T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3 BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA Q-ÇATIYA GÖRE EVOLÜSYONLA OLUŞTURULAN YÜZEYLER

Yunus YAVUZ

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2020
KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Yunus YAVUZ

03.07.2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

3 BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA Q-ÇATIYA GÖRE EVOLÜSYONLA OLUŞTURULAN YÜZEYLER

Yunus YAVUZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

2020, viii+56 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN
Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM
Doç. Dr. Tuncer ACAR

Bu tez 5 bölüm ve bir sonuç bölümünden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş, ikinci bölüm literatür özeti, üçüncü bölüm Minkowski uzayında eğri ve yüzeylerin temel tanım ve teoremleri, dördüncü bölüm ise materyal ve metod bölümünden oluşmaktadır. Tezin orijinal kısmı olan beşinci bölümde ise 3 boyutlu Minkowski uzayında kuasi çatıya göre evolüsyonla oluşturulan timelike yüzeyler oluşturulup bu yüzeylerin eğrilikleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Evolüsyon, Minkowski Uzayı, Timelike Yüzey, Q-Çatı

ABSTRACT

MS THESIS

ON SURFACES CONSTRUCTED BY EVOLUTION ACCORDING TO Q-FRAME IN MINKOWSKI 3-SPACE

Yunus YAVUZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

2020, viii+56 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN
Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM
Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR

This thesis consists of a result and five sections. First chapter talks about introduction, second chapter talks about summary of literature, third chapter is about basic definitions on surfaces in Minkowski space, fourth chapter deals with the material and method. Fifth chapter, which is the original part of this thesis, is about on surfaces constructed by evolution according to q-frame in Minkowski 3-space.

Keywords: Evolution, Minkowski Space, Timelike Surface, Q-Frame

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren, çalışmamın şekillenmesinde ilk günden itibaren ilgi ve alakasını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Arş. Gör. Aziz YAZLA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan babam Abdullah YAVUZ, annem Firdevsi YAVUZ'a ve çalışmam süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan eşim Halime YAVUZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yunus YAVUZ
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\boldsymbol{t}$: Bir α Eğrisinin Teğet Vektör Alanı

$\boldsymbol{N}$: Bir α Eğrisinin Birim Normal Vektör Alanı

$\boldsymbol{B}$: Bir α Eğrisinin Binormal Vektör Alanı

$\boldsymbol{n}_q$: Bir α Eğrisinin Kuasi Normal Vektör Alanı

$\boldsymbol{b}_q$: Bir α Eğrisinin Kuasi Binormal Vektör Alanı

k : İzdüşüm Vektörü

$\tilde{\boldsymbol{t}}_q$: Bir α Eğrisinin Teğetler Göstergesinin Evolüsyonuyla Oluşan Timelike Yüzey

$\tilde{\boldsymbol{n}}_q$: Bir α Eğrisinin Kuasi Normaller Göstergesinin Evolüsyonuyla Oluşan Timelike Yüzey

$\tilde{\boldsymbol{b}}_q$: Bir α Eğrisinin Kuasi Binormaller Göstergesinin Evolüsyonuyla Oluşan Timelike Yüzey

1. GİRİŞ

Klasik diferensiyel geometri eğri ve yüzeylerin özellikleri ile ilgilenir. Fakat son on yıllara kadar bu özelliklerle ilgili yapılan çalışmalarda zaman önemli bir rol oynamamıştır. Fakat son birkaç on yılda geometriciler zaman içerisinde evrilen şekilleri anlamada büyük aşama kat ettiler. Bir eğrinin veya bir yüzeyin evolüsyonu ile ilgili çeşitli yöntemler keşfedilmiştir (White, 2002). Bu yöntemlerle eğrilerin ve yüzeylerin evolüsyonlarının uygulandığı birçok alan vardır. Başlıca bilgisayar görüntüleme, bilgisayarlı animasyon ve görüntü işleme bu alanlara örnektir. Eğrilerin ve yüzeylerin evolüsyonlarının bir diğer uygulaması da fizik, kimya ve biyolojide şekillerin dinamiklerinin modellenmesidir. Bu modeller eğrilerin iç özelliklerinin fonksiyonları tarafından belirlenir (Abd-Ellah, 2015).

Geometrik olarak eğri ve yüzeylerin evolüsyonu bir eğri veya yüzeyi başka bir eğri veya yüzeye dönüştüren sürekli bir dönüşüm anlamına gelir. Eğrilerin ve yüzeylerin evolüsyonunu çalışmaktaki amaç evrilen eğri ve yüzeylerin son şeklini belirlemek ve evolüsyon işlemi esnasında eğri ve yüzeylerin invaryant geometrik özelliklerini bulmaktır. İntegrallenebilir denklemler ve eğrilerin geometrik hareketleri arasında bir ilişki vardır. Öyle ki birçok özel geometrik harekette evolüsyon denklemleri integrallenebilir denklemler yardımıyla tanımlanır (Abd-Ellah, 2015). Özel olarak 3-boyutlu Öklid uzayında eğri ve yüzeylerin hareketi genellikle integrallenebilir ve lineer olmayan evolüsyon denklemleri ile tanımlanır. Bazı integrallenebilir sistemler afin ve projektif geometri gibi belli geometrilerde invaryant eğri flowlarından ortaya çıkarlar (Hashimoto, 1972).

Bu tezde 3 boyutlu Minkowski uzayında küresel göstergelerin evolüsyonu ile oluşan timelike yüzeyler elde edilmiştir. Ayrıca MA Soliman, NH Abdel-All, RA Hussien (Soliman, Abdel-All, Hussien, & Youssef, 2018), tarafından yayımlanan makale tez çalışmamızda temel alınmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İntegrallenebilir denklemler ile eğrilerin hareketi arasındaki geometrik bağlantının, kaynağını, 1906 yılında (Da Rios, 1906) tarafından yapılan bir analizden aldığı söylenebilir. Da Rios, hareketli eğrileri üreten kısmi diferensiyel denklem elde etmiştir. Takao (Galdi, 1971), Da Rios denklemlerinin, meşhur lineer olmayan Schrödinger denklemini üretmek üzere dönüştürülebileceğini göstermiştir. Daha sonra 1977 yılında Lamb (Lamb Jr, 1977), eğrilerin hareketini, modifiye Korteweg-de Vries, Sine-Gordon ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri ile ilişkilendirmiştir. Lakshmanan (Lakshmanan, Ruijgrok, Th.W. and Thompson, C.J. 1976), bir uzay eğrisinin uzaysal hareketi yardımıyla Heisenberg spin zinciri denklemini elde etmiştir. Son zamanlarda, Santini ve Doliwa (Doliwa and Santini, 1994), inextensible eğrilerin hareketinin solitonik sistemlerle bağlantısını kurmuşlardır. Abd-Ellah (Abd-Ellah, 2015), 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin evolüsyonunu ve onların üreteç eğrilerini çalışmıştır, öteleme yüzeyleri için Christoffel sembollerini ve temel niceliklerin evolüsyon denklemlerini elde etmiştir. Hussien (Hussien & Mohamed, 2016), 3-boyutlu Öklid uzayında inextensible eğrilerin akışları yardımıyla genelleştirilmiş yüzeyleri çalışmışlardır ve inextensible eğrilerin hareketlerinden üretilen yüzeyleri oluşturarak grafiklerini çizmişlerdir. D. Y. Kwona ve F. C. Park [(Kwon and Park, 1999), (Kwon and Park, 2005)] elastik olmayan düzlemsel eğrileri, inextensible eğri akışlarını ve açılabilir regle yüzeylerini çalışmışlardır. Regle yüzeylerin akışını ve eğrilerin akışını üreten kısmi diferensiyel denklem elde etmişlerdir. Dariush Latifi ve Asadollah Razavi (Latifi and Razavi, 2008), inextensible eğri akışlarının, eğrilik ve burulmayı içeren bir kısmi diferensiyel denklem ile ifade edilmesi için gerekli ve yeterli koşulları elde etmişlerdir. T. Körpinar ve E. Turhan (Körpinar, Altay, and Turhan, 2011), 3-boyutlu Öklid uzayında tanjant açılabilir yüzeylerin inextensible akışlarını incelemişlerdir ve 3-boyutlu Öklid uzayında minimal tanjant açılabilir yüzeyler için sonuçlar elde etmişlerdir. R. Mukherjee and R. Balakrishnan (Mukherjee, and Balakrishnan, 2008), Sine-Gordon denklemi ile hareketli eğriler arasında ilişki kurmuşlardır ve Serret-Frenet denklemlerinin sayısal integrali yardımıyla eğrinin evolüsyonunu görselleştirmişlerdir.

Hashimoto (Hashimoto, 1972)'de 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisinin eğriliklerinin bir sisteminin integrallenebilir non-lineer Schrödinger denklemine eş olduğunu gösterdi. Schief and Rogers (Schief & Rogers, 1999)'de sabit eğrilik ve burulmaya sahip bir uzay eğrisinin binormal hareketini araştırdı. Abdel-All düzlemsel eğrilerin hareketiyle oluşan yeni geometrik modeller inşa etti. Ayrıca 3- boyutlu Öklid uzayında hareketli eğrilerin kinematiğini ve Hashimoto yüzeylerini inceledi, [(Abdel-All, Abdel-Razek, Abdel-Aziz& Khalil, 2011), (Abdel-All, Hussien & Youssef, 2012), (Abdel-All, Abdel-Razek, Abdel-Aziz & Khalil, 2014), (Abdel-All, Mohamed& Al-Dossary, 2014)]. Mohamed (Lakshmanan, Ruijgrok and Thompson, 1976)'de hiper küre üzerinde inextensible eğrilerin hareketini inceledi. Ek olarak eğrilerin hareketi 3-boyutlu Minkowski uzayında da çalışıldı. Örneğin Muniraja (Galdi, 1971)'de 3-boyutlu Minkowski uzayında uzay eğrilerinin hareketini, spin denklemlerini ve Schrödinger denklemlerini çalıştı. Nakayama [(Nakayama, 1998), (Nakayama, 1999)]’de hiperboloidlerde eğrilerin hareketini araştırdı.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında eğri ve yüzeylerin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Tanım 3.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i. ***Simetri:*** $g(u,v) = g(v,u)$,
ii. ***Bilineer:*** $g(au+bv, w) = ag(u,w) + bg(v,w)$,
$g(u, av+bw) = ag(u,v) + bg(w,u)$

koşullarını sağlıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde **simetrik bilineer form**dur denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2: V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.
g simetrik bilineer formuna,

i. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise **pozitif tanımlıdır,**
ii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise **negatif tanımlıdır,**
iii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \geq 0$ ise **yarı pozitif tanımlıdır,**
iv. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \leq 0$ ise **yarı negatif tanımlıdır**

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.3: V reel vektör uzayı ve V üzerinde

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik bilineer formu,

$$\forall w \in V \text{ için } g(v,w) = 0 \Rightarrow v = 0$$

şartını sağlıyorsa bu simetrik bilineer forma **non-dejenere**,

$$\forall w \in V \text{ için } g(v,w) = 0 \Rightarrow v \neq 0$$

şartını sağlıyorsa bu simetrik bilineer forma **dejenere** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4: V reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formunun **indeksi** denir ve q ile gösterilir. Ayrıca q ya V reel vektör uzayının indeksi de denir ve $ind\ V = q$ ile gösterilir (O'Neill, 1983; Duggal, 1996).

Dolayısıyla $1 \leq q \leq boy(V)$ dir. $q = 0$ olması için gerek ve yeter şart, g nin pozitif yarı tanımlı olmasıdır.

Tanım 3.5: V bir reel vektör uzayı olsun. Her bir $u, v \in V$ vektör çifti, $\langle u.v \rangle$ ile gösterilen bir reel sayıya karşılık gelsin. Bu fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa V üzerinde bir (reel) iç çarpım olarak adlandırılır:

i. ***(Lineerlik Özelliği):*** $\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle$.
ii. ***(Simetrik Özelliği):*** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
iii. ***(Pozitif Tanımlılık Özelliği):*** $\langle u, u \rangle \geq 0$; ve $\langle u, u \rangle = 0$ gerek yeter şart $u = 0$.

Bir iç çarpımla birlikte bu V vektör uzayına bir (reel) **iç çarpım uzayı** denir (Akkuş, 2016).

