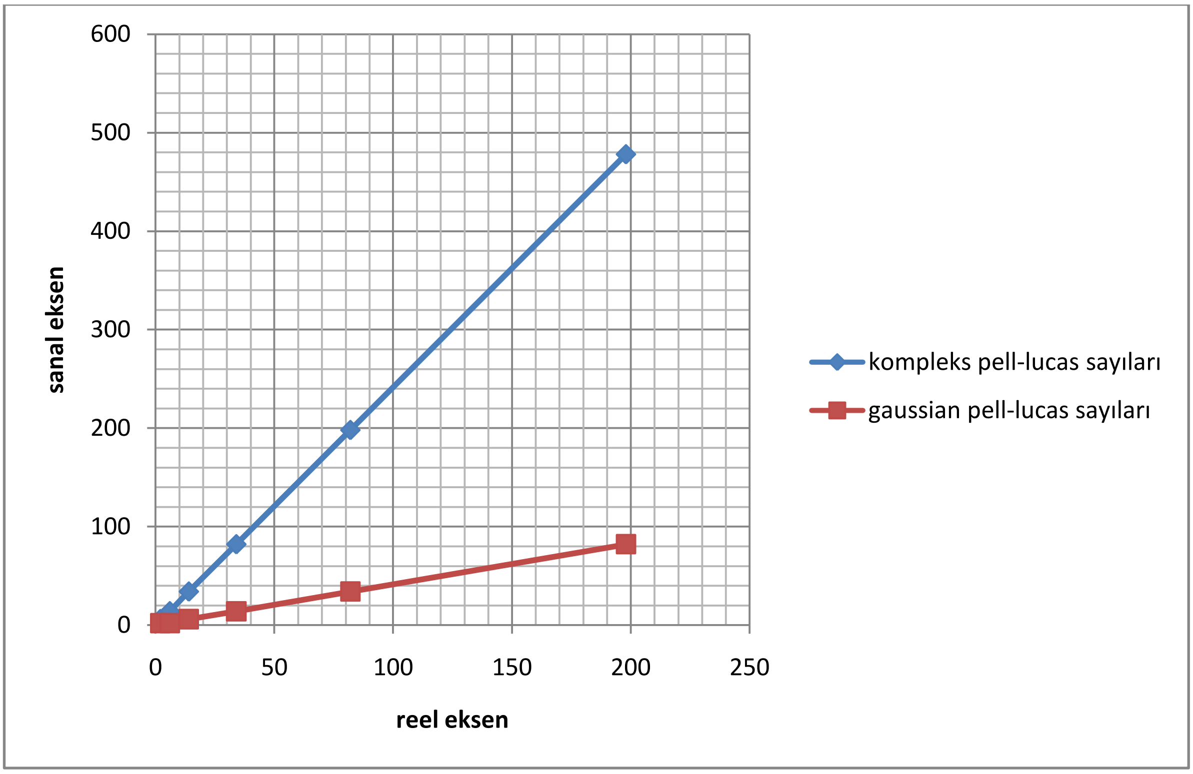
Çizelge 2. 1. 5. Kompleks Pell-Lucas ve Gaussian Pell-Lucas sayıları arasındaki farkın modülüyle ilgili ilk birkaç teriminin gösterimi

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
KQ	**2**+2i	**2**+6i	**6**+14i	**14**+34i	**34**+82i	**82**+198i	**198**+478i	**478**+1154i	…
GQ	2-2i	2+2i	6+2i	14+6i	34+14i	82+34i	198+82i	478+198i	…
|KQ – GQ|	**4**	**4**	**12**	**28**	**68**	**164**	**396**	**956**	…

Grafik 2. 1. 1. Kompleks Pell ve Gaussian Pell sayılarının ilk birkaç teriminin koordinat düzleminde gösterimi



Grafik 2. 1. 2. Kompleks Pell-Lucas ve Gaussian Pell-Lucas sayılarının ilk birkaç teriminin koordinat düzleminde gösterimi



Bu kısımda, genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizileri için önemli bazı eşitlikler verilecektir.

Teorem 2. 1. 6. r_1 ve r_2, $H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}$ rekürans bağıntısı ile verilen genelleştirilmiş k-Horadam dizisinin ikinci mertebeden bir fark denkleminin karakteristik kökleri olmak üzere,

$$\text{a) } KH_{k,n} = r_1 H_{k,n-1} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-1} + i\left[r_1 H_{k,n} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n}\right]$$

$$\text{b) } GH_{k,n} = r_1 H_{k,n-1} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-1} + i\left[r_1 H_{k,n-2} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-2}\right]$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

(1.1) eşitliği, $KH_{k,n} = H_{k,n} + iH_{k,n+1}$, n. genelleştirilmiş kompleks k-Horadam sayısında yerine yazılırsa,

$$KH_{k,n} = r_1 H_{k,n-1} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-1} + i\left[r_1 H_{k,n} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n}\right]$$

elde edilir.■

Benzer şekilde,

$$GH_{k,n} = r_1 H_{k,n-1} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-1} + i\left[r_1 H_{k,n-2} + \left(H_{k,1} - r_1 H_{k,0}\right) r_2^{n-2}\right]$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 7. (Binet Formülü): $X = H_{k,1} - H_{k,0} r_2$, $Y = H_{k,1} - H_{k,0} r_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\text{a) } KH_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2} + i\,\frac{Xr_1^{n+1} - Yr_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$$

b) $GH_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2} + i\frac{Xr_1^{n-1} - Yr_2^{n-1}}{r_1 - r_2}$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

(1.2) eşitliği, $KH_{k,n} = H_{k,n} + iH_{k,n+1}$, n. genelleştirilmiş kompleks k-Horadam sayısında yerine yazılırsa,

$$KH_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2} + i\frac{Xr_1^{n+1} - Yr_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$$

elde edilir.■

Benzer şekilde,

$$GH_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2} + i\frac{Xr_1^{n-1} - Yr_2^{n-1}}{r_1 - r_2}$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 8. (d’Ocagne Eşitliği): $KH_{k,n}$ n. genelleştirilmiş kompleks k-Horadam sayısı ve $GH_{k,n}$ n. genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayısı olmak üzere,

a) $KH_{k,m+1}KH_{k,n} - KH_{k,m}KH_{k,n+1} =$

$$\frac{\left(H_{k,1}^2 - H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(\left[-g(k)\right]^m\left(H_{k,1}H_{k,n-m} - H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right) + \left[-g(k)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,m-n} - H_{k,0}H_{k,m-n+1}\right)\right)}{H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

$$+i\frac{\left[-g(k)\right]^m\left(H_{k,1}H_{k,2} - H_{k,0}H_{k,3}\right)\left(H_{k,1}H_{k,n-m} - H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)}{H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

b) $GH_{k,m+1}GH_{k,n}-GH_{k,m}GH_{k,n+1}=$

$$\frac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\left(H_{k,1}H_{k,m-n}-H_{k,0}H_{k,m-n+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{m}\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{m-1}\left(H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,0}H_{k,3}\right)\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned}KH_{k,m+1}KH_{k,n}-KH_{k,m}KH_{k,n+1}&=\left(H_{k,m+1}+iH_{k,m+2}\right)\left(H_{k,n}+iH_{k,n+1}\right)-\left(H_{k,m}+iH_{k,m+1}\right)\left(H_{k,n+1}+iH_{k,n+2}\right)\\&=\left(H_{k,n}H_{k,m+1}-H_{k,n+1}H_{k,m}\right)+\left(H_{k,n+2}H_{k,m+1}-H_{k,n+1}H_{k,m+2}\right)\\&\quad+i\left(H_{k,n}H_{k,m+2}-H_{k,n+2}H_{k,m}\right)\end{aligned}$$

(1.3) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}KH_{k,m+1}KH_{k,n}-KH_{k,m}KH_{k,n+1}&=\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{m}\left(H_{k,1}H_{k,1}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}\\&\quad+\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,1}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(H_{k,1}H_{k,m-n}-H_{k,0}H_{k,m-n+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}\\&\quad+i\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{m}\left(H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,0}H_{k,3}\right)\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}\end{aligned}$$

$$=\frac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{m}\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,m-n}-H_{k,0}H_{k,m-n+1}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{m}\left(H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,0}H_{k,3}\right)\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

elde edilir.■

Benzer şekilde,

$$GH_{k,m+1}GH_{k,n}-GH_{k,m}GH_{k,n+1}=$$

$$\frac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\left(H_{k,1}H_{k,m-n}-H_{k,0}H_{k,m-n+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{m}\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{m-1}\left(H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,0}H_{k,3}\right)\left(H_{k,1}H_{k,n-m}-H_{k,0}H_{k,n-m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 9. (Catalan Eşitliği): $KH_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş kompleks k-Horadam sayısı ve $GH_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayısı olmak üzere,

a) $KH_{k,n+m}KH_{k,n-m}-KH_{n}^2=$

$$\frac{\left(H_{k,1}H_{k,\mathrm{m}}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-m}-H_{k,0}H_{k,-m+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n-m+1}\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-m+1}-H_{k,0}H_{k,-m+2}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,-m-1}-H_{k,0}H_{k,-m}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

b) $GH_{k,n+m}GH_{k,n-m}-GH_n^2=$

$$\frac{\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g(k)\right]^n\left(H_{k,1}H_{k,-m}-H_{k,0}H_{k,-m+1}\right)+\left[-g(k)\right]^{n-m-1}\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g(k)\right]^n\left(H_{k,1}H_{k,-m-1}-H_{k,0}H_{k,-m}\right)+\left[-g(k)\right]^{n-1}\left(H_{k,1}H_{k,-m+1}-H_{k,0}H_{k,-m+2}\right)\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$KH_{k,n+m}KH_{k,n-m}-KH_n^2=\left(H_{k,n+m}+iH_{k,n+m+1}\right)\left(H_{k,n-m}+iH_{k,n-m+1}\right)-\left(H_{k,n}+iH_{k,n+1}\right)\left(H_{k,n}+iH_{k,n+1}\right)$$

$$=\left(H_{k,n+m}H_{k,n-m}-H_{k,n}H_{k,n}\right)+\left(H_{k,n+1}H_{k,n+1}-H_{k,n+m+1}H_{k,n-m+1}\right)$$

$$+i\left(H_{k,n+m}H_{k,n-m+1}-H_{k,n}H_{k,n+1}\right)+i\left(H_{k,n-m}H_{k,n+m+1}-H_{k,n}H_{k,n+1}\right)$$

(1.3) eşitliği kullanılarak,

$$KH_{k,n+m}KH_{k,n-m}-KH_n^2=\frac{\left[-g(k)\right]^n\left(H_{k,1}H_{k,\mathrm{m}}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(H_{k,1}H_{k,-m}-H_{k,0}H_{k,-m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

$$+\frac{\left[-g(k)\right]^{n-m+1}\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

$$+i\frac{\left[-g(k)\right]^n\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(H_{k,1}H_{k,-m+1}-H_{k,0}H_{k,-m+2}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

$$+i\frac{\left[-g(k)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(H_{k,1}H_{k,-m-1}-H_{k,0}H_{k,-m}\right)}{H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)}$$

$$=\frac{\left(H_{k,1}H_{k,\mathrm{m}}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-m}-H_{k,0}H_{k,-m+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n-m+1}\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-m+1}-H_{k,0}H_{k,-m+2}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,-m-1}-H_{k,0}H_{k,-m}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

elde edilir.■

Benzer şekilde,

$GH_{k,n+m}GH_{k,n-m}-GH_{n}^{2}=$

$$\frac{\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-m}-H_{k,0}H_{k,-m+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n-m-1}\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}H_{k,m}-H_{k,0}H_{k,m+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-m-1}-H_{k,0}H_{k,-m}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\left(H_{k,1}H_{k,-m+1}-H_{k,0}H_{k,-m+2}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

elde edilir.■

Sonuç 2. 1. 10.

