ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Murat AKSAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

TEZ ONAYI

Murat AKSAR tarafından hazırlanan " **Regle Yüzeylerin Karakterizasyonları** " adlı tez çalışması 29/06/2017 tarihinde jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU
Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

29/06/2017

Murat AKSAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Murat AKSAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez toplam dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmı için ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ilerdeki bölümler için gerekli olan kavramlar ve tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında regle yüzeylerin temel özellikleri geniş şekilde ele alınmıştır.

Son bölüm ise "Structure and Characterization of Ruled Surface in Euclidean 3-Space" makalesinin genişletilmiş haline ayrılmıştır.(Yu, Liu, Jung 2014)

Haziran 2017, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: regle yüzeyler, helis, darboux fonksiyonu, eğrilik, Bertrand eğrileri, minimal yüzeyler, boğaz eğrisi

ABSTRACT

Master Thesis

CHARACTERIZATION OF RULED SURFACES

Murat AKSAR

Ankara University
Graduated School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is placed for the introduction.

The second chapter deals with notions and definitions that are necessary for the next chapters.

In the third chapter, it is discussed that basic properties of ruled surfaces widely.

Last chapter is placed for "Structure and Characterization of Ruled Surface in Euclidean 3-Space" which is extended form in this thesis. (Yu, Liu, Jung 2014)

June 2017, 48 pages

Key Words: ruled surfaces, helix, darboux function, curvature, striction curve, Bertrand curves, minimal surfaces

TEŞEKKÜR

Bana araştırma imkanı veren ve çalışmalarımın her kısmında yakından ilgi ve tavsiyeleri ile bana yol gösteren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmam sırasında beni sabır ve anlayışla destekleyen eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Murat AKSAR

Ankara, Haziran 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

γ	Birim hızlı uzay eğrisi
κ	Eğrilik
P_X	Regle yüzeyin drali
τ	Torsiyon
D	Darboux vektörü
$\tilde{D}$	Genelleştirilmiş Darboux vektör alanı
$\vec{w}$	Dual darboux vektörü
λ_X	Regle yüzeyin açılım açısı
L_X	Regle yüzeyin açılım uzunluğu
d	Küresel Darboux gösterimi
$F(\gamma,\theta)$	Regle yüzeyi
K	Gauss eğrilik
H	Ortalama eğrilik
S	Şekil operatörü
T	Teğetler göstergesi
N	Asli normaller göstergesi
B	Binormaller göstergesi

1. GİRİŞ

Regle yüzeyler, Gauss eğriliği negatif veya sıfır olan yüzey tiplerdendir. Gauss eğriliği sıfır olanlar açılabilir regle yüzeyler olarak adlandırılır. Bir regle yüzey $\alpha(s)$ dayanak eğrisi ve $X(s)$ doğrultman olmak üzere

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

şeklinde parametrik olarak ifade edilebilir.

$$\det(\alpha', X, X') = 0$$

olması $K = 0$ olmasını gerektirir.

Bu yüzeylerde açılım açısı ve açılım uzunluğu gibi tanımlar kullanılarak regle yüzeylerin çeşitli karakterizasyonları verildi.

Bu çalışmada, son yıllarda küresel çatı yardımıyla regle yüzeylerin ele alınışı araştırıldı. Küresel çatı kullanılmada verilen karakterizasyonları ile karşılaştırmalar yapıldı.

Kinematikte regle yüzeyler birim dual küresel eğriler yardımıyla verilmektedir. Dual küresel hareketlerin, uzayda karşılıklarının regle yüzeyler olması hareket teorisine önemli katkılar sağlamaktadır.

Son yıllarda regle yüzeyler ile ilgili çalışmaların takip edilmesi açısından da bu tez faydalı olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm diğer bölümler için gerekli olan temel kavramlar için ayrılmıştır. Herhangi iki $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)$ vektörlerinin standart iç çarpımı $x.y$ ve bir x vektörünün normu $\|x\|$ ile gösterilir.

Tanım 2.1. $\gamma : I \to R^3$**,** $\|\gamma'(s)\|=1$ olacak şekilde bir eğri olsun. Böylece s ye γ eğrisinin yay parametresi denir.(Hacısalihoğlu 1993)

Tanım 2.2. $\gamma : I \to R^3$ eğrisinin s yay parametresi $\gamma'(s)=\dfrac{d\gamma}{ds}$ olsun. $\gamma'(s)$ yi $t(s)$ ile gösterelim. $t(s)$ ye, $\gamma(s)$ noktasında γ nın birim teğet vektörü ile verilir. γ nın eğriliği $k(s)=\|\gamma''(s)\|$ ile tanımlanır. Eğer $k(s)\neq 0$ ise $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin $n(s)$ birim asli normal vektörü de $\gamma''(s)=k(s)n(s)$ ile tanımlanır. $b(s)=t(s)\times n(s)$ birim vektörüne, $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin birim normal vektörü denir. Bu durumda Frenet-Serret formülü aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
t'(s) &= k(s)n(s)\\
n'(s) &= -k(s)t(s)+\tau(s)b(s)\\
b'(s) &= -\tau(s)n(s)
\end{aligned}
$$

Burada $\tau(s)$, $\gamma(s)$ noktasında γ eğrisinin torsiyonudur.(Izumiya ve Takeuchi 2001)

Tanım 2.3. S **,** E^3 de bir yüzey, $\gamma : I \to S$ birim hızlı bir eğri ve $\gamma''(s)=\gamma''(s)^T+\gamma''(s)^\perp$ olsun. $\|\gamma''(s)^T\|=k_g$ ve $\|\gamma''(s)^\perp\|=k_n$ ile gösterilen k_g ve k_n ye sırasıyla γ eğrisinin geodezik eğriliği ve normal eğriliği olarak adlandırılır (Gray 1939).

Tanım 2.4. Birim hızlı her $\gamma : I \to E^3$ eğrisi için, $D(s)=\tau(s)t(s)+k(s)b(s)$ vektör alanına, γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.6. γ nın tanjant doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ ya genel helis denir. $\gamma(s)$ nin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)$ nin sabit olmasıdır. Eğer, τ ve k sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.7. $M, N \subset E^3$ eğrileri sırasıyla $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $\{t*(s), n*(s), b*(s)\}$ Frenet 3-ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{n(s), n*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir (Hacısalihoğlu1993).

Tanım 2.8. Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından ihtiva ediliyorsa bu eğriye düzlemsel eğri adı verilir. (Karger ve Novak 1985).

Tanım 2.9. Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri denir. (Karger ve Novak 1985).

Tanım 2.10. M bir C^∞ manifold olmak üzere. M üstünde vektör alanlarının uzayı $X(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M,R)$ olsun. Bu durumda

$$<,>: X(M) \times X(M) \to C^\infty(M,R)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu adı verilir. Burada, $<,>$ işlemine M üzerinde bir iç çarpım veya diferansiyellenebilir metrik adı verilir. (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.11. M bir C^∞ manifold olmak üzere. M üstünde vektör alanlarının cümlesi $X(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M,R)$ olsun. Bu durumda

$$<,>: X(M) \times X(M) \to C^{\infty}(M,R)$$

fonksiyonu,

i. 2-lineer
ii. Simetrik
iii. $\forall x \in X(M)$ için $<x,y>=0$ ise $y=0$

özelliklerini sağlıyor ise M ye yarı-Riemann manifoldu adı verilir. (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.12. M bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $X(M)$ olmak üzere,

$$D: X(M) \times X(M) \to X(M)$$

$$(X,Y) \to D(X,Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

1. $D_{fX+gY} Z = fD_X Z + gD_Y Z$, $\forall X,Y,Z \in X(M)$, $\forall f, g \in C^{\infty}(M,R)$
2. $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$, $\forall X,Y,Z \in X(M)$, $\forall f \in C^{\infty}(M,R)$

Özelliklerini sağlanıyor ise D ye M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu 2000b).