Teorem 3.1: V bir Lorentz uzayı ve W, V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

i. $g|_w$ pozitif tanımlı ise W ya **spacelike** alt uzay,
ii. $g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya **timelike** alt uzay,
iii. $g|_W$ dejenere ise W ya **lightlike** alt uzay

denir (O'Neill, 1983).

Teorem 3.2: V bir Lorentz uzayı, V nin bir alt uzayı W ve $boyW = 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler;

i. W bir timelike alt uzaydır,
ii. W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir,
iii. W uzayı bir tane timelike vektör içerir

(O'Neill, 1983).

Teorem 3.3: V Lorentz uzayı ve iki timelike vektör *v* ve *w* olsun. Bu durumda

$$\left|g(v,w)\right| \geq \|v\|.\|w\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve w vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

i. v, w timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g(v,w) = -\|v\|.\|w\|ch\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına, *v* ve *w* timelike vektörleri arasındaki **hiperbolik açı** denir.

ii. v, w vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$\left|g(v,w)\right| = \|v\|.\|w\|ch\varphi$$

dir (O'Neill, 1983).

Teorem 3.4: V Lorentz uzayında spacelike vektörleri *v* ve *w* olmak üzere

$$g(v,w) = \|v\|.\|w\|ch\varphi$$

olacak şekilde bir $0 \leq \varphi \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya, v ve w spacelike vektörleri arasındaki açı denir. v ve w spacelike vektörleri için

$$g(v,w) \leq \|v\|.\|w\|$$

eşitsizliği vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.6: Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli *(0,2)*-tipinde g tensör alanına bir metrik tensör denir. Başka bir ifadeyle g, M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skaler çarpımı karşılık getirir ve g skaler çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.7: $\mathbb{R}^3$, standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve

$$v_p = (v_1, v_2, v_3)\ , \quad w_p = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\mathbb{R}^3$$

olmak üzere

$$g : \left\langle v_p, w_p \right\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3$$

eşitliğiyle verilen *1*-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya $\mathbb{R}_1^3$ ***3*-boyutlu Minkowski uzayı** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.8: M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M,g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifold** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.9: M bir yarı-Riemann manifold olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun **indeksi** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.10: M bir yarı-Riemann manifold olsun. $boyM \geq 2$ ve M nin indeksi *1* ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.11: M Lorentz manifoldu olsun ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ bir eğri olsun. $\boldsymbol{T}$, α eğrisinin teğet vektör alanı olsun. Bu durumda

i. $g(\mathsf{T},\mathsf{T}) > 0$ ise α eğrisine **spacelike eğri**,

ii. $g(\mathsf{T},\mathsf{T}) < 0$ ise α eğrisine **timelike eğri**,

iii. $g(\mathsf{T},\mathsf{T}) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine **null eğri** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.12: M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, M nin bir altmanifoldu olsun. $j : \overline{M} \to M$ inclusion (içerme) dönüşümü olmak üzere $\forall p \in \overline{M}$ için

$$\left(j^*(g)\right)(p) = g\left(j(p)\right)$$

şeklinde tanımlı $j^*(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir **yarı-Riemann altmanifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.13: $\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$II : \overline{\chi}\left(\overline{M}\right) \times \overline{\chi}\left(\overline{M}\right) \to \overline{\chi}\left(\overline{M}\right)^{\perp}$$

$$\left(V,W\right) \to II\left(V,W\right) = norD_v W$$

dönüşümü $\Im\left(\overline{M}\right)$ - bilineer ve simetriktir. Burada II ye $\overline{M}$ nin **şekil tensörü (**veya ikinci temel form tensörü) denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.14: α, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $s \in I$ yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun. $a \leq s \leq b$ olmak üzere α eğrisinin a ve b noktaları arasındaki **yay uzunluğu**

$$s_\alpha = \int_a^b \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| ds = \int_a^b \|\mathbf{T}\| ds$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.15: $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör r ve t olsun. $r = (r_1, r_2, r_3)$ ve $t = (t_1, t_2, t_3)$ olmak üzere $\forall v \in \mathbb{R}_1^3$ için, $\langle r \wedge t, \mathrm{w} \rangle = \det(r, t, w)$ olacak şekilde tek $r \wedge t \in \mathbb{R}_1^3$ vektörüne r ve t nin **vektörel çarpımı** (veya dış çarpımı) denir ve $r \times t$ veya $r \wedge t$ biçiminde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olsun,

$$r \wedge t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}$$

olarak hesaplanabilir.
Burada $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ dır. Ayrıca saat yönünün tersi pozitif yön olarak ele alınmıştır (Lopez, 2008).

Teorem 3.5: $\mathbb{R}_1^3$, *3*- boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$ ve $r = (r_1, r_2, r_3)$ olsun. Bu durumda

i. $(p \wedge q) \wedge r = -\langle p, r \rangle q + \langle q, r \rangle p$,

ii. $\langle p \wedge q, p \rangle = 0$ ve $\langle p \wedge q, q \rangle = 0$,

iii. $\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = -\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle + (\langle p, q \rangle)^2$

dir (O'Neill, 1983).

Teorem 3.6: $\mathbb{R}_1^3$, *3*- boyutlu Minkowski uzayında iki vektör p ve q olsun. Bu durumda

i. p ve q spacelike vektör ise $p \wedge q$ vektörü timelikedir,
ii. p spacelike ve q timelike vektör ise ise $p \wedge q$ vektörü spacelikedir,
iii. p spacelike ve q null vektörler olsunlar, $\langle p,q \rangle = 0$ olmak üzere $p \wedge q$ null vektör, $\langle p,q \rangle \neq 0$ olmak üzere $p \wedge q$ spacelike vektördür,
iv. p ve q null vektör ise $p \wedge q$ spacelike vektördür,
v. p timelike ve q null vektör ise $p \wedge q$ spacelike vektördür,
vi. p ve q timelike vektör ise $p \wedge q$ spacelike vektördür

(O'Neill, 1983).

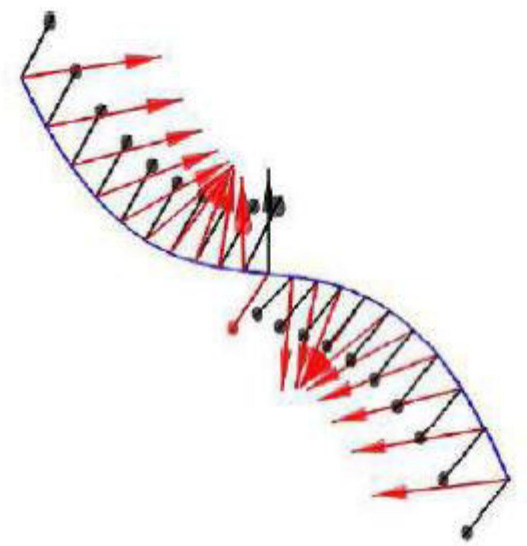
4. MATERYAL VE YÖNTEM

4.1. Öklid Uzayında Bir Eğri Boyunca Yönlü q – Çatı

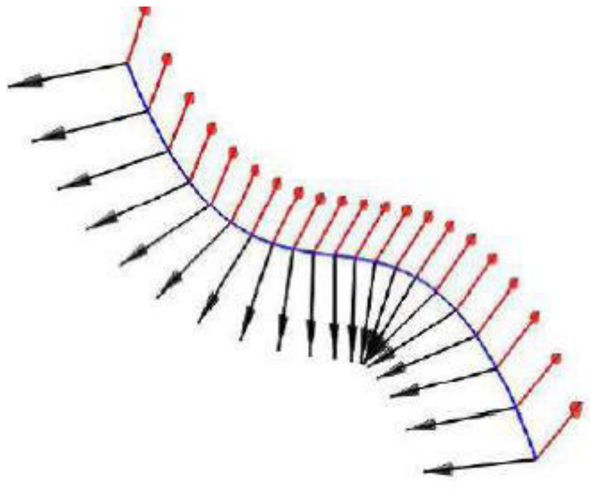
E^3 de bir uzay eğrisinin q-çatısı (Dede, 2015) tarafından tanımlanmıştır. q-çatının Frenet çatıya göre iki önemli avantajı bulunmaktadır. Bunlar;

i. İkinci türevi sıfır eğride tanımlanabilir,
ii. Teğet etrafında gereksiz bükülmeyi önler.

3 boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi boyunca Frenet çatı ile normal düzlem vektörleri arasındaki ilişki Şekil 4.1. de, aynı α eğrisi boyunca z-ekseni yönündeki q -çatısı için normal düzlem vektörleri Şekil 4.2. deki gibidir (Dede, 2015).



Şekil 4.1. Frenet Çatısı, (Tarım, 2016)



Şekil 4.2. q - Çatısı, (Tarım, 2016)

Tanım 4.1.1: $\boldsymbol{E}^3$ de bir eğri α ve $\boldsymbol{t}$ eğrinin teğetini, $\boldsymbol{n}_q$ eğrinin kuasi normalini ve $\boldsymbol{b}_q$ ise eğrinin kuasi binormalini göstermek üzere α uzay eğrisi boyunca yönlü q-çatı

$$\boldsymbol{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad \boldsymbol{n}_q = \frac{\boldsymbol{t} \wedge k}{\|\boldsymbol{t} \wedge k\|}, \quad \boldsymbol{b}_q = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}_q \tag{4.1}$$

dir. Burada k vektörüne izdüşüm vektörü denir ve k izdüşüm vektörü $\boldsymbol{t}$ teğet vektörüne paralel olmamalıdır. (Dede, 2015).

Teorem 4.1.1: 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri α , $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q\}$ bu eğrinin kuasi vektör alanı olsun. Buna göre q -çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

dir. Burada

$$k_1 = \frac{\langle \boldsymbol{t}', \boldsymbol{n}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, \quad k_2 = \frac{\langle \boldsymbol{t}', \boldsymbol{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, \quad k_3 = \frac{\langle \boldsymbol{n}_q', \boldsymbol{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|} \tag{4.3}$$

eğrinin q- eğrilikleridir. Buna göre Frenet çatısı ile $q-$çatısı arasında

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa \cos\theta, \\ k_2 &= -\kappa \sin\theta, \\ k_3 &= d\theta + \tau \end{aligned} \tag{4.5}$$

,

ve

$$\cos\theta = \frac{\det(\alpha'', \alpha', \kappa)}{\|\alpha' \wedge k\| \|\alpha''\|}$$

dir (Dede, 2016).

Teorem 4.1.2: 3-boyutlu Öklid uzayında düzgün bir eğri α olsun. Buna göre α eğrisinin türevleri ile $q-$ eğrilikleri arasında aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$k_1 = \frac{\det\left[\alpha'', \alpha', k\right]}{\left\|\alpha' \wedge k\right\| \left\|\alpha'\right\|^2},$$
$$k_2 = \frac{\left\langle \alpha', k\right\rangle \left\langle \alpha'', \alpha'\right\rangle - \left\|\alpha'\right\|^2 \left\langle \alpha'', k\right\rangle}{\left\|\alpha'\right\|^3 \left\|\alpha' \wedge k\right\|}, \tag{4.6}$$
$$k_3 = \frac{\left\langle \alpha', k\right\rangle \det\left[\alpha', \alpha'', k\right]}{\left\|\alpha' \wedge k\right\|^2 \left\|\alpha'\right\|^2}$$

(Dede, 2015).

Sonuç 4.1.1: 3- boyutlu Öklid uzayında bir eğri α ve k_1, k_2, k_3 ise bu eğrinin $q-$ eğrilikleri olsun. Buna göre k_1, k_2, k_3 $q-$eğrilikleri k izdüşüm vektörüne bağlıdır (Dede, 2015).

4.2. Timelike ve Spacelike Eğriler için $q-$Çatı

1. Durum: Normal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin *q*-Çatısı:

Teorem 4.2.1: $\mathbb{R}_1^3$ de $\boldsymbol{n}_q$ kuasi normal vektörü spacelike olan bir spacelike eğri (k vektörü timelike) için

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

dir. Burada

$$k_1 = \kappa \cosh\theta, \quad k_2 = \kappa \sinh\theta, \quad k_3 = -d\theta - \tau \tag{4.8}$$

elde edilir (Tarım, 2016).

2. Durum: Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Eğrilerin *q*- Çatısı:

Teorem 4.2.2: $\mathbb{R}_1^3$ de $\boldsymbol{n}_q$ kuasi normal vektörü spacelike olan bir spacelike eğri (k vektörü timelike) için

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}'_q \\ \boldsymbol{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

dir. Burada

$$k_1 = \kappa \sinh\theta, \quad k_2 = \kappa \cosh\theta, \quad k_3 = d\theta + \tau \tag{4.10}$$

şeklinde ifade edilir (Tarım, 2016).