Teorem 2. 1. 9. Catalan Eşitliği'nde *m*=n alındığında,

a) $KH_{k,2n}KH_{k,0}-KH_{n}^{2}=$

$$\frac{\left(H_{k,1}H_{k,n}-H_{k,0}H_{k,n+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-n}-H_{k,0}H_{k,-n+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{1}\left(H_{k,1}H_{k,n}-H_{k,0}H_{k,n+1}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}H_{k,n}-H_{k,0}H_{k,n+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-n+1}-H_{k,0}H_{k,-n+2}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,-n-1}-H_{k,0}H_{k,-n}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

b) $GH_{k,2n}GH_{k,0}-GH_{n}^{2}=$

$$=\frac{\left(H_{k,1}H_{k,n}-H_{k,0}H_{k,n+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-n}-H_{k,0}H_{k,-n+1}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{-1}\left(H_{k,1}H_{k,n}-H_{k,0}H_{k,n+1}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}H_{k,n}-H_{k,0}H_{k,n+1}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-n-1}-H_{k,0}H_{k,-n}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\left(H_{k,1}H_{k,-n+1}-H_{k,0}H_{k,-n+2}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2. 1. 11. (Cassini Eşitliği): $KH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayısı ve $GH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayısı olmak üzere,

a) $KH_{k,n+1}KH_{k,n-1}-KH_{n}^{2}=$

$$\frac{\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(\left(H_{k,1}H_{k,-1}-H_{k,0}^{2}\right)+\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left[-g\left(k\right)\right]^{n+1}\left(H_{k,1}H_{k,-2}-H_{k,0}H_{k,-1}\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

b) $GH_{k,n+1}GH_{k,n-1}-GH_{n}^{2}=$

$$=\frac{\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left(\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-1}-H_{k,0}^{2}\right)+\left[-g\left(k\right)\right]^{n-2}\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

$$+i\frac{\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)\left[-g\left(k\right)\right]^{n}\left(H_{k,1}H_{k,-2}-H_{k,0}H_{k,-1}\right)}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

Teorem 2. 1. 9. Catalan Eşitliği'nde m=1 alındığında Teorem 2. 1. 11. Cassini Eşitliği'nde ki değerler elde edilir.■

- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $H_{k,0}=0$, $H_{k,1}=1$ olmak üzere, Gaussian Pell dizisi için Cassini Eşitliği,

  $GP_{n+1}GP_{n-1}-GP_n^2=\left(-1\right)^n\left(2-2i\right)$ dir.

- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $H_{k,0}=2$, $H_{k,1}=2$ olmak üzere, Gaussian Pell-Lucas dizisi için Cassini Eşitliği,

  $GQ_{n+1}GQ_{n-1}-GQ_n^2=\left(-1\right)^{n+1}\left(16-16i\right)$ dir **(Halici & Öz, 2016)**.

Teorem 2. 1. 12. $n\geq 1$, $f(k)+g(k)-1\neq 0$, $H_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş k-Horadam ve $KH_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş kompleks k-Horadam sayıları olmak üzere,

$$\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,m+2}=\left[\frac{H_{k,\mathrm{n}+1}+g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}}-H_{k,1}+\left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}-a\right]\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]$$

$$+\left[\frac{H_{k,\mathrm{n}}+g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}-1}-H_{k,1}+\left(f(k)-1\right)H_{k,\mathrm{n}}}{f(k)+g(k)-1}\right]\left[\mathrm{g}(k)+ifg(k)\right]$$

eşitliği geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,m+2}=\sum_{m=0}^{n-1}H_{k,m+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]+\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,m}\left[g(k)+ifg(k)\right]$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,m+2} = \left[\frac{H_{k,\mathrm{n}+1} + g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}} - H_{k,1} + \left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1} - a\right]\left[f(k) + if^2(k) + ig(k)\right]$$

$$+\left[\frac{H_{k,\mathrm{n}} + g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}-1} - H_{k,1} + \left(f(k)-1\right)H_{k,\mathrm{n}}}{f(k)+g(k)-1}\right]\left[\mathrm{g}(k) + ifg(k)\right]$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 13. $n \geq 1,\ \ f(k)+g(k)-1 \neq 0,\ H_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş k-Horadam ve $GH_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayıları olmak üzere,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,m+2} = \left[\frac{H_{k,\mathrm{n}} + g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}-1} - H_{k,1} + \left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}\right]\left[f^2(k) + g(k) + if(k)\right]$$

$$+\left[\frac{H_{k,\mathrm{n}-1} + g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}-2} - H_{k,1} + \left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}\right]\left[f(k)g(k) + ig(k)\right]$$

eşitliği geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,m+2} = \sum_{m=0}^{n-1} H_{k,m}\left[f^2(k) + g(k) + if(k)\right] + \sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,m-1}\left[f(k)g(k) + ig(k)\right]$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,m+2} = \left[\frac{H_{k,\mathrm{n}} + g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}-1} - H_{k,1} + \left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}\right]\left[f^2(k) + g(k) + if(k)\right]$$

$$+\left[\frac{H_{k,\mathrm{n}-1} + g(\mathrm{k})H_{k,\mathrm{n}-2} - H_{k,1} + \left(f(k)-1\right)H_{k,0}}{f(k)+g(k)-1}\right]\left[f(k)g(k) + ig(k)\right]$$

istenilen elde edilir.■

Teorem 2. 1. 14. $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam ve $f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1\neq 0$,

$S=\left(b-af(k)\right)^2-\mathrm{a}^2-2\left(b-ar_2\right)\left(b-ar_1\right)\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$,

$R=\left(b-af(k)\right)^2-\mathrm{a}^2-2\left(b-ar_2\right)\left(b-ar_1\right)\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^{n+1}}{1+g(k)}\right)$, ve $KH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayıları olmak üzere,

$$\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,m+2}^2=M^2\left[\frac{H_{k,n+1}^2+g^2(\mathrm{k})H_{k,n}^2+R}{f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1}-b^2\right]+N^2\left[\frac{H_{k,n}^2+g^2(\mathrm{k})H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1}\right]$$

$$+2MN\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\left(H_{k,n}^2-g^2\left(k\right)H_{k,n-1}^2+S\right)}{\left[f^2\left(k\right)+2g\left(k\right)-g^2\left(k\right)-1\right]\left[f^2\left(k\right)-g^2\left(k\right)+1\right]}\\[2em] -\dfrac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g\left(k\right)\left(1-\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\right)-1-g\left(k\right)\right]}{\left[H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)\right]\left[g\left(k\right)\left(1+g\left(k\right)\right)\right]\left[f^2\left(k\right)-g^2\left(k\right)+1\right]}\\[2em] +\dfrac{g^2\left(k\right)\left(H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}+H_{k,0}H_{k,1}\right)+H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}+1}-H_{k,0}^2-H_{k,1}H_{k,-1}}{f^2\left(k\right)-g^2\left(k\right)+1}+H_{k,0}\end{array}\right]$$

eşitliği geçerlidir.

$M=\left[f(k)+if^2(k)+\mathrm{i}\,g(k)\right]$ ve $N=\left[g(k)+\mathrm{i}\,f(k)g(k)\right]$ dir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,m+2}^2=\sum_{m=0}^{n-1}\left(H_{k,m+1}\left[f(k)+if^2(k)+ig(k)\right]+H_{k,m}\left[g(k)+ifg(k)\right]\right)^2$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,m+2}^{2} = M^{2}\left[\frac{H_{k,n+1}^{2}+g^{2}(\mathrm{k})H_{k,n}^{2}+R}{f^{2}(k)-g^{2}(k)+2g(k)-1}-b^{2}\right]+N^{2}\left[\frac{H_{k,n}^{2}+g^{2}(\mathrm{k})H_{k,n-1}^{2}+S}{f^{2}(k)-g^{2}(k)+2g(k)-1}\right]$$

$$+2MN\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\left(H_{k,n}^{2}-g^{2}(k)H_{k,n-1}^{2}+S\right)}{\left[f^{2}(k)+2g(k)-g^{2}(k)-1\right]\left[f^{2}(k)-g^{2}(k)+1\right]} \\ \\ -\dfrac{\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)^{2}\left[g(k)\left(1-\left[-g(k)\right]^{n-1}\right)-1-g(k)\right]}{\left[H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)\right]\left[g(k)\left(1+g(k)\right)\right]\left[f^{2}(k)-g^{2}(k)+1\right]} \\ \\ +\dfrac{g^{2}(k)\left(H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}+H_{k,0}H_{k,1}\right)+H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}+1}-H_{k,0}^{2}-H_{k,1}H_{k,-1}}{f^{2}(k)-g^{2}(k)+1}+H_{k,0}\end{array}\right]$$

istenilen elde edilir.■

Teorem 2. 1. 15. $H_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş k-Horadam ve $f^{2}(k)-g^{2}(k)+2g(k)-1\neq 0$,

$S=\left(b-af(k)\right)^{2}-\mathrm{a}^{2}-2\left(b-ar_{2}\right)\left(b-ar_{1}\right)\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^{n}}{1+g(k)}\right)$,

$R=\left(b-af(k)\right)^{2}-\mathrm{a}^{2}-2\left(b-ar_{2}\right)\left(b-ar_{1}\right)\left(\dfrac{1-\left(-g(k)\right)^{n+1}}{1+g(k)}\right)$, $GH_{k,\mathrm{n}}$ n. genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayıları olmak üzere,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,m+2}^2 = M^2\left[\frac{H_{k,n}^2+g^2(\mathrm{k})H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1}\right]+N^2\left[\frac{H_{k,n-1}^2+g^2(\mathrm{k})H_{k,n-2}^2+R}{f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1}-H_{k,\mathrm{n}-1}\right]$$

$$+2MN\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\left(H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S\right)}{\left[f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}+H_{k,-1}H_{k,0}+H_{k,0}H_{k,1}-H_{k,\mathrm{n}-1}H_{k,\mathrm{n}} \\ \\ -\dfrac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g(k)\left(1-\left[-g(k)\right]^{n-1}\right)-1-g(k)\right]}{\left[H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)\right]\left[g(k)\left(1+g(k)\right)\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]} \\ \\ +\dfrac{g^2(k)\left(H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}+H_{k,0}H_{k,1}\right)+H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}+1}-H_{k,0}^2-H_{k,1}H_{k,-1}}{f^2(k)-g^2(k)+1}\end{array}\right]$$

eşitliği geçerlidir.

