T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{R}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEY ÜZERİNDE EĞRİLERİN ELASTİK OLMAYAN HAREKETLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Önder Gökmen YILDIZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Murat TOSUN

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{R}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEY ÜZERİNDE EĞRİLERİN ELASTİK OLMAYAN HAREKETLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Önder Gökmen YILDIZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 15.06.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat TOSUN	Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR	Prof. Dr. İbrahim OKUR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aşamasını titizlikle değerlendirip, önerileriyle yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat TOSUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden, her zaman ve her konuda desteğini gördüğüm Arş. Gör. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	: 3-boyutlu Minkowski Uzayı
$\lVert \; \rVert$	: E^3 ’de ve E_1^3 ’de norm
H_0^2	: Hiperbolik birim çember
ω	: Darboux ani dönme vektörü
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
S_1^2	: Lorentziyen birim çember
$\vec{k}$	: Eğrilik vektörü
$\wedge$	: Işık konisi
δ_{ij}	: Kroneker deltası
$\frac{\partial F}{\partial t}$	: Elastik olmayan eğri hareketi
f_i	: i. skalar fonksiyonu
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması
Λ	: Vektörel çarpım
k_g	: Yüzey üzerindeki eğrinin geodezik eğriliği
k_n	: Yüzey üzerindeki eğrinin normal eğriliği
τ_g	: Yüzey üzerindeki eğrinin geodezik burulması

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Minkowski Uzayı, Darboux Çatısı, Elastik Olmayan Eğri Hareketi

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid ve Minkowski uzayında temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca, Öklid ve Minkowski uzaylarında yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux çatısı tanıtılmış ve yine Darboux çatısının Frenet çatısı ile olan ilişkisi verilmiştir.

Üçüncü bölümde Öklid ve Minkowski uzayında varyasyonel eğri hareketi tanımı verilmiş olup, bu hareketin elastik olmama koşulu ve buna bağlı olarak eğrilikler arasındaki ilişkilere ait karakterizasyonlar ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir bir yüzey üzerindeki bir eğrinin Darboux çatısına göre eğri hareketi ve bu eğri hareketinin elastik olmama koşulları verilmiştir.

Beşinci bölüm bu çalışmanın orijinal kısımını oluşturmaktadırlar. Bu bölümde Minkowski uzayında alınan bir yüzey üzerindeki eğrinin Darboux çatısına göre varyasyonel hareketi tanımlanmış ve yine bu hareketin elastik olmama koşulu karakterize edilmiştir. Ayrıca, yüzey üzerinde aldığımız eğrinin geodezik eğri, asimptotik çizgi ve eğrilik çizgisi olma durumu incelenmiş ve buna dayalı sonuçlar verilmiştir.

Altıncı bölümde çalışmanın özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

INEXTENSIBLE FLOWS OF CURVES ON ORİENTED SURFACE IN MINKOWSKI SPACE

SUMMARY

Key words: Euclidean Space, Minkowski Space, Darboux Frame, Inextensible Flows of Curves, Variational Motions of Curves

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts in the Euclidean and Lorentzian space are introduced. Darboux frame is defined in Euclidean and Minkowski space, respectively and its relationships with Frenet Frame are given.

In the third chapter, inextensible flow of curve in Euclidean and Minkowski space is defined. The necessary and sufficient conditions for an inextensible flows of curves are expressed as a partial differential equation involving the curvature and torsion.

In the fourth chapter, inextensible flow of curve on oriented surface in Euclidean space is defined. The necessary and sufficient conditions for an inextensible flows of curves are expressed as a partial differential equation involving the geodesic curvature, the normal curvature and the geodesic torsion.

The fifth chapter is the original parts of this study. In this chapter, the general formulation for inextensible flow of curve on oriented surface is investigated in Minkowski space, respectively. The necessary and sufficient conditions for inextensible curve flow lying an oriented surface are expressed as a partial differential equation involving the geodesic curvature, the normal curvature and the geodesic torsion. Moreover, some special cases of inextensible curves on oriented surface are elaborated.

In the sixth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and suggestion have been made for future work.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Fizik, kimya ve biyolojideki lineer olmayan problemlerin çoğu eğri ve yüzeylerin parametreleri yardımıyla açıklanabilir. Ayrıca eğri ve yüzeylerin değişim (evolution) denklemleri bilgisayarda görüntü işlemede önemli uygulama alanlarına sahiptir. Diferensiyel geometri ve kısmi türevli diferensiyel denklemler farklı disiplinler olmasına karşın, E^3, Öklid uzayı veya E_1^3, Minkowski uzayındaki eğri ve yüzeylerin lokal özelliklerini çalışırken bazı kısmi türevli diferensiyel denklemler ile karşılaşırız. Örneğin, Liouville ve Sine-Gordon denklemleri sabit Gauss eğrilikli yüzeyleri tanımlarlar. Gauss-Codazzi-Mainardi denklemleri E^3, Öklid uzayı veya E_1^3, Minkowski uzayına gömülmüş yüzeyleri tanımlarlar.

Son yıllarda diferensiyel geometrinin farklı bir yönü soliton teorisinde karşımıza çıkmıştır. Eğri ailelerinin hareketleri için Frenet denklemleri, bu eğrilerin eğrilikleri olan κ ve τ fonksiyonlarının belirli kısmi türevli diferensiyel denklemleri ile verilir. Bazı soliton denklemleri yanında, modified Korteweg'de Vries (mKdV), sine-Gordon ve non-lineer Schrodinger denklemleri de uzay eğrilerinin hareketleri sonucu ortaya çıkan denklemlerdendir [1]. Non-lineer değişim (evolution) denklemlerinin çoğunluğu farklı geometrilerde eğrilerin harekeleri ile ilişkilidir. Örneğin Mullinsin non-lineer difüzyon modeli eğrileri kısaltan hareket problemleri ile açıklanır [2]. Ayrıca Hasimoto [3], Schrödinger denklemlerinin E^3, Öklid uzayındaki elastik olmayan eğri hareketlerinden elde edilebileceğini kanıtlamıştır. Elastik olmayan eğri hareketleri, hareket süreci boyunca yay uzunluğunun korunduğu hareketlerdir. Elastik olmayan eğri akımları, içinde gerilme enerjisi barındırmayan hareketleri doğurur. Örneğin, sabit uzunluklu bir sicimin salınma hareketi elastik olmayan bir eğri hareketini meydana getirir. Bu tür örnekler fiziksel uygulamalarda sıkça karşımıza çıkar. Esnek olmayan eğri hareketleri, bilgi işlem görüntülenmesinde, bilgisayar animasyonlarında ve hatta yapısal mekanikte dahi karşımıza çıkmaktadır.

Bütün bu uygulamalar eğrilerin zamana göre değişimlerini (evolution) içerir. Eğrilerin eğrilik vektör alanlarını, yani ivme vektörleri boyunca zamana göre değişimlerini çalışmak için Gage ve Hamilton [4,5]'te yeni metotlar bulmuşlar ve Grayson [6] ise ısı denklemini kullanarak kapalı düzlemsel eğrilerin bir çembere dönüşümünü kanıtlamıştır. Ayrıca, Gage [7]'de alanı koruyan düzlemsel eğri değişimini (evolution), Kwon [8,9]'de E^3, Öklid uzayındaki eğrilerin elastik olmayan hareketlerini, Tandoğan [10]'da E_1^3, Minkowski uzayında eğrilerin elastik olmayan hareketlerini incelemiştir.

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir yüzey üzerinde bir eğrinin Darboux çatısına göre elastik olmayan eğri hareketleri ve bu hareketlerin varlığı için gerekli ve yeter koşullar, geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma fonksiyonlarını içeren kısmi türevli diferensiyel denklemler yardımıyla ifade edilmişlerdir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında temel kavram ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. E^3, 3-boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir cümle ve K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Eğer

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa A 'ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir [11].

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2. A bir reel Afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V 'de

$$\langle \; , \; \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

ile verilen Öklid iç çarpım ile birlikte, A Afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı adı verilir ve E^3 ile gösterilir [11].

Tanım 2.1.3. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında $\vec{X} \in E^3$ için $\vec{X}$ vektörünün normu

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle}$$

biçiminde tanımlanır [11].

Tanım 2.1.4. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında iki vektör $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ olsun. $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\vec{X} \Lambda \vec{Y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

vektörüne $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$'nin vektörel çapımı denir. $\vec{X} \Lambda \vec{Y}$, vektörü hem $\vec{X}$ hem de $\vec{Y}$ vektörüne dik bir vektördür ve

$$\|\vec{X} \Lambda \vec{Y}\| = \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\| \sin \theta$$

dir [11].

Tanım 2.1.5. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayı ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık alt aralık olsun.

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^3 \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

fonksiyonu diferensiyellenebilir ise E^3'de bir (I, α) koordinat komşuluklu eğri adını alır ve M ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. E^3'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için, $\|\vec{\alpha}'(s)\| = 1$ ise M eğrisi, (I, α)'ya göre birim hızlı eğri, $s \in I$'da yay parametresi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7. E^3 'de her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye (yani $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$) regüler eğri denir.

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı eğri olsun. α birim hızlı eğrisinin, birim teğet vektör alanı $\vec{T}$, asal normal vektör alanı $\vec{N}$ ve binormal vektör alanı $\vec{B}$ olmak üzere

$$\vec{T} = \alpha'(s) \quad , \quad \vec{N} = \frac{1}{\kappa}\vec{T}' \quad , \quad \vec{B} = \vec{T} \Lambda \vec{N}$$

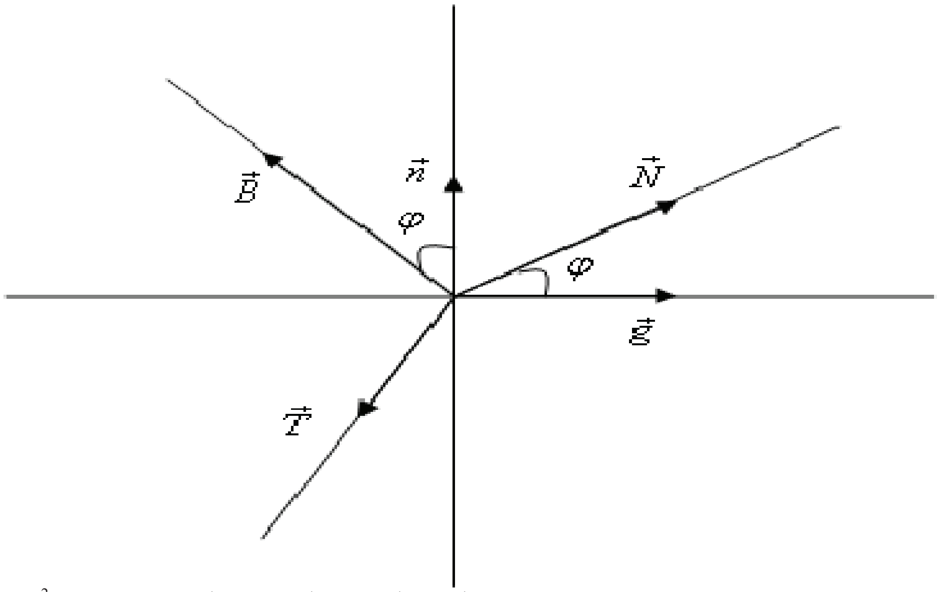
dir, Burada $\kappa = \left\|\vec{T}'\right\|$ eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği, $\tau = \left\|\vec{B}'\right\|$ da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulmasıdır. Böylece α birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı olarak adlandırılan $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ortonormal vektör alan sisteminin türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

ile verilir [11].