3. Durum: Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Eğrilerin *q*-Çatısı:

Teorem 4.2.3: $\mathbb{R}_1^3$ de $\boldsymbol{n}_q$ kuasi normal vektörü timelike olan bir spacelike eğri (k vektörü spacelike) için

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}'_q \\ \boldsymbol{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

dir. Burada

$$k_1 = -\kappa \cosh\theta, \quad k_2 = -\kappa \sinh\theta \quad k_3 = d\theta + \tau \tag{4.12}$$

elde edilir (Tarım, 2016).

4. Durum: Normal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin *q*-Çatısı:

Teorem 4.2.4: $\mathbb{R}_1^3$ de $\boldsymbol{n}_q$ kuasi normal vektörü timelike olan bir spacelike eğri (k vektörü spacelike) için

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}'_q \\ \boldsymbol{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

dir. Burada

$$k_1 = \kappa \sinh\theta, \quad k_2 = -\kappa \cosh\theta \quad k_3 = -d\theta - \tau \tag{4.14}$$

elde edilir (Tarım, 2016).

5. Durum: Timelike Eğrilerin *q*- Çatısı:

Teorem 4.2.5: $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike eğri (k vektörü spacelike) için

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

dir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \cos\theta, \quad k_2 = -\kappa \sin\theta \quad k_3 = d\theta + \tau \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$k_1 = -\frac{\det\left[\alpha'', \alpha', k\right]}{\left\|\alpha' \wedge k\right\| \left\|\alpha'\right\|^2},$$

$$k_2 = \frac{-\left\langle \alpha', k\right\rangle \left\langle \alpha'', \alpha'\right\rangle + \left\|\alpha'\right\|^2 \left\langle \alpha'', k\right\rangle}{\left\|\alpha'\right\|^3 \left\|\alpha' \wedge k\right\|}, \tag{4.17}$$

$$k_3 = \frac{\left\langle \alpha', k\right\rangle \det\left[\alpha', \alpha'', k\right]}{\left\|\alpha' \wedge k\right\|^2 \left\|\alpha'\right\|^2}$$

dir (Tarım, 2016).

Teorem 4.2.6: $\mathbb{R}_1^3$ de düzgün bir spacelike eğri $\alpha(t)$ olsun. Bu durumda q- eğrilikleri $\alpha(t)$ eğrisinin türevleri cinsinden

$$k_1 = -\frac{\det\left[\alpha'', \alpha', k\right]}{\left\|\alpha' \wedge k\right\| \left\|\alpha'\right\|^2},$$

$$k_2 = \frac{-\left\langle \alpha', k\right\rangle \left\langle \alpha'', \alpha'\right\rangle + \left\|\alpha'\right\|^2 \left\langle \alpha'', k\right\rangle}{\left\|\alpha'\right\|^3 \left\|\alpha' \wedge k\right\|}, \tag{4.18}$$

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det\left[\alpha', \alpha'', k\right]}{\left\|\alpha' \wedge k\right\|^2 \left\|\alpha'\right\|^2}$$

olarak elde edilir (Tarım, 2016).

5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde 3 boyutlu Minkowski uzayında kuasi çatıya göre timelike ve spacelike eğrilerin farklı durumlarına göre evolüsyonuyla timelike yüzeyleri oluşturulacaktır. Daha sonra oluşturulan bu timelike yüzeylerin eğrilikleri hesaplanacaktır.

5.1. Time Evolüsyon Denklemleri

Teorem 5.1.1: Spacelike izdüşüm vektörüne sahip bir timelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial s} = \frac{\partial k_1}{\partial t} - \mu_3 k_2 + k_3 \mu_2,$$
$$\frac{\partial \mu_2}{\partial s} = \mu_3 k_1 - k_3 \mu_1 + \frac{\partial k_2}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \mu_3}{\partial s} = \mu_2 k_1 - k_2 \mu_1 + \frac{\partial k_3}{\partial t}$$

dır.

İspat: $\alpha,$ spacelike izdüşüm vektörüne sahip bir timelike eğri olsun. Bu durumda (4.15) eşitliği gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

yazılabilir. Bu durumda (5.1) ve (5.2) eşitlikleri

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_1 \boldsymbol{n}_q + \mu_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial \mu_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q + \mu_1\left(k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \mu_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + \mu_2\left(k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial s} - \mu_2 k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\mu_1 k_3 + \frac{\partial \mu_2}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_1 \boldsymbol{n}_q + k_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + k_1\left(\mu_1\boldsymbol{t} + \mu_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(\mu_2\boldsymbol{t} - \mu_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1\mu_1 + k_2\mu_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial k_1}{\partial t} - k_2\mu_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_1\mu_3 + \frac{\partial k_2}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_1 \boldsymbol{t} + \mu_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial \mu_1}{\partial s}\boldsymbol{t} + \mu_1\left(k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \mu_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + \mu_3\left(k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial s} + \mu_3 k_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\mu_1 k_1 - \mu_3 k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\mu_1 k_2 + \frac{\partial \mu_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_1 \boldsymbol{t} + k_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t} + k_1\left(\mu_1\boldsymbol{n}_q + \mu_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_3\left(\mu_2\boldsymbol{t} - \mu_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_3\mu_2\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1\mu_1 - k_3\mu_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_1\mu_2 + \frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_2 \boldsymbol{t} - \mu_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \frac{\partial \mu_2}{\partial s}\boldsymbol{t} + \mu_2\left(k_1 \boldsymbol{n}_q + k_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial \mu_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q - \mu_3\left(k_1 \boldsymbol{t} + k_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial s} - \mu_3 k_1\right)\boldsymbol{t} + \left(\mu_2 k_1 - \frac{\partial \mu_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\mu_2 k_2 - \mu_3 k_3\right)\boldsymbol{b}_q,
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_2 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t} + k_2\left(\mu_1 \boldsymbol{n}_q + \mu_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - k_3\left(\mu_1 \boldsymbol{t} + \mu_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_3 \mu_1\right)\boldsymbol{t} + \left(k_2 \mu_1 - \frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_2 \mu_2 - k_3 \mu_3\right)\boldsymbol{b}_q,
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (5.3) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$
\begin{bmatrix}
0 & \frac{\partial \mu_1}{\partial s} - \mu_2 k_3 - \frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2 \mu_3 & \mu_1 k_3 + \frac{\partial \mu_2}{\partial s} - k_1 \mu_3 - \frac{\partial k_2}{\partial t} \\
\frac{\partial \mu_1}{\partial s} + \mu_3 k_2 - \frac{\partial k_1}{\partial t} + k_3 \mu_2 & 0 & \mu_1 k_2 + \frac{\partial \mu_3}{\partial s} - k_1 \mu_2 - \frac{\partial k_3}{\partial t} \\
\frac{\partial \mu_2}{\partial s} + \mu_3 k_1 - \frac{\partial k_2}{\partial t} + k_3 \mu & \mu_2 k_1 - \frac{\partial \mu_3}{\partial s} - k_2 \mu_1 + \frac{\partial k_3}{\partial t} & 0
\end{bmatrix} = \left[0\right]_{3\times 3} \tag{5.10}
$$

bulunur. Buna göre spacelike izdüşüm vektörüne sahip bir timelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mu_1}{\partial s} &= \frac{\partial k_1}{\partial t} - \mu_3 k_2 + k_3 \mu_2, \\
\frac{\partial \mu_2}{\partial s} &= \mu_3 k_1 - k_3 \mu_1 + \frac{\partial k_2}{\partial t}, \\
\frac{\partial \mu_3}{\partial s} &= \mu_2 k_1 - k_2 \mu_1 + \frac{\partial k_3}{\partial t}
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.1.2: İzdüşüm vektörü timelike, normal vektörü spacelike, binormal vektörü timelike olan spacelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s}=\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2\lambda_3-\lambda_2 k_3,$$
$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial s}=\lambda_3 k_1+\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3\lambda_1,$$
$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial s}=\lambda_1 k_2-k_1\lambda_2+\frac{\partial k_3}{\partial t}$$

dir.

İspat: α, spacelike normal, timelike izdüşüm vektörüne sahip bir spacelike eğri olsun. Bu durumda (4.7) eşitliği gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k_1 & -k_2\\ -k_1 & 0 & -k_3\\ -k_2 & -k_3 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \lambda_1 & -\lambda_2\\ -\lambda_1 & 0 & -\lambda_3\\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix} \tag{5.13}$$

yazılabilir. Bu durumda (5.12) ve (5.13) eşitlikleri

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix}$$

eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial t}\right)&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda_1\boldsymbol{n}_q-\lambda_2\boldsymbol{b}_q\right)\\ &=\frac{\partial \lambda_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q+\lambda_1\left(-k_1\boldsymbol{t}-k_3\boldsymbol{b}_q\right)-\frac{\partial \lambda_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q-\lambda_2\left(-k_2\boldsymbol{t}-k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &=\left(-\lambda_1k_1+\lambda_2k_2\right)\boldsymbol{t}+\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial s}+\lambda_2k_3\right)\boldsymbol{n}_q+\left(-\lambda_1k_3-\frac{\partial \lambda_2}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_1 \boldsymbol{n}_q - k_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + k_1\left(-\lambda_1 \boldsymbol{t} - \lambda_3 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q - k_2\left(-\lambda_2 \boldsymbol{t} - \lambda_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial k_1}{\partial s} + k_2\lambda_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1\lambda_3 - \frac{\partial k_2}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\lambda_1 \boldsymbol{t} - \lambda_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial \lambda_1}{\partial s}\boldsymbol{t} - \lambda_1\left(k_1 \boldsymbol{n}_q - k_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial \lambda_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q - \lambda_3\left(-k_2 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} + \lambda_3 k_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\lambda_1 k_1 + \lambda_3 k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\lambda_1 k_2 - \frac{\partial \lambda_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_1\left(\lambda_1 \boldsymbol{n}_q - \lambda_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q - k_3\left(-\lambda_2 \boldsymbol{t} - \lambda_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_3\lambda_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1\lambda_1 + k_3\lambda_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_1\lambda_2 - \frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\lambda_2 \boldsymbol{t} - \lambda_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= -\frac{\partial \lambda_2}{\partial s}\boldsymbol{t} - \lambda_2\left(k_1 \boldsymbol{n}_q - k_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial \lambda_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q - \lambda_3\left(-k_1 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \left(-\frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + \lambda_3 k_1\right)\boldsymbol{t} + \left(-\lambda_2 k_1 - \frac{\partial \lambda_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_2 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= -\frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_2\left(\lambda_1 \boldsymbol{n}_q - \lambda_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - k_3\left(-\lambda_1 \boldsymbol{t} - \lambda_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \left(-\frac{\partial k_2}{\partial t} + k_3\lambda_1\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_2\lambda_1 - \frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (5.3) de göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\lambda_1}{\partial s}+\lambda_2k_3-\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2\lambda_3 & -\lambda_1k_3-\frac{\partial\lambda_2}{\partial s}+k_1\lambda_3+\frac{\partial k_2}{\partial t} \\ -\frac{\partial\lambda_1}{\partial s}+\lambda_3k_2+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_3\lambda_2 & 0 & \lambda_1k_2-\frac{\partial\lambda_3}{\partial s}-k_1\lambda_2+\frac{\partial k_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial\lambda_2}{\partial s}+\lambda_3k_1+\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3\lambda_1 & -\lambda_2k_1-\frac{\partial\lambda_3}{\partial s}+k_2\lambda_1+\frac{\partial k_3}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}=[0]_{3\times3}, \quad (5.20)$$

bulunur. Buna göre timelike izdüşüm vektörü, spacelike birim normale sahip spacelike eğrinin uyumluluk koşulu

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda_1}{\partial s}&=\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2\lambda_3-\lambda_2k_3, \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial s}&=\lambda_3k_1+\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3\lambda_1, \\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial s}&=\lambda_1k_2-k_1\lambda_2+\frac{\partial k_3}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.21)$$

dir.

