ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

TÜM REEL EKSENDEKİ MATRİS KATSAYILI OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Şerifenur CEBESOY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

TEZ ONAYI

Şerifenur CEBESOY tarafından hazırlanan " **Tüm Reel Eksendeki Matris Katsayılı Operatörlerin Spektral Analizi** " adlı tez çalışması 18/08/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Cihan ORHAN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Turhan KÖPRÜBAŞI
Kastamonu Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. YELDA AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

18.08.2017

Şerifenur CEBESOY

ÖZET

Doktora Tezi

TÜM REEL EKSENDEKİ MATRİS KATSAYILI OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Şerifenur CEBESOY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral teoride bilinen bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tüm reel eksendeki matris katsayılı kendine eşlenik olmayan Sturm-Liouville operatörüne ait bazı spektral özellikler elde edilmiş, analitik fonksiyonlar için olan teklik teoremleri yardımıyla bu operatörün özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, tüm eksendeki matris katsayılı kendine eşlenik fark operatörünün spektral analizi yapılmış, orjinal sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Ağustos 2017, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Spektral teori, selfadjoint operatörler, selfadjoint olmayan operatörler, özdeğer problemi, Jost çözümü, spektrum, spektral tekillik

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF OPERATORS WITH MATRIX COEFFICIENTS ON THE WHOLE REAL AXIS

Şerifenur CEBESOY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consist of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some well known definitions of spectral analysis and some theorems are given.

In the third chapter, some spectral properties of a non-selfadjoint Sturm-Liouville operator with matrix coefficent are obtained on the whole real axis, using the uniqueness theorems of analytic functions eigenvalues and spectral singularities of this operator are investigated.

In the fourth chapter, the spectral anaysis of a selfadjoint matrix difference operator on the whole axis is considered, original results are obtained.

The fifth and last chapter is devoted to the discussion and conclusion.

August 2017, 45 pages

Key Words: Spectral theory, selfadjoint operators, non-selfadjoint operators, eigenvalue problem, Jost solution, spectrum, spectral singularity

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde engin bilgi birikiminden yararlandığım, yardım ve katkılarıyla beni her daim yönlendiren, anlayışından, desteğinden ve bana kattıklarından dolayı minnettar olduğum çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında sürekli fikir alışverişinde bulunduğum, yardıma ihtiyacım olduğunda beni hiçbir zaman geri çevirmeyen Yard. Doç. Dr. Yelda AYGAR'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) da tüm içtenliği ve sıcaklığı için teşekkür ederim.

Hayatımın hiçbir aşamasında beni yalnız bırakmayan, desteklerini hep hissettiren, sevgisini fedakarlığını ve sabrını eksik etmeyen sevgili anne ve babama sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca doktora eğitimim boyunca manevi destekleriyle beni cesaretlendiren, iyi kötü her günümde yanımda bulunan çok sevdiğim arkadaşlarıma da sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Doktora yaptığım süre zarfında verdiği burstan ötürü TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

Şerifenur CEBESOY
Ankara, Ağustos 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$\mathbb{C}^m$	$m-$boyutlu kompleks Öklid uzayı
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün diskre (nokta) spektrumu
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
L^*	L operatörünün adjoint operatörü
$\mu(M,s)$	M kümesinin s komşuluğunun Lebesgue ölçüsü
$L^2(X)$	$\left\{ f \mid f : X \to \mathbb{R}, \int\limits_{\mathbb{R}} \lvert f(x)\rvert^2 \, dx < \infty \right\}$
$L^2(\mathbb{R}, S)$	$\left\{ f \mid f : \mathbb{R} \to S, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lVert f(x)\rVert_S^2 \, dx < \infty \right\}$
$l^2(\mathbb{Z})$	$\left\{ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \lvert\lvert y_n \rvert\rvert^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lvert y_n\rvert^2 < \infty \right\}$
$l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$	$\left\{ y = \{y_n\} : y_n \in \mathbb{C}^m, n \in \mathbb{Z}, \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \lvert\lvert y_n \rvert\rvert_{\mathbb{C}^m}^2 < \infty \right\}$
$\lfloor x \rfloor$	x reel sayısının tam değeri
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$O(1)$	Sınırlı değerler
$W[y_1, y_2]$	y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskiyeni

1. GİRİŞ

Günlük hayatta fizik, matematik, mekanik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan problemlerin çoğunun uygulamalı matematik ve spektral analizde modellenmesi, sınır-değer ya da başlangıç-değer problemleri ile yapılmaktadır. Bu problemlerin spektral teorideki çözümü için ise operatör teorisi kullanılmaktadır. Bu alanda ilk olarak diferensiyel operatörlerin spektral teorisi birçok matematikçi ve fizikçi tarafından ele alınmış, bir boyutlu Schrödinger operatörünün karşılığı olan Sturm-Liouville operatörü ise literatürde geniş bir yere sahip olmuştur. 1836 yılında hem Sturm, hem de Liouville adlı yazarların aynı derginin aynı sayısında yayınlanan makalelerinde,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \; a \le x \le b$$
$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

sınır-değer problemi incelenmiş, bu problemin aşikar olmayan çözümünün varolup olmadığı ve spektrumu araştırılmıştır ((Sturm 1836), (Liouville 1836)). Yıllar içinde ise, bir diferensiyel operatörün özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve spektral tekilliklerinin bulunması problemi, spektral teoride ilgi görmüş ve bu konuda çok ilerleme kaydedilmiştir.

Özdeğer ve özvektör kelimelerinin İngilizce karşılıkları *eigenvalue* ve *eigenvector* kelimeleridir. *Eigen* terimini ilk olarak David Hilbert (1862-1943) kullanmıştır. Hilbert *eigenfuction* ve *eigenwert*e ifadelerini ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirilerinde kullanmıştır. Hilbert'in çıkış noktası homogen olmayan integral denklemlerin, bir λ parametresiyle matrissel karşılığının $(I - \lambda A)x = y$ olmasıdır. Hilbert bu eşitliğin homogen kısmının sıfırdan farklı çözümüne karşılık gelen λ değerlerine *eigenwerte* adını vermiştir ve λ değerleri A matrisinin karakteristik köklerine karşılık gelmektedir. *Eigenvector* kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır. John Von Neumann (1903-1957) bir eserinde $f \neq 0$ şartı altında $Rf = \lambda f$ ifadesindeki λ sayısını *eigenwerte,* f fonksiyonunu ise *eigenfuction* olarak adlandırmıştır, daha sonra bu yaygın bir kullanım haline gelmiştir. 1946 yılında Jeffreys'in "Methods in Mathematical Physics" adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik değer ve gizli kök kavramlarıyla eşdeğer kullanılmıştır.

Teoride, çalışılan sınır-değer problemindeki diferensiyel denklemin katsayıları ve sınır şartlarındaki parametreler reel değerli olduğunda, o diferensiyel denklem yardımıyla üretilen diferensiyel operatör eşleniğine eşit olmaktadır. Bu tür operatörlere kendine eşlenik (selfadjoint) operatör denir. Katsayıların kompleks olması durumunda ise aynı operatöre kendine eşlenik olmayan (non-selfadjoint) operatör denir ve bu operatörler eşleniklerine eşit olmazlar. Kendine eşlenik operatörlerin bütün özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri reel iken, kendine eşlenik olmayan operatörlerin özdeğerleri reel olmayabilir ve bu durumda spektral tekillikler mevcuttur.

Kuantum mekaniğinde iyi bilinmektedir ki, *bound states* adı verilen özdeğerler kuantum mekanik sistemdeki enerjiye karşılık gelmektedir. Spektral tekilliklerin kuantum mekaniğindeki fiziksel yorumu ise, sonsuz yansıma ve geçiş koşullu saçılma durumunun enerjisiyle ifade edilmesidir. Yani spektral tekillikler, reel enerjiye sahip rezonans durumlarına karşılık gelmektedir. Son yıllarda kuantum mekaniğinin gelişmesi, fizikçileri bu alanda çalışma yapmaya sevk etmiş, Sturm-Liouville, Dirac, Schrödinger, Klein-Gordon diferensiyel denklemleri tarafından elde edilen diferensiyal operatörlerin spektral analizi literatürde detaylı bir biçimde incelenmiştir. Bu incelemelerle, teoride regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatörlere regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferensiyel operatörlere ise singülerdir denir. Sturm-Liouville operatörleri ikinci mertebeden regüler olanlardır. 1951 yılında Keldys kendine eşlenik olmayan regüler diferensiyel operatörlerin spektral teorisini incelemiştir. Kuantum mekaniğinde ise daha çok sınırsız aralıkta tanımlanan singüler operatörler ile çalışılmaktadır.