Tanım 2.1.9. S, E^3 'ün bir alt kümesi olsun. $\forall P \in M$ için P nin E^3 üzerinde bir V komşuluğu ve E^2 'nin U açık cümlesinden $V \cap S$ 'ye bir F diffeomorfizmi varsa, S cümlesi E^3 'de bir yüzey adını alır.

Tanım 2.1.10. E^3 'de yönlendirilebilir bir yüzey S ve S 'de yatan bir eğride α olsun. α eğrisi S yüzeyi üzerinde olduğundan her bir noktasında Darboux çatısı olarak adlandırılan ikinci bir çatı mevcuttur ve bu çatı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ ile gösterilir. Darboux çatısında, $\vec{T}$, α eğrisinin birim teğet vektörü, $\vec{n}$, S yüzeyinin birim normal vektörü ve $\vec{g} = \vec{n} \Lambda \vec{T}$ olacak şekilde bir birim vektördür. $\vec{T}$ birim teğet vektörü hem Frenet çatısında hem de Darboux çatısında olduğundan $\vec{N}$, $\vec{B}$, $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ vektörleri aynı düzlemdedir, (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. $\mathbb{R}_1^2$ Frenet ve Darboux çatılarının elemanları

Böylece Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ ve Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

Burada $\vec{g}$ ve $\vec{N}$ vektörleri arasındaki açı φ 'dir. (2.1.1) denkleminden

$$\vec{g} = \cos\varphi\vec{N} + \sin\varphi\vec{B}, \quad \vec{n} = -\sin\varphi\vec{N} + \cos\varphi\vec{B}$$

dir. Böylece son denklemlerden

$$\begin{bmatrix} \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

olduğu görülürdir. (2.1.2) eşitliğindeki

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

matrisi düzlemin dönme matrisi, olup ortogonal matristir. O halde Frenet çatısının elemanları olan $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini elde etmek için, (2.1.2) eşitliklerinden $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin bulunması gerekir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

olup

$$\vec{N} = \cos\varphi\vec{g} - \sin\varphi\vec{n}, \quad \vec{B} = \sin\varphi\vec{g} + \cos\varphi\vec{n} \tag{2.1.5}$$

eşitlikleriyle ifade edilir. Böylece $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ Darboux çatısı nin türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

ile verilir. Öyleki burada k_g, k_n ve τ_g sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyon olarak adlandırlır.

O halde, α eğrisinin geodezik eğriliği k_g, normal eğriliği k_n ve geodezik torsiyonu τ_g ile κ ve τ arasında aşağıdaki ilişki

$$k_g = \kappa\cos\varphi, \quad k_n = \kappa\sin\varphi, \quad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds}$$

ile verilir [12]. Burada

$$k_g = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2} \Lambda \vec{n} \right\rangle$$

$$\tau_g = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \vec{n} \Lambda \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle$$

dir [12].

Yönlendirilebilir S yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi için özel olarak;

i. $k_g = 0$ ise α bir geodezik eğri,

ii. $k_n = 0$ ise α bir asimptotik eğri,

iii. $\tau_g = 0$ ise α bir eğrilik çizgisi,

dir [13].

Yüzey üzerinde her noktadaki her doğrultudan bir geodezik geçer. Geodezik, bir başlangıç noktası ve bu noktadaki teğet ile tek olarak belirtilir. Bir yüzey üzerindeki bütün doğrular geodeziklerdir. Bütün eğrisel geodezikler boyunca eğrilerin asli normali, yüzey normali ile çakışıktır. Asimptotik doğrular boyunca oskülatör düzlemler ve teğet düzlemler çakışır, geodezikler boyunca bu düzlemler diktirler [14]. (2.1.6) eşitliğindeki matris, üç bileşeni ile tek olarak belirlidir. Burada, matrisin $a_{23,}$ a_{31} ve a_{12} bileşenleri göz önüne alınırsa, çatının Darboux ani dönme vektörü

$$\vec{\omega} = \tau_g \vec{T} + k_n \vec{g} + k_g \vec{n} \tag{2.1.7}$$

biçiminde yazılabilir. Darboux çatısı, her anda, bu vektör etrafında φ açılık bir dönme yapar. Buna göre, Darboux türev formülleri, bu vektör yardımıyla

$$\dot{\vec{T}} = \vec{\omega} \times \vec{T}$$
$$\dot{\vec{g}} = \vec{\omega} \times \vec{g} \tag{2.1.8}$$
$$\dot{\vec{n}} = \vec{\omega} \times \vec{n}$$

biçiminde tek olarak ifade edilebilir.

Eğer, yüzey üzerindeki eğri birim hızlı değil ise bu durumda Darboux türev formülleri

$$\dot{\vec{T}} = \gamma k_g \vec{g} + \gamma k_n \vec{n}$$
$$\dot{\vec{g}} = -\gamma k_g \vec{T} + \gamma \tau_g \vec{n}$$
$$\dot{\vec{n}} = -\gamma k_n \vec{T} - \gamma \tau_g \vec{g}$$

biçiminde verilir. Burada γ eğrinin hızıdır.

2.2. E_1^3, 3-boyutlu Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında verilen temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (a\ ,\ b) &\to \langle a, b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \end{aligned}$$

Lorentz iç çarpımı ile birlikte $\mathbb{R}^3$ Afin uzayı, Minkowski 3-uzayı adını alır ve E_1^3 ile gösterilir [15,16].

Tanım 2.2.2. E_1^3 'de herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olsun. Eğer

i. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise $\vec{a}$'ya spacelike vektör,

ii. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle < 0$ ise $\vec{a}$'ya timelike vektör,

iii. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise $\vec{a}$'ya lightlike (veya null) vektör

denir [17,18].

Tanım 2.2.3. E_1^3'de herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olsun. Eğer

i. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ise $\vec{a}$'ya birim hızlı spacelike vektör,

ii. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1$ ise $\vec{a}$'ya birim hızlı timelike vektör

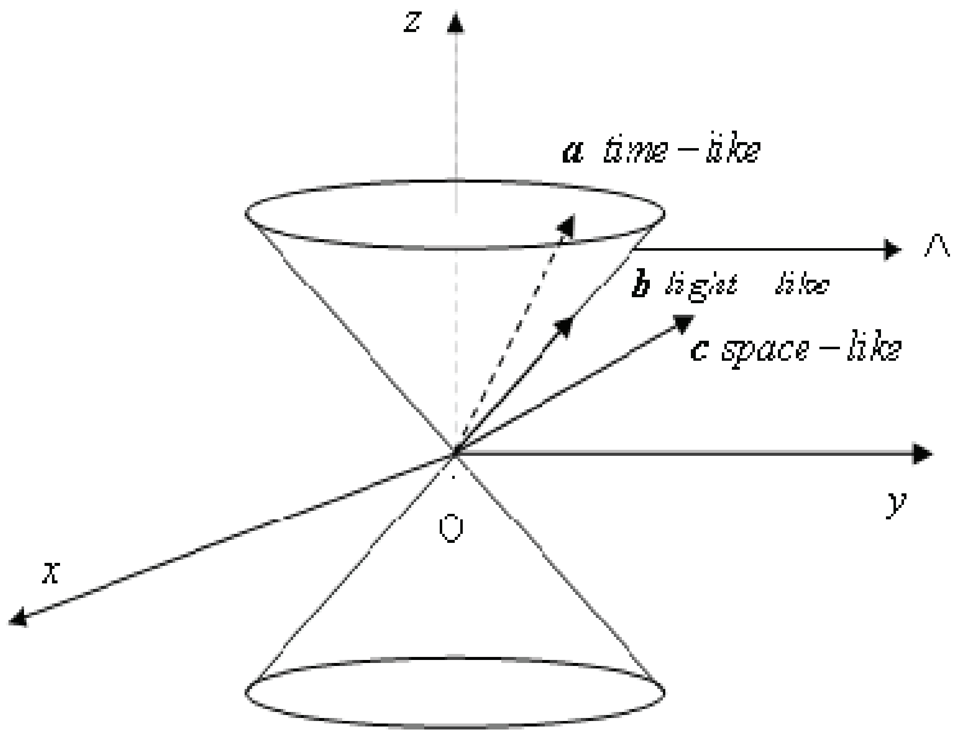
denir [17,18].

Tanım 2.2.4. E_1^3 uzayında

$$\wedge = \left\{ a \in E_1^3 : \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0,\ \vec{a} \neq 0 \right\}$$

ile verilen cümleye Işık konisi adı verilir [17,18].

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi E_1^3 uzayındaki timelike vektörler $\wedge$'nın içinde, lightlike (null) vektörler $\wedge$'nın üzerinde ve spacelike vektörlerde $\wedge$'nın dışında bulunurlar.(Şekil 2.2)



Sekil 2.2. Minkowski 3-uzayında vektörler

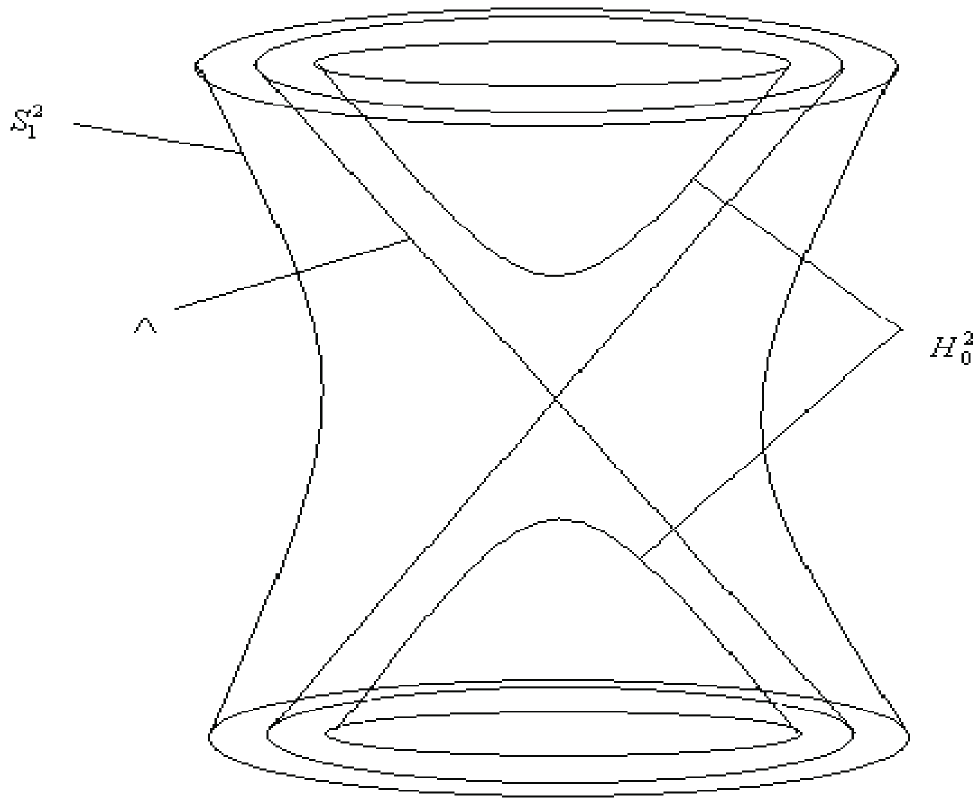
Tanım 2.2.5. E_1^3 **'**de Lorentz ve Hiperbolik birim küreler sırasıyla

$$S_1^2 = \left\{ a \in E_1^3 \,\middle|\, \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ a \in E_1^3 \,\middle|\, \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \right\}$$

ile verilir.(Şekil 2.3)



Şekil 2.3. Minkowski 3-uzayında birim küreler

Tanım 2.2.6. E_1^3 'de iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere,

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}=(a_3b_2-a_2b_3,a_1b_3-a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)$$

vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ 'nin vektörel çarpımı denir. Ayrıca

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \text{ ise}\\ 0 & i\neq j \text{ ise}\end{cases} \quad \text{ve} \quad \vec{e}_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}=-\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada,

$$\vec{e}_1 \Lambda \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \;\; \vec{e}_2 \Lambda \vec{e}_3 = -\vec{e}_1, \;\; \vec{e}_3 \Lambda \vec{e}_1 = -\vec{e}_2$$

dir [19].