Tanım 2.13. M bir yarı-Riemann manifoldu verilsin. D de, M nin üstünde bir afin konneksiyon olsun.

1. D, C^{∞} sınıfındandır.
2. M bir A bölgesi üstünde, C^{∞} olan her $X,Y \in X(M)$ için $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$ dir

3. M nin bir A bölgesi üstünde , C^{∞} olan her $X, Y \in X(M)$ ve $\forall P \in A$ için

$X_P < Y, Z >=< D_X Y, Z >|_P + < Y, D_X Z >|_P$

sağlanır. (Hacısalihoğlu 2000b).

Tanım 2.14. E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyon D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu 2000b).

Tanım 2.15. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$K : M \to R$$

$$P \to K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, M nin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. $K(P)$ değerine ise M nin P noktasındaki Gauss eğriliği adı verilir. (Hacısalihoğlu 2000b).

Tanım 2.16. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olsun,

$$H : M \to R$$

$$P \to H(P) = iz(S(P))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, M nin ortalama eğrilik fonksiyonu denir $H(P)$ değerine ise M nin P noktasındaki ortalama eğriliği adı verilir. (Hacısalihoğlu 2000b).

Tanım 2.17. R^3 de bir regle yüzey,

$$F(\gamma,\delta): I\times R \to R^3$$

$$(t,u)\to F(\gamma,\delta)(t,u)=\gamma(t)+u\delta(t)$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada $\gamma: I\to R^3$, $\delta: I\to R^3-\{0\}$ diferensiyellenebir dönüşümler ve I bir açık aralıktır. γ ya regle yüzeyin dayanak eğrisi ve δ ya regle yüzeyin doğrultmanı adı verilir.(Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.18. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olmak üzere regle yüzeye açılabilirdir denir (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 2.19. M , R^3 de bir yüzey olsun. M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal adı verilir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.20. Bir $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultman ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına striksiyon (boğaz) noktası denir. (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 2.21. Bir $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyinin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin striksiyon çizgisi adı verilir (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 2.22. M yüzeyinin bir P noktasında, $S_P: T_P(M)\to T_P(M)$ lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine, P noktasındaki asli eğrilikler denir.

$S_P: T_P(M)\to T_P(M)$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı karakteristik vektörlerine P noktasındaki asli vektörler denir. Bir eğrilik vektörünün gerdiği alt vektör uzayına, P noktasındaki eğrilik fonksiyonu adı verilir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım2.23. M , R^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \to M$ regüler bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.24. Eğer bir yüzey üstündeki bir eğri asimptotik eğri ve yüzeyin ortalama eğriliği sıfır ise bu eğriye minimal asimptotik eğri denir. (Izumiya ve Takeuchi 2001).

Tanım 2.25. E^3 de s yay parametresi ile verilen bir α eğrisinin birim teğet vektörü,

$T = (T_1, T_2, T_3)$ olmak üzere,

$$k_g = \left\| D_T T \right\| = \left\| \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right\|$$

İfadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen, E^3 deki geodezik eğriliği denir.(Hacısalihoğlu 2012)

Tanım 2.26. Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{X}$ olan bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir peryod sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı ile adlandırılır ve λ_X ile sembolize edilir. (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 2.27. H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayında tespit edilen her doğru H' de kapalı bir regle yüzey çizer. Bir

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

Regle yüzeyinin anadoğrularının dik yörüngeleri için

$$\left.\begin{array}{l}\langle X, d\varphi\rangle = 0 \\ \langle X, d\alpha + dvX + vdX\rangle = 0 \\ \langle X, d\alpha\rangle + dv\|X\|^2 = 0\end{array}\right\}$$

Bulunur. Bu formülün regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa

$$L_X = \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, X\rangle = -\oint_{(\alpha)} dv$$

elde edilir. Burada

$$L_X : I \to R$$

$$v \to -\oint_{(\alpha)} dv$$

Şeklinde tanımlanmış olan L_X fonksiyonuna regle yüzeyin açılım uzunluğu denir (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 2.28. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir. Anadoğrularının birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin drali P_X ile gösterilir.

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

regle yüzeyinin drali için

$$P_X = \frac{\det(d\alpha, X, X')}{\|X\|^2}$$

bulunur (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 2.29. $\alpha : I \to E^3$ bir kapalı eğri olsun. Bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı eğriye sıkı bir şekilde bağlı ve ayrıca $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki hareketli çizgiler uzayı

$$H = S_P \{E_1, E_2, E_3\}\big|_{\alpha(t)}$$

olsun. H / H' uzay hareketindeki w Ptaff vektörünün (diferensiyel vektör) α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$\vec{D} = \oint \vec{w}$$

vektörüne H / H' hareketinin Steiner dönme vektörü denir.

Tanım 2.30. $\alpha : I \to E^3$ diferensiyellenebilir kapalı bir eğri bu eğriye sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi H hareketli uzayı olarak seçilsin. $d\vec{\alpha} \in T_H(\alpha(t))$ olduğundan

$$d\vec{\alpha} = \sigma_1 \vec{E}_1 + \sigma_2 \vec{E}_2 + \sigma_3 \vec{E}_3$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilebilir. α eğrisi boyunca eğrisel integral ile belirtilen

$$V = \oint_{(\alpha)} d\vec{\alpha}$$

vektörüne H / H' hareketinin Steiner öteleme vektörü denir.

3. E^3 DE REGLE YÜZEYLER

3.1 Regle Yüzeylerin Özellikleri

Tanım 3.1.1. $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Hacısalihoğlu 2012).

Teorem 3.1.1. $M \subset E^3$ bir regle yüzey olsun. O zaman, M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir.

İspat. $X \in \chi(M)$, M nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Herbir doğrultman bir doğru olduğundan E^3 de geodeziktir. Böylece,

$$D_X X = \vec{0}$$

elde edilir. Bu ise, $\bar{D}_X X = D_X X + \langle S(X), X \rangle N$, Gauss denkleminden,

$$\bar{D}_X X = \langle S(X), X \rangle N$$

dir.

$$\bar{D}_X X \in T_M, N \in T_M^{\perp}, T_M \cap T_M^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

olduğundan

$$\bar{D}_X X = \vec{0} \text{ ve } \langle S(X), X \rangle = 0$$

olması gerekir. $\bar{D}_X X = \vec{0}$ olduğundan, M nin doğrultmanları, M nin geodezik çizgileri olurlar. $\langle S(X), X \rangle = 0$ olması ise bu doğrultmanların aynı zamanda asimptotik çizgiler olduğunu da gösterir (Hacısalihoğlu 2012).

Teorem 3.1.2. $M \subset E^3$ bir regle yüzey ve M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olsun. O zaman $\forall P \in M$ için $K(P) \leq 0$ dır.

İspat. $P \in M$ noktasındaki doğrultmanın teğet vektör alanı X olsun. $\chi(M)$ nin $\{X, Y\}$ ortonormal bazını elde edelim. Bu baza göre, M nin S şekil operatörünün matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(X), X \rangle & \langle S(Y), X \rangle \\ \langle S(X), Y \rangle & \langle S(Y), Y \rangle \end{bmatrix}$$

dir. Burada, Teorem3.1.1 gereğince $\langle S(X), X \rangle = 0$ olduğu görülür ve

$$K = \det S = -(\langle S(X), Y \rangle)^2$$
$$\Rightarrow K \leq 0$$

elde edilir (Hacısalihoğlu 2012).