Spektral teoride, sınırsız aralıkta kendine eşlenik olmayan singüler diferensiyel operatörler alanındaki çalışmalarda öncülük Naimark'a aittir. Naimark, 1960 yılında q

kompleks değerli fonksiyon, h bir kompleks sayı, λ spektral parametre olmak üzere,

$$l(y) := -y^{''} + q(x)y = \lambda^2 y,\ x \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \tag{1.1}$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$y^{'}(0) - hy(0) = 0 \tag{1.2}$$

sınır koşulunun yardımı ile $L^2(0, \infty)$ uzayında tanımlı kendine eşlenik olmayan Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisini incelemiştir. Bu çalışmada, ele alınan operatörün spektrumunun, sürekli ve diskre spektrum ile spektral tekilliklerden oluştuğu gösterilmiştir. Ayrıca spektral teoride iyi bilindiği üzere, bir spektral tekilliğin rezolvent operatörün çekirdeğinin kutbu olduğu, sürekli spektrum üzerinde bulunduğu, fakat özdeğer olmadığı Naimark'ın bu çalışmasında ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra, en az bir $\epsilon > 0$ için,

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} |q(x)|\, dx < \infty$$

şartı sağlandığında, operatörün sonlu sayıda ve sonlu katlı özdeğer ile spektral tekilliğe sahip olduğu elde edilmiştir.

Naimark'ın bulduğu sonuçlar, Kemp tarafından tüm reel eksen üzerinde tanımlı diferensiyel operatörlere, Gasymov tarafından da üç boyutlu Schrödinger operatörlerine genişletilmiştir. Schwartz ise, bir Hilbert uzayındaki soyut lineer operatörlerin belli bir sınıfına ait spektral tekillikleri çalışarak literatüre yeni tanımlar kazandırmış, kendine eşlenik operatörlerin spektral tekilliği olmadığını göstermiştir.

(1.1)-(1.2) sınır-değer probleminin

$$\lim_{x\to\infty} y\,(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = 1,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$$

koşulunu sağlayan sınırlı çözümünü $e\,(x, \lambda)$ ile gösterirsek, $e\,(x, \lambda)$ çözümüne bu denkleminin Jost çözümü denir. Marchenko, bu Jost çözümünün

$$\int_0^\infty x\,|q\,(x)|\, dx < \infty$$

koşulu altında

$$e\left(x,\lambda\right)=e^{i\lambda x}+\int\limits_{x}^{\infty}K\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt$$

integral gösterime sahip olduğunu göstermiştir. Burada $K\left(x,t\right)$ fonksiyonu q fonksiyonu yardımı ile integral denklem olarak verilmektedir.

$e\left(x,\lambda\right)$ Jost çözümünün yukarıdaki integral gösterimi quantum saçılım teorisinin düz ve ters problemlerinin çözümünde önemli rol oynar. Ayrıca Jost çözümleri diferensiyel operatörlerin spektral analizi ile ilgili çalışmalarda da büyük öneme sahip olduğundan Sturm-Liouville denklemlerinin Jost çözümleri çeşitli çalışmalarda ele alınmıştır (Gasymov ve Levitan 1966, Jaulent ve Jean 1972, Guseinov 1976, Tunca ve Bairamov 1999, Kır 2005). Bu tez çalışmasında da Jost çözümlerinin incelenmesine yer verilecektir.