Teorem 2.2.7. E_1^3 uzayında üç vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Bu takdirde,

i. $\left\langle \vec{a} \Lambda \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

ii. $(\vec{a} \Lambda \vec{b}) \Lambda \vec{c} = -\left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle \vec{b} + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \vec{a}$

iii. $\left\langle \vec{a} \Lambda \vec{b}, \vec{a} \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{a} \Lambda \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = 0$

iv. $\left\langle \vec{a} \Lambda \vec{b}, \vec{a} \Lambda \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle + \left(\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \right)^2$

dir [20].

Tanım 2.2.8. $\vec{a} \in E_1^3$ de bir timelike vektör ve $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ olsun. Eğer

i. $\left\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \right\rangle < 0$ ise $\vec{a}$'ya future-pointing timelike vektör,

ii. $\left\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \right\rangle > 0$ ise $\vec{a}$'ya past-pointing timelike vektör

denir [19].

Tanım 2.2.9.

1. Hiperbolik Açı: $\vec{x}$ ve $\vec{y}$, E_1^3 uzayında iki future pointing (past pointing) timelike vektör olsun. Bu takdirde

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = -\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\varphi \geq 0$ reel sayısına $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

2. Merkez Açı: E_1^3 uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. Bu takdirde,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\varphi \geq 0$ reel sayısına, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir.

3. Spacelike Açı: E_1^3 uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. Bu takdirde,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ reel sayısına, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir.,

4. Lorentziyen Timelike Açı: E_1^3 uzayında $\vec{x}$ bir spacelike vektör ve $\vec{y}$ bir timelike vektör olsun. Bu takdirde,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sinh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\varphi \geq 0$ reel sayısına, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir [17,18,21].

Tanım 2.2.10. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E_1^3 \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında eğri adı verilir. Eğer $\alpha'(s)$ hız vektör alanı için

i. $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ ise α 'ya birim hızlı spacelike eğri,

ii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -1$ ise α 'ya birim hızlı timelike eğri,

iii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise α 'ya null (lightlike) eğri adı verilir [21].

Tanım 2.2.11. $\alpha : I \to E_1^3$ birim hızlı non-null (spacelike veya timelike) eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere α bir spacelike eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0$ $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$, $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \varepsilon = \mp 1$, $\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = -\varepsilon$ ve κ ve τ, eğrinin, sırasıyla, eğrilik ve burulmasıdır. Ayrıca, ε, α spacelike eğrisinin çeşidi belirler. Eğer $\varepsilon = 1$ ise α spacelike eğrisi, $\vec{N}$ spacelike asli normalli ve $\vec{B}$ timelike binormallidir. Eğer $\varepsilon = -1$ ise α spacelike eğrisi, $\vec{N}$ timelike asli normalli ve $\vec{B}$ spacelike binormalli bir eğridir [21].

Bununla birlikte, eğer α bir timelike eğri ise Frenet Formülleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

Burada $\langle \vec{T},\vec{T} \rangle = -1$, $\langle \vec{N},\vec{N} \rangle = \langle \vec{B},\vec{B} \rangle = 1$, $\langle \vec{T},\vec{N} \rangle = \langle \vec{T},\vec{B} \rangle = \langle \vec{N},\vec{B} \rangle = 0$ dir. Ayrıca κ ve τ , α timelike eğrisinin sırasıyla eğriliği ve burulmasıdır [21].

Tanım 2.2.12. S, E_1^3'de bir yüzey olsun. Eğer S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik bir Lorentz metriği ise yüzeyimiz timelike yüzey, eğer indirgenmiş metrik pozitif tanımlı Riemann metriği ise yüzeyimiz spacelike yüzey olarak adlandırılır. Yani yüzeyin normal vektör alanı timelike (spacelike) ise yüzey spacelike (timelike) bir yüzeydir.

Tanım 2.2.13. S, E_1^3, 3- boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir bir yüzey olmak üzere S'de yatan non-null bir eğri α olsun. α eğrisi aynı zamanda uzayda bir eğri olduğundan eğrinin her bir noktasında $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ Frenet çatısı vardır. Ayrıca α eğrisi S yüzeyi üzerinde yattığından dolayı eğrinin Darboux çatısı olarak adlandırılan bir diğer çatı vardır ve bu çatı $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ ile gösterilir. $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ Darboux çatısında $\vec{T}$, eğrinin birim tanjant vektörü, $\vec{n}$, S yüzeyinin birim normal vektörü ve $\vec{g}$ ise $\vec{g} = \vec{n} \Lambda \vec{T}$ şeklinde birim vektördür. Burada $\vec{T}$ birim tanjant vektörü Darboux ve Frenet çatılarının ortak vektörü olduğundan dolayı $\vec{N},\vec{B},\vec{g}$ ve $\vec{n}$ vektörleri aynı düzlemdedirler. Eğer S yönlendirilebilir yüzeyi bir timelike yüzey ise yüzey üzerindeki eğri spacelike veya timelike olabilir. Böylece S timelike yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi bir timelike eğri ise Darboux ve Frenet çatıları arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

ve α bir spacelike eğri ise Darboux ve Frenet çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

ile verilir.

Eğer S yönlendirilebilir bir spacelike yüzey ise bu takdirde S üzerinde yatan $\alpha(s)$ eğrisi de bir spacelike eğridir. Böylece $\alpha(s)$ spacelike eğrisinin Frenet ve Darboux çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

dir. Burada φ, $\vec{g}$ ve $\vec{N}$ vektörleri arasındaki açıdır.

S yönlendirilebilir bir timelike yüzey olmak üzere S üzerinde yatan non-null (spacelike veya timelike) eğrinin Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -\varepsilon k_n \\ k_g & 0 & \varepsilon \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

ile verilir. Burada $\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle = \varepsilon = \pm 1$, $\left\langle \vec{g}, \vec{g} \right\rangle = -\varepsilon$, $\left\langle \vec{n}, \vec{n} \right\rangle = 1$ dir. Frenet çatısındaki κ, τ eğrilikleri ve Darboux çatısındaki k_g, k_n ve τ_g eğrilikleri arasında

$$k_g = \kappa \cos\varphi, \quad k_n = \kappa \sin\varphi, \quad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds}$$

bağıntıları vardır.

Eğer S bir spacelike yüzey ise S üzerinde yatan spacelike eğrinin Darboux türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \qquad (2.2.5)$$

dir. Öyleki $\langle \vec{T},\vec{T} \rangle = 1$, $\langle \vec{g},\vec{g} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{n},\vec{n} \rangle = -1$ dir. (2.2.4) ve (2.2.5) denklemlerinde k_g, k_n ve τ_g sırasıyla geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma olarak adlandırılır. Böylece κ, τ ve k_g, k_n, τ_g eğrilikleri arasında

$$k_g = \kappa \cosh \varphi, \quad k_n = \kappa \sinh \varphi, \quad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds}$$

bağıntıları vardır.

Lemma 2.2.14. S yönlendirilebilir yüzeyi (timelike veya spacelike) üzerinde yatan α eğrisi verilsin

i. $\alpha(s)$ bir geodezik eğridir $\Leftrightarrow k_g = 0$,

ii. $\alpha(s)$ bir asimptotik çizgidir $\Leftrightarrow k_n = 0$,

iii. $\alpha(s)$ bir eğrilik çizgisidir $\Leftrightarrow \tau_g = 0$ dir [13].

BÖLÜM 3. ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYINDA UZAY EĞRİLERİNİN FRENET ÇATISINA GÖRE ELASTİK OLMAYAN EĞRİ HAREKETİ

Bu bölümde, E^3 ve E_1^3 uzaylarında Frenet çatılı eğrilerin elastik olmayan hareketleri ile ilgili kavramlar ve teoremler verilmiştir.

3.1. E^3, Öklid Uzayında Uzay Eğrilerinin Elastik Olmayan Hareketleri

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olmak üzere

$$\begin{aligned} F : [0,l]\times[0,\omega) &\to E^3 \\ (u \ , \ t) &\to F(u,t) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

diferensiyellenebilir eğrilerin 1-parametreli bir ailesini göz önüne alalım. Burada u eğrilerin değişken parametresi ve $0 \le u \le l$ 'dir. Böylece F 'nin yay uzunluğu

$$S(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| du \tag{3.1.2}$$

şeklinde verilir. Öyleki $\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| = \left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle \right|^{1/2}$ 'dir. Ayrıca, $v = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|$ olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s}$, u cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.1.3}$$

dir. O halde s yay uzunluğu parametresi için $ds = vdu$ yazılabilir. Buradan hareketle, F 'nin akışı (hareketi) aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.1.1. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında F eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere F eğrisinin akışı (hareketi)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f_1\vec{T} + f_2\vec{N} + f_3\vec{B} \tag{3.1.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada f_1, f_2 ve f_3 bileşenleri, skalar hız fonksiyonları adını alır.

F eğrisinin yay uzunluğu değişimi (variation)

$$S(u,t) = \int_0^u v\,du$$

şeklindedir. Ayrıca eğrinin herhangi bir uzamaya veya kısalmaya sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0 \;, \qquad \forall u \in [0,l] \tag{3.1.5}$$

olmalıdır.

Tanım 3.1.2. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında eğri ailesi $F(u,t)$ olsun. Bu takdirde $F(u,t)$ 'nin $\frac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı) $\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\| = 0$ koşulunu sağlıyorsa bu harekete (akışa) elastik olmayan bir hareket (akış) adı verilir.

Teorem 3.1.3. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında F eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ olsun. Bu takdirde, $\dfrac{\partial F}{\partial t}=f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B}$ eğri hareketi elastik değildir gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=f_2\kappa \tag{3.1.6}$$

dir [10].

