ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SANSÜRLÜ VERİLERDE YENİLEME SÜREÇLERİNDE TAHMİN

Ömer ALTINDAĞ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

TEZ ONAYI

Ömer ALTINDAĞ tarafından hazırlanan **"Sansürlü Verilerde Yenileme Süreçlerinde Tahmin"** adlı tez çalışması 18/09/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İhsan KARABULUT
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Mahmut KARA
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Ekonometri Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Serpil TÜRKYILMAZ
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

18.09.2017

Ömer ALTINDAĞ

ÖZET

Doktora Tezi

SANSÜRLÜ VERİLERDE YENİLEME SÜREÇLERİNDE TAHMİN

Ömer ALTINDAĞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Olasılık teorisinin birçok uygulama alanında önemli bir model olarak kullanılan yenileme süreci için iki önemli karakteristik bu sürece ilişkin ortalama değer ve varyans fonksiyonlarıdır. Birçok uygulamalı alanda bu fonksiyonların bilgisine ihtiyaç duyulur. Bir yenileme sürecine ilişkin gözlemler sansürlü olarak elde edildiğinde bu fonksiyonların tahmini önem arz eder. Bu çalışmada, öncelikle çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar verilir. Sonra yenileme süreci tanıtılır ve gerekli özelliklerinden bahsedilir. Bir yenileme sürecine ilişkin ortalama değer ve varyans fonksiyonları ile ilgili bazı bilgiler hatırlatılır. Sağdan sansürleme türleri detaylıca ele alınır ve bu tipteki sansürlemeler için Üstel, Weibull ve Lognormal dağılım durumlarında parametrik tahmin en çok olabilirlik yöntemi ile ele alınır. En çok olabilirlik tahminlerinin hesabı için EM algoritmasından faydalanılır. Bununla birlikte uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri de verilir. Son olarak ise sansürlü gözlem durumunda ortalama değer ve varyans fonksiyonları için parametrik ve parametrik olmayan tahmin ediciler önerilir ve bu tahmin edicilerin tutarlılık, asimptotik normallik gibi özellikleri elde edilir. Tahmin edicilerin küçük örneklem davranışları bir simülasyon çalışması yardımı ile değerlendirilir.

Eylül 2017, 186 sayfa

Anahtar Kelimeler: yenileme süreci, yenileme fonksiyonu, varyans fonksiyonu, sansürlü veri, rasgele sansürleme, ilerleyen tür tip II sansürleme, en çok olabilirlik, EM algoritması

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ESTIMATION IN RENEWAL PROCESSES UNDER CENSORED DATA

Ömer ALTINDAĞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

The renewal process is widely used in the applied fields of probability theory as an important model. Two main characteristics of the renewal process are its mean value and variance functions. In many applications involving renewal process, the knowledge of the mean value and variance functions is needed. It is important to estimate these functions when the observations are censored. In this study, the basic concepts which are used throughout the study are firstly given. Then, the renewal process is introduced and its some properties are given. Also, some expressions for the mean value and variance functions of renewal process are reminded. The right censoring is comprehensively considered. For the Exponential, Weibull and Lognormal models, maximum likelihood estimation procedures are derived under some right censoring plans. The EM algorithm is utilized to compute maximum likelihood estimates. Besides, the modified maximum likelihood estimators are taken into account. Finally, some parametric and non-parametric estimators are proposed for both the mean value and variance functions and their statistical properties such as consistency, asymptotic normality are obtained. Small sample performances of the estimators are evaluated by a simulation study.

September 2017, 186 pages

Key Words: renewal process, renewal function, variance function, censored data, random censoring, progressive type II censoring, maximum likelihood, EM algorithtm

TEŞEKKÜR

"Sansürlü Verilerde Yenileme Süreçlerinde Tahmin" ile ilgili yaptığım bu çalışmada bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın hiçbir anında benden yardımını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halil AYDOĞDU (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı)'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışması boyunca yapılan tez izleme toplantılarına katılan, fikirleri ve önerileri ile tez çalışmamın olgunlaşmasına katkıda bulunan, destekleri ile beni gayretlendiren Sayın Doç. Dr. İhsan KARABULUT (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Serpil TÜRKYILMAZ (Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) hocalarıma ayrıca teşekkür ederim.

Bana bu bilimi öğreten ve sevdiren bütün Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü çalışanlarına emeklerinden dolayı teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen eşime, aileme, sevdiklerime ve üzerimde hakkı bulunan herkese teşekkür ederim.

Ömer ALTINDAĞ
Ankara, Eylül 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$F(\cdot)$	Dağılım fonksiyonu
$f(\cdot)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F_{LS}(\cdot)$	F fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü
$f_L(\cdot)$	f fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$*$	Stieltjes konvolüsyon işlemi
$F^{n*}(\cdot)$	F'nin kendisi ile n kez konvolüsyonu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\{N(t), t \geq 0\}$	Yenileme süreci
$M(\cdot)$	Yenileme fonksiyonu
$V(\cdot)$	Varyans fonksiyonu
$\mathcal{C}[0, \tau]$	$[0, \tau]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{D}[0, \tau]$	$[0, \tau]$ aralığında sağdan sürekli soldan limitli fonksiyonlar uzayı
(Ω, U, P)	Olasılık uzayı
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Reel sayılar kümesindeki Borel cebiri
$\xrightarrow{d}$	Dağılımda yakınsama
$\xrightarrow{P}$	Olasılıkta yakınsama
$\xrightarrow{\text{hhhy}}$	Hemen hemen her yerde yakınsama
$\Gamma(\cdot)$	Gama fonksiyonu
$\psi(\cdot)$	Digama fonksiyonu
$\psi'(\cdot)$	Trigama fonksiyonu
$[\| \cdot \|]$	Tam değer
$\|\|\cdot\|\|$	Öklid normu

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Poisson sürecinin bir genellemesi olan yenileme süreci olasılık teorisinin güvenilirlik, envanter teorisi, kuyruk teorisi, risk analizi, garanti analizi gibi birçok uygulamalı alanında araştırmacılar tarafından sıklıkla kullanılan önemli bir sayma süreci modelidir. Örneğin; güvenilirlik teorisinde bozulan bir sistemin tamiri ya da yenisi ile değiştirilmesi probleminde yenileme süreci model olarak kullanılır. Envanter teorisinde ardışık taleplerin modellenmesi ya da gelecek talebin tahmini için yenileme süreci modelinden faydalanılır. Kuyruk teorisinde belirli bir yere gelişlerin ya da varışların modellenmesinde yenileme süreci kullanılır. Risk analizinde belirli bir zaman periyodunda ortaya çıkan hasarların modellenmesi yenileme süreci ile gerçekleştirilir. Garanti analizinde ise üreticiler ürünlerine ilişkin garanti periyotlarını yenileme süreci bilgisinden yararlanarak oluşturur.

Yenileme süreci ile ilgili uygulamalarda genellikle bu sürece ilişkin iki önemli karakteristik olan ortalama değer ve varyans fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. Bu fonksiyonlar sırası ile M ve V ile gösterilsin. M ortalama değer fonksiyonu ayrıca yenileme fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bir yenileme sürecine ilişkin çıkarım olaylar arası geçen zaman sürelerinin dağılımı olan F üzerinden gerçekleştirilir. F dağılım bilgisi ile bir yenileme sürecine ilişkin tüm hesaplamalar ve çıkarımlar gerçekleştirilebilir. Genellikle F dağılımı ya biçimsel olarak bilinmez ya da biçimsel olarak bilinir fakat parametreleri bilinmezdir. F'ye ilişkin bu durumlara göre yenileme sürecine ilişkin M ve V fonksiyonları elde edilen verilerden parametrik ya da parametrik olmayan yöntemler ile tahmin edilir. Bir yenileme süreci gözlendiğinde, bu sürece ilişkin olaylar arası geçen zamanlar yani F dağılımına sahip bir $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örneklemi gözlenir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin tam olarak gözlendiği durum için M ortalama değer fonksiyonunun tahmini Frees (1986a, 1986b) tarafından detaylıca çalışılmıştır. Frees M fonksiyonu için parametrik ve parametrik olmayan bazı tahmin ediciler önermiş ve tahmin edicilerin tutuarlılık, asimptotik normallik gibi bazı özelliklerini elde etmiştir. Aydoğdu (1997) ise buna ek olarak V varyans fonksiyonu için F'nin $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminden tahminine bağlı olarak parametrik ve parametrik olmayan tahmin ediciler önermiş ve bu tahmin edicilerin tutarlılık, asimptotik yansızlık gibi özelliklerini elde etmiştir. Ancak bazı durumlarda $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemi tam olarak gözlenemeyebilir, yani bu gözlemler sansürlü gözlem içerebilir. Bir yenileme sürecine ilişkin olaylar arası geçen zamanların neden sansürlü olabileceği şöyle açıklanabilir. Örneğin belli bir ürüne ilişkin bozulma zamanları ya ürün pazara sürülmeden önce deneysel olarak gözlenir, ya da ürünün müşteriye satılmasından sonra müşterilerden gelen geri bildirim ile elde edilir. Her iki durumda da sansürlü gözlemler ortaya çıkabilir. Satış öncesi test durumunda üretici zaman veya maliyet gibi kısıtlardan ötürü ürüne ilişkin bozulma zamanlarını önceden belirleyeceği bir sansürleme planı altında gözlemek isteyebilir. Satış sonrası durumda ise sansürlü gözlemler doğal olarak ortaya çıkabilir. Örneğin bir üretici ürünlerini $t_1 = 0$ olmak üzere $i = 2,3, \dots$ için t_i zamanında satmış olsun. Bu durumda bir t anına kadar satılan ürünlerden bazıları bozulmuş olabilirken, bazıları hala çalışmaya devam edebilir. Bu durumda t anından önce bozulan ürünlere ilişkin gözlemler birer tam gözlem iken, t anında hala çalışmaya devam eden ürünlere ilişkin gözlemler ise birer sansürlü gözlem olarak değerlendirilir (Lin 1988). Bir yenileme sürecine ilişkin gözlemlerin sansürlü gözlem içermesi durumunda M fonksiyonunun tahmini Lin (1988) ve Schneider vd. (1991) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalarda rasgele sansürlü örneklem için M fonksiyonuna ilişkin önerilen tahmin ediciler yalnızca sayısal hesaplamalar üzerinden karşılaştırılmıştır. Danış (2008) ise sağdan rasgele sansürlü gözlem durumunda M yenileme fonksiyonu için F nin parametrik tahminine dayalı bir tahmin edici önerip bu tahmin edicinin tutarlı ve asimptotik yansız olduğunu göstermiştir. Özel olarak Baxter ve Li (1995) rasgele sansürlü örneklem durumu için M ve V fonksiyonlarının tahmini problemini çalışmış ve önerdikleri tahmin edicilerin tutarlılık, asimptotik normallik gibi bazı özelliklerini elde etmişlerdir. Ancak farklı sansürleme planları için M ve V fonksiyonlarının tahmini problemi çalışılması gereken önemli bir konudur.

Bir ürüne ilişkin bozulma zamanlarının gözlenerek ürüne ilişkin yaşam süresinin modellenmesi probleminde zaman veya maliyet gibi kısıtlardan ötürü genellikle bozulma zamanları bir sansürleme planına göre gözlenmektedir. Bunun için son zamanlarda ilgi çeken önemli bir sansürleme planı ilerleyen tür tip II sansürlemedir. Bu çalışmada genel olarak sağdan sansürleme durumunda M ve V fonksiyonlarının tahmini problemi üzerinde durulur, özel olarak ise ilerleyen tür tip II sansürlü gözlem durumunda M ve V fonksiyonları için parametrik ve parametrik olmayan tahmin ediciler önerilir ve bu tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri incelenir. Burada belirtilmelidir ki çalışma boyunca F'nin sürekli bir dağılım fonksiyonu olduğu varsayılarak işlem yapılır.

Bu konunun çalışılma sebebi şöyle açıklanabilir. Örneğin bir parçasının bozulması ile bozulan veya istenilen düzeyde çalışamaz duruma gelen bir sistem göz önüne alınsın. Varsayalım ki bu sistem bir askeri sistem olsun. Bu durumda, bir askeri harekât planlamasında ilgili sistemin bahsedilen parçası için belirli bir harekât süresi boyunca ne kadar yedek parçaya ihtiyaç duyulacağı problemi ortaya çıkar. Askeri yetkililer bu planlamanın yapılabilmesi için ilgili parçanın bozulma zamanlarını gözlemek isteyecektir. Ancak bu harekât esnasında mümkün olmayacağından harekât öncesi hızlı bir biçimde bu parçaya ilişkin bozulma zamanlarının gözlenmesi gerekir. Bozulma zamanlarının gözlenmesi sürecinin hızlandırılması için bir sansürleme planından faydalanılabilir. Bunun için de uygun bir sansürleme planı ilerleyen tür tip II sansürleme planıdır. Böylelikle bu sansürlü gözlemlere dayalı olarak M ve V fonksiyonlarının tahmini ile, ilgili harekât için lojistik planlaması gerçekleştirilebilir. Bu tür örnekler farklı durumlar için de verilebilir. Bunun için bir başka örnek ise şöyledir. Bir üretici ürünü için optimal bir garanti zamanı belirlemek istesin. Bunun için öncelikle ürüne ilişkin bozulma zamanlarının gözlenmesi gerekmektedir. Ancak üretici için gözleme aldığı tüm ürünlerin bozulma maliyeti yüksek olabilir. Bu durumda üretici ürününe ilişkin bozulma zamanlarını bir sansürleme planı altında gözlemeyi tercih edebilir. Bunun için de uygun bir sansürleme planı ilerleyen tür tip II sansürleme planıdır. Böylelikle üretici tüm ürünlerin bozulması maliyetinden kaçınarak bozulma zamanlarının gözlenmesini sonlandırabilir. Buradan da ilgili gözlemler üzerinden M ve V fonksiyonları tahmin edilerek garanti maliyet analizi yapılabilir.

Çalışmaya ilişkin bölümler şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar hatırlatılır. Özellikle rasgele değişken ve stokastik süreç dizilerinde yakınsaklık kavramı üzerinde durulur. Hem parametrik hem de parametrik olmayan modeller için önemli bir tahmin yöntemi olan en çok olabilirlik yöntemi detaylıca hatırlatılır. Kayıp gözlem durumunda en çok olabilirlik tahminlerinin hesabı için kullanılan EM algoritmasından bahsedilir. Üçüncü bölümde yenileme süreci tanıtılır ve ihtiyaç duyulan bazı özellikleri verilir. Yenileme sürecinin sırası ile ortalama değer ve varyans fonksiyonları olan M ve V fonksiyonları tanıtılır ve bu fonksiyonlara ilişkin bazı özellikler verilir. Ayrıca bu fonksiyonların sayısal hesabı üzerinde durulur. Dördüncü bölümde sağdan rasgele sansürleme kavramı detaylıca ele alınır. Özel olarak rasgele, tip I, tip II ve ilerleyen tür tip II sansürleme türleri için en çok olabilirlik tahmini problemi üzerinde durulur. Üstel, Weibull ve Lognormal modellerine ilişkin gözlemlerin yukarıda bahsedilen sansürleme planlarına göre gelmesi durumunda bu modellere ilişkin en çok olabilirlik tahmin problemi kapsamlı bir şekilde çalışılır. En çok olabilirlik tahminlerinin hesabı için EM algoritmasından faydalanılır. Ayrıca uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri de verilir. Beşinci bölümde M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının tahmini problemi ele alınır. Öncelikle tam örneklem durumu için Frees ve Aydoğdu tarafından elde edilen sonuçlar hatırlatılır. Sansürlü örneklem durumu için öncelikle sağdan rasgele sansürleme durumu incelenir. Bunun için Baxter ve Li (1995) tarafından elde edilen sonuçları verilir. Sonrasında ise bu bilgiler yardımı ile ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumu için M ve V fonksiyonlarının parametrik ve parametrik olmayan tahmini problemi ele alınır. Önerilen tahmin edicilerin tutarlılık, asimptotik normallik gibi bazı özellikleri çıkarılır. Altıncı bölümde ise beşinci bölümde önerilen tahmin edicilerin küçük örneklem performansı için bir simülasyon çalışması verilir. Son olarak çalışmada yapılanlar yedinci bölümde özetlenerek çalışma nihayetlendirilir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilir. Öncelikle konvolüsyon işlemi ve özellikleri hatırlatılır. Laplaca ve Laplace-Stieltjes dönüşümlerinden bahsedilir. Bozulma oran fonksiyonu ve bununla ilgili bazı kavramlar verilir. Stokastik sıralama ve yenileme denklemi hatırlatıldıktan sonra yakınsaklık kavramı üzerinde durulur. Bunun için fonksiyon dizilerinde, rasgele değişken dizilerinde ve stokastik süreç dizilerinde yakınsaklık kavramı ayrı ayrı ele alınır ve bunlara ilişkin yakınsama türleri verilir. Ayrıca bu kavramlarda ilgili önemli tanım ve teoremler hatırlatılır. Daha sonra en çok olabilirlik yöntemi hem parametrik hem de parametrik olmayan modeller için ele alınır. Kayıp gözlem durumunda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için kullanılan EM algoritması verilir. Bununla birlikte en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik bir ifadeye sahip olmadığında sayısal hesabın ortaya çıkardığı sorunlardan kaçınmak için önerilen uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi hatırlatılır.

2.1 Konvolüsyon İşlemi ve Özellikleri

Tanım 2.1.1 F ve G, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi iki dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x), \ \ t \in \mathbb{R} \qquad (2.1)$$

ile ifade edilen $F * G$ fonksiyonuna F ile G dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonu denir. Burada "$*$" konvolüsyon işlemini göstermektedir. Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her t için (2.1) denkleminin sağ tarafındaki integral vardır (Kawata 1972). $t < 0$ için $F(t) = G(t) = 0$ şartı sağlanıyor ise $t \geq 0$ için

$$F * G(t) = \int_{0}^{t} G(t-x)dF(x), \quad t \geq 0 \qquad (2.2)$$

olarak ifade edilmektedir.

Konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf üzerinde değişme ve birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılımın dağılım fonksiyonu " $*$ " işlemine göre birim elemandır. Bu özellikler aşağıdaki gibi gösterilir. F, G ve H herhangi birer dağılım fonksiyonu olsun. $G(-\infty) = 0$ ve $G(t-y) = \int_{-\infty}^{t-y} dG(z)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
F * G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} dG(z) \right\} dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-z} dF(y) \right\} dG(z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-z) dG(z) \\
&= G * F(t)
\end{aligned}
$$

dır. O halde konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonları için değişme özelliğine sahiptir. Bununla birlikte

$$
\begin{aligned}
F * G * H(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (G * H)(t-x) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (H * G)(t-x) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x-y) dH(y) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F * G(t-y) dH(y) \\
&= H * (F * G)(t) \\
&= (F * G) * H(t)
\end{aligned}
$$

olduğundan konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonları için birleşme özelliğine de sahiptir (Feller 1971).

Tanım 2.1.2 F herhangi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

ile verilen dağılıma sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım ya da sıfır noktasındaki Dirac dağılımı denir.

$$\begin{aligned} F^{0*} * F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-x)dF^{0*}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} F(t-x)dF^{0*}(x) + \int_{0^-}^{0^+} F(t-x)dF^{0*}(x) + \int_{0^+}^{\infty} F(t-x)dF^{0*}(x) \\ &= F(t-0)\big(F^{0*}(0^+) - F^{0*}(0^-)\big) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

olduğundan sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım konvolüsyon işlemi için birim elemandır.

Teorem 2.1.1 X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ve sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonuna sahip iki rasgele değişken olsun. Bu durumda $X + Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t) = F * G(t) \tag{2.3}$$

dır. Yani bağımsız iki rasgele değişkenin toplamlarının dağılım fonksiyonu, bu iki rasgele değişkenin dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarına eşittir (Feller 1971).

İspat.

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= P(X + Y \leq t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X + Y \leq t | Y = y)dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq t - y | Y = y)dG(y) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq t - y) dG(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t - y) dG(y)$$

$$= F * G(t).$$

Teorem 2.1.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve sırası ile $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım fonksiyonlarına sahip olsunlar. Bu durumda

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t), \quad t \geq 0 \tag{2.4}$$

dır.

Teorem 2.1.2'nin ispatı Teorem 2.1.1'in ispatına benzer bir yolla kolaylıkla gösterilebilir.

Özel olarak $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olduğunda $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = F^{n*}(t), \quad t \geq 0 \tag{2.5}$$

dır. Burada F^{n*}, F dağılım fonksiyonunun kendisi ile n kez konvolüsyonudur.

F ve G dağılım fonksiyonları sırası ile f ve g yoğunluk fonksiyonlarına sahip olduğunda, $F * G$'nin yoğunluk fonksiyonu

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - x) f(x) dx \,, t \in \mathbb{R}$$

ile verilen $f * g$ fonksiyonudur. Ayrıca F^{n*} dağılım fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonu f^{n*} dır (Feller 1971).

2.2 Laplace ve Laplace-Stieltjes Dönüşümleri

F bir değişkenli herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$F_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} F(x) dx \tag{2.6}$$

olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integral mevcut olduğunda $F_L(t)$ ile verilen fonksiyona F fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

F $\mathbb{R}$'de tanımlı, sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$F_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} dF(x) \tag{2.7}$$

ile verilen $F_{LS}(t)$ fonksiyonuna, F fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü denir. F ve G $\mathbb{R}$'de tanımlı, sağdan sürekli, azalmayan ve $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$ şartını sağlayan iki fonksiyon olmak üzere

$$(F * G)_{LS}(t) = F_{LS}(t) G_{LS}(t) \tag{2.8}$$

dır (Kawata 1972).

2.3 Bozulma Oranı Fonksiyonu ve Birikimli Bozulma Oranı Fonksiyonu

X, sürekli bir F dağılım fonksiyonuna sahip negatif değerler almayan bir rasgele değişken olsun. Burada X rasgele değişkeni bir parçanın, sistemin ya da herhangi bir canlının yaşam süresi olarak düşünülebilir. X bir parçanın ömrü olarak düşünüldüğünde, $1 - F(t) > 0$ olmak üzere t yaşındaki parçanın t anından sonra x süreli bir aralıkta koşullu bozulma olasılığı

$$F(x|t) = P(t < X \leq t + x | X > t) = \frac{P(t < X < t + x)}{P(X > t)} = \frac{F(t + x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

dır. F dağılım fonksiyonu f yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğunda

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x|t)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-F(t)}\frac{F(t+x)-F(t)}{x} \\
&= \frac{f(t)}{1-F(t)}, \qquad 1-F(t)>0
\end{aligned}
$$

ile tanımlanan h fonksiyonuna bozulma oranı fonksiyonu denir.

$$\mathcal{H}(t) = \int_0^t h(u)du\,, t \geq 0$$

ile tanımlanan $\mathcal{H}$ fonksiyonuna ise birikimli bozulma oranı fonksiyonu denir. F ile h ve $\mathcal{H}$ fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki mevcuttur:

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\ln[1-F(t)], [1-F(t)] = \exp\big(-\mathcal{H}(t)\big). \tag{2.9}$$

Bu durum F, h ya da $\mathcal{H}$ fonksiyonlarından herhangi biri bilindiğinde diğerlerinin de elde edilebileceği anlamına gelir, yani bu fonksiyonlar birbirine tek olarak belirler.

2.4 Stokastik Sıralama

X ve Y herhangi iki rasgele değişken olmak üzere, eğer $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$P(X > a) \leq (\geq) P(Y > a) \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise X stokastik olarak Y'den küçüktür (büyüktür) denir ve $X \leq_{st} \ (\geq_{st})\, Y$ ile gösterilir (Ross 1983). Ayrıca bir $\{X_k, k = 1,2, \dots\}$ stokastik süreci için $X_k \leq_{st} \ (\geq_{st})\, X_{k+1}$ eşitsizliği her k için sağlanıyor ise, bu sürece stokastik artan (azalan) denir ve $X_k \uparrow_{st} \ (\downarrow_{st})$ ile gösterilir.

2.5 Yenileme Denklemi

A bilinmeyen bir fonksiyon, a ve dağılım fonksiyonu özelliklerine sahip F bilinen birer fonksiyon olmak üzere

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \qquad t \geq 0 \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanan integral denkleme yenileme denklemi denir (Karlin ve Taylor 1975).

Teorem 2.5.1 a sınırlı bir fonksiyon ve F bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \qquad t \geq 0$$

denklemini sağlayan sonlu aralıklar üzerinde sınırlı tek bir A çözümü vardır ve bu çözüm

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x), \qquad t \geq 0 \tag{2.12}$$

dır. Burada $M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(x)$ dır (Karlin ve Taylor 1975).

2.6 Yakınsaklık ve Yakınsamalar

Bu kısımda fonksiyon dizilerinde yakınsaklık, rasgele değişken dizilerinde yakınsaklık ve genel olarak stokastik süreç dizilerinde yakınsaklık kavramlarından bahsedilir. Ayrıca bu yakınsamalarla ilgili bazı klasik yakınsama teoremleri verilir.

2.6.1 Fonksiyon dizilerinde yakınsaklık

Tanım 2.6.1. $n = 1,2,\ldots$ için f_n ve f (Ω, U, μ) ölçü uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olsun.

i. $A \subset \Omega$ olmak üzere $x \in A$ için bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı var ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna x noktasında yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ biçiminde gösterilir. Eğer $\forall x \in A$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ise (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

ii. Yukarıdaki ifadede $\forall x \in A$ için verilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı, yani x'den bağımsız ise (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir. Not edilmelidir ki (f_n) fonksiyon dizisinin bir A kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$ olmasıdır.

iii. $\mu\left(\left\{x \in \Omega \colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$ ise (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsaktır denir.

Teorem 2.6.1 $n = 1,2,\ldots$ için f_n ve f (Ω, U, μ) ölçü uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere (f_n) Ω üzerinde f'ye düzgün yakınsak ise aynı zamanda noktasal yakınsaktır. Ayrıca noktasal yakınsak her fonksiyon dizisi hemen hemen her yerde yakınsaktır. Yani;

$$\text{Düzgün Yak.} \Longrightarrow \text{Noktasal Yak.} \Longrightarrow \text{Hemen Hemen Her Yerde Yak.}$$

dır.

Reel değerli fonksiyon dizileri ile ilgili bazı önemli yakınsaklık teoremleri aşağıda verilir.

Teorem 2.6.2 (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) (Ω, U, μ), $\mu(\Omega) < \infty$ ile bir ölçü uzayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlı ölçülebilir (f_n) fonksiyon dizisi hemen hemen her yerde bir f fonksiyonuna yakınsasın, yani $f_n \xrightarrow{\text{hhhy}} f$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sabiti var ise f Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \tag{2.13}$$

dır.

Teorem 2.6.3 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir (f_n) fonksiyon dizisi Ω üzerinde artarak bir f fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsasın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \tag{2.14}$$

dır.

Teorem 2.6.4 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere A üzerinde tanımlı ölçülebilir (f_n) fonksiyon dizisi Ω üzerinde hemen hemen her yerde f fonksiyonuna yakınsasın. Ω üzerinde $|f_n| \leq g$ olacak şekilde negatif olmayan Lebesgue integrallenebilir bir g fonksiyonu var ise f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \tag{2.15}$$

dır.

Teorem 2.6.5 (Lebesgue Genişletilmiş Baskın Yakınsaklık Teoremi) (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere $n = 1,2, \ldots$ için f_n ve g_n Ω üzerinde tanımlı ve her $n \geq 1$ için $|f_n| \leq g_n$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda (g_n), g'ye, (f_n) de f'ye Ω üzerinde hemen hemen her yerde yakınsak, (g_n) ve g Lebesgue integrallenebilir ve $\lim_{n\to\infty}\int |g_n| d\mu = \int |g| d\mu$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

dır (Athreya ve Lahiri 2006).

Teorem 2.6.6 (Scheffe Teoremi) (f_n) (Ω, U, μ) ölçü uzayı üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer (f_n) Ω üzerinde f'ye hemen hemen her yerde yakınsak, $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ ve $\int f d\mu < \infty$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0 \tag{2.16}$$

dır (Athreya ve Lahiri 2006).

Eğer yukarıdaki teoremde $f_n, n = 1,2, \dots$ ve f olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $f_n \xrightarrow{\text{hhhy}} f$ iken $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$ olur.

Lemma 2.6.1 (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere $\mu(\Omega) < \infty$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için $\int_{\Omega} f_n d\mu < \infty$, $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$ ve (f_n) Ω üzerinde f'ye hemen hemen her yerde yakınsak ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Billingsley 1968).

i. $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu = \int_{\Omega} |f| d\mu$.

ii. $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$.

2.6.2 Rasgele değişken dizilerinde yakınsaklık

Tanım 2.6.2 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ve $n = 1,2, \dots$ için $X_n: \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkenler olmak üzere;

i. $P\left(\left\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$ olduğunda (X_n) rasgele değişken dizisine hemen hemen her yerde X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{\text{hhhy}} X$ şeklinde gösterilir. Bu yakınsama aynı zamanda 1 olasılıkla yakınsama olarak da ifade edilir.

ii. $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$ oluyorsa (X_n) rasgele değişken dizisine olasılıkta X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{P} X$ biçiminde gösterilir.

iii. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F ve $n = 1,2,\ldots$ için X_n rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu F_n olmak üzere, F'nin sürekli olduğu her x noktası için $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ olduğunda (X_n) rasgele değişken dizisine dağılımda X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{d} X$ ile gösterilir. Bu yakınsama ayrıca $F_n \Rightarrow F$ ile de gösterilir. Bu yakınsama için X_n rasgele değişken dizisi ile X rasgele değişkeninin aynı olasılık uzayında tanımlı olmaları gerekli değildir.

Teorem 2.6.7 $n = 1,2,\ldots$ için X_n ve X aynı olasılık uzayında tanımlı rasgele değişkenler olmak üzere

$$X_n \xrightarrow{\text{hhhy}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

dır.

Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir. Ancak bazı özel koşullar altında teoremin tersi de geçerli olabilmektedir. Örneğin X_n rasgele değişken dizisi bir c sabitine dağılımda yakınsar ise aynı zamanda olasılıkta da yakınsar.

Rasgele değişken dizilerinin yakınsama türleri için önemli bir kavram düzgünlük kavramıdır. Bu kavram aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 2.6.3 (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı (X_n) rasgele değişken dizisi ve X rasgele değişkeni sadece deney sonuçlarının kümesi Ω'dan bir gözleme göre değil aynı zamanda bir parametre kümesinden gelen parametre değerine göre de değer alsın. Bu parametre kümesi T, bu kümenin elemanları ise t ile gösterilsin. Yani bu rasgele değişkenlere ilişkin değerler $X_n(t,\omega)$ ve $X(t,\omega)$ olarak gözlensin. Bu durumda;

i. $P\left(\left\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T} |X_n(t,\omega) - X(t,\omega)| = 0\right\}\right) = 1$ sağlanıyor ise (X_n) rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine T üzerinde hemen hemen her yerde düzgün yakınsar ya da 1 olasılıkla düzgün yakınsar denir.

ii. $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega: \sup_{t\in T} |X_n(\omega,t) - X(\omega,t)| < \epsilon\right\}\right) = 1$ oluyorsa (X_n) rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine T üzerinde olasılıkta düzgün yakınsar denir.

Dikkat edilmelidir ki rasgele değişken dizilerinin düzgün yakınsaklığı kavramı stokastik süreçlerin yakınsaklığı kavramından farklıdır. Stokastik süreçlerde yakınsaklık bir sonraki kısımda detaylıca ele alınır. Ancak belirtmek gerekir ki stokastik süreçlerin yakınsaklığı yörünge fonksiyonlarının ait olduğu fonksiyon uzayları üzerindeki metrik ile tanımlanır. Burada ise yakınsama sabit bir $t \in T$ için $X_n(t,\omega)$ rasgele değişken dizisinin yakınsaklığı ile alakalıdır.

Bilindiği gibi bir (X_n) rasgele değişkenler dizisi bir X rasgele değişkenine 1 olasılıkla düzgün yakınsar ise aynı zamanda olasılıkta da düzgün yakınsaktır. Rasgele değişken dizilerinin olasılıkta ya da hemen hemen her yerde düzgün yakınsaklığı ile ilgili önemli bir örnek Glivenko-Cantelli teoremidir. Bu teoreme göre reel değerli bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F olmak üzere bu dağılımdan alınan n birimlik $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele örneklemine dayalı olarak tanımlanan $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \leq t)$ tahmin edicisi göz önüne alınsın. Bu durumda $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow{\text{hhhy}} 0$ dır. Yani F_n F'ye $\mathbb{R}$ üzerinde 1 olasılıkla düzgün yakınsar. Dolayısıyla olasılıkta da düzgün yakınsar. Glivenko-Cantelli teoreminden daha güçlü bir teorem ise Polya teoremidir. Bu teoreme göre (F_n) herhangi bir dağılım fonksiyonu dizisi olmak üzere eğer $F_n \Longrightarrow F$ ve F sürekli ise $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| = 0$ dır. Yani F_n, F'ye $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsar. Şimdi rasgele değişken dizilerinin dönüşümleri için kullanışlı olan bazı teoremler ele alınsın.

Teorem 2.6.8 $X, X_1, X_2, \ldots$ aynı olasılık uzayında tanımlı rasgele değişkenler olmak üzere g Borel ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonu X rasgele değişkeninin ürettiği P_X olasılık ölçüsüne göre 1 olasılıkla sürekli ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Serfling 1980).

i. $X_n \xrightarrow{\text{hhhy}} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{\text{hhhy}} g(X)$

ii. $X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

iii. $X_n \xrightarrow{d} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

Teorem 2.6.9 (Slutsky Teoremi) c bir sabit olmak üzere $X_n \xrightarrow{d} X$ ve $Y_n \xrightarrow{P} c$ olsun. Bu durumda;

i. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$

ii. $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$

iii. $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c, c \neq 0$

dır.

Teorem 2.6.10 (Delta Yöntemi) Bir $b > 0$ sabiti için $n^b(X_n - a) \xrightarrow{d} X$ olsun. Bu durumda g, $x = a$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ve $g'(a) \neq 0$ olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$n^b\big(g(X_n) - g(a)\big) \xrightarrow{d} g'(a)X$$

dır.

Delta yöntemi, asimptotik dağılımı bilinen rasgele değişken dizilerinin bazı dönüşümlerinin asimptotik dağılımının elde edilmesine yarayan oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Delta yönteminin iki boyutlu asimptotik normal dağılımlı rasgele vektörler için uygulaması ise aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 2.6.11 X_n ve Y_n herhangi iki rasgele değişken dizisi ve a ve b birer sabit olmak üzere

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} X_n - a \\ Y_n - b \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$$

olsun. f ve g (a, b) noktasının komşuluğunda ilk iki mertebeden kısmi türevlere sahip iki değişkenli herhangi iki fonksiyon olmak üzere $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$ şartı altında

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} f(X_n, Y_n) - f(a, b) \\ g(X_n, Y_n) - g(a, b) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix}\right)$$

dır. Burada

$$\tau_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{11} + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{22},$$

$$\tau_{12} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}\sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\sigma_{22},$$

$$\tau_{11} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \sigma_{11} + 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \sigma_{22}.$$

Teorem 2.6.12 (Helly-Bray Teoremi) (F_n) dağılım fonksiyonlarının herhangi bir dizisi ve F bir dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda $F_n \Longrightarrow F$ ise sürekli ve sınırlı her $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$$

dır (Chow ve Teicher 1978).

2.6.3 Stokastik süreç dizilerinde yakınsaklık

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere bir T parametre kümesi verilsin.

$$\begin{aligned} X: T \times \Omega \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (t, \omega) \quad &\rightarrow \quad X(t, \omega) \end{aligned}$$

fonksiyonu her sabit $t \in T$ için bir rasgele değişken olursa bu X fonksiyonuna bir stokastik süreç denir ve $\{X(t), t \in T\}$ ile gösterilir. Gerçekte bir stokastik süreç bir rasgele değişkenler topluluğudur. Eğer T bir elemanlı ise $X(t)$ stokastik süreci bir rasgele değişken, T n elemanlı bir küme ise $X(t)$ n boyutlu bir rasgele vektör ve $T = \mathbb{N}$ ise $X(t)$ stokastik süreci bir rasgele değişken dizisidir.

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Bu süreç Ω'nın her ω gerçeklenişine karşılık t'nin bir fonksiyonunu belirtir. Bu fonksiyona sürecin bir yörüngesi adı verilir. $\mathbb{R}^T = \{f | f: T \rightarrow \mathbb{R}\}$ ile tanımlanan fonksiyon uzayına ise sürecin yörünge uzayı denir. Gerçekte her stokastik süreç tanımlı olduğu Ω uzayını $\mathbb{R}^T$ yörünge uzayı içine götüren bir fonksiyon belirtir. Ayrıca bu stokastik süreç fonksiyonu (Ω, U, P) olasılık uzayını $(\mathbb{R}^T, U', P')$ olasılık uzayına dönüştürür. Burada $U' = \{A' \subset \mathbb{R}^T: X^{-1}(A') \in U\}$ ve $P': U' \rightarrow [0,1]$ olmak üzere $A' \in U'$ için $P'(A') = P\big(X^{-1}(A')\big)$ dır. $(\mathbb{R}^T, U', P')$ olasılık uzayına sürecin doğurduğu (ürettiği) olasılık uzayı denir.

Bir stokastik süreçle ilgili uygulamalarda genellikle mevcut yegane bilgi süreci oluşturan rasgele değişkenlerin sonlu boyutlu dağılımlarıdır. Bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımlar ailesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.6.4 $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. $k = 1,2, \ldots$ için $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$ olmak üzere $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_k)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_k)}(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_k) = P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_k) \leq x_k)$$

olup $\left\{F_{X(t_1),\ldots,X(t_k)}(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_k): t_1, t_2, \ldots, t_k \in T, k = 1,2, \ldots\right\}$ kümesine sürecin sonlu boyutlu dağılımlar ailesi denir.

U' σ-cebirindeki her A' yörünge fonksiyonları kümesinin $P'(A')$ olasılığı sürecin sonlu boyutlu dağılımları ile tek olarak belirlenemeyebilir. Kolmogorov, $\mathbb{R}^T$ üzerindeki

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ Borel cebirinin tüm Borel kümelerinin P' olasılık ölçüsüne göre olasılıklarının sürecin sonlu boyutlu dağılımları ile tek olarak belirlenebileceğini göstermiştir. Ayrıca bir T parametre kümesi ile bir sonlu boyutlu dağılımlar ailesi verildiğinde buna karşılık gelen bir stokastik sürecin var olması için gerek ve yeter şartın sürecin sonlu boyutlu dağılımlar ailesinin tutarlılık ve simetri şartlarını sağlaması olduğunu ispat etmiştir. Bu teorem stokastik süreçler teorisinde Kolmogorov'un varlık teoremi olarak bilinir.

Uygulamalarda $X(t)$ için t'nin değerlerinin sayılamaz bir kümesinde fonksiyonun davranışını içeren, verilen bir özelliğe sahip olması olasılığını bilmek önemli olacaktır. Buna ilişkin bazı örnekler şöyle verilir. Bir $I = [a, b]$ aralığındaki her t için $X(t) < h$ olması olasılığına ya da $X(t)$'nin I da sürekli, türevlenebilir ya da integrallenebilir olması olasılıklarına ihtiyaç duyulabilir. Açıktır ki bu tip olaylar genelde Borel kümeleri değildir ve basit örneklerle gösterilebilir ki onların olasılıkları sürecin sonlu boyutlu dağılımları ile tek olarak belirlenemeyebilir. Ele alınan bir stokastik süreç için sürecin yörünge fonksiyonları genellikle bilinir ya da en azından belli regülerlik özelliklerini sağlarlar. Örneğin, yörünge fonksiyonları sürekli ya da onların süreksizliklerinin basit sıçramalar olduğu iddia edilebilir. Bu tipteki regülerlik şartını sağlayan süreçler için her yörünge fonksiyonu t noktalarının her yerde yoğun sayılabilir bir kümesindeki değerler ile elde edilebilir. Doob (1953) bu özelliğe sahip bir yörünge fonksiyonuna ayrılabilir fonksiyon ve yörünge fonksiyonları ayrılabilir olan bir sürece ayrılabilir süreç adını vermiştir. Bir ayrılabilir süreç için yukarıda tartışılan tipteki kümelerin olasılıkları sonlu boyutlu dağılımlar tarafından tek olarak belirlenir.

Genellikle bir stokastik süreç sonlu boyutlu dağılımlar ailesinin yapısına göre sınıflandırılır. Örneğin sonlu boyutlu dağılımları normal dağılım olan süreçlere normal süreç ya da Gauss süreci adı verilir. Normal süreçler için önemli iki örnek Brown hareketi ve Brown köprüsüdür. Bu süreçler stokastik süreç uygulamalarında önemli bir yere sahip olduğu için bu süreçlere ilişkin tanımlar aşağıda verilir.

Tanım 2.6.5 (Normal Süreçler) $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ bir stokastik süreç olmak üzere her $k \geq 1$ ve her $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ için $\left(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\right)$ çok boyutlu normal dağılıma sahip ise $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ sürecine normal süreç ya da Gauss süreci denir.

Tanım 2.6.6 (Brown Hareketi) $\{B(t), t \geq 0\}$ bir stokastik süreç olmak üzere eğer

1) $B(0) = 0$
2) $\{B(t), t \geq 0\}$ bağımsız ve durağan artışlı
3) Her $t \geq 0$ için $B(t)$ 0 ortalamalı ve $\sigma^2 t$ varyanslı normal dağılıma sahip

şartları sağlanıyor ise bu sürece Brown hareketi süreci ya da kısaca Brown hareketi denir. Eğer $\sigma = 1$ ise bu sürece özel olarak standart Brown hareketi denir. Brown hareketi aynı zamanda Wiener süreci olarak da adlandırılır.

Bir Brown hareketinin tüm yörünge fonksiyonları bir olasılıkla sürekli fakat hiçbir yerde türevlenemezdir. $\{B(t), t \geq 0\}$ bir Brown hareketi olsun. Bu durumda $E\big(B(t)\big) = 0$ ve $\mathrm{Cov}\big(X(s), X(t)\big) = \sigma^2 \min\{s, t\}$ ile $\{B(t), t \geq 0\}$ bir normal süreçtir. Böylece bu sürecin tüm sonlu boyutlu dağılımları normaldir.

Tanım 2.6.7 (Brown Köprüsü) $\{B(t), t \geq 0\}$ bir standart Brown hareketi olmak üzere $0 \leq t \leq 1$ için $B^{o}(t) = B(t) - tB(1)$ olsun. Bu şekilde oluşturulan $\{B^{o}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ sürecine Brown köprüsü süreci ya da kısaca Brown köprüsü denir.

$\{B^{o}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ bir Brown köprüsü iken $E\big(B^{o}(t)\big) = 0$ ve $\mathrm{Cov}\big(B^{o}(s), B^{o}(t)\big) = s(1 - t)$ ile $\{B^{o}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ bir normal süreçtir.

Stokastik süreç dizilerinin yakınsaklığı için önemli bir kavram zayıf yakınsamadır. Bu yakınsama türü rasgele değişken dizilerinin dağılımda yakınsaklığının genellemesi olarak ele alınır. Buna ilişkin detaylı bilgi Billingsley (1968)'de bulunabilir. Bu kısımdaki zayıf yakınsama ile ilgili bilgiler Fleming ve Harrington (1990)'da verilen anlatıma bağlı kalınarak yazılır.

Stokastik süreç dizilerinde zayıf yakınsaklığı tanımlamak için ilk olarak rasgele değişken dizilerinin Tanım 2.6.2.iii'de verilen dağılımda yakınsama tanımına denk bir tanım aşağıda verilir.

Tanım 2.6.8 X rasgele değişkeni ve (X_n) rasgele değişken dizisi bir (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı olmak üzere $X: (\Omega, U, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ ve $n = 1,2, \dots$ için $X_n: (\Omega, U, P) \to \left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{X_n}\right)$ olsun. Burada $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$'deki Borel cebiridir. Herhangi bir $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ için B kümesinin $\mathbb{R}$'deki alışılmış topolojiye göre sınırı ∂B ile gösterilsin. Bu durumda $P(\partial B) = 0$ olan her $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ için $\lim_{n\to\infty} P_{X_n}(B) = P_X(B)$ sağlanıyor ise P_{X_n}, P_X'e zayıf yakınsıyor denir ve $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ ile gösterilir.

Lemma 2.6.2 P ve P_n $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$'de tanımlı ve sırası ile F ve F_n dağılım fonksiyonlarına karşılık gelen olasılık ölçüleri olmak üzere $F_n \Rightarrow F$ olması için gerek ve yeter şart $P_n \Rightarrow P$ olmasıdır.

Lemma 2.6.2 ile Tanım 2.6.8, rasgele değişkenlerin dağılımda yakınsamasına indirgendiği gibi stokastik süreç dizilerinin zayıf yakınsaklığının tanımı için de temel teşkil eder. Böylelikle stokastik süreç dizilerinin zayıf yakınsaklığı, rasgele değişken dizilerinde olduğu gibi olasılık ölçülerinin yakınsaklığı ile tanımlanabilir.

Bilindiği gibi bir $\{X(t), t \in T\}$ stokastik süreci $\mathbb{R}^T$ yörünge uzayı üzerinde bir olasılık ölçüsü üretir. Böyle bir genel uzayda yakınsaklığın tanımlanabilmesi için en azından bu uzay üzerinde bir metriğe ihtiyaç duyulur. Bundan dolayı ilk olarak bir metrik uzaydaki zayıf yakınsaklık kavramı aşağıda verilir.

Tanım 2.6.9 S bir metrik uzay ve S üzerinde bir metrik ile oluşturulan topolojinin ürettiği σ-cebir (S'deki Borel cebiri) $\mathcal{S}_0$ olmak üzere P ve $n = 1,2, \dots$ için P_n, $(S, \mathcal{S}_0)$ ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı olasılık ölçüleri olsunlar. Bu durumda

1) $P(\partial B) = 0$ olan her $B \in \mathcal{S}_0$ için $\lim_{n\to\infty} P_n(B) = P(B)$

ise (P_n) olasılık ölçüsü dizisi P'ye zayıf yakınsar denir ve $P_n \Rightarrow P$ ile gösterilir.

Yukarıda verilen olasılık ölçüsü dizilerinin zayıf yakınsaklık tanımı için (1) koşuluna denk olan başka birçok ifade vardır. Bu ifadeler literatürde iyi bilinen Portmanteau teoremi ile verilir.

f bir $(S, \mathcal{S}_0)$ ölçülebilir metrik uzayından başka bir ölçülebilir $(S', \mathcal{S}_0')$ metrik uzayına tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun. P ve $n = 1,2,...$ için P_n $\mathcal{S}_0$ üzerinde tanımlı olasılık ölçüleri olmak üzere (P_n) dizisi P'ye yakınsak iken f'nin P ve P_n olasılık ölçüleri yardımı ile ürettiği Pf^{-1} ve P_nf^{-1} olasılık ölçüleri için (P_nf^{-1}) olasılık ölçüsü dizisinin Pf^{-1} olasılık ölçüsüne $(S', \mathcal{S}_0')$ metrik uzayında zayıf yakınsak olup olmayacağı önemli bir problemdir. Burada $Pf^{-1}(A) = P\left(f^{-1}(A)\right)$ ve $P_nf^{-1}(A) = P_n\left(f^{-1}(A)\right)$ dır. Bu problemin cevabı literatürde sürekli dönüşüm teoremi ile verilir. Bu teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.6.13 (Sürekli Dönüşüm Teoremi) f bir $(S, \mathcal{S}_0)$ ölçülebilir metrik uzayından başka bir $(S', \mathcal{S}_0')$ ölçülebilir metrik uzayına tanımlı sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda eğer $\mathcal{S}_0$ üzerinde $P_n \Rightarrow P$ ise $\mathcal{S}_0'$ üzerinde $P_nf^{-1} \Rightarrow Pf^{-1}$ dır.

Yukarıda verilen genel metrik uzaylarda olasılık ölçüsü dizilerinin zayıf yakınsaklık kavramına bağlı olarak stokastik süreç dizileri için zayıf yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.6.10 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $(S, \mathcal{S})$ Tanım 2.6.9'da verilen ölçülebilir bir metrik uzay olmak üzere $X: (\Omega, U, P) \to (S, \mathcal{S}, P_X)$ ve $n = 1,2,...$ için $X_n: (\Omega, U, P) \to \left(S, \mathcal{S}, P_{X_n}\right)$ ile verilen X ve X_n stokastik süreçleri için eğer $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ ise (X_n) stokastik süreç dizisi X stokastik sürecine zayıf yakınsar denir ve $X_n \Rightarrow X$ ile gösterilir.

Stokastik süreç dizilerinde yakınsama genelde iki ayrı fonksiyon uzayı üzerinde ele alınır. Birincisi sürekli fonksiyonlar uzayı, diğeri ise sağdan sürekli soldan limitli fonksiyonlar uzayıdır. Hatırlatılmalıdır ki yörünge uzayları üzerinde zayıf yakınsaklığın tanımlanabilmesi için bu uzay üzerinde uygun bir metriğe ihtiyaç duyulur. Bir stokastik süreç için yukarıda verilen yörünge uzayları durumlarında zayıf yakınsaklık ile ilgili özellikler sırası ile aşağıda verilir.

A) Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

$\tau < \infty$ olmak üzere $\{X(t), t \in [0,\tau]\}$ stokastik süreci göz önüne alınsın. Bu süreç için S yörünge uzayı $[0,\tau]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı, yani $\mathrm{S} = \mathcal{C}[0,\tau]$ olsun. Bu yörünge uzayı, $x, y \in \mathcal{C}[0,\tau]$ için

$$d(x,y) = \sup_{0\leq t\leq \tau} |x(t) - y(t)| \tag{2.17}$$

biçiminde tanımlanan alışılagelmiş düzgün d metriği ile bir metrik uzaydır. Bu metriğin doğurduğu topolojiye düzgün topoloji adı verilir ve bu topoloji

$$\mathcal{T}_d = \{A \subset \mathrm{S}: \forall x \in A \text{ için } B(x,r) \subset A \text{ olacak şekilde } \exists r > 0\}$$

dır, burada $B(x,r) = \{y: d(x,y) < r\}$ olup x merkezli ve r yarıçaplı bir açık yuvardır. Bu durumda X stokastik süreci bir (Ω, U, P) olasılık uzayını $(\mathcal{C}[0,\tau], \mathcal{S}, P_X)$ olasılık uzayına dönüştürür. Burada hatırlatılmalıdır ki $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}_d$ topolojisinin ürettiği Borel cebirdir.

Stokastik süreçlerin zayıf yakınsaklığı ile sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının yakınsaklığı arasındaki ilişkinin ne olduğunun belirlenmesi önemlidir. Bu ilişki verilmeden önce gerekli bazı gösterimler aşağıda verilir.

$X: (\Omega, U, P) \to (\mathcal{C}[0,\tau], \mathcal{S}, P_X)$ ve $n = 1,2, \ldots$ için $X_n: (\Omega, U, P) \to \left(\mathcal{C}[0,\tau], \mathcal{S}, P_{X_n}\right)$ olmak üzere

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}: (\mathcal{C}[0,\tau], \mathcal{S}, P) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), P\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k})$$

olsun, burada $x \in \mathcal{C}[0,\tau]$ için $\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = \left(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_k)\right)$ dır. Yani $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ $\mathcal{C}[0,\tau]$ sürekli fonksiyon uzayının $\mathbb{R}^k$'ya izdüşümüdür. $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ sürekli olup, sürekli her fonksiyon ölçülebilir olduğundan $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), P\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k})$ olasılık uzayının varlığı açıktır. Burada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ için $\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}(B) \in \mathcal{S}$ olup $P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}(B) = P\left(\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}(B)\right)$ dır. Böylelikle herhangi $k \geq 1$ ve $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq \tau$ için $P_X\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ ve $P_{X_n}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ sırası ile X ve X_n stokastik süreçlerinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarıdır.

Teorem 2.6.14 P, Q ve $n = 1,2,\ldots$ için P_n $(\mathcal{C}[0,\tau], \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı olasılık ölçüleri olsunlar. Bu durumda herhangi $k \geq 1$ ve $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq \tau$ için;

1) $\mathcal{P}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} = \mathcal{Q}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ ise $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ dır.
2) $\mathcal{P}_n\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow \mathcal{P}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ olması $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$ olmasını gerektirmez.

$\mathcal{C}[0,\tau]$ sürekli fonksiyon uzayındaki her fonksiyonun ayrılabilir fonksiyon olmasından dolayı Teorem 2.6.14'ün (1) ifadesinin doğruluğu açıktır. Teorem 2.6.14'ün (2) ifadesi, sonlu boyutlu dağılımların yakınsaklığının karşılık gelen süreçlerin zayıf yakınsaklığını gerektirmediğini açıklar. Fakat sürekli dönüşüm teoreminden dolayı süreçlerin zayıf yakınsaklığının karşılık gelen sonlu boyutlu dağılımların yakınsaklığını gerektireceği açıktır. Sonlu boyutlu dağılımların yakınsaklığı bazı koşullar altında süreçlerin zayıf yakınsamasını gerektirir. Bunun için ihtiyaç duyulan bir kavram aşağıda verilir.

Tanım 2.6.11 $(\mathrm{S}, \mathcal{S}_0)$ metrik uzayında tanımlı olasılık ölçülerinin bir ailesi Π olsun. Eğer Π, elemanlarının her dizisi için zayıf yakınsak olacak şekilde bir alt diziye sahip ise Π'ye göreli kompakt denir.

Teorem 2.6.15 P ve $P_n, n \geq 1$ $(\mathcal{C}[0,\tau], \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı olasılık ölçüleri olsunlar. Bu durumda (P_n) olasılık ölçüsü dizisi göreli kompakt iken herhangi $k \geq 1$ ve $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq \tau$ için

$$P_n\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \quad \Leftrightarrow \quad P_n \Rightarrow P$$

dır.

Yörünge fonksiyonları sürekli fonksiyonlar uzayının elemanı olan stokastik süreçlerin zayıf yakınsaklığı ile ilgili önemli bir örnek Donsker teoremidir. Donsker teoremi fonksiyonel merkezi limit teoremi olarak da bilinmektedir. Donsker ve sürekli dönüşüm teoremleri kullanılarak stokastik süreç dizileri ile ilgili birçok yakınsama problemi çözülebilmektedir.

Teorem 2.6.16 (Donsker Teoremi) (X_n) (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere $E(X_1) = \mu$ ve $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$, ayrıca $0 \leq t \leq 1$, $n \geq 1$ ve $\omega \in \Omega$ için

$$Y_n(t, \omega) = \frac{\sum_{i=1}^{[|nt|]} (X_i(\omega) - \mu) + (nt - [|nt|])\big(X_{[|nt|]}(\omega) - \mu\big)}{\sigma\sqrt{n}} \tag{2.18}$$

olsun. Bu durumda $Y_n \Rightarrow B$ dır, burada $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$ standart Brown hareketidir (Billingsley 1968).

B) Sağdan Sürekli Soldan Limitli Fonksiyonlar Uzayı

Şimdi $\tau < \infty$ olmak üzere $\{X(t), t \in [0, \tau]\}$ stokastik sürecinin S yörünge uzayı $[0, \tau]$ aralığında sağdan sürekli soldan limitli fonksiyonlar uzayı olsun. Bu uzay $\mathcal{D}[0, \tau]$ ile gösterilsin. $\mathrm{S} = \mathcal{D}[0, \tau]$ yörünge uzayı üzerinde Skorokhod (1956) tarafından önerilen bir metrik aşağıdaki gibi verilir. Λ $[0, \tau]$ aralığı üzerinde tanımlı $\lambda(0) = 0$ ve $\lambda(\tau) = \tau$ şartını sağlayan artan λ fonksiyonlarının bir sınıfı olsun. $x, y \in \mathcal{D}[0, \tau]$ için $\mathcal{D}[0, \tau]$ uzayında bir metrik

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \epsilon > 0 \colon \sup_{0 \leq t \leq \tau} |\lambda(t) - t| \leq \epsilon, \quad \sup_{0 \leq t \leq \tau} \big|x(t) - y\big(\lambda(t)\big)\big| \leq \epsilon \right\} \tag{2.19}$$

biçiminde verilir. Bu d metriğine Skorokhod metriği adı verilir. Bu metriğin oluşturduğu topolojiye de Skorokhod topolojisi adı verilir.

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere $X \colon (\Omega, U, P) \to (\mathcal{D}[0, \tau], \mathcal{S}, P_X)$ ve $X_n \colon (\Omega, U, P) \to \big(\mathcal{D}[0, \tau], \mathcal{S}, P_{X_n}\big), n = 1,2, \ldots$ ile verilen X ve X_n stokastik süreçleri göz önüne alınsın. Burada hatırlatılmalıdır ki $\mathcal{S}$ Skorokhod topolojisinin ürettiği Borel cebirdir.

Yörünge fonksiyonları $\mathcal{D}[0,\tau]$ uzayının elemanı olan stokastik süreçler için zayıf yakınsama ile sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının yakınsaması arasındaki ilişki yörünge fonksiyonları $\mathcal{C}[0,\tau]$ uzayının elemanı olan stokastik süreçlerdekine benzerdir.

$\pi_{t_1,\dots,t_k}: (\mathcal{D}[0,\tau], \mathcal{S}, P) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k})$ olmak üzere $\mathcal{D}[0,\tau]$ fonksiyon uzayının $\mathbb{R}^k$'ya izdüşümü olan $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ fonksiyonunun ölçülebilir bir fonksiyon olduğu Billingsley (1968)'de gösterilmiştir. Böylelikle $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k})$ bir olasılık uzayıdır. P olasılık ölçüsüne göre sıfır değerini alan noktalar haricinde π_t izdüşümünün sürekli olduğu t noktalarının oluşturduğu küme $\mathcal{Z}_P$ ile gösterilsin. Bu durumda $t_1,\dots,t_k \in \mathcal{Z}_P$ için $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ izdüşümü süreklidir.

Teorem 2.6.17 P ve $P_n, n \geq 1$ $(\mathcal{D}[0,\tau], \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı olasılık ölçüleri olsunlar. Bu durumda (P_n) olasılık ölçüsü dizisi göreli kompakt iken herhangi $k \geq 1$ ve $t_1,\dots,t_k \in \mathcal{Z}_P$ için

$$P_n\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \quad \Leftrightarrow \quad P_n \Rightarrow P$$

dır.

Dikkat edilmelidir ki $i = 1,2,\dots,k$ için en az bir $t_i \notin \mathcal{Z}_P$ ise $P_n \Rightarrow P$ olması $P_n\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ olmasını gerektirmeyecektir. Bu durum için aksi bir örnek Billingsley (1968)'de verilmiştir.

Literatürde göreli kompaktlığın sağlanması için bir yeterli koşul mevcuttur. Öyle ki bu koşulu sağlamak pratikte daha kolaydır. Bunun için gerekli tanım aşağıda verilir.

Tanım 2.6.12 Bir $(\mathrm{S}, \mathcal{S}_0)$ metrik uzayında tanımlı olasılık ölçülerinin bir ailesi Π olsun. Eğer her $P \in \Pi$ için, $\epsilon > 0$ olmak üzere $P(K) > 1 - \epsilon$ olacak şekilde kompakt bir K kümesi var ise Π ailesine sıkı denir.

Teorem 2.6.18 Eğer Π sıkı ise göreli kompakttır.

Bu kavramlar birbirine oldukça yakın olup Teorem 2.6.18'in tersi tam ve ayrılabilir metrik uzaylar için her zaman geçerlidir. $(\mathcal{D}[0,\tau],\mathcal{S})$ uzayı ayrılabilir olup d metriği altında tam değildir. Fakat bu uzay üzerinde tanımlı öyle bir d_0 metriği vardır ki d metriği ile aynı Skorokhod topolojisini doğurur ve bu d_0 metriği altında $(\mathcal{D}[0,\tau],\mathcal{S})$ uzayı tamdır. Böylelikle $(\mathcal{D}[0,\tau],\mathcal{S})$ üzerinde $P_n \Rightarrow P$ olması için gerek ve yeter şart sıkılık ve sonlu boyutlu dağılımların yakınsaklığıdır. $(\mathcal{D}[0,\tau],\mathcal{S})$ üzerinde sıkılık için yeterli bir şart ise Stone (1963) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.6.19 $X_n = \{X_n(t), 0 \le t \le \tau\}, n = 1,2, \dots$ (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı, yörünge fonksiyonları $\mathcal{D}[0,\tau]$ uzayının elemanları olan stokastik süreçlerin bir dizisi olsun. $P_n, n \ge 1$ $(\mathcal{D}[0,\tau],\mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsü dizisi olmak üzere herhangi $n \ge 1$ ve $A \in \mathcal{S}$ için $P_n(A) = P(\omega \in \Omega: X_n(\omega) \in A)$ olsun. Bu durumda eğer herhangi $\epsilon > 0$ ve $0 \le s,t \le \tau$ için

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sup_{|s-t|<\delta} |X_n(s) - X_n(t)| > \epsilon\Big) = 0$$

ise (P_n) olasılık ölçüsü dizisi sıkıdır.

Teorem 2.6.17 Teorem 2.6.18 ve Teorem 2.6.19'dan aşağıdaki sonuç aşikar olarak elde edilir.

Sonuç 2.6.1 $X = \{X(t), 0 \le t \le \tau\}$ ve $X_n = \{X_n(t), 0 \le t \le \tau\}, n = 1,2, \dots$ (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı, yörünge fonksiyonları $\mathcal{D}[0,\tau]$ uzayının elemanları olan stokastik süreçler olmak üzere herhangi $n \ge 1$ ve $A \in \mathcal{S}$ için sırası ile $P_X(A) = P(\omega \in \Omega: X(\omega) \in A)$ ve $P_{X_n}(A) = P(\omega \in \Omega: X_n(\omega) \in A)$ olasılık ölçülerine sahip olsunlar. Varsayalım ki $k \ge 1$ ve $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{Z}_P$ için $P_n\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ ve (P_{X_n}) olasılık ölçüsü dizisi sıkı olsun. Bu durumda $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ ya da denk olarak $X_n \Rightarrow X$ dır.

Lemma 2.6.3 X ve $X_n, n = 1,2, \ldots$ stokastik süreçleri için $X_n \Rightarrow X$ olsun. Eğer X sürecinin yörünge fonksiyonları $[0, \tau]$ aralığında 1 olasılıkla sürekli ise her sabit $t \in T$ için

$$\sup_{0 \le t \le \tau} |X_n(t) - X(t)| \xrightarrow{\text{hhhy}} 0$$

dır (Baxter ve Li 1994, Billingsley 1968).

2.7 En Çok Olabilirlik Yöntemi

İstatistiksel analiz içerisinde önemli bir yer tutan tahmin problemini çözebilmek için kullanılan başlıca yöntemlerden birisi en çok olabilirlik yöntemidir. Tahmin problemlerinde en çok olabilirlik yönteminin sıklıkla tercih edilmesinin nedenlerinden biri, sahip olduğu önemli asimptotik özelliklerdir. Bu kısımda en çok olabilirlik yöntemi hem parametrik modeller hem de parametrik olmayan modeller için kısaca hatırlatılır. Ayrıca kayıp gözlem durumunda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için kullanılan EM algoritması verilir.

2.7.1 Parametrik en çok olabilirlik yöntemi

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$ olmak üzere $\mathcal{F} = \{F_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ dağılımı ailesine ait olan bir $F_{\boldsymbol{\theta}}$ dağılımına ilişkin bir rasgele örneklem olsun. $\Theta \subset \mathbb{R}^{\mathrm{p}}$ olmak üzere $F_{\boldsymbol{\theta}}$ bir $f(x; \boldsymbol{\theta})$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele örneklemine ilişkin gözlemler $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olmak üzere bu gözlemlere dayalı olabilirlik fonksiyonu $X_1, X_2, \ldots, X_n$'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ noktasındaki değeri ile tanımlanır. Yani

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (2.20)$$

dır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bir rasgele örneklem olduğu için bu değişkenler birbirinden bağımsız ve aynı $f(.; \boldsymbol{\theta})$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptirler. Buradan hareketle olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\boldsymbol{\theta}) \qquad (2.21)$$

biçiminde ifade edilir. $\boldsymbol{\theta}$ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise $L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x})$ fonksiyonunu en büyük yapan değer olarak tanımlanır. Yani $\boldsymbol{\theta}$ için $\boldsymbol{x}$ gözlemine dayalı en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x}) \qquad (2.22)$$

dır. Bununla birlikte en çok olabilirlik tahmin edicilerinin bulunmasında işlem kolaylığı için dönüşümlerden faydalanılır. Bunun için genellikle logaritmik dönüşüm tercih edilir. Çünkü logaritmik dönüşüm monoton bir dönüşüm olup fonksiyon ile argüman arasındaki sıralama ilişkisini korur. Yani, bir x^* değeri için L olabilirlik fonksiyonu en büyük değerini aldığında aynı x^* değeri için $\ln L$ log-olabilirlik fonksiyonu da en büyük değerini alır. Böylelikle $\boldsymbol{\theta}$ için en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \ln L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x}) \qquad (2.23)$$

ifadesi ile de gösterilebilir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin bulunabilmesi için kritik değer bulma tekniklerinden yararlanılır. Bunun için genellikle $\ln L$ fonksiyonunun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri bulunarak sıfıra eşitlenir. Yani

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_p} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.24)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler literatürde tahmin denklemi olarak bilinmekle birlikte özel olarak olabilirlik denklemleri olarak adlandırılır. En çok olabilirlik tahmin edicilerine bu denklemlerin ortak çözümü ile ulaşılabilir.

En çok olabilirlik tahmin edicilerinin önemli bir karakteristiği, $\mathcal{F}$ dağılım ailesi üzerinde düzgünlük koşulu adı verilen bazı şartlar sağlandığında iyi istatistiksel özelliklere sahip olmasıdır. Bu özellikler verilmeden önce $\mathcal{F}$ üzerindeki düzgünlük koşulları verilsin. Buradaki gösterimler $\mathcal{F}$ dağılım ailesinin mutlak sürekli olduğu yani F'nin bir f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu durum için yapılacaktır. f'nin olasılık fonksiyonu olduğu durum ise benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca basitlik için $p = 1$ durumu verilir. Çok boyutlu durum için uygun bir şekilde genişletme yapılabilir.

Düzgünlük Koşulları: Öncelikle $\Theta \subset R$ olmak üzere Θ, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık olsun. Bu açık aralığın sonlu olması gerekmez.

D1. $\theta \in \Theta$ olmak üzere her x için $\ln f$'nin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden kısmi türevleri, yani;

$$\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}, \frac{\partial^3 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^3}$$

mevcut olsun.

D2. Her $\theta_0 \in \Theta$ için θ'nın bir $N(\theta_0)$ komşuluğunda her x için

$$\left|\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\right| \leq g(x), \left|\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right| \leq h(x) \text{ ve } \left|\frac{\partial^3 f(x;\theta)}{\partial\theta^3}\right| \leq H(x)$$

olacak şekilde g, h ve H fonksiyonları mevcut olsun ve bu fonksiyonlar

$$\int g(x)dx < \infty, \int h(x)dx < \infty \text{ ve } \theta \in N(\theta_0) \text{ için } E_\theta\{H(X)\} < \infty$$

şartlarını sağlasın.

D3. Her $\theta \in \Theta$ için

$$0 < E_\theta\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} < \infty$$

olsun. Burada X rasgele değişkeninin dağılımı F_θ dır.

Yukarıda verilen şartlar şöyle yorumlanır. D1 şartı $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$'nın her x için θ'ya göre Taylor serisi açılımına sahip olmasını garantiler. D2 şartı $\int f(x)dx$'in ve $\int[\partial\ln f(x;\theta)/\partial\theta]dx$'in integral işareti altında θ'ya göre türevlenebilir olmasını garantiler. D3 şartı ise $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)$ rasgele değişkeninin pozitif ve sonlu varyansa sahip olması anlamına gelir. Dikkat edilmelidir ki $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)$'nın beklenen değeri sıfırdır (Serfling 1980).

En çok olabilirlik tahmin yöntemi ile ilgili iki önemli kavram skor fonksiyonu ve Fisher bilgisidir. Bu kavramlar kısaca şöyledir. $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ $f(.;\boldsymbol{\theta})$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele örneklem olmak üzere

$$S_f(X_1,X_2,\dots,X_n;\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ln f(X_i;\boldsymbol{\theta})\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\ln f(X_i;\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix} \tag{2.25}$$

ile tanımlanan S_f rasgele vektörüne $X_1,X_2,\dots,X_n$ örnekleminin skor fonksiyonu,

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{X})=\mathrm{Cov}\left(S_f(X_1,X_2,\dots,X_n;\boldsymbol{\theta})\right)$$

matrisine ise $X_1,X_2,\dots,X_n$ örnekleminin Fisher bilgi matrisi ya da kısaca Fisher bilgisi denir. Belirtilmelidir ki n birimlik örneklem için Fisher bilgisi bir birimlik örneklemin Fisher bilgisinin n katıdır. Yani $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{X})=n\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};X_1)$ dır. Özel olarak $p=1$ olduğunda $X_1,X_2,\dots,X_n$ örneklemi için Fisher bilgisi, $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1;\theta)\right]=0$ olmasının göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X})=nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1;\theta)\right]^2 \tag{2.26}$$

dır. Ayrıca eğer f, θ'ya göre iki kez türevlenebiliyor ise

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1;\theta)\right]^2=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_1;\theta)\right] \tag{2.27}$$

dır. Çoğu durumda bir dağılım ailesine ilişkin Fisher bilgisi bulunurken $E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_1;\theta)\right]$ beklenen değerinin hesabı $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1;\theta)\right]^2$ beklenen değerinin hesabına göre daha kolaydır. Bununla birlikte Efron ve Johnstone (1990) Fisher bilgisi için (2.26) ifadesine bozulma oran fonksiyonu yardımı ile denk bir ifade elde etmişlerdir. Bu ifade aşağıdaki gibidir. Öncelikle h, F_θ'ye ilişkin bozulma oran fonksiyonu olsun ve F_θ düzgünlük koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1;\theta)\right]^2 = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln h(X_1;\theta)\right]^2 \tag{2.28}$$

dır (Efron ve Johnstone 1990). Bazı durumlarda Fisher bilgisinin hesabı için $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln h(X_1;\theta)\right]^2$ beklenen değerinin hesabı $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1;\theta)\right]^2$ ya da $E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X_1;\theta)\right]$ beklenen değerlerinin hesabından daha kolay olmaktadır.

Şimdi en çok olabilirlik tahmin edicilerinin düzgünlük koşulu altındaki asimptotik özellikleri verilsin.

Teorem 2.7.1 $\mathcal{F}$ dağılım ailesi için yukarıda verilen D1, D2 ve D3 düzgünlük koşulları sağlansın. Bu durumda $\hat{\theta}$, θ için n birimlik bir rasgele örnekleme dayalı olabilirlik denklemlerinin çözümü olmak üzere;

i. $\hat{\theta}$, θ için güçlü tutarlıdır.
ii. $\hat{\theta}$ asimptotik etkindir.
iii. $n \to \infty$ iken $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \sim N(0, \mathbb{I}^{-1}(\theta))$.

dır. Burada $\mathbb{I}(\theta)$, θ için Fisher bilgisidir (Serfling 1980).

En çok olabilirlik tahmin edicileri genellikle (2.24) denkleminde verilen olabilirlik denklemlerinin çözülmesi ile elde edilir. Bazı basit modellerde olabilirlik denklemleri açık olarak çözülebilmesine rağmen literatürde karşılaşılan birçok model için olabilirlik denklemleri açık olarak çözülememektedir. Bu durumda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için bu denklemlerin sayısal olarak çözümüne başvurulur.

Uygulamalarda karşılaşılan bazı durumlarda gözlemler tam olarak elde edilemeyebilir. Bu durumda Dempster vd. (1977) tam olmayan veri olarak tarif edilebilen birçok durumda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için EM algoritması adı verilen bir yöntem önermişlerdir. EM algoritması sahip olduğu özellikler bakımından en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için güçlü bir araçtır. EM algoritmasının adımları ve bazı özellikleri Hogg ve Craig (1995)'de verildiği üzere aşağıdaki gibi tarif edilir.

n birimlik bir rasgele örneklem göz önüne alınsın. Bu gözlemlerden n_1 tanesi tam olarak gözlensin ancak geriye kalan $n_2 = n - n_1$ tanesi ise tam olarak gözlenemesin. Gözlenen birimler $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$, gözlenemeyenler ise $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n_2})$ ile gösterilsin. Varsayalım ki X_i'ler $f(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere X_i'ler ile Z_j'ler birbirinden bağımsız olsun. $\boldsymbol{X}$ rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ ile gösterilsin. X_i'lerin ve Z_j'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta})$ olsun. Tam gözlemler bilindiğinde kayıp gözlemlerin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ ile gösterilsin. Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımından

$$k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta})}{g(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})} \tag{2.29}$$

olduğu açıktır. Böylelikle gözlenen değişkenler için olabilirlik fonksiyonu ve tüm gözlemler için olabilirlik fonksiyonu sırası ile

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}), \qquad L^c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.30}$$

dır. Burada L gözlenen olabilirlik fonksiyonu, L^c ise tam olabilirlik fonksiyonu olarak adlandırılır. Keyfi ancak sabit bir $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ için

$$\begin{aligned}
\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) &= \int \ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})\, k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}_0) d\boldsymbol{z} \\
&= \int \ln g(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}_0) d\boldsymbol{z} \\
&= \int [\ln c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta}) - k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}_0)] d\boldsymbol{z} - \int \ln k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}_0) d\boldsymbol{z} \\
&= E_{\boldsymbol{\theta}_0}[\ln L^c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}) | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0] - E_{\boldsymbol{\theta}_0}[\ln k(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

dır. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{x}) = E_{\boldsymbol{\theta}_0}[\ln L^c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0]$$

olarak tanımlansın. Burada beklenen değer $k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}_0)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre tanımlıdır. EM algoritmasının amacı ise $L^c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ tam olabilirlik fonksiyonunu kullanarak $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ fonksiyonunu en büyük yapmaktır. Logaritmik dönüşümün monoton olmasının göz önüne alınması ile $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$'i en büyük yapmak ile $\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$'i en büyük yapmak birbirine denktir. (2.31) ifadesinin göz önüne alınması ile $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$'i en büyük yapmak için sadece $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{x})$ fonksiyonunun en büyük yapılmasına ihtiyaç duyulur. Herhangi bir $\boldsymbol{\theta}_0$ için Q fonksiyonunda tanımlı olan beklenen değerin bulunması EM algoritmasının E adımını oluşturur. Q fonksiyonunu en büyük yapacak $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ nın bulunması ise algoritmanın M adımını oluşturur. EM algoritması bu adımların bir başlangıç değerinden başlanarak yakınsama sağlanıncaya kadar tekrar edilmesi olarak tarif edilir. EM algoritması için formel tanım ise aşağıdaki gibi verilir.

Algoritma: $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}$ EM algoritmasında $\boldsymbol{\theta}$ için h. adımdaki tahmin olsun. $h+1$. adımdaki tahmin değeri için aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. E Adımı: $Q\left(\boldsymbol{\theta}\middle|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}, \boldsymbol{x}\right) = E_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}}\left[\ln L^c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})\middle|\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}\right]$ koşullu beklenen değeri $k\left(\boldsymbol{z}\middle|\boldsymbol{x}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}\right)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu altında hesap edilir.
2. M Adımı: $h+1$. adım değeri $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h+1)} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} Q\left(\boldsymbol{\theta}\middle|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}, \boldsymbol{x}\right)$ ifadesi ile elde edilir.

Bu adımlar, ϵ önceden belirlenmiş bir tolerans değeri olmak üzere $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}\right|\right| < \epsilon$ sağlanıncaya kadar devam ettirilir. Burada $||\cdot||$ Öklid normudur.

Bazı güçlü şartlar altında $h \to \infty$ iken $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}$'nin olasılıkta en çok olabilirlik tahminine yakınsadığı gösterilebilir. EM algoritmasının yakınsama özellikleri için Dempster vd. (1977) ve Wu (1983) çalışmalarına bakılabilir. EM algoritmasını kullanışlı kılan özelliği ise aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.7.2 Yukarıdaki algoritma ile tanımlanan $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}$ tahmin dizisinde $h \geq 1$ için $L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h+1)}; \boldsymbol{x}) \geq L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(h)}; \boldsymbol{x})$ dır (Hogg ve Craig 1995).

Teorem 2.7.2'nin yorumu şu şekilde yapılabilir. EM algoritmasının herhangi bir adımında elde edilen tahmin değeri olabilirlik fonksiyonunu bir önceki adıma göre daha büyük yapar. EM algoritmasının detaylı anlatımı ve çeşitli kullanım alanları için McLachlan ve Krishnan (1997) çalışması incelenebilir.

Bilindiği üzere en çok olabilirlik tahminlerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisine Fisher bilgi matrisinin tersi alınarak ulaşılabilmektedir. Ancak sansürlü gözlemler içeren bir veri seti için herhangi bir parametrik model altında buna ulaşmak, alışıldık durum ile aynı olmayacaktır. Bunun için genel bir yaklaşım Louis (1982) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmaya göre kayıp veri durumunda en çok olabilirlik tahminleri EM algoritması kullanılarak bulunurkenki bilgi matrisi kayıp bilgi ilkesine göre hesap edilir. Bu ilke

GÖZLENEN BİLGİ = TAM BİLGİ – KAYIP BİLGİ

ile tanımlanır.

2.7.2 Parametrik olmayan en çok olabilirlik yöntemi

$X_1, X_2, \dots, X_n$ $F \in \mathcal{F}$ dağılımından bir rasgele örneklem olmak üzere F biçimsel olarak bilinmesin. Bu durumda F'ye ilişkin tahmin parametrik olmayan yöntemler ile yapılır. $G \in \mathcal{F}$ olmak üzere P_G, G'ye karşılık gelen olasılık ölçüsü olsun. Bu durumda $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ verildiğinde

$$L(x_1, \dots, x_n | G) = \prod_{i=1}^{n} P_G(\{x_i\}), \quad G \in \mathcal{F} \tag{2.32}$$

ile tanımlanan fonksiyona parametrik olmayan olabilirlik fonksiyonu denir (Shao, 2003). Bu fonksiyonu en büyük yapan $\hat{G} \in \mathcal{F}$'ya ise parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi denir. Açıktır ki bu tanım ile elde edilecek olan $\hat{G}$, F'nin paramatrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi olur. Görüleceği üzere parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi gözlem kümesi üzerinde oluşturulan bir kesikli ölçü yardımı ile elde edilmektedir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ $F \in \mathcal{F}$ dağılımından bir rasgele örneklem olmak üzere F'ye karşılık gelen olasılık (yoğunluk) fonksiyonu f ile gösterilsin. Bu durumda $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ verildiğinde parametrik olmayan olabilirlik fonksiyonu

$$L(x_1, \dots, x_n | F) = \prod_{i=1}^{n} f(\{x_i\}) \tag{2.33}$$

biçiminde yazılabilir. $i = 1,2, \dots, n$ için $f(\{x_i\}) \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} f(\{x_i\}) = 1$ olmak üzere $f(\{x_i\}) = 1/n$ için $\prod_{i=1}^{n} f(\{x_i\})$ en büyük değerini alır. Yani, f'nin $x_1, \dots, x_n$ gözlemine dayalı parametrik olmayan tahmini $i = 1,2, \dots, n$ için $\hat{f}(\{x_i\}) = 1/n$ dır. F ile f arasındaki ilişkinin göz önüne alınması ile F için $x_1, \dots, x_n$ gözlemine dayalı parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmini

$$\hat{F}(t) = \int_{0}^{t} \hat{f}(u) du = \sum_{i=1}^{n} \hat{f}(\{x_i\}) I(x_i \leq t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} I(x_i \leq t) \tag{2.34}$$

olarak elde edilir. Böylelikle F için parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq t), t \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

dır. Bilindiği üzere $\hat{F}$ örneklem dağılım fonksiyonudur. Yani örneklem dağılım fonksiyonu F için parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisidir.

2.8 Uyarlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi

Birçok olasılık modelinde en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için kullanılan olabilirlik denklemleri kapalı formda bir çözüme sahip olmamaktadır. Yani en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilememektedir. Bu tür durumlarda bu denklemlerin sayısal çözümüne ihtiyaç duyulur. Bunun için Newton-Raphson, yarılama, sekant yöntemi gibi bazı adımsal yöntemlere başvurulur. Bu yöntemler bir başlangıç değerinden başlayarak adım adım denklem köküne ulaşma prensibine dayanır ve belirlenen yakınsama şartı sağlanıncaya kadar bu işleme devam edilir. Ancak adımsal yöntemler kullanıldığında

i. Herhangi bir köke yakınsayamama,
ii. Farklı başlangıç değerlerinde farklı köklere yakınsama,
iii. Yanlış değere yakınsama

gibi problemler ortaya çıkabilmektedir (Barnett 1966). Ayrıca Puthenpura ve Sinha (1986) veri kümesinde aykırı değer olması durumunda, adımsal yöntemlerin herhangi bir köke yakınsayamadığını göstermiştir. Tiku (1967, 1968) bu tür problemlerin üstesinden gelebilmek için olabilirlik denklemlerinde denklemin analitik çözümünü engelleyen doğrusal olmayan terimleri Taylor serisine açarak bu denklemleri analitik olarak çözülebilir hale getiren bir yöntem önermiştir ve bu yöntemi uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi olarak isimlendirmiştir. Bu yöntemin adımları kabaca aşağıdaki gibi tarif edilir.

i. Öncelikle olabilirlik denklemleri örneklemin sıra istatistikleri cinsinden yazılır.
ii. Olabilirlik denklemlerindeki analitik çözümü engelleyen terimlere Taylor serisinin ilk iki terimi ile yaklaşılır.
iii. Elde edilen doğrusal ifadeler olabilirlik denklemlerinde yerine yazılır ve denklem sistemi çözülür.

Uyarlanmış en çok olabilirlik yönteminin adımlarının anlaşılabilmesi için bu yöntemin konum-ölçek ailesi üzerinde uygulanışı Kara (2014) çalışmasındaki verilişe benzer şekilde aşağıda hatırlatılır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir dağılıma ilişkin n birimlik bir rasgele örneklem ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ bu örnekleme ilişkin gözlem değerleri olsun. $z_i = (x_i - \mu)/\sigma$ olmak üzere μ ve σ parametreleri için olabilirlik denklemleri bir g fonksiyonu yardımı ile

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} g(z_i) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_i g(z_i) = 0 \tag{2.36}$$

biçiminde yazılabilir. Genelde g fonksiyonunun yapısından dolayı μ ve σ parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilemez. Ancak yukarıda tarif edilen uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri kullanılarak bu sorun aşılabilir. $i = 1, \dots, n$ için $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma$ dönüşümünün göz önüne alınması ile $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ rasgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve aynı f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu görülür. $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemine ilişkin sıra istatistikleri olmak üzere $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ için sıra istatistikleri $i = 1, \dots, n$ için $Z_{(i)} = (X_{(i)} - \mu)/\sigma$ olur. Bu durumda (2.36)'da verilen olabilirlik denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} g(z_{(i)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_{(i)} g\big(z_{(i)}\big) = 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Denklemlerin analitik olarak çözümüne engel olan g fonksiyonuna ilk iki terimli Taylor serisi ile yaklaşılarak denklemler çözülebilir hale getirilebilir. Bunun için $t_{(i)} = E\big(Z_{(i)}\big)$ olmak üzere $g(z_{(i)})$'ye $t_{(i)}$ etrafında ilk iki terimli Taylor serisi ile aşağıdaki gibi yaklaşılır.

$$g\big(z_{(i)}\big) \cong g\big(t_{(i)}\big) + \big(z_{(i)} - t_{(i)}\big)\left\{\frac{d}{dz} g(z)\right\}_{z=t_{(i)}}, i = 1, \dots, n \tag{2.38}$$

Yukarıdaki ifadede sağdaki terim gösterim kolaylığı için $\alpha_i + \beta_i z_{(i)}$ şeklinde de ifade edilebilir. Burada $i = 1, \dots, n$ için $\alpha_i = g\big(t_{(i)} - \beta_i t_{(i)}\big), \beta_i = \left\{\frac{d}{dz} g(z)\right\}_{z=t_{(i)}}$ dır. (2.37) denkleminde verilen log-olabilirlik fonksiyonunda g yerine yukarıda elde edilen $\alpha_i + \beta_i z_{(i)}$ yaklaşımının yazılması ile elde edilen fonksiyon $\ln L^*$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\big(\alpha_i + \beta_i z_{(i)}\big) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_{(i)}\left(\alpha_i + \beta_i z_{(i)}\right) = 0 \tag{2.39}$$

uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. Tiku ve Akkaya (2004), (2.36) ve (2.39) ifadelerinde verilen olabilirlik ve uyarlanmış olabilirlik denklemlerinin asimptotik olarak birbirine denk olduğunu göstermiştir. Yani uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi asimptotik olarak en çok olabilirlik tahmin edicisine denktir. Açıktır ki bu denklemler doğrusal yapıda olduğu için analitik çözümü mümkündür. Gerekli işlemler yapılarak denklemlerin ortak çözülmesi ile μ ve σ için uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri

$$\tilde{\mu} = K + D\hat{\sigma}, \qquad \tilde{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4nC}}{2n} \tag{2.40}$$

şeklide elde edilir. Burada

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, x_{(i)}}{M}, M = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \,, D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{m}, B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(x_{(i)} - K\right),$$
$$C = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\left(x_{(i)} - K\right)^2$$

dır. Eğer f olasılık yoğunluk fonksiyonu simetrik ise $t_{(i)} = -t_{(n-i+1)}$ olur. Buna bağlı olarak da $\alpha_i = -\alpha_{n-i+1}$ ve $\beta_i = \beta_{n-i+1}$ dır. Böylelikle simetrik aileler için D sıfır olur. Sonuç olarak ele alınan dağılım simetrik olduğunda $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, x_{(i)}/M$ uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi ölçek parametresi σ'dan bağımsız olarak sıra istatistiklerinin doğrusal bir birleşimi olarak karşımıza çıkmaktadır.

3. YENİLEME SÜRECİ

Bu bölümde bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi üzerine kurulu bir sayma süreci olan yenileme süreci tanıtılır. Yenileme süreci ile ilgili bilinen bazı özellikler hatırlatılır. Sürecin iki önemli karakteristiği olan M yenileme ve V varyans fonksiyonları verilir. Bu fonksiyonlarla ilgili bazı bilgiler verildikten sonra bu fonksiyonların sayısal hesabı üzerinde durulur.

Özel bir sayma süreci olan yenileme süreci risk analizi, güvenilirlik teorisi, trafik akışlarının modellenmesi, kuyruk teorisi ve envanter teorisi gibi alanlarda kullanılan önemli bir araçtır. Bu sürecin tanımı ise aşağıdaki gibidir.

$X_1, X_2, \ldots$ birbirlerinden bağımsız aynı F dağılımlı pozitif rasgele değişkenler olsunlar. Aşikar durumlardan sakınmak için $F(0) < 1$ kabul edilsin. Yani X_n rasgele değişkeni 1 olasılıkla sıfıra eşit olmasın. $n = 1,2, \ldots$ için

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

olmak üzere

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}, \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine yenileme süreci denir. $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci, $[0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısını sayan negatif olmayan tamsayı değerli bir stokastik süreçtir. Burada X_k ‘lar yenilemeler arası geçen zaman sürelerini ifade ederken S_n, n. yenilemenin gerçekleşme zamanıdır. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci ile birlikte $\{S_n, n \geq 0\}$ kısmi toplamlar süreci de yenileme süreci olarak ifade edilmektedir. Yenileme teorisinin temel amacı, gelişler arası zaman dağılımı F’nin bilgisine dayanarak $N(t)$ ve S_n ile ilgili belirli özellikleri elde etmektir. $F(0) < 1$ olduğundan F dağılımının ortalaması μ sıfırdan farklı olup, güçlü büyük sayılar yasasının göz önüne alınması ile $N(t)$ sonlu olmak zorundadır. Bu durumda $N(t)$’nin tanımında kullanılan sup ifadesi yerine max ifadesi kullanılabilir. Ayrıca $N(t)$ her mertebeden sonlu momentlere sahiptir (Ross 1983).

$$\begin{aligned}P(N(\infty) < \infty) &= P(\text{En az bir } n \text{ için } X_n = \infty) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n = \infty)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = \infty) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$ sonlu olmasına rağmen $P\left(\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty\right) = 1$ dir. $N(t)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı ise

$$\begin{aligned}P(N(t) = n) &= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) \\ &= F^{n*}(t) - F^{(n+1)*}(t), \qquad n = 0, 1, 2, \dots .\end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak elde edilir. Burada $" * "$ işlemi Stieltjes konvolüsyonunu belirtir. Bu ifade genelde analitik olarak elde edilemez. Ayrıca $N(t)$ için aşağıdaki limit ifadeleri geçerlidir.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{3.3}$$

ve σ^2 sonlu olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx \tag{3.4}$$

dır (Karlin ve Taylor 1975). Burada μ ve σ^2, F dağılımının beklenen değer ve varyansıdır. Yukarıdaki limit ifadelerine göre uzun bir zaman sonunda birim zamanda yapılan yenileme sayısı yaklaşık olarak $1/\mu$ dür ve $N(t)$, t/μ ortalamalı ve $\sigma^2 t/\mu^3$ varyanslı asimptotik normal dağılımlıdır.

3.1 Yenileme ve Varyans Fonksiyonu

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$M(t) = E(N(t)), t \geq 0 \tag{3.5}$$

ile verilen $M(t)$ fonksiyonuna sürecin ortalama değer fonksiyonu veya yenileme fonksiyonu denir (Karlin ve Taylor 1975). Burada $M(t)$, $[0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların beklenen sayısıdır. Yenileme sürecinin sonlu dereceden momentlerinin sonlu olması sebebi ile $\forall t \geq 0$ için $M(t) < \infty$ dır. Yenileme fonksiyonu için bir kapalı form ifade

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t), \quad t \geq 0 \tag{3.6}$$

şeklindedir. (3.6) ifadesinden görüleceği üzere M sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$ olmak üzere M, $t \to \infty$ için bire yakınsamamasının dışında dağılım fonksiyonu özelliklerine sahiptir. $M(t)$ için bir integral denklem ise birinci yenileme zamanı üzerinden koşullandırma ile

$$E(N(t)) = E[E(N(t)|X_1)], \qquad E(N(t)|X_1 = x) = \begin{cases} 0, & x > t \\ 1 + M(t-x), & x \leq t \end{cases}$$

$$= \int_0^{\infty} E(N(t)|X_1 = x) dF(x),$$

$$= \int_0^{t} (1 + M(t-x)) dF(x)$$

$$= F(t) + \int_0^{t} M(t-x) dF(x) \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Bu durumda M yenileme fonksiyonu $a(t) = F(t)$ olan (2.11) yenileme denklemini sağlar. Bununla birlikte M yenileme fonksiyonu

$$M(t) = F(t) + M * F(t), \qquad t \geq 0 \tag{3.8}$$

şeklinde ya da konvolüsyon işleminin değişme özelliğinden

$$M(t) = F(t) + F * M(t), \qquad t \geq 0 \tag{3.9}$$

olarak da ifade edilebilir. F ve M fonksiyonlarının Laplace-Stieltjes dönüşümleri

$$F_{LS}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dF(x)\,, M_{LS}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dM(x)$$

olmak üzere (3.9) ifadesinden

$$M_{LS}(t) = F_{LS}(t) + F_{LS}(t) M_{LS}(t) \tag{3.10}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda M yenileme fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü için

$$M_{LS}(t) = \frac{F_{LS}(t)}{1 - F_{LS}(t)} \tag{3.11}$$

ve F dağılım fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü için

$$F_{LS}(t) = \frac{M_{LS}(t)}{1 + M_{LS}(t)} \tag{3.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca F dağılım fonksiyonu bir f yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğunda f ve M fonksiyonlarının sırası ile Laplace dönüşümleri

$$f_L(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx\,, M_L(t) = \int_0^\infty e^{-tx} M(x) dx$$

olmak üzere (3.7) integral denkleminden

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t - x) f(x) dx \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın Laplace dönüşümü alındığında, $F_L(t) = f_L(t)/t$ olmak üzere

$$M_L(t) = \frac{f_L(t)}{t} + M_L(t)f_L(t) \tag{3.14}$$

olarak elde edilir. Böylelikle

$$M_L(t) = \frac{f_L(t)}{t\big(1 - f_L(t)\big)} \tag{3.15}$$

ve

$$f_L(t) = \frac{tM_L(t)}{\big(1 + tM_L(t)\big)} \tag{3.16}$$

dır.

Bir fonksiyonun Laplace-Stieltjes dönüşümü, o fonksiyonu tek olarak belirlediğinden (Kawata 1972), (3.11) ve (3.12) ifadelerinin göz önüne alınması ile M yenileme fonksiyonu F dağılım fonksiyonunu ve F dağılım fonksiyonu da M yenileme fonksiyonunu tek olarak belirler.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$V(t) = \mathrm{Var}\big(N(t)\big), t \geq 0 \tag{3.17}$$

ile verilen V fonksiyonuna sürecin varyans fonksiyonu denir (Karlin ve Taylor 1975). Yenileme sürecinin sonlu dereceden bütün momentlerinin sonlu olması sebebi ile $\forall t \in [0, \infty)$ için $V(t) < \infty$ dır. Bir yenileme sürecinin varyans fonksiyonu

$$V(t) = E\big(N^2(t)\big) - E^2\big(N(t)\big), t \geq 0 \tag{3.18}$$

olmak üzere $E\big(N^2(t)\big)$'nin birinci yenileme zamanı X_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırılması ile varyans fonksiyonu için bilinen

$$V(t) = M(t)\big(1 - M(t)\big) + 2M * M(t) \tag{3.19}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade ayrıca Stieltjes konvolüsyonunun tanımından hareketle

$$V(t) = M(t)\big(1 - M(t)\big) + 2\int_0^t M(t-x)dM(x)$$

olarak da yazılabilir. Ayrıca V varyans fonksiyonu

$$V(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x) \qquad (3.20)$$

integral denklemini sağlar ve bu denklem aynı zamanda bir yenileme denklemidir. Teorem 2.5.1 gereği bu integral denkleminin sonlu aralıklar üzerinde sınırlı bir ve tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$V(t) = M(t)\big(1 - M(t)\big) + 2M * M(t) \qquad (3.21)$$

dır. Böylelikle (3.19) ifadesi tekrar elde edilir (Aydoğdu 1997). Bununla birlikte V varyans fonksiyonu

$$V(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} nF^{n*}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)\right), t \geq 0 \qquad (3.22)$$

şeklinde konvolüsyon serileri yardımı ile de ifade edilebilir.

3.2 Yenileme ve Varyans Fonksiyonu ile İlgili Bazı Limit Teoremler

Şimdi M yenileme ve V varyans fonksiyonu için bilinen bazı limit teoremler hatırlatılsın.

Teorem 3.2.1 (Elemanter Yenileme Teoremi) $\{N(t), t \geq 0\}$ $E(X_1) = \mu < \infty$ olacak şekilde bir yenileme süreci olsun. Bu durumda bu sürece ilişkin M yenileme fonksiyonu için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \qquad (3.23)$$

dır (Karlin ve Taylor 1975).

Teorem 3.2.2 (Anahtar Yenileme Teoremi) a, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve

i. Her $t > 0$ için $a(t) \geq 0$

ii. $\int_0^\infty a(t)dt < \infty$

iii. a artmayan

özelliklerine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda, F aritmetik olmayan bir dağılım fonksiyonu ise

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t a(t-x)dM(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(x)dx \tag{3.24}$$

dır (Smith 1958).

Sonuç 3.2.1 Bir yenileme sürecinde ardışık yenilemeler arası geçen zaman süreleri kafessel olmayan bir F dağılım fonksiyonuna ve sonlu μ ortalamasına sahip olsun. Bu durumda a fonksiyonu Teorem 3.2.2'nin (i), (ii) ve (iii) şartlarını sağlar ise yenileme denkleminin çözüm fonksiyonu olan A için

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(x)dx \tag{3.25}$$

dır.

Teorem 3.2.3 (Blackwell' in Yenileme Teoremi) Bir $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecinde yenilemeler arası geçen zaman süresi dağılımı F olsun. F dağılımının ortalaması μ olmak üzere eğer F aritmetik olmayan bir dağılım fonksiyonu ise herhangi bir $h > 0$ için

$$\lim_{t\to\infty}\big(M(t) - M(t-h)\big) = \frac{h}{\mu} \tag{3.26}$$

dır (Smith 1958). Burada uygunluk için $\mu = \infty$ olduğunda $h/\mu = 0$ kabul edilir.

Bu ifade uzun bir süre sonunda h birimlik bir zaman aralığında yapılacak ortalama yenileme sayısının h/μ olduğunu ifade eder. Belirtilmelidir ki elemanter yenileme teoremi bu teoremin bir sonucu olarak elde edilebilir.

Şimdi ise M yenileme fonksiyonu için iki terimli bir asimptotik ifade ispatsız olarak verilsin.

Teorem 3.2.4 M yenileme fonksiyonu ile ilgili F dağılımının varyansı σ^2 sonlu olsun. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty}(M(t) - t/\mu) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} \tag{3.27}$$

dır (Karlin ve Taylor 1975).

Şimdi de V varyans fonksiyonu için bilinen iki asimptotik özellik verilsin.

Teorem 3.2.5

1) $\sigma^2 < \infty$ olmak üzere F üzerinde başka bir koşul olmaksızın

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}, \tag{3.28}$$

2) F en az bir $n \geq 1$ için F^{n*} mutlak sürekli bir kısma sahip olacak biçimde bir dağılım fonksiyonu, $i = 2, 3$ için $\mu_i = E(X^i)$ ve $\mu_3 < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty}\left(V(t) - \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^3}t\right) = \frac{5\mu_2^2}{4\mu^4} - \frac{2\mu_3}{3\mu^3} - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \tag{3.29}$$

dır (Smith 1958).