Spektral analize önemli katkılarda bulunan bir başka bilim adamı ise Pavlov'dur. Pavlov, (1.1)-(1.2) problemi tarafından üretilen operatörün spektral tekilliklerinin yapısının, q potansiyel fonksiyonunun sonsuzdaki davranışına bağlı olduğunu göstermiş,

$$\sup_{0\leq x<\infty}\left[e^{\epsilon\sqrt{x}}\left|q(x)\right|\right]<\infty,\ \epsilon>0$$

koşulu altında operatörün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekilliğe sahip olduğunu ispatlamış ve operatörün esas fonksiyonlarını kullanarak spektral açılım elde etmiştir. Pavlov'un çalışması, spektral açılımın verildiği ilk çalışmadır. Lyance de aynı yıllarda, spektral açılım çalışmalarında spektral tekilliklerinin etkisini incelemiştir. Literatüre bu alanda çok sayıda makale kazandıran bir diğer matematikçi ise Krall'dır. Kral 1965a, 1965b yılında yaptığı çalışmalarda, $K\in L^2(\mathbb{R}_+)$ kompleks değerli bir fonksiyon, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olmak üzere, (1.1) ve

$$\int\limits_{0}^{\infty}K(x)y(x)dx+\alpha y^{'}(0)-\beta y(0)=0 \tag{1.3}$$

sınır koşulu yardımıyla $L^2(\mathbb{R}_+)$ uzayında tanımlı non-selfadjoint operatörün spektral analizini detaylı olarak incelemiş, aynı zamanda bu operatöre ait adjoint operatörü elde etmiştir.

p, q kompleks değerli iki fonksiyon ve p fonksiyonu, pozitif reel sayılar kümesi üzerinde sürekli diferensiyellenebilir olmak üzere, $L^2(\mathbb{R}_+)$ uzayında

$$-y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y,\ x \in [0,\infty) \tag{1.4}$$

denklemi ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| + |\beta| \neq 0,\ K \in L^2(\mathbb{R}_+)$ için

$$\int_0^\infty K(x)y(x)dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0 \tag{1.5}$$

sınır koşulu tarafından üretilen Kuadratik Schrödinger operatörler demetini $L(\lambda)$ ile gösterelim. Bairamov vd. (1997) ve Bairamov vd. (1999), çalışmalarında analitik fonksiyonların teklik teoremlerini kullanarak $L(\lambda)$ operatorünün spektral analizini incelemişlerdir. Teklik teoremlerinden bu tez hazırlanırken de yararlanılmıştır.

Bilindiği gibi, gerçek yaşamda karşımıza çıkan süreçleri gerçeğine en yakın şekilde modellemek için kimi zaman diferensiyel denklemler, kimi zaman ise fark denklemleri kullanılmaktadır. Diferensiyel denklemler sürekli problemleri, fark denklemleri ise daha ziyade sürekli olmayan kesikli problemleri karakterize eder. Atkinson ve Agarwal kitaplarında fark denklemlerini detaylı olarak incelemiştir (Atkinson 1964, Agarwal ve Wong 1997, Agarwal 2000, Kelly ve Peterson 2001). Spektral teoride de karşılaşılan her problem süreklilik belirtmediği için, özellikle kontrol teori, bilgisayar bilimi, mühendislik ve ekonomi alanındaki birçok problemin modellenmesi için fark operatörlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürdeki skaler katsayılı fark denklemlerine ilişkin başlıca çalışmalar aşağıda verilmiştir:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ reel terimli diziler ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $a_n > 0$ olmak üzere, $l^2(\mathbb{Z})$ uzayında

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

fark denklemi ve

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \left(|1 - a_n| + |b_n|\right) < \infty \tag{1.7}$$

koşulu yardımı ile üretilen kendine eşlenik fark operatörü Guseinov tarafından 1976 yılında ele alınmıştır. Bu çalışmada operatörün spektrumun sürekli spektrum ve özdeğerlerden oluştuğu ispatlanmış, (1.6) fark denklemi için saçılım teorisinin ters problemi incelenmiştir.

2011 yılında Bairamov ve arkadaşları tarafından $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompleks terimli diziler, $a_0 = 1, h_0 \neq 0, h_n \in l^2(\mathbb{N})$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $l^2(\mathbb{N})$ uzayında (1.6) fark denklemi ve

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n y_n = 0 \tag{1.8}$$

sınır koşulu yardımıyla üretilen kendine eşlenik olmayan fark operatörünün özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin ve bunların katlarının sonlu olduğu, 2π periyotlu analitik fonksiyonlar için birebirlik teoremlerinden yararlanarak ispatlanmıştır.