İspat. $\left\langle \dfrac{\partial F}{\partial u},\dfrac{\partial F}{\partial u}\right\rangle = v^2$ eşitliğinin t'ye göre türevi alınıp, $\dfrac{\partial}{\partial u}$ ve $\dfrac{\partial}{\partial t}$'nin değişmeli olduğu da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
2v\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\left(f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B}\right)\right\rangle \\
&= 2v\left\langle T,\frac{\partial f_1}{\partial u}T+f_1v\kappa\vec{N}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\vec{N}+f_2\left(-\kappa v\vec{T}-\tau v\vec{B}\right)+\frac{\partial f_3}{\partial u}\vec{B}+f_3v\tau\vec{N}\right\rangle \\
&= 2v\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2v\kappa\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2v\kappa \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Kabul edelimki $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ hareketi elastik olmasın. Bu takdirde (3.1.7) denkleminden $\forall u\in[0,l]$ için

$$\frac{\partial}{\partial t}S(u,t)=\int_0^u \frac{\partial v}{\partial t}du$$
$$=\int_0^u\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2 v\kappa\right)du=0$$

dır. Bu sonuç $\frac{\partial f_1}{\partial s}=f_2\kappa$ olmasını gerektirir.

Tersine, teoremin yeter koşulunda ki benzer yol takip edilerek kolayca görülür.

Şimdi kabul edelimki F eğrisi yay parametreli bir eğri, yani $v=1$ olsun. Böylece u koordinatı eğrinin s yay uzunluğuna eşit olur.

Teorem 3.1.4. E^3 de F eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}&=\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{N}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}\\ \frac{\partial\vec{N}}{\partial t}&=-\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}\\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}&=\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T}-\lambda\vec{N},\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

$\lambda=\left\langle\frac{\partial\vec{N}}{\partial t},\vec{B}\right\rangle$ dir [10].

İspat. Eğer (3.1.6) ve (2.1.1) denklemleri göz önüne alınırsa, $\frac{\partial}{\partial t}$ ve $\frac{\partial\vec{B}}{\partial s}$ değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\vec{T} + f_2\vec{N} + f_3\vec{B}\right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s}\vec{T} + f_1\kappa\vec{N} + \frac{\partial f_2}{\partial s}\vec{N} + f_2\left(-\kappa\vec{T} - \tau\vec{B}\right) + \frac{\partial f_3}{\partial s}\vec{B} + h\tau\vec{N} \qquad (3.1.9) \\
&= \left(f_1\kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + h\tau\right)\vec{N} + \left(-f_2\tau + \frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ Frenet çatısının t 'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\vec{T},\vec{N}\rangle = \left\langle\frac{\partial\vec{T}}{\partial t},\vec{N}\right\rangle + \left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}\right\rangle = \left(f_1\kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + h\tau\right) + \left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}\right\rangle \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\vec{T},\vec{B}\rangle = \left\langle\frac{\partial\vec{T}}{\partial t},\vec{B}\right\rangle + \left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle = -f_2\tau + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle \qquad (3.1.10) \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\vec{N},\vec{B}\rangle = \left\langle\frac{\partial\vec{N}}{\partial t},\vec{B}\right\rangle + \left\langle\vec{N},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle = \lambda + \left\langle\vec{N},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3.1.9) ve (3.1.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{T}}{\partial t} &= \left(f_1\kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + h\tau\right)\vec{N} + \left(-f_2\tau + \frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B} \\
\frac{\partial\vec{N}}{\partial t} &= -\left(f_1\kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} + h\tau\right)\vec{T} + \lambda\vec{B} \\
\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \left(f_2\tau - \frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T} - \lambda\vec{N}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.5. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında F eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ olmak üzere $\frac{\partial F}{\partial t} = f_1\vec{T} + f_2\vec{N} + f_3\vec{B}$ eğri hareketi (akışı) elastik olmasın. Bu takdirde aşağıdaki kısmi türevli diferensiyel denklemler vardır [10].

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\kappa\right)+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(f_3\tau\right)-f_2\tau^2+\tau\frac{\partial f_3}{\partial s} \tag{3.1.11}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=\kappa\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)-\frac{\partial \lambda}{\partial s} \tag{3.1.12}$$

$$\kappa\lambda=-\tau\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(f_2\tau\right)+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} \tag{3.1.13}$$

İspat. $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{N}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}\right\}\\&=\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\kappa\right)+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(f_3\tau\right)\right)\vec{N}-\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\left(\kappa\vec{T}+\tau\vec{B}\right)\\&+\left(-\frac{\partial}{\partial s}\left(f_2\tau\right)+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}\right)\vec{B}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\tau\vec{N}\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa\vec{N}\right)=\frac{\partial \kappa}{\partial t}\vec{N}+\kappa\left\{-\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}\right\}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\kappa\right)+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(f_3\tau\right)-f_2\tau^2+\tau\frac{\partial f_3}{\partial s}$$

ve

$$\kappa\lambda=-\tau\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(f_2\tau\right)+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T}-\lambda\vec{N}\right\}\\&=\left(\frac{\partial}{\partial s}(f_2\tau)-\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}\right)\vec{T}+\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\kappa\vec{N}\\&-\frac{\partial\lambda}{\partial s}\vec{N}+\lambda\left(\kappa\vec{T}+\tau\vec{B}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\tau\vec{N}\right)=\frac{\partial\tau}{\partial t}\vec{N}+\tau\left\{-\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}\right\}$$

olduğundan dolayı

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=\kappa\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial s}$$

elde edilir.

3.2. E_1^3, Minkowski Uzayında Uzay Eğrilerinin Elastik Olmayan Hareketleri

E_1^3 Minkowski uzayında başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}F:[0,l]\times[0,\omega)&\to E_1^3\\(u\ ,\ t)&\to F(u,t)\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

ile verilen diferensiyellenebilir eğrilerin 1-parametreli bir ailesini göz önüne alalım. u eğrilerin değişken parametreleri ve $0\le u\le l$ olmak üzere F 'nin yay uzunluğu

$$S(u)=\int_0^u \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| du \tag{3.2.2}$$

ile verilir. Burada, $\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| = \left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle \right|^{1/2}$ dir. Böylece, $v=\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.2.3}$$

olup $ds = v du$ olduğu görülmektedir. Böylece, F eğrisinin bir akışı (hareketi)

$$\frac{\partial F}{\partial t}=f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B} \tag{3.2.4}$$

ile verilir. Ayrıca yay uzunluğu değişimi (variation)

$$S(u,t)=\int_0^u v\, du$$

şeklindedir. Bununla birlikte eğride herhangi bir uzama veya kısalma olmaması durumu $\forall u \in [0,l]$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}S(u,t)=\int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0 \tag{3.2.5}$$

koşulunu sağlaması ile verilir.

Tanım 3.2.1. E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri ailesi $F(u,t)$ olmak üzere, $\frac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı) için $\frac{\partial}{\partial t}\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| = 0$ koşulu sağlanıyorsa bu harekete (akışa) elastik olmayan eğri hareketi (akışı) denir [10].

Teorem 3.2.2. E_1^3, 3- boyutlu Minkowski uzayında F eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ olsun. Bu takdirde $\dfrac{\partial F}{\partial u}=f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B}$ eğri hareketi elastik değildir gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=-f_2\kappa \tag{3.2.6}$$

dir [10].

İspat. $v^2=\left\langle \dfrac{\partial F}{\partial u},\dfrac{\partial F}{\partial u}\right\rangle$ eşitliğinin t'ye göre türevini alıp ve $\dfrac{\partial}{\partial u}$ ile $\dfrac{\partial}{\partial t}$'nin değişmeli olduğunu göz önünde bulundurursak

$$\begin{aligned}
2v\frac{\partial v}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle\\
&=2\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right\rangle\\
&=2\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\left(f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B}\right)\right\rangle\\
&=2v\left\langle T,\frac{\partial f_1}{\partial u}T+f_1v\kappa\vec{N}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\vec{N}+f_2\left(\kappa v\vec{T}-\tau v\vec{B}\right)+\frac{\partial f_3}{\partial u}\vec{B}+f_3v\tau\vec{N}\right\rangle\\
&=2v\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2v\kappa\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2v\kappa \tag{3.2.7}$$

bulunur. Kabul edelim ki $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ hareketi elastik olmasın. Bu takdirde (3.2.7) denkleminden $\forall u\in[0,l]$ için

$$\frac{\partial}{\partial t}S(u,t)=\int_0^u \frac{\partial v}{\partial t}du$$
$$=\int_0^u \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2 v\kappa\right)du$$

dir. Bu sonuç $\frac{\partial f_1}{\partial s}=-f_2\kappa$ olmasını gerektirir.

Tersine $\frac{\partial f_1}{\partial s}=-f_2\kappa$ alınarak akışın (hareketin) elastik olmadığı kolayca gösterilebilir.

Kabul edelim ki F eğrisi yay parametreli eğri, yani $v=1$ olsun, Böylece u koordinatı eğrinin s yay uzunluğuna eşit olur.

Teorem 3.2.3. E_1^3 de F eğrisinin Frenet çatısı $\left\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\right\}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}&=\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{N}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}\\
\frac{\partial \vec{N}}{\partial t}&=\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}\\
\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}&=\left(\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau\right)\vec{T}-\lambda\vec{N}\ ,\quad \lambda=\left\langle\frac{\partial \vec{N}}{\partial t},\vec{B}\right\rangle
\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

dir [10].

İspat. Eğer (3.2.6) denklemi göz önüne alınırsa, $\frac{\partial}{\partial t}$ ve $\frac{\partial}{\partial s}$ değişmeli olduğundan

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B}\right)$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\vec{T}+f_1\kappa\vec{N}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\vec{N}+f_2\left(\kappa\vec{T}-\tau\vec{B}\right)+\frac{\partial f_3}{\partial s}\vec{B}+h\tau\vec{N} \tag{3.2.9}$$
$$=\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+h\tau\right)\vec{N}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}$$

yazabiliriz. Şimdi $\left\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\right\}$ Frenet çatısının t'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{T},\vec{N}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\vec{T}}{\partial t},\vec{N}\right\rangle+\left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}\right\rangle=-\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+h\tau\right)+\left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}\right\rangle$$
$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{T},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\vec{T}}{\partial t},\vec{B}\right\rangle+\left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle=f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}+\left\langle\vec{T},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle \tag{3.2.10}$$
$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{N},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\vec{N}}{\partial t},\vec{B}\right\rangle+\left\langle\vec{N},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle=\lambda+\left\langle\vec{N},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\rangle$$

elde edilir. O halde (3.2.9) ve (3.2.10) denklemlerinden

$$\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}=\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+h\tau\right)\vec{N}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}$$
$$\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}=\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+h\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}$$
$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T}-\lambda\vec{N}$$

bulunur.

Teorem 3.2.4. E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında F eğrisinin Frenet çatısı $\left\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\right\}$ olmak üzere $\frac{\partial F}{\partial t}=f_1\vec{T}+f_2\vec{N}+f_3\vec{B}$ eğri akışı (hareketi) elastik olmasın. Bu takdirde aşağıdaki kısmi türevli diferensiyel denklemler vardır.