$M=\left[f^2(k)+g(k)+\mathrm{i}\,f(k)\right]$ ve $N=\left[f(k)g(k)+\mathrm{i}\,g(k)\right]$ dir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,m+2}^2 = \sum_{m=0}^{n-1}\left(H_{k,m}\left[f^2(k)+g(k)+if(k)\right]+H_{k,m-1}\left[f(k)g(k)+ig(k)\right]\right)^2$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,m+2}^2 = M^2\left[\frac{H_{k,n}^2+g^2(\mathrm{k})H_{k,n-1}^2+S}{f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1}\right]+N^2\left[\frac{H_{k,n-1}^2+g^2(\mathrm{k})H_{k,n-2}^2+R}{f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1}-H_{k,n-1}\right]$$

$$+2MN\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\left(H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S\right)}{\left[f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}+H_{k,-1}H_{k,0}+H_{k,0}H_{k,1}-H_{k,\mathrm{n}-1}H_{k,\mathrm{n}}\\[2em] -\dfrac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g(k)\left(1-\left[-g(k)\right]^{n-1}\right)-1-g(k)\right]}{\left[H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)\right]\left[g(k)\left(1+g(k)\right)\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}\\[2em] +\dfrac{g^2(k)\left(H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}+H_{k,0}H_{k,1}\right)+H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}+1}-H_{k,0}^2-H_{k,1}H_{k,-1}}{f^2(k)-g^2(k)+1}\end{array}\right]$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 16. $1\le n\in\mathbb{N}$, $[g(k)-1]^2-[f(k)]^2\neq 0$, $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam ve $KH_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayıları olmak üzere,

a) $$\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,2m}=\left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2\mathrm{n}}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}-1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}-1}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

b) $$\sum_{m=0}^{n-1}KH_{k,2m+1}=\left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}-1}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2\mathrm{n}+2}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}+1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}-H_{k,0}\right]$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,2m} = \sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m} + i\sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m+1}$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,2m} = \left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

elde edilir.

$$\sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,2m+1} = \sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m+1} + i\sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m+2}$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} KH_{k,2m+1} = \left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2n+2}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2n+1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}-H_{k,0}\right]$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 17. $1\le n\in\mathbb{N}$, $[g(k)-1]^2-[f(k)]^2\neq 0$, $H_{k,n}$ n. genelleştirilmiş k-Horadam ve $GH_{k,n}$ n. genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayıları olmak üzere,

a) $$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,2m} = \left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2n-3}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2n-2}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}+H_{k,-1}\right]$$

b) $$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,2m+1} = \left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,2m} = \sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m} + i\sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m-1}$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,2m} = \left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2n}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2n-1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2n-3}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2n-2}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}+H_{k,-1}\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,2m+1} = \sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m+1} + i\sum_{m=0}^{n-1} H_{k,2m}$$

eşitliği düzenlendiğinde,

$$\sum_{m=0}^{n-1} GH_{k,2m+1} = \left[\frac{[g(k)-1]g(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}-1}-H_{k,-1}\right]-f(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}}-H_{k,0}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

$$+i\left[\frac{[g(k)-1]\left[H_{k,2\mathrm{n}}-H_{k,0}\right]-f(k)g(k)\left[H_{k,2\mathrm{n}-1}-H_{k,-1}\right]}{[g(k)-1]^2-[f(k)]^2}\right]$$

elde edilir.■

Teorem 2. 1. 18. Genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam dizisi için ardışık sayıların limitleri oranı,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{KH_{k,n+1}}{KH_{k,n}} = \frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2}$$

şeklindedir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

$$x = \lim_{n\to\infty}\frac{KH_{k,n+1}}{KH_{k,n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(k)KH_{k,n}+g(k)KH_{k,n-1}}{KH_{k,n}}$$

$$x = f(k) + \frac{g(k)}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{KH_{k,n}}{KH_{k,n-1}}}$$

$$x = f(k) + \frac{g(k)}{x}$$

Bu denklem çözümünden $x^2 - f(k)x - g(k) = 0$ ve $x = \dfrac{f(k)\mp\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2}$

olarak bulunur. $x > 0$ olmak üzere, $x = \dfrac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2}$ şeklindedir.■

✓ $f(k)$=2, $g(k)$=1 için, kompleks Pell dizisinin ardışık sayılarının limitleri oranı,

$$x = \frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2} = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2} = 1+\sqrt{2} \text{ olur.}$$

✓ $f(k)$=2, $g(k)$=1 için, kompleks Pell-Lucas dizisinin ardışık sayılarının limitleri oranı,

$$x = \frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2} = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2} = 1+\sqrt{2} \text{ olur.}$$

Teorem 2. 1. 19. Genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam dizisi için ardışık sayıların limitleri oranı,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{GH_{k,n+1}}{GH_{k,n}} = \frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2}$$

şeklindedir **(Gökbaş & Köse, 2018a)**.

İspat:

Bu teoremin ispatı Teorem 2. 1. 18'in ispatına benzer şekilde yapılır.■

✓ $f(k)$=2, $g(k)$=1 için, Gaussian Pell dizisinin ardışık sayılarının limitleri oranı,

$$x = \frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2} = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2} = 1+\sqrt{2} \text{ olur.}$$

✓ $f(k)$=2, $g(k)$=1 için, Gaussian Pell-Lucas dizisinin ardışık sayılarının limitleri oranı,

$$x = \frac{f(k)+\sqrt{f^2(k)+4g(k)}}{2} = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2} = 1+\sqrt{2} \text{ olur.}$$

2.2. Genelleştirilmiş Kompleks *k*-Horadam ve Genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde, genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam dizilerinin üreteç fonksiyonları verilecektir.

Genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayıları bir kuvvet serisi yardımıyla elde edilebilir.

$$KH(x) = KH_0x^0 + KH_1x^1 + KH_2x^2 + ... + KH_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} KH_nx^n \quad (2.1.1)$$

fonksiyonu genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere,
(2.1.1) eşitliğinin her iki tarafı önce $f(k)x$, sonra $g(k)x^2$ ile çarpıp düzenlenirse,

$$xf(k)KH(x) = f(k)KH_0x^1 + f(k)KH_1x^2 + ... + f(k)KH_{n-1}x^n + ... (2.1.2)$$

$$x^2g(k)KH(x) = \qquad g(k)KH_0x^2 + ... + g(k)KH_{n-2}x^n + ... (2.1.3)$$

elde edilir. (2.1.1) eşitliğinden (2.1.2) ve (2.1.3) eşitlikleri çıkarılırsa,

$$KH(x)\left(1 - xf(k) - x^2g(k)\right) = KH_0 + x\left(KH_1 - fKH_0\right)$$

$$KH(x)\left(1 - xf(k) - x^2g(k)\right) = \left(H_{k,0} + iH_{k,1}\right) + x\left(H_{k,1} + iH_{k,2} - fH_{k,0} - ifH_{k,1}\right)$$

$$KH(x)\left(1 - xf(k) - x^2g(k)\right) = \left(H_{k,0} + xH_{k,1} - xf(k)H_{k,0}\right) + i\left(H_{k,1} + xH_{k,2} - xf(k)H_{k,1}\right)$$

$$KH(x) = \frac{\left(H_{k,0} + xH_{k,1} - xf(k)H_{k,0}\right) + i\left(H_{k,1} + xH_{k,2} - xf(k)H_{k,1}\right)}{\left(1 - xf(k) - x^2g(k)\right)}$$

elde edilir. Genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$KH(x)=\frac{\left(H_{k,0}+xH_{k,1}-xf(k)H_{k,0}\right)+i\left(H_{k,1}+xH_{k,2}-xf(k)H_{k,1}\right)}{\left(1-xf(k)-x^2g(k)\right)}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde, genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$GH(x)=\frac{\left(H_{k,0}+xH_{k,1}-xf(k)H_{k,0}\right)+i\left(H_{k,-1}+xH_{k,0}-xf(k)H_{k,-1}\right)}{\left(1-xf(k)-x^2g(k)\right)}$$

şeklinde olacaktır.

- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $H_{k,0}=0$, $H_{k,1}=1$ olmak üzere, Gaussian Pell dizisi için üreteç fonksiyonu,

  $GH(x)=\dfrac{x+i(1-2x)}{\left(1-2x-x^2\right)}$ dir.

- ✓ $f(k)=2$, $g(k)=1$, $H_{k,0}=2$, $H_{k,1}=2$ olmak üzere, Gaussian Pell-Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu,

  $GH(x)=\dfrac{(2-2x)+i(6x-2)}{\left(1-2x-x^2\right)}$ dir **(Halici & Öz, 2016)**.

Bu kısımda, sonraki bölümde kullanılacak *k*-Horadam dizisinin bazı toplamsal özellikleri verilmiştir.

Lemma 2. 3. 1. $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı,

$$f^{2}(k)-g^{2}(k)+2g(k)-1\neq 0,$$

$$\left[H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)\right]\left[g\left(k\right)\left(1+g\left(k\right)\right)\right]\neq 0,$$

$$S=\left(H_{k,1}-H_{k,0}f(k)\right)^{2}-H_{k,0}^{2}-2\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_{2}\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_{1}\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^{n}}{1+g(k)}\right)$$

olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,i+1}H_{k,i-1}=\frac{H_{k,n}^{2}-g^{2}\left(k\right)H_{k,n-1}^{2}+S}{f^{2}\left(k\right)+2g\left(k\right)-g^{2}\left(k\right)-1}-\frac{\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)^{2}\left[g\left(k\right)\left(1-\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\right)-1-g\left(k\right)\right]}{\left[H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)\right]\left[g\left(k\right)\left(1+g\left(k\right)\right)\right]}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

(1.3) eşitliğinde, *m*=n ve *r*=1 değerleri alındığında,

$$H_{k,n}H_{k,n}-H_{k,n+1}H_{k,n-1}=\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{n-1}\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)^{2}}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,\mathrm{i}}H_{k,\mathrm{i}}-\sum_{i=0}^{n-1}H_{k,\mathrm{i}+1}H_{k,\mathrm{i}-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left[-g\left(k\right)\right]^{i-1}\left(H_{k,1}^{2}-H_{k,0}H_{k,2}\right)^{2}}{H_{k,1}^{2}-H_{k,0}^{2}g\left(k\right)-H_{k,0}H_{k,1}f\left(k\right)}$$

eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i+1}H_{k,i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i}H_{k,i} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left[-g(k)\right]^{i-1}\left(H_{k,1}^2 - H_{k,0}H_{k,2}\right)^2}{H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1} f(k)}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i+1}H_{k,i-1} = \frac{H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1} - \frac{\left(H_{k,1}^2 - H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g(k)\left(1 - \left[-g(k)\right]^{n-1}\right) - 1 - g(k)\right]}{\left[H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1} f(k)\right]\left[g(k)\left(1 + g(k)\right)\right]}$$

elde edilir.■

Lemma 2. 3. 2. $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı,

$$f^2(k) - g^2(k) + 2g(k) - 1 \neq 0, \quad f^2(k) - g^2(k) + 1 \neq 0,$$

$$\left[H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1} f(k)\right]\left[g(k)\left(1 + g(k)\right)\right] \neq 0,$$

$$S = \left(H_{k,1} - H_{k,0} f(k)\right)^2 - H_{k,0}^2 - 2\left(H_{k,1} - H_{k,0} r_2\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0} r_1\right)\left(\frac{1 - \left(-g(k)\right)^n}{1 + g(k)}\right)$$

olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i}H_{k,i+1} = \frac{2\left(H_{k,n}^2 - g^2(k)H_{k,n-1}^2 + S\right)}{\left[f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1\right]\left[f^2(k) - g^2(k) + 1\right]}$$

$$- \frac{\left(H_{k,1}^2 - H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g(k)\left(1 - \left[-g(k)\right]^{n-1}\right) - 1 - g(k)\right]}{\left[H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1} f(k)\right]\left[g(k)\left(1 + g(k)\right)\right]\left[f^2(k) - g^2(k) + 1\right]}$$

$$+ \frac{g^2(k)\left(H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1} + H_{k,0}H_{k,1}\right) + H_{k,1}H_{k,2} - H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}+1} - H_{k,0}^2 - H_{k,1}H_{k,-1}}{f^2(k) - g^2(k) + 1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$H_{k,2}H_{k,3}=f^2(k)H_{k,2}H_{k,1}+f(k)g(k)H_{k,1}H_{k,1}+f(k)g(k)H_{k,2}H_{k,0}+g^2(k)H_{k,0}H_{k,1}$$

$$H_{k,3}H_{k,4}=f^2(k)H_{k,3}H_{k,2}+f(k)g(k)H_{k,2}H_{k,2}+f(k)g(k)H_{k,3}H_{k,1}+g^2(k)H_{k,1}H_{k,2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$H_{k,m}H_{k,m+1}=f^2(k)H_{k,m}H_{k,m-1}+f(k)g(k)H_{k,m-1}H_{k,m-1}+f(k)g(k)H_{k,m}H_{k,m-2}$$
$$+g^2(k)H_{k,m-2}H_{k,m-1}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1}H_{k,i}H_{k,i+1}=\frac{2\left(H_{k,n}^2-g^2(k)H_{k,n-1}^2+S\right)}{\left[f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}$$

$$-\frac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g(k)\left(1-\left[-g(k)\right]^{n-1}\right)-1-g(k)\right]}{\left[H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)\right]\left[g(k)\left(1+g(k)\right)\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}$$

$$+\frac{g^2(k)\left(H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}+H_{k,0}H_{k,1}\right)+H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}+1}-H_{k,0}^2-H_{k,1}H_{k,-1}}{f^2(k)-g^2(k)+1}$$

elde edilir.■

Lemma 2. 3. 3. $H_{k,\mathrm{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı,

$$f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1\neq 0,\qquad f^2(k)-g^2(k)+1\neq 0,\qquad 1+g(k)\neq 0$$

$$\left[H_{k,1}^2 - H_{k,0}^2 g(k) - H_{k,0}H_{k,1} f(k)\right]\left[g(k)\left(1+g(k)\right)\right] \neq 0,$$

$$S = \left(H_{k,1} - H_{k,0} f(k)\right)^2 - H_{k,0}^2 - 2\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_1\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right),$$