Teorem 5.1.3: İzdüşüm vektörü timelike, normal vektörü timelike, binormal vektörü spacelike olan spacelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial s}&=\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2v_3-k_3v_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial s}&=k_1v_3+\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3v_1, \\ \frac{\partial v_3}{\partial s}&=\frac{\partial k_3}{\partial t}+k_2v_1-k_1v_2 \end{aligned}$$

dir.

İspat: α, timelike birim normal ve timelike izdüşüm vektörüne sahip bir spacelike eğri olsun. Bu durumda (4.9) eşitliği gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & -v \\ -v_1 & 0 & -v_3 \\ -v_2 & -v_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

yazılabilir. Bu durumda (5.22) ve (5.23) eşitlikleri

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}$$

eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(v_1 \boldsymbol{n}_q - v_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q + v_1\left(-k_1 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial v_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q - v_2\left(-k_2 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-k_1 v_1 + k_2 \upsilon_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + k_3 v_2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_3 v_1 - \frac{\partial v_2}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_1 \boldsymbol{n}_q - k_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= \frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + k_1\left(-v_1 \boldsymbol{t} - v_3 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q - k_2\left(-v_2 \boldsymbol{t} - v_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-k_1 v_1 + k_2 v_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2 v_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1 v_3 - \frac{\partial k_2}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\upsilon_1 \boldsymbol{t} - \upsilon_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial \upsilon_1}{\partial s}\boldsymbol{t} - \upsilon_1\left(k_1 \boldsymbol{n}_q - k_2 \boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q - \upsilon_3\left(-k_2 \boldsymbol{t} - k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-\frac{\partial \upsilon_1}{\partial s} + k_2 \upsilon_3\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1 \upsilon_1 - k_3 \upsilon_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_2 \upsilon_1 - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial s}\right)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1\boldsymbol{t}-k_3\boldsymbol{b}_q\right)\\&=-\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t}-k_1\left(v_1\boldsymbol{n}_q-v_2\boldsymbol{b}_q\right)-\frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q-k_3\left(-v_2\boldsymbol{t}-v_3\boldsymbol{n}_q\right)\\&=\left(-\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_3v_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1v_1+k_3v_3\right)\boldsymbol{n}_q+\left(k_1v_2-\frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial t}\right)&=\frac{\partial}{\partial s}\left(-v_2\boldsymbol{t}-v_3\boldsymbol{n}_q\right)\\&=-\frac{\partial v_2}{\partial s}\boldsymbol{t}-v_2\left(k_1\boldsymbol{n}_q-k_2\boldsymbol{b}_q\right)-\frac{\partial v_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q-v_3\left(-k_1\boldsymbol{t}-k_3\boldsymbol{b}_q\right)\\&=\left(-\frac{\partial v_2}{\partial s}+k_1v_3\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1v_2-\frac{\partial v_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q+\left(k_2v_2+k_3v_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial s}\right)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_2\boldsymbol{t}-k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\&=-\frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t}-k_2\left(v_1\boldsymbol{n}_q-v_2\boldsymbol{b}_q\right)-\frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q-k_3\left(-v_1\boldsymbol{t}-v_3\boldsymbol{b}_q\right)\\&=\left(-\frac{\partial k_2}{\partial t}+k_3v_1\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_2v_1-\frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{n}_q+\left(k_2v_2+k_3v_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.29}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (5.3) de göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial s}+k_3v_2-\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2v_3 & -k_3v_1-\frac{\partial v_2}{\partial s}+k_1v_3+\frac{\partial k_2}{\partial t} \\ -\frac{\partial v_1}{\partial s}-k_2v_3+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_3v_2 & 0 & k_2v_1-\frac{\partial v_3}{\partial s}-k_1v_2+\frac{\partial k_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial v_2}{\partial s}+k_1v_3+\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3v_1 & -k_1v_2-\frac{\partial v_3}{\partial s}+k_2v_1+\frac{\partial k_3}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}=\left[0\right]_{3\times 3}, \tag{5.30}$$

bulunur. Buna göre timelike izdüşüm vektörü, timelike birim normale sahip spacelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial s}&=\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2v_3-k_3v_2,\\\frac{\partial v_2}{\partial s}&=k_1v_3+\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3v_1,\\\frac{\partial v_3}{\partial s}&=\frac{\partial k_3}{\partial t}+k_2v_1-k_1v_2\end{aligned} \tag{5.31}$$

dir.

Teorem 5.1.4: İzdüşüm vektörü spacelike, normal vektörü timelike, binormal vektörü spacelike olan spacelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial s} = \frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2\delta_3 - k_3\delta_2,$$
$$\frac{\partial\delta_2}{\partial s} = \frac{\partial k_2}{\partial t} + k_3\delta_1 - k_1\delta_3,$$
$$\frac{\partial\delta_3}{\partial s} = \frac{\partial k_3}{\partial t} + k_1\delta_2 - k_2\delta_1$$

dir.

İspat: α, spacelike izdüşüm vektörü ve timelike birim normale sahip bir spacelike eğri olsun. Bu durumda (4.11) gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}, \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_1 & \delta_2 \\ -\delta_1 & 0 & \delta_3 \\ -\delta_2 & \delta_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

yazılabilir. Bu durumda (5.32) ve (5.33) eşitlikleri

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}$$

eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\delta_1\boldsymbol{n}_q + \delta_2\boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial\delta_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q - \delta_1\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial\delta_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + \delta_2\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1\delta_1 - k_2\delta_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial\delta_1}{\partial s} + k_3\delta_2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_3\delta_1 + \frac{\partial\delta_2}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right)\\ &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - k_1\left(-\delta_1\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(-\delta_2\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(k_1\delta_1 - k_2\delta_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2\delta_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_1\delta_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\delta_1\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right)\\ &= -\frac{\partial \delta_1}{\partial s}\boldsymbol{t} - \delta_1\left(-k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \delta_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + \delta_3\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(-\frac{\partial \delta_1}{\partial s} - k_2\delta_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1\delta_1 + k_3\delta_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\delta_1 k_2 + \frac{\partial \delta_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right)\\ &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_1\left(-\delta_1\boldsymbol{n}_q + \delta_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_3\left(-\delta_2\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_3\delta_2\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1\delta_1 + k_3\delta_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1\delta_2 + \frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\delta_2\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= -\frac{\partial \delta_2}{\partial s}\boldsymbol{t} - \delta_2\left(-k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \delta_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q + \delta_3\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(-\frac{\partial \delta_2}{\partial s} - k_1\delta_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1\delta_2 + \frac{\partial \delta_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_2\delta_2 + k_3\delta_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= -\frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_2\left(-\delta_1\boldsymbol{n}_q + \delta_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + k_3\left(-\delta_1\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right)\\ &= \left(-\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_3\delta_1\right)\boldsymbol{t} + \left(k_2\delta_1 + \frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_2\delta_2 + k_3\delta_3\right)\boldsymbol{b}_q,\end{aligned} \tag{5.39}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (5.3) de göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \delta_1}{\partial s}+k_3\delta_2+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_2\delta_3 & -\frac{\partial \delta_2}{\partial s}-k_3\delta_1-\frac{\partial k_2}{\partial t}+k_1\delta_3 \\ -\frac{\partial \delta_1}{\partial s}+k_1\delta_3+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_3\delta_2 & 0 & -k_2\delta_1+\frac{\partial \delta_3}{\partial s}+k_1\delta_2+\frac{\partial k_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial \delta_2}{\partial s}-k_1\delta_3+\frac{\partial k_2}{\partial t}+k_3\delta_1 & k_1\delta_2+\frac{\partial \delta_3}{\partial s}-k_2\delta_1-\frac{\partial k_3}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}=\left[0\right]_{3\times 3}, \quad (5.40)$$

bulunur. Buna göre spacelike izdüşüm vektörü ve timelike birim normale sahip α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_1}{\partial s}&=\frac{\partial k_1}{\partial t}+k_2\delta_3-k_3\delta_2, \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial s}&=\frac{\partial k_2}{\partial t}+k_3\delta_1-k_1\delta_3, \\ \frac{\partial \delta_3}{\partial s}&=\frac{\partial k_3}{\partial t}+k_1\delta_2-k_2\delta_1 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Teorem 5.1.5: İzdüşüm vektörü spacelike, normal vektörü spacelike, binormal vektörü timelike olan spacelike α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial s}&=k_3\rho_2+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_2\rho_3, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial s}&=-k_1\rho_3+\frac{\partial k_2}{\partial t}+k_3\rho_1, \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial s}&=k_2\rho_1-k_1\rho_2+\frac{\partial k_3}{\partial t} \end{aligned}$$

dır.

İspat: α, spacelike izdüşüm vektörü ve spacelike birim normale sahip bir spacelike eğri olsun. Bu durumda (4.13) gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_1 & \rho_2 \\ -\rho_1 & 0 & \rho_3 \\ -\rho_2 & \rho_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

yazılabilir. Bu durumda (5.42) ve (5.43) eşitlikleri

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}$$

eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\rho_1 \boldsymbol{n}_q + \rho_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial \rho_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q - \rho_1\left(-k_1 \boldsymbol{t} + k_3 \boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \rho_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + \rho_2\left(-k_2 \boldsymbol{t} + k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1\rho_1 - k_2\rho_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial \rho_1}{\partial s} + k_3\rho_2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_3\rho_1 + \frac{\partial \rho_2}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1 \boldsymbol{n}_q + k_2 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - k_1\left(-\rho_1 \boldsymbol{t} + \rho_3 \boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(-\rho_2 \boldsymbol{t} + \rho_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1\rho_1 - k_2\rho_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2\rho_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1\rho_3 + \frac{\partial k_2}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\rho_1 \boldsymbol{t} + \rho_3 \boldsymbol{b}_q\right) \\ &= -\frac{\partial \rho_1}{\partial s}\boldsymbol{t} - \rho_1\left(-k_1 \boldsymbol{n}_q + k_2 \boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \rho_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + \rho_3\left(-k_2 \boldsymbol{t} + k_3 \boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-\frac{\partial \rho_1}{\partial s} - k_2\rho_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1\rho_1 + k_3\rho_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_2\rho_1 + \frac{\partial \rho_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_q}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_3\boldsymbol{b}_q\right)$$
$$=-\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t}-k_1\left(-\rho_1\boldsymbol{n}_q+\rho_2\boldsymbol{b}_q\right)+\frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q+k_3\left(-\rho_2\boldsymbol{t}+\rho_3\boldsymbol{n}_q\right) \tag{5.47}$$
$$=\left(-\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_3\rho_2\right)\boldsymbol{t}+\left(k_1\rho_1+k_3\rho_3\right)\boldsymbol{n}_q+\left(-k_1\rho_2+\frac{\partial k_3}{\partial t}\right)\boldsymbol{b}_q,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(-\rho_2\boldsymbol{t}+\rho_3\boldsymbol{n}_q\right)$$
$$=-\frac{\partial \rho_2}{\partial s}\boldsymbol{t}-\rho_2\left(-k_1\boldsymbol{n}_q+k_2\boldsymbol{b}_q\right)+\frac{\partial \rho_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q+\rho_3\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_3\boldsymbol{b}_q\right) \tag{5.48}$$
$$=\left(-\frac{\partial \rho_2}{\partial s}-k_1\rho_3\right)\boldsymbol{t}+\left(k_1\rho_2+\frac{\partial \rho_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q+\left(-k_2\rho_2+k_3\rho_3\right)\boldsymbol{b}_q,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_q}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_2\boldsymbol{t}+k_3\boldsymbol{n}_q\right)$$
$$=-\frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t}-k_2\left(-\rho_1\boldsymbol{n}_q+\rho_2\boldsymbol{b}_q\right)+\frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q+k_3\left(-\rho_1\boldsymbol{t}+\rho_3\boldsymbol{b}_q\right) \tag{5.49}$$
$$=\left(-\frac{\partial k_2}{\partial t}-k_3\rho_1\right)\boldsymbol{t}+\left(\frac{\partial k_3}{\partial t}+k_2\rho_1\right)\boldsymbol{n}_q+\left(-k_2\rho_2+k_3\rho_3\right)\boldsymbol{b}_q$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler (5.3) de göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \rho_1}{\partial s}+k_3\rho_2+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_2\rho_3 & -k_3\rho_1+\frac{\partial \rho_2}{\partial s}+k_1\rho_3-\frac{\partial k_2}{\partial t} \\ -\frac{\partial \rho_1}{\partial s}-k_2\rho_3+\frac{\partial k_1}{\partial t}-k_3\rho_2 & 0 & -k_2\rho_1+\frac{\partial \rho_3}{\partial s}+k_1\rho_2-\frac{\partial k_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial \rho_2}{\partial s}-k_1\rho_3+\frac{\partial k_2}{\partial t}+k_3\rho_1 & k_1\rho_2+\frac{\partial \rho_3}{\partial s}-\frac{\partial k_3}{\partial t}-k_2\rho_1 & 0 \end{bmatrix}=[0]_{3\times 3}, \tag{5.50}$$

bulunur. Buna göre spacelike izdüşüm vektörü ve timelike binormale sahip α eğrisinin uyumluluk koşulu

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial s} = k_3\rho_2 + \frac{\partial k_1}{\partial t} - k_2\rho_3,$$
$$\frac{\partial \rho_2}{\partial s} = -k_1\rho_3 + \frac{\partial k_2}{\partial t} + k_3\rho_1,$$
$$\frac{\partial \rho_3}{\partial s} = k_2\rho_1 - k_1\rho_2 + \frac{\partial k_3}{\partial t}$$

dır.