Şimdi regle yüzeylerin atlas kavramını gösterelim.

M bir regle yüzey olmak üzere,

$$\alpha : I \to M$$

eğrisinin tanjant vektör alanı T olmak üzere, $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasında M nin doğrultmanı T lineer bağımsız olacak şekilde verilsin. $\alpha(t) \in M$ noktasındaki doğrultman,

$$\beta : R \to M$$

$$\beta(v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), ..., \alpha_3(t) + va_3(t))$$

şeklindedir. Burada $a_i(t) \in R, 1 \leq i \leq 3$, skalarları, doğrultman $\alpha(t)$ noktasındaki bileşenleridir. Açıkça,

$$\varphi : I \times R \to E^3$$

$$\varphi(t, v) = \alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)$$

olmak üzere; $\{(I \times R, \varphi)\}$ sistemi, M için bir atlastır. $\alpha : I \to M$ eğrisinin yay parametresi ile verildiğini ve doğrultmanın üzerindeki

$$X\big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{3} a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha(t)}$$

tanjant vektörünün de $\forall t \in I$ için birim vektör olduğunu varsayalım. Bunun üzerine , $\alpha : I \to M$ eğrisi de $\langle T, X \rangle = 0$ olacak şekilde seçilmiş ise M nin birim normali N olmak üzere

$$\{T, X, N\}$$

sistemi, α boyunca ortonormal bir sistem oluşturur.

Şimdi $\{T, X, N\}$ sisteminin α boyunca değişimini, yani, T ye göre herbirinin kovaryant türevlerini bulalım. α boyunca,

$$1 = \langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle X, X \rangle \Rightarrow 0 = T\left[\langle X, X \rangle\right] = 2\langle D_T X, X \rangle$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, X \rangle = 0$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\langle D_T N, N \rangle = 0$$

$$\langle D_T T, T \rangle = 0$$

elde edilir. Burada, $a, b, c \in C^\infty(M, R)$ fonksiyonları,

$$\left.\begin{aligned} a\big|_{\alpha(t)} &= \langle D_T T, X \rangle\big|_{\alpha(t)} \\ b\big|_{\alpha(t)} &= \langle D_T T, N \rangle\big|_{\alpha(t)} \\ c\big|_{\alpha(t)} &= \langle D_T X, N \rangle\big|_{\alpha(t)} \end{aligned}\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\left.\begin{aligned} D_T T &= aX + bN \\ D_T X &= -aT + cN \\ D_T N &= -bT - cX \end{aligned}\right\}$$

veya matris formuyla,

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix}$$

bulunur.

$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ ile verilen ifade $\{(I \times R, \varphi)\}$ atlasında $\forall v \in R$ sabit değeri için M nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin tanjant vektör alanı ise

$$A = T + vD_T X$$

veya burada $D_T X = -aT + cN$

$$A = (1 - av)T + cvN$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, A vektör alanı X e diktir.

Bir doğrultman boyunca, M nin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, $c \in C^{\infty}(M, R)$ fonksiyonu ile yakından ilgilidir (Hacısalihoğlu 2012).

Teorem 3.1.3. M bir regle yüzey olsun.

$c = 0 \Leftrightarrow$ M regle yüzeyi açılabilirdir (Hacısalihoğlu 2012)

İspat: M regle yüzeyi

$$\varphi : I \times R \to E^3$$

$$\varphi(t,v) = \alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)$$

olmak üzere, $\{(I \times R, \varphi)\}$ atlası ile verilsin. Daha önceki notasyon ve tartışmalarımıza sadık kalarak, $\{T, X, N\}$ ortonormal sistemini ve doğrultmanın herhangi bir v sabit değerine karşılık gelen noktasından geçen $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisinin

$$A = (1 - av)T + cvN$$

teğet vektör alanını gözönüne alalım.

$\alpha(t)$ noktasından geçen doğrultmanın her noktasında, teğet düzlemlerin sabit olması için, doğrultman boyunca N nin sabit olması gerekir. Çünkü bu halde , her teğet düzlemin, ortak birer doğruları var ve normalleri aynı olur. N nin doğrultman boyunca sabit olması için $\{A, T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise

$$A = (1 - av)T + cvN$$

eşitliği gereğince $c = 0$ olmasını gerektirir.

O halde, bir doğrultman boyunca, M nin teğet düzlemlerinin çakışık olması için $c = 0$ olması gerek ve yeterdir.

Teğet düzlemleri aynı olduğundan yüzey açılabilirdir.(Hacısalihoğlu 2012)

Teorem 3.1.4. M bir regle yüzey olsun. M nin vektörel ifadesi $\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ olmak üzere,

$$K = \frac{-c^2}{\left(1 - 2av + a^2v^2 + c^2v^2\right)^2}$$

dir (Hacısalihoğlu 2012).

Sonuç 3.1.1 M yüzeyi açılabilirdir. $\Leftrightarrow$ $K = 0$ dır.

3.2 Regle Yüzeylerin Açılım Açısı ve Uzunluğu

Tanım 3.2.1. Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{X}$ olan bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir peryod sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir ve λ_X ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2012).

Tanım 3.2.2. H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayında tespit edilen her doğru H' de kapalı bir regle yüzey çizer. Bir

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

Regle yüzeyinin anadoğrularının dik yörüngeleri için

$$\left.\begin{array}{l}\langle X, d\varphi\rangle = 0 \\ \langle X, d\alpha + dvX + vdX\rangle = 0 \\ \langle X, d\alpha\rangle + dv\|X\|^2 = 0\end{array}\right\}$$

bulunur. Bu formülün regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa

$$L_X = \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, X\rangle = -\oint_{(\alpha)} dv$$

elde edilir. Burada

$$L_X : I \to R$$

$$v \to -\oint_{(\alpha)} dv$$

Şeklinde tanımlanmış olan L_X fonksiyonuna regle yüzeyin açılım uzunluğu denir (Hacısalihoğlu 2012).

$\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin X doğrultman vektörünü

$$\vec{a}_1 = \vec{X}$$

şeklinde bir ortonormal üç ayaklının ilk vektörünü $\vec{a}_1$ olarak alalım. Doğrultmana dik olan vektörü $\vec{a}_2$ birim vektörü olarak alırsak

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$$

şeklinde $\{\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ortonormal sistemini tespit etmiş oluruz. Böylece regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca hareket eden H hareketli uzayını

$$H = S_p\{\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}\big|_{\alpha(t)}$$

olarak biliriz.

Eğer $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integralini alırsak açılım açısının λ_X değeri

$$\lambda_X = -\oint_{(\alpha)} d\theta$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\{\alpha(s), \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ sisteminin değişimi için Ω matrisi kullanılarak

$$\begin{bmatrix} d\vec{a}_1 \\ d\vec{a}_2 \\ d\vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix}$$

şekilde yazılabileceğinden

$$\langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle = w_1$$

ve dolayısıyla açılım açısı için

$$\lambda_X = \oint w_1$$

elde edilir. Diğer taraftan H / H' hareketinin $\vec{D}$ Steiner dönme vektörü için

$$\vec{D} = \oint_{(\alpha)} \left(w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3 \right) = \vec{a}_1 \oint w_1 + \vec{a}_2 \oint w_2 + \vec{a}_3 \oint w_3$$

ve dolayısıyla

$$\left\langle \vec{D}, \vec{X} \right\rangle = \left\langle \vec{D}, \vec{a}_1 \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{D}, \vec{X} \right\rangle = \oint w_1$$

elde edilir. Yukarıdaki formüllerden regle yüzeyin açılım açısı için

$$\lambda_X = \left\langle \vec{D}, \vec{X} \right\rangle$$

ifadesi bulunur. Ayrıca H / H' hareketinin Steiner öteleme vektörü

$$\vec{V} = \oint_{(\alpha)} d\vec{\alpha}$$

kullanılarak açılım uzunluğu için $\vec{a} = \vec{X}$ aldığımızda

$$L_X = \left\langle \vec{V}, \vec{X} \right\rangle$$

elde edilir.

