ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN NONSELFADJOİT q-FARK DENKLEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Güher Gülçehre ÖZBEY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

TEZ ONAYI

Güher Gülçehre ÖZBEY tarafından hazırlanan "Sınır Koşullarında Spektral Parametre Bulunduran Nonselfadjoint q-Fark Denkleminin Spektral Analizi" adlı tez çalışması 28/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM
Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI
Kastamonu Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU
Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

28/06/2017

Güher Gülçehre ÖZBEY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN NONSELFADJOİNT *q*-FARK DENKLEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Güher Gülçehre ÖZBEY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan spektral analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde, nonselfadjoint *q*-fark denklemi ile üretilen sınır koşulunda spektral parametre bulunduran ikinci mertebeden sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer probleminin Jost çözümü ile Jost fonksiyonu bulunmuş ve Jost fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Bununla birlikte, verilen sınır değer probleminin Green fonksiyonu ve resolvent operatörü bulunup özdeğerler ve spektral tekillikler kümesi tanımlanmıştır. Ayrıca analitik fonksiyonlar için teklik teoremleri kullanılarak özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin özellikleri incelenmiştir. Özdeğer ve spektral tekillikleri ile onların katlarının sonluluğunu garantileyen koşul belirtilmiştir.

Son bölümde, önceki bölümde verilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Haziran 2017, 49 sayfa
Anahtar Kelimeler: Spektral Teori, Jost Çözümü, *q*-Fark Denklemi, Özdeğer, Spektral Tekillik, Green Fonksiyonu

ABSTRACT

Master Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF NONSELFADJOINT *q*-DIFFERENCE EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITIONS

Güher Gülçehre ÖZBEY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter some basic definitions and main theorems of spectral analysis that we will use in next chapters are given.

The third chapter is composed of three sections. In this chapter, the second-order boundary value problem is considered which is generated by a nonselfadjoint *q*-difference equation and boundary condition with spectral parameter. The Jost solution and Jost function of the boundary value problem are found and the properties of Jost function are investigated. Moreover, the Green function and the resolvent operator of the boundary value problem are obtained. The sets of eigenvalues and the spectral singularities of this boundary value problem are defined. Also, by using the uniquness theorems for analytic functions, the properties of the eigenvalues and spectral singularities are examined. The condition that guarantees that the related boundary value problem has a finite number of eigenvalues and spectral singularities with finite multiplicities is presented.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results considered in previous chapters.

July 2017, 49 sayfa
Key Words: Spectral Theory, Jost Solution, *q*-Difference Equation, Eigenvalue, Spectral Singularity, Green Function

TEŞEKKÜR

Çalışma konumun belirlemesinde ve bilimsel bir düzlemde gelişerek sonuçlanmasında büyük katkıları olan, bu süreçte bilimsel yönlendirmeleri ile bana sürekli yol gösteren ve aynı zamanda her türlü desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' na;Çalışmamı gerçekleştirirken dostça önerileri ve eleştirileri ile bana desteklerini sunan Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Hocalarına; Bu uzun ve yorucu süreçte, yakınlıklarını, desteklerini ve anlayışlarını esirgemeyen sevgili arkadaşlarıma; Çalışmamın her aşamasında yanımda olan, kendilerini ihmal ettiğim zamanlarda dahi özverili yaklaşımlarını ve iyi niyetlerini eksik etmeyen canım aileme teşekkürlerimi sunarım. Çalışma azmimi onların varlığına borçluyum.

Güher Gülçehre ÖZBEY
Ankara, Haziran 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	Hilbert uzayı
$\mu(t) = (q-1)t$	Graininess fonksiyonu
$q^{\mathbb{N}}$	$\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$
$q^{\mathbb{N}_0}$	$\{q^n : n \in \mathbb{N}_0\}$
$\ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right)$	$\left\{a = \{a(t)\}_{t \in q^{\mathbb{N}}} : \Vert a\Vert_q^2 = \sum_{t \in q^{\mathbb{N}}} \mu(t)\, \lvert q(t)\rvert < \infty\right\}$
$\ell_2\left(q^{\mathbb{N}_0}\right)$	$\left\{a = \{a(t)\}_{t \in q^{\mathbb{N}_0}} : \Vert a\Vert_q^2 = \sum_{t \in q^{\mathbb{N}_0}} \mu(t)\, \lvert q(t)\rvert < \infty\right\}$
$<,>$	$\ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right)$ uzayındaki iç çarpım
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$R_\lambda(A)$	A operatörünün resolvent operatörü
$\rho(A)$	A operatörünün resolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_d(A)$	A operatörünün özdeğerler kümesi
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_{ss}(A)$	A operatörünün spektral tekillikler kümesi
$f^{\triangle}(t)$	f fonksiyonunun q-türevi
$\operatorname{Im}(z)$	z sayısının imajiner kısmı
$\operatorname{Re}(z)$	z sayısının reel kısmı
$\mu(G)$	G kümesinin *Lebesgue* ölçüsü
$[\lvert x\rvert]$	x reel sayısının tam kısmı

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz ve matematiksel fiziğin birçok problemi, diferensiyel operatörlerin spektral analizinin incelenmesini gerekli kılmıştır. Bu nedenle diferensiyel operatörlerin spektral analizi birçok önemli çalışmanın temel konusu olmuştur. Bu çalışmalar genellikle diferensiyel operatörlerin spektrum yapılarının ve özelliklerinin incelenmesine ilişkindir. İlk olarak 1951 yılında Keldys tarafından regüler nonselfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizi üzerine çalışma yapılmıştır. Sınırsız aralıkta tanımlı singüler nonselfadjoint diferensiyel operatörlerinin spektral analizinin incelenmesine 1960 yılında ilk Naimark tarafından başlanmıştır. Uygulamada duyulan ihtiyaçlar ile Schrödinger, Sturm-Liouville, Klein Gordon gibi diferensiyel denklemleri içeren problemlere ait çalışmalar günümüze kadar ulaşmıştır.

Spektral analizin bilgisayar çalışmalarında kullanılması için sürekli durumda ele alınan diferensiyel denklem ve bu denklemlere ilişkin operatörlerin diskre durumlarını içeren çalışmalar literatürde yerini almıştır. Bu tür problemler mühendislik, ekonomi, finans, biyoloji ve diğer alanların problemleri için yapılan modelleme çalışmaları ile fark operatörlerinin spektral analizinin incelenmesine yol açmıştır. Bu konuda çeşitli matematikçiler tarafından çok sayıda çalışma yapılmıştır (Guseinov 1976), (Bairamov ve Celebi 1999), (Adıvar ve Bairamov 2001), (Bairamov vd. 2010), (Bairamov ve Koprubasi 2010), (Bairamov vd. 2011), (Koprubasi 2014), (Bairamov ve Aygar 2012).

Son yıllarda ise matematik ve fizik bilimleri arasında köprü görevi yapan ve limitsiz analiz olarak bilinen quantum analizin popülerliğinin artması ile q-fark denklemlerinin ve operatörlerinin spektral analizi de önem kazanmıştır.

Quantum fark operatörleri sayılar teorisinde, ortogonal polinomlar teorisinde, matematiksel fizikte ve temel hiper-geometrik fonksiyonlar teorisi ile birlikte mekanik ve rölativistik teorisinde geniş uygulamalara sahiptir.

Klasik analizdeki bazı temel tanım ve teoremlerin q-analogları Kac ve Pokman tarafından verilmiştir. Bohner, Peterson ve Guseinov önemli bir çok sonucu, q-fark denklemlerini özel durum olarak içeren dinamik denklemler için keyfi zaman skalasında elde etmişlerdir. Quantum fark denklemi veya bu denklemlere ilişkin q-fark operatörlerin spektral analizini içeren çalışmalar da çok olmamak ile birlikte son yıllarda sayıca artmıştır.

Adıvar ve Bohner (2006), $\{a(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$, $\{b(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ kompleks diziler ve $\forall\ t \in q^{\mathbb{Z}}$ için $a(t) \neq 0$ olmak üzere $\ell_2\left(q^{\mathbb{Z}}\right)$ uzayında λ spektral parametre olmak üzere

$$qa(t)\,y(qt) + b(t)\,y(t) + a\left(\frac{t}{q}\right)y\left(\frac{t}{q}\right) = \lambda y(t)\,,\ t \in q^{\mathbb{Z}}$$

q-fark denklemi ve

$$\sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \left|\frac{\ln t}{\ln q}\right| \left(|1 - a(t)| + |b(t)|\right) < \infty$$

sınır koşulu tarafından üretilen nonselfadjoint q-fark operatörünün üstel türden Jost çözümünü, sürekli spektrumunu, resolvent operatörünü, özdeğerleri ve spektral tekillikleri ile bunların özelliklerini düzlemde verilen teklik teoremlerini kullanarak incelemişlerdir. Ayrıca aynı problemin özdeğerlerine ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonlarını elde ederek bunların yapısal ve nicel özelliklerini araştırmışlardır. Huseyinov ve Bairamov (2008), ikinci mertebeden selfadjoint q-fark denklemlerinin özdeğer problemi ve uygulamaları üzerine çalışmışlardır. Ayrıca q-fark denkleminin ilk olarak klasik fark durumuna benzer biçimini elde etmişlerdir. Daha sonra Aygar ve Bohner (2016), polinom türde Jost çözüme sahip selfadjoint q-fark denkleminin spektral özelliklerini hem skaler hem matris katsayılı durumda ele almışlardır.

Ayrıca Aygar (2016-2017), matris katsayılı nonselfadjoint q-fark denkleminin spektral analizini hem üstel hem polinom türden Jost çözüme sahip olması durumunda incelemiş, problemlerin özdeğerleri ve spektral tekillikleri için özellikler elde etmiştir.

Bu tezde $\{a(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}_0}}$, $\{b(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ kompleks terimli diziler, $\forall\ t \in q^{\mathbb{N}_0}$ için $a(t) \neq 0$ ve

λ spektral parametre olmak üzere

$$qa\left(t\right)y\left(qt\right)+b(t)y(t)+a\left(\frac{t}{q}\right)y\left(\frac{t}{q}\right)=\lambda y(t),\ t\in q^{\mathbb{N}}$$

q-fark denklemi ve

$$\left(\gamma_0+\gamma_1\lambda\right)y\left(q\right)+\left(\beta_0+\beta_1\lambda\right)y(1)=0,\ \gamma_0\beta_1-\gamma_1\beta_0\neq 0,\ \gamma_1\neq -\frac{\beta_0}{a(1)}$$

sınır koşulu tarafından üretilen nonselfadjoint sınır değer probleminin

$$\sum_{t\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\left(\left|1-a\left(t\right)\right|+\left|b\left(t\right)\right|\right)<\infty$$

koşulu altında Jost çözümü, özdeğerleri ve spektral tekillikleri ile bunların yapısal özellikleri incelenecektir. Bu inceleme yapılırken ilgili sınır değer probleminin Green fonksiyonu ve resolvent operatörü de elde edilecektir. Burada $i=0,\,1$ için γ_i ve β_i kompleks sayılardır.

Ayrıca $\{a(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}_0}}$, $\{b(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ kompleks dizileri için

$$\sup_{t\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\exp\left[\varepsilon\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)^{\delta}\right]\left(\left|1-a\left(t\right)\right|+\left|b\left(t\right)\right|\right)\right\}<\infty$$

koşulunun gerçeklenmesi durumunda da ele alınan sınır değer probleminin özdeğer ve spektral tekillikleriyle ilgili sonuçlar verilecektir. Bu özdeğer ve spektral tekilliklerin nicel özellikleri incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde üçüncü ve dördüncü bölümlerde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 Eğer $(A-\lambda I)^{-1}$ operatörü var, sınırlı ve tüm $\mathbb{H}$ Hilbert uzayında tanımlı ise bu operatöre A operatörünün resolvent operatörü denir ve

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$$

şeklinde gösterilir (Naimark 1960).

Tanım 2.2 A operatörünün resolvent kümesi $\rho(A)$ ile gösterilir ve

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \; : \; \begin{array}{c} R_\lambda(A) \text{ var} \\ R_\lambda(A) \text{ sınırlı} \\ \overline{D(R_\lambda(A))} = \mathbb{H} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Naimark 1960).