3.3 Yenileme ve Varyans Fonksiyonunun Sayısal Hesabı

F yenilemeler arası geçen zamana ilişkin dağılım fonksiyonu olmak üzere, literatürdeki birçok dağılım için M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının bir analitik ya da kapalı form ifadesi bulunmamaktadır. Sadece belirli dağılımlar için M ve V fonksiyonlarının bir analitik ya da kapalı form ifadesi bulunabilmektedir. Örneğin, F Üstel dağılım iken M ve V fonksiyonlarının bir analitik ifadesi mevcuttur. F, şekil parametresi tamsayı olan Gama dağılımı olduğunda M ve V fonksiyonları bir kapalı form ifadeye sahiptirler. Fakat F, şekil parametresi tamsayı olmayan Gama dağılımı olduğunda ya da literatürde sıklıkla kullanılan Lognormal ya da Weibull dağılımı olduğunda M ve V fonksiyonlarının bir analitik ya da kapalı form ifadesi mevcut değildir. Bu sebeple bu fonksiyonların çoğu zaman sayısal olarak hesap edilmeleri gerekir. Bu kısımda M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının sayısal hesabı üzerinde durulur. Bu fonksiyonlara ilişkin farklı hesaplama yöntemleri için detaylı bilgi Aydoğdu (1997) ve Altındağ (2012)'da bulunabilir. Burada M ve V fonksiyonlarının hesabı için Xie (1989) tarafından önerilen ve oldukça kullanışlı olan Riemann-Stieltjes (RS) yöntemi üzerinde durulur. Öncelikle M yenileme fonksiyonunun RS yöntemi ile sayısal hesabı tarif edilir ve buna bağlı olarak Aydoğdu (1997) tarafından tarif edilen V varyans fonksiyonunun hesabı anlatılır.

$\int_a^b g(x)dh(x)$ tipindeki bir integral göz önüne alınsın. $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ $[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ şeklinde bir parçalanması olmak üzere bu integral yamuk integrasyon kuralı yardımı ile

$$\int_a^b g(x)dh(x) \cong \sum_{i=1}^{m} \frac{g(x_{i-1}) + g(x_i)}{2}\left(h(x_i) - h(x_{i-1})\right) \tag{3.30}$$

şeklinde yaklaşık olarak hesap edilebilir. Bu bilgi ışığında M yenileme fonksiyonu için

$$M(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dM(x)\,, t \geq 0$$

integral denklemi göz önüne alınsın. t verilmiş bir sabit olmak üzere $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ $[0, t]$ aralığının $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = t$ şeklinde bir parçalanması olsun. Bu durumda yukarıda verilen yamuk integrasyon yardımı ile

$$M(t_i) \cong F(t_i) + \sum_{j=1}^{i} F\left(t_i - \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)\left(M(t_j) - M(t_{j-1})\right) \tag{3.31}$$

yazılabilir. Bu durumda $K_i = \sum_{j=1}^{i} F\left(t_i - (t_j + t_{j-1})/2\right)\left[M(t_j) - M(t_{j-1})\right]$ alındığında ${}_aM(t_0) = 0$ olmak üzere $i = 1,2, \ldots, m$ için $M(t_i)$ ardışık olarak

$${}_aM(t_i) = \frac{F(t_i) + K_i - F(t_i - (t_i + t_{i-1})/2)\ {}_aM(t_{i-1})}{1 - F(t_i - (t_i + t_{i-1})/2)} \tag{3.32}$$

ifadesi ile yaklaşık olarak hesap edilebilir (Xie 1989). Eğer F dağılım fonksiyonunun bir kapalı form ifadesi yok ise F'ye ilişkin f olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımı ile $i = 1,2, \ldots, m$ için $F(t_i)$

$$F(t_i) = F(t_{i-1}) + f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\frac{t}{n} \tag{3.33}$$

ifadesi ile hesap edilebilir (Aydoğdu 1997).

Şimdi de V varyans fonksiyonu için Kısım 3.1'de verilen

$$V(t) = M(t)[1 - M(t)] + 2M * M(t), t \geq 0 \tag{3.34}$$

ifadesi göz önüne alınsın. t verilmiş bir sabit olmak üzere $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ $[0, t]$ aralığının $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = t$ şeklinde bir parçalanması olsun. Bu durumda yukarıda verilen yamuk integrasyon yardımı ile

$$M * M(t_i) \cong \sum_{j=1}^{i} M\left(t_i - \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)\left(M(t_j) - M(t_{j-1})\right) \tag{3.35}$$

yazılabilir. Böylelikle ${}_aV(t_0) = 0$ olmak üzere $i = 1,2, \ldots, m$ için $V(t_i)$ ardışık olarak

$${}_aV(t_i) = {}_aM(t_i)\left[1 - {}_aM(t_i)\right]$$

$$+2\sum_{j=1}^{i} {}_{a}M\left(t_i - \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)\left({}_{a}M(t_j) - {}_{a}M(t_{j-1})\right) \qquad (3.36)$$

ifadesi ile yaklaşık olarak hesap edilebilir (Aydoğdu 1997).

Burada belirtmek gerekir ki M'nin hesabı için $[0, t]$ aralığının $t_i = i\frac{t}{m}, i = 1, \dots, m$ olacak şekilde bir $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eşit aralıklı parçalanması kullanılabilir. Bu parçalanmanın V'nin hesabında ihtiyaç duyulan noktaların hesabına cevap verebilmesi için V'ye ilişkin parçalanma $i = 1, \dots, m/2$ için $t'_i = 2i\frac{t}{n}$ olmak üzere $\{t'_0, t'_1, \dots, t'_{m/2}\}$ olarak seçilmelidir. Böylelikle (3.36) ifadesindeki ${}_{a}M\left(t'_{j-1}\right)$, ${}_{a}M\left(t'_j\right)$ ve ${}_{a}M\left(t'_i - (t'_j + t'_{j-1})/2\right)$ değerleri M'nin hesabından elde edilebilir (Aydoğdu 1997).

4. SANSÜRLÜ VERİLER

Araştırılmak istenen bir olgu hakkında istatistiksel analiz yapabilmek için öncelikle ilgili olgunun gözlemlenmesi gerekir. Bu gözlem sonucu elde edilen veriler kullanılarak istatistiksel analiz gerçekleştirilir. Ancak bazı durumda gözlemler tam olarak gözlenebilmiş olsa da bazı durumlarda istemeden ya da isteğe bağlı olarak tüm gözlemler tam olarak gözlenmeyebilir. Eğer herhangi bir birim tam olarak değil, kısmen gözlenmiş ise bu gözleme sansürlü gözlem adı verilir. Bazı uygulamalı alanlarda gözlemler sansürlü olarak elde edilebilmektedir. Örneğin, tıp uygulamalarında belirli bir hasta grubuna uygulanan bir tedavi yöntemine ilişkin gözlemler ele alınsın. Hastalardan bazıları sürekli takip altında tutulup bu hastalardan tam gözlem alınabiliyor iken bazı hastalar tedaviyi terk edebilir ya da herhangi bir sebepten ötürü hastadan bilgi alınamayabilir. Bu tür hastalardan alınan kısmi gözlemler birer sansürlü gözlem olarak değerlendirilir. Bu durum istenmeden sansürlü gözlemin ortaya çıkmasına örnektir. Bazı durumlarda ise zaman, maliyet gibi kısıtlardan ötürü gözlemler isteğe bağlı olarak sansürlenebilir. Örneğin herhangi bir elektronik ya da mekanik bir birime ilişkin yaşam süresinin modellenmesi istensin. Bu durumda n birim gözleme adet gözleme alınır ve bu birimlerin bozulma zamanları gözlenir. Ancak araştırmacı zaman kısıtından dolayı gözlemi en fazla bir T zamanına kadar gerçekleştirmek isteyebilir. Bu durumda T zamanından önce bozulanlar tam gözlem iken T zamanına kadar bozulmayanlar sansürlü gözlemdir. Ya da bu birimin bozulma maliyeti yüksek ise en fazla $r \leq n$ tanesinin bozulması arzu edilebilir. Bu durumda ilk r gözlem tam gözlem iken kalanları sansürlü gözlem olur.

Bir sansürleme, sansürlemenin gerçeklenişine göre üç sınıfa ayrılır. Bunlar soldan, sağdan ve aralık sansürlemedir. Soldan sansürleme, gözlemin belirli bir değerden küçük olduğunu ifade eder. Sağdan sansürleme, gözlemin belirli bir değerden büyük olduğunu ifade eder. Aralık sansürleme ise gözlemin belirli iki değer arasında olmasını ifade eder. Yenileme süreci ile ilgili uygulamalarda genellikle sağdan sansürlü gözlemler ortaya çıktığı için, bu çalışmada sadece sağdan sansürleme türleri üzerinde durulur. Bunun için sağdan sansürleme türleri tanıtılır ve bu sansür türleri altında parametrik modeller için en çok olabilirlik problemi detaylıca ele alınır.

4.1 Sansürlüme Türleri

4.1.1 Rasgele sansürleme

Herhangi özdeş n adet birimin yaşam süresi (bozulma zamanı) gözlenmek istensin. Bu birimlere ait yaşam süreleri birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım ve f yoğunluk fonksiyonuna sahip $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ rasgele değişkenleri ile gösterilsin. $T_1, T_2, \dots, T_n$ hem birbirinden hem de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ rasgele değişkenlerinden bağımsız ve herhangi bir G dağılım ve g olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için $i.$ birimin yaşam süresi $\min(Y_i, T_i)$ olarak gözleniyor ise bu duruma sağdan rasgele sansürleme denir. Burada T_i, $i.$ birim için rasgele sansürleme zamanını ifade eder. Şimdi sağdan rasgele sansürleme durumunda n birimlik bir rasgele örneklemin olabilirlik fonksiyonu elde edilsin. $X_i = \min(Y_i, T_i), i = 1, \dots, n$ alınsın. $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \le T_i \\ 0, & Y_i > T_i \end{cases}$ olmak üzere $X_i = I_i Y_i + (1 - I_i) T_i$ yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X_i = x_i, \quad I_i = 1 &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad Y_i \le T_i \\ &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad X_i = Y_i, \quad Y_i \le T_i \\ &\Leftrightarrow Y_i = x_i, \quad x_i \le T_i \end{aligned}$$

olmasının göz önüne alınması ile

$$f_{X_i, I_i}(x_i, 1) = f(x_i)[1 - G(x_i)] \tag{4.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} X_i = x_i, \quad I_i = 0 &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad Y_i > T_i \\ &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad X_i = T_i, \quad Y_i > T_i \\ &\Leftrightarrow T_i = x_i, \quad x_i < Y_i \end{aligned}$$

olduğundan

$$f_{X_i, I_i}(x_i, 0) = g(x_i)[1 - F(x_i)] \tag{4.2}$$

dır. Sonuç olarak $\delta_i \in \{0,1\}$ olmak üzere X_i, I_i rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu

$$f_{X_i,I_i}(x_i,\delta_i) = f(x_i)^{\delta_i}[1 - G(x_i)]^{\delta_i} g(x_i)^{1-\delta_i}[1 - F(x_i)]^{1-\delta_i} \tag{4.3}$$

olarak elde edilir. Burada δ_i, I_i rasgele değişkeninin aldığı değeri ifade eder. Sağdan rasgele sansürleme durumunda $i = 1, 2, \dots, n$ için X_i, I_i rasgele değişkenleri gözlenir. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\delta_i}[1 - G(x_i)]^{\delta_i} g(x_i)^{1-\delta_i}[1 - F(x_i)]^{1-\delta_i} \tag{4.4}$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, F ve G dağılımlarının bilinmeyen parametreleridir. Bu fonksiyon ayrıca

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\delta_i}[1 - F(x_i)]^{1-\delta_i} \prod_{i=1}^{n} g(x_i)^{1-\delta_i}[1 - G(x_i)]^{\delta_i} \tag{4.5}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer G dağılımı $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerini içermez ise ikinci çarpım ifadesi en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilmesine etki etmez. Böylelikle ilgili parametrelerin tahmini için sadece

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\delta_i}\big(1 - F(x_i)\big)^{1-\delta_i} \tag{4.6}$$

ifadesini kullanmak yeterlidir.

Şimdi de sağdan rasgele sansürleme durumu için genel olarak Fisher bilgisi elde edilsin. Bilindiği üzere $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı Fisher bilgisi

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W}) = E\left[\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W})\right]' \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W})\right]\right] \tag{4.7}$$

ile tanımlı olup $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W})$ matrisine Fisher bilgi matrisi denir. Bu matrisin herhangi (i,j). elemanı

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{W})_{ij}=E\left[\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{W})\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{W})\right]\right], i,j\in\{1,2,\dots,r\} \tag{4.8}$$

dır. Belirtilmelidir ki n birimlik örneklemin $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için Fisher bilgisi tek bir gözlemin bilgisinin n katına eşittir. Tek bir gözleme ilişkin Fisher bilgisi matrisinin (i,j). elemanı

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};W_1)_{ij}&=E\left[\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L(\boldsymbol{\theta};W_1)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln L(\boldsymbol{\theta};W_1)\right]\right]\\&=\sum_{\delta=0}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln L(\boldsymbol{\theta};W_1)]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}[\ln L(\boldsymbol{\theta};W_1)]\right]f_{X_1,I_1}(x,\delta)dx\end{aligned} \tag{4.9}$$

olmak üzere (4.3) ifadesinden $f_{X_1,I_1}(x,0)=g(x)\bar{F}(x)$ ve $f_{X_1,I_1}(x,1)=f(x)\bar{G}(x)$ olduğunun göz önüne alınması ile

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};W_1)_{ij}=&\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\ln\left(g(x)\bar{F}(x)\right)\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\ln\left(g(x)\bar{F}(x)\right)\right]\right]g(x)\bar{F}(x)dx\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\ln\left(f(x)\bar{G}(x)\right)\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\ln\left(f(x)\bar{G}(x)\right)\right]\right]f(x)\bar{G}(x)dx\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada $\bar{F}=1-F$ ve $\bar{G}=1-G$ dır. Sonuç olarak $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{W})=n[\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};W_1)] \tag{4.11}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca Zheng ve Gaswirth (2001) göstermiştir ki h, F dağılımına ilişkin bozulma oran fonksiyonu yani $h(x)=f(x)/[1-F(x)]$ olmak üzere $\boldsymbol{W}$ örneklemine dayalı Fisher bilgi matrisinin (i,j). elemanı

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{W})_{ij}=n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln h(x)]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}[\ln h(x)]\right]f(x)\bar{G}(x)dx \tag{4.12}$$

ifadesi üzerinden de elde edilebilir. Uygulamalarda (4.12) ifadesi üzerinden işlem yapmak genellikle daha kolaydır. Dahası eğer $i = 1,..,r$ olmak üzere herhangi bir θ_i parametresi için $h(x) = u(x)v(\theta_i)$ biçiminde yazılabiliyor ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln h(x)]\right]^2 f(x)\bar{G}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln f(x)]\right]^2 f(x)dxP(Y_1 < T_1) \qquad (4.13)$$

dır (Zheng 2001).

4.1.2 Tip I sansürleme

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım ve f yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere herhangi özdeş n adet birimin yaşam süresini göstersin. $L_1, L_2, \dots, L_n$ önceden belirlenmiş sabitler olmak üzere $i = 1, \dots, n$ için $i.$ birimin yaşam süresi $\min(Y_i, L_i)$ olarak gözlensin. Bu şekilde oluşturulan sansürleme işlemine tip I sansürleme adı verilir. Burada L_i, $i.$ birim için sansürleme zamanını ifade eder. Tip I sansürlü örnekleme ilişkin olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir. Kısım 4.1.1'e benzer şekilde $X_i = \min(Y_i, L_i), i = 1, \dots, n$ alınsın. $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \le L_i \\ 0, & Y_i > L_i \end{cases}$ olmak üzere $X_i = I_iY_i + (1 - I_i)L_i$ yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X_i = x_i, \quad I_i = 1 &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad Y_i \le L_i \\ &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad X_i = Y_i, \quad Y_i \le L_i \\ &\Leftrightarrow Y_i = x_i, \quad x_i \le L_i \end{aligned}$$

olmasının göz önüne alınması ile

$$f_{X_i,I_i}(x_i, 1) = f(x_i), \qquad x_i \le L_i \qquad (4.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} X_i = x_i, \quad I_i = 0 &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad Y_i > L_i \\ &\Leftrightarrow X_i = x_i, \quad X_i = L_i, \quad Y_i > L_i \\ &\Leftrightarrow L_i = x_i, \quad x_i < Y_i \end{aligned}$$

olduğundan

$$f_{X_i,I_i}(x_i,0) = 1 - F(x_i), \qquad x_i = L_i \tag{4.15}$$

dır. Sonuç olarak $\delta_i \in \{0,1\}$ olmak üzere X_i, I_i rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu

$$f_{X_i,I_i}(x_i,\delta_i) = f(x_i)^{\delta_i}[1 - F(x_i)]^{1-\delta_i}, \qquad x_i \leq L_i \tag{4.16}$$

olarak elde edilir.

Tip I sansürleme durumunda $i = 1, 2, \dots, n$ için X_i, I_i rasgele değişkenleri gözlenir. Bu durumda $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\delta_i}[1 - F(x_i)]^{1-\delta_i} \tag{4.17}$$

dır.

Şimdi de tip I sansürleme durumu için Fisher bilgi matrisi genel olarak elde edilsin. Burada kolaylık için sansürleme zamanları birbirine eşit olsun, yani $L_1 = \cdots = L_n = L$ alınsın. Tek bir gözleme ilişkin Fisher bilgisi matrisinin $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için (i, j). elemanı

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; W_1)_{ij} &= E\left[\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L(\boldsymbol{\theta}; W_1)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln L(\boldsymbol{\theta}; W_1)\right]\right] \\ &= \sum_{\delta=0}^{1}\int_{D_X}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln L(\boldsymbol{\theta}; W_1)]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}[\ln L(\boldsymbol{\theta}; W_1)]\right] f_{X_1,I_1}(x,\delta)dx \end{aligned} \tag{4.18}$$

olmak üzere (4.16) ifadesinden $f_{X_1,I_1}(x,0) = \bar{F}(L)$ ve $f_{X_1,I_1}(x,1) = f(x)$, $x \leq L$ olduğunun göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; W_1)_{ij} = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln(f(x))]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}[\ln(f(x))]\right] f(x)dx$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln(\bar{F}(L))]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}[\ln(\bar{F}(L))]\right]\bar{F}(L) \qquad (4.19)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W}) = n[\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; W_1)]$$

dır.

Belirtmek gerekir ki tip I sansürleme rasgele sansürlemenin özel halidir. Eğer rasgele sansürlemede sansürleme dağılımı G, L noktasında yoğunlaşmış Dirac dağılımına sahipse G dağılımı ile yapılan rasgele sansürleme tip I sansürlemeye karşılık gelir. Buradan hareketle tip I sansürlü bir rasgele örneklem için eğer $i \in \{1, .. , r\}$ olmak üzere herhangi bir θ_i parametresi için h F dağılımının bozulma oran fonksiyonu olmak üzere $h(x) = u(x)v(\theta_i)$ biçiminde yazılabiliyor ise

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W})_{ii} = n\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}[\ln f(x)]\right]^2 f(x)dx\right] F(L) \qquad (4.20)$$

dır.

4.1.3 Tip II sansürleme

$X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım ve f yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere herhangi özdeş n adet birimin yaşam süresini göstersin. Yaşam süreleri gözlenirken önceden belirlenmiş bir $r \leq n$ sabiti için ilk r adet yaşam süresi tam olarak gözlendikten sonra geri kalan yaşam süreleri sansürlensin. Yani bu n birimin yaşam süreleri $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}, \underbrace{X_{(r)}, \dots, X_{(r)}}_{n-r \text{ adet}}$ olarak gözlensin. Bu şekilde oluşturulan sansürleme işlemine tip II sansürleme adı verilir. Burada $X_{(i)}$, $i = 1, \dots, r$ için n birimlik örneklemin $i.$ sıra istatistiğini ifade eder. Tip II sansürlü gözlemlere ilişkin olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir. Bilindiği üzere $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örnekleminin sıra istatistikleri olmak üzere herhangi $1 \le l_1 < l_2 < \dots < l_k \le n$ ve $1 \le k \le n$ tamsayıları için $X_{(l_1)}, \dots, X_{(l_k)}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k+1}(l_i - l_{i-1} - 1)!}\prod_{i=1}^{k+1}\left[F\left(x_{(l_i)}\right) - F\left(x_{(l_{i-1})}\right)\right]^{l_i - l_{i-1} - 1}\prod_{i=1}^{k} f\left(x_{(l_i)}\right) \tag{4.21}$$

dır (Lawless 2003). Burada $x_{(l_1)} \le \dots \le x_{(l_k)}$ olmak üzere uygunluk için $l_0 = 0$, $l_{k+1} = n + 1$, $x(l_0) = -\infty$ ve $x(l_{k+1}) = \infty$ alınır. n toplam birim sayısı ve $n - r$ sansürlü gözlem sayısını belirtmek üzere $\boldsymbol{X} = \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}\right)$ tip II sansürlü örneklemi için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X}) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f\left(x_{(i)}\right)\left[1 - F\left(x_{(r)}\right)\right]^{n-r} \tag{4.22}$$

dır. Şimdi de tip II sansürleme durumunda $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için Fisher bilgi matrisi elde edilsin.

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X}) = E\left[\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X})\right]'\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X})\right]\right] \tag{4.23}$$

olmak üzere $\boldsymbol{M} = \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left[\sum_{i=1}^{r}\ln f\left(X_{(i)}\right) + (n-r)\ln\left[1 - F\left(X_{(r)}\right)\right]\right]\right]$ yazılırsa

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X}) = E[\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M}] \tag{4.24}$$

olarak elde edilir.

4.1.4 İlerleyen tür tip II sansürleme

$X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım ve f yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere herhangi özdeş n adet birimin yaşam süresini göstersin. İlk yaşam süresi gözlendiğinde geri kalan $n - 1$ birim içinden R_1 adet birim rasgele gözlemden çıkarılarak sansürlensin. İkinci yaşam süresi gözlendiğinde ise geri kalan

$n - 1 - R_1$ birimden R_2 adet birim rasgele gözlemden çıkarılsın ve bu işlem gözlemler bitene kadar devam ettirilsin. Bu şekilde oluşturulan sansürleme işlemine ilerleyen tür tip II sansürleme adı verilir. Burada $m \leq n$ ve $i = 1, \dots, m$ için $R_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} R_i + m = n$ şartını sağlayan önceden belirlenmiş sabitler olmak üzere $(R_1, R_2, \dots, R_m)$'ye sansürleme şeması adı verilir. İlerleyen tür tip II sansürleme tip II sansürlemenin bir genellemesidir. Örneğin; ilerleyen tür tip II sansürlemede $m = r$ ve $R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_{m-1} = 0, R_m = n - r$ alınırsa bu durum tip II sansürlemeye karşılık gelir.

İlerleyen tür tip II sansürlü gözlemlere ilişkin olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir. Öncelikle, $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri içerisinden tam olarak elde edilen rasgele değişkenler küçükten büyüğe sıralı olarak $i = 1, \dots, m$ için $X_{i:m:n}$ ile gösterilsin. Burada $X_{i:m:n}$ rasgele değişkenleri alışıldık $i.$ sıra istatistiği olmayıp ilerleyen tür sıra istatistikleri olarak ifade edilir (Balakrishnan ve Aggarwala 2000). Sansürleme şeması $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ olmak üzere n birimlik ilerleyen tür tip II sansürlü örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X}) = c \prod_{i=1}^{m} f(x_{i:m:n})[1 - F(x_{i:m:n})]^{R_i} \tag{4.25}$$

dır. Burada $\boldsymbol{X} = (X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ olup $c = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$ dır.

İlerleyen tür tip II sansürleme durumu için Fisher bilgi matrisi (4.24) ifadesine benzer şekilde, $\boldsymbol{M} = \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} [\sum_{i=1}^{m} \ln f(X_{i:m:n}) + R_i \ln[1 - F(X_{i:m:n})]]\right]$ yazılırsa

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{X}) = E[\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M}] \tag{4.26}$$

olarak elde edilir. Burada belirtilmelidir ki beklenen değerin elde edilebilmesi için $i.$ ilerleyen tür sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. $i = 1,2, \dots, m$ için $X_{i:m:n}$ ilerleyen tür sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{i:m:n}}(x) = f(x)\left[\prod_{k=1}^{i}\gamma_k\right]\sum_{k=1}^{i} a_{k,i}[1-F(x)]^{\gamma_k - 1}, x \geq 0 \tag{4.27}$$

ile verilir (Balakrishnan ve Cramer 2014). Burada $a_{k,i} = \prod_{j=1,j\neq k}^{i} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_k}$, $1 \leq k \leq i \leq n$ ve $\gamma_i = \sum_{j=i}^{m}(R_j + 1)$, $1 \leq i \leq m$ dır. Görüldüğü üzere herhangi bir F dağılımına ilişkin ilerleyen tür sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları bulunabilmesine rağmen bu ifadeler oldukça karmaşıktır. Dolayısıyla da $X_{i:m:n}$ ilerleyen tür sıra istatistiğinin ihtiyaç duyulan bir fonksiyonunun beklenen değerinin analitik olarak bulunması çoğu dağılım için neredeyse mümkün değildir. Bununla birlikte ilgili beklenen değerlerin sayısal hesabı dahi oldukça zordur.

4.2 Parametrik Modellerde Sansürlü Veri Durumunda Tahmin

Bu kısımda Üstel, Weibull ve Lognormal dağılım durumlarında yukarıda verilen sansür türlerine göre elde edilen örneklemlere dayalı olarak ilgili modellerin en çok olabilirlik tahmin problemi detaylıca incelenir.

4.2.1 Üstel dağılım

X bir rasgele değişken olmak üzere Üstel(θ) dağılıma sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu sırası ile

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \qquad x \geq 0, \theta > 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \qquad x \geq 0, \theta > 0,$$

$$h(x) = \frac{1}{\theta}, \qquad x \geq 0, \theta > 0$$

dır. Üstel dağılım durumunda sansürlü veriler için parametre tahminine geçmeden önce tam veri için bilinen bazı ifadeler kısaca verilsin. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Üstel(θ) dağılımdan n

birimlik bir rasgele örneklem olmak üzere θ parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi bilindiği üzere

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.28}$$

dır. Yani θ parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi örneklem ortalamasıdır. Bu durumda $\hat{\theta}$, n şekil ve θ/n ölçek parametreli Gama dağılımına sahip olup $E(\hat{\theta}) = \theta$ dır, yani; $\hat{\theta}$, θ için yansızdır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemine dayalı Fisher bilgisi ise (2.28) ifadesi üzerinden

$$\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{X}) = n/\theta^2 \tag{4.29}$$

olarak elde edilir. Böylelikle $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{d} N(0, \theta^2) \tag{4.30}$$

dır. Şimdi yukarıda belirtilen sansürleme türlerine göre elde edilen rasgele örneklemlere dayalı olarak θ parametresinin en çok olabilirlik tahmini ele alınsın.

4.2.1.1 Rasgele sansürleme

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ Üstel(θ) dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere. $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele sansürleme zamanları Üstel(β) dağılıma sahip olsun. $i = 1, \dots, n$ için $X_i = \min\{Y_i, T_i\}$ olmak üzere $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \le T_i \\ 0, & Y_i > T_i \end{cases}$ yazılsın. Bu durumda $X_i = I_i Y_i + (1 - I_i) T_i$ dır. Rasgele sansürlü örneklemlerde $i = 1, \dots, n$ için X_i, I_i değişkenlerinin gözlendiği biliniyor. Böylece $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\theta} e^{\frac{-x_i}{\theta}}\right]^{\delta_i} \left[e^{\frac{-x_i}{\theta}}\right]^{1-\delta_i} \left[e^{\frac{-x_i}{\beta}}\right]^{\delta_i} \left[\frac{1}{\beta} e^{\frac{-x_i}{\beta}}\right]^{1-\delta_i} \tag{4.31}$$

olmak üzere β parametresi ile ilgilenilmediğinde log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\theta;\boldsymbol{W}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left[-\ln(\theta) - \frac{x_i}{\theta}\right] - (1-\delta_i)\frac{x_i}{\theta} \tag{4.32}$$

olarak elde edilir. Böylelikle $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;\boldsymbol{W}) = 0$ denkleminin çözülmesi ile θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i} \tag{4.33}$$

olarak elde edilir. Belirtilmelidir ki $\sum_{i=1}^{n} I_i = n$ olması durumunda hiçbir gözlem sansürlü değildir ve bu durum tam gözlem durumuna karşılık gelip $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i /n$ olur. Ayrıca $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i / \sum_{i=1}^{n} I_i$ tahmin edicisinin var olabilmesi için $\sum_{i=1}^{n} I_i > 0$, yani; en az bir gözlemin sansürsüz olarak elde edilmesi gerekir. Şimdi bu tahmin edicinin bazı istatistiksel özellikleri incelensin. Burada pay ve paydadaki her iki ifade de bir rasgele değişken olduğundan $\hat{\theta}$'nın dağılımını bulmak kolay değildir. Ancak en çok olabilirlik tahmin edicisinin teorik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\theta}$, θ için güçlü tutarlıdır. $\hat{\theta}$'nın θ için güçlü tutarlı oluşu ayrıca aşağıdaki gibi de gösterilebilir. Güçlü büyük sayılar kanununun göz önüne alınması ile paydanın sıfıra yakınsamaması koşulu altında

$$\hat{\theta} \xrightarrow{\text{hhhy}} \frac{E(X_1)}{E(I_1)} \tag{4.34}$$

dır. Paydaki ifadenin beklenen değerinin bulunabilmesi için öncelikle dağılımının elde edilmesi gerekir. $i = 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} P(X_i > x) &= P(\min(Y_i, T_i) > x) \\ &= P(Y_i > x, T_i > x) \\ &= P(Y_i > x)P(T_i > x) \\ &= e^{\frac{-x(\theta+\beta)}{\theta\beta}}, x \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $X_i \sim \text{Üstel}\left(\frac{\theta\beta}{\theta+\beta}\right)$ dır. $E(I_i) = P(Y_i \leq T_i)$ olup tam olasılık formülü yardımıyla $P(Y_i \leq T_i) = \beta/(\theta+\beta)$ elde edilir. Buradan $E(X_1)/E(I_1) = \theta$ olup istenilen sonuca ulaşılır. Yine en çok olabilirlik tahmin edicisinin teorik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\theta}$, θ ortalamalı, $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{W})^{-1}$ varyanslı asimptotik normal dağılımlıdır. Burada $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{W})$ Fisher bilgisi olmak üzere (4.7) ifadesinin göz önüne alınması ve gerekli işlemlerin yapılması ile $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{W}) = n\beta/[\theta^2(\theta+\beta)]$ olarak elde edilir. Böylelikle $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\big(\hat{\theta}-\theta\big) \xrightarrow{d} N(0,[\theta^2(\theta+\beta)]/\beta) \tag{4.35}$$

dır. Belirtilmelidir ki bu ifade $\beta > 0$ için anlamlı olup asimptotik varyans β'nın azalan bir fonksiyonudur. Üstel dağılımın bozulma oran fonksiyonu sabit olduğundan herhangi u ve v fonksiyonları için $h(x) = u(x)v(\theta)$ biçiminde yazılabildiğinden Fisher bilgisine özel olarak (4.13) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{W}) = \mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{Y})P(Y_1 < T_1) \tag{4.36}$$

ifadesinden de ulaşılabilir. Burada $\boldsymbol{Y}$ Üstel(θ) dağılıma sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere gerçekten de $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{Y}) = n/\theta^2$ ve $P(Y_1 < T_1) = \beta/(\theta+\beta)$ olup $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{Y})P(Y_1 < T_1) = n\beta/[\theta^2(\theta+\beta)]$ dır.

4.2.1.2 Tip I sansürleme

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ Üstel(θ) dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere kolaylık için sansürleme zamanlarını ifade eden sabitler birbirine eşit, yani; $L_1 = \cdots = L_n = L$ olsun. $X_i = \min\{Y_i, L\}, i = 1, \dots, n$ olmak üzere $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \le L \\ 0, & Y_i > L \end{cases}$ yazılsın. Bu durumda $X_i = I_iY_i + (1-I_i)L$ olup, tip I sansürlü örneklemlerde $i = 1, \dots, n$ için X_i, I_i değişkenleri gözlenir. Bu durumda $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta;\boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta}e^{-x_i/\theta}\right]^{\delta_i}\left[e^{-x_i/\theta}\right]^{1-\delta_i} \tag{4.37}$$

olup buradan θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i} \tag{4.38}$$

olarak elde edilir. Rasgele sansürlemeye benzer şekilde $\sum_{i=1}^{n} I_i = n$ olması tam gözlem durumuna karşılık gelip $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ olur. Ayrıca $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i / \sum_{i=1}^{n} I_i$ tahmin edicisinin var olabilmesi için $\sum_{i=1}^{n} I_i > 0$, yani; en az bir gözlemin sansürsüz olarak elde edilmesi gerekir. Şimdi bu tahmin edicinin bazı istatistiksel özellikleri incelensin. Yine rasgele sansürlemeye benzer şekilde pay ve paydadaki her iki ifade de bir rasgele değişken olduğundan $\hat{\theta}$'nın dağılımını bulmak kolay değildir. Ancak en çok olabilirlik tahmin edicisinin teorik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\theta}$, θ için tutarlıdır ve θ ortalamalı, $\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{W})^{-1}$ varyanslı asimptotik normal dağılımlıdır. Burada $\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{W})$ $\boldsymbol{W}$ örneklemine dayalı Fisher bilgisi olup $\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{W}) = n\left(1 - e^{-L/\theta}\right)/\theta^2$ dır. Böylelikle $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\theta^2}{1 - e^{-L/\theta}}\right) \tag{4.39}$$

dır. Burada $\hat{\theta}$'nın asimptotik varyansı L nin azalan bir fonksiyonu olup L sansürleme zamanının büyümesi ile $\hat{\theta}$'nın asimptotik varyansı küçülür. Burada Üstel dağılım durumunda tip I sansürlü örneklemin Fisher bilgisine rasgele sansürlemeye benzer olarak

$$\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{W}) = \mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{Y}) P(Y_1 < L) \tag{4.40}$$

ifadesinden de ulaşılabilir. Gerçekten de $\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{Y}) = n/\theta^2$ ve $P(Y_1 < L) = 1 - e^{-(L/\theta)}$ olmak üzere $\mathbb{I}(\theta; \boldsymbol{Y}) P(Y_1 < T_1) = n\left(1 - e^{-L/\theta}\right)/\theta^2$ dır.

4.2.1.3 Tip II sansürleme

Tam olarak gözlenecek birim sayısı $r \leq n$ olmak üzere $\boldsymbol{X} = \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}\right)$, n birimlik $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminden elde edilen tip II sansürlü bir örneklem olsun. Bu durumda (4.22) ifadesinin göz önüne alınması ile tip II sansürlü $\boldsymbol{X}$ örneklemi için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta; \boldsymbol{X}) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{1}{\theta} e^{-x_{(i)}/\theta}\right] \left[e^{-x_{(r)}/\theta}\right]^{n-r} \tag{4.41}$$

olarak elde edilir. Buradan gerekli işlemlerin yapılması ile θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)X_{(r)}\right] \tag{4.42}$$

olarak bulunur. Şimdi bu tahmin edicinin istatistiksel özellikleri incelensin. $\hat{\theta}$'nın dağılımını bulabilmek için literatürde spacing olarak adlandırılan yardımcı değişkenler tanımlanmıştır. Bu değişkenler

$$\begin{aligned} Z_1 &= nX_{(1)} \\ Z_2 &= (n-1)\left(X_{(2)} - X_{(1)}\right) \\ &\vdots \\ Z_n &= \left(X_{(n)} - X_{(n-1)}\right) \end{aligned}$$

ile verilir. Bu durumda ters dönüşümler

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \frac{Z_1}{n} \\ X_{(2)} &= \frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n-1} \\ &\vdots \\ X_{(n)} &= \frac{Z_1}{n} + \cdots + \frac{Z_{n-1}}{2} + \frac{Z_n}{1} \end{aligned}$$

şeklindedir. Dönüşümün Jakobiyeni

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $|J| = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{n-(k-1)}$ olup $|J| = 1/c$ yazılsın. Böylelikle

$$f_{Z_1,\dots,Z_n}(z_1,\dots,z_n) = |J| f_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}\left(\frac{z_1}{n}, \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n-1}, \dots, \frac{z_1}{n} + \cdots + \frac{z_n}{1}\right)$$

olmak üzere

$$f_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}(x_1,\dots,x_n) = c f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$$

olmasının göz önüne alınması ile

$$f_{Z_1,\dots,Z_n}(z_1,\dots,z_n) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\theta}(z_1 + \cdots + z_n)\right)$$

elde edilir. Açıktır ki $Z_1, \dots, Z_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve θ ortalamalı Üstel dağılıma sahiptirler. $r\hat{\theta} = \sum_{k=1}^{r} Z_k$ olduğundan $2r\hat{\theta}/\theta \sim \chi^2_{(2r)}$ elde edilir. Burada $\chi^2_{(2r)}$, $2r$ serbestlik dereceli Kikare dağılımını belirtir. Bu ifade yardımıyla $E(\hat{\theta}) = \theta$ olup $\hat{\theta}$, θ için yansız bir tahmin edicidir. Buradan $\hat{\theta}$'nın varyansı da $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \theta^2/r$ olarak elde edilir. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicilerinin teorik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\theta}$ güçlü tutarlı ve θ ortalamalı, $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X})^{-1}$ varyanslı asimptotik normal dağılımlıdır. Burada $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X})$ Fisher bilgisi olup aşağıdaki gibi elde edilir. (4.23) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X}) = \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{r} E\left(X_{(i)}\right) + \frac{2}{\theta^3}(n-r)E\left(X_{(r)}\right) - \frac{r}{\theta^2} \tag{4.43}$$

dır. Üstel dağılımın sıra istatistikleri için $E\left(X_{(i)}\right) = \theta \sum_{k=1}^{i} 1/(n-k+1)$ olmasının göz önüne alınması ile (Balakrishnan ve Cohen 1991)

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X}) = \frac{2}{\theta^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{n-k+1} + \frac{2}{\theta^2}(n-r)\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{n-k+1} - \frac{r}{\theta^2} \tag{4.44}$$

elde edilir. Bu ifadede gerekli sadeleştirmelerin yapılması ile de

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X}) = r/\theta^2 \tag{4.45}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle p bir sabit ve $r = r_n$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $r/n \to p$ olduğunda

$$\sqrt{r}\big(\hat{\theta} - \theta\big) \xrightarrow{d} N(0, \theta^2) \tag{4.46}$$

dır. Bunun anlamı; gözlem sayısı arttırıldıkça tam gözlenecek birim sayısı da belli bir oranda arttığı müddetçe $\hat{\theta}$ tutarlı bir tahmin edici olup asimptotik normal dağılımlıdır. Aksi durumda $\hat{\theta}$ tutarlı olamayacağı gibi asimptotik normal dağılıma sahip olduğu da iddia edilemez.

4.2.1.4 İlerleyen tür tip II sansürleme

Sansürleme şeması $m \leq n$ için $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{m} R_i + m = n$ olsun. Bu durumda n birimlik ilerleyen tür sansürlü örneklem için olabilirlik fonksiyonu (4.25) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$L(\theta; \boldsymbol{X}) = c \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\theta} e^{\frac{-x_{i:m:n}}{\theta}}\right] \left[e^{\frac{-x_{i:m:n}}{\theta}}\right]^{R_i} \tag{4.47}$$

olarak bulunur. Burada $c = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - \cdots - R_{m-1} - m + 1)$ dır. Gerekli işlemlerin yapılması ile

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m} (1 + R_i) X_{i:m:n}\right] \tag{4.48}$$

olarak elde edilir. $i = 1,2, \dots, m$ için $X_{i:m:n}$ ilerleyen tür sıra istatistiklerinin dağılımını bulmak pek kolay değildir. Bu yüzden $\hat{\theta}$'nın dağılımını doğrudan elde etmek de oldukça zordur. Ancak tip II sansürleme durumuna benzer şekilde yardımcı değişkenler kullanarak $\hat{\theta}$'nın dağılımı elde edilebilmektedir. Yine tip II sansürleme durumuna benzer şekilde spacingler

$$\begin{aligned}
Z_1 &= nX_{1:m:n}, \\
Z_2 &= (n - R_1 - 1)(X_{2:m:n} - X_{1:m:n}), \\
Z_3 &= (n - R_1 - R_2 - 2)(X_{3:m:n} - X_{2:m:n}), \\
&\vdots \\
Z_m &= \big(n - R_1 - R_2 - \cdots - R_{m-1} - (m-1)\big)(X_{m:m:n} - X_{m-1:m:n})
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda ters dönüşümler

$$X_{1:m:n}=\frac{Z_1}{n}$$
$$X_{2:m:n}=\frac{Z_1}{n}+\frac{Z_2}{n-R_1-1}$$
$$\vdots$$
$$X_{m:m:n}=\frac{Z_1}{n}+\frac{Z_2}{n-R_1-1}+\cdots+\frac{Z_m}{n-\sum_{k=1}^{m-1}(R_k-1)}$$

şeklindedir. Dönüşümün Jakobiyeni

$$J=\begin{bmatrix}\frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-R_1-1} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-R_1-1} & \frac{1}{n-R_1-R_2-2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-R_1-1} & \frac{1}{n-R_1-R_2-2} & \cdots & \frac{1}{n-\sum_{k=1}^{m-1}(R_k-1)}\end{bmatrix}$$

olmak üzere $|J|=\frac{1}{n}\frac{1}{n-R_1-1}\cdots\frac{1}{n-\sum_{k=1}^{m-1}(R_k-1)}$ olup $|J|=1/c$ yazılsın. Böylelikle

$$f_{Z_1,\dots,Z_m}(z_1,\dots,z_m)=|J|f_{X_{1:m:n},\dots,X_{m:m:n}}\left(\frac{z_1}{n},\cdots,\frac{z_1}{n}+\cdots+\frac{z_m}{n-\sum_{k=1}^{m-1}(R_k-1)}\right)$$

olmak üzere

$$f_{X_{1:m:n},\dots,X_{m:m:n}}(x_1,\dots,x_n)=cf_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$$

olmasının göz önüne alınması ile

$$f_{Z_1,\dots,Z_m}(z_1,\dots,z_m)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^m\exp\left(-\frac{1}{\theta}(z_1+\cdots+z_m)\right)$$

elde edilir. Açıktır ki $Z_1,\dots,Z_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve θ ortalamalı Üstel dağılıma sahiptirler. $m\hat{\theta}=\sum_{k=1}^{m}Z_k$ olduğundan $2m\hat{\theta}/\theta\sim\chi^2_{(2m)}$ elde edilir. Bu ifade yardımıyla $E(\hat{\theta})=\theta$ olup $\hat{\theta}$, θ için yansız bir tahmin edicidir. Buradan

$\hat{\theta}$'nın varyansı da $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \theta^2/m$ olarak elde edilir. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicilerinin teorik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\theta}$ güçlü tutarlı ve θ ortalamalı, $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X})^{-1}$ varyanslı asimptotik normal dağılımlıdır. Burada $\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X})$ Fisher bilgisi olup aşağıdaki gibi elde edilir. (4.26) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X}) = \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)E(X_{i:m:n}) - \frac{m}{\theta^2} \tag{4.49}$$

dır. Üstel dağılım durumunda $X_{i:m:n}$ ilerleyen tür sıra istatistikleri için $R_0 = 0$ alınmak üzere $E(X_{i:m:n}) = \theta\sum_{k=1}^{i} 1/(n - \left(\sum_{j=0}^{k-1} R_j\right) - k + 1)$ olmasının göz önüne alınması ile (Balakrishnan ve Aggarwala 2000)

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X}) = \frac{2}{\theta^2}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{n - \left(\sum_{j=0}^{k-1} R_j\right) - k + 1}\right](R_i+1) - \frac{m}{\theta^2} \tag{4.50}$$

elde edilir. Bu ifadede gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\mathbb{I}(\theta;\boldsymbol{X}) = \frac{m}{\theta^2} \tag{4.51}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle p bir sabit ve $m = m_n$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $m/n \to p$ olduğunda

$$\sqrt{m}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \theta^2) \tag{4.52}$$

dır.

4.2.2 Weibull dağılımı

X bir rasgele değişken olmak üzere Weibull(α, β) dağılımına sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu sırası ile

$$F(x) = 1 - \exp(-(x/\beta)^{\alpha}), \qquad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp(-(x/\beta)^{\alpha}), \qquad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

$$h(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}, \qquad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

dır. Weibull dağılımında sansürlü veriler için parametre tahminine geçmeden önce tam veri için bilinen bazı ifadeler kısaca hatırlatılsın. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ Weibull(α, β) dağılımından n birimlik bir rasgele örneklem olmak üzere bu örnekleme dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta; \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.53}$$

şeklindedir. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu ise

$$\ln L(\alpha, \beta; \boldsymbol{X}) = n(\ln\alpha - \ln\beta) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \ln\beta) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \tag{4.54}$$

olarak elde edilir. α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin bulunabilmesi için log-olabilirlik fonksiyonun α ve β parametrelerine göre kısmi türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \boldsymbol{X})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \ln\beta) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}(\ln x_i - \ln\beta) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \boldsymbol{X})}{\partial \beta} = \frac{-\alpha n}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha} = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin ortak çözülmesi ile α parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisine

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\hat{\alpha}} \ln X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\hat{\alpha}}} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right]^{-1} \tag{4.55}$$

denkleminin çözülmesi ile ulaşılır. β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise yukarıda bulunan $\hat{\alpha}$'nın

$$\hat{\beta} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\hat{\alpha}}}{n}\right]^{1/\hat{\alpha}} \tag{4.56}$$

ifadesinde yerine konulması ile elde edilir. Weibull(α, β) dağılımı için n birimlik tam örnekleme dayalı Fisher bilgi matrisi ise gerekli işlemlerin yapılması ile

$$\mathbb{I}(\alpha, \beta; \boldsymbol{X}) = n \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\pi^2}{6} + (\gamma - 1)^2\right) & \frac{1}{\beta}(\gamma - 1) \\ \frac{1}{\beta}(\gamma - 1) & \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

şeklinde elde edilir. Burada γ Euler sabiti olup $\gamma = \lim_{n\to\infty} [\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n)] \cong 0.5772$ dır.

Bilindiği üzere bir X rasgele değişkeni α şekil ve β ölçek parametreli Weibull dağılımına sahip iken $Y = \ln X$ dönüşümü ile tanımlanan Y rasgele değişkeni a konum ve b ölçek parametresi ile Uç Değer dağılımına sahiptir. Uç Değer dağılımı için dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırası ile

$$F_Y(y) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\right), y \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}\exp\left(\frac{y-a}{b} - \exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\right), \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$$

olup $a = \ln\beta$ ve $b = 1/\alpha$ dır. Belirtilmelidir ki şekil-ölçek parametreli bir model üzerinde çalışmak yerine buna karşılık gelen konum-ölçek parametreli model üzerinde çalışmak daha kolay olabilmektedir. Bu yüzden Weibull modeli üzerinde çalışmak yerine logaritmik dönüşüm uygulayıp Uç Değer modeli üzerinde çalışmak tercih edilebilmektedir.

Şimdi de $X_1, X_2, \dots, X_n$ Weibull(α, β) dağılımından n birimlik bir tam örneklem olmak üzere Uç Değer dağılımı üzerinden α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilsin. $i = 1, \dots, n$ için $Y_i = \ln X_i$ alınsın. Bu durumda $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

Uç Değer(a, b) dağılımından n birimlik bir örneklem olup bu örnekleme dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(a, b; \boldsymbol{Y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} \exp\left(\frac{y_i - a}{b} - \exp\left(\frac{y_i - a}{b}\right)\right) \tag{4.58}$$

şeklindedir. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(a, b; \boldsymbol{Y}) = -n\ln b + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - a}{b} - \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{y_i - a}{b}\right) \tag{4.59}$$

olarak elde edilir. Burada a ve b ye göre kısmi türevlerin alınması ile

$$\frac{\partial \ln L(a, b; \boldsymbol{Y})}{\partial a} = -\frac{n}{b} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{y_i - a}{b}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b; \boldsymbol{Y})}{\partial b} = -\frac{n}{b} - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - a}{b} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - a}{b} \exp\left(\frac{y_i - a}{b}\right) = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan b parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisine

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \exp(Y_i/\hat{b})}{\sum_{i=1}^{n} \exp(Y_i/\hat{b})} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{4.60}$$

denkleminin çözülmesi ile ulaşılır. a parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise yukarıda bulunan $\hat{b}$'nın

$$\hat{a} = \hat{b} \ln\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \exp(Y_i/\hat{b})}{n}\right] \tag{4.61}$$

ifadesinde yerine konulması ile elde edilir. Böylelikle de Weibull dağılımı için α şekil ve β ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\alpha} = 1/\hat{b}$ ve $\hat{\beta} = e^{\hat{a}}$ olarak elde edilir. Uç Değer(a, b) dağılımından n birimlik bir örneklem için Fisher bilgi matrisi ise

$$\mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{Y})=\frac{n}{b^2}\begin{bmatrix}1 & (1-\gamma)\\ (1-\gamma) & \frac{\pi^2}{6}+(\gamma-1)^2\end{bmatrix} \tag{4.62}$$

şeklindedir.