$M = \sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i}H_{k,i+1}$ ve $N = \sum_{i=1}^{n-2} M_i$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} iH_{k,i+1}H_{k,i} = (n-1)M - N$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$S = \left(H_{k,1} - H_{k,0} f(k)\right)^2 - H_{k,0}^2 - 2\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_1\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right)$ olmak üzere,

$$X = \sum_{i=1}^{n-2} S = \sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,1} - H_{k,0} f(k)\right)^2 - H_{k,0}^2 - 2\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_1\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^i}{1+g(k)}\right)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n-2} S = \begin{cases} (n-2)\left[\left(H_{k,1} - H_{k,0} f(k)\right)^2 - H_{k,0}^2\right] - \dfrac{2\left(n-2+g(k)\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_1\right)}{1+g(k)} & \textit{tek ise} \\ (n-2)\left[\left(H_{k,1} - H_{k,0} f(k)\right)^2 - H_{k,0}^2\right] - \dfrac{2(n-1)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1} - H_{k,0}r_1\right)}{1+g(k)} & \textit{çift ise} \end{cases}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{k,i}^2 = \frac{H_{k,n}^2 - g^2(k) H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1} = W$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i+1}H_{k,i} = M$$

ve

$$N=\sum_{i=1}^{n-2}M_i=\frac{2\left(W-H_{k,0}^2-H_{k,n-1}^2-g^2(k)\left(W-H_{k,n-2}^2-H_{k,n-1}^2\right)+X\right)}{\left[f^2(k)+2g(k)-g^2(k)-1\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}$$

$$-\frac{\left(H_{k,1}^2-H_{k,0}H_{k,2}\right)^2\left[g(k)\left(n+2-\frac{1+g(k)^{n-2}}{1+g(k)}\right)-(n-2)\left(1+g(k)\right)\right]}{\left[H_{k,1}^2-H_{k,0}^2g(k)-H_{k,0}H_{k,1}f(k)\right]\left[g(k)\left(1+g(k)\right)\right]\left[f^2(k)-g^2(k)+1\right]}$$

$$+\frac{\left(g^2(k)\left(M+H_{k,0}H_{k,1}-H_{k,\mathrm{n}-1}H_{k,\mathrm{n}-2}-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}\right)\right)}{f^2(k)-g^2(k)+1}$$

$$+\frac{(n-2)\left(g^2(k)H_{k,0}H_{k,1}+H_{k,1}H_{k,2}-H_{k,0}^2-H_{k,1}H_{k,-1}\right)-\left(M-H_{k,\mathrm{n}}H_{k,\mathrm{n}-1}\right)}{f^2(k)-g^2(k)+1}$$

olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1}iH_{k,i+1}H_{k,i}=H_{k,2}H_{k,1}+2H_{k,3}H_{k,2}+3H_{k,4}H_{k,3}+\ldots+(n-1)H_{k,n}H_{k,n-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}H_{k,i+1}H_{k,i}+\sum_{i=2}^{n-1}H_{k,i+1}H_{k,i}+\sum_{i=3}^{n-1}H_{k,i+1}H_{k,i}+\ldots+\sum_{i=n-1}^{n-1}H_{k,i+1}H_{k,i}$$

$$=M_{n-1}+\left(M_{n-1}-M_1\right)+\left(M_{n-1}-M_2\right)+\ldots+\left(M_{n-1}-M_{n-2}\right)$$

$$=(n-1)M_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-2}M_i$$

$$=(n-1)M_{n-1}-N$$

elde edilir.■

Lemma 2. 3. 4. $H_{k,\text{n}}$ *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı,

$$f^2(k)-g^2(k)+2g(k)-1\neq 0, \quad 1+g(k)\neq 0,$$

$$S=\left(H_{k,1}-H_{k,0}f(k)\right)^2-H_{k,0}^2-2\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_1\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right), \qquad X=\sum_{i=1}^{n-2}S,$$

$$W=\sum_{i=1}^{n-1}H_{k,i}^2=\left(\frac{H_{k,n}^2-g^2\left(k\right)H_{k,n-1}^2+S}{f^2\left(k\right)+2g\left(k\right)-g^2\left(k\right)-1}-H_{k,0}^2\right) \text{ olmak üzere,}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}iH_{k,i}^2=\left(n-1\right)W-\left(\frac{W-H_{k,0}^2-H_{k,\text{n}-1}^2-g^2\left(k\right)\left(W-H_{k,n-1}^2-H_{k,\text{n}-2}^2\right)+X}{f^2\left(k\right)+2g\left(k\right)-g^2\left(k\right)-1}-\left(n-2\right)H_{k,0}^2\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$S=\left(H_{k,1}-H_{k,0}f(k)\right)^2-H_{k,0}^2-2\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_1\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^n}{1+g(k)}\right) \text{ olmak üzere,}$$

$$X=\sum_{i=1}^{n-2}S=\sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,1}-H_{k,0}f(k)\right)^2-H_{k,0}^2-2\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_1\right)\left(\frac{1-\left(-g(k)\right)^i}{1+g(k)}\right)$$

$$X=\sum_{i=1}^{n-2}S=\begin{cases}\left(n-2\right)\left[\left(H_{k,1}-H_{k,0}f(k)\right)^2-H_{k,0}^2\right]-\dfrac{2\left(n-2+g(k)\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_1\right)}{1+g(k)} & \textit{tek ise}\\ \left(n-2\right)\left[\left(H_{k,1}-H_{k,0}f(k)\right)^2-H_{k,0}^2\right]-\dfrac{2\left(n-1\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_2\right)\left(H_{k,1}-H_{k,0}r_1\right)}{1+g(k)} & \textit{çift ise}\end{cases}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n-1}H_{k,i}^2=\left(\frac{H_{k,n}^2-g^2\left(k\right)H_{k,n-1}^2+S}{f^2\left(k\right)+2g\left(k\right)-g^2\left(k\right)-1}-H_{k,0}^2\right)=W$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n-2} W_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_{k,n}^2 - g^2(k) H_{k,n-1}^2 + S}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1} - H_{k,0}^2$$

$$= \frac{W - H_{k,0}^2 - H_{k,\mathrm{n}-1}^2 - g^2(k)\left(W - H_{k,n-1}^2 - H_{k,\mathrm{n}-2}^2\right) + X}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1} - (n-2) H_{k,0}^2$$

olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} iH_{k,i}^2 = H_{k,1}^2 + 2H_{k,2}^2 + 3H_{k,3}^2 + \ldots + (n-1) H_{k,n-1}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} H_{k,i}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} H_{k,i}^2 + \sum_{i=3}^{n-1} H_{k,i}^2 + \ldots + \sum_{i=n-1}^{n-1} H_{k,i}^2$$

$$= W + (W - W_1) + (W - W_2) + \ldots + (W - W_{n-2})$$

$$= (n-1)W - \sum_{i=1}^{n-2} W_i$$

$$= (n-1)W - \left(\frac{W - H_{k,0}^2 - H_{k,\mathrm{n}-1}^2 - g^2(k)\left(W - H_{k,n-1}^2 - H_{k,\mathrm{n}-2}^2\right) + X}{f^2(k) + 2g(k) - g^2(k) - 1} - (n-2) H_{k,0}^2 \right)$$

elde edilir.■

3. *r* –HANKEL MATRİSLER

Bu bölümde *r*-Hankel matris tanımlanmış, elemanları bazı özel sayı dizilerinden oluşan *r*-Hankel matrisler oluşturulmuş, bu matrislerle ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

Tanım 3. 1. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $n \times n$ tipindeki bir matrise *r*-Hankel matris denir.

$$H_r = \begin{bmatrix} rh_0 & rh_1 & \dots & rh_{n-2} & h_{n-1} \\ rh_1 & rh_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ rh_{n-2} & h_{n-1} & \dots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Başka bir ifadeyle,

$$H_r = \begin{cases} rh_{i+j-2}, & i+j \le n \\ h_{i+j-2}, & i+j > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $H_r = \left[h_{ij}\right] \in M_{n,n}\left(\mathbb{C}\right)$ matrisine *r*-Hankel matris denir. $r=1$ alınmasıyla Hankel matris elde edilir **(Gökbaş & Köse, 2018b)**.

Tanım 3. 2. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $n \times n$ tipindeki bir matrise simetrik *r*-Hankel matris denir.

$$SH_r = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & rh_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-2} & h_{n-1} & \dots & rh_{2n-4} & rh_{2n-3} \\ h_{n-1} & rh_n & \dots & rh_{2n-3} & rh_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Başka bir ifadeyle,

$$SH_r = \begin{cases} h_{i+j-2}, & i+j \le n \\ \\ rh_{i+j-2}, & i+j > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $SH_r = \left[h_{ij}\right] \in M_{n,n}\left(\mathbb{C}\right)$ matrisine simetrik *r*-Hankel matris denir. $r = 1$ alınmasıyla Hankel matris elde edilir **(Gökbaş & Köse, 2018b)**.

Örneğin, elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayıları olan 2×2 tipindeki *r*-Hankel matris

$$H_r = \begin{bmatrix} r\left[a + ib\right] & \left[b + i\left(f(k)b + g(k)a\right)\right] \\ \\ \left[b + i\left(f(k)b + g(k)a\right)\right] & \left[f(k)b + g(k)a + i\left(f^2(k)b + f(k)g(k)a + g(k)b\right)\right] \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Örneğin, elemanları genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayıları olan 2×2 tipindeki simetrik *r*-Hankel matris

$$SH_r = \begin{bmatrix} \left[a + i\dfrac{b - f(k)a}{g(k)}\right] & \left[b + ia\right] \\ \\ \left[b + ia\right] & r\left[f(k)b + g(k)a + ib\right] \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.1. Genelleştirilmiş Kompleks *k*-Horadam ve Genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam Sayıları İle Tanımlı *r*-Hankel Matrisler

Bu bölümde, elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayıları olan *r*-Hankel matris tanımlanmış, bu matrisler ile ilgili bazı temel özellikler incelenmiştir.

Teorem 3. 1. 1. $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $n \times n$ tipindeki *A* matrisi elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayılarının modülü olan *r*-Hankel matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \sqrt{|r|^2 \sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + |r|^2 (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2}$$

Euclidean norm eşitliği geçerlidir.