Tanım 2.3 A operatörünün spektrumu $\sigma(A)$ ile gösterilir ve

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

şeklinde tanımlanır (Naimark 1960).

Tanım 2.4 A operatörünün özdeğerler kümesi (diskret spektrum) $\sigma_d(A)$ ile gösterilir ve

$$\sigma_d(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(A) \text{ mevcut değildir } \}$$

şeklinde tanımlanır (Naimark 1960).

Tanım 2.5 A operatörünün sürekli spektrumu $\sigma_c(A)$ ile gösterilir ve

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{array}{c} R_\lambda(A) \text{ var} \\ R_\lambda(A) \text{ sınırsız} \\ \overline{D\left(R_\lambda(A)\right)} = \mathbb{H} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Naimark 1960).

Literatürde nonselfadjoint denklemlerin ve bu denklemlere ilişkin operatörlerin spektrumunun incelenmesi çalışmaları yapılırken resolvent operatörün kutbu olan, ilk bakışta resolvent operatörü tanımsız yaptığı için özdeğer gibi düşünülen ancak sürekli spektrumun üzerinde olan aykırı noktalarla karşılaşılmıştır. Bu noktaları ilk olarak Naimark 1960 yılında nonselfadjoint Sturm-Liouville operatörünün spektrumunu incelerken farketmiş aynı yıl Schwartz bu noktaları spektral tekillikler olarak adlandırmıştır. Daha sonra bu noktaları içeren bir çok çalışma yapılmıştır. Şimdi spektral tekilliklere ait tanım verilebilir.

Tanım 2.6 Resolvent operatörün kutbu (ancak özdeğer olmayan) ve sürekli spektrumun elemanı olan noktalara spektral tekillikler adı verilir ve bu noktaların kümesi $\sigma_{ss}(A)$ ile gösterilir (Naimark 1960).

Tanım 2.7 $f : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun q-türevi $f^{\triangle}(t)$ gösterilir ve

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{\mu(t)}, \ t \in q^{\mathbb{N}}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\mu(t) = (q-1)t$ graininess fonksiyonudur. Herhangi $f, g : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için çarpım kuralı

$$(fg)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t)g(t) + f(qt)g^{\triangle}(t) = f(t)g^{\triangle}(t) + f^{\triangle}(t)g(qt)$$

biçiminde verilir (Kac ve Cheung 2002).

Teorem 2.1 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.2 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.3 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.4 (Privalov Teoremi) Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun, reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.5 (Pavlov Teoremi) g fonskiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon ve $G = \{x \in \mathbb{R} : g^n(x) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\mu(G) = 0$ olsun. Ayrıca

$$\left|g^{(k)}(z)\right| \leq \eta_k,\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde η_k sayıları mevcut olmakla birlikte G_s, G kümesinin s-komşuluğu, $t(s) = \inf\limits_k \frac{\eta_k\ s^k}{k!}$ ve $\omega > 0$ olmak üzere

$$\int_0^\omega \ln t(s)\, d\mu(G_s) = -\infty \tag{2.1}$$

sağlansın. Bu durumda g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da özdeş olarak sıfırdır (Pavlov 1975). (2.1) ifadesindeki integral, sıfır noktasını içeren herhangi bir aralık üzerinden alınmaktadır.

Teorem 2.6 (Heine-Borel Teoremi) Öklid uzayının bir altkümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart bu altkümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır (Aliprantis 1998).

3. SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETRELİ QUANTUM FARK DENKLEMİ İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

$q^{\mathbb{N}} := \{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere selfadjoint olmayan ikinci mertebeden q-fark denklemi için

$$qa(t)\,y(qt) + b(t)y(t) + a\left(\frac{t}{q}\right) y\left(\frac{t}{q}\right) = \lambda y(t),\ t \in q^{\mathbb{N}} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)\,y(q) + (\beta_0 + \beta_1\lambda)\,y(1) &= 0, \\ \gamma_0\beta_1 - \gamma_1\beta_0 &\neq 0, \\ \gamma_1 &\neq -\frac{\beta_0}{a(1)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. (3.1)-(3.2) sınır değer problemine karşılık gelen $L : \ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right) \to \ell_2(q^{\mathbb{N}})$ operatörü

$$(ly)(t) = qr(t)\,y(qt) + s(t)y(t) + r\left(\frac{t}{q}\right) y\left(\frac{t}{q}\right)$$

fark ifadesinin ve (3.2) sınır koşulunun yardımı ile tanımlansın. Burada $\ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right)$,

$$< f, g >_q := \sum_{t \in q^{\mathbb{N}}} \mu(t)\, f(t)\, \overline{g(t)},\ \ f, g : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$$

iç çarpımıyla verilen kompleks değerli fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Ayrıca $\forall\ t \in q^{\mathbb{N}}$ için $a(t) \neq 0$ olmak üzere $\{a(t)\}_{t \in q^{\mathbb{N}_0}}$ ve $\{b(t)\}_{t \in q^{\mathbb{N}}}$ kompleks diziler ve $i = 0, 1$ için $\gamma_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ olup λ ise bir spektral parametredir. Eğer

$$r(t) = a(t)\mu^2(t), \quad s(t) = b(t) + qa(t) + a\left(\frac{t}{q}\right)$$

alınırsa (3.1) q-fark denklemi

$$(ly)(t) = \left[ry^{\triangle}\right]^{\triangle}\left(\frac{t}{q}\right) + s(t)\,y(t),\ t \in q^{\mathbb{N}}$$

şeklindeki Sturm-Liouville formu ile ifade edilir.

3.1 Sınır Değer Probleminin Jost Çözümü ve Jost Fonkiyonu

Bu bölümde $\{a(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}_0}}$ ve $\{b(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ kompleks dizilerinin

$$\sum_{t\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)(|1-a(t)|+|b(t)|)<\infty \tag{3.3}$$

koşulunu gerçeklediği kabul edilsin. Şimdi (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin Jost çözümünü elde etmek için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 $\{a(t)\}$, $\{b(t)\}$ dizileri için verilen (3.3) koşulu altında (3.1) diskre q-fark denklemi $\lambda=2\sqrt{q}\cos z$ için $z\in\overline{\mathbb{C}}_+:=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\geq 0\}$ olmak üzere

$$e(t,z)=\alpha(t)\frac{e^{i\dfrac{\ln t}{\ln q}z}}{\sqrt{\mu(t)}}\left(1+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A(t,r)e^{i\dfrac{\ln r}{\ln q}z}\right),\ t\in q^{\mathbb{N}_0} \tag{3.4}$$

çözümüne sahiptir. Burada $\alpha(t)$ ve $A(t,r)$ dizileri $\{a(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}_0}}$ ve $\{b(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ dizileri cinsinden ifade edilir (Adıvar ve Bohner 2006b).

İspat. $z\in\overline{\mathbb{C}}_+$ olmak üzere (3.1) denkleminde $\lambda=2\sqrt{q}\cos z$ için (3.4) ifadesi denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&qa(t)\alpha(qt)\frac{\exp\left(i\frac{\ln qt}{\ln q}z\right)}{\sqrt{(q-1)tq}}\left(1+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A(qt,r)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}\right)\\
&+b(t)\alpha(t)\frac{\exp\left(i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{(q-1)t}}\left(1+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A(t,r)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}\right)\\
&+a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)\frac{\exp\left(i\frac{\ln\frac{t}{q}}{\ln q}z\right)}{\sqrt{(q-1)\frac{t}{q}}}\left(1+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A\left(\frac{t}{q},r\right)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}\right)\\
=\ &\sqrt{q}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\left\{\alpha(t)\frac{\exp\left(i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{(q-1)t}}\left(1+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A(t,r)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}\right)\right\}
\end{aligned}$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
& qa\left(t\right)\alpha\left(qt\right)\frac{\exp\{i(\frac{\ln t}{\ln q}+1)z\}}{\sqrt{\left(q-1\right)tq}}+qa\left(t\right)\alpha\left(qt\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}+1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)tq}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A\left(qt,r\right) \\
& +b\left(t\right)\alpha\left(t\right)\frac{\exp\left(i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{\left(q-1\right)t}}+b\left(t\right)\alpha\left(t\right)\frac{\exp\left(i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{\left(q-1\right)t}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A\left(t,r\right)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z} \\
& +a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}-1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)\frac{t}{q}}} \\
& +a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}-1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)\frac{t}{q}}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A\left(\frac{t}{q},r\right)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z} \\
= & \sqrt{q}\alpha\left(t\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}+1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)t}}+\sqrt{q}\alpha\left(t\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}-1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)t}} \\
& +\sqrt{q}\alpha\left(t\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}+1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)t}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A\left(t,r\right)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z} \\
& +\sqrt{q}\alpha\left(t\right)\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\ln t}{\ln q}-1\right)z\right\}}{\sqrt{\left(q-1\right)t}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A\left(t,r\right)e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikte üstel fonksiyonun katsayıları karşılıklı kıyaslandığında $\frac{\ln t}{\ln q}-1$ katsayılı terimler için

$$a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)=\alpha\left(t\right),\ t\in q^{\mathbb{N}}$$

yazılır. Son eşitliğe ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(qt\right) &= a\left(t\right)\alpha\left(t\right) \\
\alpha\left(q^{2}t\right) &= a\left(qt\right)\alpha\left(qt\right) \\
\alpha\left(q^{3}t\right) &= a\left(q^{2}t\right)\alpha\left(q^{2}t\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olup

$$\alpha\left(t\right)=\left\{\prod_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}a(s)\right\}^{-1}$$

şeklinde bulunur.

$\frac{\ln t}{\ln q}$ katsayılı terimler için

$$b(t)\,\alpha(t)+\sqrt{q}a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)A\left(\frac{t}{q},q\right)=\sqrt{q}\alpha(t)\,A(t,q)$$

olup

$$A(t,q)-A\left(\frac{t}{q},q\right)=\frac{1}{\sqrt{q}}b(t)$$

yazılır. Ardışık yaklaşımlar yöntemi gereğince

$$\begin{aligned}
A(qt,q)-A(t,q) &= \frac{1}{\sqrt{q}}b(qt)\\
A\left(q^2t,q\right)-A(qt,q) &= \frac{1}{\sqrt{q}}b\left(q^2t\right)\\
A\left(q^3t,q\right)-A\left(q^2t,q\right) &= \frac{1}{\sqrt{q}}b\left(q^3t\right)\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

olacağından elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında

$$A(t,q)=-\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}b(s)$$

olarak bulunur.