Uç Değer dağılımının a konum ve b ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri asimptotik normal dağılımlı olup asimptotik varyans-kovaryans matrisine Fisher bilgi matrisinin tersi alınarak ulaşılmaktadır. Weibull dağılımına ilişkin parametre tahmini logaritmik dönüşüm yapılıp karşılık gelen Uç Değer dağılımı üzerinden elde edildiğinde, α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisine Kısım 2.6'da verilen Teorem 2.6.11'in kullanılması ile ulaşılabilir.

4.2.2.1 Rasgele sansürleme

$Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ Weibull(α,β) dağılımına sahip rasgele değişkenler olmak üzere $i=1,\dots,n$ için $i.$ birime ilişkin sansürleme zamanı olan T_i rasgele değişkeni ise Üstel(λ) dağılıma sahip olsun. $X_i=\min\{Y_i,T_i\}, i=1,\dots,n$ olmak üzere $I_i=\begin{cases}1, & Y_i\le T_i\\ 0, & Y_i>T_i\end{cases}$ yazılsın. Bu durumda $X_i=I_iY_i+(1-I_i)T_i$ dır. Rasgele sansürlü örneklemlerde $i=1,\dots,n$ için X_i,I_i değişkenlerinin gözlendiği biliniyor. Böylece $W_i=(X_i,I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W}=(W_1,W_2,\dots,W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right]^{\delta_i}\left[e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right]^{1-\delta_i}\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\lambda}e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)}\right]^{\delta_i}\left[e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)}\right]^{1-\delta_i}$$

şeklinde elde edilir. Burada α ve β parametreleri ile ilgilenildiğinden yukarıdaki denklemdeki ikinci çarpım ifadesi göz ardı edilebilir. İşlem kolaylığı için olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının alınması ile log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})=\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i\ln\alpha-\delta_i\ln\beta+\delta_i(\alpha-1)(\ln x_i-\ln\beta)-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.63}$$

olarak elde edilir. Buradan α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilebilmesi için parametrelere göre kısmi türevlerin alınması ile

$$\frac{\partial \ln(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i\frac{1}{\alpha}+\delta_i(\ln x_i-\ln\beta)-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}(\ln x_i-\ln\beta)\right]=0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})}{\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha x_i^{\alpha}\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}-\delta_i\frac{\alpha}{\beta}\right]=0$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisine

$$\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}I_i}{\sum_{i=1}^{n}I_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\alpha}}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\alpha}}}\right)-\sum_{i=1}^{n}I_i\ln X_i} \tag{4.64}$$

denkleminin çözülmesi ile ulaşılır. β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise yukarıda bulunan $\hat{\alpha}$'nın

$$\hat{\beta}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{n}I_i}\right]^{1/\hat{\alpha}} \tag{4.65}$$

ifadesinde yerine konulması ile elde edilir. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile α ve β parametreleri için güçlü tutarlı olup $n\to\infty$ iken

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}-\alpha\\ \hat{\beta}-\beta\end{pmatrix}\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\ \sigma_{12}&\sigma_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.66}$$

dır. Burada asimptotik varyans ve kovaryans değerlerini elde edebilmek için öncelikle Fisher bilgi matrisi elde edilmelidir. Rasgele sansürlü $\boldsymbol{W}$ örneklemi için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})=n\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{11}&\mathrm{I}_{12}\\ \mathrm{I}_{12}&\mathrm{I}_{22}\end{bmatrix} \tag{4.67}$$

olmak üzere (4.12) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathrm{I}_{11} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} - \ln\beta + \ln x\right)^2 \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \exp\left[\frac{-x}{\lambda}\right] dx$$

$$\mathrm{I}_{12} = -\int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} - \ln\beta + \ln x\right) \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \exp\left[\frac{-x}{\lambda}\right] dx$$

$$\mathrm{I}_{22} = \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \exp\left[\frac{-x}{\lambda}\right] dx$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki integraller yakınsak olup analitik çözümleri elde edilememektedir. Ancak bu integraller sayısal yöntemler ile hesap edilebilirler. Böylelikle $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{11} & \mathbb{I}_{12} \\ \mathbb{I}_{12} & \mathbb{I}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

ifadesinden sayısal olarak hesap edilebilir.

Rasgele sansürlü bir örnekleme dayalı en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı ayrıca EM algoritması kullanılarak da yapılabilir. Şimdi $X_1, X_2, \dots, X_n$ Weibull(α, β) dağılımından rasgele sansürlü bir örneklem olmak üzere α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin EM algoritması ile hesabı ele alınsın. Kolaylık için logaritmik dönüşüm yapılarak Weibull(α, β) dağılımına karşılık gelen Uç Değer(a, b) dağılımı üzerinden işlem yapılsın. $i = 1, 2, \dots, n$ için $W_i = \ln X_i$ olsun. Bu durumda $W_1, W_2, \dots, W_n$ Uç Değer(a, b) dağılımından rasgele sansürlü bir örneklem olur. Bu gözlemlerden n^* $(0 < n^* \leq n)$ tanesi tam gözlem, geri kalan $n - n^*$ tanesi ise sansürlü gözlem olsun. Tam gözlemler $\boldsymbol{W}_t = \left(W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_{n^*}}\right)$, sansürlü gözlemler ise $\boldsymbol{W}_s = \left(W_{i_{n^*+1}}, W_{i_{n^*+2}}, \dots, W_{i_n}\right)$ ile gösterilsin. Bu durumda tüm gözlemlere dayalı log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(a, b; \boldsymbol{W}) = -n\ln b + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i - a}{b}\right) - \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{w_i - a}{b}\right)$$

$$= -n\ln b + \sum_{j=1}^{n^*}\left(\frac{w_{i_j}-a}{b}\right) + \sum_{j=n^*+1}^{n}\left(\frac{W_{i_j}-a}{b}\right) - \sum_{j=1}^{n^*}\exp\left(\frac{w_{i_j}-a}{b}\right)$$

$$-\sum_{j=n^*+1}^{n}\exp\left(\frac{W_{i_j}-a}{b}\right) \tag{4.68}$$

olarak elde edilir. Tam örneklem için a ve b parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri olan

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \exp(w_i/\hat{b})}{\sum_{i=1}^{n}\exp(w_i/\hat{b})} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i\,, \qquad \hat{a} = \hat{b}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(w_i/\hat{b})\right]$$

ifadelerinin göz önüne alınması ile EM algoritmasının $(h+1)$. adımında $a_{(h+1)}$ ve $b_{(h+1)}$ değerleri

$$b_{(h+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n^*} w_{i_j}\, e^{\left(w_{i_j}/b_{(h+1)}\right)} + \sum_{j=n^*+1}^{n} E\left[W_{i_j}e^{\left(W_{i_j}/b\right)} | W_{i_j} > w_{i_j}, a_{(h)}, b_{(h)}\right]}{\sum_{j=1}^{n^*} e^{\left(w_{i_j}/b_{(h+1)}\right)} + \sum_{j=n^*+1}^{n} E\left[e^{\left(W_{i_j}/b\right)} | W_{i_j} > w_{i_j}, a_{(h)}, b_{(h)}\right]}$$

$$-\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n^*} w_{i_j} + \sum_{j=n^*+1}^{n} E\left[W_{i_j} | W_{i_j} > w_{i_j}, a_{(h)}, b_{(h)}\right]\right] \tag{4.69}$$

$$a_{(h+1)} = b_{(h+1)}\ln\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n^*} e^{\left(\frac{w_{i_j}}{b_{(h+1)}}\right)} + \sum_{j=n^*+1}^{n} E\left[e^{\left(\frac{W_{i_j}}{b}\right)} | W_{i_j} > w_{i_j}, a_{(h)}, b_{(h)}\right]\right]\right\} \tag{4.70}$$

ifadeleri ile elde edilir. Açıktır ki bu adımların uygulanabilmesi için $E\left[W_{i_j}e^{\left(W_{i_j}/b\right)}\middle|W_{i_j} > w_{i_j}\right]$, $E\left[e^{\left(W_{i_j}/b\right)}\middle|W_{i_j} > w_{i_j}\right]$ ve $E\left[W_{i_j}\middle|W_{i_j} > w_{i_j}\right]$ koşullu beklenen değerlerinin bulunması gerekmektedir. Öncelikle herhangi $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $Z_j = W_{i_j} | W_{i_j} > w_{i_j}$ yazılsın. Açıktır ki Z_j, w_{i_j} noktasında soldan kesilmiş Uç Değer(a, b) dağılımına sahiptir. Yani $\tau_j = (w_{i_j} - a)/b$ olmak üzere

$$f_{Z_j}(z_j) = \frac{e^{e^{\tau_j}}}{b}\exp\left(\left(\frac{z_j - a}{b}\right) - \exp\left(\frac{z_j - a}{b}\right)\right), w_{i_j} < z_j < \infty \tag{4.71}$$

dır. İlgili beklenen değerlerin hesap edilebilmesi için $(Z_j - a)/b$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t) = E\left[e^{\frac{t(Z_j-a)}{b}}\right]$$
$$= \int_{w_{i_j}}^{\infty} \exp\left(\frac{t(z-a)}{b}\right)\frac{\exp(\exp(\tau_j))}{b}\exp\left(\left(\frac{z-a}{b}\right) - \exp\left(\frac{z-a}{b}\right)\right)dz \qquad (4.72)$$

olup gerekli işlemlerin yapılması ile

$$M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t) = e^{e^{\tau_j}}\Gamma(t+1, e^{\tau_j}) \qquad (4.73)$$

elde edilir. Burada $\Gamma(t,x)$ tam olmayan gama fonksiyonudur. Tam olmayan gama fonksiyonu için bilinen seri açılımının göz özüne alınması ile

$$M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t) = \Gamma(t+1)\left(e^{e^{\tau_j}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(t+k+1)\tau_j}}{\Gamma(t+k+2)}\right) \qquad (4.74)$$

dır. Böylelikle

$$E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right] = \frac{d}{dt}M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t)|_{t=0} \qquad (4.75)$$

olup

$$\frac{d}{dt}M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t) = e^{e^{\tau_j}}\psi(t+1)\Gamma(t+1) - \left(\Gamma(t+1)\left(\tau_j + \psi(t+1)\right)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(t+k+1)\tau_j}}{\Gamma(t+k+2)}$$
$$+\Gamma(t+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(t+k+1)\tau_j}\psi(t+k+2)}{\Gamma(t+k+2)} \qquad (4.76)$$

olmak üzere

$$E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right] = e^{e^{\tau_j}}\psi(1) - \left(\psi(1)+\tau_j\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+1)\tau_j}}{\Gamma(k+2)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+1)\tau_j}\psi(k+2)}{\Gamma(k+2)} \qquad (4.77)$$

dır. Burada $\psi(\cdot)$ digama fonksiyonudur. Böylelikle

$$E[Z_j] = bE\left[\frac{Z_j - a}{b}\right] + a \tag{4.78}$$

sonucuna ulaşılır.

$$E\left[e^{(Z_j - a)/b}\right] = M_{\frac{Z_j - a}{b}}(1) \tag{4.79}$$

olmak üzere (4.74) ifadesinin göz önüne alınması ve gerekli işlemlerin yapılması ile

$$E\left[e^{(Z_j - a)/b}\right] = 1 + e^{\tau_j} \tag{4.80}$$

elde edilir. Buradan da

$$E\left[e^{(Z_j/b)}\right] = e^{a/b}(1 + e^{\tau_j}) \tag{4.81}$$

sonucuna ulaşılır. Leibnitz kuralının bir sonucu olarak

$$E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)\left(e^{(Z_j - a)/b}\right)\right] = \frac{d}{dt} M_{\frac{Z_j - a}{b}}(t)|_{t=1} \tag{4.82}$$

dır. Buradan (4.76) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)\left(e^{(Z_j - a)/b}\right)\right] = e^{e^{\tau_j}}\psi(2) - \left(\psi(2) + \tau_j\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}}{\Gamma(k+3)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+1)\tau_j}\psi(k+2)}{\Gamma(k+2)} \tag{4.83}$$

elde edilir. Böylelikle

$$E\left[Z_j e^{(Z_j/b)}\right] = e^{a/b}\left(E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)\left(e^{(Z_j - a)/b}\right)\right] b + a(1 + e^{\tau_j})\right) \tag{4.84}$$

sonucuna ulaşılır. Artık (4.78), (4.81) ve (4.84) ifadeleri (4.69) ve (4.70) denklemlerinde yerine koyularak EM algoritmasının adımları yakınsama sağlanıncaya kadar devam ettirilir ve böylece $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ en çok olabilirlik tahminleri elde edilir. Şimdi a

ve b parametreleri için Fisher bilgisi elde edilsin. Kısım 2.7.1'den EM algoritması kullanırken Fisher bilgisinin

GÖZLENEN BİLGİ=TAM BİLGİ – KAYIP BİLGİ

formülü ile hesap edildiği ve Uç Değer(a,b) dağılımdan n birimlik bir rasgele örneklem için tam bilginin

$$\mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W})=\frac{n}{b^2}\begin{bmatrix}1 & (1-\gamma)\\ (1-\gamma) & \frac{\pi^2}{6}+(\gamma-1)^2\end{bmatrix}$$

olduğu hatırlatılsın. Kayıp bilginin hesaplanması için herhangi w_{i_j} noktasında soldan kesilmiş Uç Değer(a,b) dağılımına sahip Z_j rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonunun logaritması olan

$$\ln f_{Z_j}(z_j)=e^{\tau_j}-\ln b+\left(\frac{z_j-a}{b}\right)-e^{(z_j-a)/b} \tag{4.85}$$

ifadesi göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun a ve b parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}(z_j)}{\partial a}=\frac{1}{b}\left[e^{(z_j-a)/b}-e^{\tau_j}-1\right]$$

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}(z_j)}{\partial b}=\frac{1}{b^2}\left[(z_j-a)e^{(z_j-a)/b}-z_j+a-b\tau_j e^{\tau_j}-b\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}(z_j)}{\partial a\partial b}&=\frac{1}{b^2}\left[\tau_j e^{\tau_j}(\tau_j+2)+1+2\left(\frac{z_j-a}{b}\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{b^2}\left[\left(\frac{z_j-a}{b}\right)\left(e^{\frac{(z_j-a)}{b}}\right)\left(2+\left(\frac{z_j-a}{b}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}(z_j)}{\partial a^2}=\frac{1}{b^2}\left[e^{\tau_j}-e^{(z_j-a)/b}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}(z_j)}{\partial b^2}=\frac{1}{b^2}\left[e^{\tau_j}(1+\tau_j)-e^{(z_j-a)/b}\left(1+\left(\frac{z_j-a}{b}\right)\right)\right]$$

şeklindedir. Buna göre (4.80) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}(a,b;Z_j)_{11} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}(Z_j)}{\partial a^2}\right] = \frac{1}{b^2} \tag{4.86}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathbb{I}(a,b;Z_j)_{12} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}(Z_j)}{\partial a \partial b}\right]$$
$$= -\frac{1}{b^2}\left[\tau_j e^{\tau_j}(\tau_j + 2) + 1 + 2E\left[\frac{Z_j - a}{b}\right]\right]$$
$$+\frac{1}{b^2}\left[2E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)\left(e^{\frac{(Z_j - a)}{b}}\right)\right] + E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)^2\left(e^{\frac{(Z_j - a)}{b}}\right)\right]\right] \tag{4.87}$$

dır. Burada $E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right]$ ve $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ beklenen değerleri sırası ile (4.77) ve (4.83) ifadelerinde elde edilmişti. Yukarıdaki ifadeyi elde edebilmek için $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ beklenen değeri bulunmalıdır. Leibnitz kuralının bir sonucu olarak

$$E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right] = \frac{d^2}{dt^2} M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t)|_{t=1} \tag{4.88}$$

olduğu açıktır. (4.76) ifadesinde t’ye göre türev alınıp t yerine 1 yazılması ile

$$E\left[\left(\frac{Z_j - a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right] = e^{e_j^{\tau}}\left(\psi'(2) + \psi^2(2)\right)$$
$$-\left(\psi'(2) + \psi^2(2) + 2\psi(2)\tau_j + \tau_j^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}}{\Gamma(k+3)}$$
$$+2\left(\psi(2) + \tau_j\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}\psi(k+3)}{\Gamma(k+3)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}\left(\psi'(k+3) - \psi^2(k+3)\right)}{\Gamma(k+3)} \tag{4.89}$$

elde edilir. Burada $\psi'(\cdot)$ trigama fonksiyonudur. Böylelikle $\mathbb{I}(a,b|Z_j)_{12}$ bilgisi $E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right]$, $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ ve $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ beklenen değerlerinin sırası ile (4.77), (4.83) ve (4.89)’da bulunan ifadelerinin (4.87)’de yerine yazılması ile elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\right)_{22} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}\left(Z_j\right)}{\partial a^2}\right] \\ &= -\frac{1}{b^2}\left[e^{\tau_j} - E\left(e^{\frac{Z_j-a}{b}}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.90}$$

olmak üzere $E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right]$ beklenen değerinin (4.77)’de bulunan ifadesinin göz önüne alınması ile $\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\right)_{22}$ bilgisi elde edilir. Böylelikle kayıp bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W}_s) = \sum_{j=n^*+1}^{n} \mathbb{I}\left(a,b;Z_j\right) \tag{4.91}$$

ifadesi ile hesap edilir. Sonuç olarak gözlenen bilgiye $\mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W}_t) = \mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W}) - \mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W}_s)$ farkının alınması ile ulaşılır. Kısım 2.7.1’de verilen asimptotik özelliklerin göz önüne alınması ile $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile a ve b parametreleri için güçlü tutarlı olup

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{a}-a\\ \hat{b}-b\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.92}$$

dır. Burada asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix} = \mathbb{I}^{-1}(a,b;\boldsymbol{W}_t) \tag{4.93}$$

ile hesap edilir. Bu bilgiler ışığında Weibull dağılımının parametreleri olan α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin $\hat{\alpha} = 1/\hat{b}$ ve $\hat{\beta} = e^{\hat{a}}$ olduğu açıktır. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin Kısım 2.7.1’de verilen asimptotik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile α ve β parametreleri için güçlü tutarlı olup $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}-\alpha\\ \hat{\beta}-\beta\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{12} & \nu_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.94}$$

dır. Burada varyans-kovaryans matrisini elde edebilmek için Teorem 2.6.11 göz önüne alınsın. $f(a,b) = 1/b$ ve $g(a,b) = e^a$ olmak üzere

$$v_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_{11} + 2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}\sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_{22} = b^{-4}\sigma_{22}$$
$$v_{12} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial a}\sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial a}\right)\sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial b}\sigma_{22} = -e^a b^{-2}\sigma_{12}$$
$$v_{22} = \left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)^2 \sigma_{11} + 2\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial b}\sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial b}\right)^2 \sigma_{22} = e^{2a}\sigma_{11}$$

dır. Bu ifadelerde a yerine $\hat{a}$ ve b yerine $\hat{b}$ alınması ile $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans ve kovaryans değerleri hesap edilir.

4.2.2.2 Tip I sansürleme

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ Weibull(α,β) dağılımına sahip rasgele değişkenler olmak üzere sansürleme sabiti L alınsın. $X_i = \min\{Y_i, L\}, i = 1, \dots, n$ olmak üzere $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \le L \\ 0, & Y_i > L \end{cases}$ yazılsın. Bu durumda $X_i = I_i Y_i + (1 - I_i)L$ olduğu bilinmektedir. Tip I sansürlü örneklemlerde $i = 1, \dots, n$ için X_i, I_i değişkenleri gözlenir. Bu durumda $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right]^{\delta_i}\left[e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right]^{1-\delta_i} \quad (4.95)$$

olarak elde edilir. Böylelikle log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i \ln\alpha - \delta_i \ln\beta + \delta_i(\alpha-1)(\ln x_i - \ln\beta) - \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad (4.96)$$

şeklinde elde edilir. Buradan α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilebilmesi için parametrelere göre kısmi türevlerin alınması ile

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left[I_i\frac{1}{\alpha}+I_i(\ln X_i-\ln\beta)-\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}(\ln X_i-\ln\beta)\right]=0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})}{\partial \beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha X_i^{\alpha}\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}-I_i\frac{\alpha}{\beta}\right]=0$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisine

$$\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}I_i}{\sum_{i=1}^{n}I_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\alpha}}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\alpha}}}\right)-\sum_{i=1}^{n}I_i\ln X_i} \tag{4.97}$$

denkleminin çözülmesi ile ulaşılır. β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise yukarıda bulunan $\hat{\alpha}$'nın

$$\hat{\beta}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{n}I_i}\right]^{1/\hat{\alpha}} \tag{4.98}$$

ifadesinde yerine konulması ile elde edilir. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile α ve β parametreleri için güçlü tutarlı olup $n\to\infty$ iken

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}-\alpha\\ \hat{\beta}-\beta\end{pmatrix}\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.99}$$

dır. Burada asimptotik varyans ve kovaryans değerlerini elde edebilmek için öncelikle Fisher bilgi matrisi elde edilmelidir. Tip I sansürlü $\boldsymbol{W}$ örneklemi için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\alpha,\beta;\boldsymbol{W})=n\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{11} & \mathrm{I}_{12}\\ \mathrm{I}_{12} & \mathrm{I}_{22}\end{bmatrix} \tag{4.100}$$

olmak üzere (4.19) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathrm{I}_{11}=\int_{0}^{L}\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\right]^{2}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]dx$$
$$+\left[\left(\frac{L}{\beta}\right)^{2\alpha}(\ln L-\ln\beta)^{2}\right]\exp\left[-\left(\frac{L}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$$

$$\mathrm{I}_{12}=\int_0^L\left[\frac{1}{\alpha}+\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\right]\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}-1\right)\right]\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]dx$$
$$-\left[\left(\frac{L}{\beta}\right)^{2\alpha}\frac{\alpha}{\beta}\left(\ln L-\ln\beta\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{L}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$$
$$\mathrm{I}_{22}=\int_0^L\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}-1\right)\right]^2\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]dx$$
$$+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{L}{\beta}\right)^{2\alpha}\exp\left[-\left(\frac{L}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$$

dır. Yukarıdaki integraller yakınsak olup analitik çözümleri elde edilememektedir. Ancak bu integraller sayısal yöntemler ile hesap edilebilirler. Böylelikle $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{I}_{11} & \mathbb{I}_{12}\\ \mathbb{I}_{12} & \mathbb{I}_{22}\end{bmatrix}^{-1}$$

ifadesinden sayısal olarak hesap edilebilir.

4.2.2.3 Tip II sansürleme

Tip II sansürleme ilerleyen tür tip II sansürlemenin özel hali olduğu için ayrıca ele alınmayacaktır.

4.2.2.4 İlerleyen tür tip II sansürleme

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Weibull(α,β) dağılımına sahip rasgele değişkenler olmak üzere $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şeması ile ilerleyen tür tip II sansürlemeye göre gözlensin. Bu sansürlemeye göre elde edilen değişkenler sıralı olarak $X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ ile ifade edilsin. Bu durumda $\boldsymbol{X}=(X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha,\beta;\boldsymbol{X}) = c\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right)^{\alpha}\exp\left[-\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\left[\exp\left[-\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\right]^{R_i}\right]$$

olarak elde edilir. Burada $c = n(n-R_1-1)(n-R_1-R_2-2)\dots(n-R_1-\cdots-R_{m-1}-m+1)$ dır. Bu fonksiyonun logaritmasının alınması ile

$$\ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{X}) = \ln c + m\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right)^{\alpha}$$

ifadesi elde edilir. Buradan α ve β parametrelerine göre kısmi türevlerin alınması ile

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{X})}{\partial\alpha} = \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta;\boldsymbol{X})}{\partial\beta} = -m\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\left(\frac{x_{i:m:n}}{\beta}\right)^{\alpha} = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\alpha} = \frac{m}{m\frac{\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)X_{i:m:n}^{\hat{\alpha}}\ln X_{i:m:n}}{\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)X_{i:m:n}^{\hat{\alpha}}} - \sum_{i=1}^{m}\ln X_{i:m:n}} \tag{4.101}$$

denkleminin çözümü olarak elde edilir. Buradan da β parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisine yukarıda bulunan $\hat{\alpha}$'nın

$$\hat{\beta} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)X_{i:m:n}^{\hat{\alpha}}}{m}\right]^{1/\hat{\alpha}} \tag{4.102}$$

ifadesinde yerine konması ile ulaşılır. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile α ve β parametrelerinin güçlü tutarlı tahmin edicileri olup asimptotik normal dağılıma sahiptir. Ancak bu tahmin edicilerin asimptotik varyans-kovaryans matrisinin doğrudan elde edilmesi oldukça zordur. Bunun sebebi $i = 1,\dots,m$ için $X_{i:m:n}$ ilerleyen tür sıra istatistiklerinin dağılımlarının oldukça karmaşık olmasıdır.

Ng vd. (2002) ise ilerleyen tür tip II sansürlü verinin en çok olabilirlik tahmininin elde edilmesinde EM algoritmasının kullanılmasını önermiş ve bu yöntemin nasıl kullanılacağını tarif etmişlerdir. Bilindiği üzere EM algoritması tam olmayan (kayıp gözlem içeren) verilerde parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerinin hesap edilmesinde, kayıp gözlem yerine tam gözlemler bilindiğinde onların koşullu beklentilerini alarak tahmin değerlerini adım adım güncelleyen bir yöntem olarak Dempster vd. (1977) tarafından önerilmiştir. İlerleyen tür tip II sansürlü verilerde de sansürlü gözlemler birer kayıp gözlem olarak ele alınarak en çok olabilirlik tahminlerinin elde edilmesinde EM algoritması kullanılabilir.

Öncelikli olarak ilerleyen tür tip II sansürlü veri tam gözlenen ve sansürlü olmak üzere iki gruba ayrılsın. Tam gözlenen veriler $\boldsymbol{X} = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$, sansürlü veriler ise $\boldsymbol{Z} = \left(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}(1\times R_1)}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{2}(1\times R_2)}, \dots, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{m}(1\times R_m)}\right)$ vektörleri ile gösterilsin. Burada $\boldsymbol{Z}$ sansürlü veri vektörü kayıp veri olarak ele alınır. $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ tüm veri setini ifade etmek üzere, tüm veri setine dayalı log-olabilirlik fonksiyonu $\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W})$ ile ifade edilsin. Bu durumda en çok olabilirlik tahmin değerlerine EM algoritmasının aşağıda tarif edilen E ve M adımlarının yakınsama sağlanıncaya kadar tekrar edilmesi ile ulaşılır.

$$\text{E} - \text{Adımı: } Q\left(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_{(h)}\right) = E_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_{(h)}}[\ln L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{W})]$$
$$\text{M} - \text{Adımı: } \boldsymbol{\theta}_{(h+1)} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} Q\left(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_{(h)}\right)$$

Yakınsama şartı $\left\|\boldsymbol{\theta}_{(h+1)} - \boldsymbol{\theta}_{(h)}\right\| < \varepsilon$ olup ε sıfırdan büyük keyfi küçük bir sayı olarak seçilir.

Görüleceği üzere EM algoritmasının kullanılabilmesi için tam gözlemler bilindiğinde sansürlü gözlemlerin log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değerine ihtiyaç vardır. Bunun için öncelikli olarak sansürlü gözlemlerin koşullu dağılımının bilinmesi gerekmektedir. Bununla ilgili teorem Ng vd. (2002) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.2.1 $X_{1:m:n} = x_{1:m:n}$, $X_{2:m:n} = x_{2:m:n}$, ..., $X_{j:m:n} = x_{j:m:n}$ verildiğinde $k = 1,2,\dots,R_j$ için Z_{jk} rasgele değişkenin koşullu dağılımı

$$f_{Z_{jk}|X}\left(z_{jk}|X_{1:m:n} = x_{1:m:n},\dots,X_{j:m:n} = x_{j:m:n}\right) = f_{Z_{jk}|X}\left(z_{jk}|X_{j:m:n} = x_{j:m:n}\right)$$
$$= \frac{f_W\left(z_{jk}\right)}{\left[1 - F_W\left(x_{j:m:n}\right)\right]}, z_{jk} > x_{j:m:n}$$

olup, $k \neq l$ için Z_{jk} ile Z_{jl} koşullu bağımsızdır (Ng vd. 2002).

İspat: Tüm örneklemin ($\boldsymbol{W}$) gözlenme olasılığı: $\prod_{j=1}^{m}\left[f_W\left(x_{j:m:n}\right)\prod_{k=1}^{R_j} f_W\left(z_{jk}\right)\right]$, tam gözlemin ($\boldsymbol{X}$) gözlenme olasılığı ise $\prod_{j=1}^{m}\left[f_W\left(x_{j:m:n}\right)\left[1 - F_W\left(x_{j:m:n}\right)\right]^{R_j}\right]$ olup buradan $\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}$'in dağılımı

$$f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{R_j}\frac{f_W\left(z_{jk}\right)}{\left[1 - F_W\left(x_{j:m:n}\right)\right]}, \qquad z_{jk} > x_{j:m:n}.$$

olarak elde edilir. Faktörizasyon teoreminden de sansürlü değişkenlerin koşullu bağımsız olduğu görülür.

Böylelikle ilgilenilen parametrik model için soldan kesilmiş dağılımın gerekli momentleri elde edilebildiğinde ilerleyen tür tip II sansürlü verinin en çok olabilirlik tahmin değerleri EM algoritması ile hesap edilebilir.

Weibull(α,β) modeli için ilerleyen tür tip II sansürlü gözlem altında model parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin EM algoritması kullanılarak hesaplanması problemi ilk olarak Ng vd. (2002) tarafından ele alınmıştır. Bu durum için EM algoritması ve ilgili bilgi matrisi aşağıda hatırlatılır.

Öncelikle kolaylık için gözlemlere logaritmik dönüşüm uygulansın. Yani $Y_{i:m:n} = \ln X_{i:m:n}$ olsun. Bu durumda $\boldsymbol{Y} = (Y_{1:m:n},\dots,Y_{m:m:n})$ Uç Değer(a,b)

dağılımdan ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem olur. Burada $a = \ln(\beta)$, $b = 1/\alpha$ dır. Sansürlü veriler ise yine $\boldsymbol{Z} = \left(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}(1\times R_1)}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{2}(1\times R_2)}, \dots, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{m}(1\times R_m)}\right)$ vektörleri ile gösterilsin. $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ tüm veri setini ifade etmek üzere, tüm veri setine dayalı log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}\ln L(a,b;\boldsymbol{W}) &= -n\ln b + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i - a}{b}\right) - \sum_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{w_i - a}{b}\right)\\ &= -n\ln b + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{y_{j:m:n} - a}{b}\right) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{R_j}\left(\frac{Z_{jk} - a}{b}\right) - \sum_{j=1}^{m}\exp\left(\frac{y_{j:m:n} - a}{b}\right)\\ &\quad -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{R_j}\exp\left(\frac{Z_{jk} - a}{b}\right) \end{aligned} \tag{4.103}$$

olarak elde edilir. a ve b parametreleri için tam örneklem durumunda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \exp(w_i/\hat{b})}{\sum_{i=1}^{n}\exp(w_i/\hat{b})} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i\,, \qquad \hat{a} = \hat{b}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(w_i/\hat{b})\right]$$

olmasının göz önüne alınması ile EM algoritmasının $(h+1)$. adımında $a_{(h+1)}$ ve $b_{(h+1)}$ değerleri

$$\begin{aligned} b_{(h+1)} &= \frac{\sum_{j=1}^{m} y_{j:m:n} e^{\left(\frac{y_{j:m:n}}{b_{(h+1)}}\right)} + \sum_{j=1}^{m} R_j E\left[Z_j e^{(Z_j/b)} | \tau_j, a_{(h)}, b_{(h)}\right]}{\sum_{j=1}^{m} e^{\left(\frac{y_{j:m:n}}{b_{(h+1)}}\right)} + \sum_{j=1}^{m} R_j E\left[e^{(Z_j/b)} | \tau_j, a_{(h)}, b_{(h)}\right]}\\ &\quad -\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{m} y_{j:m:n} + \sum_{j=1}^{m} R_j E\left[Z_j | \tau_j, a_{(h)}, b_{(h)}\right]\right] \end{aligned} \tag{4.104}$$

$$a_{(h+1)} = b_{(h+1)}\ln\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{m} e^{\left(\frac{y_{j:m:n}}{b_{(h+1)}}\right)} + \sum_{j=1}^{m} R_j E\left[e^{(Z_j/b)} | \tau_j, a_{(h)}, b_{(h)}\right]\right]\right\} \tag{4.105}$$

ifadeleri ile elde edilir. Burada $\tau_j = (y_{j:m:n} - a)/b$ olup $E\left[h(Z_j)|\tau_j, a_{(h)}, b_{(h)}\right]$ $E_{\left(Z_j | Y_{j:m:n} = y_{j:m:n}, a_{(h)}, b_{(h)}\right)}\left[h(Z_j)\right]$ anlamına gelmektedir. Ancak bu adımların uygulanabilmesi için $E\left[Z_j e^{(Z_j/b)}|\tau_j,a,b\right]$, $E\left[e^{(Z_j/b)}|\tau_j,a,b\right]$ ve $E\left[Z_j|\tau_j,a,b\right]$ koşullu beklenen değerlerinin bulunması gerekmektedir. Teorem 4.2.1 gereği $Y_{j:m:n}=y_{j:m:n}$ verildiğinde Z_j, $y_{j:m:n}$ noktasında soldan kesilmiş Uç Değer dağılıma sahiptir. Yani

$$f_{(Z_j|Y_{j:m:n}=y_{j:m:n})}(z_j)=\frac{e^{e^{\tau_j}}}{b}\exp\left(\left(\frac{z_j-a}{b}\right)-\exp\left(\frac{z_j-a}{b}\right)\right), y_{j:m:n}<z_j<\infty$$

dır. Kısım 4.2.2.1'de bulunan sonuçların göz önüne alınması ile ilgili beklenen değerlerin

$$E\left[Z_j e^{(Z_j/b)}|\tau_j,a,b\right]=e^{a/b}\left(E_1 b+a(1+e^{\tau_j})\right) \tag{4.106}$$

$$E_1=e^{e^{\tau_j}}\psi(2)-\left(\psi(2)+\tau_j\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}}{\Gamma(k+3)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+1)\tau_j}\psi(k+2)}{\Gamma(k+2)}$$

$$E\left[e^{(Z_j/b)}|\tau_j,a,b\right]=e^{a/b}(1+e^{\tau_j}) \tag{4.107}$$

$$E\left[Z_j|\tau_j,a,b\right]=bE_2+a \tag{4.108}$$

$$E_2=e^{e^{\tau_j}}\psi(1)-\left(\psi(1)+\tau_j\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+1)\tau_j}}{\Gamma(k+2)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+1)\tau_j}\psi(k+2)}{\Gamma(k+2)}$$

olduğu açıktır. Artık (4.106), (4.107) ve (4.108) ifadeleri (4.104) ve (4.105) te yerine koyularak EM algoritmasının adımları yakınsama sağlanıncaya kadar devam ettirilir ve böylece $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ en çok olabilirlik tahminleri elde edilir. Kısım 2.7.1 den EM algoritması kullanırken Fisher bilgisinin

GÖZLENEN BİLGİ=TAM BİLGİ – KAYIP BİLGİ

formülü ile hesap edildiği ve Uç Değer(a,b) dağılıma sahip n birimlik bir rasgele örneklem için tam bilginin

$$\mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W})=\frac{n}{b^2}\begin{bmatrix}1 & (1-\gamma)\\ (1-\gamma) & \frac{\pi^2}{6}+(\gamma-1)^2\end{bmatrix} \tag{4.109}$$

olduğu hatırlatılsın. Kayıp bilgi matrisi için ise öncelikli olarak j. bozulma zamanında sansürlenen bir gözlem için bilgi matrisi elde edilir. $\boldsymbol{\theta}=(a,b)$ olmak üzere bu matris

$$\mathbb{I}\left(\boldsymbol{\theta}; Z_j \middle| Y_{j:m:n}\right) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; \boldsymbol{\theta}\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}\right] \tag{4.110}$$

ifadesi ile elde edilir. Buradan da $\boldsymbol{Y}$ verildiğinde $\boldsymbol{Z}$'nin koşullu beklenen bilgisi, yani kayıp bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}) = \sum_{j=1}^{m} R_j \, \mathbb{I}\left(\boldsymbol{\theta}; Z_j \middle| Y_{j:m:n}\right) \tag{4.111}$$

olarak elde edilir. j. bozulma gerçekleştiğinde sansürlenmiş olan Z_j rasgele değişkeninin $Y_{j:m:n} = y_{j:m:n}$ olduğu bilindiğinde koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması

$$\ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; a, b\right) = e^{\tau_j} - \ln b + \left(\frac{z_j - a}{b}\right) - e^{(z_j - a)/b} \tag{4.112}$$

olmak üzere a ve b parametrelerine göre kısmi türevler

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; a, b\right)}{\partial a} = \frac{1}{b}\left[e^{(z_j - a)/b} - e^{\tau_j} - 1\right]$$

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; a, b\right)}{\partial b} = \frac{1}{b^2}\left[\left(z_j - a\right)e^{(z_j - a)/b} - z_j + a - b\tau_j e^{\tau_j} - b\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; a, b\right)}{\partial a \partial b} &= \frac{1}{b^2}\left[\tau_j e^{\tau_j}\left(\tau_j + 2\right) + 1 + 2\left(\frac{z_j - a}{b}\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{b^2}\left[\left(\frac{z_j - a}{b}\right)\left(e^{\frac{(z_j - a)}{b}}\right)\left(2 + \left(\frac{z_j - a}{b}\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; a, b\right)}{\partial a^2} = \frac{1}{b^2}\left[e^{\tau_j} - e^{(z_j - a)/b}\right] \tag{4.114}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}\left(z_j | y_{j:m:n}; a, b\right)}{\partial b^2} = \frac{1}{b^2}\left[e^{\tau_j}\left(1 + \tau_j\right) - e^{\frac{(z_j - a)}{b}}\left(1 + \left(\frac{z_j - a}{b}\right)\right)\right] \tag{4.115}$$

şeklindedir. Burada (4.113), (4.114) ve (4.115) ifadelerinin beklenen değerlerinin negatifleri alınması ve (4.111) ifadesinin göz önüne alınması ile kayıp bilgi matrisi elde edilir. Buna göre (4.107) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\middle|Y_{j:m:n}\right)_{11}=-E\left[\frac{\partial^2\ln f_{Z_j}\left(Z_j|y_{j:m:n};a,b\right)}{\partial a^2}\right]=\frac{1}{b^2} \tag{4.116}$$

dır. Ayrıca

$$\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\middle|Y_{j:m:n}\right)_{12}=-E\left[\frac{\partial^2\ln f_{Z_j}\left(Z_j|y_{j:m:n};a,b\right)}{\partial a\partial b}\right]$$

$$=-\frac{1}{b^2}\left[\tau_j e^{\tau_j}\left(\tau_j+2\right)+1+2E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right]\right]$$

$$+\frac{1}{b^2}\left[2E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)\left(e^{\frac{(Z_j-a)}{b}}\right)\right]+E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{\frac{(Z_j-a)}{b}}\right)\right]\right] \tag{4.117}$$

dır. Burada $E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right]$ ve $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ beklenen değerleri (4.106) ve (4.107) yardımı ile elde edilir. (4.117) ifadesinin elde edilebilmesi için $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ beklenen değeri bulunmalıdır. Leibnitz kuralının bir sonucu olarak

$$E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]=\frac{d^2}{dt^2}M_{\frac{Z_j-a}{b}}(t)|_{t=1} \tag{4.118}$$

olduğu açıktır. Gerekli işlemlerin yapılması ile

$$E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]=e^{e_j^{\tau}}\left(\psi'(2)+\psi^2(2)\right)$$

$$-\left(\psi'(2)+\psi^2(2)+2\psi(2)\tau_j+\tau_j^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}}{\Gamma(k+3)}$$

$$+2\left(\psi(2)+\tau_j\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}\psi(k+3)}{\Gamma(k+3)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(k+2)\tau_j}\left(\psi'(k+3)-\psi^2(k+3)\right)}{\Gamma(k+3)} \tag{4.119}$$

elde edilir. Burada $\psi'(\cdot)$ trigama fonksiyonudur. Böylelikle $\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\middle|Y_{j:m:n}\right)_{12}$ bilgisi $E\left[\frac{Z_j-a}{b}\right]$, $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ ve $E\left[\left(\frac{Z_j-a}{b}\right)^2\left(e^{(Z_j-a)/b}\right)\right]$ beklenen değerlerinin yukarıda bulunan ifadelerinin (4.117)'de yerine yazılması ile elde edilir.

$$\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\middle|Y_{j:m:n}\right)_{22} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z_j}\left(Z_j|y_{j:m:n};a,b\right)}{\partial a^2}\right]$$
$$= -\frac{1}{b^2}\left[e^{\tau_j} - E\left(e^{\frac{Z_j-a}{b}}\right)\right] \tag{4.120}$$

olmak üzere (4.107) yardımı ile $\mathbb{I}\left(a,b;Z_j\middle|Y_{j:m:n}\right)_{22}$ bilgisi elde edilir. Böylelikle kayıp bilgi matrisi (4.111) ifadesi üzerinden elde edilir. Sonuç olarak ise gözlenen bilgi $\mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{Y}) = \mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{W}) - \mathbb{I}(a,b;\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y})$ farkı ile hesap edilir. p bir sabit olmak üzere $m = m_n$ için $n \to \infty$ iken $m/n \to p$ olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin Kısım 2.7.1'de verilen asimptotik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile a ve b parametreleri için güçlü tutarlı olup

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{a}-a\\ \hat{b}-b\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.121}$$

dır. Burada asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix} = \mathbb{I}^{-1}(a,b;\boldsymbol{Y})$$

ifadesi ile elde edilir. Bu bilgiler ışığında Weibull dağılımının parametreleri olan α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin $\hat{\alpha} = 1/\hat{b}$ ve $\hat{\beta} = e^{\hat{a}}$ olduğu açıktır. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin Kısım 2.7.1'de verilen asimptotik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile α ve β parametreleri için güçlü tutarlı olup

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}-\alpha\\ \hat{\beta}-\beta\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{12} & \nu_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.122}$$

dır. Burada varyans-kovaryans matrisini elde edebilmek için Teorem 2.6.11 göz önüne alınsın. $f(a,b) = 1/b$ ve $g(a,b) = e^a$ olmak üzere

$$\nu_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_{11} + 2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}\sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_{22} = b^{-4}\sigma_{22}$$
$$\nu_{12} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial a}\sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial a}\right)\sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial b}\sigma_{22} = -e^a b^{-2}\sigma_{12}$$

$$v_{22} = \left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)^2 \sigma_{11} + 2\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial b}\sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial b}\right)^2 \sigma_{22} = e^{2a}\sigma_{11}$$

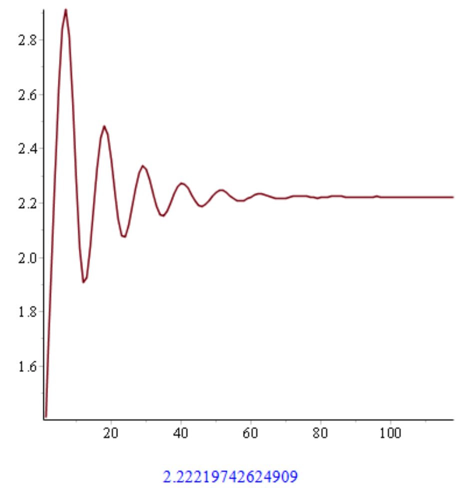
dır. Bu ifadelerde a yerine $\hat{a}$ ve b yerine $\hat{b}$ alınması ile $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans ve kovaryans değerleri hesap edilir.

Şimdi de yukarıda tarif edilen yöntem Viveros ve Balakrishnan (1994) tarafından verilen sıvı yalıtım verileri için uygulansın. Burada verilerin logaritması alındığı için Weibull dağılımının parametreleri Uç Değer dağılım üzerinden tarif edildiği şekilde tahmin edilecektir. İlgili veriler Çizelge 4.1'de aşağıdaki gibi verilir.

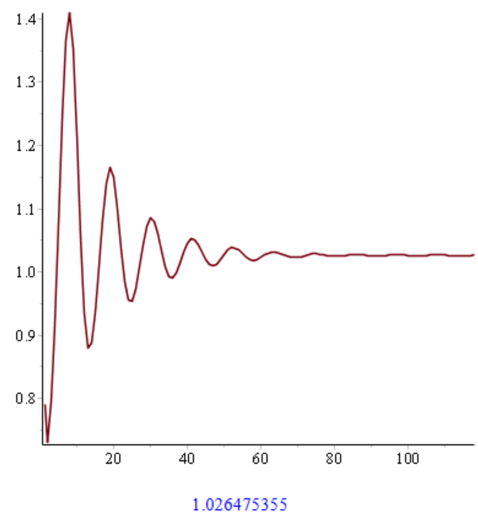
Çizelge 4.1 Logaritması alınmış yalıtım verileri ve sansürleme şeması

j	1	2	3	4	5	6	7
$y_{j:m:n}$	-3.1538	-0.84064	-0.79798	-0.65705	-0.58301	-0.12642	-0.1145
R_j	1	2	0	1	2	0	3

Bu veri Viveros ve Balakrishnan (1994) tarafından incelenmiş olup Uç Değer parametrik modeli altında parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir. Tahmin değerlerini öncelikli olarak sayısal maksimizasyon ile daha sonra da türev denklemlerinin Newton-Raphson yöntemine göre çözümü ile elde etmişlerdir. Buna göre elde ettikleri sonuç her iki yöntem için de aynı olup $\hat{a} = 2.222$ ve $\hat{b} = 1.026$ dır. Yukarıda tarif edilen EM algoritmasının uygulanması ile a ve b parametreleri için EM algoritmasının adımları ve yakınsama sonucu elde edilen değerler aşağıdaki şekillerde verilir. Şekillerde yatay eksen adım sayısı olup dikey eksen tahmin değerini belirtir.



Şekil 4.1 Weibull modeli için $a_{(h)}$ adımlarının yakınsama grafiği



Şekil 4.2 Weibull modeli için $b_{(h)}$ adımlarının yakınsama grafiği

Görüleceği üzere Viveros ve Balakrishnan (1994) tarafından elde edilen sonuçların aynısı tekrar bulunmuştur. Ayrıca bu veri seti için bilgi matrisi ise yukarıda tarif edilen yöntemin kullanılması ile

$$\mathbb{I}(\hat{a},\hat{b};\boldsymbol{W}) = \begin{bmatrix} 12.2434 & 0 \\ 0 & 24.4868 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{I}(\hat{a},\hat{b};\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} 3.4701 & 4.8136 \\ 4.8136 & 12.0404 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbb{I}(\hat{a},\hat{b};\boldsymbol{Y}) = \mathbb{I}(\hat{a},\hat{b};\boldsymbol{W}) - \mathbb{I}(\hat{a},\hat{b};\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} 8.7733 & -4.8136 \\ -4.8136 & 12.4464 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Elde edilen matrisin tersinin alınması ile de $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ tahmin değerleri için asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.1446 & 0.0559 \\ 0.0559 & 0.1019 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan da yukarıda tarif edilen yöntemle α ve β parametrelerinin tahmin değerleri ve bunlara ilişkin asimptotik varyans ve kovaryans değerleri elde edilebilir.

Şimdi de parametre tahmini için Kısım 2.8'de tarif edilen uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi göz önüne alınsın. Bu problem ilk olarak Balakrishnan vd. (2004) tarafından çalışılmış olup aşağıda detaylıca hatırlatılır.