5.2. Bir Uzay Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Evolüsyonlarıyla Oluşturulan Timelike Yüzeyler

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ uzayında teğetler göstergesi, kuasi normaller göstergesi ve kuasi binormaller göstergesinin evolüsyonlarıyla oluşturulan timelike yüzeyler ele alınmıştır.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3$ yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş bir uzay eğrisi ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q\}$ da bu eğrinin kuasi çatısı olsun. Ayrıca $\mathbb{R}_1^3$ uzayında sırasıyla

$$\alpha_1(s) = \boldsymbol{t}(s)$$
$$\alpha_2(s) = \boldsymbol{n}_q(s)$$
$$\alpha_3(s) = \boldsymbol{b}_q(s)$$

şekilde tanımlı eğriler sırasıyla α eğrisinin teğetler göstergesi, kuasi normaller göstergesi ve kuasi binormal göstergesi denir.

5.2.1 Teğetler Göstergesini Kullanarak Oluşturulan Timelike Yüzeyler

$\alpha_1(s) = \boldsymbol{t}(s)$, α eğrisinin teğetler göstergesinin evolüsyonlarıyla oluşturulan yüzeylerin denklemi

$$\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t) \tag{5.51}$$

dır.

Teorem 5.2.1.1: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı spacelike ve k izdüşüm vektörü timelike olsun (Kuasi normal vektörü spacelike, kuasi binormal vektörü timelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_1\lambda_2 - k_2\lambda_1 > 0$ olsun. Buna

göre $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_1 Gauss eğriliği, H_1 ortalama eğriliği ve k_{11} ve k_{21} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_1 = 1,\ H_1 = -1,\ k_{11} = -1,\ k_{21} = -1$$

dir.

İspat: $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned} \psi_s &= k_1\boldsymbol{n}_q - k_2\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_t &= \lambda_1\boldsymbol{n}_q - \lambda_2\boldsymbol{b}_q \end{aligned} \tag{5.52}$$

dir. (5.52) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \psi_s \wedge \psi_t &= k_1\lambda_2\boldsymbol{t} - k_2\lambda_1\boldsymbol{t} \\ &= \left(k_1\lambda_2 - k_2\lambda_1\right)\boldsymbol{t} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_1\lambda_2 - k_2\lambda_1 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} N_\psi &= \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\left\|\psi_s \wedge \psi_t\right\|} \\ &= \boldsymbol{t} \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \psi_{ss} &= \left(k_1\right)_s \boldsymbol{n}_q + k_1\left(-k_1\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{b}_q\right) - \left(k_2\right)_s \boldsymbol{b}_q - k_2\left(-k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-k_1^2 + k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(k_1\right)_s + k_2k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1k_3 - \left(k_2\right)_s\right)\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_{st} &= \left(k_1\right)_t \boldsymbol{n}_q + k_1\left(-\lambda_1\boldsymbol{t} - \lambda_3\boldsymbol{b}_q\right) - \left(k_2\right)_t \boldsymbol{b}_q - k_2\left(-\lambda_2\boldsymbol{t} - \lambda_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(k_1\right)_t + k_2\lambda_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1\lambda_3 - \left(k_2\right)_t\right)\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_{tt} &= \left(\lambda_1\right)_t \boldsymbol{n}_q + \lambda_1\left(-\lambda_1\boldsymbol{t} - \lambda_3\boldsymbol{b}_q\right) - \left(\lambda_2\right)_t \boldsymbol{b}_q - \lambda_2\left(-\lambda_2\boldsymbol{t} + \lambda_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(\lambda_1\right)_t + \lambda_2\lambda_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\left(\lambda_2\right)_t - \lambda_1\lambda_3\right)\boldsymbol{b}_q \end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \psi_s, \psi_s \rangle \\
&= k_1^2 - k_2^2, \\
g_{12} &= \langle \psi_s, \psi_t \rangle \\
&= k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2, \\
g_{22} &= \langle \psi_t, \psi_t \rangle \\
&= \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \\
\ell_{11} &= \langle \psi_{ss}, N_\psi \rangle \\
&= -k_1^2 + k_2^2, \\
\ell_{12} &= \langle \psi_{st}, N_\psi \rangle \\
&= -k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2, \\
\ell_{22} &= \langle \psi_{tt}, N_\psi \rangle \\
&= -\lambda_1^2 + \lambda_2^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_1 = \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 1,$$

ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \\
&= \frac{\left(-k_1^2 + k_2^2\right)\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) + 2\left(-k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2\right)^2 + \left(-\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\left(k_1^2 - k_2^2\right)}{2\left[\left(k_1^2 - k_2^2\right)\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) - \left(k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2\right)^2\right]} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

asli eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_{11} &= H_1 + \sqrt{H_1^2 - K_1} = -1, \\
k_{21} &= H_1 - \sqrt{H_1^2 - K_1} = -1
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 5.2.1.2: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü timelike olsun (Kuasi normal vektörü spacelike, kuasi binormal vektörü timelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_1v_2 - k_2v_1 > 0$ olsun. Buna

göre $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_1 Gauss eğriliği, H_1 ortalama eğriliği ve k_{11} ve k_{21} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_1 = 1,\ \ H_1 = -1,\ \ k_{11} = -1,\ \ k_{21} = -1$$

dir.

İspat: $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned}\psi_s &= k_1\boldsymbol{n}_q - k_2\boldsymbol{b}_q,\\ \psi_t &= v_1\boldsymbol{n}_q - v_2\boldsymbol{b}_q\end{aligned} \tag{5.53}$$

dir. (5.53) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\psi_s \wedge \psi_t &= k_1v_2\boldsymbol{t} - k_2v_1\boldsymbol{t}\\ &= \left(k_1v_2 - k_2v_1\right)\boldsymbol{t}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_1v_2 - k_2v_1 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}N_\psi &= \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\left\|\psi_s \wedge \psi_t\right\|}\\ &= \boldsymbol{t}\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\psi_{ss} &= \left(k_1\right)_s\boldsymbol{n}_q + k_1\left(-k_1\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{b}_q\right) - \left(k_2\right)_s\boldsymbol{b}_q - k_2\left(-k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(-k_1^2 + k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(k_1\right)_s + k_2k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1k_3 - \left(k_2\right)_s\right)\boldsymbol{b}_q,\\ \psi_{st} &= \left(k_1\right)_t\boldsymbol{n}_q + k_1\left(-v_1\boldsymbol{t} - v_3\boldsymbol{b}_q\right) - \left(k_2\right)_t\boldsymbol{b}_q - k_2\left(-v_2\boldsymbol{t} - v_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(-k_1v_1 + k_2v_2\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(k_1\right)_t + k_2v_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-k_1v_3 - \left(k_2\right)_t\right)\boldsymbol{b}_q,\\ \psi_{tt} &= \left(v_1\right)_t\boldsymbol{n}_q + v_1\left(-v_1\boldsymbol{t} - v_3\boldsymbol{b}_q\right) - \left(v_2\right)_t\boldsymbol{b}_q - v_2\left(-v_2\boldsymbol{t} + v_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(-v_1^2 + v_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(v_1\right)_t + v_2v_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\left(v_2\right)_t - v_1v_3\right)\boldsymbol{b}_q\end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \psi_s, \psi_s \rangle \\
&= k_1^2 - k_2^2, \\
g_{12} &= \langle \psi_s, \psi_t \rangle \\
&= k_1 v_1 - k_2 v_2, \\
g_{22} &= \langle \psi_t, \psi_t \rangle \\
&= v_1^2 - v_2^2, \\
\ell_{11} &= \langle \psi_{ss}, N_\psi \rangle \\
&= -k_1^2 + k_2^2, \\
\ell_{12} &= \langle \psi_{st}, N_\psi \rangle \\
&= -k_1 v_1 + k_2 v_2, \\
\ell_{22} &= \langle \psi_{tt}, N_\psi \rangle \\
&= -v_1^2 + v_2^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$
K_1 = \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 1,
$$

ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \\
&= \frac{\left(-k_1^2 + k_2^2\right)\left(v_1^2 - v_2^2\right) + 2\left(-k_1 v_1 + k_2 v_2\right)^2 + \left(-v_1^2 + v_2^2\right)\left(k_1^2 - k_2^2\right)}{2\left[\left(k_1^2 - k_2^2\right)\left(v_1^2 - v_2^2\right) - \left(k_1 v_1 - k_2 v_2\right)^2\right]} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

asli eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_{11} &= H_1 + \sqrt{H_1^2 - K_1} = -1, \\
k_{21} &= H_1 - \sqrt{H_1^2 - K_1} = -1
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 5.2.1.3: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü spacelike olsun (Kuasi normal vektörü timelike, kuasi binormal vektörü spacelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_1\delta_2 - k_2\delta_1 > 0$ olsun. Buna

göre $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_1 Gauss eğriliği, H_1 ortalama eğriliği ve k_{11} ve k_{21} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_1 = 1,\ H_1 = -1,\ k_{11} = -1,\ k_{21} = -1$$

dir.

İspat: $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned} \psi_s &= -k_1 \boldsymbol{n}_q + k_2 \boldsymbol{b}_q, \\ \psi_t &= -\delta_1 \boldsymbol{n}_q + \delta_2 \boldsymbol{b}_q \end{aligned} \tag{5.54}$$

dir. (5.54) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \psi_s \wedge \psi_t &= k_1\delta_2 \boldsymbol{t} - k_2\delta_1 \boldsymbol{t} \\ &= \left(k_1\delta_2 - k_2\delta_1\right)\boldsymbol{t} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_1\delta_2 - k_2\delta_1 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} N_\psi &= \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\left\|\psi_s \wedge \psi_t\right\|} \\ &= \boldsymbol{t} \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \psi_{ss} &= -\frac{\partial k_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q - k_1\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial k_1}{\partial s} + k_2k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\frac{\partial k_2}{\partial s} - k_1k_3\right)\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_{st} &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - k_1\left(-\delta_1\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(-\delta_2\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1\delta_1 - k_2\delta_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2\delta_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_1\delta_3\right)\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_{tt} &= -\frac{\partial \delta_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - \delta_1\left(-\delta_1\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \delta_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + \delta_2\left(-\delta_2\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \delta_2\delta_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\frac{\partial \delta_2}{\partial t} - \delta_1\delta_3\right)\boldsymbol{b}_q \end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \psi_s, \psi_s \rangle \\
&= -k_1^2 + k_2^2, \\
g_{12} &= \langle \psi_s, \psi_t \rangle \\
&= -k_1\delta_1 + k_2\delta_2, \\
g_{22} &= \langle \psi_t, \psi_t \rangle \\
&= -\delta_1^2 + \delta_2^2, \\
\ell_{11} &= \langle \psi_{ss}, N_\psi \rangle \\
&= k_1^2 - k_2^2, \\
\ell_{12} &= \langle \psi_{st}, N_\psi \rangle \\
&= k_1\delta_1 - k_2\delta_2, \\
\ell_{22} &= \langle \psi_{tt}, N_\psi \rangle \\
&= \delta_1^2 - \delta_2^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\
&= \frac{\left(-k_1^2 - k_2^2\right)\left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right) - \left(k_1\delta_1 - k_2\delta_2\right)^2}{\left(-k_1^2 + k_2^2\right)\left(-\delta_1^2 + \delta_2^2\right) - \left(-k_1\delta_1 + k_2\delta_2\right)^2} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \\
&= \frac{\left(k_1^2 - k_2^2\right)\left(-\delta_1^2 + \delta_2^2\right) + 2\left(k_1\delta_1 - k_2\delta_2\right)^2 + \left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right)\left(-k_1^2 + k_2^2\right)}{2\left[\left(-k_1^2 + k_2^2\right)\left(-\delta_1^2 + \delta_2^2\right) - \left(-k_1\delta_1 + k_2\delta_2\right)^2\right]} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

asli eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_{11} &= H_1 + \sqrt{H_1^2 - K_1} = -1, \\
k_{21} &= H_1 - \sqrt{H_1^2 - K_1} = -1
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 5.2.1.4: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{B}$ Frenet normal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü spacelike olsun (Kuasi normal vektörü timelike, kuasi binormal vektörü spacelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_1\rho_2 - k_2\rho_1 > 0$ olsun. Buna göre $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_1 Gauss eğriliği, H_1 ortalama eğriliği ve k_{11} ve k_{21} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_1 = 1,\ H_1 = -1,\ k_{11} = -1,\ k_{21} = -1$$

dir.