$\frac{\ln t}{\ln q}+1$ katsayılı terimler için

$$\begin{aligned}
&\sqrt{q}a(t)\,\alpha(qt)+b(t)\,\alpha(t)\,A(t,q)+\sqrt{q}a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)A\left(\frac{t}{q},q^2\right)\\
=\ &\sqrt{q}\alpha(t)+\sqrt{q}\alpha(t)\,A\left(t,q^2\right)
\end{aligned}$$

olup

$$A\left(t,q^2\right)-A\left(\frac{t}{q},q^2\right)=a^2(t)-1+\frac{b(t)}{\sqrt{q}}A(t,q)$$

yazılır. Bu eşitliğe de ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanarak

$$\begin{aligned}
A\left(qt,q^2\right)-A\left(t,q^2\right) &= a^2(qt)-1+\frac{b(qt)}{\sqrt{q}}A(qt,q)\\
A\left(q^2t,q^2\right)-A\left(qt,q^2\right) &= a^2\left(q^2t\right)-1+\frac{b\left(q^2t\right)}{\sqrt{q}}A\left(q^2t,q\right)\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

$$-A\left(t,q^2\right)=\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\left\{\left(a^2-1\right)+\frac{1}{\sqrt{q}}b(s)\,A(s,q)\right\}$$

eşitliklerinden

$$A\left(t,q^{2}\right)=\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\left\{1-a^{2}\left(s\right)+\frac{1}{q}b(s)\sum_{p\in[qs,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}b\left(p\right)\right\}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse $\frac{\ln t}{\ln q}+\frac{\ln r}{\ln q}+1$ katsayılı terimler için

$$\begin{aligned}&\sqrt{q}a\left(t\right)\alpha\left(qt\right)A\left(qt,r\right)+b\left(t\right)\alpha\left(t\right)A\left(t,qr\right)+\sqrt{q}a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)A\left(\frac{t}{q},q^{2}r\right)\\=\;&\sqrt{q}\alpha\left(t\right)A\left(t,q\right)+\sqrt{q}\alpha\left(t\right)A\left(t,q^{2}r\right)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{q}a\left(t\right)\alpha\left(qt\right)A\left(qt,r\right)}{\alpha\left(t\right)}+\frac{b\left(t\right)\alpha\left(t\right)A\left(t,qr\right)}{\alpha\left(t\right)}+\frac{\sqrt{q}a\left(\frac{t}{q}\right)\alpha\left(\frac{t}{q}\right)A\left(\frac{t}{q},q^{2}r\right)}{\alpha\left(t\right)}\\=\;&\frac{\sqrt{q}\alpha\left(t\right)A\left(t,q\right)}{\alpha\left(t\right)}+\frac{\sqrt{q}\alpha\left(t\right)A\left(t,q^{2}r\right)}{\alpha\left(t\right)}\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$A\left(t,q^{2}r\right)-A\left(\frac{t}{q},q^{2}r\right)=a^{2}\left(t\right)A\left(qt,r\right)-A\left(t,r\right)+\frac{b\left(t\right)}{\sqrt{q}}A\left(t,qr\right)$$

şeklinde yazılabilir. Ardışık yaklaşımlar yöntemi gereğince

$$\begin{aligned}A\left(qt,q^{2}r\right)-A\left(t,q^{2}r\right)&=a^{2}\left(qt\right)A\left(q^{2}t,r\right)-A\left(qt,r\right)+\frac{b\left(qt\right)}{\sqrt{q}}A\left(qt,qr\right)\\A\left(q^{2}t,q^{2}r\right)-A\left(qt,q^{2}r\right)&=a^{2}\left(q^{2}t\right)A\left(q^{3}t,r\right)-A\left(q^{2}t,r\right)+\frac{b\left(q^{2}t\right)}{\sqrt{q}}A\left(q^{2}t,qr\right)\\&\;\;\vdots\end{aligned}$$

olup $A\left(t,q^{2}r\right)$ ifadesi en genel haliyle aşağıdaki gibi bulunur

$$A\left(t,q^{2}r\right)=A\left(qt,r\right)+\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\left\{\left(1-a^{2}\left(s\right)\right)A\left(qs,r\right)-\frac{b\left(s\right)}{\sqrt{q}}A\left(s,qr\right)\right\}.$$

■

Lemma 3.1 Teorem 3.1 de verilen $\alpha\left(t\right)$ ve $A\left(t,r\right)$, $r\in q^{\mathbb{N}}$ dizileri $\{a\left(t\right)\}$, $\{b\left(t\right)\}$ kompleks dizilerinin sağladığı (3.3) koşulu altında yakınsaktır.

İspat. $a(s) = 1 + \omega(s)$ olmak üzere

$$\alpha(t) = \prod_{s \in q^{\mathbb{N}}} a(s)$$

sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{s \in q^{\mathbb{N}}} \omega(s)$$

serisinin yakınsak olmasıdır. Seride mutlak değer alınıp, $\omega(s) = a(s) - 1$ yazıldığında

$$\sum_{s \in q^{\mathbb{N}}} |\omega(s)| = \sum_{s \in q^{\mathbb{N}}} |a(s) - 1|$$

olup (3.3) koşulu altında bu seri mutlak yakınsaktır. Tam uzaylarda mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\alpha(t)$ sonsuz çarpımı yakınsaktır.
$A(t,r)$ dizilerinin yakınsaklığını söyleyebilmek için sadece $A(t,q)$ dizisinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir. Diğer diziler için benzer şekilde elde edilir. O halde

$$A(t,q) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s \in [qt,\infty) \cap q^{\mathbb{N}}} b(s)$$

için her iki tarafta mutlak değer alınırsa

$$\begin{aligned} |A(t,q)| &= \left| -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s \in [qt,\infty) \cap q^{\mathbb{N}}} b(s) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s \in [qt,\infty) \cap q^{\mathbb{N}}} |b(s)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s \in q^{\mathbb{N}}} |b(s)| \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizliğin sağ kısmı (3.3) koşulu altında yakınsak olduğundan $A(t,q)$ dizisi mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla (3.3) koşulu altında yakınsaktır. ∎

Lemma 3.2 $\{a(t)\}$, $\{b(t)\}$ dizileri için verilen (3.3) koşulunun gerçeklenmesi şartı altında Teorem 3.1 de açık şekli verilen $A(t,r)$ katsayıları $C > 0$ bir sabit ve $\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]$ ifadesi, $\frac{\ln r}{2\ln q}$ sayısının tam kısmı olmak üzere

$$|A(t,r)| \leq C \sum_{s \in \left[tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]},\infty\right) \cap q^{\mathbb{N}}} \left(|1 - a(s)| + |b(s)|\right) \tag{3.5}$$

eşitsizliğini gerçekler (Adıvar ve Bohner 2006b).

İspat. $A(t,r)$ çekirdek dizilerinin (3.5) eşitsizliğini sağladığı tümevarım yöntemiyle gösterilebilir.

İlk olarak $r = q$ için

$$|A(t,q)| \leq C \sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} \left(|1-a(s)| + |b(s)|\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$|A(t,q)| = \left| -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} b(s) \right|$$

olup mutlak değerde üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |A(t,q)| &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} |b(s)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} |b(s)| \end{aligned}$$

yazılır. Eşitsizliğin sağındaki toplama $|1-a(s)|$ ifadesi eklenerek

$$|A(t,q)| \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} \left(|1-a(s)| + |b(s)|\right)$$

istenilen elde edilir. $r = q^{k-1}$ için

$$\left|A\left(t,q^{k-1}\right)\right| \leq C \sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k-1}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}} \left(|1-a(s)| + |b(s)|\right)$$

eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. $r = q^k$ için

$$\left|A\left(t,q^{k}\right)\right| \leq C \sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}} \left(|1-a(s)| + |b(s)|\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek gerekmektedir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left|A\left(t,q^{k}\right)\right| &\leq \left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right| + \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} \left\{ \left|1-a^2(s)\right| \left|A\left(qs,q^{k-2}\right)\right| + \frac{|b(s)|}{\sqrt{q}} \left|A\left(s,q^{k-1}\right)\right| \right\} \\ &= \left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right| + \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} \left|1-a^2(s)\right| \left|A\left(qs,q^{k-2}\right)\right| \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} |b(s)| \left|A\left(s,q^{k-1}\right)\right| \end{aligned}$$

yazılır. Buradan kabul gereği

$$\begin{aligned}
\left|A\left(t,q^{k}\right)\right| &\leq \left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right|+C_{1}\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\left|1-a\left(s\right)\right|\sum_{p\in\left[sq^{\left[\left|\frac{k-2}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}\left(\left|1-a\left(p\right)\right|+\left|b\left(p\right)\right|\right)\\
&\quad+\frac{C_{2}}{\sqrt{q}}\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\left|b\left(s\right)\right|\sum_{p\in\left[sq^{\left[\left|\frac{k-1}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}\left(\left|1-a\left(p\right)\right|+\left|b\left(p\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

olup $C_{3}:=maks\left\{C_{1,}C_{2}\right\}$ ve $Q\left(s\right):=\left|1-a\left(s\right)\right|+\left|b\left(s\right)\right|$ olmak üzere

$$\left|A\left(t,q^{k}\right)\right|\leq\left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right|+C_{3}\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)\sum_{p\in\left[sq^{\left[\left|\frac{k-1}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)$$

yazılabilir. Son eşitsizlik daha açık şekilde ifade edildiğinde

$$\left|A\left(t,q^{k}\right)\right|\leq\left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right|+C_{3}\left\{\begin{array}{c}
Q\left(qt\right)\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k-1}{2}\right|\right]+1},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\\
+Q\left(q^{2}t\right)\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k-1}{2}\right|\right]+2},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\\
+Q\left(q^{3}t\right)\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k-1}{2}\right|\right]+3},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\\
+\ldots
\end{array}\right\}$$

bulunur. Bu eşitsizlikler ortak bir toplama alındığında

$$\left|A\left(t,q^{k}\right)\right|\leq\left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right|+C_{3}\left\{\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k+1}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\right\}$$

elde edilir. $\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)$ ifadesi sınırlı olduğundan $C_{4}:=C_{3}\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left|A\left(t,q^{k}\right)\right| &\leq \left|A\left(qt,q^{k-2}\right)\right|+C_{4}\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k+1}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\\
&\leq C_{5}\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k-2}{2}\right|\right]+1},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)+C_{4}\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k+1}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\\
&\leq C_{5}\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)+C_{4}\sum_{p\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(p\right)\\
&\leq C_{6}\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{k}{2}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}Q\left(s\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $C_{6}:=maks\left\{C_{5},C_{4}\right\}$ ile verilir. Böylece (3.5) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiş olur. ■

Dolayısıyla Lemma 3.2 kullanılarak $e(t,z)$ çözümünün $\mathbb{C}_+$ bölgesinde z değişkenine göre analitik ve $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli olduğu söylenir.

Diğer yandan, (3.2) sınır koşulu ve (3.4) eşitliği kullanılarak f fonksiyonu

$$f(z) = (\gamma_0 + 2\sqrt{q}\gamma_1 \cos z)\, e(q,z) + (\beta_0 + 2\sqrt{q}\beta_1 \cos z)\, e(1,z) \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olup $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde süreklidir ve $f(z) = f(z+2\pi)$ eşitliği sağlanır.

Tanım 3.1 Sturm-Liouville denklemine benzer olarak (3.4) çözümüne (3.1) denkleminin Jost çözümü, f fonksiyonuna da (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin Jost fonksiyonu denir (Aygar ve Bohner 2015).

3.2 Sınır Değer Probleminin Green Fonksiyonu ve Resolventi

Verilen sınır değer probleminin Green fonksiyonunu dolayısıyla resolventini bulmak için (3.1) diskre denkleminin (3.2) sınır koşulunu sağlayan bir çözümünü tanımlamak gerekir. (3.1) denkleminin λ spektral parametresine göre $\mathbb{C}_+$ bölgesinde tam fonksiyon olan ve

$$\begin{aligned} A(1,\lambda) &= 0, \quad A(q,\lambda) = 1 \\ B(1,\lambda) &= 1, \quad B(q,\lambda) = 0 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan lineer bağımsız $A(t,\lambda)$ ve $B(t,\lambda)$ çözümleri göz önüne alınsın. Bu durumda, (3.1) denkleminin (3.2) koşulunu sağlayan diğer bir çözümü $\varphi(t,\lambda)$ olmak üzere bu çözüm, $A(t,\lambda)$ ve $B(t,\lambda)$ çözümlerinin kombinasyonu olarak

$$\varphi(t,\lambda) = c(\lambda)\, A(t,\lambda) + d(\lambda)\, B(t,\lambda)$$

biçiminde yazılır. (3.2) koşulu gereğince

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda)\, \varphi(q,\lambda) + (\beta_0 + \beta_1\lambda)\, \varphi(1,\lambda) = 0$$

olup

$$(\gamma_0+\gamma_1\lambda)\left[c(\lambda)A(q,\lambda)+d(\lambda)B(q,\lambda)\right]+(\beta_0+\beta_1\lambda)\left[c(\lambda)A(1,\lambda)+d(\lambda)B(1,\lambda)\right]=0$$

yazılacağından, $A(t,\lambda)$ ve $B(t,\lambda)$ çözümlerinin sağladığı koşullar kullanılarak

$$(\gamma_0+\gamma_1\lambda)\,c(\lambda)+(\beta_0+\beta_1\lambda)\,d(\lambda)=0$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \beta_0+\beta_1\lambda \\ d(\lambda) &= -(\gamma_0+\gamma_1\lambda) \end{aligned}$$

için

$$\varphi(t,\lambda)=(\beta_0+\beta_1\lambda)\,A(t,\lambda)-(\gamma_0+\gamma_1\lambda)\,B(t,\lambda)$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(1,\lambda) &= -(\gamma_0+\gamma_1\lambda) \\ \varphi(q,\lambda) &= \beta_0+\beta_1\lambda \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde $\lambda=2\sqrt{q}\cos z$ için

$$\phi(t,z)=\varphi(2\sqrt{q}\cos z)=\{\varphi(t,2\sqrt{q}\cos z)\},\ \ t\in q^{\mathbb{N}_0}$$

şeklinde tanımlanan ϕ çözümü z değişkenine göre tamdır ve 2π periyotlu periyodik fonksiyondur.