$\boldsymbol{Y} = (Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots Y_{m:m:n})$ a konum ve b ölçek parametreli Uç Değer dağılımından ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olsun. Bu durumda bu örnekleme dayalı log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(a, b; \boldsymbol{Y}) = -m\ln b + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{y_{i:m:n} - a}{b}\right) - \sum_{i=1}^{m} (R_i + 1)\exp\left(\frac{y_{i:m:n} - a}{b}\right)$$

olmak üzere a ve b parametrelerine göre kısmi türevler

$$\frac{\partial \ln L(a, b; \boldsymbol{Y})}{\partial a} = -\frac{m}{b} + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} r_i \exp(\tau_i)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b; \boldsymbol{Y})}{\partial b} = -\frac{m}{b} - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} \tau_i + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} r_i \tau_i \exp(\tau_i)$$

şeklinde elde edilir. Burada $r_i = R_i + 1$ ve $\tau_i = (y_{i:m:n} - a)/b$ dır. Görüldüğü üzere kısmi türevler a ve b parametrelerinin doğrusal olmayan fonksiyonları şeklindedir. Burada $\exp(\tau_i)$ teriminin $t_i = E\left(\frac{Y_{i:m:n} - a}{b}\right)$ etrafında iki terimli Taylor serisinin alınması ile uyarlanmış olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ln L^*(a,b;\boldsymbol{Y})}{\partial a} = -\frac{m}{b} + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} r_i(u_i + v_i\tau_i) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*(a,b;\boldsymbol{Y})}{\partial b} = -\frac{m}{b} - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} \tau_i + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} r_i\tau_i(u_i + v_i\tau_i) = 0$$

olarak elde edilir. Burada $u_i = \exp(t_i)(1 - t_i)$ ve $v_i = \exp(t_i)$ dır. Belirtilmelidir ki t_i standart Uç Değer dağılımın i. ilerleyen tür sansürlü sıra istatistiğinin beklenen değeridir. Bu beklenen değerin doğrudan hesaplanması zordur. Bu yüzden doğrudan hesaplamak yerine basit bir yaklaşım kullanılabilir. Uç Değer$(0,1)$ dağılımının dağılım fonksiyonu F_* olsun. Bu durumda Balakrishnan ve Sandu (1995) göstermiştir ki $i = 1,\dots,m$ için $F_*(Y_{i:m:n}) \sim U_{i:m:n}$ dır. Burada $U_{i:m:n}$ Düzgün$(0,1)$ dağılımının i. ilerleyen tür sıra istatistiğidir. Bu durumda $Y_{i:m:n} \sim F_*^{-1}(U_{i:m:n}) = \ln\big(-\ln(1 - U_{i:m:n})\big)$ dır. Böylelikle $\zeta_{i:m:n} = E(U_{i:m:n})$ olmak üzere $t_i = E\left(\frac{Y_{i:m:n}-a}{b}\right) \cong \ln\big(-\ln(1 - \zeta_{i:m:n})\big)$ ile yaklaşık olarak hesap edilebilir. Burada

$$\zeta_{i:m:n} = 1 - \prod_{j=m-i+1}^{m} \frac{j + R_{m-j+1} + \cdots + R_m}{1 + j + R_{m-j+1} + \cdots + R_m}, i = 1,\dots,m \qquad (4.123)$$

dır (Balakrishnan vd. 2004). Görülmektedir ki uyarlanmış olabilirlik denklemleri a ve b parametrelerinin doğrusal fonksiyonları biçimindedir. Bu denklemlerin sıfıra eşitlenip ortak çözümü ile a ve b parametrelerinin uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicilerine ulaşılır. $\frac{\partial}{\partial a}\ln L^*(a,b;\boldsymbol{Y}) = 0$ denkleminin çözümünden

$$a = K + b\frac{D}{M} \qquad (4.124)$$

elde edilir. Burada

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{m} r_i v_i y_{i:m:n}}{M}, M = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i, D = \sum_{i=1}^{m}(r_i u_i - 1)$$

dır. Bulunan bu eşitliğin $\frac{\partial}{\partial b}\ln L^*(a,b;\boldsymbol{Y}) = 0$ denkleminde yerine konması ile b parametresine göre ikinci dereceden

$$mb^2 - \left(\sum_{i=1}^{m}(r_i u_i - 1)(y_{i:m:n} - K)\right)b - \left(\sum_{i=1}^{m} r_i v_i (y_{i:m:n} - K)^2\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ile b parametresi için uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\tilde{b} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4mC}}{2m} \tag{4.125}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$B = \sum_{i=1}^{m}(r_i u_i - 1)(y_{i:m:n} - K)\,, C = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i (y_{i:m:n} - K)^2 \tag{4.126}$$

dır. Böylelikle a parametresi için uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi ise

$$\tilde{a} = K + \frac{D}{M}\tilde{b} \tag{4.127}$$

olarak elde edilir (Balakrishnan vd. 2004). Buradan da Weibull dağılımının α şekil ve β ölçek parametreleri için uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicilerine $\tilde{\alpha} = 1/\tilde{b}$, $\tilde{\beta} = \exp(\tilde{a})$ ifadeleri ile ulaşılır.

Uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri büyük örneklem durumunda parametrelerin doğrudan tahmini için kullanılabilir. Ayrıca küçük örneklem durumunda ise en çok olabilirlik tahmin edicilerinin EM algoritması ile hesabı yapılırken başlangıç noktası olarak kullanılabilir.

4.2.3 Lognormal dağılım

X bir rasgele değişken olmak üzere Lognormal(μ, σ) dağılımına sahip olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu sırası ile

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R}^+;\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma}\phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R}^+;\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

dır. Burada Φ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu, ϕ ise standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Lognormal dağılımda sansürlü veriler için parametre tahminine geçmeden önce tam veri için parametre tahmininden kısaca bahsedilsin. Lognormal dağılımda tam veri durumunda parametre tahmini yapılırken gözlemlere logaritmik dönüşüp uygulanıp karşılık gelen Normal dağılım üzerinden parametre tahmini kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ Lognormal(μ, σ) dağılımından n birimlik bir rasgele örneklem olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için $Y_i = \ln X_i$ rasgele değişkeni μ ortalamalı ve σ standart sapmalı Normal dağılıma sahip olacaktır. Böylelikle μ ve σ parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri bilindiği üzere

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu})^2}{n}}$$

dır. Ayrıca Normal(μ, σ) dağılımıdan n birimlik bir rasgele örneklem için Fisher bilgi matrisi ise

$$\mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{Y}) = \frac{n}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.128}$$

şeklindedir. Bu durumda $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri için $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat{\mu} - \mu \\ \hat{\sigma} - \sigma \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2/2 \end{bmatrix}\right) \tag{4.129}$$

dır.

4.2.3.1 Rasgele sansürleme

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ Lognormal(μ, σ) dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele sansürleme zamanları ise Üstel(λ) dağılıma sahip olsun. Ayrıca $i = 1, \dots, n$ için $X_i = \min\{Y_i, T_i\}$, olmak üzere $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \le T_i \\ 0, & Y_i > T_i \end{cases}$ yazılsın. Bu durumda

$X_i = I_i Y_i + (1 - I_i)T_i$ dır. Rasgele sansürlü örneklemlerde $i = 1, \dots, n$ için X_i, I_i değişkenlerinin gözlendiği biliniyor. Böylece $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_i \sigma} \phi\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{\delta_i} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{1-\delta_i} \times \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\lambda} e^{\frac{-x_i}{\lambda}}\right]^{\delta_i} \left[e^{\frac{-x_i}{\lambda}}\right]^{1-\delta_i}$$

şeklinde elde edilir. Burada μ ve σ parametreleri ile ilgilenildiğinden yukarıdaki denklemdeki ikinci çarpım ifadesi göz ardı edilebilir. İşlem kolaylığı için olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının alınması ile log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i & \left[-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \ln x_i - \ln\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ & + (1 - \delta_i)\ln\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.130}$$

olarak elde edilir. Buradan μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilebilmesi için bu parametrelere göre kısmi türevlerin alınması ile

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W})}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} [\delta_i \tau_i + (1 - \delta_i) h(\tau_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W})}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} [\delta_i (\tau_i^2 - 1) + (1 - \delta_i) \tau_i h(\tau_i)] = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\tau_i = (\ln x_i - \mu)/\sigma$ olup h standart normal dağılımın bozulma oran fonksiyonudur, yani $h(\cdot) = \phi(\cdot)/(1 - \Phi(\cdot))$ dır. Bu denklem sisteminin analitik bir çözümü olmayıp μ ve σ parametrelerinin $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin değerlerine bu denklem sisteminin Newton-Raphson gibi sayısal yöntemler ile çözülmesi ile ulaşılır. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin Kısım 2.7.1'de verilen asimptotik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ sırası ile μ ve σ parametreleri için güçlü tutarlı olup $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\mu} - \mu \\ \hat{\sigma} - \sigma \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} \end{bmatrix}\right) \tag{4.131}$$

dır. Burada asimptotik varyans ve kovaryans değerlerini elde edebilmek için öncelikle Fisher bilgi matrisi elde edilmelidir. Rasgele sansürlü $\boldsymbol{W}$ örneklemi için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\mu,\sigma;\boldsymbol{W}) = n\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{11} & \mathrm{I}_{12} \\ \mathrm{I}_{12} & \mathrm{I}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.132}$$

olmak üzere

$$\mathrm{I}_{11} = \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]^2 \frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right] e^{\frac{-x}{\lambda}}dx$$

$$\mathrm{I}_{12} = \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right] \frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right] e^{\frac{-x}{\lambda}}dx$$

$$\mathrm{I}_{22} = \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]^2 \frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right] e^{\frac{-x}{\lambda}}dx$$

dır. Bu değerler gerekli işlemlerin yapılması ile elde edilir. Böylelikle $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{11} & \mathbb{I}_{12} \\ \mathbb{I}_{12} & \mathbb{I}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

ifadesinden sayısal olarak hesap edilebilir.

Şimdi de rasgele sansürlü örneklem için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabında EM algoritması ele alınsın. Kolaylık için logaritmik dönüşüm uygulanarak karşılık gelen Normal(μ,σ) dağılım üzerinden işlem yapılsın. $i = 1,2,\dots,n$ için $W_i = \ln X_i$ olsun. Bu durumda $W_1, W_2, \dots, W_n$ Normal(μ,σ) dağılımdan rasgele sansürlü bir örneklem olur. Bu gözlemlerden n^* $(0 < n^* \leq n)$ tanesi tam gözlem, geri kalan $n - n^*$ tanesi ise sansürlü gözlem olsun. Tam gözlemler $\boldsymbol{W}_t = \left(W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_{n^*}}\right)$, sansürlü gözlemler ise $\boldsymbol{W}_s = \left(W_{i_{n^*+1}}, W_{i_{n^*+2}}, \dots, W_{i_n}\right)$ ile gösterilsin. Bu durumda tüm gözlemlere dayalı log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{W}) = -n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(w_i-\mu)^2 \qquad (4.133)$$

olarak elde edilir. Tam örneklem için μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri olan

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i\,, \qquad \hat{\sigma} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(W_i-\hat{\mu})^2\right]^{1/2}$$

ifadelerinin göz önüne alınması ile EM algoritmasının $(h+1)$. adımında $\mu_{(h+1)}$ ve $\sigma_{(h+1)}$ değerlerine

$$\hat{\mu}_{(h+1)} = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n^*} w_{i_j} + \sum_{j=n^*+1}^{n} E\left(W_{i_j}|W_{i_j} > w_{i_j}, \mu_{(h)}, \sigma_{(h)}\right)\right] \qquad (4.134)$$

$$\hat{\sigma}_{(h+1)} = \left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n^*} w_{i_j}^2 + \sum_{j=n^*+1}^{n} E\left(W_{i_j}^2|W_{i_j} > w_{i_j}, \mu_{(h)}, \sigma_{(h)}\right)\right] - \hat{\mu}_{(h+1)}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (4.135)$$

ifadelerinin önceden belirlenen bir yakınsama kuralı sağlanıncaya kadar tekrar edilmesi ile ulaşılır. Bu ifadeler üzerinden hesap yapılabilmesi için $E\left[W_{i_j}\middle|W_{i_j} > w_{i_j}\right]$ ve $E\left[W_{i_j}^2\middle|W_{i_j} > w_{i_j}\right]$ koşullu beklenen değerlerinin hesap edilmesi gerekmektedir. Öncelikle herhangi $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $Z_j = W_{i_j}|W_{i_j} > w_{i_j}$ yazılsın. Açıktır ki Z_j, w_{i_j} noktasında soldan kesilmiş Normal(μ,σ) dağılıma sahiptir. Bu beklenen değerler sırası ile w_{i_j} noktasında soldan kesilmiş Normal dağılımın birinci ve ikinci momentleridir. Bu momentlerin hesabı için öncelikle w_{i_j} noktasında soldan kesilmiş Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu elde edilsin. İlgili moment çıkaran fonksiyon

$$M_{Z_j|Z_j>w_{i_j}}(t) = \frac{1}{1-\Phi\left(\frac{w_{i_j}-\mu}{\sigma}\right)}\int_{w_{i_j}}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(tx)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dx$$

olmak üzere gerekli işlemlerin yapılması ile

$$M_{Z_j|Z_j>w_{i_j}}(t) = \frac{1}{1-\Phi\left(\frac{w_{i_j}-\mu}{\sigma}\right)} e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left(1-\Phi\left(\frac{w_{i_j}-\sigma^2 t-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (4.136)$$

elde edilir. Buradan da

$$E\left(Z_j|Z_j > w_{i_j}\right) = \frac{d}{dt} M_{Z_j|Z_j>w_{i_j}}(t)|_{t=0}$$
$$E\left(Z_j^2|Z_j > w_{i_j}\right) = \frac{d^2}{dt^2} M_{Z_j|Z_j>w_{i_j}}(t)|_{t=0}$$

olmasının göz önüne alınması ile

$$E\left(Z_j|Z_j > w_{i_j}\right) = \mu + \sigma h_j \quad (4.137)$$
$$E\left(Z_j^2|Z_j > w_{i_j}\right) = \sigma^2\left(1+\kappa_j h_j\right) + 2\sigma\mu h_j + \mu^2 \quad (4.138)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $h_j = \phi(\kappa_j)/\left(1-\Phi(\kappa_j)\right)$, $\kappa_j = (w_{i_j}-\mu)/\sigma$ dır. Artık (4.137) ve (4.138) ifadeleri (4.134) ve (4.135) denklemlerinde yerine koyularak EM algoritmasının adımları yakınsama sağlanıncaya kadar devam ettirilir ve böylece $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahminleri elde edilir. Şimdi μ ve σ parametreleri için Fisher bilgisi elde edilsin. Kısım 2.7.1'den EM algoritması kullanırken Fisher bilgisinin

GÖZLENEN BİLGİ=TAM BİLGİ – KAYIP BİLGİ

formülü ile hesap edildiği ve Normal(μ,σ) dağılıma sahip n birimlik bir rasgele örneklem için tam bilginin

$$\mathbb{I}(\mu,\sigma;\boldsymbol{W}) = \frac{n}{\sigma^2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

olduğu hatırlatılsın. Kayıp bilginin hesaplanması için herhangi w_{i_j} noktasında soldan kesilmiş Normal(μ,σ) dağılıma sahip Z_j rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonunun logaritması olan

$$\ln f_{Z_j}(z_j) = -\ln(\sqrt{2\pi}) - \ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\left(z_j-\mu\right)^2 - \ln\left(1-\Phi\left(\frac{w_{i_j}-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

ifadesi göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun μ ve σ parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{z_j - \mu}{\sigma} - h_j\right]$$
$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right)^2 - \left(1 + h_j\kappa_j\right)\right]$$

olarak elde edilir. Bu durumda tek bir sansürlü gözlem için Fisher bilgisi (2.26) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j\right)_{11} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \mu}\right)^2\right] \tag{4.139}$$

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j\right)_{12} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \sigma}\right)\right] \tag{4.140}$$

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j\right)_{22} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \sigma}\right)^2\right] \tag{4.141}$$

dır. Bu beklenen değerlerin (4.136) ifadesinden yararlanarak elde edilmesi ile

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j\right)_{11} = \frac{1}{\sigma^2}\left[1 - h_j^2 + h_j\kappa_j\right] \tag{4.142}$$
$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j\right)_{12} = \frac{1}{\sigma^2}\left[h_j + \left(\kappa_j - h_j\right)h_j\kappa_j\right] \tag{4.143}$$
$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j\right)_{22} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(1 - h_j\kappa_j + \kappa_j^2\right)h_j\kappa_j + 2\right] \tag{4.144}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle kayıp bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W_s}) = \sum_{j=n^*+1}^{n} \mathbb{I}\left(\mu, \sigma | Z_j\right)$$

ifadesi ile hesap edilir. Sonuç olarak gözlenen bilgiye $\mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W_t}) = \mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) - \mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W_s})$ farkının alınması ile ulaşılır. Kısım 2.7.1'de verilen asimptotik özelliklerin göz önüne alınması ile $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile μ ve σ parametreleri için güçlü tutarlı olup $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat{\mu} - \mu \\ \hat{\sigma} - \sigma \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} \end{bmatrix}\right) \tag{4.145}$$

dır. Burada asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} \end{bmatrix} = \mathbb{I}^{-1}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W_t})$$

ile hesap edilir.

4.2.3.2 Tip I sansürleme

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ Lognormal(μ, σ) dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere sansürleme sabiti L alınsın. $X_i = \min\{Y_i, L\}, i = 1, \dots, n$ olmak üzere $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \leq L \\ 0, & Y_i > L \end{cases}$ yazılsın. Bu durumda $X_i = I_i Y_i + (1 - I_i)L$ olduğu bilinmektedir. Tip I sansürlü örneklemlerde $i = 1, \dots, n$ için X_i, I_i değişkenleri gözlenir. Bu durumda $W_i = (X_i, I_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_i \sigma} \phi\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{\delta_i} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{1-\delta_i} \tag{4.146}$$

olarak elde edilir. Böylelikle log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i & \left[-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \ln x_i - \ln \sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ & + (1 - \delta_i) \ln\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.147}$$

dır. Log-olabilirlik fonksiyonunun μ ve σ parametrelerine göre kısmi türevlerinin alınması ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W})}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} [\delta_i \tau_i + (1 - \delta_i) h(\tau_i)] = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W})}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} [\delta_i (\tau_i^2 - 1) + (1 - \delta_i) \tau_i h(\tau_i)] = 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\tau_i = (\ln x_i - \mu)/\sigma$ olup h standart normal dağılımın bozulma oran fonksiyonudur. Bu denklem sistemi analitik olarak çözülemediği için μ ve σ parametrelerinin $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin değerlerine bu denklem sisteminin Newton-Raphson gibi sayısal yöntemler ile çözülmesiyle ulaşılır. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin Kısım 2.7.1'de verilen asimptotik özelliklerinin göz önüne alınmasıyla $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ sırası ile μ ve σ parametreleri için güçlü tutarlı olup $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\mu}-\mu\\ \hat{\sigma}-\sigma\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{12} & \nu_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.148}$$

dır. Asimptotik varyans ve kovaryans değerlerinin elde edilebilmesi için öncelikle Fisher bilgi matrisine ihtiyaç duyulur. $\boldsymbol{W}$ rasgele sansürlü örneklemi için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\mu,\sigma;\boldsymbol{W}) = n\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{11} & \mathrm{I}_{12}\\ \mathrm{I}_{12} & \mathrm{I}_{22}\end{bmatrix} \tag{4.149}$$

olmak üzere (4.19) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathrm{I}_{11} = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]^2 \frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]dx$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]\right]^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$\mathrm{I}_{12} = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]dx$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]\right]\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]\right]\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$\mathrm{I}_{22} = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\left[\frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]\right]\right]^2 \frac{1}{x\sigma}\phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]dx$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]\right]^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln L-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

dır. Bu değerler gerekli işlemlerin yapılması ile elde edilebilir. Böylelikle $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{12} & \nu_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbb{I}_{11} & \mathbb{I}_{12}\\ \mathbb{I}_{12} & \mathbb{I}_{22}\end{bmatrix}^{-1}$$

ifadesinden sayısal olarak hesap edilebilir.

4.2.3.3 Tip II sansürleme

Tip II sansürleme ilerleyen tür tip II sansürlemenin özel hali olduğu için ayrıca ele alınmayacaktır.

4.2.3.4 İlerleyen tür tip II sansürleme

$\boldsymbol{X} = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ Lognormal(μ, σ) dağılımdan $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şemasına göre ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olsun. Bu durumda bu örnekleme dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\mu,\sigma;\boldsymbol{X}) = c\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{x_{i:m:n}\sigma}\phi\left(\frac{\ln x_{i:m:n}-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln x_{i:m:n}-\mu}{\sigma}\right)\right]^{R_i} \tag{4.150}$$

şeklinde elde edilir. Burada $c = n(n-R_1-1)(n-R_1-R_2-2)\dots(n-R_1-\cdots-R_{m-1}-m+1)$ dır. Bu fonksiyonun logaritmasının alınması ile log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{X}) = \ln c - m\ln\sigma - m\ln\sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^{m}\ln x_{i:m:n} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\ln x_{i:m:n}-\mu}{\sigma}\right]^2$$
$$+R_i\left[\ln\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x_{i:m:n}-\mu}{\sigma}\right)\right)\right] \tag{4.151}$$

olarak elde edilir. Buradan μ ve σ ya göre kısmi türevlerin alınması ile

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{X})}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}\tau_i + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{\phi(\tau_i)}{1-\Phi(\tau_i)} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{X})}{\partial\sigma} = -\frac{m}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}\tau_i^2 + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{\phi(\tau_i)\tau_i}{1-\Phi(\tau_i)} = 0$$

denklemleri elde edilir. Burada $\tau_i = (\ln x_{i:m:n} - \mu)/\sigma$ dır. Ancak bu denklem sisteminin analitik bir çözümü yoktur. Bu yüzden bu denklemlerin çözümü için Newton-Raphson gibi bir sayısal çözüm yöntemine ihtiyaç duyulur. Ayrıca verilere logaritmik dönüşüm uygulayıp Normal dağılım üzerinden işlem yapıldığında da yine μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilememektedir. Şimdi Weibull örneğinde olduğu gibi μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hesabı için EM algoritması göz önüne alınsın. Bu problem ilk olarak Ng vd. (2002) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada bulunan sonuçlar aşağıda detaylıca aktarılır. Öncelikle ilerleyen tür tip II sansürlü veriye logaritmik dönüşüm uygulansın. Yani, , $i = 1, \ldots, m$ için $Y_{i:m:n} = \ln(X_{i:m:n})$ olsun. Bu durumda $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \ldots, Y_{m:m:n}$ $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansürleme şeması ile Normal(μ, σ) dağılımdan ilerleyen tür tip II sansürlü bir örnekleme karşılık gelir. EM algoritmasının E ve M adımlarının uygulanabilmesi için tüm veri, tam gözlenen ve sansürlü olmak üzere iki gruba ayrılsın. Tam gözlenen veriler $\boldsymbol{Y} = (Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \ldots, Y_{m:m:n})$ vektörü ile, sansürlü veriler ise $\boldsymbol{Z} = \left(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}(1\times R_1)}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{2}(1\times R_2)}, \ldots, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{m}(1\times R_m)}\right)$ vektörü ile gösterilsin. Burada $\boldsymbol{Z}$ sansürlü veri vektörü kayıp veri olarak ele alınır. $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ tüm veri setini ifade etmek üzere, tüm veri setine dayalı log-olabilirlik fonksiyonu $\ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{W})$ ile ifade edilsin. Bu durumda tüm veri için log-olabilirlik fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
\ln L(\mu, \sigma; \boldsymbol{X}) &= -n\sqrt{2\pi} - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(w_i - \mu)^2 \\
&= -n\sqrt{2\pi} - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(y_{j:m:n} - \mu\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{R_j}\left(Z_{jk} - \mu\right)^2\right] \qquad (4.152)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Ayrıca tam veri için μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin

$$
\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i\,, \qquad \hat{\sigma} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \widehat{\mu})^2\right]^{1/2},
$$

olmasının göz önüne alınması ile μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin değerlerine

$$\widehat{\mu}_{(h+1)} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{m} y_{i:m:n} + \sum_{i=1}^{m} R_i E\left(Z_i | Z_i > y_{i:m:n}, \mu_{(h)}, \sigma_{(h)}\right)\right] \tag{4.153}$$

$$\hat{\sigma}_{(h+1)} = \left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{m} y_{i:m:n}^2 + \sum_{i=1}^{m} R_i E\left(Z_i^2 | Z_i > y_{i:m:n}, \mu_{(h)}, \sigma_{(h)}\right)\right] - \widehat{\mu}_{(h+1)}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.154}$$

ifadelerinin önceden belirlenen bir yakınsama kuralı sağlanıncaya kadar tekrar edilmesi ile ulaşılır. Bu ifadeler üzerinden hesap yapılabilmesi için $E(Z_i|Z_i > y_{i:m:n})$ ve $E(Z_i^2|Z_i > y_{i:m:n})$ koşullu beklenen değerlerinin hesap edilmesi gerekmektedir. Teorem 4.2.1 gereği bu beklenen değerler sırası ile $y_{i:m:n}$ noktasında soldan kesilmiş Normal dağılımın birinci ve ikinci momentleridir. Kısım 4.2.3.1'de bulunan sonuçların göz önüne alınması ile ilgili beklenen değerlerin

$$E(Z_i|Z_i > y_{i:m:n}) = \mu + \sigma h_i \tag{4.155}$$

$$E(Z_i^2|Z_i > y_{i:m:n}) = \sigma^2(1 + \tau_i h_i) + 2\sigma\mu h_i + \mu^2 \tag{4.156}$$

olduğu açıktır. Burada $h_i = \phi(\tau_i)/\big(1 - \Phi(\tau_i)\big)$, $\tau_i = (y_{i:m:n} - \mu)/\sigma$ dır. Artık (4.155) ve (4.156) ifadeleri (4.153) ve (4.154) denklemlerinde yerine koyularak EM algoritmasının adımları yakınsama sağlanıncaya kadar devam ettirilir ve böylece $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahminleri elde edilir. Şimdi μ ve σ parametreleri için Fisher bilgisi elde edilsin. Kısım 2.7.1'den EM algoritması kullanırken Fisher bilgisinin

GÖZLENEN BİLGİ=TAM BİLGİ – KAYIP BİLGİ

formülü ile hesap edildiği ve Normal(μ, σ) dağılımdan n birimlik bir rasgele örneklem için tam bilginin

$$\mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) = \frac{n}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğu hatırlatılsın. Kayıp bilgi matrisi için ise öncelikle j. bozulma zamanında sansürlenen bir gözlem için Fisher bilgisi elde edilsin. Z_j, $y_{j:m:n}$ noktasında soldan kesilmiş Normal(μ, σ) dağılıma sahip olmak üzere

$$\ln f_{Z_j}\big(z_j|y_{j:m:n}\big) = -\ln\big(\sqrt{2\pi}\big) - \ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\big(z_j - \mu\big)^2 - \ln\left(1 - \Phi\left(\frac{y_{j:m:n} - \mu}{\sigma}\right)\right)$$

dır. Bu fonksiyonun μ ve σ parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{z_j - \mu}{\sigma} - h_j\right]$$

$$\frac{\partial \ln f_{Z_j}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right)^2 - \left(1 + h_j\tau_j\right)\right]$$

olmak üzere tek bir sansürlü gözlem için Fisher bilgisi (2.26) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n}\right)_{11} = E\left[\left[\frac{\partial \ln f_{Z_j}\left(Z_j | Y_{j:m:n}\right)}{\partial \mu}\right]^2\right] \tag{4.157}$$

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n}\right)_{12} = E\left[\left[\frac{\partial \ln f_{Z_j}\left(Z_j | Y_{j:m:n}\right)}{\partial \mu}\right]\left[\frac{\partial \ln f_{Z_j}\left(Z_j | Y_{j:m:n}\right)}{\partial \sigma}\right]\right] \tag{4.158}$$

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n}\right)_{22} = E\left[\left[\frac{\partial \ln f_{Z_j}\left(Z_j | Y_{j:m:n}\right)}{\partial \sigma}\right]^2\right] \tag{4.159}$$

dır. Bu beklenen değerler Kısım 4.2.3.1'de bulunan sonuçların göz önüne alınması ile

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n}\right)_{11} = \frac{1}{\sigma^2}\left[1 - h_j^2 + h_j\tau_j\right] \tag{4.160}$$

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n}\right)_{12} = \frac{1}{\sigma^2}\left[h_j + \left(\tau_j - h_j\right)h_j\tau_j\right] \tag{4.161}$$

$$\mathbb{I}\left(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n}\right)_{22} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(1 - h_j\tau_j + \tau_j^2\right)h_j\tau_j + 2\right] \tag{4.162}$$

olarak elde edilir. Böylelikle kayıp bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}) = \sum_{j=1}^{m} R_j \, \mathbb{I}(\mu, \sigma; Z_j | Y_{j:m:n})$$

ifadesi ile hesap edilir. Sonuç olarak ise gözlenen bilgi $\mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{Y}) = \mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{W}) - \mathbb{I}(\mu, \sigma; \boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y})$ farkı ile hesap edilir. p bir sabit ve $m = m_n$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $m/n \to p$ olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin Kısım 2.7.1'de verilen asimptotik özelliklerinin göz önüne alınması ile $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile μ ve σ parametreleri için güçlü tutarlı olup

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\mu}-\mu\\ \hat{\sigma}-\sigma\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{12} & \nu_{22}\end{bmatrix}\right) \tag{4.163}$$

dır. Burada asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{12} & \nu_{22}\end{bmatrix} = \mathbb{I}^{-1}(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y})$$

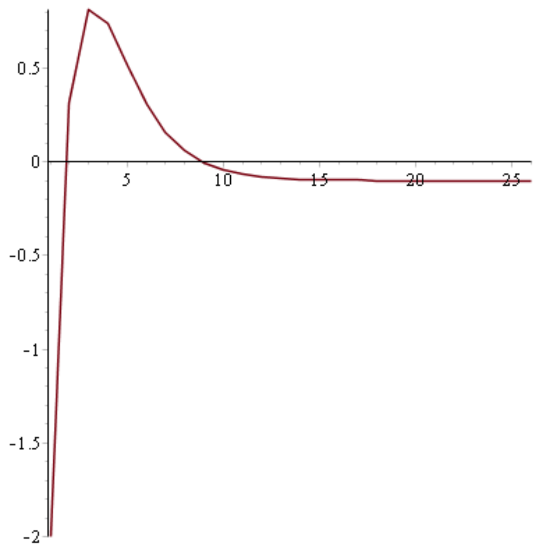
ifadesi ile elde edilir.

Şimdi Lognormal(μ,σ) dağılımdan ilerleyen tür tip II sansürlü bir veri için EM algoritması ile μ ve σ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmini ele alınsın. Bunun için Ng vd. (2002) tarafından üretilen ve aşağıda verilen veri seti ve ilgili sansürleme şeması göz önüne alınsın.

Çizelge 4.2 Lognormal(μ,σ) modeli için ilerleyen tür tip II sansürlü veri ve sansürleme şeması

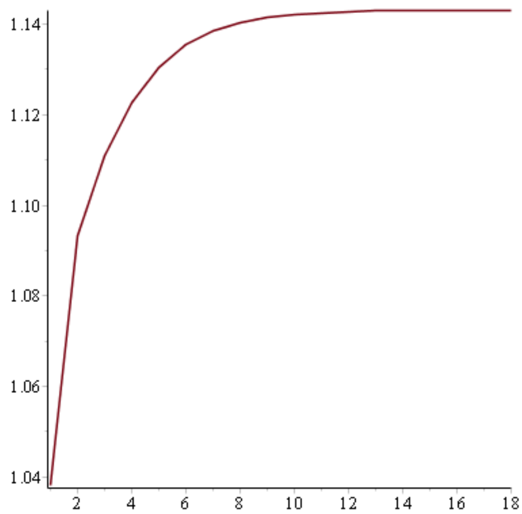
j	1	2	3	4	5	6	7
$y_{j:m:n}$	-3.1538	-0.84064	-0.79798	-0.65705	-0.58301	-0.12642	-0.1145
R_j	1	2	0	1	2	0	3

Çizelge 4.2’de verilen değerler logaritması alınmış değerler olmak üzere yukarıda tarif edilen yöntemin kullanılması ile μ ve σ parametreleri için EM algoritmasının adımları ve yakınsama sonucu elde edilen değerler aşağıdaki şekillerde verilir. Bu şekillerde yatay eksen adım sayısı olup düşey eksen tahmin değerini gösterir.



−0.100667706238062

Şekil 4.3 Lognormal modeli için $\mu_{(h)}$ adımlarının yakınsama grafiği



1.14316286228092

Şekil 4.4 Lognormal modeli için $\sigma_{(h)}$ adımlarının yakınsama grafiği

Ayrıca bu veri seti için bilgi matrisi yukarıda tarif edilen yöntemin kullanılması ile

$$\mathbb{I}(\hat{\mu},\hat{\sigma};\boldsymbol{W}) = \begin{bmatrix} 12.2434 & 0 \\ 0 & 24.4868 \end{bmatrix}, \qquad (\hat{\mu},\hat{\sigma};\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} 3.4701 & 4.8136 \\ 4.8136 & 12.0404 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbb{I}(\hat{\mu},\hat{\sigma};\boldsymbol{Y}) = \mathbb{I}(\hat{\mu},\hat{\sigma};\boldsymbol{W}) - \mathbb{I}(\hat{\mu},\hat{\sigma};\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}) = \begin{bmatrix} 8.7733 & -4.8136 \\ -4.8136 & 12.4464 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Elde edilen matrisin tersinin alınması ile de $\widehat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ tahmin değerleri için asimptotik varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.1446 & 0.0559 \\ 0.0559 & 0.1019 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Şimdi de ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumunda μ ve σ parametrelerinin tahmini için Kısım 2.8'de tarif edilen uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi ele alınsın. Bu problem ilk olarak Balakrishnan vd. (2003) tarafından çalışılmış olup aşağıda detaylıca hatırlatılır.

$\boldsymbol{Y} = (Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots Y_{m:m:n})$, μ konum ve σ ölçek parametreleri Normal dağılımdan $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şeması ile ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olsun. Bu durumda bu örnekleme dayalı log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y}) = -m\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - m\ln\sigma - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y_{i:m:n}-\mu}{\sigma}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} R_i \ln\left(1-\Phi\left(\frac{y_{i:m:n}-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

olmak üzere μ ve σ parametrelerine göre kısmi türevler

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y})}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}\tau_i + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m} R_i h(\tau_i)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y})}{\partial \sigma} = -\frac{m}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}\tau_i^2 + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m} R_i \tau_i h(\tau_i)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tau_i = (y_{i:m:n} - \mu)/\sigma$ ve h standart normal dağılımın bozulma oran fonksiyonudur, yani $h(\cdot) = \phi(\cdot)/\left(1-\Phi(\cdot)\right)$ dır. Görüldüğü üzere kısmi türevler μ ve σ parametrelerinin doğrusal olmayan fonksiyonları şeklindedir. Burada $h(\tau_i)$ teriminin $t_i = E[(Y_{i:m:n} - a)/b]$ etrafında iki terimli Taylor serisinin alınması ile uyarlanmış olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ln L^*(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y})}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i + \sum_{i=1}^{m} R_i(\alpha_i + \tau_i\beta_i) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y})}{\partial \sigma} = -m + \sum_{i=1}^{m} \tau_i^2 + \sum_{i=1}^{m} R_i\tau_i(\alpha_i + \tau_i\beta_i) = 0$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha_i = h(t_i) - t_i h'(t_i)$ ve $\beta_i = h'(t_i)$ dır. Belirtilmelidir ki t_i standart Normal dağılımın i. ilerleyen tür sansürlü sıra istatistiğinin beklenen değeridir. Bu beklenen değerin doğrudan hesaplanması zordur. Bu yüzden doğrudan hesaplamak yerine basit bir yaklaşım kullanılabilir. Bu durumda Balakrishnan ve Sandu (1995) göstermiştir ki $i = 1, \dots, m$ için $\Phi(Y_{i:m:n}) \sim U_{i:m:n}$ dır. Burada $U_{i:m:n}$ Düzgün$(0, 1)$ dağılımın i. ilerleyen tür sıra istatistiğidir. Bu durumda $Y_{i:m:n} \sim \Phi^{-1}(U_{i:m:n})$ dır. Böylelikle $\zeta_{i:m:n} = E(U_{i:m:n})$ olmak üzere $t_i = E\left(\frac{Y_{i:m:n}-a}{b}\right) \cong \Phi(\zeta_{i:m:n})$ ile yaklaşık olarak hesap edilebilir. Burada

$$\zeta_{i:m:n} = 1 - \prod_{j=m-i+1}^{m} \frac{j + R_{m-j+1} + \cdots + R_m}{1 + j + R_{m-j+1} + \cdots + R_m}, i = 1, \dots, m$$

dır (Balakrishnan vd. 2003). Böylece elde edilen uyarlanmış olabilirlik denklemleri μ ve σ parametrelerinin doğrusal fonksiyonları biçimine sahiptir. Bu denklemlerin ortak çözümü ile μ ve σ parametrelerinin uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicilerine ulaşılır. $\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L^*(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y}) = 0$ denkleminin çözümünden

$$\mu = \frac{1}{M}(K + \sigma D) \tag{4.164}$$

elde edilir. Burada

$$M = m + \sum_{i=1}^{m} R_i\beta_i \,, K = \sum_{i=1}^{m} (R_i\beta_i + 1) y_{i:m:n} \,, D = \sum_{i=1}^{m} R_i\alpha_i$$

dır. Bulunan bu eşitliğin $\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L^*(\mu,\sigma;\boldsymbol{Y}) = 0$ denkleminde yerine konması ile σ parametresine göre ikinci dereceden

$$m\sigma^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} R_i\alpha_i(y_{i:m:n} - K)\right)\sigma - \sum_{i=1}^{m}(R_i\beta_i + 1)(y_{i:m:n} - K)^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ile σ parametresi için uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\tilde{b} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4mC}}{2m} \tag{4.165}$$

olarak elde edilir. Burada

$$B = \sum_{i=1}^{m} R_i\alpha_i(y_{i:m:n} - K)\,, C = \sum_{i=1}^{m}(R_i\beta_i + 1)(y_{i:m:n} - K)^2$$

dır. Böylelikle μ parametresi için uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{M}\left(K + \tilde{b}D\right) \tag{4.166}$$

olarak elde edilir (Balakrishnan vd. 2003).

Uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri büyük örneklem durumunda parametrelerin doğrudan tahmini için, küçük örneklem durumunda ise en çok olabilirlik tahmin edicilerinin EM algoritması ile hesabı yapılırken başlangıç noktası olarak kullanılabilir.

5. SANSÜRLÜ VERİLERDE YENİLEME VE VARYANS FONKSİYONU TAHMİNİ

Bu bölümde bir yenileme sürecine ilişkin M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının sansürlü veri durumunda tahmini problemi çalışılır. Bunun için öncelikle parametrik tahmin ele alınır. Daha sonra ise parametrik olmayan tahmin yöntemi üzerinde durulur.

5.1 Parametrik Tahmin

Bu kısımda yukarıda verilen sansür planlarına göre elde edilen örneklemlere dayalı olarak M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının parametrik tahmini üzerinde durulur.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere bu sürece ilişkin olaylar arası geçen zaman süresi dağılımı F olsun. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ bu dağılımın parametrelerini göstermek üzere $F = F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ yazılsın. $X_1, X_2, \dots, X_n$ F dağılımından n birimlik bir sansürlü örneklem olsun. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin tahmin edicileri $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ ile gösterilsin. Bu durumda bu tahmin edicilerin F dağılımında parametrelerin yerine yazılması ise elde edilen $\hat{F}_n = F(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$ F dağılımının bir tahmin edicisidir. Buradan hareketle $k \geq 1$ için F^{k*} fonksiyonu için bir tahmin edici $\hat{F}_n^{k*} = \underbrace{\hat{F}_n * \hat{F}_n * \dots * \hat{F}_n}_{k \text{ kez}}$ dır. (3.6) ifadesinin göz önüne alınması ile M yenileme fonksiyonu için bir tahmin edici

$$\hat{M}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_n^{k*}(t)\,, t \geq 0 \tag{5.1}$$

biçiminde elde edilebilir. Eğer M yenileme fonksiyonu $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin analitik bir ifadesi şeklinde yazılabiliyor ise $\hat{M}_n$, M'de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametreleri yerine bunların tahmin edicileri olan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$'nın yazılması ile elde edilebilir. Benzer şekilde (3.22) ifadesinin göz önüne alınması ile V varyans fonksiyonu için bir tahmin edici

$$\hat{V}_n(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t) - \hat{M}_n(t)\left(1 + \hat{M}_n(t)\right), t \geq 0 \tag{5.2}$$

olarak elde edilebilir. Eğer V varyans fonksiyonu $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin analitik bir ifadesine sahip ise $\hat{V}_n$, V'de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametreleri yerine bunların tahmin edicileri olan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$'nın yazılması ile elde edilebilir. Ancak M yenileme ve V varyans fonksiyonları için F dağılımının parametrelerinin fonksiyonu olacak biçimde bir analitik ifadeleri yok ise $M(t)$ ve $V(t)$ için tahminler her sabit t değeri için

$$\hat{M}_n(t) = \hat{F}_n(t) + \int_0^t \hat{M}_n(t-x)d\hat{F}_n(x), t \geq 0 \tag{5.3}$$

$$\hat{V}_n(t) = \hat{M}_n(t)\left(1 - \hat{M}_n(t)\right) + 2\int_0^t \hat{M}_n(t-x)d\hat{M}_n(x), t \geq 0 \tag{5.4}$$

ifadeleri üzerinden Kısım 3.3'te verilen yöntem aracılığı ile hesap edilebilirler. Bu tahmin ediciler için bazı özellikler aşağıdaki teoremlerle verilir.

Teorem 5.1.1 F mutlak sürekli bir dağılım fonksiyonu olmak üzere f yoğunluk fonksiyonuna sahip ve $f = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ her bir $\theta_i, i = 1, \dots, r$ parametresine göre sürekli olsun. Bu durumda eğer $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ sırasıyla $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin güçlü tutarlı tahmin edicileri ise her $t \geq 0$ için $\hat{M}_n(t)$, $M(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir, yani;

$$\hat{M}_n(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} M(t) \tag{5.5}$$

dır (Frees 1986a).

İspat. $\hat{f}_n = f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$ alınsın. f, $i = 1, \dots, r$ için her θ_i parametresine göre sürekli ve $\hat{\theta}_i$, θ_i için tutarlı olduğundan her sabit t için $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} f(t)$ olur. f'nin bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmasının göz önüne alınması ile Scheffe teoreminden $\hat{F}_n(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F(t)$ elde edilir. Şimdi tümevarım yöntemi ile $\hat{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{k*}(t)$ olduğu gösterilsin. Kabul edilsin ki bu ifade bir $k \in \mathbb{N}$ için geçerli olsun. Konvolüsyon işleminin tanımından hareketle

$$F^{(k+1)*}(t) = \int_0^t F^{k*}(t-x)\, f(x)dx$$

yazılabilir. Bu durumda F^{k*} bir dağılım fonksiyonu olup $t \geq 0$ için $F^{k*}(t) \leq 1$ olmasının göz önüne alınması ile $\hat{F}_n^{k*}(t-x)\hat{f}_n(x) \leq \left|f(x) - \hat{f}_n(x)\right| + f(x)$ yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafına $g_n(x)$ denirse $g_n(x) \xrightarrow{\text{hhhy}} f(x)$ olur. f bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olup integrallenebilirdir. Böylelikle genişletilmiş baskın yakınsaklık teoreminden

$$\hat{F}_n^{(k+1)*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{(k+1)*}(t)$$

dır. Sonuç olarak $k \geq 1$ için $\hat{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{k*}(t)$ dır. A, $\hat{F}_n^{k*}(t)$'nin $F^{k*}(t)$'ye yakınsadığı noktaların kümesi olmak üzere $P(A) = 1$ dir. $F(0) < 1$ ve F bir dağılım fonksiyonu olduğundan $F(a) < 1$ olacak şekilde en az bir $a > 0$ vardır. $t \leq ra$ olacak biçimde bir $r \in \mathbb{N}$ sayısı göz önüne alınsın. $(X_1 > t/r, \ldots, X_r > t/r)$ olayı $(S_r > t)$ olayını gerektirdiğinden $P(S_r \leq t) \leq 1 - [1 - F(t/r)]^r$ elde edilir. Böylelikle $F(a) < 1$ olmak üzere $t/r \leq a$ olduğundan $F(t/r) < 1$ dir. Bu durumda $t \geq 0$ için $F^{r*}(t) < 1$ olacak şekilde en az bir $r \geq 1$ vardır. $\hat{F}_n^{k*}(t)$, $F^{k*}(t)$'ye A üzerinde yakınsak olduğundan $F^{r*}(t) < 1$ şartını sağlayan r için $\delta = 1 - F^{r*}(t)$ olmak üzere her sabit $w \in A$ için bir $n_0(w)$ vardır, öyle ki her $n \geq n_0(w)$ için $\hat{F}_n^{r*}(t) < 1 - \delta/2$ dir. Şimdi

$$g\big(n, n_0(w)\big) = \begin{cases} 1 - \delta/2, & n \geq n_0(w) \\ 1, & n < n_0(w) \end{cases}$$

yazılsın. Bu durumda $k \geq r$ için $\hat{F}_n^{k*}(t) \leq \left[\hat{F}_n^{r*}(t)\right]^{[|k/r|]}$ olmasının göz önüne alınması ile $\hat{F}_n^{k*}(t) \leq [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]}$ elde edilir. Burada $[|\cdot|]$ tam değeri ifade eder. Böylelikle her $n \geq n_0(w)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_n^{k*}(t) &= \sum_{k=1}^{r} \hat{F}_n^{k*}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \hat{F}_n^{k*}(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} \left[\hat{F}_n^{r*}(t)\right]^{[|k/r|]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]} < \infty\end{aligned}$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden her $w \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\hat{F}_n^{k*}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{k*}(t)$$

dır. $P(A)=1$ olduğundan her sabit t için $\widehat{M}_n(t)\xrightarrow{\text{hhhy}}M(t)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.1, Frees (1986a) tarafından tam örneklem durumu için ele alınmıştır. Ancak bu teoremin, şartları sağlandığında sansürlü örneklem durumunda da geçerli olacağı açıktır.

Teorem 5.1.2 Teorem 5.1.1 in şartları altında herhangi bir $t_0 \geq 0$ için $F(t_0)<1$ ise her $t \leq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\widehat{M}_n(t)\right)=M(t) \tag{5.6}$$

dır, yani her $t \leq t_0$ için $\widehat{M}_n(t)$, $M(t)$' nin asimptotik yansız bir tahmin edicisidir (Aydoğdu 1997).

İspat. $F(t_0)<1$ olduğundan $F(t_0)\leq c/(1+c)$ olacak biçimde bir $c>0$ sabiti vardır. Bu durumda

$$M(t_0)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{k*}(t_0)\leq\sum_{k=1}^{\infty}[F(t_0)]^k\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{c}{1+c}\right]^k=c$$

olur. Böylelikle her $t \leq t_0$ için $\widehat{M}_n(t)\leq c$ yazılabilir. Sınırlı yakınsaklık teoreminin göz önüne alınması ile her $t\leq t_0$ için $\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\widehat{M}_n(t)\right)=M(t)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.3 F mutlak sürekli bir dağılım fonksyionu olmak üzere f yoğunluk fonksiyonuna sahip ve $f=f(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r)$ herbir $\theta_i, i=1,\dots,r$ parametresine göre sürekli olsun. Bu durumda eğer $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\dots,\hat{\theta}_r$ sırasıyla $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r$ parametrelerinin güçlü tutarlı tahmin edicileri ise her $t \geq 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t)$, $\sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir, yani;

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t) \tag{5.7}$$

dır (Aydoğdu 1997).

İspat. İspat Teorem 5.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılır. Teorem 5.1.1'in ispatından her $k \geq 1$ ve her $t \geq 0$ için $\hat{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{k*}(t)$ ve her $t \geq 0$ için $F^{r*}(t) < 1$ olacak şekilde bir $r \geq 1$ tamsayısı olduğu bilinmektedir. Buradan her $k \geq 1$ ve her $t \geq 0$ için $k\hat{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} kF^{k*}(t)$ olduğu açıktır. A, $\hat{F}_n^{k*}(t)$'nin $F^{k*}(t)$'ye yakınsadığı noktaların kümesi olmak üzere $P(A) = 1$ dır. Böylelikle r, $F^{r*}(t) < 1$ şartını sağlayan bir tamsayı ve $\delta = 1 - F^{r*}(t)$ olmak üzere her sabit $w \in A$ için bir $n_0(w)$ vardır, öyle ki her $n \geq n_0(w)$ için $\hat{F}_n^{r*}(t) < 1 - \delta/2$ dır. Burada $1 - \delta/2 < 1$ olduğu açıktır. Şimdi

$$g\big(n, n_0(w)\big) = \begin{cases} 1 - \delta/2, & n \geq n_0(w) \\ 1, & n < n_0(w) \end{cases}$$

yazılsın. Bu durumda her $k \geq r$ için $k\hat{F}_n^{k*}(t) \leq k\big[\hat{F}_n^{r*}(t)\big]^{[|k/r|]}$ olmasının göz önüne alınması ile $k\hat{F}_n^{k*}(t) \leq k[g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]}$ dır. Böylelikle her $n \geq n_0(w)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t) &= \sum_{k=1}^{r} k\hat{F}_n^{k*}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} k\big[\hat{F}_n^{r*}(t)\big]^{[|k/r|]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} k[g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]} < \infty\end{aligned}$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden her $w \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$$

dır. $P(A) = 1$ olduğundan her sabit t için $\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.1 Teorem 5.1.3'ün şartları altında her $t \geq 0$ için $\hat{V}_n(t)$, $V(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir, yani;

$$\hat{V}_n(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} V(t) \tag{5.8}$$

dır (Aydoğdu 1997).

İspat. Teorem 5.1.1 ve Teorem 5.1.3'ün göz önüne alınması ile ispat açıktır.

Teorem 5.1.4 Teorem 5.1.3'ün şartları altında herhangi bir $t_0 \geq 0$ için $F(t_0) < 1$ ise her $t \leq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{V}_n(t)\right) = V(t) \tag{5.9}$$

dır, yani her $t \leq t_0$ için $\hat{V}_n(t)$ $V(t)$'nin asimptotik yansız bir tahmin edicisidir (Aydoğdu 1997).