İspat:

Elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayılarının modülü olan *A* *r*-Hankel matrisi aşağıdaki formda olsun.

$$A = \begin{bmatrix} r|KH_0| & r|KH_1| & \dots & r|KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| \\ r|KH_1| & r|KH_2| & \dots & |KH_{n-1}| & |KH_n| \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r|KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| & \dots & |KH_{2n-4}| & |KH_{2n-3}| \\ |KH_{n-1}| & |KH_n| & \dots & |KH_{2n-3}| & |KH_{2n-2}| \end{bmatrix}$$

Euclidean normun tanımından,

$$\|A\|_E^2 = \sum_{m=0}^{n-2} |r|^2 (m+1)|KH_m|^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (2n-1-m)|KH_m|^2$$

$$\|A\|_E^2 = |r|^2 \sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + |r|^2 (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2$$

$$\|A\|_E = \sqrt{|r|^2 \sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + |r|^2 (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2}$$

sonucuna ulaşılır.■

Teorem 3. 1. 2. $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $n \times n$ tipindeki *A* matrisi elemanları genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayılarının modülü olan *r*-Hankel matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \sqrt{|r|^2 \sum_{m=-1}^{n-3} (2m+3) H_m^2 + |r|^2 (n-1) H_{n-2}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_m^2 + nH_{n-2}^2}$$

Euclidean norm eşitliği geçerlidir.

İspat:

Elemanları genelleştirilmiş Gaussian *k*-Horadam sayılarının modülü olan *A* *r*-Hankel matrisi aşağıdaki formda olsun.

$$A = \begin{bmatrix} r|GH_0| & r|GH_1| & \dots & r|GH_{n-2}| & |GH_{n-1}| \\ r|GH_1| & r|GH_2| & \dots & |GH_{n-1}| & |GH_n| \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r|GH_{n-2}| & |GH_{n-1}| & \dots & |GH_{2n-4}| & |GH_{2n-3}| \\ |GH_{n-1}| & |GH_n| & \dots & |GH_{2n-3}| & |GH_{2n-2}| \end{bmatrix}$$

Euclidean normun tanımından,

$$\|A\|_E^2 = \sum_{m=0}^{n-2} |r|^2 (m+1) |GH_m|^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (2n-1-m) |GH_m|^2$$

$$\|A\|_E^2 = |r|^2 \sum_{m=-1}^{n-3} (2m+3) H_m^2 + |r|^2 (n-1) H_{n-2}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_m^2 + nH_{n-2}^2$$

$$\|A\|_E = \sqrt{|r|^2 \sum_{m=-1}^{n-3} (2m+3) H_m^2 + |r|^2 (n-1) H_{n-2}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_m^2 + nH_{n-2}^2}$$

sonucuna ulaşılır.■

Teorem 3. 1. 3. $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $n \times n$ tipindeki *A* matrisi elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayılarının modülü olan *r*-Hankel matris olmak üzere,

$$\text{a)} |r| \geq 1, \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2}{n}} \leq \|A\|_2$$
$$\leq \sqrt{\left(|r|^2 (n-1) + 1\right) \left(2 \sum_{m=n}^{2n-2} H_m^2 + H_{n-1}^2 + H_{2n-1}^2\right)}$$

$$\text{b)} \ |r| < 1, \ |r| \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2}{n}} \leq \|A\|_2$$
$$\leq \sqrt{n \left(2 \sum_{m=n}^{2n-2} H_m^2 + H_{n-1}^2 + H_{2n-1}^2\right)}$$

spectral norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

Elemanları genelleştirilmiş kompleks *k*-Horadam sayılarının modülü olan *A* *r*-Hankel matrisi aşağıdaki formda olsun.

$$A = \begin{bmatrix} r|KH_0| & r|KH_1| & \dots & r|KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| \\ r|KH_1| & r|KH_2| & \dots & |KH_{n-1}| & |KH_n| \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r|KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| & \dots & |KH_{2n-4}| & |KH_{2n-3}| \\ |KH_{n-1}| & |KH_n| & \dots & |KH_{2n-3}| & |KH_{2n-2}| \end{bmatrix}$$

Euclidean normun tanımından,

$$\|A\|_E^2 = \sum_{m=0}^{n-2} |r|^2 (m+1) |KH_m|^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (2n-1-m) |KH_m|^2$$

elde edilir.

a) $|r| \geq 1,$

Euclidean normla spectral norm arasındaki ilişkiden,

$$\|A\|_E^2 = \sum_{m=0}^{n-2} |r|^2 (m+1) |KH_m|^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (2n-1-m) |KH_m|^2$$

$$\|A\|_E^2 > \sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2$$

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2} (2m+1) H_m^2 + (n-1) H_{n-1}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2} (4n-3-2m) H_{m+1}^2 + nH_{n-1}^2}{n}} \qquad (3.5.1.)$$

elde edilir.

B ve C matrisleri aşağıdaki formda olsun.

$$B = \begin{bmatrix} r & r & r & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ & & & \\ r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} |KH_0| & |KH_1| & \ldots & |KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| \\ |KH_1| & |KH_2| & \ldots & |KH_{n-1}| & |KH_n| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ |KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| & \ldots & |KH_{2n-4}| & |KH_{2n-3}| \\ |KH_{n-1}| & |KH_n| & \ldots & |KH_{2n-3}| & |KH_{2n-2}| \end{bmatrix}$$

B matrisinin maksimum satır uzunluk normu,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{nj}|^2} = \sqrt{|r|^2 (n-1) + 1}$$

C matrisinin maksimum sütun uzunluk normu,

$$c_1(C)=\max_j \sqrt{\sum_i |c_{in}|^2}=\sqrt{\sum_{i=n-1}^{2n-2}\left|KH_i^2\right|}=\sqrt{2\sum_{m=n}^{2n-2}H_m^2+H_{n-1}^2+H_{2n-1}^2}$$

olur. $A=B\circ C$ Hadamard çarpım olmak üzere, $\|A\|_2\le r_1(B)c_1(C)$ eşitsizlik özelliğinden,

$$\|A\|_2\le\sqrt{\left(|r|^2(n-1)+1\right)\left(2\sum_{m=n}^{2n-2}H_m^2+H_{n-1}^2+H_{2n-1}^2\right)} \tag{3.5.2.}$$

elde edilir. (3.5.1.) ve (3.5.2.) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$\sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2}(2m+1)H_m^2+(n-1)H_{n-1}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)H_m^2+nH_{n-1}^2}{n}}\le\|A\|_2\le\sqrt{\left(|r|^2(n-1)+1\right)\left(2\sum_{m=n}^{2n-2}H_m^2+H_{n-1}^2+H_{2n-1}^2\right)}$$

sonucuna ulaşılır.

b) $|r|<1,$

Euclidean normun tanımından,

$$\|A\|_E^2=\sum_{m=0}^{n-2}|r|^2(m+1)|KH_m|^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(2n-1-m)|KH_m|^2$$

elde edilir.

Euclidean normla spectral norm arasındaki ilişkiden,

$$\|A\|_E^2=\sum_{m=0}^{n-2}|r|^2(m+1)|KH_m|^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(2n-1-m)|KH_m|^2$$

$$\|A\|_E^2>|r|^2\sum_{m=0}^{n-2}(2m+1)H_m^2+|r|^2(n-1)H_{n-1}^2+|r|^2\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)H_{m+1}^2+|r|^2 nH_{n-1}^2$$

$$\|A\|_2 \geq |r|\sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2}(2m+1)H_m^2+(n-1)H_{n-1}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)H_{m+1}^2+nH_{n-1}^2}{n}} \qquad (3.5.3.)$$

elde edilir.

B ve *C* matrisleri aşağıdaki formda olsun.

$$B=\begin{bmatrix} r & r & & r & 1 \\ r & r & & 1 & 1 \\ & & & & \\ r & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} |KH_0| & |KH_1| & \ldots & |KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| \\ |KH_1| & |KH_2| & \ldots & |KH_{n-1}| & |KH_n| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ |KH_{n-2}| & |KH_{n-1}| & \ldots & |KH_{2n-4}| & |KH_{2n-3}| \\ |KH_{n-1}| & |KH_n| & \ldots & |KH_{2n-3}| & |KH_{2n-2}| \end{bmatrix}$$

B matrisinin maksimum satır uzunluk normu,

$$r_1(B)=\max_i\sqrt{\sum_j |b_{nj}|^2}=\sqrt{n}$$

C matrisinin maksimum sütun uzunluk normu,

$$c_1(C)=\max_j\sqrt{\sum_i |c_{in}|^2}=\sqrt{\sum_{i=n-1}^{2n-2}\left|KH_i^2\right|}=\sqrt{2\sum_{m=n}^{2n-2}H_m^2+H_{n-1}^2+H_{2n-1}^2}$$

olur. $A=B\circ C$ Hadamard çarpım olmak üzere, $\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C)$ eşitsizlik özelliğinden,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{n\left(2\sum_{m=n}^{2n-2}H_m^2+H_{n-1}^2+H_{2n-1}^2\right)} \qquad (3.5.4.)$$

elde edilir. (3.5.3.) ve (3.5.4.) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$|r|\sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2}(2m+1)H_m^2+(n-1)H_{n-1}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)H_{m+1}^2+nH_{n-1}^2}{n}}\leq\|A\|_2$$

$$\leq\sqrt{n\left(2\sum_{m=n}^{2n-2}H_m^2+H_{n-1}^2+H_{2n-1}^2\right)}$$

sonucuna ulaşılır.■

Teorem 3. 1. 4. $r\in\mathbb{C}$ olmak üzere, A matrisi elemanları genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayılarının modülü olan r-Hankel matris olmak üzere,

$$\text{a)}\ |r|\geq 1,\ \sqrt{\frac{\sum_{m=-1}^{n-3}(2m+3)H_m^2+(n-1)H_{n-2}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)H_m^2+nH_{n-2}^2}{n}}\leq\|A\|_2$$

$$\leq\sqrt{\left(|r|^2(n-1)+1\right)\left(2\sum_{m=n-1}^{2n-3}H_m^2+H_{n-2}^2+H_{2n-2}^2\right)}$$

$$\text{b)}\ |r|<1,\ |r|\sqrt{\frac{\sum_{m=-1}^{n-3}(2m+3)H_m^2+(n-1)H_{n-2}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)H_m^2+nH_{n-2}^2}{n}}\leq\|A\|_2$$

$$\leq\sqrt{n\left(2\sum_{m=n-1}^{2n-3}H_m^2+H_{n-2}^2+H_{2n-2}^2\right)}$$

spectral norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

Bu teoremin ispatı Teorem 3. 1. 3'ün ispatına benzer şekilde yapılır.■

3.2. Bazı Sayı Dizileri İle Tanımlı *r*-Hankel Matrisler

Bu bölümde, elemanları bazı sayı dizileri olan r-Hankel matrisler tanımlanmış, bu matrislerin spektral norm değerleri için yeni eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 3. 2. 1. *A* matrisi elemanları Fibonacci sayıları olan Hankel matris olmak üzere,

$$\|A\|_2 = \begin{cases} \dfrac{F_{2n-1} - 1 + \sqrt{F_{2n-1}^2 - 2F_{2n-1} + 4F_n^2 + 1}}{2} & n \text{ çift ise} \\ \dfrac{F_{2n-1} - 1 + \sqrt{F_{2n-1}^2 - 2F_{2n-1} + 4F_n^2 - 3}}{2} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

spectral norm eşitlikleri geçerlidir **(Solak & Bahşi, 2011)**.

Teorem 3. 2. 2. $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, *A* matrisi elemanları Fibonacci sayıları olan *r*-Hankel matris olmak üzere,

a) $|r| \geq 1,$ $$\sqrt{\frac{F_{2n-1}F_{2n-2} + F_{2n-2}^2 - 3F_{n-1}F_{n-2} - 2F_{n-2}^2 + F_nF_{n-1} + \left[1 - (-1)^n\right]}{n}} \leq \|A\|_2$$

$$\leq \sqrt{\left(|r|^2 (n-1) + 1\right)\left(F_{2n-1}F_{2n-2} - F_{n-1}F_{n-2}\right)}$$

b) $|r| < 1,$ $$|r|\sqrt{\frac{F_{2n-1}F_{2n-2} + F_{2n-2}^2 - 3F_{n-1}F_{n-2} - 2F_{n-2}^2 + F_nF_{n-1} + \left[1 - (-1)^n\right]}{n}} \leq \|A\|_2$$

$$\leq \sqrt{n\left(F_{2n-1}F_{2n-2} - F_{n-1}F_{n-2}\right)}$$

spectral norm eşitsizlikleri geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018b)**.