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\kappa\right)+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(f_3\tau\right)+\tau\frac{\partial f_3}{\partial s} \tag{3.2.11}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau\right)-\frac{\partial \lambda}{\partial s} \tag{3.2.12}$$

$$\kappa\lambda=-\tau\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(f_2\tau\right)+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} \tag{3.2.13}$$

İspat. $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{N}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{B}\right\}\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\kappa\right)+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(f_3\tau\right)\right)\vec{N}+\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\left(\kappa\vec{T}-\tau\vec{B}\right)\\
&+\left(-\frac{\partial}{\partial s}\left(f_2\tau\right)+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}\right)\vec{B}+\left(-f_2\tau+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa\vec{N}\right)=\frac{\partial \kappa}{\partial t}\vec{N}+\left\{\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}\right\}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(f_1\kappa\right)+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left(f_3\tau\right)+\tau\frac{\partial f_3}{\partial s}\\
\kappa\lambda&=-\tau\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(f_2\tau\right)+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}$ eşitliği kullanılırsa

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T}-\lambda\vec{N}\right\}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}-\frac{\partial}{\partial s}(f_2\tau)\right)\vec{T}+\left(f_2\tau-\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\kappa\vec{N}$$

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial s}\vec{N}-\lambda\left(\kappa\vec{T}-\tau\vec{B}\right)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\tau\vec{N}\right)=\frac{\partial\tau}{\partial t}\vec{N}+\tau\left\{\left(f_1\kappa+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau\right)\vec{T}+\lambda\vec{B}\right\}$$

olduğundan dolayı

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial s}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. ÖKLİD UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE ELASTİK OLMAYAN EĞRİ HAREKETLERİ

Bu kısımda, E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir bir yüzey üzerinde bir eğrinin Darboux çatısına göre elastik olmayan akışı (hareketi) ile ilgili temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

4.1. E^3, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yönlendirilebilir Yüzey Üzerinde Darboux Çatısına Göre Elastik Olmayan Eğri Hareketleri

$M \subset E^3$ yönlendirilebilir ve değişken parametreleri u, $0 \leq u \leq l$ olan

$$F : [0,l] \times [0,w) \to M \subset E^3 \tag{4.1.1}$$

diferensiyellenebilen eğrilerin 1-parametreli bir ailesini göz önüne alalım.

F eğrisinin hız fonksiyonu $v = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|$ olmak üzere F eğrisinin yay uzunluğu

$$S(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| du = \int_0^u v\, du \tag{4.1.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece $\frac{\partial}{\partial s}$, operatörü u'nun terimleri cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \tag{4.1.3}$$

ile verilir. O halde s yay uzunluğu parametresi için $ds = vdu$ 'dır.

Tanım 4.1.1. $M \subset E^3$ yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki F diferensiyellenebilir eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ olmak üzere F eğrisinin akışı

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f_1 \vec{T} + f_2 \vec{g} + f_3 \vec{n}$$

ile verilir. Burada f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları skalar hız fonksiyonları olarak adlandırılır [23].

Tanım 4.1.2. $M \subset E^3$ yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki eğri ailesi $F(u,t)$ olsun. Bu takdirde M üzerinde $F(u,t)$ nin $\frac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı) için $\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\| = 0$ ise bu harekete (akışa) elastik olmayan hareket (akış) denir [23].

Değişimsel (variational) yay uzunluğu $S(u,t) = \int_0^u vdu$ olduğundan verilen eğri akışı elastik değil ise

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in [0, l]$$

dir.

Şimdi elastik olmayan eğri akışı (hareketi) ile ilgili gerek ve yeter şartı araştırmadan önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.3. E^3 Öklid uzayında M yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ olsun. F eğrisin akışındaki f_1, f_2, f_3 skalar hız fonksiyonları ve F eğrisinin geodezik eğrilik k_g, normal eğrilik k_n, arasında aşağıdaki bağıntı vardır

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2vk_g-f_3vk_n \tag{4.1.4}$$

İspat. $v^2=\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle$ ifadesinin t'ye göre türevini alınır ve $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$'nin değişmeli olduğunu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
2v\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial u},\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial t},\frac{\partial}{\partial u}\left(f_1\vec{T}+f_2\vec{g}+f_3\vec{n}\right)\right\rangle \\
&= 2\left\langle v\vec{T},\frac{\partial f_1}{\partial u}\vec{T}+f_1\left(k_gv\vec{g}+k_nv\vec{n}\right)+\frac{\partial f_2}{\partial u}\vec{g}\right. \\
&\qquad \left. +f_2\left(-k_gv\vec{T}+\tau_gv\vec{n}\right)+\frac{\partial f_3}{\partial u}\vec{n}+f_3\left(-k_nv\vec{T}-\tau_gv\vec{g}\right)\right\rangle \\
&= 2v\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2vk_g-f_3vk_n\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2vk_g-f_3vk_n$$

bulunur.

Böylece Teorem 4.1.3'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.4. F eğrisi bir geodezik eğri veya bir asimptotik çizgi ise sırasıyla $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_3vk_n$ veya $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}-f_2vk_g$ dir [23].

Teorem 4.1.5. E^3'de M yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde Darboux çatısı $\left\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\right\}$ olsun. M yüzeyi üzerindeki eğri F olmak üzere $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}=f_1\vec{T}+f_2\vec{g}+f_3\vec{n}$ denklemi ile verilen diferensiyellenebilir F varyasyonel eğri hareketinin elastik olmayan bir hareket olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g + f_3 k_n$ dir. Burada k_g, k_n ve s, F eğrisinin sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve yay uzunluğunu göstermektedir [23].

İspat. İlk olarak kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın. Bu takdirde (4.1.2) ve (4.1.4) denklemlerinden

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = \int_0^u \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g - f_3 v k_n \right) du = 0 \quad , u \in [0,l]$$

dir. O halde,

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g - f_3 v k_n = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial u} = f_2 v k_g + f_3 v k_n$$

elde edilir. Böylece son denklem ve (4.1.3) den

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f_1}{\partial u} = f_2 k_g + f_3 k_n$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g + f_3 k_n$$

elde edilir.

Tersine $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g + f_3 k_n$ alınarak akışın elastik olmadığı kolayca gösterilebilir.

Son teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.6.

i. $M \subset E^3$ yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde F eğrisi geodezik eğri ise eğri akışı elastik değildir ancak ve ancak $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_3 k_n$ 'dir

ii. $M \subset E^3$ yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde F eğrisi asimptotik çizgi ise eğri akışı elastik değildir ancak ve ancak $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g$ 'dir

Kabul edelim ki F eğrisi yay parametreli bir eğri yani $v = 1$ olsun. Böylece u koordinatı eğrinin s yay uzunluğuna eşit olur.

Teorem 4.1.7. $M \subset E^3$ bir yönlendirilebilir yüzey ve M üzerindeki F eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{g} + \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{n} \\
\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} &= -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{T} + \psi \vec{n} \\
\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} &= -\left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{T} - \psi \vec{g}
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

dir. Burada $\psi = \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle$ [23].

İspat. $\frac{\partial}{\partial s}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ 'nin değişmeli olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(f_1 \vec{T} + f_2 \vec{g} + f_3 \vec{n} \right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s} \vec{T} + f_1 \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \vec{g} + f_2 \frac{\partial \vec{g}}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s} \vec{n} + f_3 \frac{\partial \vec{n}}{\partial s}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.1.6) denklemi, son denklemde yerine yazılır ve Teorem 4.1.5 kullanılırsa

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{g} + \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{n} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. Şimdi $\left\{ \vec{T}, \vec{g}, \vec{n} \right\}$ Darboux çatısının t'ye göre diferensiyeli alınır ve son denklem göz önünde bulundurulursa

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \vec{T}, \vec{g} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial t}, \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right\rangle$$

$$0 = \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) + \left\langle \vec{T}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right\rangle \tag{4.1.7}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right) \vec{T} + \psi \vec{n}$$

dır. Benzer şekilde

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \vec{T}, \vec{n} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \right\rangle$$

$$= \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) + \left\langle \vec{T}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \right\rangle$$

olacağından

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -\left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{T} - \psi \vec{g}$$

elde edilir.

O halde Torem 4.1.7'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.8.

i- M yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki F eğrisi geodezik eğri ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{g} + \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{n},$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{T} + \psi \vec{n},$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -\left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{T} - \psi \vec{g},$$

olur. Burada $\psi = \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle$'dir [23].

ii- M yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki F eğrisi asimptotik çizigi ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{g} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{n},$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 \tau_g \right) \vec{T} + \psi \vec{n},$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \vec{T} - \psi \vec{g},$$

olur. Burada $\psi = \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle$'dir [23].

iii- M yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki F eğrisi eğrilik çizgisi ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)\vec{g} + \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} \right)\vec{n},$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)\vec{T} + \psi \vec{n},$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -\left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} \right)\vec{T} - \psi \vec{g},$$

şeklindedir. Burada $\psi = \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle$'dir [23].

Teorem 4.1.9. E^3'de bir M yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde eğri akışı $\frac{\partial F}{\partial t} = f_1\vec{T} + f_2\vec{g} + f_3\vec{n}$ elastik değil ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur [23],

$$\frac{\partial k_g}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} - \frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g - f_3 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} - f_1 k_n \tau_g - \frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g - f_2 \tau_g^2,$$
$$\frac{\partial k_n}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_n + f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} + \frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g + f_2 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} + f_1 k_g \tau_g + \frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g - f_3 \tau_g^2,$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t} = -f_1 k_g k_n - \frac{\partial f_2}{\partial s} k_n + f_3 k_n \tau_g + \frac{\partial \psi}{\partial s},$$
$$\psi k_n = \left(-f_1 k_n - \frac{\partial f_3}{\partial s} - f_2 \tau_g \right)\tau_g,$$
$$\psi k_g = \left(-f_1 k_g - \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\tau_g.$$

İspat. $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}$ ve (4.1.5) denklemlerinden birincisini göz önüne alırsak

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}-f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{n}\right]$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}-f_3\tau_g\right)\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}$$
$$+\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{n}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$$

elde edilir. Bu son denklemde (2.1.6) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}-f_3\tau_g\right)\left(-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}\right)\\&+\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{n}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\left(-k_n\vec{T}-\tau_g\vec{g}\right)\end{aligned}\tag{4.1.8}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right)=\frac{\partial k_g}{\partial t}\vec{g}+k_g\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}+\frac{\partial k_n}{\partial t}\vec{n}+k_n\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\tag{4.1.9}$$

dir. Böylece (4.1.8) ve (4.1.9) denklemlerinde sol taraflar eşit olduğundan sağ taraflarda eşit olacaktır. O halde