İspat: $\psi = \tilde{\boldsymbol{t}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned} \psi_s &= -k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_t &= -\rho_1\boldsymbol{n}_q + \rho_2\boldsymbol{b}_q \end{aligned} \tag{5.55}$$

dir. (5.55) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \psi_s \wedge \psi_t &= k_1\rho_2\boldsymbol{t} - k_2\rho_1\boldsymbol{t} \\ &= \left(k_1\rho_2 - k_2\rho_1\right)\boldsymbol{t} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_1\rho_2 - k_2\rho_1 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} N_\psi &= \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\left\|\psi_s \wedge \psi_t\right\|} \\ &= \boldsymbol{t} \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \psi_{ss} &= -\frac{\partial k_1}{\partial s}\boldsymbol{n}_q - k_1\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial s}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial k_1}{\partial s} + k_2k_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\frac{\partial k_2}{\partial s} - k_1k_3\right)\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_{st} &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - k_1\left(-\rho_1\boldsymbol{t} + \rho_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + k_2\left(-\rho_2\boldsymbol{t} + \rho_3\boldsymbol{n}_q\right) \\ &= \left(k_1\rho_1 - k_2\rho_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_2\rho_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_1\rho_3\right)\boldsymbol{b}_q, \\ \psi_{tt} &= -\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\boldsymbol{n}_q - \rho_1\left(-\rho_1\boldsymbol{t} + \rho_3\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \rho_2}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + \delta_2\left(-\rho_2\boldsymbol{t} + \rho_3\boldsymbol{n}_q\right) \end{aligned}$$

$$=\left(\rho_1^2-\rho_2^2\right)\boldsymbol{t}+\left(-\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_2\rho_3\right)\boldsymbol{n}_q+\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial t}-\rho_1\rho_3\right)\boldsymbol{b}_q$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
g_{11}&=\langle\psi_s,\psi_s\rangle\\
&=-k_1^2+k_2^2,\\
g_{12}&=\langle\psi_s,\psi_t\rangle\\
&=-k_1\rho_1+k_2\rho_2,\\
g_{22}&=\langle\psi_t,\psi_t\rangle\\
&=-\rho_1^2+\rho_2^2,\\
\ell_{11}&=\langle\psi_{ss},N_\psi\rangle\\
&=k_1^2-k_2^2,\\
\ell_{12}&=\langle\psi_{st},N_\psi\rangle\\
&=k_1\rho_1-k_2\rho_2,\\
\ell_{22}&=\langle\psi_{tt},N_\psi\rangle\\
&=\rho_1^2-\rho_2^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_1=\frac{\ell_{11}\ell_{22}-\ell_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=1,$$

ortalama eğriliği

$$H_1=\frac{\ell_{11}g_{22}-2\ell_{12}g_{12}+\ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)}=-1,$$

asli eğrilikleri

$$\begin{aligned}
k_{11}&=H_1+\sqrt{H_1^2-K_1}=-1,\\
k_{21}&=H_1-\sqrt{H_1^2-K_1}=-1
\end{aligned}$$

dir.

5.2.2 Kuasi Normaller Göstergesini Kullanarak Oluşturulan Timelike Yüzeyler

$\alpha_2(s)=\boldsymbol{n}_q(s)$, α eğrisinin kuasi normaller göstergesinin evolüsyonlarıyla oluşturulan yüzeylerin denklemi

$$\phi=\tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t) \tag{5.56}$$

dır.

Teorem 5.2.2.1: $\mathbb{R}^3_1$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı spacelike ve k izdüşüm vektörü timelike olsun (Kuasi normal vektörü spacelike, kuasi binormal vektörü timelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_1\lambda_3-k_3\lambda_1>0$ olsun. Buna göre $\phi=\tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_2 Gauss eğriliği, H_2 ortalama eğriliği ve k_{12} ve k_{22} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_2=1,\ H_2=-1,\ k_{12}=-1,\ k_{22}=-1$$

dir.

İspat: $\phi=\tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned}\phi_s&=-k_1\boldsymbol{t}-k_3\boldsymbol{b}_q,\\ \phi_t&=-\lambda_1\boldsymbol{t}-\lambda_3\boldsymbol{b}_q\end{aligned} \tag{5.57}$$

dir. (5.57) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\phi_s\wedge\phi_t&=k_1\lambda_3\boldsymbol{n}_q-k_3\lambda_1\boldsymbol{n}_q\\ &=\left(k_1\lambda_3-k_3\lambda_1\right)\boldsymbol{n}_q\end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_1\lambda_3-k_3\lambda_1>0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}N_\phi&=\frac{\phi_s\wedge\phi_t}{\|\phi_s\wedge\phi_t\|}\\ &=\boldsymbol{n}_q\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$
\begin{aligned}
\phi_{ss} &= -\frac{\partial k_1}{\partial s}\boldsymbol{t} - k_1\left(k_1\boldsymbol{n}_q - k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q - k_3\left(-k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_1}{\partial s} + k_2k_3\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1^2 + k_3^2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_1k_2 - \frac{\partial k_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\phi_{st} &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_1\left(\lambda_1\boldsymbol{n}_q - \lambda_2\boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q - k_3\left(-\lambda_2\boldsymbol{t} - \lambda_3\boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_3\lambda_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1\lambda_1 + k_3\lambda_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\frac{\partial k_3}{\partial t} + k_1\lambda_2\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\phi_{tt} &= -\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}\boldsymbol{t} - \lambda_1\left(\lambda_1\boldsymbol{n}_q - \lambda_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + \lambda_3\left(-\lambda_2\boldsymbol{t} - \lambda_3\boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \lambda_2\lambda_3\right)\boldsymbol{t} + \left(-\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} + \lambda_1\lambda_2\right)\boldsymbol{b}_q
\end{aligned}
$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \phi_s, \phi_s \right\rangle \\
&= k_1^2 - k_3^2, \\
g_{12} &= \left\langle \phi_s, \phi_t \right\rangle \\
&= k_1\lambda_1 - k_3\lambda_3, \\
g_{22} &= \left\langle \phi_t, \phi_t \right\rangle \\
&= \lambda_1^2 - \lambda_3^2, \\
\ell_{11} &= \left\langle \phi_{ss}, N_\phi \right\rangle \\
&= -k_1^2 + k_3^2, \\
\ell_{12} &= \left\langle \phi_{st}, N_\phi \right\rangle \\
&= -k_1\lambda_1 - k_3\lambda_3, \\
\ell_{22} &= \left\langle \phi_{tt}, N_\phi \right\rangle \\
&= -\lambda_1^2 + \lambda_3^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\
&= \frac{\left(-k_1^2 + k_3^2\right)\left(-\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right) - \left(-k_1\lambda_1 + k_3\lambda_3\right)^2}{\left(k_1^2 - k_3^2\right)\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right) - \left(k_1\lambda_1 - k_3\lambda_3\right)^2} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H_2 &= \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \\
&= \frac{\left(-k_1^2 + k_3^2\right)\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right) + 2\left(-k_1\lambda_1 - k_3\lambda_3\right)^2 + \left(-\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right)\left(k_1^2 - k_3^2\right)}{2\left[\left(k_1^2 - k_3^2\right)\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right) - \left(k_1\lambda_1 - k_3\lambda_3\right)^2\right]} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

asli eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_{21} &= H_2 + \sqrt{H_2^2 - K_2} = -1, \\
k_{22} &= H_2 - \sqrt{H_2^2 - K_2} = -1
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 5.2.2.2: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü timelike olsun (Kuasi normal vektörü spacelike, kuasi binormal vektörü timelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_1 v_3 - k_3 v_1 > 0$ olsun. Buna göre $\phi = \tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_2 Gauss eğriliği, H_2 ortalama eğriliği ve k_{12} ve k_{22} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_2 = 1,\ H_2 = -1,\ k_{12} = -1,\ k_{22} = -1$$

dir.

İspat: $\phi = \tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$
\begin{aligned}
\phi_s &= -k_1\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{b}_q, \\
\phi_t &= -v_1\boldsymbol{t} - v_3\boldsymbol{b}_q
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

dir. (5.58) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
\phi_s \wedge \phi_t &= k_1 v_3 \boldsymbol{n}_q - k_3 v_1 \boldsymbol{n}_q \\
&= \left(k_1 v_3 - k_3 v_1\right)\boldsymbol{n}_q
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$k_1 v_3 - k_3 v_1 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$N_\phi = \frac{\phi_s \wedge \phi_t}{\|\phi_s \wedge \phi_t\|} \\ = \boldsymbol{n}_q$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\phi_{ss} &= -\frac{\partial k_1}{\partial s}\boldsymbol{t} - k_1\left(k_1\boldsymbol{n}_q - k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial s}\boldsymbol{b}_q - k_3\left(-k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_1}{\partial s} + k_2k_3\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1^2 + k_3^2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_1k_2 - \frac{\partial k_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\phi_{st} &= -\frac{\partial k_1}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_1\left(v_1\boldsymbol{n}_q - v_2\boldsymbol{b}_q\right) - \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q - k_3\left(-v_2\boldsymbol{t} - v_3\boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_1}{\partial t} + k_3v_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1v_1 + k_3v_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\frac{\partial k_3}{\partial t} + k_1v_2\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\phi_{tt} &= -\frac{\partial v_1}{\partial t}\boldsymbol{t} - v_1\left(v_1\boldsymbol{n}_q - v_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial v_3}{\partial t}\boldsymbol{b}_q + v_3\left(-v_2\boldsymbol{t} - v_3\boldsymbol{n}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_2v_3\right)\boldsymbol{t} + \left(-v_1^2 + v_3^2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(-\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1v_2\right)\boldsymbol{b}_q
\end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\
&= k_1^2 - k_3^2, \\
g_{12} &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle \\
&= k_1v_1 - k_3v_3, \\
g_{22} &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle \\
&= v_1^2 - v_3^2, \\
\ell_{11} &= \langle \phi_{ss}, N_\phi \rangle \\
&= -k_1^2 + k_3^2, \\
\ell_{12} &= \langle \phi_{st}, N_\phi \rangle \\
&= -k_1v_1 - k_3v_3, \\
\ell_{22} &= \langle \phi_{tt}, N_\phi \rangle \\
&= -v_1^2 + v_3^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_2 = \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$
$$= \frac{\left(-k_1^2 + k_3^2\right)\left(-v_1^2 + v_3^2\right) - \left(-k_1v_1 + k_3v_3\right)^2}{\left(k_1^2 - k_3^2\right)\left(v_1^2 - v_3^2\right) - \left(k_1v_1 - k_3v_3\right)^2}$$
$$= 1,$$

ortalama eğriliği

$$H_2 = \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)}$$
$$= \frac{\left(-k_1^2 + k_3^2\right)\left(v_1^2 - v_3^2\right) + 2\left(-k_1v_1 - k_3v_3\right)^2 + \left(-v_1^2 + v_3^2\right)\left(k_1^2 - k_3^2\right)}{2\left[\left(k_1^2 - k_3^2\right)\left(v_1^2 - v_3^2\right) - \left(k_1v_1 - k_3v_3\right)^2\right]}$$
$$= -1,$$

asli eğrilikleri

$$k_{21} = H_2 + \sqrt{H_2^2 - K_2} = -1,$$
$$k_{22} = H_2 - \sqrt{H_2^2 - K_2} = -1$$

dir.