Tanım 3.2 Herhangi bir q-fark denkleminin $y=\{y(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ ve $u=\{u(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ olarak verilen iki çözümünün Wronskiyeni

$$W[y,u](t)=\mu(t)\,a(t)\,\{y(t,z)\,u(qt,z)-y(qt,z)\,u(t,z)\} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır (Adıvar ve Bohner 2006b).

Lemma 3.3 Tanım 3.2 de (3.7) eşitliği ile tanımlanan Wronskiyen t den bağımsızdır.

İspat. (3.1) q-fark denkleminin herhangi iki çözümü $y=\{y(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ ve $u=\{u(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ olsun. Δ, q-türevi olmak üzere $\forall\ t\in q^{\mathbb{N}}$ için

$$\begin{aligned}
[W[y,u](t)]^{\Delta} &= \frac{W[y,u](qt)-W[y,u](t)}{\mu(t)} \\
&= \mu(qt)\,a(qt)\,\frac{\{y(qt,z)\,u(q^2t,z)-y(q^2t,z)\,u(qt,z)\}}{\mu(t)} \\
&\quad -\mu(t)\,a(t)\,\frac{\{y(t,z)\,u(qt,z)-y(qt,z)\,u(t,z)\}}{\mu(t)} \\
&= y(qt,z)\left\{qa(qt)\,u\left(q^2t,z\right)+a(t)\,u(t,z)\right\} \qquad (3.8)\\
&\quad -u(qt,z)\left\{qa(qt)\,y\left(q^2t,z\right)+a(t)\,y(t,z)\right\}
\end{aligned}$$

yazılır. (3.1) denkleminden

$$qa(qt)\,u\left(q^2t,z\right)+a(t)\,u(t,z)=(\lambda-b(qt))\,u(qt,z)$$

$$qa(qt)\,y\left(q^2t,z\right)+a(t)\,y(t,z)=(\lambda-b(qt))\,y(qt,z)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
[W[y,u](t)]^{\Delta} &= y(qt,z)(\lambda-b(qt))\,u(qt,z)-u(qt,z)(\lambda-b(qt))\,y(qt,z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$W[y,u](t)=W[y,u](qt)$$

olur ki, bu Wronskiyen t den bağımsız olduğunu gösterir. ■

Sonuç 3.1 $y=\{y(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ ve $u=\{u(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$, (3.1) q-fark denkleminin iki çözümü olsunlar. Bu durumda bu iki çözümün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$W[y,u]\neq 0$$

olmasıdır.

İspat. $W[y,u]=0$ olsun. O halde (3.2) tanımından $\forall\ t\in q^{\mathbb{N}}$ için $a(t)\neq 0$ ve $\mu(t)\neq 0$ olduğundan

$$\frac{y(t,z)}{y(qt,z)}=\frac{u(t,z)}{u(qt,z)}$$

yazılır. Buradan

$$y\left(t,z\right)=Ku\left(t,z\right),\ \ K\neq 0$$

elde edilir. Bu ise y ve u çözümlerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir. Karşıt olarak y ve u çözümleri lineer bağımlı olsun. Bu durumda $\forall\ t\in q^{\mathbb{N}}$ için $y\left(t,z\right)=Ku\left(t,z\right)$ olacak şekilde $K\neq 0$ sayısı vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} W\left[y,u\right] &= \mu\left(t\right)a\left(t\right)\left\{y\left(t,z\right)u\left(qt,z\right)-y\left(qt,z\right)u\left(t,z\right)\right\} \\ &= \mu\left(t\right)a\left(t\right)\left\{Ku\left(t,z\right)u\left(qt,z\right)-Ku\left(qt,z\right)u\left(t,z\right)\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. ■

Dolayısıyla $\phi\left(t,z\right)$ ve $e\left(t,z\right)$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W\left[\phi\left(t,z\right),e\left(t,z\right)\right]=\mu\left(t\right)a\left(t\right)\left\{\phi\left(t,z\right)e\left(qt,z\right)-\phi\left(qt,z\right)e\left(t,z\right)\right\},\ \ t\in q^{\mathbb{N}_0}$$

olup Wronskiyen t değişkeninden bağımsız olduğundan $t=1$ için

$$\begin{aligned} W\left[\phi\left(t,z\right),e\left(t,z\right)\right] &= \mu\left(1\right)a\left(1\right)\left\{\phi\left(1,z\right)e\left(q,z\right)-\phi\left(q,z\right)e\left(1,z\right)\right\} \\ &= -\left(q-1\right)a\left(1\right)f\left(z\right) \\ &= \left(1-q\right)a\left(1\right)f\left(z\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $\forall z\in\overline{\mathbb{C}}_+$ için $\left(1-q\right)a\left(1\right)f\left(z\right)\neq 0$ olduğundan bu iki çözüm lineer bağımsızdır. Bu durumda $\phi\left(t,z\right)$ ve $e\left(t,z\right)$, (3.1) q-fark denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur. Dolayısıyla bu çözümler kullanılarak sınır değer probleminin resolvent operatörü bulunabilir. Ayrıca f fonksiyonu 2π periyotlu fonksiyon olduğundan f fonksiyonunun sıfırlarını üst yarı düzlemde incelemek yerine 2π uzunluklu herhangi bir şeritte incelemek yeterli olacaktır. Bu sebepten dolayı aşağıdaki şeritler tanımlanabilir

$$\begin{aligned} P_0 &:= \left\{z\in\mathbb{C}_+ : -\frac{\pi}{2}\leq \operatorname{Re} z\leq\frac{3\pi}{2}\right\} \\ P &:= P_0\cup\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Teorem 3.2 (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin resolvent operatörü

$$G_{t,z}(z) := \begin{cases} -\dfrac{\phi(r,z)\, e(t,z)}{qa(1)\, f(z)} & ; \quad r = q^k, \ k \in \mathbb{N}_0 \\ \\ -\dfrac{\phi(t,z)\, e(r,z)}{qa(1)\, f(z)} & ; \quad r = tq^k, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Green fonksiyonu olmak üzere

$$(Rh)(t) := \sum_{r \in q^{\mathbb{N}}} G(t,r)\, h(r), \ \ h \in \ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right), \ \ \{h(t,z)\}_{t \in q^{\mathbb{N}}}, \ t \in q^{\mathbb{N}}$$

ile verilir (Aygar ve Bohner 2015).

İspat. Resolvent operatör tanımı gereğince (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu ve resolvent operatörünü incelemek için

$$qa(t)\, y(qt,z) + b(t)\, y(t,z) + a\left(\frac{t}{q}\right) y\left(\frac{t}{q}, z\right) - \lambda y(t,z) = h(t,z) \tag{3.9}$$

homogen olmayan q-fark denklemini çözmek yeterli olacaktır. $g = \{g(t,z)\}_{t \in q^{\mathbb{N}}}$, (3.9) homogen olmayan denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$g(t,z) = c(t)\, e(t,z) + d(t)\, \phi(t,z)$$

eşitliği gerçeklenecek şekilde $c(t) \neq 0$ ve $d(t) \neq 0$ katsayıları vardır. Buradan

$$g(qt,z) = c(qt)\, e(qt,z) + d(qt)\, \phi(qt,z)$$

denklemine $c(t)\, e(qt,z)$ ve $d(t)\, \phi(qt,z)$ ifadeleri ekleyip çıkartılarak

$$\begin{aligned} g(qt,z) &= c(qt)\, e(qt,z) - c(t)\, e(qt,z) + d(qt)\, \phi(qt,z) \\ &\quad - d(t)\, \phi(qt,z) + c(t)\, e(qt,z) + d(t)\, \phi(qt,z) \\ &= e(qt,z)\{c(qt) - c(t)\} + \phi(qt,z)\{d(qt) - d(t)\} \\ &\quad + c(t)\, e(qt,z) + d(t)\, \phi(qt,z) \end{aligned}$$

elde edilir. Parametrelerin değişim yönteminden

$$e(qt,z)\{c(qt) - c(t)\} + \phi(qt,z)\{d(qt) - d(t)\} = 0 \tag{3.10}$$

olacağından

$$g\left(qt,z\right)=c\left(t\right)e\left(qt,z\right)+d\left(t\right)\phi\left(qt,z\right)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik (3.9) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
h\left(t,z\right) &= qa\left(t\right)\left\{c\left(t\right)e\left(qt,z\right)+d\left(t\right)\phi\left(qt,z\right)\right\} \\
&\quad +b\left(t\right)\left\{c\left(t\right)e\left(t,z\right)+d\left(t\right)\phi\left(t,z\right)\right\} \\
&\quad +a\left(\frac{t}{q}\right)\left\{c\left(\frac{t}{q}\right)e\left(\frac{t}{q},z\right)+d\left(\frac{t}{q}\right)\phi\left(\frac{t}{q},z\right)\right\} \\
&\quad -\lambda\left\{c\left(t\right)e\left(t,z\right)+d\left(t\right)\phi\left(t,z\right)\right\} \\
&= c\left(t\right)\left\{qa\left(t\right)e\left(qt,z\right)+b\left(t\right)e\left(t,z\right)-\lambda e\left(t,z\right)\right\} \\
&\quad +d\left(t\right)\left\{qa\left(t\right)\phi\left(qt,z\right)+b\left(t\right)\phi\left(t,z\right)-\lambda\phi\left(t,z\right)\right\} \\
&\quad +a\left(\frac{t}{q}\right)c\left(\frac{t}{q}\right)e\left(\frac{t}{q},z\right)+a\left(\frac{t}{q}\right)d\left(\frac{t}{q}\right)\phi\left(\frac{t}{q},z\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
h\left(t,z\right) &= e\left(\frac{t}{q},z\right)a\left(\frac{t}{q}\right)\left\{c\left(\frac{t}{q}\right)-c\left(t\right)\right\} \\
&\quad +a\left(\frac{t}{q}\right)\phi\left(\frac{t}{q},z\right)\left\{d\left(\frac{t}{q}\right)-d\left(t\right)\right\}
\end{aligned}$$

olup

$$e\left(\frac{t}{q},z\right)\left\{c\left(t\right)-c\left(\frac{t}{q}\right)\right\}+\phi\left(\frac{t}{q},z\right)\left\{d\left(t\right)-d\left(\frac{t}{q}\right)\right\}=-\frac{h\left(t,z\right)}{a\left(\frac{t}{q}\right)} \tag{3.11}$$

bulunur. Ayrıca (3.10) eşitliği $\dfrac{t}{q}$ kadar ötelenirse

$$e\left(t,z\right)\left\{c\left(t\right)-c\left(\frac{t}{q}\right)\right\}+\phi\left(t,z\right)\left\{d\left(t\right)-d\left(\frac{t}{q}\right)\right\}=0 \tag{3.12}$$

olur. (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden

$$\begin{cases}
e\left(t,z\right)\left\{c\left(t\right)-c\left(\frac{t}{q}\right)\right\}+\phi\left(t,z\right)\left\{d\left(t\right)-d\left(\frac{t}{q}\right)\right\}=0 \\[2ex]
e\left(\frac{t}{q},z\right)\left\{c\left(t\right)-c\left(\frac{t}{q}\right)\right\}+\phi\left(\frac{t}{q},z\right)\left\{d\left(t\right)-d\left(\frac{t}{q}\right)\right\}=-\dfrac{h\left(t,z\right)}{a\left(\frac{t}{q}\right)}
\end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi kullanılarak