$\varphi(s,v)$ ile gösterdiğimiz kapalı regle yüzeyin dayanak eğrisinin yay parametresi s, doğrultman vektörü $\vec{X}$ olsun. $\alpha : I \to E^3$ dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H / H' hareketinin Steiner dönme vektörü

$$\vec{D} = \vec{T} \oint k_2 ds + \vec{B} \oint k_1 ds$$

dır. Burada k_1 ve k_2, sırası ile α eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Buradaki integral, dayanak eğrisi boyunca eğrisel integraldir.Dayanak eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerinin hareket sırasında çizdikleri regle yüzeyin açılım açıları sırası ile

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_T &= \langle D,T\rangle, \\
\lambda_T &= \oint k_2 ds; \\
\lambda_N &= \langle D,N\rangle, \\
\lambda_N &= 0; \\
\lambda_B &= \langle D,B\rangle, \\
\lambda_B &= \oint k_1 ds
\end{aligned}\right\}$$

dir. Aynı şekilde açılım uzunlukları da sırasıyla

$$\begin{aligned}
L_T &= \left\langle \oint d\vec{\alpha}, T\right\rangle, \\
L_T &= \left\langle \oint T ds, T\right\rangle, \\
L_T &= \oint ds; \\
L_N &= \left\langle \oint d\vec{\alpha}, N\right\rangle, \\
L_N &= 0; \\
L_B &= 0;
\end{aligned}$$

dir (Hacısalihoğlu 2012).

3.3 Örnekler

Örnek 3.3.1. H hareketli uzayını göstermek üzere bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisini çizen bir $\alpha(s)$ noktasına sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden $\{T, N, B\}$ çatısını alalım. $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin $\vec{X}$ doğrultman vektörü

$$\vec{X} = N$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} N' \\ B' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & -k_1 \\ -k_2 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ B \\ T \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Diferensiyel geometrideki Darboux dönme vektörü rolünü oynayan w olarak gösterelim. Bu durumda

$$w = k_1 B + k_2 T$$

elde edilir ve açılım açısı için

$$\begin{aligned}\lambda_N &= \left\langle \oint w ds, N \right\rangle \\ &= \left\langle \oint \left(k_1 B + k_2 T\right) ds, N \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.2. H hareketli uzayını göstermek üzere bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisini çizen bir $\alpha(s)$ noktasına sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden $\{N, C, W\}$ çatısını alalım. $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin $\vec{X}$ doğrultman vektörü

$$\vec{X} = N$$

olsun. Diferensiyel geometrideki Darboux dönme vektörü rolünü oynayan $\bar{w}$ olarak gösterelim. Bu durumda

$$\bar{w} = gN + fW$$

olur. Diğer taraftan $\vec{D}$ Steiner dönme vektörü için

$$\vec{D} = \oint \bar{w} ds$$

elde edilir ve dolayısıyla açılım açısı için

$$\begin{aligned}\lambda_N &= \left\langle \vec{D}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \oint \left(gN + fW\right) ds, N \right\rangle\end{aligned}$$

$$\lambda_N = \oint g ds$$

elde dilir. Ayrıca

N küresel gösterge eğrisinin geodezik eğriliği k_g olsun.

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix}$$

Buradan $k_g = \dfrac{g}{f}$ olacağından

$$k_g = \sigma = \frac{k_1^2 \left(\dfrac{k_2}{k_1} \right)'}{\left(k_1^2 + k_2^2 \right)^{3/2}}$$

elde edilir (Gök ve Uzunoğlu 2016).

Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. $\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ regle yüzeyi verilsin. $\{N, C, W\}$ çatısının α boyunca hareketinde $\vec{X} = N$ doğrultmanı ile çizilen regle yüzeyinde

$$\lambda_N = \oint \sigma(t)dt$$

dir. Burada t, N eğrisinin yay parametresidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \lambda_N &= \oint g(s)ds \\ &= \oint \frac{g}{f} f ds \\ &= \oint k_g dt \end{aligned}$$

Burada $f=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ ve $\frac{dt}{ds}=f$ dir.

Sonuç 3.3.1. Örnek 3.3.1. de $\{T,N,B\}_1$ hareketinden elde edilen $\varphi_1(s,v)=\alpha(s)+vN(s)$ yüzeyinde

$$\lambda_N=0$$

elde edildi. Teorem 3.3.1 den $\{N,C,W\}_2$ hareketinden $\varphi_2(s,v)=\alpha(s)+vN(s)$ yüzeyinde

$$\lambda_N=\oint k_g dt$$

elde edilmiştir.

Sonuç 3.3.2. $\{N,C,W\}_2$ çatısının α boyunca hareketinde $\vec{X}=N$ tarafından çizilen regle yüzeyinde

$$k_g=c \text{ ise } \lambda_N=c\oint dt$$

dir.

Örnek 3.3.3. α kapalı bir slant helis olsun. Bu durumda

$$\lambda_N=c\oint dt$$

dir.

$\alpha:I\to E^3$ yay parametresi ile verilsin. $\{T,N,B\}$ α eğrisinin Frenet çatısı olsun.

$$X=x_1T+x_2N+x_3B,\ \ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \text{ ve } x_i\in R$$

doğrultmanı için

$$\varphi(s,v)=\alpha(s)+vX$$

regle yüzeyinin açılım açısı

$$\lambda_X = \lambda_T x_1 + \lambda_B x_3$$
$$= x_1 \oint k_2 ds + x_3 \oint k_1 ds$$

olarak hesaplanır (Hacısalihoğlu 2012).
Bu eşitlik $X = T$ $(x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0)$, $X = N$ $(\lambda_X = 0)$ veya $X = B$ için gerçeklenebilir.

Bu genel hal için X doğrultmanını içeren bir çatı inşa edilmelidir.

$$Y = \frac{X'}{|X'|} \quad \text{ve} \quad Z = X \wedge Y$$

diyelim. Bu durumda $\{X, Y, Z\}$ ortonormal bir çatıdır.

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_2 \\ 0 & -\bar{k}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Burada $\|X'\| = \bar{k}_1$, $\langle Y', Z \rangle = \bar{k}_2$ dir. $\bar{k}_1$ ve $\bar{k}_2$ eğrilikleri $\{X, Y, Z\}$ çatısının eğrilikleridir.
Bu durumda, X doğrultmanı ile çizilen $\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ regle yüzeyini inceleyelim.
Özel hal:

1. $X = T$ olsun. Bu durumda çatımız $\{T, N, B\}$ çatısı olur. Bu durumda

$$\lambda_X = \lambda_T$$
$$= \oint k_2 ds$$
$$L_T = \oint ds$$

elde edilir.

2. $X = N$ olsun. Bu durumda çatımız $\{N, C, W\}$ çatısı olur.

$$\lambda_N = \oint k_g dt$$

$$L_N = 0$$

elde edilir.

3. $X = B$ alalım. Bu durumda çatımız $\{B, -N, T\}$ çatısı olur.

$$\lambda_B = \oint k_1 ds$$

$$L_B = 0$$

elde edilir.