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-f_1k_n\tau_g-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_2{\tau_g}^2\tag{4.1.10}$$

ve

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+f_1k_g\tau_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g-f_3{\tau_g}^2.\tag{4.1.11}$$

elde edilir. Şimdi $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}$ eşitliğini ele alalım. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left[-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}-f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}\right]$$
$$=-\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{T}-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}-f_3\tau_g\right)\left(k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right)$$
$$+\frac{\partial \psi}{\partial s}n+\psi\left(-k_n\vec{T}-\tau_g\vec{g}\right)$$

elde edilir. Son denklemde (2.1.6) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=&-\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{T}-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}-f_3\tau_g\right)\left(k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right)\\&+\frac{\partial \psi}{\partial s}\vec{n}+\psi\left(-k_n\vec{T}-\tau_g\vec{g}\right)\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}\right)=-\frac{\partial k_g}{\partial t}\vec{T}-k_g\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}+\frac{\partial \tau_g}{\partial t}\vec{n}+\tau_g\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \tag{4.1.13}$$

olduğundan (4.1.12) ve (4.1.13) denklemlerinden

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+\psi k_n \tag{4.1.14}$$

ve

$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t}=-f_1k_gk_n-\frac{\partial f_2}{\partial s}k_n+f_3k_n\tau_g+\frac{\partial \psi}{\partial s} \tag{4.1.15}$$

bulunur. (4.1.10) ve (4.1.14) denklemlerinden

$$\psi k_n=-f_1k_n\tau_g-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_2{\tau_g}^2$$
$$=\left(-f_1k_n-\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau_g\right)\tau_g$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$ eşitliğinden

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-\psi k_g \quad (4.1.16)$$

elde edilir. Burada (4.1.11) ve (4.1.16) denklemlerinden

$$\psi k_g=\left(-f_1k_g-\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\tau_g$$

dır. O halde Teorem 4.1.9'dan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.10. $M\subset E^3$ yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki eğri akışı $\frac{\partial F}{\partial t}$ elastik olmasın;

i- F eğrisi geodezik eğri ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g-f_3{\tau_g}^2$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t}=-\frac{\partial f_2}{\partial s}k_n+f_3k_n\tau_g+\frac{\partial \psi}{\partial s}$$
$$\psi k_n=\left(-f_1k_n-\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau_g\right)\tau_g$$

ii- F eğrisi asimptotik çizgi ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g-f_2\tau_g{}^2$$

$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t}=\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

$$\psi k_g=\left(-f_1k_g-\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\tau_g$$

iii- F eğrisi eğrilik çizgisi ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}$$

BÖLÜM 5. MİNKOWSKİ UZAYINDA YÖNLENDİRİLEBİLİR YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ NON-NULL EĞRİLERİN ELASTİK OLMAYAN HAREKETLERİ

Bu kısım, tezin orijinal kısmı olup, E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir bir timelike yüzey üzerinde non-null bir eğrinin Darboux çatısına göre elastik olmayan eğri hareketleri (akışı) ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

5.1. E_1^3, 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Yönlendirilebilir Timelike Yüzey Üzerindeki Non-Null Eğrilerin Elastik Olmayan Hareketleri

$M \subset E_1^3$ timelike yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde yatan bir non-null eğri F ve F 'nin yay uzunluğu l olmak üzere

$$\begin{aligned} F:[0,l]\times[0,\omega) &\to E^3 \\ (u\ ,\ t) &\to F(u,t) \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

ile verilen diferensiyellenebilen eğri ailesini göz önüne alalım. Öyle ki u eğrilerin değişken parametreleri ve $0 \le u \le l$ 'dir.

Böylece, non-null F eğrisinin hız fonksiyonu $v = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|$ olmak üzere non-null F 'nin yay uzunluğu

$$S(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| du = \int_0^u v\, du \tag{5.1.2}$$

ile verilir. Burada, $\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\| = \left|\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle\right|^{1/2}$ 'dir. Böylece $\frac{\partial}{\partial s}$ operatörü u 'nun terimleri cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.1.3}$$

şeklindedir. Buradan ise s yay uzunluğu parametresi için $ds = vdu$ 'dir.

Tanım 5.1.1. $M \subset E_1^3$ timelike yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki non-null F eğrisinin Darboux çatısı $\left\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\right\}$ olsun. Bu takdirde non-null F eğrisinin akışı

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f_1\vec{T} + f_2\vec{g} + f_3\vec{n} \tag{5.1.4}$$

şeklindedir. Burada f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları skalar hız fonksiyonları olarak isimlendirilir.

Tanım 5.1.2. $M \subset E_1^3$ timelike yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki non-null eğri ailesi $F(u,t)$ olmak üzere E_1^3 de $\frac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı) $\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\| = 0$ koşulunu sağlıyorsa bu harekete (akışa) elastik olmayan bir hareket (akış) adı verilir.

Değişmeli yay uzunluğu

$$S(u,t) = \int_0^u vdu \tag{5.1.5}$$

olduğu için verilen eğri akışı elastik değil ise

$$\frac{\partial}{\partial t}S(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t}du = 0, \quad u \in [0,l] \tag{5.1.6}$$

dır.

Şimdi elastik olmayan eğri akışı ile ilgili gerek ve yeter şartı vermeden önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Teorem 5.1.3. E_1^3 Minkowski uzayında M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerinde non-null eğrinin Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ olsun. Bu takdirde, f_1, f_2, f_3 skalar hız fonksiyonları ile k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik arasındaki bağıntı

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2vk_g+f_3vk_n,\quad \left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle=\varepsilon=\pm 1$$

şeklindedir.

İspat. $\frac{\partial}{\partial u}$ ve $\frac{\partial}{\partial t}$'nin değişmeli ve $v^2=\varepsilon\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle$ olduğu göz önünde bulundurursa

$$\begin{aligned}
2v\frac{\partial v}{\partial t}&=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle\\
&=2\varepsilon\left\langle \frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\left(f_1\vec{T}+f_2\vec{g}+f_3\vec{n}\right)\right\rangle\\
&=2\varepsilon\Big\langle v\vec{T},\frac{\partial f_1}{\partial u}\vec{T}+f_1\left(k_gv\vec{g}-\varepsilon k_nv\vec{n}\right)+\frac{\partial f_2}{\partial u}\vec{g}+\\
&\qquad f_2\left(k_gv\vec{T}+\varepsilon\tau_gv\vec{n}\right)+\frac{\partial f_3}{\partial u}\vec{n}+f_3\left(k_nv\vec{T}+\tau_gv\vec{g}\right)\Big\rangle\\
&=2v\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2vk_g+f_3vk_n\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2vk_g+f_3vk_n$$

elde edilir.

Böylece Teorem 5.1.3'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.4. Non-null F eğrisi, geodezik eğri veya asimptotik çizgi ise sırasıyla

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_3 v k_n$$

veya

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2 v k_g$$

dir.

Teorem 5.1.5. E_1^3 Minkowski uzayında M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerinde Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ olsun. M timelike yönlendirilebilir yüzeyinde $\frac{\partial F}{\partial t}=f_1\vec{T}+f_2\vec{g}+f_3\vec{n}$ eğri akışının (hareketinin) elastik olmaması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=-f_2 k_g-f_3 k_n$$

olmasıdır. Burada k_g ve k_n sırasıyla F 'nin geodezik ve normal eğriliğidir.

İspat. İlk olarak kabul edelim ki eğri akışı (hareketi) elastik olmasın. Bu takdirde Teorem 5.1.3 ve (5.1.6) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}S(u,t)=\int_0^u\frac{\partial v}{\partial t}du=\int_0^u\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}+f_2 v k_g+f_3 v k_n\right)du=0. \quad , u\in[0,l]$$

elde edilir. Böylece son denklemden

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} + f_2 v k_g + f_3 v k_n = 0$$

olup

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -f_2 v k_g - f_3 v k_n \qquad (5.1.7)$$

bulunur. O halde (5.1.3) ve (5.1.7) denklemlerinden

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f_1}{\partial u} = -f_2 k_g - f_3 k_n$$

olup

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = -f_2 k_g - f_3 k_n$$

elde edilir.

Tersine $\frac{\partial f_1}{\partial s} = -f_2 k_g - f_3 k_n$ alınarak akışın elastik olmadığı kolayca görülebilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.6.

i- M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerinde non-null F eğrisi geodezik eğri ise eğri akışı elastik değildir $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f_1}{\partial s} = -f_3 k_n$ ’dir ii- M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerinde non-null F eğrisi asimptotik çizgi ise eğri akışı elastik değildir $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial f_1}{\partial s} = -f_2 k_g$ 'dir

Kabul edelim ki F eğrisi yay parametreli bir eğri yani $v=1$ olsun. Böylece u koordinatı eğrinin s yay uzunluğuna eşit olur.

Teorem 5.1.7. $M \subset E_1^3$ timelike yönlendirilebilir yüzey ve M üzerindeki non-null F eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ olsun. Bu takdirde Darboux çatısının t parametresine göre diferensiyeli

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right) \vec{g} + \left(-\varepsilon f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \varepsilon f_2 \tau_g \right) \vec{n} \\
\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} &= \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right) \vec{T} + \psi \vec{n} \\
\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} &= \left(f_1 k_n - \varepsilon \frac{\partial f_3}{\partial s} - f_2 \tau_g \right) \vec{T} + \varepsilon \psi \vec{g}
\end{aligned}
\tag{5.1.8}
$$

dir. Öyle ki $\psi = \left\langle \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle$ 'dir.

İspat. $\dfrac{\partial}{\partial s}$ ile $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 'nin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(f_1 \vec{T} + f_2 \vec{g} + f_3 \vec{n} \right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s} \vec{T} + f_1 \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \vec{g} + f_2 \frac{\partial \vec{g}}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s} \vec{n} + f_3 \frac{\partial \vec{n}}{\partial s}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi son denklemde (2.2.4) yerine yazılır ve Teorem 5.1.5 kullanılırsa

$$
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} \vec{T} + f_1 \left(k_g \vec{g} - \varepsilon k_n \vec{n} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial s} \vec{g} + f_2 \left(k_g \vec{T} + \varepsilon \tau_g \vec{n} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial s} \vec{n} + f_3 \left(k_n \vec{T} + \tau_g \vec{g} \right)
$$

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g \right)\vec{g}+\left(-\varepsilon f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+\varepsilon f_2\tau_g \right)\vec{n} \tag{5.1.9}$$

elde edilir. (5.1.9) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} 0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{T},\vec{g}\right\rangle &=\left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial t},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right\rangle \\ &=-\varepsilon\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g \right)+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g \right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$

olduğu görülmektedir. Benzer yol takip edilirse

$$\begin{aligned} 0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{T},\vec{n}\right\rangle &=\left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\right\rangle \\ &=\left(-\varepsilon f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+\varepsilon f_2\tau_g \right)+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(f_1k_n-\varepsilon\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau_g \right)\vec{T}+\varepsilon\psi\vec{g}$$

bulunur.

O halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.8.

i- M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerindeki non-null F eğrisi geodezik eğri ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(-\varepsilon f_1 k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+\varepsilon f_2\tau_g\right)\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(f_1 k_n-\varepsilon\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau_g\right)\vec{T}+\varepsilon\psi\vec{g}$$

dir. Burada $\psi=\left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle$ ’dir.

ii- M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerindeki non-null F eğrisi asimptotik çizigi ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(f_1 k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial s}+\varepsilon f_2\tau_g\right)\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\left(f_1 k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(-\varepsilon\frac{\partial f_3}{\partial s}-f_2\tau_g\right)\vec{T}+\varepsilon\psi\vec{g}$$

dir. Burada $\psi=\left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle$ ’dir.

iii- M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerindeki non-null F eğrisi eğrilik çizgisi ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(f_1 k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(-\varepsilon f_1 k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\left(f_1 k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(f_1 k_n-\varepsilon\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T}+\varepsilon\psi\vec{g}$$

dir. Burada $\psi = \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle$ ’dir.