$$c\left(t\right)-c\left(\frac{t}{q}\right)=-\frac{h\left(t,z\right)\phi\left(t,z\right)}{a\left(\frac{t}{q}\right)\left\{\phi\left(t,z\right)e\left(\frac{t}{q},z\right)-\phi\left(\frac{t}{q},z\right)e\left(t,z\right)\right\}}$$

ve

$$d(t)-d\left(\frac{t}{q}\right)=\frac{h(t,z)\,e(t,z)}{a\left(\frac{t}{q}\right)\left\{\phi(t,z)\,e\left(\frac{t}{q},z\right)-\phi\left(\frac{t}{q},z\right)e(t,z)\right\}}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
W[\phi(t,z),e(t,z)] &= \mu(t)\,a(t)\{\phi(t,z)\,e(qt,z)-\phi(qt,z)\,e(t,z)\} \\
&= -\mu\left(\frac{t}{q}\right)a\left(\frac{t}{q}\right)\left\{\phi\left(\frac{t}{q},z\right)e(t,z)-\phi(t,z)\,e\left(\frac{t}{q},z\right)\right\} \\
&= -W[\phi(t,z),e(t,z)]
\end{aligned}$$

olduğundan son iki eşitlik kullanılarak

$$c(t)-c\left(\frac{t}{q}\right)=-\frac{\mu\left(\frac{t}{q}\right)h(t,z)\,\phi(t,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \tag{3.13}$$

$$d(t)-d\left(\frac{t}{q}\right)=\frac{\mu\left(\frac{t}{q}\right)h(t,z)\,e(t,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
c(q)-c(1) &= -\frac{\mu(1)\,h(q,z)\,\phi(q,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\
c\left(q^2\right)-c(q) &= -\frac{\mu(q)\,h\left(q^2,z\right)\phi\left(q^2,z\right)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\
&\;\;\vdots \\
c(q^n)-c\left(q^{n-1}\right) &= -\frac{\mu(q^n)\,h\left(q^{n+1},z\right)\phi\left(q^{n+1},z\right)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}
\end{aligned}$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplandığı takdirde

$$c(t)=c(1)-\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,\phi(r,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.14) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
d(qt)-d(t) &= \frac{\mu(t)\,h(qt,z)\,e(qt,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\
d\left(q^2t\right)-d(qt) &= \frac{\mu(qt)\,h\left(q^2t,z\right)e\left(q^2t,z\right)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\
&\;\;\vdots \\
d(q^m)-d\left(q^{m-1}\right) &= \frac{\mu\left(q^{m-1}\right)h(q^m,z)\,e(q^m,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}
\end{aligned}$$

olup

$$-d(t)+d(q^m)=\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}^{r\in[q^m t,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}$$

olarak bulunur. Burada

$$\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}<\infty$$

olduğundan son eşitlikten $m\to\infty$ için limit alınırsa $\lim\limits_{m\to\infty} d(q^m)=s$ olacak şekilde sonlu bir s sayısının varlığı söylenir. Dolayısıyla

$$d(t)=s-\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}$$

elde edilir. Bulunan $c(t)$ ve $d(t)$ katsayıları

$$g(t,z)=c(t)\,e(t,z)+d(t)\,\phi(t,z)$$

çözümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(t,z) &= c(t)\,e(t,z)+d(t)\,\phi(t,z) \\ &= \left\{c(1)-\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,\phi(r,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}\right\}e(t,z) \\ &\quad +\left\{s-\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}\right\}\phi(t,z) \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} g(t,z) &= c(1)\,e(t,z)-\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,\phi(r,z)\,e(t,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\ &\quad +s\phi(t,z)-\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)\,\phi(t,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $g(t,z)\in\ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right)$ olup $\phi(t,z)\notin\ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right)$ olduğundan $s=0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} g(t,z) &= c(1)\,e(t,z)-\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,\phi(r,z)\,e(t,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\ &\quad -\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)\,\phi(t,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak yazılır. Ayrıca (3.2) sınır koşulundan

$$\begin{aligned}(\gamma_0+\gamma_1\lambda)\,g(q,z)+(\beta_0+\beta_1\lambda)\,g(1,z) &= 0\\ \{-\phi(1,z)\,g(q,z)+\phi(q,z)\,g(1,z)\} &= 0\end{aligned}$$

olacağından (3.15) kullanılarak

$$\begin{aligned}&\phi(1,z)\left\{\begin{array}{c} c(1)\,e(q,z)-\dfrac{\mu(1)\,h(q,z)\,e(q,z)\,\phi(q,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)} \\ -\sum_{r\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\dfrac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)\,\phi(q,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}\end{array}\right\}\\ &-\phi(q,z)\left\{c(1)\,e(1,z)-\sum_{r\in[q,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)\,\phi(1,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}\right\}=0\end{aligned}$$

olup daha açık olarak

$$\begin{aligned}&c(1)\,\phi(1,z)\,e(q,z)-\frac{\mu(1)\,h(q,z)\,e(q,z)\,\phi(q,z)\,\phi(1,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}\\ &-\sum_{r\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)\,\phi(q,z)\,\phi(1,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}\\ &-c(1)\,\phi(q,z)\,e(1,z)+\sum_{r\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{\mu\left(\frac{r}{q}\right)h(r,z)\,e(r,z)\,\phi(1,z)\,\phi(q,z)}{\mu(1)\,a(1)\,f(z)}=0\end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$c(1)\{\phi(1,z)\,e(q,z)-\phi(q,z)\,e(1,z)\}=0$$

olarak elde edilir. Burada $\phi(1,z)\,e(q,z)-\phi(q,z)\,e(1,z)\neq 0$ olduğundan $c(1)=0$ bulunur. Bu durumda

$$g(t,z)=-\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{(q-1)\,h(r,z)\,\phi(r,z)\,e(t,z)}{q(q-1)\,a(1)\,f(z)}-\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}\frac{(q-1)\,h(r,z)\,\phi(t,z)\,e(r,z)}{q(q-1)\,a(1)\,f(z)}$$

olarak bulunur. O halde (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$G_{t,z}(z) := \begin{cases} -\dfrac{\phi(r,z)\,e(t,z)}{qa(1)\,f(z)} & ; \ r = q^k,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ \\ -\dfrac{\phi(t,z)\,e(r,z)}{qa(1)\,f(z)} & ; \ r = tq^k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.16}$$

şeklinde olup (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin resolvent operatörü de

$$(Rh)(t) := \sum_{r \in q^{\mathbb{N}}} G(t,r)\,h(r,z),\ h \in \ell_2\left(q^{\mathbb{N}}\right) \tag{3.17}$$

biçimindedir. ∎

3.3 Özdeğerler ve Spektral Tekilliklerin Elde Edilişi

(3.1)-(3.2) sınır değer probleminin özdeğerler kümesi ve spektral tekillikler kümesi sırasıyla σ_d ve σ_{ss} ile gösterilsin. Bu durumda (3.16), (3.17) ve bu kümelerin tanımları kullanılarak

$$\sigma_d = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\sqrt{q}\cos z, z \in P_0,\ f(z) = 0\} \tag{3.18}$$

$$\sigma_{ss} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\sqrt{q}\cos z, z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ f(z) = 0\right\} \setminus \{0\} \tag{3.19}$$

yazılır. Dolayısıyla bu kümelerin elemanlarını belirleyip özelliklerini elde etmek için $f(z) = 0$ sağlayacak şekildeki $z \in P$ kompleks sayılarını belirlemek gerekir. (3.4) ve (3.6) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f(z) &= \left\{\gamma_0 + \sqrt{q}\gamma_1\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right\}\left\{\alpha(q)\frac{e^{iz}}{\sqrt{\mu(q)}}\left(1 + \sum_{r \in q^{\mathbb{N}}} A(q,r)\,e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}\right)\right\} \\ &\quad + \left\{\beta_0 + \sqrt{q}\beta_1\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right\}\left\{\alpha(1)\frac{1}{\sqrt{\mu(1)}}\left(1 + \sum_{r \in q^{\mathbb{N}}} A(1,r)\,e^{i\frac{\ln r}{\ln q}z}\right)\right\} \end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}+\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,e^{-iz}+\frac{\alpha(q)\,\gamma_1 e^{2iz}}{\sqrt{q-1}} \\
&\quad+\left\{\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right\}e^{iz} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}-1\right)z} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)+\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}A(1,r)\right\}e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)z} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}A(q,r)+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\right\}e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)z} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)z}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer

$$F(z) := f(z)\,e^{iz} \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)+\left\{\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}+\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}\right\}e^{iz} \\
&\quad+\left\{\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right\}e^{2iz}+\frac{\alpha(q)\,\gamma_1}{\sqrt{q-1}}e^{3iz} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)z} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)+\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}A(1,r)\right\}e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)z} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}A(q,r)+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\right\}e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)z} \\
&\quad+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

biçiminde yazılır.

f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olup, $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli ve $f(z)=f(z+2\pi)$ olduğundan F fonksiyonu da $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli ve 2π

periyotlu periyodik fonksiyondur. Dolayısıyla, (3.18), (3.19) ve (3.20) eşitliklerinden

$$\sigma_d = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\sqrt{q}\cos z, z \in P_{0,}\ F(z) = 0\} \tag{3.22}$$

$$\sigma_{ss} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\sqrt{q}\cos z, z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ F(z) = 0\right\} \setminus \{0\} \tag{3.23}$$

olur.

Tanım 3.3 F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının katına (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı denir.

(3.22) ve (3.23) eşitliklikleri kullanılarak, (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini araştırmak için, F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sayısal özelliklerini incelemek gerekir. Bu sıfırlar için

$$M_1 := \{z \in P_0 : F(z) = 0\} \tag{3.24}$$

$$M_2 := \left\{z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] : F(z) = 0\right\}$$

$$M_3 := \{M_1 \text{ kümesinin limit noktalarının kümesi}\}$$

$$M_4 := \{F(z) \text{ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının kümesi}\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda, (3.22), (3.23) ve (3.24) eşitliklerinden

$$\sigma_d = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\sqrt{q}\cos z,\ z \in M_1\} \tag{3.25}$$

$$\sigma_{ss} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\sqrt{q}\cos z,\ z \in M_2\} \setminus \{0\}$$

elde edilir.

Lemma 3.4 $\{a(t)\}, \{b(t)\}$ dizilerinin sağladığı (3.3) koşulu altında, F fonksiyonu, $z \in P$ ve $\operatorname{Im} z \to \infty$ olmak üzere aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler (Aygar ve Bohner 2015)

$$(i)\ \ F(z) = \sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1) + O\left(e^{-\operatorname{Im} z}\right),\ \beta_1 \neq 0$$

$$(ii)\ \ F(z) = \frac{1}{\sqrt{q-1}}\left[\gamma_1\alpha(q) + \beta_0\alpha(1)\right]e^{iz} + O\left(e^{-2\operatorname{Im} z}\right),\ \beta_1 = 0.$$