Yukarıdaki teoremlerde gösterilen, elemanları Fibonacci sayıları olan *r*-Hankel matrisin spektral norm eşitsizliğiyle, elemanları Fibonacci sayıları olan Hankel matrisin spektral norm eşitlik değerleri aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 3. 2. 1. *r* = 1 Değerini Aldığında Elemanları Fibonacci Sayıları Olan *r*-Hankel Matrisin Spektral Norm Eşitsizlik ve Elemenları Fibonacci Sayıları Olan Hankel Matrisin Spektral Norm Eşitlik Sayısal Değerleri

n	2	3	4	...
Teorem 3. 2. 2.	$\sqrt{2} \leq \|A\|_2 \leq 2$	$\sqrt{\frac{23}{3}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{42}$	$\sqrt{\frac{83}{2}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{408}$	$\ldots$
Teorem 3. 2. 1.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$2+\sqrt{7}$	$6+3\sqrt{5}$	$\ldots$

Yukarı çizelgedeki sayısal değerler incelendiğinde, Teorem 3. 2. 2. deki değerlerin, Teorem 3. 2. 1. deki değerlere yaklaştığı, farklı bir sınır yaklaşık değeri olarak görülür. Farklı *r* değerleri için yeni sınır değerleri elde edilir.

Teorem 3. 2. 3. *A* matrisi elemanları Lucas sayıları olan Hankel matris olmak üzere,

$$\|A\|_2 = \begin{cases} \dfrac{L_{2n-1}+1+\sqrt{5\left(\dfrac{L_{2n-2}+L_{2n}-5}{5}\right)^2}}{2} & n \ \textit{çift ise} \\[2ex] \dfrac{L_{2n-1}+1+\sqrt{5\left(\dfrac{L_{2n-2}+L_{2n}-5}{5}\right)^2+4}}{2} & n \ \textit{tek ise} \end{cases}$$

spectral norm eşitlikleri geçerlidir **(Solak & Bahşi, 2011)**.

Teorem 3. 2. 4. $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, *A* matrisi elemanları Lucas sayıları olan *r*-Hankel matris olmak üzere,

$$
\text{a)}\quad |r| \geq 1, \quad
\begin{cases}
\sqrt{\dfrac{L_{2n-1}L_{2n-2} - 2L_{n-1}L_{n-2} + L_{2n-2}^2 - 2L_{n-2}^2 + 6}{n}} \leq \|A\|_2 \\
\qquad \leq \sqrt{\left(|r|^2 (n-1) + 1\right)\left(L_{2n-1}L_{2n-2} - L_{n-1}L_{n-2}\right)} \quad n \text{ çift ise} \\
\sqrt{\dfrac{L_{2n-1}L_{2n-2} - 2L_{n-1}L_{n-2} + L_{2n-2}^2 - 2L_{n-2}^2 + 1}{n}} \leq \|A\|_2 \\
\qquad \leq \sqrt{\left(|r|^2 (n-1) + 1\right)\left(L_{2n-1}L_{2n-2} - L_{n-1}L_{n-2}\right)} \quad n \text{ tek ise}
\end{cases}
$$

$$
\text{b)}\quad |r| < 1, \quad
\begin{cases}
|r|\sqrt{\dfrac{L_{2n-1}L_{2n-2} - 2L_{n-1}L_{n-2} + L_{2n-2}^2 - 2L_{n-2}^2 + 6}{n}} \leq \|A\|_2 \\
\qquad \leq \sqrt{n\left(L_{2n-1}L_{2n-2} - L_{n-1}L_{n-2}\right)} \quad n \text{ çift ise} \\
|r|\sqrt{\dfrac{L_{2n-1}L_{2n-2} - 2L_{n-1}L_{n-2} + L_{2n-2}^2 - 2L_{n-2}^2 + 1}{n}} \leq \|A\|_2 \\
\qquad \leq \sqrt{n\left(L_{2n-1}L_{2n-2} - L_{n-1}L_{n-2}\right)} \quad n \text{ tek ise}
\end{cases}
$$

spectral norm eşitsizlikleri geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2018b)**.

Yukarıdaki teoremlerde gösterilen, elemanları Lucas sayıları olan *r*-Hankel matrisin spektral norm eşitsizliğiyle, elemanları Lucas sayıları olan Hankel matrisin spektral norm eşitlik değerleri aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 3. 2. 2. r = 1 Değerini Aldığında Elemanları Lucas Sayıları Olan r-Hankel Matrisin Spektral Norm Eşitsizlik ve Elemenları Lucas Sayıları Olan Hankel Matrisin Spektral Norm Eşitlik Sayısal Değerleri

n	2	3	4	...
Teorem 3. 2. 4.	$\sqrt{\frac{15}{2}} \leq \Vert A \Vert_2 \leq \sqrt{20}$	$\sqrt{\frac{119}{3}} \leq \Vert A \Vert_2 \leq \sqrt{222}$	$\sqrt{\frac{405}{2}} \leq \Vert A \Vert_2 \leq \sqrt{2040}$	$\dots$
Teorem 3. 2. 3.	3	$6+\sqrt{21}$	$15+6\sqrt{5}$	$\dots$

Yukarı çizelgedeki sayısal değerler incelendiğinde, Teorem 3. 2. 4. deki değerlerin, Teorem 3. 2. 3. deki değerlere yaklaştığı, farklı bir sınır yaklaşık değeri olarak görülür. Farklı r değerleri için yeni sınır değerleri elde edilir.

Teorem 3. 2. 5. $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, A matrisi elemanları Pell sayıları olan r-Hankel matris olmak üzere,

a) $|r| \geq 1,$
$$\sqrt{\frac{P_{4n-3} - 2P_{2n-3} + 2P_{2n-1}P_{2n-2} - 4P_{n-1}P_{n-2} + 1}{8n}} \leq \Vert A \Vert_2$$
$$\leq \sqrt{\frac{\left(|r|^2 (n-1) + 1\right)\left(P_{2n-1}P_{2n-2} - P_{n-1}P_{n-2}\right)}{2}}$$

b) $|r| < 1,$
$$|r| \sqrt{\frac{P_{4n-3} - 2P_{2n-3} + 2P_{2n-1}P_{2n-2} - 4P_{n-1}P_{n-2} + 1}{8n}} \leq \Vert A \Vert_2$$
$$\leq \sqrt{n \frac{P_{2n-1}P_{2n-2} - P_{n-1}P_{n-2}}{2}}$$

spectral norm eşitsizlikleri geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2017)**.

İspat:

Elemanları Pell sayıları olan A r-Hankel matrisi aşağıdaki formda olsun.

$$A=\begin{bmatrix} rP_0 & rP_1 & \dots & rP_{n-2} & P_{n-1} \\ rP_1 & rP_2 & \dots & P_{n-1} & P_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ rP_{n-2} & P_{n-1} & \dots & P_{2n-4} & P_{2n-3} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{2n-3} & P_{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_E^2=\sum_{k=0}^{n-2}|r|^2\left(k+1\right)P_k^2+\sum_{k=n-1}^{2n-2}\left(2n-1-k\right)P_k^2$$

a) $|r|\geq 1,$

Euclidean normla spectral norm arasındaki ilişkiden,

$$\|A\|_E^2\geq\sum_{k=0}^{n-2}\left(k+1\right)P_k^2+\sum_{k=n-1}^{2n-2}\left(2n-1-k\right)P_k^2$$

$$=\left(2n-1\right)\sum_{k=0}^{2n-2}P_k^2-\sum_{k=1}^{2n-2}kP_k^2-\left(2n-1\right)\sum_{k=0}^{n-2}P_k^2+2\sum_{k=1}^{n-2}kP_k^2+\sum_{k=0}^{n-2}P_k^2$$

$$=\frac{P_{4n-3}-2P_{2n-3}+2P_{2n-1}P_{2n-2}-4P_{n-1}P_{n-2}+1}{8}$$

$$\|A\|_2\geq\sqrt{\frac{P_{4n-3}-2P_{2n-3}+2P_{2n-1}P_{2n-2}-4P_{n-1}P_{n-2}+1}{8n}} \tag{3.5.5.}$$

elde edilir.

B ve C matrisleri aşağıdaki formda olsun.

$$B=\begin{bmatrix} r & r & & r & 1 \\ r & r & & 1 & 1 \\ & & & & \\ r & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{n-2} & P_{n-1} \\ P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} & P_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-2} & P_{n-1} & \dots & P_{2n-4} & P_{2n-3} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{2n-3} & P_{2n-2} \end{bmatrix}$$

B matrisinin maksimum satır uzunluk normu,

$$r_1(B)=\max_i \sqrt{\sum_j |b_{nj}|^2}=\sqrt{|r|^2(n-1)+1}$$

C matrisinin maksimum sütun uzunluk normu,

$$c_1(C)=\max_j \sqrt{\sum_i |c_{in}|^2}=\sqrt{\sum_{i=n-1}^{2n-2} P_i^2}=\sqrt{\frac{P_{2n-1}P_{2n-2}-P_{n-1}P_{n-2}}{2}}$$

olur. $A=B\circ C$ Hadamard çarpım olmak üzere, $\|A\|_2\le r_1(B)c_1(C)$ eşitsizlik özelliğinden,

$$\|A\|_2\le\sqrt{\frac{\left(|r|^2(n-1)+1\right)\left(P_{2n-1}P_{2n-2}-P_{n-1}P_{n-2}\right)}{2}} \tag{3.5.6.}$$

elde edilir. (3.5.5.) ve (3.5.6.) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$\sqrt{\frac{P_{4n-3}-2P_{2n-3}+2P_{2n-1}P_{2n-2}-4P_{n-1}P_{n-2}+1}{8n}}\le\|A\|_2\le\sqrt{\frac{\left(|r|^2(n-1)+1\right)\left(P_{2n-1}P_{2n-2}-P_{n-1}P_{n-2}\right)}{2}}$$

sonucuna ulaşılır.

b) $|r|<1$,

Euclidean normla spectral norm arasındaki ilişkiden,

$$\|A\|_E^2\ge|r|^2\left[\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)P_k^2+\sum_{k=n-1}^{2n-2}(2n-1-k)P_k^2\right]$$

$$=|r|^2\left[(2n-1)\sum_{k=0}^{2n-2}P_k^2-\sum_{k=1}^{2n-2}kP_k^2-(2n-1)\sum_{k=0}^{n-2}P_k^2+2\sum_{k=1}^{n-2}kP_k^2+\sum_{k=0}^{n-2}P_k^2\right]$$

$$=|r|^2\frac{P_{4n-3}-2P_{2n-3}+2P_{2n-1}P_{2n-2}-4P_{n-1}P_{n-2}+1}{8}$$

$$\|A\|_2\ge|r|\sqrt{\frac{P_{4n-3}-2P_{2n-3}+2P_{2n-1}P_{2n-2}-4P_{n-1}P_{n-2}+1}{8n}} \tag{3.5.7.}$$

elde edilir.