İspat. Teorem 5.1.2'nin ispatından $F(t_0) \leq c/(1+c)$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti olduğu bilinmektedir. $M * M(t) \leq M^2(t)$ olup (3.21) ifadesinden $V(t) \leq M(t)\big(1 + M(t)\big)$ elde edilir. Böylelikle her $t \leq t_0$ için $M(t) \leq c$ ve her $t \geq 0$ için $V(t) \leq M(t)\big(1 + M(t)\big)$ olmasının göz önüne alınması ile her $t \leq t_0$ için $\hat{V}_n(t) \leq c(1+c)$ olup sınırlı yakınsaklık teoreminden her $t \leq t_0$ için $\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{V}_n(t)\right) = V(t)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının sansürlü örneklem durumunda parametrik tahminine ilişkin bazı örnekler aşağıda verilir.

Örnek 1. Bir yenileme sürecine ilişkin olaylar arası geçen zaman süreleri θ ortalamalı Üstel dağılıma sahip olsun. Bu durumda $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci $1/\theta$ oranlı bir Poisson sürecine karşılık gelir ve $t \geq 0$ için $M(t) = t/\theta$ ve $V(t) = t/\theta$ dır. $X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \ldots, X_{m:m:n}$, Üstel$(\theta)$ dağılımdan $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansürleme şeması ile ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olsun. Bu durumda θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta} = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m}(1+R_i)X_{i:m:n}\right]$ olmak üzere M ve V fonksiyonları için parametrik birer tahmin edici

$$\widehat{M}_n(t) = t/\hat{\theta}, \qquad t \geq 0$$
$$\widehat{V}_n(t) = t/\hat{\theta}, \qquad t \geq 0$$

ile verilir. p bir sabit olmak üzere $m = m_n$ için $n \to \infty$ iken $m/n \to p$ olduğunda $\hat{\theta}$ en çok olabilirlik tahmin edicisi θ parametresi için güçlü tutarlıdır. Böylelikle yukarıda tanımlanan $\widehat{M}_n$ ve $\widehat{V}_n$ parametrik tahmin edicileri bu şart altında sırası ile M ve V fonksiyonları için güçlü tutarlıdır. $\hat{\theta}$'nın Kısım 4.2.1.4'te verilen asimptotik dağılımının ve Delta yönteminin göz önüne alınması ile de $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olduğunda her $t \geq 0$ için

$$\sqrt{m}\left(\widehat{M}_n(t) - M(t)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, t^2/\theta^2\right)$$
$$\sqrt{m}\left(\widehat{V}_n(t) - V(t)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, t^2/\theta^2\right)$$

elde edilir.

Örnek 2. Şimdi de bir $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci için olaylar arası geçen zaman süresi F'nin Weibull(α, β) dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Bu dağılımdan ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olarak Çizelge 4.1'de verilen sıvı yalıtım verileri göz önüne alınsın. Bu verilere dayalı olarak M ve V fonksiyonları tahmin edilsin. Weibull parametrik modeli altında M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının model parametrelerine dayalı bir analitik ifadesi mevcut değildir. Bu yüzden model parametreleri tahmin edildikten sonra M ve V fonksiyonlarının parametrik tahmin edicilerinin hesabı Kısım 3.3'te tarif edildiği üzere yapılmadır. Kısım 4.2.2.4'ten Weibull(α, β) dağılımına karşılık gelen Uç Değer(a, b) dağılımı için a ve b parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin $\hat{a} = 2.222$ ve $\hat{b} = 1.026$ olduğu hesap edilmişti. Buradan $\alpha = 1/b$ ve $\beta = \exp(a)$ olmasının göz önüne alınması ile

$\hat{\alpha} = 0.974$ ve $\hat{\beta} = 9.225$ olarak hesap edilir. Böylelikle $t = 0.5, 1, 2, 3, 5, 10$ noktalarında $\widehat{M}_n(t)$ ve $\widehat{V}_n(t)$ tahmin edicileri aşağıdaki gibi hesap edilir.

Çizelge 5.1 Çizelge 4.1'de verilen yalıtım verilerine dayalı M ve V fonksiyonlarının parametrik tahmini

t	0.5	1	2	3	5	10
$\widehat{M}_n(t)$	0.0585	0.1149	0.2261	0.3361	0.5542	1.0946
$\widehat{V}_n(t)$	0.0585	0.1153	0.2273	0.3387	0.5609	1.1170

Bu sonuçlar şöyle yorumlanabilir. İlgili birimin her bozulduğunda yenisi ile değiştirildiği bir yenileme süreci göz önüne alınsın. Bu durumda, örneğin 10 birimlik bir zaman aralığında ilgili birimlerden ortalama olarak 1.0946 tane bozulması beklenir ve bu bozulma sayılarına ilişkin varyans 1.1170'tir. $\widehat{M}_n(t)$ ve $\widehat{V}_n(t)$ değerlerinin birbirine yakın çıkma sebebi ise $\hat{\alpha}$'nın bire yakın çıkmasıdır. Çünkü Weibull dağılımı, şekil parametresi bir olduğunda Üstel dağılıma karşılık gelir.

5.2 Parametrik Olmayan Tahmin

Bu kısımda M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmini üzerinde durulur. Öncelikle tam örneklem durumunda M ve V fonksiyonları için literatürde incelenen bazı tahmin ediciler ve özellikleri hatırlatılır. Daha sonra sansürlü veri durumunda M ve V fonksiyonlarının tahmini problemi ele alınır. Rasgele sansürlü örneklem durumu Baxter ve Li (1995) tarafından çalışılmış olduğu için, bu çalışmada bulunan sonuçlar hatırlatılır. İlerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumu için ise rasgele örneklem durumuna benzer şekilde tahmin ediciler önerilir ve bu tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri incelenir.

5.2.1 Tam örneklem

Bu kısımda M yenileme ve V varyans fonksiyonları için tam örneklem durumunda literatürde önerilen tahmin ediciler ele alınır. Bu tahmin ediciler ve bazı özellikleri sansürlü örneklem ile ilişkili olması bakımından hatırlatılır.

5.2.1.1 Büyük t değerleri için bir tahmin edici

M ve V fonksiyonlarının (3.27) ve (3.29)'da verilen asimptotik ifadeleri göz önüne alınsın. Bu durumda t'nin yeterince büyük olduğu durumlarda $M(t)$ ve $V(t)$ için

$$M_{2.1n}(t) = \frac{t}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{\mu}_2 - 2\hat{\mu}^2}{2\hat{\mu}^2} \tag{5.10}$$

$$V_{2.1n}(t) = \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}^2}{\hat{\mu}^3} t + \frac{5\hat{\mu}_2^2}{4\mu^4} - \frac{2\hat{\mu}_3}{3\hat{\mu}^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\hat{\mu}^2} \tag{5.11}$$

tahmin edicileri önerilebilir (Frees 1986a, Aydoğdu 1997). Burada μ, μ_2 ve μ_3 sırasıyla F dağılımının birinci, ikinci ve üçüncü momentini belirtmek üzere $\hat{\mu}$, $\hat{\mu}_2$ ve $\hat{\mu}_3$ bu parametrelere ilişkin tahmin edicilerdir. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, F dağılımından n birimlik bir rasgele örneklem olmak üzere μ, μ_2 ve μ_3 parametreleri için tutarlı birer tahmin edici olarak örneklem momentleri, yani sırasıyla $(\sum_{i=1}^n X_i)/n$, $(\sum_{i=1}^n X_i^2)/n$ ve $(\sum_{i=1}^n X_i^3)/n$ önerilebilir. Herhangi bir t değeri için $M_{2.1n}(t)$ ve $V_{2.1n}(t)$ tahmin edicileri (3.27) ve (3.29)'da verilen asimptotik denk ifadeleri için tutarlı birer tahmin edici olacaktır. Ancak genelde $M(t) \neq (t/\mu) + (\mu_2 - 2\mu^2)/2\mu^2$ ve $V(t) \neq ((\mu_2 - \mu^2)/\mu^3)t + (5\mu_2^2/(4\mu^4)) - (2\mu_3/(3\mu^3)) - (\mu_2/(2\mu^2))$ olduğundan $M_{2.1n}(t)$ ve $V_{2.1n}(t)$ tahmin edicileri sırasıyla $M(t)$ ve $V(t)$ için tutarlı birer tahmin edici olmayacaktır (Aydoğdu 1997). Ayrıca Aydoğdu (1997) göstermiştir ki bu tahmin ediciler genelde ne yansız ne de asimptotik yansızdırlar. Ancak belirtilmelidir ki bu tahmin edicilerin performansının n örneklem çapının artması ve t'nin büyümesi ile iyileşmesi beklenir.

5.2.1.2 Örneklem yenileme ve varyans fonksiyonu

M yenileme ve V varyans fonksiyonları için (3.6) ve (3.22) ifadeleri göz önüne alınsın. $F^{k*}(t)$ için parametrik olmayan tahmin bir edici elde edilebilir ise bu tahmin ediciye dayalı olarak (3.6) ve (3.22) ifadelerinde $F^{k*}(t)$ yerine elde edilen tahmin edicisinin koyulması ile M ve V fonksiyonları için parametrik olmayan birer tahmin edici elde edilebilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$, F dağılımından n birimlik bir rasgele örneklem olsun. Bu durumda $F(t)$ için bir tahmin edici $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le t)$ dır. Belirtilmelidir ki bu tahmin edici $F(t)$'nin parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi olup örneklem dağılım fonksiyonudur. $\tilde{F}_n^{1*}(t) = F_n(t)$ yazılsın. Bu durumda $F^{k*}(t)$ için bir tahmin edici ardışık olarak

$$\tilde{F}_n^{k*}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{F}_n^{(k-1)*}(t-x)\, d\tilde{F}_n^{1*}(x)\,, k = 2,3,\dots \tag{5.12}$$

şeklinde tanımlanabilir. M ve V fonksiyonlarının (3.6) ve (3.22) konvolüsyon serisi ifadelerinde $F^{k*}(t)$ yerine $\tilde{F}_n^{k*}(t)$ alınması ile bu fonksiyonlar için her sabit t değerinde parametrik olmayan birer tahmin edici

$$M_{2.2n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{k*}(t) \tag{5.13}$$

$$V_{2.2n}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{F}_n^{k*}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{k*}(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{k*}(t)\right) \tag{5.14}$$

ile verilir. $M_{2.2n}(t)$ tahmin edicisi Frees (1986b) tarafından, $V_{2.2n}(t)$ tahmin edicisi ise benzer şekilde Aydoğdu (1997) tarafından tanımlanmış olup bu tahmin edicilerin bazı istatistiksel özellikleri Aydoğdu (1997) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Şimdi bu tahmin edicilerin bazı özellikleri hatırlatılsın.

$\tilde{F}_n^{1*}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le t)$ olmak üzere (2.1) ifadesinden

$$\tilde{F}_n^{2*}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{F}_n^{1*}(t) d\tilde{F}_n^{1*}(t)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i_1=1}^{n} \tilde{F}_n^{1*}\left(t - X_{i_1}\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} I(X_{i_1} + X_{i_2} \leq t)$$

elde edilir. Böylelikle genel olarak

$$\tilde{F}_n^{k*}(t) = \frac{1}{n^k}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{n} I(X_{i_1} + X_{i_2} + \cdots + X_{i_k} \leq t)$$

dır. Her sabit t değeri için

$$I\left(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} \leq t\right) \geq I(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} + X_{i_{k+1}} \leq t)$$

olmasının göz önüne alınması ile

$$\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} I(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} \leq t) \geq \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} I(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} + X_{i_{k+1}} \leq t)$$
$$n\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} I\left(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} \leq t\right) \geq \sum_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1}=1}^{n} I\left(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} + X_{i_{k+1}} \leq t\right)$$

olup her iki tarafın $1/n^{k+1}$ ile çarpılmasıyla

$$\frac{1}{n^k}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} I\left(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} \leq t\right) \geq \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1}=1}^{n} I\left(X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} + X_{i_{k+1}} \leq t\right)$$
$$\tilde{F}_n^{k*}(t) \geq \tilde{F}_n^{(k+1)*}(t)$$

elde edilir. Yani $\tilde{F}_n^{k*}(t)$, k'ya göre azalandır. Bu durum $\tilde{F}_n^{k*}(t)$'nin $M_{2.2n}(t)$ ve $V_{2.2n}(t)$ tahmin edicilerine olan katkısının k'nın artması ile azalacağına işaret eder.

Şimdi $\tilde{F}_n^{k*}(t)$ tahmin edicisinin yansızlığı incelensin. $k = 1$ için

$$
\begin{aligned}
E\left(\tilde{F}_n^{k*}(t)\right) &= E\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} I(X_i \le t)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} E\big(I(X_i \le t)\big) \\
&= \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} F(t) \\
&= F(t)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\tilde{F}_n^{1*}(t)$, $F(t)$ için yansızdır. Ancak $k = 2$ için

$$
\begin{aligned}
E\left(\tilde{F}_n^{2*}(t)\right) &= E\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} I\big(X_{i_1} + X_{i_2} \le t\big)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\big(n(n-1)F^{2*}(t) + nF(t)\big) \\
&= F^{2*}(t) + \frac{1}{n}\big(F(t/2) - F^{2*}(t)\big)
\end{aligned}
$$

olup $\tilde{F}_n^{2*}(t)$'nin $F^{2*}(t)$ için yansız olmadığı açıktır. Aydoğdu (1997) göstermiştir ki $a(t) = o(n^{k-1})$ olmak üzere

$$
E\left(\tilde{F}_n^{k*}(t)\right) = F^{k*}(t) + \frac{1}{n^{k-1}}a(t) \text{ ()}
$$

dır. Böylelikle $\tilde{F}_n^{k*}(t)$ $k \ge 2$ için $F^{k*}(t)$'nin yanlı bir tahmin edici olmasına rağmen

$$
\lim_{n\to\infty} E\left(\tilde{F}_n^{k*}(t)\right) = F^{k*}(t) \tag{5.15}
$$

olduğundan asimptotik yansızdır.

Aydoğdu (1997) $\tilde{F}_n^{k*}(t)$ istatistiğinin bir V-istatistiği oluşundan hareketle $\tilde{F}_n^{k*}(t)$'nin tutarlılığını göstermiştir. Bu durum aşağıdaki teoremle ispatsız olarak verilir.

Teorem 5.2.1 Her sabit t ve her $k \ge 1$ için

$$
\tilde{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{k*}(t) \tag{5.16}
$$

dır, yani; $\tilde{F}_n^{k*}(t)$, $F^{k*}(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir (Aydoğdu 1997).

$\tilde{F}_n^{k*}(t)$'nin $F^{k*}(t)$ için güçlü tutarlı bir tahmin edici olmasından hareketle $M_{2.2n}(t)$ ve $V_{2.2n}(t)$ tahmin edicilerinin güçlü tutarlılığı gösterilebilir. Bu durum aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 5.2.2 Her sabit $t \geq 0$ değeri için

(i) $\quad M_{2.2n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} M(t) \qquad (5.17)$

(ii) $\quad V_{2.2n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} V(t) \qquad (5.18)$

dır. Yani $M_{2.2n}(t)$ ve $V_{2.2n}(t)$ tahmin edicileri sırası ile $M(t)$ ve $V(t)$ için güçlü tutarlıdır (Aydoğdu 1997).

İspat. (Ω, U, P) F dağılım fonksiyonuna karşılık gelen rasgele değişkenin tanımlı olduğu olasılık uzayı olsun. Her $k \geq 1$ ve $t \geq 0$ için $\tilde{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{k*}(t)$ olduğu bilinmektedir. A, $\hat{F}_n^{k*}(t)$'nin $F^{k*}(t)$'ye yakınsadığı noktaların kümesi olmak üzere $P(A) = 1$ dir. $F(0) < 1$ ve F bir dağılım fonksiyonu olduğundan $F(a) < 1$ olacak şekilde en az bir $a > 0$ vardır. $t \leq ra$ olacak biçimde bir $r \in \mathbb{N}$ sayısı göz önüne alınsın. $(X_1 > t/r, \dots, X_r > t/r)$ olayı $(S_r > t)$ olayını gerektirdiğinden $P(S_r \leq t) \leq 1 - [1 - F(t/r)]^r$ elde edilir. Böylelikle $F(a) < 1$ olmak üzere $t/r \leq a$ olduğundan $F(t/r) < 1$ dir. Bu durumda $t \geq 0$ için $F^{r*}(t) < 1$ olacak şekilde en az bir $r \geq 1$ vardır. $\tilde{F}_n^{k*}(t)$, $F^{k*}(t)$'ye A üzerinde yakınsak olduğundan $F^{r*}(t) < 1$ şartını sağlayan r için $\delta = 1 - F^{r*}(t)$ olmak üzere her sabit $w \in A$ için bir $n_0(w)$ vardır, öyle ki her $n \geq n_0(w)$ için $\tilde{F}_n^{r*}(t) < 1 - \delta/2$ dir. Şimdi

$$g\big(n, n_0(w)\big) = \begin{cases} 1 - \delta/2, & n \geq n_0(w) \\ 1, & n < n_0(w) \end{cases}$$

yazılsın. Bu durumda $k \geq r$ için $\tilde{F}_n^{k*}(t) \leq [\tilde{F}_n^{r*}(t)]^{[|k/r|]}$ olmasının göz önüne alınması ile $\tilde{F}_n^{k*}(t) \leq [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]}$ elde edilir. Böylelikle her $n \geq n_0(w)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{F}_n^{k*}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \tilde{F}_n^{k*}(t)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r} [\tilde{F}_n^{r*}(t)]^{[|k/r|]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]} < \infty$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden her $w \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)$$

dır. $P(A) = 1$ olduğundan her sabit t değeri için

$$M_{2.2n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} M(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $n \geq n_0(w)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{r} k\tilde{F}_n^{k*}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} k\tilde{F}_n^{k*}(t)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r} k[\tilde{F}_n^{r*}(t)]^{[|k/r|]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} k[g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]} < \infty$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden her $w \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$$

elde edilir. $P(A) = 1$ olduğundan her sabit t değeri için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$$

dır. Böylelikle $V(t)$ için (3.22) ifadesinin ve $M_{2.2n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} M(t)$ olduğunun göz önüne alınması ile $V_{2.2n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} V(t)$ sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

$\tilde{F}_n^{k*}(t)$ tahmin edicisi $k \geq 2$ için $F^{k*}(t)$'nin yanlı bir tahmin edicisi olduğundan $M_{2.2n}(t)$ ve $V_{2.2n}(t)$ tahmin edicilerinin de genelde sırasıyla $M(t)$ ve $V(t)$ için yanlı birer tahmin edici olacakları açıktır. Ancak Aydoğdu (1997) bu tahmin edicilerin asimptotik yansız olduğunu göstermiştir. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

Teorem 5.2.3 Herhangi bir $t_0 \geq 0$ ve $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin her sabit değeri için eğer $F_n(t_0) < 1$ ise her $t \leq t_0$ için

(i) $\lim_{n\to\infty} E\big(M_{2.2n}(t)\big) = M(t)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} E\big(V_{2.2n}(t)\big) = V(t)$

dır (Aydoğdu 1997).

İspat. Teorem 5.1.2 ve Teorem 5.1.4'ün ispatında $\widehat{M}_n(t)$ yerine $M_{2.2n}(t)$ ve $\widehat{V}_n(t)$ yerine $V_{2.2n}(t)$ alınması ile ispat edilir.

Harel vd. (1995) ise $M_{2.2n}$ örneklem yenileme fonksiyonu için yukarıda verilen sonuçlara ek olarak olarak $\left\{\sqrt{n}(M_{2.2n} - M)(t), 0 \leq t < \infty\right\}$ sürecinin $\tau < \infty$ olmak üzere $\mathcal{D}[0,\tau]$ uzayı üzerinde Skorokhod metriği ile inşa edilen Skorokhod topolojisi üzerinde yakınsadığı süreci elde etmiştir. Bu sonuçlara dayalı olarak $\left\{\sqrt{n}(V_{2.2n} - V)(t), 0 \leq t < \infty\right\}$ sürecinin yakınsama sonuçları da elde edilebilir. Ancak $\sqrt{n}(V_{2.2n} - V)(t)$'nin noktasal olarak yakınsama davranışının incelenmesi şimdilik yeterli olacaktır. Bunun için öncelikle Harel vd. (1995)'nin doğrusallaştırma işlemi hatırlatılsın.

Lemma 5.2.1 $F_{n'}$ F için herhangi bir tahmin edici ve $F_{n'}^{k*}$, $F_{n'}$'nin kendisi ile k kez konvolüsyonu olmak üzere M yenileme fonksiyonu için bir tahmin edici $M_{n'} = \sum_{k=1}^{\infty} F_{n'}^{k*}$ olsun. Bu durumda

$$(M_{n'} - M) = (F_{n'} - F) * M^{2*} + (F_{n'} - F)^{2*} * M_{n'} * M^{2*} \tag{5.19}$$

dır (Harel vd. 1995).

İspat. $F_{n'}^{2*} - F^{2*} = (F_{n'} - F) * (F_{n'} + F)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F_{n'}^{3*} - F^{3*} &= (F_{n'} - F) * (F_{n'}^{2*} + F^{2*}) + F * F_{n'}^{2*} - F_{n'} * F^{2*} \\ &= (F_{n'} - F) * (F_{n'}^{2*} + F^{2*}) + (F_{n'} - F) * (F_{n'} * F) \\ &= (F_{n'} - F) * (F_{n'}^{2*} + F_{n'} * F + F^{2*}) \end{aligned}$$

dır. Böylelikle $k \geq 1$ için genel olarak

$$F_{n'}^{k*} - F^{k*} = (F_{n'} - F) * \left(F_{n'}^{(k-1)*} + F_{n'}^{(k-2)*} * F + \cdots + F_{n'} * F^{(k-2)*} + F^{(k-1)*}\right)$$

elde edilir. Burada $F_{n'}^{0*}$ ve F^{0*}'nun sıfır noktasında yoğunlaşmış Dirac dağılımı olduğu ve bu sebeple konvolüsyon işlemine göre birim eleman olduğu not edilsin. Böylelikle

$$(M_{n'} - M) = (F_{n'} - F) * \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} F_{n'}^{(k-j)*} * F^{(j-1)*}$$

olmak üzere her sonlu t değeri için $(M_{n'} - M)(t)$ mutlak yakınsak olacağından yukarıdaki ifadede toplamların sırası değiştirilebilir. Bu değişiklik yapıldığında ise

$$(M_{n'} - M) = (F_{n'} - F) * M_{n'} * M$$

elde edilir. Burada $M_{n'}$ yerine $M_{n'} - M + M$ alınıp gerekli düzenlemelerin yapılması ile

$$(M_{n'} - M) = (F_{n'} - F) * M^{2*} + (F_{n'} - F)^{2*} * M_{n'} * M^{2*}$$

sonucuna ulaşılır.

Harel vd. (1995) bu doğrusallaştırma işlemi sonrası elde edilen birinci ve ikinci terimlerin süreç bazında yakınsama sonuçlarını elde etmişlerdir. Baxter ve Li (1994) ise Harel vd. (1995)'nde elde edilen sonuçları farklı bir amaçla noktasal olarak kullanabilmek için bu sonuçları uygun bir şekilde yeniden ifade etmişlerdir. Bu sonuçlar aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 5.2.4 (Harel vd. 1995, Baxter ve Li 1994) $Z(0)=0$ olmak üzere $Z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sınırlı salınımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $n\to\infty$ iken $\{\sqrt{n}\big(Z*(F_n-F)(t)\big), 0\le t<\infty\}$ süreci Skorokhod topolojisi üzerinde $\{[Z*(B^o\circ F)(t)], 0\le t<\infty\}$ sürecine zayıf yakınsar ve $\sqrt{n}(F_n-F)*(F_n-F)*M_{4n}*Z(t)$ her sabit t için 1 olasılıkla sıfıra düzgün yakınsar. Burada $\{B^o(t), 0\le t\le 1\}$ Brown köprüsü olup " $\circ$ " bileşke fonksiyon belirtir.

Teorem 5.2.5 (Harel vd. 1995) $\{\sqrt{n}(M_{2.2n}-M)(t), 0\le t<\infty\}$ süreci $n\to\infty$ iken, Skorokhod topolojisi üzerinde $\{[M*M*(B^o\circ F)(t)], 0\le t<\infty\}$ sürecine zayıf yakınsar.

Böylelikle M yenileme fonksiyonu için $M_{2.2n}$ tahmin edicisine dayalı olarak bir güven aralığı oluşturulabilir. Bunun için öncelikle $\{[M*M*(B^o\circ F)(t)], 0\le t<\infty\}$ sürecinin varyans fonksiyonunun elde edilmesi gereklidir. Bunun için aşağıdaki lemmadan faydalanılır.

Lemma 5.2.2 $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ karesel integrallenebilir bir fonksiyon ve $\{B^o(t), 0\le t\le 1\}$ Brown köprüsü olmak üzere

$$\int_0^1 h(x)dB^o(x) \sim N(0,\sigma_h^2) \tag{5.20}$$

dır, burada $\sigma_h^2=\int_0^1[h(x)]^2dx-\left[\int_0^1 h(x)dx\right]^2$ (Shorack ve Wellner 1986).

Böylelikle

$$M*M*(B^o\circ F)=\int_0^t M*M(t-x)d[(B^o\circ F)(x)]$$

olmak üzere $y=F(x)$ değişken dönüştürmesi yapılması ile

$$M * M * (W \circ F) = \int_0^{F(t)} M * M\big(t - F^{-1}(y)\big) dB^o(y)$$

elde edilir. Buradan da Lemma 5.2.2 gereği

$$\int_0^{F(t)} M * M\big(t - F^{-1}(y)\big) dB^o(y) \sim N\big(0, \eta^2(t)\big)$$

olmak üzere

$$\eta^2(t) = [M * M]^2 * F(t) - [M * M * F(t)]^2$$

olarak elde edilir (Baxter ve Li 1994). Eğer $\eta^2(t)$'nin her sabit t değeri için tutarlı bir tahmin edicisi elde edilebilir ise M yenileme fonksiyonu için $M_{2.2n}$ tahmin edicisine dayalı bir güven aralığı Slutsky teoremi yardımı ile elde edilebilir. Bunun için gerekli lemma ve ilgili teorem aşağıda verilir.

Lemma 5.2.3 $\{f_n(t)\}$ $[0, b]$ aralıkları üzerinde azalmayan ve sonlu fonksiyonların bir dizisi, $f(t)$ ise $[0, b]$ üzerinde sonlu ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $n \to \infty$ iken $f_n(t)$ $[0, b]$ üzerinde $f(t)$'ye düzgün yakınsasın. Ayrıca, $g_n: [0, b] \to \mathbb{R}, n = 1,2, \dots$ $n \to \infty$ iken $g: [0, b] \to \mathbb{R}$'ye düzgün yakınsasın. Bu durumda $n \to \infty$ iken $\int_0^x g_n(t) df_n(t)$ $x \in [0, b]$ için $\int_0^x g(t) df(t)$ integraline düzgün yakınsar. Buradaki tüm integraller Lebesgue integralidir (Baxter ve Li 1994).

Lemma 5.2.3 Helly-Bray teoreminin bir genellemesi olup ispatı Helly-Bray teoreminin ispatı üzerinde uygun değişiklikler yapılarak gösterilebilir.

Teorem 5.2.6 $\eta^2(t)$'nin her sabit t değeri için bir tahmin edici

$$\eta_n^2(t) = [M_{2.2n} * M_{2.2n}]^2 * F_n(t) - [M_{2.2n} * M_{2.2n} * F_n(t)]^2$$

olsun. Bu durumda $\eta_n^2(t)$, $\eta^2(t)$ için güçlü tutarlı bir tahmin edicidir (Baxter ve Li 1994).

İspat. F sürekli olduğu için M fonksiyonu da sürekli ve monotondur. Böylece $x \in [0, t]$ için $M_{2.2n}(x)$ $M(x)$'e 1 olasılıkla düzgün yakınsar. Lemma 5.2.3 gereği $x \in [0, t]$ için $M_{2.2n} * M_{2.2n}(x)$ bir olasılıkla $M * M(x)$'e düzgün yakınsar. Ayrıca, $M_{2.2n} * M_{2.2n} * F_n(x)$ de $x \in [0, t]$ için 1 olasılıkla $M * M * F(x)$'e yakınsar. Benzer şekilde $(M_{2.2n} * M_{2.2n})^2 * F_n(x)$ de 1 olasılıkla $(M * M)^2 * F(x)$'e yakınsar ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2.1 Her sabit $t \geq 0$ için $n \to \infty$ iken

$$\frac{\sqrt{n}}{\eta_n^2(t)}[M_{2.2n}(t) - M(t)] \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.21}$$

dır (Baxter ve Li 1994).

Şimdi de $\sqrt{n}(V_{2.2n} - V)(t)$'nin yakınsama davranışı ele alınsın. Bunun için uygun bir yol $V_{2.2n} - V$ farkının $M_{2.2n} - M$ türünden ifade edilmesi olabilir. Böylelikle $M_{2.2n} - M$ için bilinen sonuçlar kullanılarak yakınsama davranışı ortaya koyulabilir. $V_{2.2n} - V$ farkının $M_{2.2n} - M$ türünden ifadesi Baxter ve Li (1995) tarafından aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Öncelikle (3.21) ifadesinin göz önüne alınması ile

$$V_{2.2n} - V = 2M_{2.2n} * M_{2.2n} + M_{2.2n} - M_{2.2n}^2 - [2M * M + M - M^2] \tag{5.22}$$

dır. Burada eşitliğin sağ tarafına $2M * M_{2.2n}$ ifadesi eklenip çıkarılır ise

$$\begin{aligned} V_{2.2n} - V &= 2M_{2.2n} * M_{2.2n} - 2M * M_{2.2n} + 2M * M_{2.2n} - 2M * M \\ &\quad + [M_{2.2n} - M] - [M_{2.2n}^2 - M^2] \\ &= 2M_{2.2n} * [M_{2.2n} - M] + [2M + I + C_n \cdot I] * [M_{2.2n} - M] \end{aligned} \tag{5.23}$$

dır. Burada $x \geq 0$ için $I(x) = 1$ olup " $\cdot$ " çarpım anlamına gelir ve $C_n = [M_{2.2n} + M]$ dır. Şimdi de yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına $2M * [M_{2.2n} - M]$ eklenip çıkarılsın. Bu durumda

$$V_{2.2n} - V = 2[M_{2.2n} - M] * [M_{2.2n} - M] + [4M + I + C_n.I] * [M_{2.2n} - M] \tag{5.24}$$

elde edilir. Lemma 5.2.1'in göz önüne alınması ile

$$[M_{2.2n} - M] * [M_{2.2n} - M] = [(F_n - F) * M^{2*} + (F_n - F)^{2*} * M_{2.2n} * M^{2*}] \\ * [(F_n - F) * M^{2*} + (F_n - F)^{2*} * M_{2.2n} * M^{2*}]$$

olmak üzere konvolüsyon işleminin parantez içerisine dağıtılmasıyla

$$[M_{2.2n} - M] * [M_{2.2n} - M] = (F_n - F)^{2*} * M^{4*} + 2(F_n - F)^{3*} * M_{2.2n} * M^{4*} \\ +(F_n - F)^{4*} * M_{2.2n}^{2*} * M^{4*}$$

elde edilir. Teorem 5.2.4 gereği yukarıdaki ifadedeki her terim 1 olasılıkla sıfıra düzgün yakınsar. Sonuç olarak ise $[M_{2.2n} - M] * [M_{2.2n} - M] \xrightarrow{\text{hhhy}} 0$ dır. (5.24) ifadesindeki ikinci terimde konvolüsyon işleminin parantez içine dağıtılması ile

$$[4M + I + C_n \cdot I] * [M_{2.2n} - M] = 4M * [M_{2.2n} - M] + [M_{2.2n} - M] \\ +C_n \cdot [M_{2.2n} - M] \tag{5.25}$$

elde edilir. Teorem 5.2.2'den $C_n \xrightarrow{\text{hhhy}} C,\ C = 2M$ olduğu açıktır. Teorem 5.2.5 gereği her sabit t için $\sqrt{n}(M_{2.2n} - M)(t) \xrightarrow{d} M * M * (B^0 \circ F)(t)$ olmak üzere Slutsky teoreminden $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}[C_n \cdot (M_{2.2n} - M)](t) \xrightarrow{d} \big[C \cdot [M * M * (B^0 \circ F)]\big](t) \tag{5.26}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\sqrt{n}[4M * (M_{2.2n} - M)](t) \xrightarrow{d} 4M * M * M * (B^0 \circ F)(t)$ dır. Böylelikle her sabit t için $\sqrt{n}(V_{2.2n} - V)(t)$ ile ilgili aşağıdaki sonuç aşikar olarak elde edilir.

Sonuç 5.2.2 Her sabit $t \geq 0$ için $n \to \infty$ iken $\sqrt{n}(V_{2.2n} - V)(t) \xrightarrow{d} A * M * M * (B^0 \circ F)(t)$ dır. Burada $A = 4M + I + C \cdot I$ dır.

Bu sonuca bağlı olarak V varyans fonksiyonu için $V_{2.2n}$ tahmin edicisine dayalı olarak bir güven aralığı oluşturulabilir. Bunun için öncelikle $A * M * M * (B^0 \circ F)(t)$'nin varyans fonksiyonunun elde edilmesi gereklidir.

$$A * M * M * (B^{o} \circ F) = \int_0^t A * M * M(t-x)d[(B^{o} \circ F)(x)]$$

olmak üzere $y = F(x)$ değişken dönüştürmesi yapılması ile

$$A * M * M * (W \circ F) = \int_0^{F(t)} A * M * M\big(t - F^{-1}(y)\big)dB^{o}(y)$$

elde edilir. Buradan da Lemma 5.2.2 gereği

$$\int_0^{F(t)} A * M * M\big(t - F^{-1}(y)\big)dB^{o}(y) \sim N\big(0, \zeta^2(t)\big)$$

olmak üzere

$$\zeta^2(t) = [A * M * M]^2 * F(t) - [A * M * M * F(t)]^2$$

olarak elde edilir. Eğer $\zeta^2(t)$ nin her sabit t değeri için tutarlı bir tahmin edicisi elde edilebilir ise V varyans fonksiyonu için $V_{2.2n}$ tahmin edicisine dayalı bir güven aralığı Slutsky teoremi yardımı ile elde edilebilir.

Teorem 5.2.7 $\zeta^2(t)$ için bir tahmin edici $A_n = 4M_{2.2n} + I + 2M_{2.2n} \cdot I$ olmak üzere

$$\zeta_n^2(t) = [A_n * M_{2.2n} * M_{2.2n}]^2 * F_n(t) - [A_n * M_{2.2n} * M_{2.2n} * F_n(t)]^2$$

olsun. Bu durumda her sabit t değeri için $\zeta_n^2(t)$, $\zeta^2(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicidir.

İspat. $x \in [0, t]$ için $A_n(x)$ 1 olasılıkla $A(x)$'e düzgün yakınsar. Bu durumda Lemma 5.2.3 gereği $A_n * M_{2.2n} * M_{2.2n}(x)$ de $A * M * M(x)$'e 1 olasılıkla yakınsar. F sürekli olduğundan $A_n * M_{2.2n} * M_{2.2n} * F_n(x)$ de 1 olasılıkla $A * M * M * F(x)$'e yakınsar. Benzer şekilde $[A_n * M_{2.2n} * M_{2.2n}]^2 * F_n(x)$ de 1 olasılıkla $[A * M * M]^2 * F(x)$'e yakınsar ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2.3 Her sabit $t \geq 0$ için $n \to \infty$ iken

$$\frac{\sqrt{n}}{\zeta_n^2(t)}[V_{2.2n}(t) - V(t)] \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.27}$$

dır.

5.2.1.3 Frees'in tahmin edicisi

M yenileme ve V varyans fonksiyonları için Kısım 3.1'de verilen

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t), t \geq 0$$

$$V(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} nF^{n*}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)\right), t \geq 0$$

ifadeleri göz önüne alınsın. Kabul edilsin ki F dağılımı bilinmesin. Bu durumda M ve V fonksiyonları için parametrik olmayan birer tahmin edici, $F^{k*}(t)$'nin yerine parametrik olmayan bir tahmin edicisinin alınması ile elde edilebilir. Buradan hareketle Frees (1986b) M yenileme fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahmin edici önermiştir. Aydoğdu (1997) ise benzer düşünce ile V varyans fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahmin edici önermiş ve bu tahmin edicinin bazı istatistiksel özelliklerini incelemiştir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$, F dağılımından n birimlik bir örneklem ve I gösterge fonksiyonu olsun. Yani, herhangi bir A olayı gerçekleşir ise $I(A) = 1$, aksi durumda $I(A) = 0$ olsun. Bu durumda $F(t)$ için parametrik olmayan yansız bir tahmin edici $I(X_1 \leq t)$ dır. Ancak $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq t)$ tahmin edicisi de $F(t)$ için yansız olup, $I(X_1 \leq t)$ tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahiptir. Benzer şekilde $F^{2*}(t)$ için $I(X_1 + X_2 \leq t)$ ve $\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1 \leq i < j \leq n} I(X_i + X_j \leq t)$ tahmin edicileri yansız olup $\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1 \leq i < j \leq n} I(X_i + X_j \leq t)$ tahmin edicisi daha düşük varyansa sahiptir. Böylelikle, $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, $(1,2, \dots, n)$

kümesinin k elemanlı bir alt kümesi ve Σ_c, $(i_1, i_2, \dots, i_k)$'nın tüm farklı kombinasyonları üzerinden toplam olmak üzere $F^{k*}(t)$ için yansız bir tahmin edici

$$\breve{F}_n^{k*}(t) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum\nolimits_c I(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik} \leq t) \tag{5.28}$$

dır. Böylelikle, $s = s(n)$, $s \leq n$ ve $n \to \infty$ iken $s \to \infty$ olacak şekilde n'ye bağlı bir tamsayı olmak üzere M yenileme fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahmin edici

$$M_{2.3n}(t) = \sum_{k=1}^{s} \breve{F}_n^{k*}(t) \tag{5.29}$$

olarak tanımlanır (Frees 1986b). Burada s sayısına tasarım parametresi denir. Benzer düşünce ile, $s_1 = s_1(n)$, $s_1 \leq n$ ve $n \to \infty$ iken $s_1 \to \infty$ olacak şekilde n'ye bağlı bir tamsayı olmak üzere V varyans fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahmin edici Aydoğdu (1997) tarafından

$$V_{2.3n}(t) = 2\sum_{k=1}^{s_1} k\breve{F}_n^{k*}(t) - \sum_{k=1}^{s} \breve{F}_n^{k*}(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{s} \breve{F}_n^{k*}(t)\right) \tag{5.30}$$

olarak önerilmiştir. $K_{2.3n}(t) = \sum_{k=1}^{s_1} k\breve{F}_n^{k*}(t)$ alınmak üzere $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisi

$$V_{2.3n}(t) = 2K_{2.3n}(t) - M_{2.3n}(t)\big(1 + M_{2.3n}(t)\big) \tag{5.31}$$

olarak da ifade edilebilir. Şimdi bu tahmin edicilerin bazı özellikleri hatırlatılsın.

$F^{k*}(t)$ k'ya göre azalandır. Ancak $\breve{F}_n^{k*}(t)$'nin k'ya göre azalan olup olduğu incelenmelidir. Bunun için $\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq t)$ ve $\sum_{1\leq i<j\leq n} I(X_i + X_j \leq t)$ ifadeleri göz önüne alınsın. Herhangi $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $I(X_i \leq t) \geq I(X_i + X_j \leq t)$ olmasının göz önüne alınması ile $\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq t) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} I(X_i + X_j \leq t)$ elde edilir. Gerekli düzenlemelerin yapılması ile $(n-1)n\breve{F}_n(t) \geq 2\binom{n}{2}\breve{F}_n^{2*}(t)$ elde edilir. Buradan gösterilebilir ki her $k \leq n$ için

$$\big(n - (k-1)\big)\binom{n}{k-1}\breve{F}_n^{(k-1)*}(t) \geq k\binom{n}{k}\breve{F}_n^{k*}(t)$$

dır(Aydoğdu 1997). Böylelikle $\left(n-(k-1)\right)\binom{n}{k-1}=\left(k\binom{n}{k}\right)$ olduğundan her $k \leq n$ için $\breve{F}_n^{(k-1)*}(t) \geq \breve{F}_n^{k*}(t)$ elde edilir. Yani $\breve{F}_n^{k*}(t)$, k'ya göre azalandır. Bu durum $\breve{F}_n^{k*}(t)$'nin k'nın artması ile $M_{2.3n}(t)$ ve $V_{2.3n}(t)$'ye olan katkısının azalacağını gösterir.

$M_{2.3n}(t)$ ve $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicileri için s ve s_1 tasarım parametrelerinin seçimi önemlidir. Çünkü bu parametrelerin seçimi hem tahmin edicilerin hesabı için gerek duyulan işlem sayısını hem de tahmin edicilerin tutarlılık özelliklerini etkilemektedir. Frees (1986b)'in tanımlamış olduğu $\breve{F}_n^{k*}(t)$ tahmin edicisi bir U-istatistiğidir. Bu yüzden $\breve{F}_n^{k*}(t)$ tahmin edicisi her $k \geq 1$ ve her $t \geq 0$ için $F^{k*}(t)$'nin düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicisidir. Ayrıca bu tahmin edici her $k \geq 1$ ve her $t \geq 0$ için $F^{k*}(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir, yani;

$$\breve{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F^{k*}(t) \tag{5.32}$$

dır. Fakat $M_{2.3n}(t)$ ve $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicileri $\breve{F}_n^{k*}(t)$'ye dayalı olmalarına rağmen birer U-istatistiği değildirler. Bu yüzden bu tahmin edicilerin tutarlılık, asimptotik yansızlık gibi bazı asimptotik özelliklerinin gösterilmesi için daha fazla çaba sarfedilmelidir. Bazı şartlar altında Frees (1986b) $M_{2.3n}(t)$'nin, Aydoğdu (1997) ise $V_{2.3n}(t)$'nin bazı asimptotik özelliklerini elde etmişlerdir. Şimdi bu özellikler hatırlatılsın.

Kabul edilsin ki $a \in \mathbb{R}$ ve $g_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty |g_a(x)| d\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^a F^{k*}(x)\right) < \infty \tag{5.33}$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $k \geq 1$ için $s^{-1}(k) = \inf\{n: s(n) \geq k\}$ olmak üzere

$$\int_0^\infty |g_a(x)| d\left(\sum_{k=1}^{\infty} (s^{-1}(k)-k) k^a F^{k*}(x)\right) < \infty \tag{5.34}$$

olsun.

Teorem 5.2.7 (5.33) şartı gerçekleştiğinde

$$\int_0^\infty |g_a(x)|d\left(\sum_{k=1}^{s} k^a F^{k*}(x)\right) \xrightarrow{P} \int_0^\infty |g_a(x)|d\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^a F^{k*}(x)\right) \tag{5.35}$$

dır. Ayrıca (5.34) şartı da gerçekleşirse yukarıdaki yakınsama hemen hemen her yerde yakınsama olur (Frees 1986b).

Sonuç 5.2.3 Eğer $a = 0$, $s = n$ ve $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\int_0^\infty |g(x)|d\big(M(x)\big) < \infty$ olacak şekilde bir fonksiyon ise

$$\int_0^\infty g(x)d\big(M_{2.3n}(x)\big) \xrightarrow{\text{hhhy}} \int_0^\infty g(x)d\big(M(x)\big) \tag{5.36}$$

dır.

$g(x) = I(x \le t)$ seçimi ile $\int_0^\infty g(x)d\big(M_{2.3n}(x)\big) = M_{2.3n}(t)$ ve $\int_0^\infty g(x)d\big(M(x)\big) = M(t) < \infty$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \tag{5.37}$$

elde edilir. Yani $s = n$ iken $M_{2.3n}(t)$ tahmin edicisi her sabit t değeri için $M(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir. Benzer şekilde $s < n$ iken $a = 0$ ve $g(x) = I(x \le t)$ seçimi ile $\int_0^\infty |g_a(x)|d(\sum_{k=1}^\infty k^a F^{k*}(x)) = M(x) < \infty$ olduğundan Teorem 5.2.7 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t) \xrightarrow{P} \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \tag{5.38}$$

elde edilir. Bu da $s < n$ iken $M_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin $M(t)$ için zayıf tutarlı bir tahmin edici olduğu anlamına gelir. Ancak Frees (1986b) göstermiştir ki F dağılımının varyansı sonlu olmak üzere $r > 2$ için $n = O(s^{r-2})$ ya da $\log n = o(s)$ ise $M_{2.3n}(t)$ güçlü tutarlı olmaktadır. Bu sonuç s tasarım parametresinin seçimi için önemli bir bilgi sağlamaktadır. Büyük n değerleri için $s = n$ alındığında $M_{2.3n}(t)$'nin hesabı için yapılacak işlem sayısı çok fazla olacaktır. Yani tahmin edicinin hesabı zorlaşacaktır. Bu yüzden s'nin seçiminde $M_{2.3n}(t)$'nin güçlü tutarlı olabilmesi için verilen $n = O(s^{r-2}), r > 2$ ya da $\log n = o(s)$ yeter şartlarından yararlanılabilir.

$E\big(M_{2.3n}(t)\big) = \sum_{k=1}^{s} E\left(\breve{F}_n^{k*}(t)\right) = \sum_{k=1}^{s} F^{k*}(t) \neq M(t)$ olduğundan $M_{2.3n}(t)$ tahmin edicisi $M(t)$ için yansız değildir. Ancak $\lim\limits_{n\to\infty} E\big(M_{2.3n}(t)\big) = \lim\limits_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{s} \breve{F}_n^{k*}(t) = M(t)$ olduğundan $M_{2.3n}(t)$, $M(t)$ için asimptotik yalnızdır. Burada dikkat edilmelidir ki $n = 1,2, \ldots$ için $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ ve $t_0 \geq S_n$ olmak üzere her $t > t_0$ değeri için $M_{3n}(t) = s$ olacaktır. Bu durum $M_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin t'nin büyük değerleri için performansının zayıf olacağına işaret eder.

Şimdi de $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin özellikleri ele alınsın. $M_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin $M(t)$ için tutarlı olduğu bilinmektedir. Böylelikle, $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin tutarlılığı için, (3.22) ifadesinin göz önüne alınması ile, $K_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t)$ için tutarlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Teorem 5.2.8 Her $t \geq 0$ için

(i) $s_1 = n$ olmak üzere $K_{2.3n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} K(t)$

(ii) $s_1 < n$ olmak üzere $K_{2.3n}(t) \xrightarrow{P} K(t)$

dır (Aydoğdu 1997).

İspat. Teorem 5.2.7 de $a = 1$ ve $g(x) = I(x \leq t)$ alınsın. Bu durumda

$$\int_0^\infty |g_a(x)| d\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^a F^{k*}(x)\right) = K(t)$$

ve $K(t) < \infty$ olduğundan (5.33) şartı sağlanır. Ayrıca

$$\int_0^\infty g_a(x) d\left(\sum_{k=1}^{s_1} k^a F^{k*}(x)\right) = K_{3n}(t)$$

olmak üzere Teorem 5.2.7 gereği

$$K_{2.3n}(t) \xrightarrow{P} K(t)$$

dır. Yine Teorem 5.2.7'de $s_1 = n,\ a = 1$ ve $g(x) = I(x \leq t)$ alınsın. Bu durumda $s_1^{-1}(n) = n$ olduğundan (5.34) şartı düşer ve böylece

$$K_{2.3n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} K(t) \qquad (5.39)$$

dır. Böylelikle $V_{2.3n}(t)$'nin tutarlılığı için, (3.22) ifadesinin göz önüne alınması ile aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 5.2.4 Her sabit $t \geq 0$ için

(i) $s = s_1 = n$ olmak üzere $V_{2.3n}(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} V(t)$ (5.40)

(ii) $s, s_1 < n$ olmak üzere $V_{2.3n}(t) \xrightarrow{P} V(t)$ (5.41)

dır (Aydoğdu 1997).

Şimdi de $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin yansızlığı incelensin. $E\big(V_{2.3n}(t)\big) = 2E\big(K_{2.3n}(t)\big) - E\big(M_{2.3n}(t)\big) - E([M_{2.3n}(t)]^2)$ dır. $M_{2.3n}(t)$'nin $M(t)$ için yanlı olduğunun göz önüne alınması ile $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisi $V(t)$ için genelde yansız değildir. Ancak Aydoğdu 1997 $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin bazı şartlar altında asimptotik yansız olduğunu göstermiştir. Bu durum aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2.9 F dağılımı sonlu varyansa sahip olsun. Bu durumda $r > 2$ için eğer $n = O(s^{2r-4})$ ya da $\log n = o(s)$ ise

$$\lim_{n\to\infty} E\big(V_{2.3n}(t)\big) = V(t) \tag{5.42}$$

dır (Aydoğdu 1997).