İspat. (i) $\beta_1 \neq 0$ olmak üzere $z \in P$ ve $\operatorname{Im} z \to \infty$ için (i) asimptotik eşitliği gösterilsin. (3.21) eşitliğinden ve $\forall\, z \in P$ için $e^{-\operatorname{Im} z} > e^{-2\operatorname{Im} z} > e^{-3\operatorname{Im} z}$ olduğundan üstel fonksiyonun özellikleri de kullanılarak

$$\left|F(z) - \sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right| \leq \left\{ \begin{array}{c} \left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}} + \frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}\right| + \frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}} + \sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1) \\ \left|\frac{\alpha(q)\gamma_1}{\sqrt{q-1}}\right| \end{array} \right\} e^{-\operatorname{Im} z}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right| |A(1,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}\right| |A(q,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}\right| |A(1,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}\right| |A(q,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right| |A(1,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}\right| |A(q,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}$$

elde edilir. (3.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right| |A(1,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)} \\ \leq\ & C_7\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\ \sum_{s\in\left[q^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}} \left(|1-a(s)|+|b(s)|\right) e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $C_7 := C\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right|$ ve $Q(s) := |1-a(s)|+|b(s)|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right| |A(1,r)|\, e^{-\operatorname{Im} z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)} \\ =\ & C_7\left\{ \begin{array}{c} \sum_{s\in[1,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} Q(s)\, e^{-\operatorname{Im} z} + \sum_{s\in[q,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} Q(s)\, e^{-2\operatorname{Im} z} \\ +\sum_{s\in[q,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} Q(s)\, e^{-3\operatorname{Im} z} + \sum_{s\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} Q(s)\, e^{-4\operatorname{Im} z} \\ +\sum_{s\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}} Q(s)\, e^{-5\operatorname{Im} z} + \ldots \end{array} \right\} \end{aligned}$$

sağdaki ifadeyi büyütmek için üstel fonksiyonun özelliğinden

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right||A(1,r)|\,e^{-\operatorname{Im}z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)} \\
\leq\;& C_7\left\{\begin{array}{c}\sum_{s\in q^{\mathbb{N}}}Q(s)\,e^{-\operatorname{Im}z}+\sum_{s\in[q,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q(s)\,e^{-\operatorname{Im}z}\\ +\sum_{s\in[q,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q(s)\,e^{-\operatorname{Im}z}+\sum_{s\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q(s)\,e^{-\operatorname{Im}z}\\ +\ldots\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

olup her toplamdan iki tane olduğu düşünülerek gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right||A(1,r)|\,e^{-\operatorname{Im}z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)} \\
\leq\;& 2C_7e^{-\operatorname{Im}z}\left\{\begin{array}{c}\sum_{s\in q^{\mathbb{N}}}Q(s)+\sum_{s\in[q,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q(s)\\ +\sum_{s\in[q^2,\infty)\cap q^{\mathbb{N}}}Q(s)+\ldots\end{array}\right\} \\
=\;& 2C_7e^{-\operatorname{Im}z}\left\{\begin{array}{c}Q(1)+Q(q)+Q(q^2)+Q(q^3)+\ldots\\ +Q(q)+Q(q^2)+Q(q^3)_+\ldots\\ +Q(q^2)+Q(q^3)+\ldots\end{array}\right\} \\
=\;& 2C_7e^{-\operatorname{Im}z}\left\{Q(1)+2Q(q)+3Q\left(q^2\right)+4Q\left(q^3\right)+\ldots\right\} \\
=\;& 2C_7e^{-\operatorname{Im}z}\sum_{s\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln s}{\ln q}+1\right)Q(s)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ dizilerinin sağladığı (3.3) koşulu altında

$$
\sum_{s\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln s}{\ln q}+1\right)Q(s)=\sum_{s\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\ln s}{\ln q}Q(s)+\sum_{s\in q^{\mathbb{N}}}Q(s)
$$

yazılır. Çünkü son eşitliğin sağındaki her iki seride yakınsaktır. Bu da

$$
\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right||A(1,r)|\,e^{-\operatorname{Im}z\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)}
$$

ifadesinin sınırlı olduğunu verir.

(ii) $\beta_1=0$ olması durumunda ise $z\in P$ ve $\operatorname{Im}z\to\infty$ için (3.3) koşulu kullanılarak

$$
\left|\left(F(z)-\frac{1}{\sqrt{q-1}}\left[\gamma_1\alpha(q)+\beta_0\alpha(1)\right]e^{iz}\right)e^{2\operatorname{Im}z}\right|<\infty
$$

olduğu benzer şekilde gösterilir. ∎

Teorem 3.3 $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ dizilerinin (3.3) koşulunu sağladığı kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki iddialar gerçeklenir (Aygar ve Bohner 2015).

(i) M_1 kümesi sınırlıdır ve sayılabilirdir.

(ii) $M_1 \cap M_3 = \varnothing$ ve $M_1 \cap M_4 = \varnothing$.

(iii) M_2 kümesi kompakttır ve reel eksendeki Lebesgue ölçüsü μ olmak üzere $\mu(M_2) = 0$.

(iv) $M_3 \subset M_2$, $M_4 \subset M_2$ ve $\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$.

(v) $M_3 \subset M_4$.

İspat. (i) Lemma 3.4 kullanılarak F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sınırlı bir bölgede olduğu dolayısıyla P_0 bölgesindeki sıfırlarının sınırlı bir bölgede olduğu, yani M_1 kümesinin sınırlı olduğu elde edilir. F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olup Teorem 2.1 gereğince F fonksiyonunun P_0 bölgesindeki sıfırları ayrıktır. M_1 sınırlı ve ayrık olduğundan en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir.

(ii) F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olduğundan Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 gereğince F fonksiyonunun, P_0 bölgesindeki sıfırlarının limit noktaları ile P_0 bölgesindeki sonsuz katlı sıfırları P_0 bölgesinin sınırında, yani $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığında olur. M_1 kümesi $\mathbb{C}_+$ bölgesinde olduğundan $M_1 \cap M_3 = \varnothing$ ve $M_1 \cap M_4 = \varnothing$ bulunur.

(iii) $\forall\ z \in M_2$ için $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ olup M_2 sınırlıdır. M_2 kümesi sınırlı olduğundan kapalı olduğu gösterilirse kompakt olduğu elde edilir. $M_2 \subset \overline{M_2}$ olduğu biliniyor. $\overline{M_2} \subset M_2$ olduğunu gösterelim. Keyfi $z \in \overline{M_2}$ alalım. Bu durumda $z_n \to z$ olacak şekilde $\exists\ \{z_n\} \subset M_2$ vardır. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in M_2$ olduğundan $F(z_n) = 0$ olmalıdır. F fonksiyonu reel eksende sürekli olduğundan

$$F(z_n) \to F(z) = 0$$

yazılır. Teorem 2.2 gereğince $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ olmalıdır. Buradan $z \in M_2$ elde edilir. Dolayısıyla M_2 kapalıdır. Heine-Borel Teoremi gereğince M_2 kompakt olup Privalov Teoremi gereğince $\mu(M_2) = 0$ gerçeklenir.

(iv) $z_0 \in M_3$ alalım. Teorem 2.2 gereğince $M_3 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ olur.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

olacak şekilde $\{z_n\} \subset M_1$ vardır öyle ki $F(z_n) = 0$ yazılır. F sürekli olduğundan

$$F(z_0) = F\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(z_n) = 0$$

olup $z_0 \in M_2$ bulunur. Şimdi $M_4 \subset M_2$ olduğunu gösterelim.

$z_0 \in M_4$ olsun. Teorem 2.3 gereğince $z_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ olmak zorundadır. Ayrıca $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial z^n} F(z)\right\}|_{z=z_0} = 0$$

olduğundan $F(z_0) = 0$ olup $z_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ve $F(z_0) = 0$ olduğundan $z_0 \in M_2$ olur. $M_3 \subset M_2$, $M_4 \subset M_2$ ve $\mu(M_2) = 0$ olduğundan

$$\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$$

elde edilir.

(v) $z_0 \in M_3$ ancak $z_0 \notin M_4$ olsun. Bu durumda z_0, F fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olmadığından en az bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki

$$F(z) = (z - z_0)^k g(z), \; g(z_0) \neq 0$$

eşitliği gerçeklenir. Buradan

$$g(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^k}$$

yazılır. $F(z)$, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli olduğundan g fonksiyonu da üst yarı düzlemde analitik ve kapalı üst yarı düzlemde süreklidir. Ayrıca $z_0 \in M_3$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

olacak şekilde $\{z_n\} \subset M_1$ vardır öyle ki $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$g(z_n) = \frac{F(z_n)}{(z_n - z_0)^k} = 0$$

olup g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(z_0) = 0$$

yazılır. Ancak $g(z_0) \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir, dolayısıyla kabul yanlış olup $z_0 \in M_4$ bulunur. ■

(3.25) ve Teorem 3.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2 $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ dizilerinin sağladığı (3.3) koşulu altında, σ_d özdeğer kümesi sınırlıdır, sayılabilirdir ve limit noktaları $\left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$ aralığındadır. Ayrıca, $\sigma_{ss} \subset \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$ ve $\mu(\sigma_{ss}) = 0$ sağlanır (Aygar ve Bohner 2015).

3.4 Özdeğerler ve Spektral Tekilliklerin Özellikleri

Bu bölümde, $\{a(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}_0}}$ ve $\{b(t)\}_{t\in q^{\mathbb{N}}}$ kompleks dizilerinin $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ için

$$\sup_{t\in q^{\mathbb{N}}} \left\{ \exp\left[\varepsilon \left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)^{\delta}\right] (|1 - a(t)| + |b(t)|) \right\} < \infty \tag{3.26}$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir. Bu koşul (3.3) koşulundan daha kuvvetlidir. (3.3) koşulu bu bölümde göstereceğimiz özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin sonluluğu ve sonlu katlı olduğunu veren teorem için yetersiz kaldığından (3.26) koşuluna ihtiyaç duyulmuştur. Dolayısıyla (3.26) koşulu (3.3) koşuluyla yer değiştirdiğinde diğer kısımlarda verilen teorem ve lemmalar (3.26) koşulu altında da gerçeklenir.

Özel olarak $\delta = 1$ için (3.26) koşulundan daha zayıf olan

$$\sup_{t\in q^{\mathbb{N}}} \left\{ \exp\left[\varepsilon \left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right] (|1 - a(t)| + |b(t)|) \right\} < \infty, \ \varepsilon > 0 \tag{3.27}$$

koşulu göz önüne alınsın.

Lemma 3.5 $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ dizilerinin gerçeklediği (3.27) koşulu altında

$$|A(t,r)| \leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{8}\frac{\ln r}{\ln q}\right),\ t\in\{1,q\},\ r\in q^{\mathbb{N}}$$

eşitsizliği sağlanır (Aygar ve Bohner 2015).

İspat. $M>0$ bir sabit olmak üzere $r,q\in q^{\mathbb{N}}$ için (3.5) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} s &\geq tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]} \\ &\geq tq^{\frac{\ln r}{4\ln q}} \end{aligned}$$

durumu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} |A(t,r)| &\leq C\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}(|1-a(s)|+|b(s)|) \\ &= C\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}\exp\left(\varepsilon\frac{\ln s}{\ln q}\right)\exp\left(-\varepsilon\frac{\ln s}{\ln q}\right)(|1-a(s)|+|b(s)|) \\ &\leq C\sup_{s\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\exp\left(\varepsilon\frac{\ln s}{\ln q}\right)(|1-a(s)|+|b(s)|)\right\}\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}\exp\left(-\varepsilon\frac{\ln s}{\ln q}\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ kompleks dizilerinin sağladığı (3.27) koşulundan

$$|A(t,r)| \leq M\sum_{s\in\left[tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{N}}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln s}{\ln q}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln s}{\ln q}\right)$$

olup

$$|A(t,r)| \leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln tq^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]}}{\ln q}\right)$$

sağlanır. Burada

$$M = C\sup_{s\in q^{\mathbb{N}}}\left\{\exp\left(\varepsilon\frac{\ln s}{\ln q}\right)(|1-a(s)|+|b(s)|)\right\}.$$

Elde edilen son eşitsizlikten $t=1$ için

$$\begin{aligned} |A(1,r)| &\leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln q^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]}}{\ln q}\right) \\ &\leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln q^{\frac{\ln r}{4\ln q}}}{\ln q}\right) \\ &= M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{8}\frac{\ln r}{\ln q}\right) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $t=q$ için

$$\begin{aligned}|A(q,r)| &\leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln q^{\left[\left|\frac{\ln r}{2\ln q}\right|\right]}}{\ln q}\right)\\ &\leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\ln qq^{\frac{\ln r}{4\ln q}}}{\ln q}\right)\\ &= M\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{\ln r}{4\ln q}+1\right\}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $t=1,q,\ r\in q^{\mathbb{N}}$ için

$$|A(t,r)|\leq M\exp\left(-\frac{\varepsilon\ln r}{8\ln q}\right),\ t\in\{1,q\},\ r\in q^{\mathbb{N}}$$

yazılabilir. Bu ise istenilendir. ∎

Teorem 3.4 $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ kompleks dizilerinin sağladığı (3.27) koşulu altında (3.1)-(3.2) sınır değer problemi sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir (Aygar ve Bohner 2015).