B ve *C* matrisleri aşağıdaki formda olsun.

$$B=\begin{bmatrix} r & r & & r & 1 \\ r & r & & 1 & 1 \\ & & & & \\ r & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{n-2} & P_{n-1} \\ P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} & P_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-2} & P_{n-1} & \dots & P_{2n-4} & P_{2n-3} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{2n-3} & P_{2n-2} \end{bmatrix}$$

B matrisinin maksimum satır uzunluk normu,

$$r_1(B)=\max_i \sqrt{\sum_j \left|b_{nj}\right|^2}=\sqrt{n}$$

C matrisinin maksimum sütun uzunluk normu,

$$c_1(C)=\max_j \sqrt{\sum_i \left|c_{in}\right|^2}=\sqrt{\sum_{i=n-1}^{2n-2} P_i^2}=\sqrt{\frac{P_{2n-1}P_{2n-2}-P_{n-1}P_{n-2}}{2}}$$

olur. $A=B\circ C$ Hadamard çarpım olmak üzere, $\|A\|_2 \le r_1(B)c_1(C)$ eşitsizlik özelliğinden,

$$\|A\|_2 \le \sqrt{n\frac{P_{2n-1}P_{2n-2}-P_{n-1}P_{n-2}}{2}} \tag{3.5.8.}$$

elde edilir. (3.5.7.) ve (3.5.8.) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$|r|\sqrt{\frac{P_{4n-3}-2P_{2n-3}+2P_{2n-1}P_{2n-2}-4P_{n-1}P_{n-2}+1}{8n}} \le \|A\|_2 \le \sqrt{n\frac{P_{2n-1}P_{2n-2}-P_{n-1}P_{n-2}}{2}}$$

sonucuna ulaşılır.■

Teorem 3. 2. 6. $r\in\mathbb{C}$ olmak üzere, *A* matrisi elemanları Pell-Lucas sayıları olan *r*-Hankel matris olmak üzere,

a) $|r|\geq 1,\ \sqrt{\dfrac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4n}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{\left[|r|^2(n-1)+1\right]\left[\dfrac{Q_{4n-3}-Q_{2n-3}-2(-1)^n+2}{2}\right]}$

b) $|r|<1,\ |r|\left[\dfrac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4n}\right] \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n\left(\dfrac{Q_{4n-3}-Q_{2n-3}-2(-1)^n+2}{2}\right)}$

spectral norm eşitsizlikleri geçerlidir **(Gökbaş & Köse, 2017)**.

İspat:

Elemanları Pell-Lucas sayıları olan A r-Hankel matrisi aşağıdaki formda olsun.

$$A=\begin{bmatrix} rQ_0 & rQ_1 & \dots & rQ_{n-2} & Q_{n-1} \\ rQ_1 & rQ_2 & \dots & Q_{n-1} & Q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ rQ_{n-2} & Q_{n-1} & \dots & Q_{2n-4} & Q_{2n-3} \\ Q_{n-1} & Q_n & \dots & Q_{2n-3} & Q_{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_E^2=\sum_{k=0}^{n-2}|r|^2(k+1)Q_k^2+\sum_{k=n-1}^{2n-2}(2n-1-k)Q_k^2$$

a) $|r|\geq 1,$

Euclidean normla spectral norm arasındaki ilişkiden,

$$\|A\|_E^2 \geq \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)Q_k^2+\sum_{k=n-1}^{2n-2}(2n-1-k)Q_k^2$$

$$=(2n-1)\sum_{k=0}^{2n-2}Q_k^2-\sum_{k=1}^{2n-2}kQ_k^2-(2n-1)\sum_{k=0}^{n-2}Q_k^2+2\sum_{k=1}^{n-2}kQ_k^2+\sum_{k=0}^{n-2}Q_k^2$$

$$=\frac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4}$$

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{\frac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4n}} \tag{3.5.9.}$$

elde edilir.

B ve C matrisleri aşağıdaki formda olsun.

$$B=\begin{bmatrix} r & r & & r & 1 \\ r & r & & 1 & 1 \\ & & & & \\ r & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{n-2} & Q_{n-1} \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_{n-1} & Q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & \dots & Q_{2n-4} & Q_{2n-3} \\ Q_{n-1} & Q_n & \dots & Q_{2n-3} & Q_{2n-2} \end{bmatrix}$$

B matrisinin maksimum satır uzunluk normu,

$$r_1(B)=\max_i \sqrt{\sum_j |b_{nj}|^2}=\sqrt{|r|^2(n-1)+1}$$

C matrisinin maksimum sütun uzunluk normu,

$$c_1(C)=\max_j \sqrt{\sum_i |c_{in}|^2}=\sqrt{\sum_{i=n-1}^{2n-2} Q_i^2}=\sqrt{\frac{Q_{4n-3}-Q_{2n-3}-2(-1)^n+2}{2}}$$

olur. $A=B\circ C$ Hadamard çarpım olmak üzere, $\|A\|_2 \le r_1(B)c_1(C)$ eşitsizlik özelliğinden,

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\left[|r|^2(n-1)+1\right]\left[\frac{Q_{4n-3}-Q_{2n-3}-2(-1)^n+2}{2}\right]} \tag{3.5.10.}$$

elde edilir. (3.5.9.) ve (3.5.10.) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$\sqrt{\frac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4n}} \le \|A\|_2$$

$$\le \sqrt{\left[|r|^2(n-1)+1\right]\left[\frac{Q_{4n-3}-Q_{2n-3}-2(-1)^n+2}{2}\right]}$$

sonucuna ulaşılır.

b) $|r|<1,$

Euclidean normla spectral norm arasındaki ilişkiden,

$$\|A\|_E^2 \geq \sum_{k=0}^{n-2}|r|^2(k+1)Q_k^2+\sum_{k=n-1}^{2n-2}|r|^2(2n-1-k)Q_k^2$$

$$=|r|^2\left[(2n-1)\sum_{k=0}^{2n-2}Q_k^2-\sum_{k=1}^{2n-2}kQ_k^2-(2n-1)\sum_{k=0}^{n-2}Q_k^2+2\sum_{k=1}^{n-2}kQ_k^2+\sum_{k=0}^{n-2}Q_k^2\right]$$

$$=|r|^2\left[\frac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4}\right]$$

$$\|A\|_2 \geq |r|\sqrt{\left[\frac{2Q_{4n-3}+Q_{4n-4}-4Q_{2n-3}-2Q_{2n-4}+10-4[-1]^n}{4n}\right]} \qquad (3.5.11.)$$

elde edilir.

B ve C matrisleri aşağıdaki formda olsun.

$$B=\begin{bmatrix} r & r & & r & 1 \\ r & r & & 1 & 1 \\ & & & & \\ r & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{n-2} & Q_{n-1} \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_{n-1} & Q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & \dots & Q_{2n-4} & Q_{2n-3} \\ Q_{n-1} & Q_n & \dots & Q_{2n-3} & Q_{2n-2} \end{bmatrix}$$

B matrisinin maksimum satır uzunluk normu,

$$r_1(B)=\max_i\sqrt{\sum_j |b_{nj}|^2}=\sqrt{n}$$

C matrisinin maksimum sütun uzunluk normu,

$$c_1(C)=\max_j\sqrt{\sum_i |c_{in}|^2}=\sqrt{\sum_{i=n-1}^{2n-2}Q_i^2}=\sqrt{\frac{Q_{4n-3}-Q_{2n-3}-2(-1)^n+2}{2}}$$

olur. $A=B\circ C$ Hadamard çarpım olmak üzere, $\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C)$ eşitsizlik özelliğinden,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{n\left(\frac{Q_{4n-3} - Q_{2n-3} - 2(-1)^n + 2}{2}\right)} \tag{3.5.12.}$$

elde edilir. (3.5.11.) ve (3.5.12.) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$|r|\left[\frac{2Q_{4n-3} + Q_{4n-4} - 4Q_{2n-3} - 2Q_{2n-4} + 10 - 4[-1]^n}{4n}\right] \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n\left(\frac{Q_{4n-3} - Q_{2n-3} - 2(-1)^n + 2}{2}\right)}$$

sonucuna ulaşılır.■

4. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde tez çalışmamızda elde edilen bazı teorik sonuçlara ilişkin nümerik değerlere örnekler verilecektir.

Örnek 4. 1. (Teorem 3. 1. 1) $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, A matrisi elemanları kompleks Pell sayılarının modülü olan r-Hankel matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} r|i| & r|(1+2i)| & |2+5i| \\ r|(1+2i)| & |2+5i| & |5+12i| \\ |2+5i| & |5+12i| & |12+29i| \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

olsun. A matrisinin Euclidean normu,

$$\|A\|_E = \sqrt{|r|^2 \sum_{m=0}^{1} (2m+1) P_m^2 + |r|^2 2P_2^2 + \sum_{m=2}^{4} (9-2m) P_{m+1}^2 + 3P_2^2}$$

olmak üzere,

$$\|A\|_E = \sqrt{|r|^2 (1.0 + 3.1) + |r|^2 2.4 + 5.25 + 3.144 + 1.841 + 3.4}$$

$$\|A\|_E = \sqrt{11|r|^2 + 1410}$$

bulunur.

Örnek 4. 2. (Teorem 3. 1. 2) $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, A matrisi elemanları Gaussian Pell-Lucas sayılarının modülü olan r-Hankel matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} r|2-2i| & r|(2+2i)| & |6+2i| \\ r|(2+2i)| & |6+2i| & |14+6i| \\ |6+2i| & |14+6i| & |34+14i| \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

olsun. A matrisinin Euclidean normu,

$$\|A\|_E=\sqrt{|r|^2\sum_{m=-1}^{0}(2m+3)Q_m^2+|r|^2\,2Q_1^2+\sum_{m=2}^{4}(9-2m)Q_m^2+3Q_1^2}$$

olmak üzere,

$$\|A\|_E=\sqrt{|r|^2(1.4+3.4)+|r|^2\,2.4+5.36+3.196+1.1156+3.4}$$

$$\|A\|_E=\sqrt{24|r|^2+1936}$$

bulunur.

Örnek 4. 3. (Teorem 3. 1. 3) $r\in\mathbb{C}$ olmak üzere, A matrisi elemanları kompleks Pell sayılarının modülü olan r-Hankel matrisi,

$$A=\begin{bmatrix} r|i| & r|(1+2i)| & |2+5i| \\ r|(1+2i)| & |2+5i| & |5+12i| \\ |2+5i| & |5+12i| & |12+29i| \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

olsun. A matrisinin spektral norm eşitsizliği,

$$\text{a)}\,|r|\geq 1,\ \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2}(2m+1)P_m^2+(n-1)P_{n-1}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)P_{m+1}^2+nP_{n-1}^2}{n}}\leq\|A\|_2$$
$$\leq\sqrt{\left(|r|^2(n-1)+1\right)\left(2\sum_{m=n}^{2n-2}P_m^2+P_{n-1}^2+P_{2n-1}^2\right)}$$

$$\text{b)}\ |r|<1,\ |r|\sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{n-2}(2m+1)P_m^2+(n-1)P_{n-1}^2+\sum_{m=n-1}^{2n-2}(4n-3-2m)P_{m+1}^2+nP_{n-1}^2}{n}}\leq\|A\|_2$$
$$\leq\sqrt{n\left(2\sum_{m=n}^{2n-2}P_m^2+P_{n-1}^2+P_{2n-1}^2\right)}$$

olmak üzere,

$$\text{a)}\,|r|\geq 1,\qquad \sqrt{\frac{1421}{3}}\leq\|A\|_2\leq\sqrt{\left(2|r|^2+1\right).1183}$$

$$\text{b)}\ |r|<1,\qquad |r|\sqrt{\frac{1421}{3}}\leq\|A\|_2\leq\sqrt{3549}$$

bulunur.