İspat. $\mathrm{Cov}\Big(\breve{F}_n^{k*}(t), \breve{F}_n^{r*}(t)\Big) = \frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{i=1}^{k}\binom{r}{i}\binom{n-r}{k-i}\gamma_{kr}(i)$ ve F sonlu varyansa sahip olmak üzere $r > 2$ için $n = O(s^{2r-4})$ ya da $\log n = o(s)$ iken

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k,r=1}^{s} kr\gamma_{kr}(1) < \infty \tag{5.43}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k,r=1}^{s}\left\{\frac{n}{\binom{n}{k}}\sum_{i=1}^{k}\binom{r}{i}\binom{n-r}{k-i}\gamma_{kr}(i) - kr\gamma_{kr}(1)\right\} = 0 \tag{5.44}$$

olduğu bilinmektedir (Frees 1986b). Burada

$$\gamma_{kr}(i) = \mathrm{Cov}\left(F^{(k-i)*}\big(t-(X_1+\cdots+X_i)\big), F^{(r-i)*}\big(t-(X_1+\cdots+X_i)\big)\right)$$

dır. $E\big(V_{2.3n}(t)\big) = 2E\big(K_{2.3n}(t)\big) - E\big(M_{2.3n}(t)\big) - E([M_{2.3n}(t)]^2)$ olduğundan $E\big(V_{2.3n}(t)\big) = 2E\big(K_{2.3n}(t)\big) - E\big(M_{2.3n}(t)\big) - E\big(M_{2.3n}(t)\big)^2 - \mathrm{Var}\big(M_{2.3n}(t)\big)$ yazılabilir. Burada

$$\mathrm{Var}\big(M_{2.3n}(t)\big) = \sum_{k,r=1}^{s}\mathrm{Cov}\left(\breve{F}_n^{k*}(t), \breve{F}_n^{r*}(t)\right) = \sum_{k,r=1}^{s}\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{i=1}^{k}\binom{r}{i}\binom{n-r}{k-i}\gamma_{kr}(i)$$

olmak üzere $a_n = \sum_{k,r=1}^{s}\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{i=1}^{k}\binom{r}{i}\binom{n-r}{k-i}\gamma_{kr}(i)$ ve $b_n = \sum_{k,r=1}^{s} kr\gamma_{kr}(1)$ yazılsın. Bu durumda (5.43) ve (5.44)'ten $\lim_{n\to\infty} b_n < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} na_n - b_n = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ elde edilir, yani; $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\big(M_{2.3n}(t)\big) = 0$ dır. $\lim_{n\to\infty} E\big(K_{2.3n}(t)\big) = K(t)$ ve $\lim_{n\to\infty} E\big(M_{2.3n}(t)\big) = M(t)$ olmasının göz önüne alınması ile

$$\lim_{n\to\infty} E\big(V_{2.3n}(t)\big) = 2K(t) - M(t)\big(1 + M(t)\big) = V(t)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

$V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinin hesabında s ve s_1 parametrelerinin seçimi önem arzetmektedir. $M_{2.3n}(t)$ tahmin edicisinde olduğu gibi $V_{2.3n}(t)$ tahmin edicisi için de $s < n$ ve $s_1 < n$ seçimleri tahmin edici güçlü tutarlı olacak şekilde gerçekleştirilebilir.

5.2.2 Sansürlü örneklem

Bu kısımda olaylar arası geçen zaman dağılımı F olan bir yenileme sürecine ilişkin gözlemler sansürlü olarak elde edildiğinde M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmini üzerinde durulur. Bunun için şu yöntem izlenir. Öncelikle F'nin sansürlü gözlem durumunda parametrik olmayan tahmini ele alınır ve buna dayalı olarak M ve V fonksiyonları için parametrik olmayan tahmin ediciler oluşturulur ve bu tahmin edicilerin özellikleri incelenir. Tip I sansürleme rasgele sansürlemenin, tip II sansürleme de ilerleyen tür tip II sansürlemenin özel halleri olduğu için ayrıca ele alınmayacaklardır.

5.2.2.1 Rasgele sansürleme

Bilindiği üzere biçimsel olarak bilinmeyen bir F dağılımı için gözlemeler rasgele sansürlü olarak elde edildiğinde F'nin tahmini için kullanılan parametrik olmayan tahmin edicilerden birisi Kaplan ve Meier (1958) tarafından önerilen çarpım limit tahmin edicisidir. Bu tahmin edici Kaplan-Meier (KM) tahmin edicisi olarak da adlandırılır. KM tahmin edicisi F için parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi olduğundan dolayı tutarlılık, asimptotik normallik gibi bazı arzu edilen özelliklere sahiptir. Bu sebeple M ve V fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmininde KM tahmin edicisini kullanmak yararlı olabilir.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sürekli bir F dağılımına sahip pozitif değerli rasgele değişkenler olmak üzere $T_1, T_2, \dots, T_n$ sansürleme değişkenleri F'den bağımsız bir G dağılımına sahip olsunlar. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için $X_i = \min\{Y_i, T_i\}$ olmak üzere bir rasgele sansürlü örneklem $(X_1, \delta_1), (X_2, \delta_2), \dots, (X_n, \delta_n)$ olarak elde edilir. Burada δ_i, i. gözlemin sansürlü olup olmadığını göstermek üzere eğer gözlem sansürlü ise 0, sansürsüz ise 1 değerini alır. Şimdi, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, $X_1, \dots, X_n$ örnekleminin sıra istatistikleri olmak üzere $\delta_{(i)}$, $X_{(i)}$'ye karşılık gelen değer olsun. Yani $X_{(i)} = X_j$ için $\delta_{(i)} = \delta_j$ olur. Ayrıca X rasgele değişkenlerinin dağılımı H olmak üzere $\tau = \sup\{t: H(t) < 1\}$ olsun. Açıktır ki $1 - H = (1 - F)(1 - G)$ dır. Kabul edilsin ki F dağılımı biçimsel olarak bilinmesin. Bu durumda F'nin $i = 1, \dots, n$ için (X_i, δ_i) örneklemine dayalı parametrik olmayan bir tahmin edicisi Kaplan ve Meier (1958) tarafından

$$\breve{F}_n(t) = 1 - \prod_{i: X_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{1}{n - i + 1}\right)^{\delta_{(i)}} \tag{5.45}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada eğer her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\delta_{(i)} = 1$ ise, yani tüm gözlemler sansürsüz olarak elde edildi ise $\breve{F}_n(t)$ KM tahmin edicisi örneklem dağılım fonksiyonuna karşılık gelir, yani $\breve{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq t)$ olur. Bu yüzden KM tahmin edicisi örneklem dağılım fonksiyonunun genellemesi olarak ele alınır. Literatürde KM tahmin edicisi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Şimdi KM tahmin edicisinin bazı önemli özellikleri ispatsız olarak verilsin.

Teorem 5.2.10 φ Borel ölçülebilir bir fonksiyon, $\int |\varphi| dF < \infty$ ve A, H'nin sıçrama noktalarının kümesi olmak üzere F ve G dağılım fonksiyonları ortak sıçrama noktasına sahip olmasın. Bu durumda, 1 olasılıkla

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi(x) d\breve{F}_n(x) = \int_{\{x < \tau\}} \varphi(x) dF(x) + I(\tau \in A) \varphi(\tau) F\{\tau\} \tag{5.46}$$

dır. Burada $F\{\tau\} = F(\tau) - F(\tau^-)$ olup, eğer $\tau = \infty$ ise yukarıdaki ifadenin sağındaki ikinci terim sıfır olur (Stute ve Wang 1993).

Sonuç 5.2.5 F ve G, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli dağılım fonksiyonları olmak üzere 1 olasılıkla

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\breve{F}_n(x) = \int_0^\infty \varphi(x) dF(x) \tag{5.47}$$

dır.

Açıktır ki $\varphi(t) = I([0,t])$ olarak seçilirse $\breve{F}_n(t) \xrightarrow{\text{hhhy}} F(t)$ olur. Yani KM tahmin edicisi F için güçlü tutarlı bir tahmin edicidir. Ayrıca buradaki yakınsama düzgündür, yani;

$$\sup_{t<\tau}\left|\breve{F}_n(t) - F(t)\right| \xrightarrow{\text{hhhy}} 0 \tag{5.48}$$

dır.

Teorem 5.2.11 $\breve{F}_n$, F dağılımından rasgele sansürlü bir örnekleme dayalı KM tahmin edicisi olmak üzere $\left\{\sqrt{n}\left(\breve{F}_n(t) - F(t)\right), t < \tau\right\}$ süreci sıfır ortalamalı $\{[1 - F(t)](B \circ U)(t),\ t < \tau\}$ Gauss sürecine zayıf yakınsar. Burada $\{B(t), t \geq 0\}$ Brown hareketi ve "$\circ$" bileşke fonksiyon belirtmek üzere $U(t) = \int_0^t [1 - F(x)]^{-1}[1 - H(x)]^{-1} dF(x)$ dır (Breslow ve Crowley 1974).

5.2.2.1.1 Büyük t değerleri için bir tahmin edici

M ve V fonksiyonlarının (3.27) ve (3.29)'da verilen asimptotik ifadeleri göz önüne alınsın. Bu durumda t'nin yeterince büyük değerleri için

$$M_{3.1n}(t) = \frac{t}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{\mu}_2 - 2\hat{\mu}^2}{2\hat{\mu}^2}, \tag{5.49}$$

$$V_{3.1n}(t) = \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}^2}{\hat{\mu}^3} t + \frac{5\hat{\mu}_2^2}{4\mu^4} - \frac{2\hat{\mu}_3}{3\hat{\mu}^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\hat{\mu}^2}, \tag{5.50}$$

ifadeleri M ve V fonksiyonları için doğal birer tahmin edici olarak önerilebilir. Burada $\hat{\mu}$ ve $\hat{\mu}_2$

$$\hat{\mu} = \int x d\breve{F}_n(x), \qquad \hat{\mu}_2 = \int x^2 d\breve{F}_n(x)$$

olarak tanımlanır. Eğer tüm gözlemler sansürsüz ise $\breve{F}_n$ örneklem dağılım fonksiyonuna karşılık gelmek üzere $M_{3.1n}$, $M_{2.1n}$'e, $V_{3.1n}$ ise $V_{2.1n}$'e karşılık gelir. Yani $M_{3.1n}$ ve $V_{3.1n}$ sırası ile $M_{2.1n}$ ve $V_{2.1n}$ tahmin edicilerinin genellemeleridir. Sonuç 5.2.5 gereği $\hat{\mu}$ ve $\hat{\mu}_2$ sırası ile F dağılımının birinci ve ikinci momentleri için güçlü tutarlı tahmin edicilerdir. Ancak genelde $M(t) \neq (t/\mu) + (\mu_2 - 2\mu^2)/2\mu^2$ ve $V(t) \neq ((\mu_2 - \mu^2)/\mu^3)t + (5\mu_2^2/(4\mu^4)) - (2\mu_3/(3\mu^3)) - (\mu_2/(2\mu^2))$ olduğundan $M_{3.1n}$ ve $V_{3.1n}$ tahmin edicileri sırasıyla M ve V için tutarlı birer tahmin edici olmayacaktır. Ayrıca bu tahmin ediciler genelde ne yansız ne de asimptotik yansızdırlar. Bununla birlikte, t'nin ve n örneklem çapının büyümesi ile bu tahmin edicilerin performansının iyileşmesi beklenir. Burada tahmin ediciler üzerinde diğer bir etken ise gözlemler içindeki sansürlü gözlem oranıdır. Sansürlü gözlem oranının tahmin ediciler üzerindeki etkisini analitik olarak incelemek mümkün olmadığından, sayısal hesaplamalar üzerinden çıkarım yapmak gerekir.

5.2.2.1.2 Sansürlü örneklem yenileme ve varyans fonksiyonu

M yenileme ve V varyans fonksiyonları için (3.6) ve (3.22) ifadeleri göz önüne alınsın. $F^{k*}(t)$ için parametrik olmayan bir tahmin edici elde edilebilir ise bu tahmin ediciye dayalı olarak (3.6) ve (3.22) ifadelerinde $F^{k*}(t)$ yerine onun için elde edilen tahmin edicinin koyulması ile M ve V fonksiyonları için parametrik olmayan birer tahmin edici elde edilebilir. Bunun için $\breve{F}_n$ KM tahmin edicisi göz önüne alınsın. Bu durumda F^{k*} için parametrik olmayan bir tahmin edici ardışık olarak

$$\breve{F}_n^{k*}(t) = \int_0^t \breve{F}_n^{(k-1)*}(t-x)d\breve{F}_n(x)\,, k = 2,3,\ldots \tag{5.51}$$

ifadesi ile tanımlanabilir. M ve V fonksiyonlarının (3.6) ve (3.22) konvolüsyon serisi ifadelerinde $F^{k*}(t)$ yerine $\breve{F}_n^{k*}(t)$ alınması ile bu fonksiyonların her sabit t değeri için parametrik olmayan birer tahmin edici

$$M_{3.2n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t)\,, t \geq 0 \tag{5.52}$$

$$V_{3.2n}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\breve{F}_n^{k*}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t)\right), t \geq 0 \tag{5.53}$$

ile verilir. Eğer gözlem kümesi hiçbir sansürlü gözlem içermiyor, yani tüm gözlemler tam olarak elde edildi ise $\breve{F}_n$, F_n örneklem dağılım fonksiyonuna karşılık gelir ve böylece de $M_{3.2n}$ ve $V_{3.2n}$ tahmin edicileri sırası ile $M_{2.2n}$ ve $V_{2.2n}$ tahmin edicilerine karşılık gelir. Yani $M_{3.2n}$ ve $V_{3.2n}$ tahmin edicileri $M_{2.2n}$ ve $V_{2.2n}$ tahmin edicilerinin genellemeleridir. $\breve{F}_n$ KM tahmin edicisi F_n gibi F için güçlü tutarlı bir tahmin edici olduğundan $M_{3.2n}$ ve $V_{3.2n}$ tahmin edicilerinin de güçlü tutarlı olması beklenir. Harel vd. (1995)'nin kullanmış olduğu araçlar yardımı ile $\{\sqrt{n}(M_{3.2n} - M)(t), 0 \leq t < \infty\}$ sürecinin yakınsama davranışı incelenebilir. Böylelikle de benzer şekilde $\{\sqrt{n}(V_{3.2n} - V)(t), 0 \leq t < \infty\}$ sürecinin yakınsadığı süreç elde edilebilir. Bunun için öncelikle Lemma 5.2.1 kullanılarak $\sqrt{n}(M_{3.2n} - M)$ doğrusallaştırılır. Sonrasında ise ortaya çıkan iki terimin süreç bazında ayrı ayrı incelenmesi gerekir. İlk terimin süreç olarak yakınsama davranışı Teorem 5.2.4 ile kolaylıkla gösterilebilir. Ancak ikinci terimin süreç olarak yakınsama davranışı Harel vd. (1995)'nde verilen analiz ile doğrudan elde edilemeyebilir. Bunun için kapsamlı bir analiz gerekir. M ve V fonksiyonlarına ilişkin güven aralığı oluşturabilmek için $\sqrt{n}(M_{3.2n} - M)(t)$'nin ve $\sqrt{n}(V_{3.2n} - V)(t)$'nin noktasal olarak limit dağılımının bulunması yeterli olacaktır. Bu sebeple Baxter ve Li (1995) bu durum için gerekli çıkarımları noktasal olarak elde etmiştir. Şimdi Baxter ve Li (1995) çalışmasında bulunan sonuçlar hatırlatılsın.

Teorem 5.2.12 Her sabit $t < \tau$ için $M_{3.2n}(t)$ tahmin edicisi $M(t)$'ye 1 olasılıkla düzgün yakınsar (Baxter ve Li 1995).

İspat. Lemma 5.2.3 yardımı ile kolaylıkla gösterilir ki her $k \geq 1$ ve $t < \tau$ için $\breve{F}_n^{k*}(t)$ $F^{k*}(t)$'ye 1 olasılıkla düzgün yakınsar. A, $t < \tau$ için $\breve{F}_n^{k*}(t)$'nin $F^{k*}(t)$'ye yakınsadığı noktaların kümesi olmak üzere $P(A) = 1$ dir. $F(0) < 1$ ve F bir dağılım fonksiyonu olduğundan $F(a) < 1$ olacak şekilde en az bir $a > 0$ vardır. $t \leq ra$ olacak biçimde bir $r \in \mathbb{N}$ sayısı göz önüne alınsın. $(X_1 > t/r, \ldots, X_r > t/r)$ olayı $(S_r > t)$ olayını gerektirdiğinden $P(S_r \leq t) \leq 1 - [1 - F(t/r)]^r$ elde edilir. Böylelikle $F(a) < 1$

olmak üzere $t/r \leq a$ olduğundan $F(t/r) < 1$ dir. Bu durumda $t \geq 0$ için $F^{r*}(t) < 1$ olacak şekilde en az bir $r \geq 1$ vardır. $\breve{F}_n^{k*}(t)$, $F^{k*}(t)$'ye A üzerinde 1 olasılıkla düzgün yakınsak olduğundan $F^{r*}(t) < 1$ şartını sağlayan r için $\delta = 1 - F^{r*}(t)$ olmak üzere her sabit $w \in A$ için bir $n_0(w)$ vardır, öyle ki her $n \geq n_0(w)$ için $\breve{F}_n^{r*}(t) < 1 - \delta/2$ dir. Şimdi

$$g\big(n, n_0(w)\big) = \begin{cases} 1 - \delta/2, & n \geq n_0(w) \\ 1, & n < n_0(w) \end{cases}$$

yazılsın. Bu durumda $k \geq r$ için $\breve{F}_n^{k*}(t) \leq \breve{F}_n^{(k-r)*}(t) * \breve{F}_n^{r*}(t) \leq \left[\breve{F}_n^{r*}(t)\right]^{[|k/r|]}$ olmasının göz önüne alınması ile $\breve{F}_n^{k*}(t) \leq [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]}$ elde edilir. Böylelikle her $n \geq n_0(w)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{r} \breve{F}_n^{k*}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{r} \left[\breve{F}_n^{r*}(t)\right]^{[|k/r|]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]} < \infty$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden her $w \in A$ için

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \breve{F}_n^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)$$

dır. $P(A) = 1$ olduğundan her sabit $t < \tau$ için $M_{3.2n}(t)$, $M(t)$'ye 1 olasılıkla düzgün yakınsar ve ispat tamamlanır.

Şimdi (5.19) ifadesi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\sqrt{n}(M_{3.2n} - M)(t) = \sqrt{n}\big(\breve{F}_n - F\big) * M^{2*}(t) + \sqrt{n}\big(\breve{F}_n - F\big)^{2*} * M_{3.2n} * M^{2*}(t)$$

elde edilir. Böylelikle ilk terim ve ikinci terimler için Teorem 5.2.4'ün göz önüne alınması ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.6 $\left\{\sqrt{n}\left(\breve{F}_n - F\right) * M * M(t), t < \tau\right\}$ süreci $n \to \infty$ iken Skorokhod topolojisi üzerinde $\{[1 - F(t)](B \circ U) * M * M(t),\ t < \tau\}$ sürecine zayıf yakınsar (Baxter ve Li 1995).

Sonuç 5.2.7 Her sabit $t < \tau$ için $\sqrt{n}\left(\breve{F}_n - F\right)^{2*} * M_{3.2n} * M^{2*}(t)$ 1 olasılıkla sıfıra düzgün yakınsar.

Bu sonuçların göz önüne alınması ile her sabit t değeri için $\sqrt{n}(M_{3.2n} - M)(t)$'nin asimptotik dağılımı elde edilir. Bu sonuç aşağıda verilir.

Sonuç 5.2.8 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}(M_{3.2n} - M)(t) \xrightarrow{d} [1 - F(t)](B \circ U) * M * M(t) \tag{5.54}$$

dır (Baxter ve Li 1995).

Burada limit dağılımın varyansı aşağıdaki gibi elde edilir. Bilindiği üzere sürekli ve reel değerli bir f fonksiyonu ve $\{B(t), t \geq 0\}$ Brown hareketi için

$$E\left[\int_0^t f(x)dB(x)\right] = 0$$

$$E\left[\left(\int_0^t f(x)dB(x)\right)^2\right] = \int_0^t [f(x)]^2 dx$$

dır (Fleming ve Harrington 1990). $B(0) = 0$ olmak üzere $R(x) = M * M(x)$ ve $\pi(t,x) = \int_0^x [1 - F(t-y)]dR(y)$ yazılsın. Bu durumda $t < \tau$ için,

$$\begin{aligned}[1 - F(t)](B \circ U) * M * M(t) &= \int_0^t [(B \circ U)(t-x)][1 - F(t-x)]dR(x) \\ &= \int_0^t [(B \circ U)(t-x)]d_x\pi(t,x)\end{aligned}$$

$$= \int_0^t \pi(t,x)d[(B \circ U)(x)]$$

$$= \int_0^{U(t)} \pi\big(t, t - U^{-1}(y)\big)dB(y)$$

$$\sim N\big(0, \vartheta^2(t)\big)$$

elde edilir. Burada

$$\vartheta^2(t) = \int_0^{U(t)} \big[\pi\big(t, t - U^{-1}(y)\big)\big]^2 dy$$

$$= \int_0^t [\pi(t, t - x)]^2 dU(x)$$

$$= \int_0^t \left[M * M(t - x) - \int_0^{t-x} F(t - y)dR(y) \right]^2 dU(x)$$

dır (Baxter ve Li 1995).

Baxter ve Li (1995) $\vartheta^2(t)$'nin her sabit t değeri için zayıf tutarlı bir tahmin edicisini elde etmiş ve buna bağlı olarak M yenileme fonksiyonu için $M_{3.2n}$ tahmin edicisine dayalı bir güven aralığı elde etmişlerdir. Bunun için gerekli işlemler, lemmalar ve ilgili teorem ispatsız olarak aşağıda verilir. Öncelikle $\pi(t,x)$ için uygun bir tahmin edici, $\pi(t,x)$'deki M ve F fonksiyonlarının yerine sırası ile bunların tahmin edicileri olan $M_{3.2n}$ ve $\breve{F}_n$ alınması ile $\pi_n(t,x)$ olarak tanımlansın.

Lemma 5.2.4 Her sabit $t < \tau$ ve $x \in [0,t]$ için, $n \to \infty$ iken $\pi_n(t,x)$ 1 olasılıkla $\pi(t,x)$'e düzgün yakınsar (Baxter ve Li 1995).

$\vartheta^2(t)$'nin tutarlı bir tahmin edicisi için $U(t)$'nin de tutarlı bir tahmin edicisine ihtiyaç duyulur. #, bir kümenin eleman sayısını belirtmek üzere $D_1(t) = \#\{i: X_i \leq t, \delta_i = 1\}$, $D_2(t) = \#\{i: X_i > t\}$ ve

$$I_D(t) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } X_i = t \text{ ve } \delta_i = 1 \text{ olacak şekilde bir } i \text{ var ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bilindiği üzere $\mathrm{Var}[B \circ U(t)] = U(t)$ olup

$$U_n(t) = \int_0^t \frac{dD_1(x)}{D_2(x)[D_2(x) - I_D(x)]}$$

ile tanımlanan $U_n(t)$ tahmin edicisi $b_0 < \tau$ olmak üzere $t \in [0, b_0]$ için $U(t)$'ye olasılıkta yakınsar (Baxter ve Li 1995). Böylelikle $\vartheta^2(t)$ için bir tahmin edici olarak

$$\vartheta_n^2(t) = \int_0^t [\pi_n(t, t - x)]^2 dU_n(x)$$

ifadesi önerilebilir. $\vartheta_n^2(t)$'nin $\vartheta^2(t)$ için zayıf tutarlı bir tahmin edici olduğunu gösterebilmek için gerekli lemma aşağıda verilir.

Lemma 5.2.5 $\{x_n(t), 0 \leq t \leq b\}$, $n = 1,2,\dots$ 1 olasılıkla azalmayan yörünge fonksiyonlarına sahip stokastik süreçlerin bir dizisi ve x, $[0, b]$ aralığında sonlu ve sürekli reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$\sup_{0 \leq t \leq b} |x_n(x) - x(x)| \xrightarrow{P} 0$$

olsun. Ayrıca, $g_n: [0, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\dots$ sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $g: [0, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $t \in [0, b]$ için $g_n(t)$, $g(t)$'ye düzgün yakınsasın. Bu durumda $n \to \infty$ iken

$$\sup_{0 \leq t \leq b} \left| \int_0^t g_n(y) dx_n(y) - \int_0^t g(y) dx(y) \right| \xrightarrow{P} 0$$

dır (Baxter ve Li 1995).

Teorem 5.2.13 $b_0 < \tau$ olmak üzere $t \in [0, b_0]$ için $n \to \infty$ iken $\vartheta_n^2(t) \xrightarrow{P} \vartheta^2(t)$ dır (Baxter ve Li 1995).

Sonuç 5.2.8 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken

$$\frac{\sqrt{n}}{\vartheta_n(t)}[M_{3.2n}(t) - M(t)] \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.55}$$

dır.

Şimdi de V varyans fonksiyonu için $V_{3.2n}$ tahmin edicisi göz önüne alınsın. Bu tahmin edicinin tutarlılığı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2.14 $V_{3.2n}(t)$ tahmin edicisi her sabit $t < \tau$ için $V(t)$'nin güçlü tutarlı bir tahmin edicisidir (Baxter ve Li 1995).

İspat. V varyans fonksiyonu için (3.21) ifadesi göz önüne alınsın. Bu durumda $V_{3.2n}$ tahmin edicisi için $V_{3.2n}(t) = 2M_{3.2n} * M_{3.2n}(t) + M_{3.2n}(t) - M_{3.2n}^2(t)$ yazılabilir. Teorem 5.2.12 ve Lemma 5.2.3 gereği her sabit $t < \tau$ için $M_{3.2n} * M_{3.2n}(t)$ 1 olasılıkla $M * M(t)$'ye yakınsar. Yine Teorem 5.2.12 gereği $M_{3.2n}(t) - M_{3.2n}^2(t)$ de $M(t) - M^2(t)$' ye 1 olasılıkla yakınsar ve ispat tamamlanır.

Baxter ve Li (1995) $V_{3.2n}(t)$ tahmin edicisinin her sabit $t < \tau$ değeri için asimptotik dağılımını Harel vd. (1995)'nin doğrusallaştırma işlemi ve Teorem 5.2.4 yardımı ile elde etmişlerdir. $V_{3.2n} - V$ farkı Kısım 5.2.1.2'dekine benzer şekilde

$$V_{3.2n} - V = 2[M_{3.2n} - M] * [M_{3.2n} - M] + [4M + I + C_n.I] * [M_{3.2n} - M] \tag{5.56}$$

olarak elde edilir. Burada $t \geq 0$ için $I(t) = 1$ olup " $\cdot$ " çarpım anlamına gelir ve $C_n = [M_{3.2n} + M]$ dır. Lemma 5.2.1'in göz önüne alınması ile

$$[M_{3.2n}-M]*[M_{3.2n}-M]=\left[\left(\breve{F}_n-F\right)*M^{2*}+\left(\breve{F}_n-F\right)^{2*}*M^{2*}*M_{3.2n}\right]$$
$$*\left[\left(\breve{F}_n-F\right)*M^{2*}+\left(\breve{F}_n-F\right)^{2*}*M^{2*}*M_{3.2n}\right]$$

olmak üzere konvolüsyon işleminin parantez içerisine dağıtılmasıyla

$$[M_{3.2n}-M]*[M_{3.2n}-M]=\left(\breve{F}_n-F\right)^{2*}*M^{4*}+2\left(\breve{F}_n-F\right)^{3*}*M^{4*}*M_{3.2n}$$
$$+\left(\breve{F}_n-F\right)^{4*}*M^{4*}*M_{3.2n}^{2*} \qquad (5.57)$$

elde edilir. Teorem 5.2.4 gereği yukarıdaki ifadedeki her terim her sabit $t<\tau$ için 1 olasılıkla sıfıra yakınsar. Sonuç olarak $t<\tau$ için $[M_{3.2n}-M]*[M_{3.2n}-M](t)\xrightarrow{P}0$ dır. (5.56) ifadesindeki ikinci terimde konvolüsyon işleminin parantez içine dağıtılması ile

$$[4M+I+C_n\cdot I]*[M_{3.2n}-M]=4M*[M_{3.2n}-M]+[M_{3.2n}-M]$$
$$+C_n\cdot[M_{3.2n}-M]$$

elde edilir. Teorem 5.2.12'den $t<\tau$ için $C_n\xrightarrow{\text{hhhy}}C,\ C=2M$ olduğu açıktır. Sonuç 5.2.6 gereği her sabit $t<\tau$ için $\sqrt{n}(M_{3.2n}-M)(t)\xrightarrow{d}[1-F(t)](B\circ U)*M*M(t)$ olmak üzere Slutsky teoreminden $n\to\infty$ iken

$$\sqrt{n}[C_n\cdot(M_{3.2n}-M)](t)\xrightarrow{d}\left[C\cdot[M*M*(B\circ U)(1-F)]\right](t)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sqrt{n}[4M*(M_{3.2n}-M)](t)\xrightarrow{d}4M*[M*M*(B\circ U)(1-F)](t)$$

dır. Böylelikle sabit bir t değeri için $\sqrt{n}(V_{3.2n}-V)(t)$ ile ilgili aşağıdaki sonuç aşikar olarak elde edilir.

Sonuç 5.2.9 Her sabit $t<\tau$ için $n\to\infty$ iken

$$\sqrt{n}(V_{3.2n}-V)(t)\xrightarrow{d}A*M*M*[(1-F)(B\circ U)](t)$$

dır, burada $A = 4M + I + C \cdot I$ (Baxter ve Li 1995).

Bu sonuca bağlı olarak V varyans fonksiyonu için $V_{3.2n}$ tahmin edicisine dayalı olarak bir güven aralığı oluşturulabilir. Bunun için öncelikle $A * M * M * [(1-F)(B \circ U)](t)$ ifadesinin varyans fonksiyonunun elde edilmesi gereklidir. $R'(x) = A * M * M(x)$ ve $\pi'(t,x) = \int_0^x [1 - F(t-y)] dR'(y)$ yazılsın. Bu durumda $t < \tau$ için,

$$
\begin{aligned}
A * M * M * [(1-F)(B \circ U)](t) &= \int_0^t [(B \circ U)(t-x)][1 - F(t-x)] dR'(x) \\
&= \int_0^t [(B \circ U)(t-x)] d_x \pi'(t,x) \\
&= \int_0^t \pi'(t,x) d[(B \circ U)(x)] \\
&= \int_0^{U(t)} \pi'\big(t, t - U^{-1}(y)\big) dB(y) \\
&\sim N\big(0, \xi^2(t)\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
\xi^2(t) &= \int_0^{U(t)} \left[\pi'\big(t, t - U^{-1}(y)\big)\right]^2 dy \\
&= \int_0^t [\pi'(t, t-x)]^2 dU(x) \\
&= \int_0^t \left[A * M * M(t-x) - \int_0^{t-x} F(t-y) d[A * M * M(y)] \right]^2 dU(x)
\end{aligned}
$$

dır (Baxter ve Li 1995). Öncelikle $\pi'(t,x)$ için uygun bir tahmin edici, $\pi'(t,x)$ deki A, M ve F fonksiyonlarının yerine sırası ile bunların tahmin edicileri olan $A_n = 4M_{3.2n} +$

$I + 2M_{3.2n} \cdot I$, $M_{3.2n}$ ve $\breve{F}_n$ alınması ile $\pi'_n(t,x)$ olarak tanımlansın. Ayrıca $U(t)$ için yukarıda verilen $U_n(t)$ tahmin edicisi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\xi_n^2(t) = \int_0^t [\pi'_n(t,t-x)]^2 dU_n(x) \tag{5.58}$$

ile tanımlanan tahmin edici $b_0 < \tau$ olmak üzere $t \in [0, b_0]$ için $n \to \infty$ iken $\xi_n^2(t) \xrightarrow{P} \xi^2(t)$ dır(Baxter ve Li 1995). Buna bağlı olarak V varyans fonksiyonu için bir güven aralığı aşağıdaki sonuç yardımı ile elde edilebilir.

Sonuç 5.2.10 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken

$$\frac{\sqrt{n}}{\xi_n^2(t)}[V_{3.2n}(t) - V(t)] \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.59}$$

dır.

$M_{3.2n}$ tahmin edicisinin ve bu tahmin ediciye ilişkin asimptotik varyansın tahmin edicisi olan ϑ_n^2'nin hesabı Baxter ve Li (1995) tarafından tarif edilmiştir. Baxter ve Li (1995) $M_{3.2n}$ ve $V_{3.2n}$ parametrik olmayan tahmin edicilerinin ve ilgili ifadelerin hesabı için Schneider vd. (1990)'nin yaklaşımını önermişlerdir. Schneider vd. (1990)'nin $M_{2.2n}$ tahmin edicisinin hesabı için önermiş olduğu yöntem yardımı ile $M_{3.2n}$ ve $V_{3.2n}$ tahmin edicilerinin hesabı aşağıda verilir. Öncelikle M yenileme fonksiyonu için (3.7) integral denklemi göz önüne alınsın. Bu durumda $M_{3.2n}$ tahmin edicisi

$$M_{3.2n}(t) = \breve{F}_n(t) + \int_0^t M_{3.2n}(t-x) d\breve{F}_n(x) \tag{5.60}$$

integral denkleminin ardışık çözümü ile hesap edilebilir. Ancak burada ardışık çözüm yapılabilmesi için öncelikle $[0,t]$ aralığı kesiklendirilmelidir. Sonra $\breve{F}_n$ ampirik dağılım fonksiyonuna yenileme fonksiyonunun hesap edilebileceği bir kafessel dağılım fonksiyonu yardımı ile yaklaşılır. Bunun gerçekleştirilebilmesi için gözlem değerleri bir k sabiti ile çarpılıp yeniden ölçeklendirilerek en yakın birer tam sayıya yuvarlanır. Bu işlemden sonra $M_{3.2n}(t)$ (5.60) ifadesinde integral yerine sonlu bir toplam alınarak ardışık olarak hesap edilir. Belirtilmelidir ki bu algoritma $M_{3.2n}(0)$, $M_{3.2n}(1)$, …, $M_{3.2n}(t)$ değerlerinin hesabı için n örneklem çapından bağımsız olarak t^2 derecesinden işleme ihtiyaç duyar (Schneider vd. 1990). Böylelikle $M_{3.2n}$ tahmin edicisi ardışık olarak

$$M_{3.2n}(i) \cong \breve{F}_n(i) + \sum_{j=1}^{i} M_{3.2n}(i-j)\left[\breve{F}_n(j) - \breve{F}_n(j-1)\right], i = 1,2, \dots, tk \qquad (5.61)$$

ifadesi ile yaklaşık olarak hesap edilir. Böylelikle herhangi bir t değeri için $M_{3.2n}(t)$'nin değeri (5.61) ifadesinde tanımlandığı şekilde $M_{3.2n}(tk)$ ile yaklaşık olarak hesap edilir. Eğer gözlemler tamsayı olarak elde edildi ise yeniden ölçeklendirmeye gerek kalmaz. Bu durumda $[0, t]$ aralığının eşit aralıklı uygun bir parçalanması alınarak da $M_{3.2n}$ tahmin edicisi hesap edilebilir. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = t$ $[0, t]$ aralığının eşit aralıklı bir parçalanması olmak üzere $M_{3.2n}$ tahmin edicisi

$$M_{3.2n}(t_i) \cong \breve{F}_n(t_i) + \sum_{j=1}^{i} M_{3.2n}\left(t_i - t_j\right)\left[\breve{F}_n\left(t_j\right) - \breve{F}_n\left(t_{j-1}\right)\right], i = 1,2, \dots, l \qquad (5.62)$$

ifadesi ile hesap edilir. $M_{3.2n}(t)$'nin her sabit $t < \tau$ için asimptotik varyansının tahmin edicisi olan $\vartheta_n^2(t)$'yi hesap edebilmek için ise öncelikle $\pi_n(t, t-x)$ hesap edilmelidir. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = t$ parçalanmasının göz önüne alınması ile $j = 1, \dots, l$ için $\pi_n\left(t, t_j\right)$

$$\pi_n\left(t, t_j\right) = \sum_{i=1}^{j}\left[1 - \breve{F}_n(t - t_i)\right]\left[M_{3.2n} * M_{3.2n}(t_i) - M_{3.2n} * M_{3.2n}(t_{i-1})\right] \qquad (5.63)$$

ifadesi üzerinden hesap edilir. Burada $M_{3.2n} * M_{3.2n}(t_i)$ ise $i = 1, \dots, l$ için

$$M_{3.2n} * M_{3.2n}(t_i) = \sum_{j=1}^{i} M_{3.2n}\left(t_i - t_j\right)\left[M_{3.2n}\left(t_j\right) - M_{3.2n}\left(t_{j-1}\right)\right] \qquad (5.64)$$

ifadesi ile ardışık olarak hesap edilir. Miller (1981) ın $U_n(t)$ tahmin edicisinin hesabı için kullandığı

$$U_n(t_j) = \sum_{i:X_{(i)} \leq t_j} \frac{\delta_{(i)}}{(n-i)(n-i+1)} \tag{5.65}$$

ifadesinin göz önüne alınması ile $\vartheta_n^2(t)$

$$\vartheta_n^2(t) = \sum_{i=1}^{l} [\pi_n(t, t_i)]^2 [U_n(t_i) - U_n(t_{i-1})] \tag{5.66}$$

ifadesi ile hesap edilir (Baxter ve Li 1995). Şimdi de $V_{3.2n}$ tahmin edicisinin sayısal hesabı için (3.21) ifadesi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$V_{3.2n}(t) = 2M_{3.2n} * M_{3.2n}(t) + M_{3.2n}(t) - [M_{3.2n}(t)]^2 \tag{5.67}$$

olmak üzere $[0, t]$ aralığının $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = t$ parçalanmasının ve (5.61) ve (5.64) ifadelerinin göz önüne alınması ile $i = 1, \ldots, l$ için $V_{3.2n}(t_i)$ değerleri kolaylıkla hesap edilir. $\xi_n^2(t)$'nin hesabı ise $\vartheta_n^2(t)$'nin hesabına benzer şekilde yapılabilir.

5.2.2.2 İlerleyen tür tip II sansürleme

Bu kısımda sürekli bir F dağılımına bağlı örneklemin ilerleyen tür tip II sansürleme planına göre elde edilmesi durumunda M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmini üzerinde durulur.

$X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \ldots, X_{m:m:n}$ önceden belirlenmiş $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansürleme şeması ile F dağılımından ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olsun. Bu durumda F dağılımının parametrik olmayan tahmini için KM tahmin edicisi ele alınabilir. $X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \ldots, X_{m:m:n}$ ilerleyen tür tip II sansürlü örneklemi için KM tahmin edicisi

$$\hat{F}_{KM}(t) = 1 - \prod_{i:X_{i:m:n} \leq t} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \tag{5.68}$$

dır. Burada n_i, i. bozulma için gözlenmeye devam eden birim sayısı olup, uygunluk için $R_0 = 0$ alınmak üzere $n_i = n - i + 1 - \sum_{j=0}^{i-1} R_j$ dır. Ancak Kısım 5.2.2.1'de verilen KM tahmin edicisinin asimptotik özellikleri gözlenen değişkenler ile sansürleme değişkenlerinin bağımsız olması şartı altında elde edildiği için ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumunda KM tahmin edicisi için Kısım 5.2.2.1'de verilen asimptotik özelliklerin geçerli olduğu iddia edilemez. Çünkü ilerleyen tür tip II sansürleme durumunda gözlemler artık ne aynı dağılımlı ne de bağımsızdırlar. İlerleyen tür tip II sansürleme durumunda F dağılımının parametrik olmayan tahmini Bordes (2004) tarafından detaylıca ele alınmıştır. Bu çalışmada F'nin parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilmiş ve elde edilen bu tahmin edicinin tutarlılığı, asimptotik dağılımı gibi bazı özellikleri elde edilmiştir. Bu bilgiler aşağıda hatırlatılır.

$X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$, $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şeması ile ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olmak üzere bu örnekleme ilişkin gözlem değerleri sırası ile $x_1, x_2, \dots, x_m$ olsun. Bilindiği üzere ilerleyen tür tip II sansürlü örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{1:m:n},\dots,X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) = c \prod_{i=1}^{m} f(x_i)[1 - F(x_i)]^{R_i}$$

şeklindedir. Burada $c = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$ dır. $\alpha_i = \sum_{j=i}^{m} (R_j + 1)$ alınmak üzere

$$f_{X_{1:m:n},\dots,X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)[1 - F(x_i)]^{R_i}$$

olarak da yazılabilir. Ancak F şekilsel olarak bilinmediğinden doğrudan F'yi tahmin etmek mümkün olmayabilir. Bordes (2004) bunun yerine $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ gözlem kümesi üzerinde h bozulma oran fonksiyonunun ve buna bağlı olarak da $\mathcal{H}$ birikimli bozulma oran fonksiyonunun parametrik olmayan tahminini elde etmiştir. Bunun için $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ gözlem kümesine dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(x_1, \dots, x_m|h) = \prod_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)[1 - F(x_i)]^{R_i}$$

olarak ifade edilsin. α_i sabitlerinin göz ardı edilmesi ile log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(x_1, \dots, x_m|h) = \sum_{i=1}^{m} \left[\ln f(x_i) + R_i \ln[1 - F(x_i)]\right]$$

şeklinde yazılabilir. Toplam içerisine $\ln[1 - F(x_i)]$ nin eklenip çıkarılması ve $1 - F(t) = \exp\{-\mathcal{H}(t)\}$ olmasının göz önüne alınması ile log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(x_1, \dots, x_m|h) = \sum_{i=1}^{m} [\ln h(x_i) - (R_i + 1)\mathcal{H}(x_i)] \tag{5.69}$$

olarak elde edilir. Artık bu ifade üzerinden h'nin ve $\mathcal{H}$'nin parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilebilir. Bunun için $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ gözlem kümesi üzerinde bir kesikli ölçü yardımı ile işlem yapmak gerekir. Sayılabilir bir $A \subset \Omega$ kümesi üzerinde bir kesikli ölçü

$$\hat{h}(A) = \sum_{x_i \in A} \hat{h}(x_i) = \sum_{i=1}^{m} \hat{h}(x_i)\delta_{x_i}(A), \delta_{x_i}(A) = \begin{cases} 1, x_i \in A \\ 0, x_i \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanabilir. Gösterim kolaylığı için sayılabilir elemanlı bir küme üzerinde oluşturulan $\hat{h}$ ölçüsü $\hat{h} = \sum_{i=1}^{m} \hat{h}_i \delta_{x_i}$ ile gösterilsin. $\int_0^x h(u)du$ bir Lebesgue integrali olmakla birlikte sayılabilir A kümesi üzerinde oluşturulan $\hat{h}$ ölçüsü göz önüne alındığında $\int_0^x \hat{h}(u)du$ integrali sayma ölçüsüne göre bir integral olur. Bu durumda $\widehat{\mathcal{H}}(t) = \int_0^x \hat{h}(u)du = \sum_{i=1}^{m} \hat{h}_i I(x_i \leq t)$ dır. Böylelikle $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ gözlem kümesine dayalı $\hat{h}$ ölçüsü için log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L\left(x_1, \dots, x_m \middle| \hat{h}\right) = \sum_{i=1}^{m} \left[\ln \hat{h}_i - (R_i + 1) \sum_{j=1}^{i} \hat{h}_i\right] \tag{5.70}$$

biçiminde yazılır. $\ln L\left(x_1, \dots, x_m \middle| \hat{h}\right)$ fonksiyonunun $(\hat{h}_1, \hat{h}_2, \dots, \hat{h}_m)$'ya göre kısmi türevleri

$$\nabla \ln L(x_1,\dots,x_m|\hat{h}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{h}_1} \ln L(x_1,\dots,x_m|\hat{h}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{h}_m} \ln L(x_1,\dots,x_m|\hat{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\hat{h}_1} - \sum_{i=1}^{m} (R_i+1) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\hat{h}_m} - \sum_{i=m}^{m} (R_i+1) \end{pmatrix}$$

olmak üzere, kısmi türevlerin sıfıra eşitlenmesi ile $k=1,\dots,m$ için $\hat{h}_k = 1/\alpha_k$ elde edilir. Bu durumda $\ln L(x_1,\dots,x_m|\hat{h})$ fonksiyonu $k=1,\dots,m$ için $\hat{h}_k = 1/\alpha_k$ olduğunda maksimuma ulaşır. Böylelikle birikimli bozulma oran fonksiyonu için $\hat{h}$ kesikli ölçüsüne dayalı parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{h}([0,t]) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} I(X_{i:m:n} \le t), t \ge 0 \tag{5.71}$$

olarak elde edilir (Bordes 2004). $\exp\{x\} = 1 + x + o(x)$ olmak üzere $1 - F(t) = \exp\{-\mathcal{H}(t)\}$ ilişkisinin göz önüne alınması ile F'nin ilerleyen tür tip II sansürlü örnekleme dayalı parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{F}_{m:n}(t) = 1 - \prod_{i:X_{i:m:n} \le t} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right), t \ge 0 \tag{5.72}$$

olarak elde edilir (Bordes 2004). Bu tahmin edici ayrıca çarpım-limit tahmin edicisi olarak da adlandırılır. Eğer $i=1,\dots,m$ için $R_i = 0$ alınırsa $m=n$ olur ve (5.72) ifadesindeki tahmin edici $\sum_{i:X_i \le t} 1/n$ ifadesine indirgenir. Belirtmek gerekir ki bu tahmin edici tam örneklem için örneklem dağılım fonksiyonu olup F'nin parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Dolayısıyla ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem için elde edilen $\hat{F}_{m:n}$ tahmin edicisi örneklem dağılım fonksiyonunun genellemesidir. Burada ayrıca gösterilebilir ki $i=1,\dots,m$ için $\alpha_i = n_i$ olup (5.45) ile (5.72) ifadeleri birbirine denktir. Yani rasgele sansürlü örneklem durumunda önerilen KM tahmin edicisi Bordes (2004) tarafından farklı bir yolla tekrar elde edilmiştir. Ancak Bordes (2004) önerdiği tahmin edicinin rasgele sansürleme durumunda kullanılan KM tahmin edicisi ile aynı özelliklere sahip olamayacağından hareketle $\hat{F}_{m:n}$ tahmin edicisinin asimptotik özelliklerini ayrıca elde etmiştir. Bordes (2004) $\hat{F}_{m:n}$ tahmin edicisine ilişkin asimptotik özellikleri sayma süreçleri ve martingale teorileri yardımı ile elde etmiştir. Bunun için $N_*(t) = \sum_{i=1}^{m} I(X_{i:m:n} \leq t)$ ve $\mathcal{F}^N$ $\{N_*(t), t \geq 0\}$ sayma süreci ve $(R_k)_{k\geq 1}$ dizisi tarafından üretilen doğal filtreleme olsun. Bu durumda Bordes (2004) $Y_*(t) = \sum_{i=1}^{m}(R_i + 1)I(X_{i:m:n} \geq t)$ olmak üzere

$$M_*(t) = N_*(t) - \int_0^t Y_*(u)h(u)du$$

ile tanımlanan $\{M_*(t), t \geq 0\}$ sürecinin $\mathcal{F}^N$ filtresine göre bir martingale olduğunu göstermiştir. Bu bilgiler yardımı ile de aşağıdaki sonuçları elde etmiştir. Şimdi $\hat{F}_{m:n}$ tahmin edicisi için Bordes (2004) tarafından elde edilen asimptotik özellikler ispatsız olarak verilsin.

Teorem 5.2.15 (Bordes 2004)

A1. $\sup\limits_{m\geq 1} R_m \leq K < \infty$

A2. $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i = r$

A3. τ, $F(\tau) < 1$ şartını sağlayan bir reel sayı

şartları altında $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere

i. $\sup\limits_{0\leq t\leq \tau} |\hat{F}_{m:n}(t) - F(t)| \xrightarrow{P} 0,$

ii. $\{B(t), t \geq 0\}$ Brown hareketi ve " $\circ$ " bileşke fonksiyon belirtmek üzere $\mathcal{D}[0,\tau]$ fonksiyon uzayı üzerinde $\left\{\sqrt{m}\left(\hat{F}_{m:n}(t) - F(t)\right), t \leq \tau\right\}$ süreci $\{[1 - F(t)]B \circ Q(t), t \leq \tau\}$ sürecine zayıf yakınsar.

Burada $Q(t) = \frac{1-[1-F(t)]^{r+1}}{(r+1)^2[1-F(t)]^{r+1}}$ dır.

Bordes (2004) $\hat{Q}_{m:n}(t) = m\int_0^t \frac{dN_*(u)}{Y_*^2(u)}$ ile verilen $\hat{Q}_{m:n}(t)$ tahmin edicisi ile her sabit t için $Q(t)$'nin (düzgün) tutarlı olarak tahmin edilebileceğini belirtmiştir. Slusty teoreminin göz önüne alınması ile her sabit t için $F(t)$'nin istenilen düzeyde bir güven aralığı oluşturulabilir.

M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının tahmininde kullanışlı olacak olan $\hat{F}_{m:n}$ ile ilgili teoremler aşağıda verilir.

Teorem 5.2.16 Lemma 2.6.3 gereği

$$\sup_{0\leq t\leq \tau} \left|\hat{F}_{m:n}(t) - F(t)\right| \xrightarrow{\text{hhhy}} 0 \tag{5.73}$$

dır.

Teorem 5.2.17 φ sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere 1 olasılıkla

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\hat{F}_{m:n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) \tag{5.74}$$

dır.

İspat. Kısım 2.6 da verilen Helly-Bray teoreminin göz önüne alınması ile ispat açıktır.