Teorem 5.2.2.3: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir timelike eğri ve α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü timelike olsun (Kuasi normal vektörü spacelike, kuasi binormal vektörü spacelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_3\mu_1 - k_1\mu_3 > 0$ olsun. Buna göre $\phi = \tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_2 Gauss eğriliği, H_2 ortalama eğriliği ve k_{12} ve k_{22} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_2 = 1,\ \ H_2 = -1,\ \ k_{12} = -1,\ \ k_{22} = -1$$

dir.

İspat: $\phi = \tilde{\boldsymbol{n}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\phi_s = k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q,$$
$$\phi_t = \mu_1\boldsymbol{t} + \mu_3\boldsymbol{b}_q \qquad (5.59)$$

dir. (5.59) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\phi_s \wedge \phi_t &= \left(k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) \wedge \left(\mu_1\boldsymbol{t} + \mu_3\boldsymbol{b}_q\right)\\ &= k_1\mu_3\left(-\boldsymbol{n}_q\right) + \left(k_3\mu_1\right)\boldsymbol{n}_q\\ &= \left(k_3\mu_1 - k_1\mu_3\right)\boldsymbol{n}_q\end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_3\mu_1 - k_1\mu_3 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}N_\phi &= \frac{\phi_s \wedge \phi_t}{\left\|\phi_s \wedge \phi_t\right\|}\\ &= \boldsymbol{n}_q\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\phi_{ss} &= \left(k_1\right)_s \boldsymbol{t} + k_1\left(k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \left(k_3\right)_s \boldsymbol{b}_q + k_3\left(k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(\left(k_1\right)_s + k_2k_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1^2 - k_3^2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\left(k_3\right)_s + k_1k_2\right)\boldsymbol{b}_q,\\ \phi_{tt} &= \left(\mu_1\right)_t \boldsymbol{t} + \mu_1\left(\mu_1\boldsymbol{n}_q + \mu_2\boldsymbol{b}_q\right) + \left(\mu_3\right)_t \boldsymbol{b}_q + \mu_3\left(\mu_2\boldsymbol{t} - \mu_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(\left(\mu_1\right)_t + \mu_2\mu_3\right)\boldsymbol{t} + \left(\mu_1^2 - \mu_3^2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\mu_1\mu_2 + \left(\mu_3\right)_t\right)\boldsymbol{b}_q,\\ \phi_{st} &= \left(k_1\right)_t \boldsymbol{t} + k_1\left(\mu_1\boldsymbol{n}_q + \mu_2\boldsymbol{b}_q\right) + \left(k_3\right)_t \boldsymbol{b}_q + k_3\left(\mu_2\boldsymbol{t} - \mu_3\boldsymbol{n}_q\right)\\ &= \left(\left(k_1\right)_t + k_3\mu_2\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1\mu_1 - k_3\mu_3\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_1\mu_2 + \left(k_3\right)_t\right)\boldsymbol{b}_q\end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}g_{11} &= \left\langle \phi_s, \phi_s \right\rangle\\ &= -k_1^2 + k_3^2,\\ g_{12} &= \left\langle \phi_s, \phi_t \right\rangle\\ &= -k_1\mu_1 + k_3\mu_3,\\ g_{22} &= \left\langle \phi_t, \phi_t \right\rangle\\ &= -\mu_1^2 + \mu_3^2,\\ \ell_{11} &= \left\langle \phi_{ss}, N_\phi \right\rangle\\ &= k_1^2 - k_3^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ell_{12} &= \left\langle \phi_{st}, N_{\phi} \right\rangle \\
&= k_1\mu_1 - k_3\mu_3, \\
\ell_{22} &= \left\langle \phi_{tt}, N_{\phi} \right\rangle \\
&= \mu_1^2 - \mu_3^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\
&= \frac{\left(k_1^2 - k_3^2\right)\left(\mu_1^2 - \mu_3^2\right) - \left(k_1\mu_1 - k_3\mu_3\right)^2}{\left(-k_1^2 + k_3^2\right)\left(-\mu_1^2 + \mu_3^2\right) - \left(-k_1\mu_1 + k_3\mu_3\right)^2} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H_2 &= \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \\
&= \frac{\left(k_1^2 - k_3^2\right)\left(-\mu_1^2 + \mu_3^2\right) + 2\left(k_1\mu_1 - k_3\mu_3\right)^2 + \left(\mu_1^2 - \mu_3^2\right)\left(-k_1^2 + k_3^2\right)}{2\left[\left(-k_1^2 + k_3^2\right)\left(-\mu_1^2 + \mu_3^2\right) - \left(-k_1\mu_1 + k_3\mu_3\right)^2\right]} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

asli eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_{12} &= H_2 + \sqrt{H_2^2 - K_2} = -1, \\
k_{22} &= H_2 - \sqrt{H_2^2 - K_2} = -1
\end{aligned}
$$

dir.

5.2.3 Kuasi Binormaller Göstergesini Kullanarak Oluşturulan Timelike Yüzeyler

$\alpha_3(s) = \boldsymbol{b}_q(s)$, α eğrisinin kuasi binormaller göstergesinin evolüsyonlarıyla oluşturulan yüzeylerin denklemi

$$\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t) \tag{5.60}$$

dır.

Teorem 5.2.3.1: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{N}$ Frenet normal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü spacelike olsun (Kuasi normal vektörü timelike, kuasi binormal vektörü spacelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_2\delta_3 - k_3\delta_2 > 0$ olsun. Buna göre $\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_3 Gauss eğriliği, H_3 ortalama eğriliği ve k_{13} ve k_{23} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_3 = 1,\ H_3 = -1,\ k_{13} = -1,\ k_{23} = -1$$

dir.

İspat: $\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned}\varphi_s &= -k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q \\ \varphi_t &= -\delta_2\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{n}_q\end{aligned} \tag{5.61}$$

dir. (5.61) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\varphi_s \wedge \varphi_t &= k_2\delta_3\boldsymbol{b}_q - k_3\delta_2\boldsymbol{b}_q \\ &= \left(k_2\delta_3 - k_3\delta_2\right)\boldsymbol{b}_q\end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_2\delta_3 - k_3\delta_2 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \frac{\varphi_s \wedge \varphi_t}{\left\|\varphi_s \wedge \varphi_t\right\|} \\ &= \boldsymbol{b}_q\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_{ss} &= -\frac{\partial k_2}{\partial s}\boldsymbol{t} - k_2\left(-k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q + k_3\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_2}{\partial s} - k_1k_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1k_2 + \frac{\partial k_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_3^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\varphi_{st} &= -\frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_2\left(-\delta_1\boldsymbol{n}_q + \delta_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + k_3\left(-\delta_1\boldsymbol{t}_q + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_3\delta_1\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial k_3}{\partial t} + k_2\delta_1\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_3\delta_3 - k_2\delta_2\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\varphi_{tt} &= -\frac{\partial \delta_2}{\partial t}\boldsymbol{t} - \delta_2\left(-\delta_1\boldsymbol{n}_q + \delta_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \delta_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + \delta_3\left(-\delta_1\boldsymbol{t} + \delta_3\boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial \delta_2}{\partial t} - \delta_3\delta_1\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial \delta_3}{\partial t} + \delta_1\delta_2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\delta_3^2 - \delta_2^2\right)\boldsymbol{b}_q
\end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \varphi_s, \varphi_s \right\rangle \\
&= k_2^2 - k_3^2, \\
g_{12} &= \left\langle \varphi_s, \varphi_t \right\rangle \\
&= k_2\delta_2 - k_3\delta_3, \\
g_{22} &= \left\langle \varphi_t, \varphi_t \right\rangle \\
&= \delta_2^2 - \delta_3^2, \\
\ell_{11} &= \left\langle \varphi_{ss}, N_\varphi \right\rangle \\
&= k_3^2 - k_2^2, \\
\ell_{12} &= \left\langle \varphi_{st}, N_\varphi \right\rangle \\
&= k_3\delta_3 - k_2\delta_2, \\
\ell_{22} &= \left\langle \varphi_{tt}, N_\varphi \right\rangle \\
&= \delta_3^2 - \delta_2^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_3 = \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 1,$$

ortalama eğriliği

$$H_3 = \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} = -1,$$

asli eğrilikleri

$$k_{13} = H_3 + \sqrt{H_3^2 - K_3} = -1,$$
$$k_{23} = H_3 - \sqrt{H_3^2 - K_3} = -1$$

dir.

Teorem 5.2.3.2: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir spacelike eğri, α nın $\boldsymbol{B}$ Frenet binormal vektör alanı timelike ve k izdüşüm vektörü spacelike olsun (Kuasi normal vektörü timelike, kuasi binormal vektörü spacelike). Ayrıca kabul edelim ki $k_2\rho_3 - k_3\rho_2 > 0$ olsun. Buna göre $\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_3 Gauss eğriliği, H_3 ortalama eğriliği ve k_{13} ve k_{23} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_3 = 1,\ H_3 = -1,\ k_{13} = -1,\ k_{23} = -1$$

dir.

İspat: $\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned}\varphi_s &= -k_2\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{n}_q \\ \varphi_t &= -\rho_2\boldsymbol{t} + \rho_3\boldsymbol{n}_q\end{aligned} \tag{5.62}$$

dir. (5.62) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\varphi_s \wedge \varphi_t &= k_2\rho_3\boldsymbol{b}_q - k_3\rho_2\boldsymbol{b}_q \\ &= \left(k_2\rho_3 - k_3\rho_2\right)\boldsymbol{b}_q\end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_2\rho_3 - k_3\rho_2 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \frac{\varphi_s \wedge \varphi_t}{\left\|\varphi_s \wedge \varphi_t\right\|} \\ &= \boldsymbol{b}_q\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_{ss} &= -\frac{\partial k_2}{\partial s}\boldsymbol{t} - k_2\left(-k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial s}\boldsymbol{n}_q + k_3\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_3\boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_2}{\partial s} - k_1k_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1k_2 + \frac{\partial k_3}{\partial s}\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_3^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\varphi_{st} &= -\frac{\partial k_2}{\partial t}\boldsymbol{t} - k_2\left(-\rho_1\boldsymbol{n}_q + \rho_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial k_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + k_3\left(-\rho_1\boldsymbol{t}_q + \rho_3\boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial k_2}{\partial t} - k_3\rho_1\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial k_3}{\partial t} + k_2\rho_1\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_3\rho_3 - k_2\rho_2\right)\boldsymbol{b}_q, \\
\varphi_{tt} &= -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}\boldsymbol{t} - \rho_2\left(-\rho_1\boldsymbol{n}_q + \rho_2\boldsymbol{b}_q\right) + \frac{\partial \rho_3}{\partial t}\boldsymbol{n}_q + \rho_3\left(-\rho_1\boldsymbol{t} + \rho_3\boldsymbol{b}_q\right) \\
&= \left(-\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \rho_3\rho_1\right)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \rho_1\rho_2\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)\boldsymbol{b}_q
\end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle \\
&= k_2^2 - k_3^2, \\
g_{12} &= \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle \\
&= k_2\rho_2 - k_3\rho_3, \\
g_{22} &= \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle \\
&= \rho_2^2 - \rho_3^2, \\
\ell_{11} &= \langle \varphi_{ss}, N_\varphi \rangle \\
&= k_3^2 - k_2^2, \\
\ell_{12} &= \langle \varphi_{st}, N_\varphi \rangle \\
&= k_3\rho_3 - k_2\rho_2, \\
\ell_{22} &= \langle \varphi_{tt}, N_\varphi \rangle \\
&= \rho_3^2 - \rho_2^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_3 = \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 1,$$

ortalama eğriliği

$$H_3 = \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} = -1,$$

asli eğrilikleri

$$k_{13} = H_3 + \sqrt{H_3^2 - K_3} = -1,$$
$$k_{23} = H_3 - \sqrt{H_3^2 - K_3} = -1$$

dir.

Teorem 5.2.3.3: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir timelike eğri ve k izdüşüm vektörü spacelike olsun. Ayrıca kabul edelim ki $k_2\mu_3 - k_3\mu_2 > 0$ olsun (Kuasi normal vektörü spacelike, kuasi binormal vektörü spacelike). Buna göre $\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t)$ yüzeyinin K_3 Gauss eğriliği, H_3 ortalama eğriliği ve k_{13} ve k_{23} asli eğrilikleri sırasıyla,

$$K_3 = 1,\ H_3 = -1,\ k_{13} = -1,\ k_{23} = -1$$

dir.