Teorem 5.1.9. E_1^3 ’de M yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerindeki eğri akışı $\frac{\partial F}{\partial t} = f_1\vec{T} + f_2\vec{g} + f_3\vec{n}$ elastik değil ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler vardır.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} + \frac{\partial f_3}{\partial s} \tau_g + f_3 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} - \varepsilon f_1 k_n \tau_g + \frac{\partial f_3}{\partial s} \tau_g + \varepsilon f_2 \tau_g^2$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_n + f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} - \varepsilon \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} - \frac{\partial f_2}{\partial s} \tau_g - f_2 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} - f_1 k_g \tau_g - \frac{\partial f_2}{\partial s} \tau_g - f_3 \tau_g^2$$

$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t} = -(f_1 k_g k_n + \frac{\partial f_2}{\partial s} k_n + f_3 k_n \tau_g) + \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

$$\psi k_n = \left(-\varepsilon f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \varepsilon f_2 \tau_g \right) \tau_g$$

$$\psi k_g = -\varepsilon \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right) \tau_g$$

İspat. Eğer (5.1.8) denklemi göz önünde bulundurulur ve $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\vec{g} + \left(-\varepsilon f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \varepsilon f_2 \tau_g \right)\vec{n} \right] \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} + \frac{\partial f_3}{\partial s} \tau_g + f_3 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} \right)\vec{g} + \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\frac{\partial \vec{g}}{\partial s} \\
&\quad + \varepsilon \left(-\frac{\partial f_1}{\partial s} k_n - f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} + \varepsilon \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \tau_g + f_2 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} \right)\vec{n} + \left(-\varepsilon f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \varepsilon f_2 \tau_g \right)\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde (2.2.4) yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\left(k_g\vec{T}+\varepsilon\tau_g\vec{n}\right)$$
$$+\varepsilon\left(-\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n-f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\varepsilon\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{n}+\left(-\varepsilon f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+\varepsilon f_2\tau_g\right)\left(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g}\right) \tag{5.1.10}$$

elde edilir. Ayrıca (2.2.4) denklemi dikkate alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(k_g\vec{g}-\varepsilon k_n\vec{n}\right)=\frac{\partial k_g}{\partial t}\vec{g}+k_g\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial k_n}{\partial t}\vec{n}-\varepsilon k_n\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \tag{5.1.11}$$

bulunur. (5.1.10) ve (5.1.11) denklemlerinde sol taraflar eşit olduğundan sağ taraflarda eşit olacaktır. Böylece

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-\varepsilon f_1k_n\tau_g+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+\varepsilon f_2\tau_g^2 \tag{5.1.12}$$

ve

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}-\varepsilon\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}-\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g-f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-f_1k_g\tau_g-\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g-f_3\tau_g^2 \tag{5.1.13}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}$$

eşitliği ve (5.1.8) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}\right]$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{T}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}$$
$$+\frac{\partial \psi}{\partial s}\vec{n}+\psi\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$$

elde edilir. O halde (2.2.4) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{T}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\left(k_g\vec{g}-\varepsilon k_n\vec{n}\right)$$
$$+\frac{\partial \psi}{\partial s}\vec{n}+\psi\left(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g}\right) \tag{5.1.14}$$

bulunur. Ayrıca (2.2.4) denkleminden

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(k_g\vec{T}+\varepsilon\tau_g\vec{n}\right)=\frac{\partial k_g}{\partial t}\vec{T}+k_g\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial \tau_g}{\partial t}\vec{n}+\varepsilon\tau_g\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \tag{5.1.15}$$

elde edilir. Şimdi (5.1.14) ve (5.1.15) denklemlerinden dolayı

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+\psi k_n \tag{5.1.16}$$

ve

$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t}=-(f_1k_gk_n+\frac{\partial f_2}{\partial s}k_n+f_3k_n\tau_g)+\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

bulunur. Son olarak (5.1.12) ve (5.1.16) denklemlerinden

$$\psi k_n=\left(-\varepsilon f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+\varepsilon f_2\tau_g\right)\tau_g$$

olur. Yukarıdaki işlemlerdeki gibi benzer yol takip edilirse $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$ eşitliğinden

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}-\varepsilon\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}-\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g-f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+\varepsilon\psi k_g$$

ve

$$\psi k_g = -\varepsilon\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\tau_g$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.10. $M \subset E_1^3$ yönlendirilebilir timelike yüzeyi üzerindeki eğri akışı elastik olmasın.

i- Non-null F eğrisi geodezik eğri ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_n}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_n + f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} - \varepsilon \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} - \frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g - f_2 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} - \frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g - f_3 \tau_g^2$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t} = -(\frac{\partial f_2}{\partial s} k_n + f_3 k_n \tau_g) + \frac{\partial \psi}{\partial s}$$
$$\psi k_n = \left(-\varepsilon f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + \varepsilon f_2 \tau_g \right)\tau_g$$

ii- Non-null F eğrisi asimptotik çizgi ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} + \frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g + f_3 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g + \varepsilon f_2 \tau_g^2$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial s}$$
$$\psi k_g = -\varepsilon\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\tau_g$$

iii- Non-null F eğrisi eğrilik çizgisi ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}$$
$$\frac{\partial k_n}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_n + f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} - \varepsilon \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}$$

5.2. E_1^3, 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Yönlendirilebilir Spacelike Yüzey Üzerindeki Spacelike Eğrilerin Elastik Olmayan Hareketleri

Bu kısımda, E_1^3, 3-boyutlu Minkowski Uzayında yönlendirilebilir bir spacelike yüzey üzerinde yatan spacelike eğrilerin Darboux Çatısına göre elastik olamayan eğri akışı (hareketi) ile ilgili temel kavramlar ve teoremler elde edilmiştir.

E_1^3, Minkowski Uzayında spacelike yönlendirilebilir M yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir spacelike bir parametreli, F ile verilen eğri ailesini göz önüne alalım öyle ki

$$\begin{aligned} F : [0,l] \times [0,\omega) &\to M \subset E_1^3 \\ (u\ ,\ t) &\to F(u,t) \end{aligned}$$

olsun. Burada başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l ve eğrilerin değişken parametresi u, $0 \le u \le l$'dir. Böylece F spacelike eğrisinin yay uzunluğu

$$S(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| du = \int_0^u v\, du \tag{5.2.1}$$

dır. Ayrıca F'nin hızı $v = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|$ dır. Böylece $\frac{\partial}{\partial s}$, operatörü, u'nın terimleri cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.2.2}$$

şeklinde yazılabilir ve $ds = vdu$ 'dır.

Tanım 5.2.1. $M \subset E_1^3$ spacelike yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki spacelike F eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ olmak üzere spacelike F eğrisinin akışı (hareketi)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f_1\vec{T} + f_2\vec{g} + f_3\vec{n} \tag{5.2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada f_1, f_2 ve f_3 bileşenleri skalar hız fonksiyonları olarak adlandırılır.

F spacelike eğrisinin varyasyonel yay uzunluğu

$$S(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| du = \int_0^u v\, du \tag{5.2.4}$$

olsun. Böylece (5.2.3) ile verilen eğri akışının elastik olmama şartı

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = 0, \quad \forall u \in [0,l] \tag{5.2.5}$$

dır.

Tanım 5.2.2. $M \subset E_1^3$ spacelike yönlendirilebilir yüzeyi üzerindeki spacelike eğri ailesi $F(u,t)$ ve bunun $\frac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı) $\frac{\partial}{\partial t}\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| = 0$ şartını sağlıyorsa bu harekete (akışa) elastik olmayan bir hareket (akışı) denir.

Teorem 5.2.3. E_1^3 **'**de M spacelike yönlendirilebilir yüzey üzerinde spacelike eğrinin Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ olsun. f_1, f_2, f_3, v, k_n ve k_g arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g + f_3 v k_n$$

İspat. $v^2 = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle$ eşitliğinin t ye göre türevi alınıp ve $\frac{\partial}{\partial u}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$'nin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2v\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}\left(f_1\vec{T} + f_2\vec{g} + f_3\vec{n} \right) \right\rangle \\ &= 2\Big\langle v\vec{T}, \frac{\partial f_1}{\partial u}\vec{T} + f_1\left(k_g v\vec{g} + k_n v\vec{n} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial u}\vec{g} + \\ &\qquad f_2\left(-k_g v\vec{T} + \tau_g v\vec{n} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial u}\vec{n} + f_3\left(k_n v\vec{T} + \tau_g v\vec{g} \right) \Big\rangle \\ &= 2v\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g + f_3 v k_n \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g + f_3 v k_n$$

bulunur.

O halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.4. Spacelike F eğrisi, bir geodezik eğri veya asimptotik çizgi ise, sırasıyla

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + f_3 v k_n$$

veya

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g$$

dir.

Teorem 5.2.5. E_1^3'de M yönlendirilebilir spacelike yüzeyi üzerinde $\frac{\partial F}{\partial t} = f_1 \vec{T} + f_2 \vec{g} + f_3 \vec{n}$ eğri akışı (hareketi) elastik değildir gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g - f_3 k_n \tag{5.2.6}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $\frac{\partial F}{\partial t}$ eğri akışı(hareketi) elastik olmasın. Bu takdirde

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} du = \int_0^u \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g + f_3 v k_n \right) du = 0 \quad , u \in [0, l]$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 v k_g + f_3 v k_n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial u} = f_2 v k_g - f_3 v k_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} \frac{\partial f_1}{\partial u} = f_2 k_g - f_3 k_n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g - f_3 k_n$$

dir.

Tersine $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g - f_3 k_n$ alınarak akışın elastik olmadığı gösterilebilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.6.

i. Spacelike F eğrisi geodezik eğri ise eğri akışı elastik değildir $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial s} = -f_3 k_n$ dir.

ii. Spacelike F eğrisi asimptotik çizgi ise eğri akışı elastik değildir $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 k_g$ dir

Kabul edelim ki F eğrisi yay parametreli bir eğri yani $v=1$ olsun. Böylece u koordinatı eğrinin s yay uzunluğuna eşit olur.

Teorem 5.2.7. $M \subset E_1^3$ spacelike yönlendirilebilir yüzey ve M üzerinde spacelike F eğrisinin Darboux çatısı $\left\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\right\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} &= \left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\vec{g} + \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right)\vec{n} \\
\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} &= -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right)\vec{T} + \psi \vec{n} \qquad , \ \psi = \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle \qquad (5.2.7) \\
\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} &= \left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right)\vec{T} + \psi \vec{g}
\end{aligned}
$$

dır.