İspat. F fonksiyonunun açık şekli olan (3.21) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}F(z) &= i\left\{\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}+\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}\right\}e^{iz}\\ &+2i\left\{\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right\}e^{2iz}\\ &+3i\left\{\frac{\alpha(q)\gamma_1}{\sqrt{q-1}}e^{3iz}\right\}\\ &+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)A(1,r)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)z}\\ &+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)z}\\ &+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}A(1,r)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)z}\\ &+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}A(q,r)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)z}\end{aligned}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha\left(1\right)A\left(1,r\right)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)z}$$

$$+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{\gamma_1\alpha\left(q\right)}{\sqrt{q-1}}A\left(q,r\right)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}$$

elde edilir. Türev fonksiyonunun içinde bulunan serilerin düzgün yakınsaklığını göstermek için birisini göstermek yeterli olacaktır, diğer seriler için de düzgün yakınsaklık benzer şekilde gösterilir. Lemma 3.5 de verilen eşitsizlik yardımıyla

$$\left|\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{1}{\sqrt{q-1}}\gamma_1\alpha\left(q\right)A\left(q,r\right)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}\right|$$

$$\leq M\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}e^{\left(-\frac{\varepsilon}{8}\frac{\ln r}{\ln q}\right)}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)e^{-\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)\operatorname{Im} z}$$

olup bu ifade düzenlendiğinde

$$\left|\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{1}{\sqrt{q-1}}\gamma_1\alpha\left(q\right)A\left(q,r\right)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}\right|$$

$$\leq N\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}e^{-\frac{\ln r}{\ln q}\left(\frac{\varepsilon}{8}+\operatorname{Im} z\right)}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)$$

elde edilir. Sağ taraftaki seri $\frac{\varepsilon}{8}+\operatorname{Im} z>0$ için yakınsak olduğundan $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{8}$ bölgesinde de

$$\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\frac{1}{\sqrt{q-1}}\gamma_1\alpha\left(q\right)A\left(q,r\right)i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}$$

serisi Weierstrass Teoremi gereğince düzgün yakınsaktır. Böylece $F\left(z\right)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesi $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{8}$ bölgesine analitik devama sahiptir. Bu durumda Teorem 2.2 gereğince F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının limit noktaları $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ aralığı üzerinde olmalıdır. Ancak bu aralık artık analitiklik bölgesinin içinde kaldığından $F\left(z\right)$ fonksiyonunun sıfırlarının limit noktaları $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ aralığı üzerinde olamaz. Dolayısıyla Bolzano-Weierstrass Teoremi gereğince verilen koşul altında M_1 ve M_2 yani σ_d, σ_{ss} sonlu sayıda elamana sahiptir. Ayrıca F fonksiyonu $\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{8}\right\}$ bölgesinde analitik olduğundan Teorem 2.3 kullanılarak F fonksiyonunun P bölgesinde sonsuz katlı sıfıra sahip olamayacağı elde edilir. O halde (3.25) eşitliklerinden (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekillikleri vardır. ■

Teorem 3.4 için verilen ispattan görülmektedir ki, (3.27) koşulu F fonksiyonunun reel eksenden alt yarı düzleme analitik devamını sağlar. Dolayısıyla, bu analitik devam sonucunda (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması sonucu elde edilir.

Şimdi (3.26) koşulu göz önüne alınsın. (3.26) koşulu altında F fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik ve reel eksende sonsuz türevlenebilir olduğu açıktır. Fakat, (3.26) koşulu altında F fonksiyonu, reel eksenden alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir. Bu yüzden, (3.26) koşulu altında (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması Teorem 3.4 den farklı bir yolla gösterilmelidir. Bunun için Teorem 2.5 den faydalanılacaktır. Burada, Teorem 2.5 e uygun olması amacıyla g fonksiyonu yerine 2π periyotlu F fonksiyonu ve $M_4 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ kümesi düşünülecek olup ayrıca teoremdeki η_k ifadesinin de belirlenmesi gerekecektir. Bu sebepten dolayı aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.6 $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ dizilerinin gerçeklediği (3.26) koşulu altında

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \eta_k \ , \ \ z \in P, \ k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.28}$$

sağlanır. Burada

$$\eta_k \leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \tag{3.29}$$

olup D, d ve M; ε ile δ ya bağlı pozitif sabitlerdir (Aygar ve Bohner 2015).

İspat. η_k ifadesinin belirlenmesi için $F(z)$ fonksiyonunun türevlerinin incelenmesi gerekir. O halde (3.21) eşitliğinden

$$F^{(k)}(z) = i^k \left(\frac{\gamma_1 \alpha(q)}{\sqrt{q-1}} + \frac{\beta_0 \alpha(1)}{\sqrt{q-1}} \right) e^{iz}$$
$$+ (2i)^k \left(\frac{\gamma_0 \alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}} + \sqrt{\frac{q}{q-1}} \beta_1 \alpha(1) \right) e^{2iz}$$

$$
\begin{aligned}
&+(3i)^k\left(\frac{\alpha(q)\,\gamma_1}{\sqrt{q-1}}\right)e^{3iz}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left[i\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)\right]^k\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left[i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)\right]^k\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left[i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)\right]\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}A(1,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left[i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)\right]^k\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}A(q,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left[i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)\right]^k\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left[i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)\right]^k\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\,e^{i\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)z}
\end{aligned}
$$

yazılır. (3.26) koşulu altında $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \le\ & \left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}+\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}\right|e^{-\operatorname{Im}z}\\
&+2^k\left|\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}+\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right|e^{-2\operatorname{Im}z}\\
&+3^k\left|\frac{\alpha(q)\,\gamma_1}{\sqrt{q-1}}\right|e^{-3\operatorname{Im}z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\right|e^{-\frac{\ln r}{\ln q}\operatorname{Im}z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)^k\left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\right|e^{-\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)\operatorname{Im}z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)^k\left|\frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}A(1,r)\right|e^{-\left(\frac{\ln r}{\ln q}+1\right)\operatorname{Im}z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)^k\left|\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}A(q,r)\right|e^{-\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)\operatorname{Im}z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)^k\left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\,A(1,r)\right|e^{-\left(\frac{\ln r}{\ln q}+2\right)\operatorname{Im}z}\\
&+\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)^k\left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\right|e^{-\left(\frac{\ln r}{\ln q}+3\right)\operatorname{Im}z}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\forall\ r \in q^{\mathbb{N}}$ için $\frac{\ln r}{\ln q} \geq 1$ olduğundan $2\frac{\ln r}{\ln q} \geq 2$ ve $3\frac{\ln r}{\ln q} \geq 3$ olup

$$\begin{aligned} \left|F^{(k)}(z)\right| \leq\ & 4^k \left(\begin{array}{c} \left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}} + \frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}\right| + \left|\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}} + \sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)\right| \\ + \left|\frac{\alpha(q)\gamma_1}{\sqrt{q-1}}\right| \end{array} \right) \\ & +4^k \left(\begin{array}{c} \sum_{r\in q^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k \left|\sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)A(1,r)\right| \\ + \sum_{r\in q^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k \left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r) + \frac{\beta_0\alpha(1)}{\sqrt{q-1}}A(1,r)\right| \\ + \sum_{r\in q^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k \left|\frac{\gamma_0\alpha(q)}{\sqrt{q(q-1)}}A(q,r) + \sqrt{\frac{q}{q-1}}\beta_1\alpha(1)A(1,r)\right| \\ + \sum_{r\in q^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k \left|\frac{\gamma_1\alpha(q)}{\sqrt{q-1}}A(q,r)\right| \end{array} \right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$s \geq tq^{\frac{\ln r}{4\ln q}}$$

için $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ olmak üzere

$$-s^\delta \leq -tq^{\left(\frac{\ln r}{4\ln q}\right)^\delta}$$

yazılabilir. Lemma 3.5 den

$$|A(t,r)| \leq M\exp\left[-\frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^\delta\right] \tag{3.31}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.30) ve (3.31) eşitsizliklerinden

$$D_k = M4^k \sum_{r\in q^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k e^{-\frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^\delta},\ k \in q^{\mathbb{N}_0}$$

olmak üzere

$$\left|F^{(k)}(z)\right| \leq M4^k + M4^k \sum_{r\in q^{\mathbb{N}}} \left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^k e^{-\frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{\ln r}{\ln q}\right)^\delta} \tag{3.32}$$

bulunur. Literatürde $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{m=1}^{n} G\left(a + m\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b G(t)\,dt$$

durumunun sağlandığı bilinmektedir. O zaman $a = 0$, $b = n$ ve

$$G(t) = t^k e^{-\frac{\varepsilon}{8}t^\delta}$$

için

$$
\begin{aligned}
D_k &= M4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{8} m^\delta} \\
&= M4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} G(m) \\
&= M4^k \int_0^n t^k e^{-\frac{\varepsilon}{8} t^\delta} dt \\
&\leq M4^k \int_0^\infty t^k e^{-\frac{\varepsilon}{8} t^\delta} dt
\end{aligned}
$$

olup $y = \dfrac{\varepsilon}{8} t^\delta$ dönüşümü yapılarak

$$
\begin{aligned}
t &= \left(\frac{8y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
dt &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} y^{\frac{1}{\delta}-1} dy
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
D_k \leq M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} \int_0^\infty y^{\frac{k+1}{\delta}-1} e^{-y} dy \tag{3.33}
$$

elde edilir. (3.33) eşitsizliğinden, $a = \dfrac{k+1}{\delta} - 1$ için $a > 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\int_0^\infty y^{\frac{k+1}{\delta}-1} e^{-y} dy$ integrali

$$
\int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)
$$

biçiminde Gamma fonksiyonu cinsinden yazılır.

$$
\Gamma(a+1) = a!
$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_k &\leq M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\Gamma(a+1) \\ &= M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}a! \\ &\leq M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}a^a \\ &\leq M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}(a+1)^a \\ &= M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{\frac{k+1}{\delta}-1} \\ &= M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1}\left(\frac{1}{\delta}(k+1)\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ olmak üzere $2 \geq \dfrac{1}{\delta}$ için

$$\begin{aligned} D_k &\leq M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} 2^{\frac{1}{\delta}(k+1)}(k+1)^{-1}(k+1)^{\frac{k+1}{\delta}} \\ &\leq M4^k \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1}\, 2^{2(k+1)}(k+1)^{\frac{1}{\delta}}(k+1)^{\frac{k}{\delta}} \\ &= M4^{2k+1} \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}-1}(k+1)^{\frac{k}{\delta}} \end{aligned}$$

olup literatürde bilinen

$$(1+k)^{\frac{1}{\delta}-1} < e^{\frac{k}{\delta}}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$D_k \leq M4^{2k+1} \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}(k+1)^{\frac{k}{\delta}} \tag{3.34}$$

elde edilir. Yine iyi bilinen

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$$

eşitsizliğinden

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{\delta}} < e^{\frac{1}{\delta}}$$

olup

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < e^{\frac{1}{\delta}}k^{\frac{k}{\delta}} \tag{3.35}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$k^k < k!e^k$$

olduğundan

$$k^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}$$

olup (3.35) eşitsizliğinden

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}}$$

bulunur. O halde, son eşitsizlik (3.34) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} D_k &\leq M4^{2k+1}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}} \\ &= M4^{2k+1}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{2k+1}{\delta}} (k!)^{\frac{1}{\delta}} \\ &= 4Me^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left[16e^{\frac{2}{\delta}}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^k k!\,(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\ &= Dd^k k!\,(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\ &\leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \end{aligned}$$

olup $k \geq 1$ için $k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \geq 1$ durumu da göz önünde bulundurulursa (3.32) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left|F^{(k)}(z)\right| &\leq M4^k + Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \\ &\leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada; D ve d, ε ve δ ya bağlı pozitif sabitlerdir. Dolayısıyla Teorem 2.5 deki η_k ifadesi için

$$\eta_k = Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}$$

düşünülecektir. ■

Teorem 3.5 $\{a(t)\}$ ve $\{b(t)\}$ kompleks dizileri (3.26) koşulunu sağladığı taktirde $M_4 = \emptyset$ (Aygar ve Bohner 2015).