İspat: $\varphi = \tilde{\boldsymbol{b}}_q(s,t)$ yüzeyinin s ve t parametrelerine göre kısmi türevi

$$\begin{aligned} \varphi_s &= k_2\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{n}_q \\ \varphi_t &= \mu_2\boldsymbol{t} - \mu_3\boldsymbol{n}_q \end{aligned} \tag{5.63}$$

dir. (5.63) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \varphi_s \wedge \varphi_t &= k_2\mu_3\boldsymbol{b}_q - k_3\mu_2\boldsymbol{b}_q \\ &= \left(k_2\mu_3 - k_3\mu_2\right)\boldsymbol{b}_q \end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_2\mu_3 - k_3\mu_2 > 0$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\varphi_s \wedge \varphi_t}{\left\|\varphi_s \wedge \varphi_t\right\|} \\ &= \boldsymbol{b}_q \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_{ss} &= (k_2)_s\,\boldsymbol{t} + k_2\left(k_1\boldsymbol{n}_q + k_2\boldsymbol{b}_q\right) - (k_3)_s\,\boldsymbol{n}_q + k_3\left(k_1\boldsymbol{t} - k_3\boldsymbol{b}_q\right)\\
&= \left((k_2)_s + k_1k_3\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1k_2 - (k_3)_s\right)\boldsymbol{n}_q + \left(k_2^2 - k_3^2\right)\boldsymbol{b}_q,\\
\varphi_{tt} &= (\mu_2)_t\,\boldsymbol{t} + \mu_2\left(\mu_1\boldsymbol{n}_q + \mu_2\boldsymbol{b}_q\right) - (\mu_3)_t\,\boldsymbol{n}_q - \mu_3\left(\mu_1\boldsymbol{t} - \mu_3\boldsymbol{b}_q\right)\\
&= \left((\mu_2)_t - \mu_1\mu_3\right)\boldsymbol{t} + \left(\mu_1\mu_2 - (\mu_3)_t\right)\boldsymbol{n}_q + \left(\mu_2^2 - \mu_3^2\right)\boldsymbol{b}_q,\\
\phi_{st} &= (k_2)_t\,\boldsymbol{t} + k_2\left(\mu_1\boldsymbol{n}_q + \mu_2\boldsymbol{b}_q\right) - (k_3)_t\,\boldsymbol{n}_q - k_3\left(\mu_1\boldsymbol{t} + \mu_3\boldsymbol{b}_q\right)\\
&= \left((k_2)_t - k_3\mu_1\right)\boldsymbol{t} + \left(k_2\mu_1 - (k_3)_t\right)\boldsymbol{n}_q - \left(k_2\mu_2 - k_3\mu_3\right)\boldsymbol{b}_q,
\end{aligned}$$

göz önüne alınırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left\langle \varphi_s, \varphi_s \right\rangle\\
&= -k_2^2 + k_3^2,\\
g_{12} &= \left\langle \varphi_s, \varphi_t \right\rangle\\
&= -k_2\mu_2 + k_3\mu_3,\\
g_{22} &= \left\langle \varphi_t, \varphi_t \right\rangle\\
&= -\mu_2^2 + \mu_3^2,\\
\ell_{11} &= \left\langle \varphi_{ss}, N_\varphi \right\rangle\\
&= k_2^2 - k_3^2,\\
\ell_{12} &= \left\langle \varphi_{st}, N_\varphi \right\rangle\\
&= k_2\mu_2 - \mu_3k_3,\\
\ell_{22} &= \left\langle \varphi_{tt}, N_\varphi \right\rangle\\
&= \mu_2^2 - \mu_3^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K_3 &= \frac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\\
&= \frac{\left(k_2^2 - k_3^2\right)\left(\mu_2^2 - \mu_3^2\right) - \left(k_2\mu_2 - k_3\mu_3\right)^2}{\left(-k_2^2 + k_3^2\right)\left(-\mu_2^2 + \mu_3^2\right) - \left(-k_2\mu_2 + k_3\mu_3\right)^2}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H_3 &= \frac{\ell_{11}g_{22} - 2\ell_{12}g_{12} + \ell_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \\
&= \frac{\left(k_2^2 - k_3^2\right)\left(-\mu_2^2 + \mu_3^2\right) + 2\left(k_2\mu_2 - k_3\mu_3\right)^2 + \left(\mu_2^2 - \mu_3^2\right)\left(-k_2^2 + k_3^2\right)}{2\left[\left(-k_2^2 + k_3^2\right)\left(-\mu_2^2 + \mu_3^2\right) - \left(-k_2\mu_2 + k_3\mu_3\right)^2\right]} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

asli eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_{13} &= H_3 + \sqrt{H_3^2 - K_3} = -1, \\
k_{23} &= H_3 - \sqrt{H_3^2 - K_3} = -1
\end{aligned}
$$

dir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Minkowski uzayında eğri ve yüzeylerin temel tanımları ve teoremleri açıklanmıştır. Daha sonra 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında bir uzay eğrisinin q-çatısı (Dede, 2015) ve (Tarım, 2016) tarafından tanımlanmıştır. q-çatı olarak adlandırılan bu yeni çatının Frenet çatıya göre ikinci türevi sıfır olan eğride tanımlanabilmesi ve teğet etrafında gereksiz bükülmeyi önlemesi olarak iki önemli avantajı bulunmaktadır.

Bir uzay eğrisinin küresel göstergelerinin evolüsyonuyla oluşturulan yüzeyler (Soliman, 2018) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada Öklid uzayında eğrilerin Frenet çatısı kullanılmıştır. Bu tezde ise Minkowski uzayında timelike ve spacelike uzay eğrilerinin izdüşüm vektörünün farklı durumlarına göre evolüsyonuyla timelike yüzeyler oluşturulmuştur.

6.2 Öneriler

Geometrik olarak eğri ve yüzeylerin evolüsyonu bir eğri veya yüzeyi başka bir eğri veya yüzeye dönüştüren sürekli bir dönüşüm anlamına gelir. Eğri ve yüzeylerin evolüsyonunu çalışmaktaki amaç verilen eğri ve yüzeylerin son şeklini belirlemek ve evolüsyon işlemi esnasında invaryant geometrik özelliklerini bulmaktır. Buna göre bu yöntemle eğrilerin ve yüzeylerin evolüsyonlarının uygulandığı birçok alan vardır. Bunlardan başlıcaları bilgisayar görüntüleme, bilgisayarlı animasyon ve görüntü işleme alanlarıdır. Bu alanlarda kullanılabilecek farklı eğri ve yüzeyler oluşturabilmek için benzer hesaplamalar farklı uzaylarda yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abdel-All, N. H., Abdel-Razek, M. A., Abdel-Aziz, H. S., & Khalil, A. A., 2011, Geometry of evolving plane curves problem via lie group analysis. Studies in Mathematical Sciences, 2(1), 51-62.

Abdel-All, N. H., Hussien, R. A., & Youssef, T., 2012, Hashimoto surfaces. Life Science Journal, 9(3), 556-560.

Abdel-All, N. H., Abdel-Razek, M. A., Abdel-Aziz, H. S., & Khalil, A. A., 2014, Evolution of a helix curve by observing its velocity. Life Science Journal, 11(5), 41-47.

Abdel-All, N. H., Mohamed, S. G., & Al-Dossary, M. T., 2014, Evolution of generalized space curve as a function of its local geometry. Applied Mathematics, 5(15), 2381.

Abd-Ellah, H.N., 2015, Evolution of Translation Surfaces in Euclidean 3-Space. Applied Mathematics & Information Sciences, 9, 661-668.

Akkuş İ., 2016, Lineer Cebir (4. Basımdan Çeviri), Nobel Yayıncılık, Ankara.

Çapın R., 2016, Minkowski Uzayında Küresel Gösterge Eğrileri, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Da Rios, L.S., 1906, Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso. Gordon and Breach, 22, 117-135.

Dede, M., Ekici, C., Görgülü, A., 2015, Directional q-frame along a space curve, International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering, 5, 12, 775-780.

Dede, M., Ekici, C., Tozak, H., 2015, Directional tubular surfaces, International Journal of Algebra, 9, 12, 527-535.

Dede, M., Ekici, C., 2018, Directional Bertrand curves, Gazi University Journal of Science 31(1), 202-211.

Doliwa, A. and Santini, P., 1994, An Elementary Geometric Characterization of the Integrable Motions of a Curve. Physics Letters A, 185, 373-384.

Duggal, K.L. and Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemanian manifolds and applications. Kluwer Academic Publishers.

Galdi, G.P., 1971, Motion of Distorted Vortex Rings. Journal of the Physical Society of Japan, 31, 591-599.

Hashimoto, H., 1972, A soliton on a vortex flament. Journal of Fluid Mechanics, 51(3), 477-485.

Hussien, R. A., & Mohamed, S. G., 2016, Generated Surfaces via Inextensible Flows of Curves in. Journal of Applied Mathematics.

Körpinar, T., Altay, G. and Turhan, E., 2011, New Inextensible Flows of Tangent Developable Surfaces in Euclidian 3-Space. Revista Notas de Matemática, 7, 172-176.

Kwon, D.Y. and Park, F.C., 1999, Evolution of Inelastic Plane Curves. Applied Mathematics Letters, 12, 115-119.

Kwon, D.Y. and Park, F.C., 2005, Inextensible Flows of Curves and Developable Surfaces. Applied Mathematics Letters, 18, 1156-1162.

Lamb Jr., G.L., 1977, Solitons on Moving Space Curves. Journal of Mathematical Physics, 18, 1654-1661.

Lakshmanan, M., Ruijgrok, Th.W. and Thompson, C.J., 1976, On the Dynamics of a Continuum Spin System. Physica A, 577, 577-590.

Latifi, D. and Razavi, A., 2008, Inextensible Flows of Curves in Minkowskian Space. Advanced Studies in Theoretical Physics, 2, 761-768.

Lopez, R., 2008, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini-Course taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil.

Mohamed, S. G., 2014, Explicit examples of motions of inextensible curves in spherical space S3. Applied Mathematics & Information Sciences Letters, 2(3), 77-83.

Muniraja, G., & Lakshmanan, M., 2010, Motion of Space Curves in three-dimensional Minkowski Space $\mathbb{R}_1^3$, SO(2,1) Spin Equation and defocusing nonlinear Schrodinger Equation. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7(06), 1043-1049.

Mukherjee, R. and Balakrishnan, R., 2008, Moving Curves of the Sine-Gordon Equation: New Links. Physics Letters A, 372, 6347-6362.

Nakayama, K., 1998, Motion of curves in hyperboloid in the Minkowski space. Journal of the Physical Society of Japan, 67(9), 3031-3037.

Nakayama, K., 1999, Motion of curves in hyperboloids in the Minkowski space II. Journal of the Physical Society of Japan, 68(10), 3214-3218.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, p. 468.

Schief, W. K., & Rogers, C., 1999, Binormal motion of curves of constant curvature and torsion. Generation of soliton surfaces. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 455(1988), 3163-3188.

Soliman, M. A., Abdel-All, N. H., Hussien, R. A., & Youssef, T. 2018, Evolutions of the Ruled Surfaces via the Evolution of Their Directrix Using Quasi Frame along a Space Curve. Journal of Applied Mathematics and Physics, 6(08), 1748.

Tarım G., 2016, Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

White, B., 2002, Evolution of curves and surfaces by mean curvature. arXiv preprint math/0212407.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Yunus YAVUZ
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	SEYDİŞEHİR/18.12.1989
Telefon	**:**	05079363665
e-mail	**:**	y.yavuz42@yahoo.com.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Sarayönü Anadolu Lisesi, Sarayönü/KONYA**	**2008**
Üniversite	:	**Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Matematik Bölümü TOKAT**	**2012**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü KONYA**	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2012-2013	**MEB**	**Hekimoğlu MTAL (SELÇUKLU)**
2013-2020	**MEB**	**Güneysınır ÇPAL (GÜNEYSINIR)**

YAYINLAR

Yavuz, Y. ve Sarıaydın, M.T., On Timelike Surfaces Constructed By Evolution Of A Space Curve, Balkan İkinci Uluslararası Uygulamalı Bilimler Kongresi, 2020, 10 Mayıs 2020, Edirne, Türkiye.