Örnek 4. 4. (Teorem 3. 1. 4) $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere, A matrisi elemanları Gaussian Pell-Lucas sayılarının modülü olan r-Hankel matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} r\left|2-2i\right| & r\left|\left(2+2i\right)\right| & \left|6+2i\right| \\ r\left|\left(2+2i\right)\right| & \left|6+2i\right| & \left|14+6i\right| \\ \left|6+2i\right| & \left|14+6i\right| & \left|34+14i\right| \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

olsun. A matrisinin spektral norm eşitsizliği,

$$\text{a)} \left|r\right| \geq 1, \sqrt{\frac{\sum_{m=-1}^{n-3}\left(2m+3\right)Q_m^2 + \left(n-1\right)Q_{n-2}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2}\left(4n-3-2m\right)Q_m^2 + nQ_{n-2}^2}{n}} \leq \left\|A\right\|_2$$

$$\leq \sqrt{\left(\left|r\right|^2\left(n-1\right)+1\right)\left(2\sum_{m=n-1}^{2n-3} Q_m^2 + Q_{n-2}^2 + Q_{2n-2}^2\right)}$$

$$\text{b)} \ \left|r\right| < 1, \ \left|r\right|\sqrt{\frac{\sum_{m=-1}^{n-3}\left(2m+3\right)Q_m^2 + \left(n-1\right)Q_{n-2}^2 + \sum_{m=n-1}^{2n-2}\left(4n-3-2m\right)Q_m^2 + nQ_{n-2}^2}{n}} \leq \left\|A\right\|_2$$

$$\leq \sqrt{n\left(2\sum_{m=n-1}^{2n-3} Q_m^2 + Q_{n-2}^2 + Q_{2n-2}^2\right)}$$

olmak üzere,

$$\text{a)} \left|r\right| \geq 1, \qquad \sqrt{\frac{1960}{3}} \leq \left\|A\right\|_2 \leq \sqrt{\left(2\left|r\right|^2+1\right).1624}$$

$$\text{b)} \ \left|r\right| < 1, \qquad \left|r\right|\sqrt{\frac{1960}{3}} \leq \left\|A\right\|_2 \leq \sqrt{4872}$$

bulunur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmanın, genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizileri için önemli bir kaynak oluşturabileceği düşüncesiyle bu sayı dizileri ayrıntılı bir şekilde incelenmeye çalışılmıştır. Çalışmada, genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizileri tanımlanmış, bu sayı dizilerinin bazı özellikleri ve ilişkileri ele alınmıştır. Genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayılarının bazı kısmi toplamları için formüller elde edilmiştir. Buradan elde edilen sonuçlar makale olarak "On complex k-Horadam and Gaussian k-Horadam sequences" adıyla International Journal of Mathematics and Computer Science dergisinde yayınlanarak literatüre yeni sonuçlar kazandırılmıştır. Ayrıca, r-Hankel matris tanımlanmış, elemanları genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizileri olan bu matrislerin norm değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan r-Hankel matrisler oluşturulmuş, bu matrislerle ilgili bazı temel norm özellikleri ele alınmıştır. Elemanları sayı dizili olan r-Hankel matrislerin norm eşitsizlik değerlerine yeni eşitsizlik değeri katılmış ve buradan elde edilen sonuçlar makale olarak "On the norms of r-Hankel matrices involving Fibonacci and Lucas numbers" adıyla Journal of Applied Mathematics and Physics dergisinde yayınlanarak literatüre yeni sonuçlar kazandırılmıştır.

5.2. Öneriler

Genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayı dizileriyle ilgili bazı sayı dizilerinde olduğu gibi daha birçok yeni özellikler bulunabilir, literatüre katkı sağlanabilir. r-Hankel matrislerin de r-Circulant matriste olduğu gibi çeşitleri tanımlanarak farklı sayı dizileri için uygulamaları gerçekleştirilebilir. Genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam sayıları için bazı formüller ele alınabilir, incelenebilir. Genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve genelleştirilmiş Gaussian k-Horadam polinomlarıyla ilgili özellikler ele alınabilir, eşitlikler bulunabilir.

KAYNAKLAR

Altınışık, E., Yalçın, N. F., & Büyükköse, Ş. (2015). Determinants and inverses of circulant matrices with complex Fibonacci numbers. *Special Matrices, 3*(1), 82-90.

Asci, M., & Gurel, E. (2013). Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials. *Notes on Number Theory Discrete Mathematics, 19*(1), 25-36.

Catarino, P. (2013). *A note involving two-by-two matrices of the k-Pell and k-Pell-Lucas sequences.* Paper presented at the International Mathematical Forum.

Catarino, P., & Vasco, P. (2013). Modified k-Pell sequence: Some identities and ordinary generating function. *Appl. Math. Sci, 7*(121), 6031-6037.

Cerin, Z., & Gianella, G. M. (2007). On sums of Pell numbers. *Accad. Sc. Torino - Atti Sci. Fis.*

Civciv, H. (2009). *Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özellikleri.* Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Gökbaş, H., & Köse, H. (2017). On The Norms Of r-Hankel Matrices Involving Pell And Pell-Lucas Numbers.

Gökbaş, H., & Köse, H. (2018a). On Complex K-Horadam and Gaussian K-Horadam Sequences. *International Journal Of Mathematics Computer Research, 6*(11), 1938-1942.

Gökbaş, H., & Köse, H. (2018b). On the Norms of r-Hankel Matrices Involving Fibonacci and Lucas Numbers. *Journal of Applied Mathematics Physics, 6*(07), 1409.

Gökbaş, H., & Türkmen, R. (2016). On the norms of r-Toeplitz matrices involving Fibonacci and Lucas numbers. *Advances in Linear Algebra Matrix Theory, 6*(02), 31.

Gulec, H. H., & Taskara, N. (2012). On the (s, t)-Pell and (s, t)-Pell–Lucas sequences and their matrix representations. *Applied Mathematics Letters, 25*(10), 1554-1559.

Halici, S., & Öz, S. (2018). On Gaussian Pell polynomials and their some properties. *Palestine Journal of Mathematics, 7*(1), 251-256.

Horadam, A. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly, 70*(3), 289-291.

Horadam, A. (1965). Generating functions for powers of a certain generalised sequence of numbers. *Duke Mathematical Journal, 32*(3), 437-446.

Horadam, A. (1971). Pell identities. *Duke Mathematical Journal, 9*(3), 245-252.

Horadam, A. (1994). Applications of modified Pell numbers to representations. *Ulam Quarterly, 3*(1), 34-53.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1991). Topics in matrix analysis *Cambridge university press*.

İpek, A. (2011). On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries. *Applied Mathematics Computation, 217*(12), 6011-6012.

Karner, H., Schneid, J., & Ueberhuber, C. W. (2003). Spectral decomposition of real circulant matrices. *Linear Algebra Its Applications, 367*, 301-311.

Kızılateş, C., & Tuglu, N. (2016). On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices. *Journal of Inequalities Applications 2016*(1), 312.

Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas numbers with applications*: Springer.

Merikoski, J. K., Haukkanen, P., Mattila, M., & Tossavainen, T. (2018). On the spectral and Frobenius norm of a generalized Fibonacci r-circulant matrix. *Special Matrices, 6*(1), 23-36.

Pacheenburawana, A., & Sintunavarat, W. (2018). On the spectral norms of r-circulant matrices with the Padovan and Perrin sequences. *Journal of Mathematical Analysis*, *9*(3).

Reix, T. J. p. (2005). Properties of Pell numbers modulo prime Fermat numbers.

Shen, S.-q., & Cen, J.-m. (2010). On the spectral norms of r-circulant matrices with the k-Fibonacci and k-Lucas numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sciences, 5*(12), 569-578.

Shen, S. (2012). On the norms of Toeplitz matrices involving k-Fibonacci and k-Lucas numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, *7*(8), 363-368.

Shen, S., & Cen, J. (2010). On the bounds for the norms of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computation, 216*(10), 2891-2897.

Solak, S. (2005). On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computation, 160*(1), 125-132.

Solak, S., & Bahşi, M. (2011). On the spectral norms of Hankel matrices with Fibonacci and Lucas numbers. *Selçuk Journal of Applied Mathematics*.

Solak, S., & Bahşi, M. (2016). On The Norms Of Circulant Matrices With The Complex Fibonacci And Lucas Numbers. *Gazi University Journal of Science, 29*(2), 487-490.

Türkmen, R., & Gökbaş, H. (2016). On the spectral norm of r-circulant matrices with the Pell and Pell-Lucas numbers. *Journal of Inequalities Applications 2016*(1), 65.

Uslu, K., Taskara, N., & Uygun, S. (2011). The relations among k-Fibonacci, k-Lucas and generalized k-Fibonacci numbers and the spectral norms of the matrices of involving these numbers. *Ars Combinatoria, 102*, 183-192.

Vasco, P., Catarino, P., Campos, H., Aires, A. P., & Borges, A. (2015). k-Pell, k-Pell-Lucas and modified k-Pell numbers: Some identities and norms of Hankel matrices. *CM-Centro de Matemática*.

Yagmur, T., & Karaaslan, N. (2018). Gaussian modified Pell sequence and Gaussian modified Pell polynomial sequence. *Aksaray University Journal of Science Engineering, 2*(1), 63-72.

Yalçiner, A. (2008). Spectral norms of some special circulant matrices. *Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3*(35), 1733-1738.

Yazlik, Y., & Taskara, N. (2012). Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving the generalized k-Horadam numbers. *Ars Combinatoria, 104*, 505-512.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Hasan GÖKBAŞ
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Konya / 1978
Telefon	**:**	0505 589 65 00
Faks	**:**	
e-mail	**:**	hgokbas@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2000**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2005**
Doktora	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2020**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
20	**MEB**	**Öğretmen**

UZMANLIK ALANI
Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER
İngilizce (YÖKDİL): 61,25

YAYINLAR
Gökbaş, H., Köse, H., 2018, "On the Norms of *r*-Hankel Matrices Involving Fibonacci and Lucas Numbers", Journal of Applied Mathematics and Physics, 2018(6), 31-39. (Doktora Tezinden Yapılmıştır).

Gökbaş, H., Köse, H., 2018, "On Complex *k*-Horadam and Gaussian *k*-Horadam Sequences", International Journal of Mathematics and Computer Science, 2018(6), 11, 1938-1942. (Doktora Tezinden Yapılmıştır).

Gökbaş, H., Türkmen, R., 2016, "On the Norms of *r*-Toeplitz Matrices Involving Fibonacci and Lucas Numbers", Advances in Linear Algebra&Matrix Theory, 2016(6), 31-39.

Gökbaş, H., Köse, H., 2017, “Some sum formulas for product of Pell and Pell-Lucas numbers”, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 4(4), 1-4.

Türkmen, R., Gökbaş, H., 2016, “On the spectral norm of *r*-circulant matrices with the Pell and Pell-Lucas numbers”, Journal of Inequalities and Applications, 2016(65), DOI 10.1186/s13660-016-0997-0.

Türkmen, R., Kan, O., Gökbaş, H., 2016, “Some Norm Inequalities For Special Gram Matrices”, Special Matrices, 2016(4), DOI 10.1515/spma-2016-0026.

Gökbaş, H., Erdoğan, A., 2016, “Matematik Öğretmen Adaylarının Fonksiyon Hakkındaki Kavramsal Yapıları”, Journal of Research in Education and Teaching, 5(3), 208-217.

Gökbaş, H., 2016, “Norm Of Hankel-Hessenberg and Toeplitz-Hessenberg Matrices Involving Pell and Pell-Lucas Numbers”, Journal Of Advances In Mathematics, 12(11), 6799-6806.

Türkmen, R., Kan, O., Gökbaş, H., “Some Norm Inequalities for Special Gram Matrices”, 5th International Conference on Matrix Analysis and Applications,
17-22 Aralık 2015, U.S.A.

Gökbaş, H., Erdoğan, A., “Matematik Öğretmen Adaylarının Fonksiyon Hakkındaki Kavramsal Yapıları”, 7th International Congress on New Trends Education,
13-15 Mayıs 2016, Antalya.

Gökbaş, H., Türkmen, R., “On The Norms Of Toeplitz and Hankel Matrices with Pell-Lucas Numbers”, 20th ILAS Conference, 11-15 Temmuz 2016, Ku Leuven.

Gökbaş, H., Köse, H., “On The Norms Of r-Hankel Matrices Involving Pell and Pell-Lucas Numbers”, 3th IRSYSC Congress, 24-26 Mayıs 2017, Konya.