Şimdi $X = x_1T + x_2N + x_3B,$ genel hali için

$$M = \varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

regle yüzeyini inceleyelim.

$$X' = -k_1x_2T + (x_1k_1 - x_3k_2)N + x_2k_2B$$

dir. Burada k_1 ve k_2 , α nın Frenet çatısının eğrilikleridir.

Ayrıca $\{X, Y, Z\}$ çatısının Darboux vektörü

$$D = \bar{k}_2X + \bar{k}_1Z$$

dir.

$$\lambda_X = \left\langle \oint D ds, X \right\rangle$$

$$= \oint \bar{k}_2 ds = \oint \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\bar{k}_1 ds = \oint k_g dt$$

$$L_X = x_1 \oint ds$$

$$= x_1 L_T$$

elde edilir.

Ayrıca X doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için drali sıfır olmalıdır.

$$P_X = \frac{\det(T, X, X')}{|X'|^2}$$

$$= \frac{\det\left(T, x_1T + x_2N + x_3B, -k_1x_2T + \left(x_1k_1 - x_3k_2\right)N + x_2k_2B\right)}{\sqrt{\left(k_1x_2\right)^2 + \left(x_1k_1 - x_3k_2\right)^2 + \left(x_2k_2\right)^2}}$$

$$P_X = 0 \Leftrightarrow x_2^2k_2 - x_3(x_1k_1 - x_3k_2) = 0$$

Bu durumda

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{x_2^2+x_3^2}{x_1x_3}$$

dir ve ayrıca $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ olduğundan

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-x_1^2}{x_1x_3}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.3. M yüzeyi açılabilirdir $\Leftrightarrow$ $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1-x_1^2}{x_1x_3}$ dir.

Tanım 3.3.1. $\gamma: I\subset R\rightarrow R^3$ dönüşümü ile verilen bir uzay eğrisinin teğeti sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu uzay eğrisi genel helis olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu 2000b).

Teorem 3.3.2. $\kappa>0$ için γ genel helistir $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\tau}{\kappa}=sbttir$ (Hacısalihoğlu 2000b).

Sonuç 3.3.4. M yüzeyi açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin harmonik eğriliği

$$H=\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-x_1^2}{x_1x_3}$$

olan bir helistir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha(s)$ helis ise $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir.

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-x_1^2}{x_1x_3}$$

seçildiği için M yüzeyi açılabilirdir.

$(\Leftarrow)$: M yüzeyi açılabilirdir $\Rightarrow$ $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1-x_1^2}{x_1x_3}$ sabit olduğundan $\alpha(s)$ bir helistir.

3.4 Slant Helisler ve Regle Yüzeyler

Tanım 3.4.1. $\tilde{\gamma}: I \subset R \to R^3$ dönüşümü ile verilen bir uzay eğrisinin asli normali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu uzay eğrisi slant helis olarak adlandırılır (Kula ve Yaylı 2005).

Teorem 3.4.1. $\tilde{\gamma}: I \subset R \to R^3$ eğrisi bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$\kappa_g = \frac{1}{\|\gamma'\|} \frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = sbt$ olmasıdır (Salkowski 1909).

$\alpha(s)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin normalinin integral eğrisi

$$\beta(s) = \int N(s)ds$$

olsun. $\beta(s)$ eğrisnin Frenet çatısı $\{N, C, W\}$ çatısıdır. Bu durumda

$$X = x_1 N + x_2 C + x_3 W \ , \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \ , \ x_i \in R$$

olmak üzere

$$\varphi(s,v) = \beta(s) + vX(s)$$

regle yüzeyini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.4.2. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\beta(s) = \int N(s)ds$ eğrisinin Frenet çatısı $\{N, C, W\}$ olsun.

$\varphi(s,v) = \beta(s) + vX(s)$ yüzeyi açılabilirdir $\Leftrightarrow \sigma = \frac{x_1 x_3}{1-x_1^2}$ dir.

İspat: Bu yüzeyin drali

$$P_X = \frac{\det\left(N, X, X'\right)}{\|X'\|^2}$$

$$=\frac{x_2^2 g(s)-x_3(x_1 f(s)-x_2 g(s))}{\sqrt{\left(f(s)x_2\right)^2+\left(x_1 f(s)-x_3 g(s)\right)^2+\left(x_2 g(s)\right)^2}}$$

$P_X=0 \Leftrightarrow x_2^2 g(s)-x_3(x_1 f(s)-x_2 g(s))=0$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{f}=\frac{x_1x_3}{1-x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma=\frac{x_1x_3}{1-x_1^2}$$

Teorem 3.4.3. $\varphi(s,v)=\alpha(s)+vX(s)$ yüzeyi açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin

$$\sigma=\frac{x_1x_3}{1-x_1^2}$$

olan bir slant helis olmasıdır.

ispat: $(\Rightarrow)$: $\varphi(s,v)=\alpha(s)+vX(s)$ yüzeyi açılabilir olsun. Bu durumda

$P_X=0$ dır. Teorem 3.4.2. gereğince

$P_X=0 \Leftrightarrow x_2^2 g(s)-x_3(x_1 f(s)-x_2 g(s))=0$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{f}=\frac{x_1x_3}{1-x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma=\frac{x_1x_3}{1-x_1^2}$$

elde edilir. σ sabit olduğundan $\alpha(s)$ slant helistir.

$(\Leftarrow)$: $\alpha(s)$ bir slant helis olsun. Bu durumda σ sabittir.

$\sigma=\dfrac{x_1x_3}{1-x_1^2}$ olduğundan

$P_X=0$ dır. Dolayısıyla yüzey açılabilirdir.

Örnek 3.4.1. $\alpha(s)=\left(\left(\frac{2}{3}+\frac{\cos s}{3}\right)\cos s,\left(\frac{2}{3}+\frac{\cos s}{3}\right)\sin s,\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\frac{s}{2}\right)$ slant helis denklemi verilsin. Slant helisin teğetler göstergesi

$$T(s)=\left(-\frac{2}{3}(1+\cos s)\sin s,\frac{1}{3}(2\cos s+\cos 2s),-\frac{2}{3}\sqrt{2}\sin\frac{s}{2}\right)$$

dir. Slant helisin binormaller göstergesi

$$B(s)=\left(\frac{-2\cos\frac{s}{2}-\cos\frac{3s}{2}+\cos\frac{5s}{2}}{6\cos\frac{s}{2}},\frac{2\sin\frac{s}{2}\sin^2 s}{3\cos\frac{s}{2}},\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\frac{s}{2}\right)$$

dir. Eğrinin asli normaller göstergesi

$$N(s)=\left(\frac{2}{3}(1-2\cos s)\sqrt{1+\cos s},-\frac{2(\sin s+\sin 2s)}{3\sqrt{1+\cos s}},-\frac{1}{3}\right)$$

dir. Ayrıca eğrinin eğriliği ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s)=\sqrt{1+\cos s}$$

$$\tau(s)=\sqrt{2}\sin\frac{s}{2}$$

dir.

$$\sigma=\frac{\kappa^2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(1+\cos s)\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2}\sqrt{1+\cos s}+\frac{\sin s}{2\sqrt{1+\cos s}}\sqrt{2}\sin\frac{s}{2}\right)}{(1+\cos s)}}{\left(1+\cos s+2\sin^2\frac{s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\cos s\right)\cos\dfrac{s}{2}+\sqrt{2}\sin s\sin\dfrac{s}{2}}{2\sqrt{1+\cos s}}}{\left(1+\left(1-2\sin^{2}\dfrac{s}{2}\right)+2\sin^{2}\dfrac{s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

elde edilir.