İspat. F fonksiyonu özdeş olarak sıfır değildir. Dolayısıyla, Teorem 2.5 ve Lemma 3.6 kullanılarak $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} t(s) &= \inf_k \frac{\eta_k s^k}{k!} \\ &= \inf_k \frac{Dk! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k}{k!} \\ &= D \inf_k \left[k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k \right] \end{aligned}$$

olmak üzere Teorem 2.5 de ifade edilen integralin aralığı $\omega > 0$ için $[0, \omega)$ olarak alınırsa

$$\int_0^\omega \ln t(s)\, d\mu(M_{4,s}) > -\infty \tag{3.36}$$

yazılır. Burada $t(s)$ fonksiyonuna paralel olarak $x \in [0, \infty)$ için

$$h(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \tag{3.37}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $t(s)$ fonksiyonunun açıkça yazılabilmesi için $h(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları bulunmalıdır. (3.37) eşitliğinden

$$\ln h(x) = x \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)$$

olup her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{h'(x)}{h(x)} &= \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right) + \frac{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right) dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}} \\ &= \frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$h'(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]$$

olup $h'(x_0) = 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1}\right) &= 0 \\ \ln\left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1}\right) &= \frac{\delta-1}{\delta} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikten

$$e^{\frac{\delta-1}{\delta}} (ds)^{-1} = x_0^{\frac{1-\delta}{\delta}}$$

olup h fonksiyonunun ekstremum noktası

$$x_0 = e^{-1} (ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}$$

olarak bulunur. Şimdi bu fonksiyonun yerel minimuma sahip olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} h''(x) &= x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \frac{\left(\frac{1}{\delta}-1\right) dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}} \\ &= x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \left\{\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\delta}-1\right) x^{-1}\right\} \end{aligned}$$

olup $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ için $\frac{1}{\delta} > 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} h''(x_0) &= x_0^{x_0\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^{x_0} \left\{\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\delta}-1\right) x_0^{-1}\right\} \\ &= e^{\left(1-\frac{1}{\delta}\right)e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \left\{\left[\frac{1}{\delta} - 1 + 1 - \frac{1}{\delta}\right]^2 + \left(\frac{1}{\delta}-1\right)\left(e (ds)^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right\} \\ &= e^{\left(1-\frac{1}{\delta}\right)e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \left\{\left(\frac{1}{\delta}-1\right) e (ds)^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani x_0, h fonksiyonunun minimum noktasıdır. O halde

$$\begin{aligned} \min_{x\in[0,\infty)} h(x) &= h(x_0) \\ &= \left[e^{-1} (ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \\ &= e^{\left(-\frac{\delta-1}{\delta}\right)e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{-e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \\ &= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} (ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right) \end{aligned}$$

olup

$$t(s) = D \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} (ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right) \tag{3.38}$$

olarak bulunur. O halde, (3.36) ve (3.38) ifadelerinden

$$\int_0^\omega \ln\left[D \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} (ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right)\right] d\mu (M_{4,s}) > -\infty$$

olup ayrıca Teorem 3.3 gereğince $\mu(M_4)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\infty &> -\int_0^\omega \left[\ln D + \left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right)\right]d\mu(M_{4,s}) \\
&= -\ln D\int_0^\omega d\mu(M_{4,s}) + \int_0^\omega \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s}) \\
&= -\ln D\left[\mu(M_{4,\omega})-\mu(M_4)\right] + \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\int_0^\omega s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s}) \\
&= -\mu(M_{4,\omega})\ln D + \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\int_0^\omega s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum ise

$$\int_0^\omega s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s}) < \infty \tag{3.39}$$

olmasını gerektirir. Fakat burada $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ için $\frac{\delta}{1-\delta}\geq 1$ olduğundan (3.39) koşulu ancak $M_4=\emptyset$ olduğunda yani $\mu(M_{4,s})=0$ olduğunda sağlanır. Gerçekten, eğer $M_4\neq\emptyset$ olsaydı

$$\mu(M_{4,s})\geq 2s$$

ve buradan da

$$d\mu(M_{4,s})\geq 2ds$$

olurdu. Dolayısıyla, $1-\frac{\delta}{1-\delta}<0$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^\omega s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s}) \\
&\geq 2\int_0^\omega s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}ds \\
&= \frac{2(1-\delta)}{1-2\delta s^{\frac{\delta}{1-\delta}-1}}\Big|_0^\omega
\end{aligned}$$

olur. Fakat bu durum ise bir çelişkidir. Yani, $M_4=\emptyset$ elde edilir. ∎

Teorem 3.6 $\{a(t)\}$, $\{b(t)\}$ kompleks dizilerinin gerçeklediği (3.26) koşulu altında (3.1)-(3.2) sınır değer problemi sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir (Aygar ve Bohner 2015).

İspat. Teoremi ispatlamak için, F fonksiyonunun P bölgesinde sonlu sayıda sonlu katlı sıfırlara sahip olduğu gösterilmelidir. Teorem 3.3 ve Teorem 3.5 kullanılarak, $M_3=\emptyset$ elde edilir. Dolayısıyla M_1 ve M_2 sınırlı kümeleri bir limit noktasına sahip değillerdir. Bu yüzden, Bolzano-Weirstrass Teoremi gereğince M_1 ve M_2 kümeleri sonlu olmalıdır, yani F fonksiyonu P bölgesinde sonlu sayıda sıfıra sahiptir. Ayrıca Teorem 3.5 gereğince $M_4 = \emptyset$ olduğundan F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırları sonlu katlıdır. ∎

4. SONUÇ

Quantum fark denklemlerinin spektral analizi üzerine yapılan bu tez çalışması hazırlanırken kaynaklar kısmında da verilen birçok makale ve kitap kullanılmış olup genel olarak Aygar ve Bohner tarafından yazılan makale esas alınmıştır. Esas alınan çalışma, Bairamov, Aygar ve Koprubasi tarafından 2011 yılında yazılan fark denkleminin spektral analizini konu alan çalışmanın quantum fark denklemlerine genişlemesi olduğundan bu tez çalışmasına başlamadan önce bu çalışma da ayrıntılarıyla irdelenmiştir. Ayrıca tez genelinde quantum analiz kullanılacağından quantum analiz için bilinen genel teoriye de başlamadan önce kaynakça kısmında verilen kaynaklar doğrultusunda çalışılmıştır.

Genel olarak literatürde, fark denklemi ve bu denklemlere ilişkin operatörlerin spektral analizi yani Sturm-Liouville denkleminin diskre analoğunun spektral analizi Berezanski, Guseinov, Gasymov, Bairamov, Adıvar gibi birçok bilim insanları tarafından çeşitli çalışmalarda sınır değer problemi olarak ele alınmıştır. Bu çalışmaların genelinde spektral parametre sadece denklemin kendisinde bulunup sınır koşulu spektral parametre içermemektedir. Fakat Bairamov *et.al.* tarafından yapılan çalışmada hem fark denklemi hem de sınır koşulu spektral parametre içerip diğer çalışmalardan farklanmaktadır. Bu tez çalışması ise bu durumun q-analoğu olup hem daha genel hal hem de sınır koşulunda spektral parametre bulundurması açısından önemlidir. Quantum analiz farklı alanlarda birçok uygulamaya sahip olup son yıllarda bilim insanlarının ilgi duyduğu alan olarak literatürde yerini almıştır. Gerçek hayatta karşılaşılan problemlere q-fark denklemleri uygulamalarının cevap vermesi sebebiyle de q-fark denklemleri önem kazanmıştır. Fakat bu denklemlere ilişkin spektral teori çalışmaları eksik kalmıştır. Son on yıla bakıldığında ancak sınırlı sayıda çalışma göze çarpmaktadır. Dolayısıyla bu tez, bu konuda çalışanlar için yeni bir kaynak olup literatüre katkıda bulunacaktır.

Çalışma genelinde, q-fark denklemi ile üretilen spektral parametreli sınır koşuluna sahip sınır değer probleminin üstel fonksiyon türünde Jost çözümü ile Jost fonksiyonu verilmiş ve Jost fonksiyonunun asimptotik özellikleri incelenmiştir. Bu özellikler kullanılarak sınır değer probleminin resolvent operatörü bulunmuştur. Özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısal ve nicel özellikleri incelenmiştir. Bu çalışma orjinal bölüm içermemektedir. Ancak çalışmaya ön hazırlık yaparken taranan makalelerden yola çıkarak, literatürde bulunmayan polinom türde Jost çözümüne sahip fark denklemi ve spektral parametreli sınır koşuluna sahip sınır değer probleminin spektral analizi üzerine sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar en az üstel fonksiyon türünde Jost çözümü için verilen sonuçlar kadar iyi çıkmıştır. Ancak, bu tez konusunun bütünlüğünü bozmamak için, orjinal elde edilen sonuçlar q-durumu içermediğinden bu tez çalışmasına eklenmemiştir.

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. J. Math. Anal. Appl. 261, no. 2, 461–478.

Adıvar, M. and Bohner, M. 2006a. Spectral analysis of q-difference equations with spectral singularities. Math. Comput. Modelling 43, no. 7-8, 695–703.

Adıvar, M. and Bohner, M. 2006. Spectrum and principal vectors of second order q-difference equations. Indian J. Math. 48, no. 1, 17–33.

Aliprantis, C. D. 1998. Principles of real analysis, Third edition, Academic Press, USA.

Aygar, Y. 2016. Investigation of spectral analysis of matrix quantum difference equations with spectral singularities. Hacet. J. Math. Stat. 45, no. 4, 999–1005.

Aygar, Y. and Bairamov, E. 2012. Jost solution and the spectral properties of the matrix-valued difference operators. Appl. Math. Comput. 218, no. 19, 9676–9681.

Aygar, Y. and Bohner, M. 2015. J. On the spectrum of eigenparameter-dependent quantum difference equations. Appl. Math. Inf. Sci. 9, no. 4, 1725–1729.

Aygar, Y. and Bohner, M. 2016. A polynomial-type Jost solution and spectral properties of a self-adjoint quantum-difference operator. Complex Anal. Oper. Theory 10, no. 6, 1171–1180.

Bairamov, E., Aygar,Y. and Koprubasi, T. 2011. The spectrum of eigenparameter-dependent discrete Sturm-Liouville equatinos. J. Comput. Appl. Math., 235(16): 4519-4523.

Bairamov, E., Aygar, Y. and Olgun, M. 2010. Jost solution and the spectrum of the discrete Dirac systems. Bound. Value Probl., Art. ID 306571, 11 p.

Bairamov, E. and Çelebi, A. O. 1999. Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50, no. 200, 371–384.

Bairamov, E. and Koprubasi, T. 2010. Eigenparameter dependent discrete Dirac equations with spectral singularities. (English summary) Appl. Math. Comput. 215, no. 12, 4216–4220.

Bohner, M. and Peterson, A. 2001. Dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

Bohner, M. and Peterson, A. 2003. Advances in dynamic equations on time scales. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

Dolzhenko, E.P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. Math. Notes 26 (6); 437-442.

Guseinov, G. S. 1976. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation on the whole axis, Sov. Math. Dokl. 17 1684-1688.

Huseynov, A. and Bairamov, E. 2009. An eigenvalue problem for quadratic pencils of q-difference equations and its applications Applied Mathematics Letters Elsevier, 521-527

Kac, V. and Cheung, P. 2002. Quantum Calculus, Universitext Springer-Verlong, New York.

Koprubasi, T. 2014. Spectrum of the quadratic eigenparameter dependent discrete Dirac equations. Advances in Difference Equations., 2014.1: 148, 9 p.

Naimark, M. A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunction of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS. Transl. 2(16); 103-193.

Naimark, M. A. 1968. Linear Differential Operators. I, II, Ungar. New York.

Pavlov, B. S. 1975. On seperation conditions for spectral components of a dissipative operator. Math. USSR Izvestiya. 9; 113-137.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Güher Gülçehre ÖZBEY
Doğum Yeri : Kars
Doğum Tarihi : 19/07/1992
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Gazi Kars Anadolu Lisesi (2010)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2014)

Yüksek Lisans **:** Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2015 – Haziran 2017)