İspat. $\dfrac{\partial}{\partial s}$ ile $\dfrac{\partial}{\partial t}$'nin değişmeli olduğu göz önünde bulundurulursa

$$
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(f_1 \vec{T} + f_2 \vec{g} + f_3 \vec{n} \right)
$$

$$
\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s}\vec{T} + f_1 \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s}\vec{g} + f_2 \frac{\partial \vec{g}}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s}\vec{n} + f_3 \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \qquad (5.2.8)
$$

bulunur. O halde (5.2.8) denkleminde Darboux türev formülleri yerine yazılır ve Teorem 5.2.5 kullanılırsa

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}\vec{T}+f_1\left(k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right)+\frac{\partial f_2}{\partial s}\vec{g}+f_2\left(-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}\right)+\frac{\partial f_3}{\partial s}\vec{n}+f_3\left(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{n} \tag{5.2.9}$$

elde edilir. Ayrıca (5.2.9) denklemi aşağıdaki eşitlikte kullanılırsa

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{T},\vec{g}\right\rangle=\left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial t},\vec{g}\right\rangle+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right\rangle$$
$$=-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right\rangle$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$

elde edilir. Benzer yol takip edilerek

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{T},\vec{n}\right\rangle=\left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\right\rangle$$
$$=\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)+\left\langle \vec{T},\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\right\rangle$$

bulunur ve böylece

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{g}$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.8.

i- M yönlendirilebilir spacelike yüzeyi üzerindeki spacelike F eğrisi geodezik eğri ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{g}$$

dir. Burada $\psi=\left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle$ 'dır.

ii- M yönlendirilebilir spacelike yüzeyi üzerindeki spacelike F eğrisi asimptotik çizgi ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{g}$$

dir. Burada $\psi=\left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle$ 'dır.

iii- M yönlendirilebilir spacelike yüzeyi üzerindeki spacelike F eğrisi eğrilik çizgisi ise

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\vec{T}+\psi\vec{n}$$
$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}\right)\vec{T}+\psi\vec{g}$$

dir. Burada $\psi=\left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t},\vec{n}\right\rangle$ ’dır.

Teorem 5.2.9. E_1^3 ’de M yönlendirilebilir spacelike yüzeyi üzerindeki eğri akışı $\frac{\partial F}{\partial u}=f_1\vec{T}+f_2\vec{g}+f_3\vec{n}$ elastik değil ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler vardır.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+f_1k_n\tau_g+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_2\tau_g^2$$
$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+f_1k_g\tau_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_3\tau_g^2$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t}=-(f_1k_gk_n+\frac{\partial f_2}{\partial s}k_n+f_3k_n\tau_g)+\frac{\partial \psi}{\partial s}$$
$$\psi k_n=-\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\tau_g$$
$$\psi k_g=-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\tau_g$$

İspat. Eğer (5.2.7) denklemi göz önünde bulundurulur ve $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}$ eşitliği kullanılırsa

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{g}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\vec{n}\right]$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}$$
$$+\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{n}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$$

elde edilir. Son denklemde (2.2.5) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}=&\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{g}+\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\left(-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}\right)\\&+\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{n}+\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\left(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g}\right)\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

elde edilir. Ayrıca (2.2.5) denklemi dikkate alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right)=\frac{\partial k_g}{\partial t}\vec{g}+k_g\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}+\frac{\partial k_n}{\partial t}\vec{n}+k_n\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\tag{5.2.11}$$

bulunur. (5.2.10) ve (5.2.11) denklemlerinde sol taraflar eşit olduğundan sağ taraflarda eşit olacaktır. Böylece

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+f_1k_n\tau_g+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_2\tau_g^2\tag{5.2.12}$$

ve

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}+f_1k_g\tau_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_3\tau_g^2\tag{5.2.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}$ eşitliği ve (5.2.7) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left[-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\vec{T}+\psi\vec{n}\right]\\&=-\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{T}-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\\&+\frac{\partial \psi}{\partial s}\vec{n}+\psi\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.5) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=&-\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}\right)\vec{T}-\left(f_1k_g+\frac{\partial f_2}{\partial s}+f_3\tau_g\right)\left(k_g\vec{g}+k_n\vec{n}\right)\\&+\frac{\partial \psi}{\partial s}\vec{n}+\psi\left(k_n\vec{T}+\tau_g\vec{g}\right)\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

bulunur. Ayrıca (2.2.5) denkleminden

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-k_g\vec{T}+\tau_g\vec{n}\right)=-\frac{\partial k_g}{\partial t}\vec{T}-k_g\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}+\frac{\partial \tau_g}{\partial t}\vec{n}+\tau_g\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \tag{5.2.15}$$

elde edilir. Şimdi (5.2.14) ve (5.2.15) denklemlerinden

$$\frac{\partial k_g}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_g+f_1\frac{\partial k_g}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}+\frac{\partial f_3}{\partial s}\tau_g+f_3\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-\psi k_n \tag{5.2.16}$$

ve

$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t}=-(f_1k_gk_n+\frac{\partial f_2}{\partial s}k_n+f_3k_n\tau_g)+\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

bulunur. Son olarak (5.2.12) ve (5.2.16) denklemlerinden

$$\psi k_n=-\left(f_1k_n+\frac{\partial f_3}{\partial s}+f_2\tau_g\right)\tau_g$$

olur. Yukarıdaki işlemlerdeki gibi benzer yol takip edilirse $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$ eşitliğinden

$$\frac{\partial k_n}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial s}k_n+f_1\frac{\partial k_n}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\tau_g+f_2\frac{\partial \tau_g}{\partial s}-\psi k_g$$

ve

$$\psi k_g = -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right) \tau_g$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.10. $M \subset E_1^3$ yönlendirilebilir spacelike yüzeyi üzerindeki eğri akışı elastik olmasın

i- Spacelike F eğrisi geodezik eğri ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_n}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_n + f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \tau_g + f_2 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s} \tau_g + f_3 \tau_g^2$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t} = -(\frac{\partial f_2}{\partial s} k_n + f_3 k_n \tau_g) + \frac{\partial \psi}{\partial s}$$
$$\psi k_n = -\left(f_1 k_n + \frac{\partial f_3}{\partial s} + f_2 \tau_g \right) \tau_g$$

ii- Spacelike F eğrisi asimptotik çizgi ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} + \frac{\partial f_3}{\partial s} \tau_g + f_3 \frac{\partial \tau_g}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s} \tau_g + f_2 \tau_g^2$$
$$\frac{\partial \tau_g}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial s}$$
$$\psi k_g = -\left(f_1 k_g + \frac{\partial f_2}{\partial s} + f_3 \tau_g \right) \tau_g$$

iii- Spacelike F eğrisi eğrilik çizgisi ise aşağıdaki kısmi türevli denklemler mevcuttur.

$$\frac{\partial k_g}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_g + f_1 \frac{\partial k_g}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2}$$
$$\frac{\partial k_n}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial s} k_n + f_1 \frac{\partial k_n}{\partial s} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial s^2}$$

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Öklid ve Minkowski uzayında elastik olmayan eğri hareketleri göz önüne alınmış ve yüzey üzerinde yatan eğriler için Darboux çatısına göre elastik olmayan eğri hareketi tanımlanmış ve kendine has özelikleri incelenmiştir. Eğrinin özel durumlarına göre sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada ilk defa yüzey üzerindeki Darboux çatısına göre tanımlanmış olan elastik olmayan eğri hareketi, küre üzerindeki Sabban çatısına göre de tanımlanıp, benzer şekilde kendine has özelikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] NAKAYAMA, K., SEGUR. H., WADATİ, M., Integrability and the Motion of Curves, Phys. Rev. Lett., 69, 2603-2606, 1992.

[2] MULLINS, W.W., Theory of thermal grooving, J. Appl. Physc., 28, 333-339, 1957.

[3] HASİMOTO, H., A Soliton on a Vertex Filament, J. Fluid Mech., 51, 477-485, 1972.

[4] GAGE, M.E., Curve Shortening Makes Convex Curves Circular, Invent. Math., 76, 357-364, 1984.

[5] GAGE, M.E., HAMILTON, R.S., The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves, J. Diff. Geom., 23, 69-96, 1986.

[6] GRAYSON, M., The heat equation shrinks embedded plane curve to round points, J. Diff. Geom. 26, 285-314, 1987.

[7] GAGE, M.E., On an Area-preserving Evolution Equation for Plane Curves, Nonlinear Problems in Geometry (D. M. DeTurck edited), Contemp. Math., Vol. 51,51-62, 1986.

[8] KWON, D.Y., PARK, F. C., Evolution of in elastic plane curves, Appl. Math. Lett.,12, 115-119, (1999).

[9] KWON, D.Y., PARK, F. C., CHİ, D.P., Inextensible flows of curves and developable surfaces, Appl. Math. Lett., 18, 1156-1162, 2005.

[10] TANDOĞAN, F., Minkowski uzayında eğriler ve elastik olmayan hareketleri, Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi 2009.

[11] HACISALİHOĞLU, H., H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, 1983.

[12] UĞURLU, H. H., KOCAYİĞİT, H., The Frenet and Darboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on Time-Like Surface, Mathematical & Computational Applications, Vol. 1, No.2, pp.133-141 1996.

[13] O'NEILL, B., Elemantery Differential Geometry Academic Press Inc. New York, 1966.

[14] STRUIK, D. J., Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd ed. Addison Wesley, Dover, 1988.

[15] UĞURLU, H. H., ÇALIŞKAN, A., *"Timelike regle yüzey üzerindeki bir timelike eğrinin Frenet ve Darboux vektörleri",* I. Spil Fen Bilimleri Kongresi, 04-05 Eylül, Manisa, 1995.

[16] UĞURLU, H. H., On the geometry of timelike surfaces, Communications, Faculty of Sciences, Univercity of Ankara, All Series, Vol. 46, 1997.

[17] KAZAZ, M., ONDER, M., Mannheim offsets of timelike ruled surfaces in Minkowski 3-space, arXiv:0906.2077v3 [math.DG].

[18] KAZAZ M., UĞURLU H. H., Onder M., Mannheim offsets of spacelike ruled surfaces in Minkowski 3-space, arXiv:0906.4660v2 [math.DG].

[19] UĞURLU, H. H., TOPAL, A., Relation Between Daboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on a Time-Like Surfaces, Mathematical & Computational Applications, Vol. 1, No.2, pp.149-157, 1996.

[20] KOCAYİĞİT, H., Minkowski 3-Uzayında Time-like Asal Normalli Space-like Egrilerin Frenet ve Darboux vektörleri, C.B.Ü. Fen Bilimleri Enstisüsü Yüksek Lisans Tezi, 2004.

[21] O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Academic Press, London, 1983.

[22] BIRAN, L., Diferensiyel Geometri, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, 1970.

[23] YILDIZ, Ö.G., ERSOY, S., MASAL, M., A Note on Inextensible Flows of Curve on Oriented Surface, arXiv:1106.2012v1 [math.DG].

ÖZGEÇMİŞ

Önder Gökmen YILDIZ, 20.02.1987 tarihinde İstanbul'un Bakırköy ilçesinde doğdu. İlköğrenimini İstanbul Bağcılar İnönü İlköğretim Okul'u ve Bahçelievler Kemal Hasoğlu İlköğretim Okul'unda lise öğrenimini İstanbul Ataköy Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi' de tamamladı. 2005 yılında Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamlayıp aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.