$\sigma = \dfrac{x_1 x_3}{1-x_1^2}$ eşitliğinde

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{x_1 x_3}{1-x_1^2}$$

olacak şekilde x_1, x_2, x_3 değerlerini elde edelim.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 &= \frac{\sqrt{7}}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

seçilirse,

$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ regle yüzeyinde

$$X = x_1 N + x_2 C + x_3 W$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}N + \frac{\sqrt{7}}{4}C + \frac{1}{4}W$$

elde edilir.

$\beta = \int N ds$ olmak üzere

φ yüzeyi açılabilirdir.

Örnek 3.4.2.

$$\alpha(s) = \left(\frac{25}{34}\sin s - \frac{81}{850}\sin\frac{25}{9}s, -\frac{25}{34}\cos s + \frac{81}{850}\cos\frac{25}{9}s, -\frac{135}{136}\sin\frac{8}{9}s\right)$$

slant helisi verilsin. Bu durumda slant helisin teğetler göstergesi

$$T(s)=\left(\frac{1}{34}\left(25\cos s-9\cos\frac{25}{9}s\right),\frac{1}{34}\left(25\sin s-9\sin\frac{25}{9}s\right),-\frac{15}{17}\cos\frac{8}{9}s\right)$$

dir. Slant helisin binormaller göstergesi

$$B(s)=\left(\frac{25\cos\frac{1}{9}s-16\cos\frac{17}{9}s-9\cos\frac{11}{3}s}{68\sin\frac{8}{9}s},\frac{25\sin\frac{1}{9}s-16\sin\frac{17}{9}s-9\sin\frac{11}{3}s}{68\sin\frac{8}{9}s},\frac{15}{17}\sin\frac{8}{9}s\right)$$

dir. Slant helisin asli normal göstergesinin denklemi

$$N(s)=\left(\frac{15}{17}\cos\frac{17}{9}s,\frac{15}{17}\sin\frac{17}{9}s,\frac{8}{17}\right)$$

dir. Ayrıca slant helisin eğrilikleri

$$\kappa(s)=\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}s$$

$$\tau(s)=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}s$$

dir.

$$\sigma=\frac{\kappa^2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{s}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2}\sqrt{2}\sin\frac{s}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{s}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2}\right)}{2\sin^2\frac{s}{2}2\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

elde edilir.

$$\sigma = \frac{x_1 x_3}{1 - x_1^2} \text{ eşitliğinde}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{x_1 x_3}{1 - x_1^2}$$

Olacak şekilde x_1, x_2, x_3 değerlerini elde edelim.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \\ x_3 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$$

seçilirse

$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ regle yüzeyinde

$$X = x_1 N + x_2 C + x_3 W$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} N + \frac{\sqrt{7}}{4} C + \frac{1}{4} W$$

elde edilir.

$\beta = \int N ds$ olmak üzere

φ yüzeyi açılabilirdir.

4. REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölüm, “Structure and Characterization af Ruled Surface in Euclidean 3-Space” makalesinin açılmış haline ayrılmıştır (Yu vd. 2014).

Önceki bölümde dayanak eğrisinin çatısı esas alınarak regle yüzeyler karakterize edildi. Bu kısımda ise doğrultman eğrisi küresel eğri alınmış ve bu eğrinin parametresi kullanılmıştır. Burada doğrultman eğrisinin çatısı ele alınmıştır. Bu çatı aynı zamanda Sabban çatısı olarak adlandırılır (Koendering 1990).

4.1 Regle Yüzeylerin Yapı Fonksiyonları

$X(u,v) = a(u) + vb(u)$ E^3 de açılamayan bir regle yüzey olsun. $b^2(u) = 1$ ve u parametresi $b(u)$ küresel eğrisinin yay uzunluğudur. $a(u)$, regle yüzeyin striksiyon çizgisidir. Bu demek oluyor ki $a'(u).b'(u) = 0$ dır. Burada $a' = \dfrac{da}{du}$ dir. Uygunluk için açılamayan regle yüzeylerin standart denklemi şöyle verilmiştir.

$$x(u) = b(u)$$

$$x'(u) = \alpha(u)$$

$$y(u) = \alpha(u) \times x(u)$$

Bu durumda $b(u)$ birim kürenin Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{cases} x'(u) = \alpha(u) \\ \alpha(u) = -x(u) + k_g(u)y(u) \\ y'(u) = -k_g(u)\alpha(u) \end{cases}$$

$k_g(u)$ fonksiyonu, küresel $b(u)$ eğrisinin geodezik eğriliğidir. $\{\alpha(u), x(u), y(u)\}$, $b(u)$ küre eğrisinin Frenet çatısıdır.

4.2 Açılamayan Regle Yüzeylerin Adım Fonksiyonu

$X(u,v)$ regle yüzeyi üzerinde $(u_0, 0)$ noktasından geçen dik yörünge çizgileri şöyle verilmiştir.

$$A(u) = a(u) - \left[\int_{u_0}^{u} \left(a'(u).b(u) \right) du \right] b(u)$$

Tanım 4.2.1. $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ regle yüzeyinin $a(u_0)$ daki $\delta(u_0)$ daki adımı şöyle tanımlanır.

$$\delta(u_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\left[A(u_0 + \Delta u) - a(u_0 + \Delta u) \right] .b(u_0 + \Delta u)}{\Delta u} = -a'(u).b(u_0)$$

$\delta(u)$, regle yüzeyin adım fonksiyonudur.

Uyarı 4.2.1. $\delta(u)$ adım fonksiyonu tanımından

$$\int_{u_1}^{u_2} \delta(u) du = -\int_{u_1}^{u_2} a'(u).b(u) du$$

u_1 den u_2 ye çizgi boyunca ötelenen regle yüzey üzerindeki noktanın uzaklığını belirtir.

Teorem 4.2.1. $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ regle yüzeyinin $\delta(u)$ adım fonksiyonunun sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $X(u,v)$ nin striksiyon çizgisinin binormal yüzeyi olmasıdır.

4.3 Açılamayan Regle Yüzeylerin Adımının Açı Fonksiyonu

Tanım 4.3.1. Bir parametreli birim vektör alanı $b(u)$ ve $|b'(u)|=1$ olmak üzere,

$$\theta(u) := -\langle (b'(u)\times b(u))', b'(u)\rangle$$

Açı fonksiyonu ya da self spinning fonksiyonu olarak adlandırılır.

Uyarı 4.3.1. $b(u)$ vektör alanının açı fonksiyonu tanımından

$$\theta_0 = \int_{u_1}^{u_2} \theta(u)du$$

elde edilir.

Tanım 4.3.2. $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ E^3 de herhangi bir açılamayan regle yüzey, $a(u)$, striksiyon çizgisi ve $b(u) = |b'(u)| = 1$ olsun. $b(u)$ vektör alanının açı fonksiyonuna, regle yüzeylerin adımının açı fonksiyonu denir.

$$\theta(u) = k_g(u)$$

elde edilmiştir.

Uyarı 4.3.2. Eğer $X(u,v) = a(u) + vb(u)$**,** E^3 de kapalı regle yüzey ise

$$\oint \theta(u)du = \oint k_g(u)du$$

adım açısı olarak tanımlanmıştır.

4.4 Açılamayan regle yüzeylerin yapı fonksiyonları

Küresel eğrilik fonksiyonu, adım fonksiyonu ve adımın açı fonksiyonu kullanılarak yapı fonksiyonları tanımlanabilir ve açılamayan regle yüzeylerin bir sınıflandırılması verilebilir.