Şimdi de $X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ önceden belirlenmiş $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ sansürleme şeması ile F dağılımından ilerleyen tür tip II sansürlü bir örneklem olmak üzere bu örnekleme dayalı olarak M yenileme ve V varyans fonksiyonları için parametrik olmayan tahmin problemi ele alınsın.

5.2.2.2.1 Büyük t değerleri için bir tahmin edici

M ve V fonksiyonlarının (3.27) ve (3.29)'da verilen asimptotik ifadeleri göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\hat{\mu} = \int x d\hat{F}_{m:n}(x), \qquad \hat{\mu}_2 = \int x^2 d\hat{F}_{m:n}(x)$$

olmak üzere yeterince büyük t değerleri için

$$M_{4.1n}(t) = \frac{t}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{\mu}_2 - 2\hat{\mu}^2}{2\hat{\mu}^2} \quad (5.75)$$

$$V_{4.1n}(t) = \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}^2}{\hat{\mu}^3} t + \frac{5\hat{\mu}_2^2}{4\mu^4} - \frac{2\hat{\mu}_3}{3\hat{\mu}^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\hat{\mu}^2} \quad (5.76)$$

ile tanımlanan $M_{4.1n}$ ve $V_{4.1n}$ tahmin edicileri sırası ile M ve V fonksiyonları için kullanışlı olabilirler. Eğer $R_1 = 0, R_2 = 0, \ldots, R_m = 0$ ise $m = n$ olur ve $\hat{F}_{m:n}$ örneklem dağılım fonksiyonuna karşılık gelir. Böylece de $M_{4.1n}$, $V_{4.1n}$ sırası ile $M_{2.1n}$, $V_{2.1n}$'ye karşılık gelir. Yani $M_{4.1n}$ ve $V_{4.1n}$ ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumu için sırası ile $M_{2.1n}$ ve $V_{2.1n}$ tahmin edicilerinin genellemeleridir. Teorem 5.2.17 gereği $\hat{\mu}$ ve $\hat{\mu}_2$ sırası ile F dağılımının birinci ve ikinci momentleri için güçlü tutarlı tahmin edici olurlar. Ancak genelde $M(t) \neq (t/\mu) + (\mu_2 - 2\mu^2)/2\mu^2$ ve $V(t) \neq ((\mu_2 - \mu^2)/\mu^3)t + (5\mu_2^2/(4\mu^4)) - (2\mu_3/(3\mu^3)) - (\mu_2/(2\mu^2))$ olduğundan $M_{4.1n}$ ve $V_{4.1n}$ tahmin edicileri sırasıyla M ve V için tutarlı birer tahmin edici olmayacaktır. Ayrıca bu tahmin ediciler genelde ne yansız ne de asimptotik yansızdırlar. Bununla birlikte, t nin ve m tam gözlenen birim sayısının artması ile bu tahmin edicilerin performansının iyileşmesi beklenir. Burada tahmin ediciler üzerinde diğer bir etken ise sansürleme şemasıdır. Sansürleme şemasının tahmin ediciler üzerindeki etkisini analitik olarak incelemek mümkün olmadığından, tahmin edicilerin performansının belirlenebilmesi için sayısal hesaplamalar üzerinden değerlendirme yapmak gerekir.

5.2.2.2.2 Sansürlü örneklem yenileme ve varyans fonksiyonu

M yenileme ve V varyans fonksiyonları için sırası ile (3.6) ve (3.22) konvolüsyon serisi ifadeleri göz önüne alınsın. Eğer F^{k*} için $\hat{F}_{m:n}$'ye dayalı bir tahmin edici tanımlanır ise, buna bağlı olarak M ve V fonksiyonları için parametrik olmayan birer tahmin edici elde edilebilir. Bu amaçla F^{k*} için ardışık olarak

$$\hat{F}_{m:n}^{k*}(t) = \int_0^t \hat{F}_{m:n}^{(k-1)*}(t-x)\, d\hat{F}_{m:n}(x)\, , k = 2,3, \ldots \quad (5.77)$$

tahmin edicisi tanımlansın. M ve V fonksiyonlarının (3.6) ve (3.22) konvolüsyon serisi ifadelerinde $F^{k*}(t)$ yerine $\hat{F}^{k*}_{m:n}(t)$ alınması ile bu fonksiyonların her sabit t değeri için parametrik olmayan birer tahmin edici

$$M_{4.2n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t)\,, t \geq 0 \tag{5.78}$$

$$V_{4.2n}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{F}^{k*}_{m:n}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t)\right), t \geq 0 \tag{5.79}$$

olarak tanımlanır. Eğer $i = 1, \ldots, m$ için $R_i = 0$ ise, yani tüm gözlemler sansürsüz olarak elde edildi ise $\hat{F}_{m:n}$, F_n'ye karşılık gelir ve böylece de $M_{4.2n}$ ve $V_{4.2n}$ tahmin edicileri sırası ile $M_{2.2n}$ ve $V_{2.2n}$ tahmin edicilerine karşılık gelir. Yani $M_{4.2n}$ ve $V_{4.2n}$ tahmin edicileri $M_{2.2n}$ ve $V_{2.2n}$ tahmin edicilerinin ilerleyen tür tip II sansürlü veri durumu için genellemeleridir. $\hat{F}_{m:n}$'nin F için güçlü tutarlı olmasının göz önüne alınması ile $M_{4.2n}$ ve $V_{4.2n}$ tahmin edicilerinin de M ve V fonksiyonları için güçlü tutarlı olması beklenir. Bununla ilgili teoremler aşağıda verilir. Buradan sonra yazılacak teoremler Teorem 5.2.15'teki A1, A2 ve A3 şartlarının sağlandığı varsayımı altında verilir.

Teorem 5.2.18 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $M_{4.2n}(t)$ tahmin edicisi $M(t)$'ye 1 olasılıkla düzgün yakınsar.

İspat. Lemma 5.2.3 yardımı ile kolaylıkla gösterilir ki her $k \geq 1$ ve $t < \tau$ için $\hat{F}^{k*}_{m:n}(t)$ $F^{k*}(t)$'ye 1 olasılıkla düzgün yakınsar. A, $t < \tau$ için $\hat{F}^{k*}_{m:n}(t)$'nin $F^{k*}(t)$'ye yakınsadığı noktaların kümesi olmak üzere $P(A) = 1$ dir. $F(0) < 1$ ve F bir dağılım fonksiyonu olduğundan $F(a) < 1$ olacak şekilde en az bir $a > 0$ vardır. $t \leq ra$ olacak biçimde bir $r \in \mathbb{N}$ sayısı göz önüne alınsın. $(X_1 > t/r, \ldots, X_r > t/r)$ olayı $(S_r > t)$ olayını gerektirdiğinden $P(S_r \leq t) \leq 1 - [1 - F(t/r)]^r$ elde edilir. Böylelikle $F(a) < 1$ olmak üzere $t/r \leq a$ olduğundan $F(t/r) < 1$ dir. Bu durumda $t \geq 0$ için $F^{r*}(t) < 1$ olacak şekilde en az bir $r \geq 1$ vardır. $\hat{F}^{k*}_{m:n}(t)$, $F^{k*}(t)$'ye A üzerinde 1 olasılıkla düzgün yakınsak olduğundan $F^{r*}(t) < 1$ şartını sağlayan r için $\delta = 1 - F^{r*}(t)$ olmak üzere her sabit $w \in A$ için bir $n_0(w)$ vardır, öyle ki her $n \geq n_0(w)$ için $\hat{F}^{r*}_{m:n}(t) < 1 - \delta/2$ dir. Şimdi

$$g\big(n, n_0(w)\big) = \begin{cases} 1 - \delta/2, & n \geq n_0(w) \\ 1, & n < n_0(w) \end{cases}$$

yazılsın. Bu durumda $k \geq r$ için $\hat{F}^{k*}_{m:n}(t) \leq \hat{F}^{(k-r)*}_{m:n}(t) * \hat{F}^{r*}_{m:n}(t) \leq \left[\hat{F}^{r*}_{m:n}(t)\right]^{[|k/r|]}$ olmasının göz önüne alınması ile $\hat{F}^{k*}_{m:n}(t) \leq [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]}$ elde edilir. Böylelikle her $n \geq n_0(w)$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t) &= \sum_{k=1}^{r} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} \left[\hat{F}^{r*}_{m:n}(t)\right]^{[|k/r|]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} [g(n, n_0(w))]^{[|k/r|]} < \infty \end{aligned}$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden her $w \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}^{k*}_{m:n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)$$

dır. $P(A) = 1$ olduğundan her sabit $t < \tau$ için $M_{4.2n}(t)$ $M(t)$'ye 1 olasılıkla düzgün yakınsar ve ispat tamamlanır.

Şimdi (5.19) ifadesi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\sqrt{m}(M_{4.2n} - M)(t) = \sqrt{m}\big(\hat{F}_{m:n} - F\big) * M^{2*}(t) + \sqrt{m}\big(\hat{F}_{m:n} - F\big)^{2*} * M_{4.2n} * M^{2*}(t)$$

elde edilir. Böylelikle ilk terim ve ikinci terimler için Teorem 5.2.4'ün göz önüne alınması ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.11 $\{\sqrt{m}(\hat{F}_{m:n} - F) * M * M(t), t < \tau\}$ süreci $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere Skorokhod topolojisi üzerinde $\{[1 - F(t)](B \circ Q) * M * M(t),\ t < \tau\}$ sürecine zayıf yakınsar.

Sonuç 5.2.12 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $\sqrt{m}\left(\hat{F}_{m:n} - F\right)^{2*} * M_{4.2n} * M^{2*}(t)$ 1 olasılıkla sıfıra düzgün yakınsar.

Bu sonuçlardan hareketle her sabit $t < \tau$ değeri için $\sqrt{m}(M_{4.2n} - M)(t)$'nin asimptotik dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.

Sonuç 5.2.13 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere

$$\sqrt{m}(M_{4.2n} - M)(t) \xrightarrow{d} [1 - F(t)](B \circ Q) * M * M(t) \tag{5.80}$$

dır.

Şimdi yukarıda elde edilen limit dağılımın varyansı elde edilsin. $B(0) = 0$ olmak üzere $\mathcal{M}(x) = M * M(x)$ ve $\lambda(t,x) = \int_0^x [1 - F(t-y)]d\mathcal{M}(y)$ olsun. Bu durumda $t < \tau$ için,

$$\begin{aligned}
[1 - F(t)](B \circ Q) * M * M(t) &= \int_0^t [(B \circ Q)(t-x)][1 - F(t-x)]d\mathcal{M}(x) \\
&= \int_0^t [(B \circ Q)(t-x)]d_x\lambda(t,x) \\
&= \int_0^t \lambda(t,x)d[(B \circ Q)(x)] \\
&= \int_0^{Q(t)} \lambda\left(t, t - Q^{-1}(y)\right)dB(y) \\
&\sim N\left(0, \mathcal{v}^2(t)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{v}^2(t) = \int_0^{Q(t)} \left[\lambda\left(t, t - Q^{-1}(y)\right)\right]^2 dy$$

$$= \int_0^t [\lambda(t, t-x)]^2 dQ(x)$$

$$= \int_0^t \left[\mathcal{M}(t-x) - \int_0^{t-x} F(t-y) d\mathcal{M}(y) \right]^2 dQ(x)$$

dır.

Eğer $\mathcal{v}^2(t)$'nin tutarlı bir tahmin edicisi elde edilebilir ise M yenileme fonksiyonu için $M_{4.2n}$ tahmin edicisine dayalı bir güven aralığı Slutsky teoremi yardımı ile elde edilebilir. Bu amaçla öncelikle $\lambda(t, x)$ için $\lambda_{m:n}(t, x) = \int_0^x [1 - \hat{F}_{m:n}(t-y)] d\mathcal{M}_{m:n}(y)$ tahmin edicisi ele alınsın. Burada $\mathcal{M}_{m:n} = M_{4.2n} * M_{4.2n}$ dır. Bu tahmin edicinin tutarlılığı ile ilgili sonuç aşağıda verilir.

Sonuç 5.2.14 Her sabit $t < \tau$ ve $x \in [0, t]$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $\lambda_{m:n}(t, x)$ 1 olasılıkla $\lambda(t, x)$'e düzgün yakınsar.

İspat. Teorem 5.2.16 gereği $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere her sabit $t < \tau$ için $\hat{F}_{m:n}(t)$ 1 olasılıkla $F(t)$'ye düzgün yakınsar. Ayrıca Teorem 5.2.18 ve Lemma 5.2.3 gereği $\mathcal{M}_{m:n}(t)$ de 1 olasılıkla $M * M(t)$'ye düzgün yakınsar. Son olarak Lemma 5.2.3'ün göz önüne alınması ile her sabit $t < \tau$ ve $x \in [0, t]$ için $\lambda_{m:n}(t, x)$ de 1 olasılıkla $\lambda(t, x)$'e yakınsar ve ispat tamamlanır.

$\mathcal{v}^2(t)$ için bir tahmin edici

$$\mathcal{v}^2_{m:n}(t) = \int_0^t [\lambda_{m:n}(t, t-x)]^2 d\hat{Q}_{m:n}(x)$$

olarak tanımlansın. Bu tahmin edicinin tutarlılığı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2.19 Her sabit $t < \tau$ ve $x \in [0, t]$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $\mathcal{v}^2_{m:n}(t)$ $\mathcal{v}^2(t)$'ye olasılıkta düzgün yakınsar.

İspat. Sonuç 5.2.14'ün ve Teorem 5.2.15'te belirtildiği üzere $\hat{Q}_{m:n}(t)$'nin olasılıkta $Q(t)$'ye düzgün yakınsadığının göz önüne alınması ile Lemma 5.2.5 gereği ispat açıktır.

Bu sonuçlara bağlı olarak aşağıdaki sonuç aşikar olarak elde edilir.

Sonuç 5.2.15 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{m}}{v_{m:n}(t)}[M_{4.2n} - M](t) \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{5.81}$$

dır.

Şimdi de V varyans fonksiyonu için $V_{4.2n}$ tahmin edicisi ele alınsın. Bu tahmin edicinin tutarlılığı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2.20 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $V_{4.2n}(t)$ tahmin edicisi 1 olasılıkla $V(t)$'ye düzgün yakınsar, yani; $V_{4.2n}(t)$, $V(t)$ için güçlü tutarlı bir tahmin edicidir.

İspat. V varyans fonksiyonu için (3.21) ifadesi göz önüne alınsın. Bu durumda $V_{4.2n}$ tahmin edicisi için $V_{4.2n}(t) = 2M_{4.2n} * M_{4.2n}(t) + M_{4.2n}(t) - M_{4.2n}^2(t)$ yazılabilir. Teorem 5.2.18 ve Lemma 5.2.3 gereği her sabit $t < \tau$ için $M_{4.2n} * M_{4.2n}(t)$ 1 olasılıkla $M * M(t)$'ye düzgün yakınsar. Teorem 2.6.8'in göz önüne alınması ile ispat tamamlanır.

$V_{4.2n}(t)$ tahmin edicisinin her sabit t değeri için asimptotik dağılımını elde edebilmek için (5.19) denkleminde verilen doğrusallaştırma işlemi göz önüne alınsın. Bu durumda $V_{4.2} - V$ farkı

$$V_{4.2n} - V = 2[M_{4.2n} - M] * [M_{4.2n} - M] + [4M + I + C_{m:n} \cdot I] * [M_{4.2n} - M]$$

olarak yazılabilir. Burada $t \geq 0$ için $I(t) = 1$ olup " $\cdot$ " çarpım anlamına gelir ve $C_{m:n} = [M_{4.2n} + M]$ dır. Lemma 5.2.1'in göz önüne alınması ile

$$[M_{4.2n} - M] * [M_{4.2n} - M] = [(\hat{F}_{m:n} - F) * M^{2*} + (\hat{F}_{m:n} - F)^{2*} * M_{4.2n} * M^{2*}] \\ * [(\hat{F}_{m:n} - F) * M^{2*} + (\hat{F}_{m:n} - F)^{2*} * M_{4.2n} * M^{2*}]$$

elde edilir. Konvolüsyon işleminin dağıtılması ile

$$[M_{4.2n} - M] * [M_{4.2n} - M] = (\hat{F}_{m:n} - F)^{2*} * M^{4*} + 2(\hat{F}_{m:n} - F)^{3*} * M_{4.2n} * M^{4*} \\ +(\hat{F}_{m:n} - F)^{4*} * M_{4.2n}^{2*} * M^{4*} \qquad (5.82)$$

dır. $M_{4.2n}$ olasılıkta sınırlı olmak üzere $M_{4.2n}^{2*}$ da olasılıkta sınırlıdır. Ayrıca $(\hat{F}_{m:n} - F)^{2*}$, $(\hat{F}_{m:n} - F)^{3*}$ ve $(\hat{F}_{m:n} - F)^{4*}$ terimleri 1 olasılıkla sıfıra yakınsadığı için yukarıdaki ifadedeki her terim her sabit $t < \tau$ için 1 olasılıkla sıfıra yakınsar. Sonuç olarak ise $t < \tau$ için $[M_{4.2n} - M] * [M_{4.2n} - M](t) \xrightarrow{P} 0$ olduğu görülür. $V_{4.2n} - V$ farkının ikinci teriminde konvolüsyon işleminin parantez içine dağıtılması ile

$$[4M + I + C_{m:n} \cdot I] * [M_{4.2n} - M] = 4M * [M_{4.2n} - M] + [M_{4.2n} - M] \\ +C_{m:n} \cdot [M_{4.2} - M] \qquad (5.83)$$

elde edilir. Teorem 5.2.18'den $t < \tau$ için $C_{m:n} \xrightarrow{\text{hhhy}} C$, $C = 2M$ olduğu açıktır. Sonuç 5.2.13 gereği her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere

$$\sqrt{n}(M_{4.2n} - M)(t) \xrightarrow{d} [1 - F(t)](B \circ Q) * M * M(t)$$

olmasının göz önüne alınması ile Slutsky teoreminden $n \to \infty$ iken

$$\sqrt{m}[C_{m:n} \cdot (M_{4.2n} - M)](t) \xrightarrow{d} \big[C \cdot [M * M * (B \circ Q)(1 - F)]\big](t)$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 2.6.8'in göz önüne alınması ile

$$\sqrt{m}[4M * (M_{4.2n} - M)](t) \xrightarrow{d} 4M * [M * M * (B \circ U)(1 - F)](t)$$

dır. Böylelikle $\sqrt{m}(V_{4.2n} - V)(t)$'nin noktasal olarak limit dağılımı için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.16 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere

$$\sqrt{m}(V_{4.2n} - V)(t) \xrightarrow{d} A * M * M * [(1 - F)(B \circ Q)](t) \tag{5.84}$$

dır. Burada $A = 4M + I + C \cdot I$ dır.

Bu sonuca bağlı olarak V varyans fonksiyonu için $V_{4.2n}$ tahmin edicisine dayalı olarak bir güven aralığı oluşturulabilir. Bunun için öncelikle $A * M * M * [(1 - F)(B \circ Q)](t)$ ifadesinin varyans fonksiyonunun elde edilmesi gereklidir. $\mathcal{M}'(x) = A * M * M(x)$ ve $\lambda'(t, x) = \int_0^x [1 - F(t - y)] d\mathcal{M}'(y)$ yazılsın. Bu durumda $t < \tau$ için,

$$\begin{aligned} A * M * M * [(1 - F)(B \circ Q)](t) &= \int_0^t [(B \circ Q)(t - x)][1 - F(t - x)] d\mathcal{M}'(x) \\ &= \int_0^t [(B \circ Q)(t - x)] d_x \lambda'(t, x) \\ &= \int_0^t \lambda'(t, x) d[(B \circ Q)(x)] \\ &= \int_0^{Q(t)} \lambda'\big(t, t - Q^{-1}(y)\big) dB(y) \\ &\sim N\big(0, \rho^2(t)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \rho^2(t) &= \int_0^{Q(t)} \left[\lambda'\big(t, t - Q^{-1}(y)\big)\right]^2 dy \\ &= \int_0^t [\lambda'(t, t - x)]^2 dQ(x) \\ &= \int_0^t \left[A * M * M(t - x) - \int_0^{t-x} F(t - y) d[A * M * M(y)] \right]^2 dQ(x). \end{aligned}$$

F dağılımı biçimsel olarak bilinmediği için $\rho^2(t)$ fonksiyonu da bilinmemektedir. Bu yüzden bu fonksiyonun tahmin edilmesi gereklidir. Eğer $\rho^2(t)$ için tutarlı bir tahmin edici elde edilebilir ise Slutsky teoremi yardımı ile V fonksiyonunun her sabit t değeri için $V_{4.2n}$ tahmin edicisine dayalı bir güven aralığı elde edilebilir. Bu amaçla $\lambda'(t,x)$ için $\lambda'_{m:n}(t,x) = \int_0^x [1 - \hat{F}_{m:n}(t-y)] d\mathcal{M}'_{m:n}(y)$ tahmin edicisi ele alınsın. Burada $\mathcal{M}'_{m:n} = A_{m:n} * M_{4.2n} * M_{4.2n}$ ve $A_{m:n} = 4M_{4.2n} + I + C_{m:n} \cdot I$ dır. Bu tahmin edicinin tutarlılığı ile ilgili sonuç aşağıda verilir.

Sonuç 5.2.17 Her sabit $t < \tau$ ve $x \in [0,t]$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $\lambda'_{m:n}(t,x)$ 1 olasılıkla $\lambda'(t,x)$'e düzgün yakınsar.

Sonuç 5.2.17 nin ispatı Sonuç 5.2.14 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

$\rho^2(t)$ için bir tahmin edici

$$\rho^2_{m:n}(t) = \int_0^t [\lambda'_{m:n}(t, t-x)]^2 d\hat{Q}_{m:n}(x)$$

olarak tanımlansın. Bu tahmin edicinin tutarlılığı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2.21 Her sabit $t < \tau$ ve $x \in [0,t]$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere $\upsilon^2_n(t)$, $\upsilon^2(t)$'ye olasılıkta düzgün yakınsar.

Teorem 5.2.21'in ispatı Teorem 5.2.19'un ispatına benzer şekilde yapılır. Elde edilen sonuç ve teoremler yardımı ile aşağıdaki sonuç aşikar olarak elde edilir.

Sonuç 5.2.18 Her sabit $t < \tau$ için $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{m}}{\rho_{m:n}(t)} [V_{4.2n} - V](t) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dır.

$M_{4.2n}(t)$ ve $V_{4.2n}(t)$ tahmin edicilerinin hesabı Kısım 5.2.2.1.2'de tarif edilen Schneider vd. (1990) tarafından önerilen yönteme benzer şekilde gerçekleştirilebilir. Ayrıca M yenileme ve V varyans fonksiyonları için istenilen düzeyde güven aralıkları Sonuç 5.2.15 ve 5.2.18'in göz önüne alınması ile hesap edilebilir. Bunun için ise bu tahmin edicilerin sırası ile $\upsilon_{m:n}^2(t)$ ve $\rho_{m:n}^2(t)$ standart hatalarının da hesap edilmesi gerekir. $\upsilon_{m:n}^2(t)$ ve $\rho_{m:n}^2(t)$'ye ilişkin hesap yine Kısım 5.2.2.1.2'de tarif edilen yönteme benzer şekilde gerçekleştirilebilir.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, ilerleyen tür tip II sansürlü gözlem durumunda M yenileme ve V varyans fonksiyonları için sırası ile beşinci bölümde önerilen $\widehat{M}_n, M_{4.1n}, M_{4.2n}$ ve $\widehat{V}_n, V_{4.1n}, V_{4.2n}$ tahmin edicilerinin küçük örneklem performansları kısa bir simülasyon çalışması ile değerlendirilir. Bunun için olaylar arası geçen zaman süreleri dağılımı olan F'nin Üstel, Weibull ve Lognormal dağılıma sahip olduğu durumlar göz önüne alınır. Üstel dağılıma ilişkin sonuçlar Çizelge 6.1-6.3'te verilir. Weibull dağılımına ilişkin sonuçlar Çizelge 6.4-6.6'da verilir. Lognormal dağılıma ilişkin sonuçlar ise Çizelge 6.7-6.9'da verilir. Kısa olması bakımından bu dağılımlara ilişkin yalnızca tek parametre seçimi yapılır. Üstel dağılım durumunda M ve V fonksiyonlarının hesabında bu fonksiyonların analitik değerleri kullanılır. Not edilmelidir ki Üstel dağılımın ortalaması θ iken $M(t) = t/\theta$ ve $V(t) = t/\theta$ dır. Weibull ve Lognormal dağılım durumlarında ise bu fonksiyonlar sayısal olarak hesap edilir. M yenileme fonksiyonunun Kısım 3.3'te verilen hesabında 0.01 adım uzunlukları, V varyans fonksiyonunun hesabında ise 0.02 adım uzunlukları kullanılır. $\widehat{M}_n$ ve $\widehat{V}_n$ tahmin edicilerinin hesabında da yine 0.01 ve 0.02 adım uzunlukları kullanılır. $M_{4.2n}$ ve $V_{4.2n}$ tahmin edicilerinin hesabında ise (5.61) ve (5.67) ifadelerinden yararlanılır iken gözlemler 100 katsayısı ile çarpılıp en yakın tamsayıya yuvarlanarak hesap yapılır. Bu fonksiyonlara ilişkin değerler $t = 0.5, 1, 2, 3, 5, 10$ noktalarında gözlenir. Simülasyon her bir durum için 1000 tekrar üzerine kurulur. Weibull ve Lognormal modelleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri hesaplanırken sırası ile Kısım 4.2.2.4 ve 4.3.3.4'de tarif edilen EM algoritması ile hesap yapılır. EM algoritması için başlangıç değerleri ise ilgili uyarlanmış en çok olabilirlik tahmin edicileri olarak seçilir. EM algoritmasının yakınsama koşulu ise $\epsilon = 10^{-5}$ seçimi ile kontrol edilir. Her bir model için $n = 20, 30, 50$ örneklem çapında sırası ile

- $m = 15,\ (R_1 = R_2 = \cdots = R_5 = 1,\ R_6 = R_7 = \cdots = R_{15} = 0)$
- $m = 20,\ (R_1 = R_2 = \cdots = R_{10} = 1,\ R_{11} = R_{12} = \cdots = R_{20} = 0)$
- $m = 35,\ (R_1 = R_2 = \cdots = R_{15} = 1,\ R_{16} = R_{17} = \cdots = R_{35} = 0)$

sansürleme şemaları için işlem yapılır. Çizelgelerde tahmin ediciler için her bir t değerindeki ilk satır tahmin değeri iken ikinci satır o tahmin edicinin hata kareler ortalaması (HKO) değerini belirtir. Buna göre ilgili sonuçlar aşağıdaki çizelgelerde verilir.

Çizelge 6.1 Üstel(1) durumunda m=15, ($R_1=\ldots=R_5=1$, $R_6=\ldots=R_{15}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.5	0.5392	0.5249	0.4672	0.5	0.5392	0.5269	0.8169
		0.024	0.0427	0.0598		0.024	0.0587	0.299
1	1	1.0784	1.0388	1.0068	1	1.0784	1.0471	1.2768
		0.096	0.1215	0.1251		0.096	0.2183	0.5041
2	2	2.1567	2.079	2.086	2	2.1567	2.0907	2.1965
		0.3841	0.382	0.4009		0.3841	0.9716	1.2904
3	3	3.2351	3.1097	3.1652	3	3.2351	3.1512	3.1162
		0.8643	0.8023	0.8703		0.8643	2.4137	2.5781
5	5	5.3918	5.1611	5.3237	5	5.3918	5.3289	4.9557
		2.4009	2.1271	2.39		2.4009	8.3996	6.6577
10	10	10.7835	10.1447	10.7199	10	10.7835	11.9089	9.5543
		9.6034	8.6206	9.5775		9.6034	77.4004	25.6318

Çizelge 6.2 Üstel(1) durumunda m=20, ($R_1=\ldots=R_{10}=1$, $R_{11}=\ldots=R_{20}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.5	0.5367	0.5218	0.4732	0.5	0.5367	0.528	0.7777
		0.0169	0.0297	0.0405		0.0169	0.0378	0.2066
1	1	1.0734	1.0407	1.0115	1	1.0734	1.0424	1.2395
		0.0678	0.0819	0.0828		0.0678	0.1424	0.3156
2	2	2.1468	2.0764	2.0882	2	2.1468	2.0768	2.163
		0.2711	0.2556	0.2748		0.2711	0.6359	0.7873
3	3	3.2203	3.1091	3.1649	3	3.2203	3.1136	3.0864
		0.61	0.5426	0.6101		0.61	1.5789	1.5974
5	5	5.3671	5.1476	5.3184	5	5.3671	5.3385	4.9334
		1.6945	1.4467	1.7107		1.6945	5.9203	4.2328
10	10	10.7342	10.0862	10.7019	10	10.7342	12.4201	9.5508
		6.7778	5.7873	6.9698		6.7778	70.8614	16.7433

Çizelge 6.3 Üstel(1) durumunda m=35, ($R_1=\ldots=R_{15}=1$, $R_{16}=\ldots=R_{35}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.5	0.5125	0.5116	0.4787	0.5	0.5125	0.5152	0.6893
		0.008	0.0174	0.0295		0.008	0.0213	0.1481
1	1	1.025	1.0103	0.9913	1	1.025	1.0235	1.1661
		0.0318	0.0448	0.0517		0.0318	0.081	0.1858
2	2	2.0501	2.007	2.0164	2	2.0501	2.0435	2.1197
		0.1273	0.1379	0.1442		0.1273	0.3467	0.4425
3	3	3.0751	2.995	3.0416	3	3.0751	3.0861	3.0733
		0.2865	0.2821	0.301		0.2865	0.893	0.9408
5	5	5.1252	4.9532	5.092	5	5.1252	5.2725	4.9805
		0.7958	0.7399	0.8071		0.7958	3.1769	2.6625
10	10	10.2505	9.7003	10.2179	10	10.2505	12.1372	9.7485
		3.1832	3.074	3.1956		3.1832	34.0655	11.1959

Çizelge 6.4 Weibull(2,1) durumunda m=15, ($R_1=\ldots=R_5=1$, $R_6=\ldots=R_{15}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.2308	0.1927	0.2426	0.2006	0.1971	0.1633	0.2014	0.2769
		0.0091	0.0124	0.0101		0.0057	0.0071	0.0137
1	0.7537	0.7404	0.7737	0.7722	0.4463	0.3828	0.4501	0.4259
		0.0307	0.0362	0.0274		0.0138	0.0208	0.021
2	1.8940	1.9008	1.9364	1.9154	0.7299	0.5964	0.7368	0.7239
		0.0973	0.1005	0.0961		0.0633	0.0835	0.0709
3	3.0218	3.0501	3.0849	3.0586	1.0418	0.8392	1.0414	1.022
		0.2122	0.2181	0.2093		0.1426	0.1636	0.1532
5	5.2785	5.347	5.3833	5.3449	1.6582	1.3266	1.6527	1.618
		0.5801	0.5907	0.5681		0.3863	0.4519	0.4135
10	10.9204	11.0891	11.1263	11.0608	3.1999	2.5445	3.2025	3.1082
		2.2973	2.337	2.2376		1.5199	2.33	1.6231

Çizelge 6.5 Weibull(2,1) durumunda m=20, (R_1=…=R_{10}=1, R_{11}=...=R_{20}=0) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.2308	0.1878	0.2386	0.1962	0.1971	0.1587	0.1984	0.2692
		0.0072	0.0084	0.0075		0.0043	0.0042	0.0091
1	0.7537	0.7549	0.7669	0.766	0.4463	0.367	0.4403	0.4139
		0.0235	0.0264	0.02		0.0116	0.0117	0.0124
2	1.894	1.9348	1.9258	1.9055	0.7299	0.5634	0.7144	0.7031
		0.0801	0.0764	0.0731		0.052	0.0462	0.0414
3	3.0218	3.1055	3.0714	3.045	1.0418	0.7884	1.0109	0.9924
		0.1797	0.1684	0.1614		0.1194	0.0953	0.0919
5	5.2785	5.4449	5.363	5.3241	1.6582	1.2424	1.6017	1.5709
		0.5017	0.4603	0.4429		0.3235	0.2664	0.253
10	10.9204	11.2934	11.0904	11.0217	3.1999	2.3775	3.0922	3.0173
		2.0203	1.83	1.7589		1.2691	1.3016	1.0083

Çizelge 6.6 Weibull(2,1) durumunda m=35, (R_1=…=R_{15}=1, R_{16}=...=R_{35}=0) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.2308	0.1911	0.2395	0.1995	0.1971	0.1628	0.2021	0.2715
		0.0046	0.0047	0.0047		0.0029	0.0026	0.0082
1	0.7537	0.7389	0.7701	0.7668	0.4463	0.3806	0.4481	0.4219
		0.0134	0.0151	0.0117		0.0075	0.0075	0.0079
2	1.894	1.9007	1.9222	1.9013	0.7299	0.5864	0.732	0.7227
		0.0436	0.0436	0.0419		0.036	0.0284	0.0255
3	3.0218	3.0505	3.062	3.0359	1.0418	0.8241	1.0432	1.0235
		0.0965	0.0951	0.0919		0.0822	0.0596	0.0558
5	5.2785	5.3485	5.3425	5.3051	1.6582	1.3012	1.6618	1.6251
		0.2669	0.2583	0.2511		0.2221	0.1758	0.1521
10	10.9204	11.0936	11.0414	10.9779	3.1999	2.4933	3.2433	3.1291
		1.0675	1.0166	0.9938		0.8719	1.3857	0.6027

Çizelge 6.7 Lognormal(0,1) durumunda m=15,($R_1=\ldots=R_5=1$, $R_6=\ldots=R_{15}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.2599	0.255	0.2673	0.3635	0.2245	0.2186	0.2263	0.6766
		0.01	0.0138	0.1205		0.0068	0.0083	1.0957
1	0.6264	0.6384	0.6442	0.6974	0.5142	0.5054	0.5139	0.9951
		0.0339	0.0442	0.1116		0.0245	0.032	1.326
2	1.3194	1.3756	1.3629	1.3652	1.1255	1.0989	1.1275	1.6321
		0.1291	0.1437	0.1661		0.1168	0.1767	1.9365
3	1.9799	2.0848	2.0559	2.033	1.7935	1.7425	1.7751	2.2692
		0.2962	0.3124	0.3095		0.305	0.4979	2.7288
5	3.2573	3.4663	3.4124	3.3687	3.263	3.1435	3.1489	3.5433
		0.8645	0.8842	0.8601		1.0504	1.9011	4.9392
10	6.3595	6.8428	6.7549	6.7077	7.4273	7.0457	6.6625	6.7285
		3.736	3.8663	3.8124		5.7651	13.2505	15.4025

Çizelge 6.8 Lognormal(0,1) durumunda m=20, ($R_1=\ldots=R_{10}=1$,$R_{11}=\ldots=R_{20}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.2599	0.2475	0.2661	0.289	0.2245	0.2129	0.2251	0.444
		0.0103	0.0111	0.0389		0.0073	0.007	0.1004
1	0.6264	0.6252	0.612	0.6252	0.5142	0.4984	0.5042	0.7334
		0.0299	0.0387	0.0405		0.0276	0.027	0.1253
2	1.3194	1.3528	1.3385	1.2978	1.1255	1.0914	1.0534	1.3122
		0.0934	0.0744	0.0843		0.1336	0.1795	0.2226
3	1.9799	2.0532	1.9892	1.9703	1.7935	1.7373	1.7102	1.8911
		0.1932	0.1643	0.1783		0.3519	0.3608	0.3881
5	3.2573	3.4181	3.3389	3.3153	3.263	3.1491	2.9626	3.0487
		0.509	0.5421	0.5236		1.2252	0.8114	1.0473
10	6.3595	6.7586	6.7188	6.678	7.4273	7.0914	5.9453	5.943
		2.0139	2.3791	2.3712		6.8013	5.8421	6.1678

Çizelge 6.9 Lognormal(0,1) durumunda m=35, ($R_1=\ldots=R_{15}=1$, $R_{16}=\ldots=R_{35}=0$) sansürleme şeması için sonuçlar

t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$M_{4.2n}(t)$	$M_{4.1n}(t)$	$V(t)$	$\widehat{V}_n(t)$	$V_{4.2n}(t)$	$V_{4.1n}(t)$
0.5	0.2599	0.248	0.2549	0.429	0.2245	0.2109	0.2167	0.0197
		0.0034	0.004	0.0653		0.0021	0.0024	0.5879
1	0.6264	0.6304	0.6314	0.763	0.5142	0.4925	0.5036	0.3939
		0.012	0.0157	0.043		0.0075	0.0087	0.5072
2	1.3194	1.3667	1.3829	1.4312	1.1255	1.0796	1.0729	1.1421
		0.0476	0.0395	0.0393		0.036	0.0662	0.4496
3	1.9799	2.0761	2.0888	2.0993	1.7935	1.7189	1.7153	1.8904
		0.1116	0.0829	0.0798		0.0942	0.1824	0.4996
5	3.2573	3.4603	3.4747	3.4356	3.263	3.1144	3.0669	3.3869
		0.3339	0.2779	0.2834		0.3214	0.5898	0.8398
10	6.3595	6.8527	6.8096	6.7764	7.4273	6.9934	7.1586	7.1281
		1.4853	1.5863	1.5247		1.7177	3.0309	3.2229

Çizelgeler incelendiğinde tahmin edicilerin hemen hemen tüm durumlarda iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Genelde $\widehat{M}_n(t)$ ve $\widehat{V}_n(t)$ parametrik tahmin edicileri parametirik olmayan tahmin edicilerden HKO ölçütüne göre daha iyi sonuç vermiştir. Bu beklenen bir durumdur. Ancak özel olarak Üstel dağılım için $M_{4.2n}(t)$ tahmin edicisi $\widehat{M}_n(t)$ tahmin edicisinden daha küçük HKO değerlerine sahiptir. Fakat yine Üstel dağılım için $V_{4.2n}(t)$ tahmin edicisinin HKO değerlerinin yüksek olduğu gözlenmiştir. Weibull dağılımı durumunda $\widehat{M}_n(t)$ ve $\widehat{V}_n(t)$ parametrik tahmin edicileri parametrik olmayan tahmin edicilerden daha küçük HKO değerlerine sahip olmalarına rağmen bu tahmin edicilerin yanlı oldukları görülmektedir. Lognormal dağılım durumunda da yine parametrik tahmin ediciler daha küçük HKO değerlerine sahip olup parametrik olmayan tahmin ediciler t nin büyük değerleri için birbirine yakın performans göstermiştir.

7. SONUÇ

Bu çalışmada sansürlü gözlem durumunda bir yenileme sürecinin iki önemli karakteristiği olan yenileme ve varyans fonksiyonlarının parametrik ve parametrik olmayan yöntemler ile tahmini problemi üzerinde durulmuştur. Bunun için öncelikle çalışma boyunca kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir. Sonra yenileme süreci, yenileme ve varyans fonksiyonları ile ilgili gerekli bazı bilgiler verilmiştir. Daha sonra ise çalışma boyunca kullanılacak olan sağdan sansürleme türleri ve bu sansürleme türlerine ilişkin en çok olabilirlik tahmin problemi Üstel, Weibull ve Lognormal dağılım durumlarında detaylıca incelenmiştir. Sonrasında tezin ana amacı olan sansürlü veri durumunda M yenileme ve V varyans fonksiyonlarının tahmini problemi, hem parametrik hem de parametrik olmayan yöntemler kullanılarak çalışılmıştır. Öncelikle parametrik tahmin problemi, F yenileme sürecine ilişkin olaylar arası geçen zaman dağılımının parametrelerinin tahminine dayalı olarak çalışılmış ve ilgili tahmin edicilerin tutarlılık, asimptotik yansızlık ve asimptotik normallik gibi önemli istatistiksel özellikleri elde edilmiştir. Parametrik olmayan tahmin probleminde ise rasgele sansürlü ve ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumlarında F'nin parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicilerine dayalı olarak M ve V fonksiyonlarının tahmini üzerinde durulmuştur. Rasgele sansürlü örneklem durumunda M ve V fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmini ilk olarak Baxter ve Li (1995) tarafından çalışılmış olup, bu çalışmada bulunan sonuçlar hatırlatılmıştır. Sonrasında ise ilerleyen tür tip II sansürlü örneklem durumunda M ve V fonksiyonları için F'nin parametrik olmayan en çok olabilirlik tahmin edicisine dayalı olarak tahmin ediciler önerilmiş ve bu tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri elde edilmiştir. Tahmin edicilerin küçük örneklem performansı ise küçük bir simülasyon aracılığı ile incelenmiştir. Hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin ediciler iyi sonuçlar vermiş olup, beklendiği üzere parametrik tahmin edicilerin genel olarak daha küçük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir.

Belirtilmelidir ki farklı türdeki sansürlü örneklem durumlarında M ve V fonksiyonları için parametrik ve parametrik olmayan tahmin problemi bu tezde elde edilen araçlara dayalı olarak gerçekleştirilebilir. Ayrıca tam örneklem durumu için Frees'in tahmin edicisi olarak adlandırılan tahmin edici temel alınarak M ve V fonksiyonları için herhangi bir sansürlü örneklem durumda tahmin problemi çalışılabilir. Bunlara ek olarak, bu çalışmadan yola çıkarak çalışılabilecek bir diğer problem, iki veya ikiden çok boyutlu yenileme süreçlerinde sansürlü örneklem durumunda tahmin problemidir.

KAYNAKLAR

Altındağ, Ö. 2012. Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonlarının Monte Carlo Tahmini ve Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Athreya, K.B. and Lahiri, S.N. 2006. Measure Theory and Probability Theory. Springer.

Aydoğdu, H. 1997. Yenileme Süreçlerinde Tahmin. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aydoğdu, H. 2005. A pointwise estimator for the k-fold convolution of a distribution function. Communication in Statistics: Theory and Methods. 34; 1939-1956.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. 2000. Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. Springer.

Balakrishnan, N. and Cohen, A.C. 1991. Order Statistics and Inference. Academic Press.

Balakrishnan, N. and Cramer, E. 2014. The Art of Progressive Censoring: Applications to Reliability and Quality. Springer. New York.

Balakrishnan, N. Kannan, N. Lin, C.T. and Wu, S.J.S. 2003. Point and interval estimation for Gaussian distribution based on progressively type-II censored samples. IEEE Transactions on Reliability. 52(2); 90-95

Balakrishnan, N. Kannan, N. Lin, C.T. and Wu, S.J.S. 2004. Inference for the extreme value distribution under progressive type-II censoring. Journal of Statistical Computation and Simulation. 74(1); 25-45.

Barlow, E.R. and Proschan, F. 1965. Mathematical Theory of Reliability. John Wiley & Sons. New York.

Barnett, V.D. 1966. Order statistics estimators of the location of the Cauchy distribution. Journal of the American Statistical Association. 61.316; 1205-1218.

Baxter, L.A. 1981. Some remarks on numerical convolution. Communication in Statistics: Simulation and Computation. 10(3); 281-288.

Baxter, L.A. and Li, L. 1994. Non-parametric confidence intervals for the renewal function and the point availability. Scandinavian Journal of Statistics. 21; 277-287.

Baxter, L.A. and Li, L. 1995. Nonparametric confidence intervals for the renewal function with censored data. Nonparametric Statistics. 4; 317-326.

Billingsley, P. 1968. Convergence of Probability Measures. John Wiley and Sons.

Bordes, L. 2004. Non-parametric estimation under progressive censoring. Journal of Statistical Planning and Inference. 119(1);171-189.

Breslow, N. and Crowley, J. 1974. A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship. The Annals of Statistics. 2(3); 437-453.

Brown, M., Solomon, H. and Stevens, M.A. 1981. Monte Carlo simulation of renewal function. Journal of Applied Probability. 13; 426-434.

Chow, Y.S. and Teicher, H. 1978. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales . Springer-Verlag. New York.

Cleroux, R. and McConalogue, D.J. 1976. A numerical algorithm for recursively-defined convolution integrals involving distribution functions. Management Science. 22; 1138-1146.

Danış, Ç. 2008. Sansürlü Gözlemlerde Yenileme Fonksiyonunun Tahmini. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 83 s., Ankara.

Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. Journal of the Royal Statistical Society Series B. 39(1); 1-38.

Doob, J.L. 1953. Stochastic Process. John Wiley and Sons. New York.

Feller, W. 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II. Second Edition. John Wiley & Sons. New York.

Fleming, T.R. and Harrington, D.P. 1990. Counting Process and Survival Analysis. John Wiley & Sons. New York.

Frees, E.W. 1986a. Warranty analysis and renewal function estimation. Naval Research Logistics. 33(3); 361-372.

Frees, E.W. 1986b. Nonparametric renewal function estimation. The Annals of Statistics. 14(4); 1366-1378.

Harel, M., Schneider, H. and O'Cinneide, C. 1995. Asymptotics of the sample renewal function. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 189(1); 240-255.

Hogg, R.V. and Craig, A.T. 1995. Introduction to Mathematical Statistics. Printice Hall. New Jersey.

Kaplan, E.L. and Meier, P. 1958. Nonparametric estimation from incomplete observations. Journal of the American Statistical Association. 53(282); 457-481.

Kara, M. 2014. α-Seri Süreçlerde Tahmin. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Karlin, S. and Taylor, H.M. 1975. A First Course in Stochastic Process. Second Edition. Academic Press. New York.

Kawata, T. 1972. Fourier Analysis in Probability Theory. Academic Press. New York.

Lawless, J.F. 2003. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. John Wiley and Sons.

Lin, B. 1988. Estimation of the Renewal Function. Doktora Tezi. Louisiana State Üniversitesi Ziraat Yüksekokulu.

Louis, T.A. 1982. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm. Journal of the Royal Statistical Society Series B. 44(2); 226-233.

McLahlan, G.J. and Krishnan, T. 1997. The EM Algorithm and Extensions. John Wiley and Sons.

Miller, R.G. 1981. Survival Analysis. John Wiley and Sons.

Ng, H.K.T., Chan, P.S. ve Balakrishnan, N. 2002. Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm. Computational Statistics and Data Analysis. 39(4); 371-386.

Puthenpura, N.K. ve Sinha, N.K. 1986. Modified maximum likelihood method for the robust estimation of system parameters from very noisy data. Automatica. 22; 31-35.

Ross, S.M. 1983. Stochastic Processes. John Wiley & Sons. New York.

Schneider, H., Lin, B.S. and O'Cinneide, C. 1990. Comparison of nonparametric estimators for the renewal function. Applied Statistics. 39(1); 55-61.

Serfling, R.J. 1980. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. John Wiley & Sons. ABD.

Shao, J. 2003. Mathematical Statistics. Springer.

Shorack, G.R. and Wellner, J.A. 1986. Empirical Process with Applications to Statistics. John Wiley & Sons. 998 s., New York.

Skorokhod, A.V. 1956. Limit theorems for stochastic process. Theory of Probability and Its Applications. 1(3); 261-290.

Smith, W.L. 1958. Renewal theory and its ramifications. Journal of the Royal Statistical Society Series B. 20(2); 243-302.

Stone, C. 1963. Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals. Proceedings of the American Mathematical Society. 14(5); 694-696.

Stute, W. and Wang, J.L. 1993. The strong law under random censorship. The Annals of Statistics. 21(3); 1591-1607.

Tiku, M.L. 1967. Estimating the mean and standard deviation from censored normal samples. Biometrika, 54; 155-165.

Tiku, M.L. 1968. Estimating the parameters of lognormal distribution from censored samples. Journal of the American Statistical Association. 63; 134-140.

Tiku, M.L. and Akkaya, A. D. 2004. Robust Estimation and Hypothesis Testing. New Age International (P) Limited, Publishers.

Viveros, R. and Balakrishnan, N. 1994. Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. Technometrics. 36(1); 84-91.

Wu, C.F.J. 1983. On the convergence properties of the EM algorithm. The Annals of Statistics. 1983; 95-103.

Xie, M. 1989 Some results on the renewal-type equations. Communication in Statistis: Theory and Methods. 18(3); 1159-1171.

Zheng, G. 2001. A characterization of the factorization of hazard function by the Fisher information under type II censoring with application to the Weibull family. Statistics and Probability Letters. 52(3); 249-253.

Zheng, G. and Gaswirth, J.L. 2001. On the Fisher information in randomly censored data. Statistics and Probability Letters. 52(4); 421-426.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Ömer ALTINDAĞ
Doğum Yeri :Altındağ/ANKARA
Doğum Tarihi :13.10.1987
Medeni Hali :Evli
Yabancı Dili :İngilizce

Eğitim Durumu

Lise :İncirli Lisesi (2001-2005)
Lisans :Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2005-2009)
Yüksek Lisans :Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2009-2012)

Çalıştığı Kurumlar

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2010-2011)

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2011-2016)

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2016-)

Uluslararası Makaleler

Aydoğdu, H. and Altındağ, Ö. 2016. Computation of the mean value and variance functions in geometric process. Journal of Statistical Computation and Simulation. 86(5); 986-995.

Altındağ, Ö., Çankaya, M.N., Yalçınkaya, A. and Aydoğdu, H. 2017. Statistical inference for the Burr type III distribution under type II censored data. Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1:Mathematics and Statistics. 66(2); 297-310.

Yalçınkaya, A., Çankaya, M.N., Altındağ, Ö. and Tuaç, Y. 2017. Investigation for the robustness of significance level when the normality assumption in hypothesis tests is violated. Gazi University Journal of Science. 30(2); 247-259.