Tanım 4.4.1. $X(u,v) = a(u) + vb(u)$**,** herhangi bir regle yüzey ve $a(u)$ striksiyon çizgisi olmak üzere,

$$a'(u) = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$$

Burada $\{\alpha(u), x(u) = b(u), y(u)\}$, $b(u)$ küresel eğrisinin, küresel Frenet çatısıdır. $k_g(u)$, $b(u)$ nun küresel eğrilik fonksiyonu olarak alınırsa $X(u,v)$ regle yüzeyi $\{k_g(u), \lambda(u), \mu(u)\}$ dönüşümüyle tanımlanır. $k_g(u)$, $\lambda(u)$ ve $\mu(u)$ fonksiyonları, 3 boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyin yapı fonksiyonlarıdır.

$\lambda(u)$ yapı fonksiyonu tanımından

$$\lambda(u) = -\delta(u)$$

elde edilmiştir.

Tanım 4.4.2. $X(u,v) = a(u) + vb(u)$**,** E^3 de açılamayan herhangi bir regle yüzey ve $a(u)$ striksiyon çizgisi öyle ki $a'(u) = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$ eşitliği sağlanır. Burada $\{\alpha(u), x(u) = b(u), y(u) = \alpha(u) \times x(u)\}$, $b(u)$ eğrisinin küresel Frenet çatısıdır. Bu durumda adım fonksiyonu $\lambda(u) \not\equiv 0$ ise $X(u,v)$ regle yüzeyine adımlı regle yüzey denir. Aksi halde adımsız regle yüzey adını alır.

Teorem 4.4.1. $\{k_g(u), \lambda(u), \mu(u)\}$, $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ regle yüzeyinin yapı fonksiyonları olsun. $b^2(u) = 1$ ve $|b'(u)| = 1$ olmak üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Eğer $X(u,v)$ adımsız ise, striksiyon çizgisinin binormal yüzeyidir ve şöyle yazılabilir.

$$X(u,v) = \int_{u_0}^{u} \mu(t) y(t) dt + vb(u)$$

2. Adımlı regle yüzeyler ise şöyle yazılabilir/

$$X(u,v) = \int_{u_0}^{u} \left[\lambda(t)x(t) + \mu(t)y(t)\right] dt + vb(u)$$

4.5 Açılamayan Regle Yüzeylerin Özellikleri

Bu bölümde regle yüzeylerin yapı fonksiyonlarının bağıntıları ve özellikleri üzerinde durulacaktır. Aynı zamanda regle yüzeylerin yapı fonksiyonlarının geometrik ve kinematik özellikleri verilecektir

Teorem 4.5.1. $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ açılamayan bir regle yüzey, $b^2(u) = 1$, $|b'(u)| = 1$ ve $a(u)$ striksiyon çizgisi olmak üzere, striksiyon çizgisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(u)$ ve torsiyon fonksiyonu $\tau(u)$ olsun.

$$\kappa^2 = \frac{\left(\lambda - k_g \mu\right)^2 \left(\lambda^2 + \mu^2\right) + \left(\lambda' \mu - \lambda \mu'\right)^2}{\left(\lambda^2 + \mu^2\right)^3}$$

$$\tau = \frac{\left(\lambda - \mu k_g\right)\left(\lambda \mu'' - \lambda'' \mu + \left(\lambda k_g + \mu\right)\left(\lambda - \mu k_g\right)\right) + \left(\lambda' \mu - \lambda \mu'\right)\left(2\lambda' - 2k_g \mu' - k_g' \mu\right)}{\left(\lambda - \mu k_g\right)^2 \left(\lambda^2 + \mu^2\right) + \left(\lambda' \mu - \lambda \mu'\right)^2}$$

İspat.

$$\begin{cases} \kappa(u) = \dfrac{|a'(u)\times a''(u)|}{|a'(u)|^3} \\ \tau(u) = \dfrac{\langle a'(u), a''(u), a'''(u)\rangle}{|a'(u)\times a''(u)|^2} \end{cases}$$

Kullanılarak doğrudan hesaplanabilir. Teorem 4.5.1. in sonuçları aşağıda verilmiştir.

$k_g(u)$, $\lambda(u)$, $\mu(u)$ yapı fonksiyonlarıyla birlikte $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ açılamayan bir regle yüzey olsun. $X(u,v)$ nin birinci temel formları şöyledir.

$$\begin{cases} E = \lambda^2 + \mu^2 + v^2 \\ F = \lambda^2 \\ G = 1 \end{cases}$$

Birim normal vektör ise,

$$n = \frac{-\mu(u)\alpha(u) + vy(u)}{\sqrt{\mu^2 + v^2}}$$

İkinci temel formlar,

$$\begin{cases} L = \dfrac{-(\lambda(u) - k_g(u)\mu(u))\mu(u) + (\mu'(u) + k_g(u)v)v}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}} \\ M = \dfrac{-\mu(u)}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}} \\ N = 0 \end{cases}$$

$X(u,v)$ nin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği,

$$K(u,v)=\frac{-\mu^2(u)}{\left(\mu^2(u)+v^2\right)^2}$$

$$H(u,v)=\frac{k_g(u)v^2+\mu'(u)v+k_g(u)\mu^2(u)+\lambda(u)\mu(u)}{2\sqrt{\left(\mu^2(u)+v^2\right)^3}}$$

4.6 Örnekler

Örnek 4.6.1. Teorem 4.5.1. de λ,μ sabit alınırsa,

$$\kappa^2=\frac{\left(\lambda-k_g\mu\right)^2}{\left(\lambda^2+\mu^2\right)^2}$$

$$\tau=\frac{\left(\lambda k_g+\mu\right)}{\left(\lambda^2+\mu^2\right)}$$

elde edilir. $\dfrac{\lambda}{\mu}=c$ olarak alınırsa

$$\frac{\tau}{\kappa}=\frac{k_g+c}{1-ck_g}$$

dir. Burada k_g , $b(u)$ eğrisinin geodezik eğriliğidir.

Eğer $\dfrac{\tau}{\kappa}$ sabit ise k_g de sabittir.

Örnek 4.6.2. $k_g = -c$ olarak alınırsa $\tau = 0$ olur ki bu da $a(u)$ striksiyon çizgisinin düzlemsel olduğunu gösterir.

Örnek 4.6.3. k_g sabit ise $\dfrac{\tau}{\kappa}$.sabittir. ($k_g \neq -c$) Bu durumda $a(u)$ striksiyon çizgisi helis eğrisi olur.

Teorem 4.6.1. $a(u) = a\int b(u)du + a\cot\theta\int b \wedge b'du$ olsun. a, θ sabit olmak üzere $a(u)$, Bertrand eğrisidir.(Izumiya and Takeuchi 2002)

Örnek 4.6.4. λ, μ sabit ve özel olarak $\lambda = a$ ve $\mu = a\cot\theta$ seçilirse Tanım 4.4.1 den

$$a'(u) = \lambda(u)b(u) + \mu(u)y(u)$$

elde edilir. Burada $y(u) = b \wedge b'$ dir.

$a(u) = \lambda\int \vec{b}du + \mu\int b \wedge b'du$ Bertrand eğrisi elde edilir.

Sonuç 4.6.1. $b \in S^2$ için

$$a(u) = \lambda\int bdu + \mu\int (b \wedge b')du$$

dir. Dolayısıyla $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi Bertrand eğrisidir.

Örnek 4.6.5. $\dfrac{\lambda}{\mu} = c$ olsun. Bu durumda

$$H = \frac{\tau}{\kappa} = \frac{k_g + c}{1 - ck_g}$$

elde edilir. Burada H, $a(u)$ eğirisinin harmonik eğriliğidir.

Örnek 4.6.6. Teorem 4.5.1. de $H = 0$ olursa $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ regle yüzeyi minimaldir.

$$k_g(u)v^2 + \mu'(u)v + k_g(u)\mu^2(u) + \lambda(u)\mu(u) = 0$$

Özel olarak $k_g = 0$ ve $\mu = 0$ alınırsa $X(u,v) = a(u) + vb(u)$ minimal yüzeyi elde edilir.

$$a'(u) = \lambda b(u)$$

$$a(u) = \lambda \int b(u)du$$

$X(u,v) = \lambda \int b(u)du + vb(u)$ regle yüzeyi elde edilir. Bu bir düzlemdir.

Örnek 4.6.7. Teorem 4.5.1. de $H = 0$ ise
$k_g(u)v^2 + \mu'(u)v + k_g(u)\mu^2(u) + \lambda(u)\mu(u) = 0$ olur.

Bu durumda $\lambda = 0$, μ sabit, $k_g = 0$ alınırsa

$$a' = b \wedge b'$$

$$a = \int b \wedge b' du$$

elde edilir. Örneğin,

$$b = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$b' = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$b \wedge b' = (0, 0, 1)$$

$$a = \int (0,0,1) du$$

$$= (0,0,u)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$X(u,v) = (0,0,u) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

$$= (v\cos u, v\sin u, u)$$

regle yüzeyi helikoid olarak bulmuş oluruz.

4.7 Striksiyon Çizgisi Manheim Eğrisi Olan Regle Yüzeyler

Tanım 4.7.1. $\alpha : I \to E^3$ yay parametresi ile verilsin. $\{T, N, B\}$ α eğrisinin Frenet çatısı olsun.

$$\varphi(s,v)=\alpha(s)+vN(s)$$

normal yüzeyi verilsin. Striksiyon çizgisi

$$\bar{\alpha}=\alpha+\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}N$$

dir. Eğer $\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}=c\ (c\in R)$ ise α eğrisine Manheim eğrisi denir. $\bar{\alpha}$ de α nın Manheim çiftidir. Yani $\bar{\alpha}$ bir manheim eğrisi olur.

Tanım 4.7.2 $\alpha(s)$ eğrisinin $\{N,C,W\}$ bir alternatif çatısını alalım.

$$C=\frac{N'}{|N'|} \text{ ve } W=N\times C$$

$$\gamma(s)=\int N(s)ds$$

eğrisi α nın normal direction eğrisidir.

$\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{N,C,W\}$ dır. $\gamma(s)$ in eğrilikleri f ve g olsun.

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada $f=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ ve $g=\sigma f$ dir.

Eğer $\gamma(s)$ in manheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$f = c\left(f^2 + g^2\right)$$

$$1 = cf\left(1+\sigma^2\right)$$

olmasıdır.

Eğer f sabit ise σ da sabit olur. Bu ise, f ve σ nın sabit olması, α eğrisinin sabit presesyonlu eğri olmasını gerektirir. (yani α slant helistir.)

Aşağıdaki teoremi yazabilirz:

Teorem 4.7.1. α sabit presesyonlu eğri olsun. Bu durumda γ manheim eğrisidir. Böylece γ nın normal yüzeyi

$$\varphi(s,v) = \gamma + vC(s)$$

olur ve φ nin striksiyon çizgisi de γ nın manheim çiftidir.

İspat: φ nin striksiyon çizgisi

$$\bar{\gamma} = \gamma + \frac{f}{f^2+g^2}C$$

α sabit presesyonlu olduğundan

$$\frac{f}{f^2+g^2} = \lambda \text{ sabittir.}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + \lambda c$$

olup bu γ nın manheim çiftidir.

Örnek 4.7.1.

$$\left.\begin{aligned}\kappa &= \cos s\\ \tau &= \sin s\end{aligned}\right\}$$ olan α eğrisinin

$$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 1$$

$$\sigma = \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{3/2}} = \frac{\left(1 + \tan^2 s\right)\cos^2 s}{1} = 1$$

$$g = \sigma f = 1$$

elde edilir. Bu durumda $\gamma = \int N(s)ds$ olmak üzere γ manheim eğrisidir.

$\varphi(s,v) = \gamma + vC(s)$ regle yüzeyin striksiyon çizgisi $\overline{\gamma} = \gamma + C$ olup γ nın manheim çiftidir.

Teorem 4.7.2. $\alpha : I \to E^3$ eğri olsun. Bu eğri üzerinde $\{X, Y, Z\}$ ortonormal çatısında,

$$Y = \frac{X'}{|X'|} \text{ ve } Z = X \times Y$$

$\gamma(s) = \int X(s)ds$ olsun ve $\varphi(s,v) = \gamma(s) + vY(s)$ regle yüzeyi verilsin. γ manheim eğrisi olmak üzere φ nin striksiyon çizgisi γ nın manheim çiftidir.

İspat: $\bar{\gamma} = \gamma + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} Y(s)$

γ manheim eğrisi olup $\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} = c$ dir. $\bar{\gamma}$ da γ nın manheim çifti olur.

Özel haller:

1. $X = T$ alınırsa $\gamma(s) = \alpha(s)$ olur. $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$

Buradan Teorem 4.7.2. ede edilir.

2. $X = N$ alınırsa $\{N, C, W\}$ çatısı için

$$\gamma = \int N ds$$

olur.

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vC(s)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + \frac{f}{f^2 + g^2} C(s)$$

olur. Eğer γ manheim ise , $\bar{\gamma}$, γ nın manheim çiftidir.

3. α sabit presesyonlu eğri ise ,

$\gamma = \int N ds$ bir manheim eğrisidir.

$\bar{\gamma}$ da γ nın manheim çiftidir.

4. $\alpha : I \to E^3$

$$s \to \alpha(s)$$

$$\gamma = \int B(s)ds \text{ ve } \varphi(s,v) = \gamma + vN(s)$$

elde edilir.

$$\bar{\gamma} = \gamma + \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} N(s)$$

dir. γ manheim ise , $\bar{\gamma}$, γ nın manheim çifti olur.

KAYNAKLAR

Altınok, M. 2011. Düzlemsel Eğriler Yardımıyla Bazı Özel Uzay Eğrilerinin Karakterizasyonları. Yüksek Lisans Tezi. Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir

Hacısalihoğlu, H.H. 2000a. Diferensiyel Geometri. Cilt II. Ankara üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara

Hacısalihoğlu, H.H. 2000b. Diferensiyel Geometri. Cilt I. Ankara üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 2012. Diferensiyel Geometri. Cilt II. Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Diyarbakır

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. Journal of Geometry, 74, 97-109.

Kula, L. and Yaylı, Y. 2005. On slant helix and its spherical andicatrix. Applied Mathematics and Computation 169, 600-607.

Koendering J. 1990. Solid Shape. MIT Press. Cambridge. MA

Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinmatics and Lie Groups. Gordon and Breach Sciense Publishers

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri. Nobel Basımevi. Ankara.

Uzunoğlu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. A new approach on curves of constant precession. Applied Mathematics and Computation 275, 317-323.

Yu, Y., Liu, H. and Jung, D.S. 2014. Structure and Characterization of Ruled Surface in Euclidean 3-Space, Applied Mathematics and Computation 233, 252-259.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat AKSAR

Doğum Yeri : Sakarya

Doğum Tarihi : 18.06.1989

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Adapazarı Şehit Üsteğmen Selçuk Esedoğlu Lisesi (2007)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011)

Yüksek lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2013-Haziran 2017)