Adıvar ve Bairamov (2001), $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ kompleks terimli diziler ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere, $l^2(\mathbb{Z})$ uzayında (1.6) fark denklemi ve (1.7) sınır koşulu tarafından üretilen kendine eşlenik olmayan diskre Schrödinger operatörünün spektrumunu, özdeğerlerini, spektral tekilliklerini ve bu spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlarını elde ederek bunların özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca bu çalışmada, diskre Schrödinger operatörünün yanı sıra, diskre Dirac operatörü için de benzer incelemeler yapılmıştır.

Görüldüğü üzere, spektral teori alanında yapılan çalışmaların çoğu birinci ve ikinci mertebeden skaler katsayılı denklemlere aittir. Diferensiyel, fark ve Dirac ifadeleri yardımıyla üretilen operatörlerin spektral analizi hem selfadjoint, hem de non-selfadjoint durumda detaylı olarak incelenmiştir.

Yıllar içinde matris katsayılı operatörlere de ilgi duyulmaya başlanmış, Agranovich, Marchenko, Carlson, Clark, Gesztesy, Kiselev, Makarov gibi bilim adamları matris değerli Schrödinger, Jacobi ve Dirac operatörlerini incelemişlerdir. 2010 yılında Olgun ve Coşkun yarım eksende spektral tekilliğe sahip non-selfadjoint matris değerli operatörlere ait sonuçlar elde etmiştir. 2011 yılında ise aynı yazarların bu operatörlerin özdeğer ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonlarına ilişkin çalışması mevcuttur.

Matris katsayılı fark operatörlerine ait çalışmalar ise yakın zamanda yapılmıştır. (Yardımcı 2010) ve (Aygar ve Bairamov 2012) makalelerinde yarım eksendeki matris katsayılı fark operatörlerini araştırmıştır. E, m boyutlu ($m < \infty$) Öklid uzayı, $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, E uzayında yer alan lineer operatörler (matrisler) olmak üzere, $l^2(N, E)$ uzayında

$$l(y) = A_{n-1}y_{n-1} + B_n y_n + A_n y_{n+1} = \lambda y_n,\ n \in \mathbb{Z}$$

matris katsayılı fark denklemi ve

$$y_0 = 0$$

sınır koşulu yardımıyla verilen non-selfadjoint operatörün Jost çözümü, sürekli spektrumu, özdeğerleri ve spektral tekillileri Yardımcı tarafından, aynı problemin selfadjoint hali ise Aygar ve Bairamov tarafından incelenmiştir. Non-self adjoint halde fark denkleminin üst yarı düzlemde analitik olan Jost çözümleri üstel fonksiyon türünde verilmiş olup, selfadjoint durumda bu çözümler birim yuvarda analitik olan polinomlar türündedir.

Dikkat edilirse, matris katsayılı operatörlere ilişkin hem sürekli hem de fark durumunda sadece yarım eksen üzerinde çalışmalar mevcuttur. Ancak tüm eksendeki matris katsayılı operatörler henüz incelenmemiştir. Bu nedenle, bu operatörlerin spektral teorisini incelemek bir ihtiyaç olmuştur.

S, n-boyutlu ($n < \infty$) Öklid uzayı, $\|Y\|_S$ ise bu uzaydaki Y vektörünün normu olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, S-değerli Lebesgue ölçülebilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_S^2 \, dx < \infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm f fonksiyonlarının Hilbert uzayı $L^2(\mathbb{R}, S)$ ile gösterilsin.

$L^2(\mathbb{R}, S)$

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x))_S dx$$

iç çarpımı altında bir Hilbert uzayı olup, bu iç çarpımın doğurduğu norm ise

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_S^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilir.

Q, $Q^* \neq Q$ koşulunu gerçekleyen $n \times n$ tipinde fonksiyon bileşenli bir matris olmak üzere, $L^2(\mathbb{R}, S)$ Hilbert uzayında

$$l(Y) = -Y'' + Q(x)Y, \; -\infty < x < \infty \tag{1.9}$$

vektör değerli diferensiyel ifadesi yardımıyla tanımlanan operatör L olsun. Q selfadjoint olmayan matris değerli bir fonksiyon olduğundan L operatorü de selfadjoint değildir. Bu operatöre matris katsayılı non-selfadjoint Sturm-Liouville operatörü adı verilir.

Bu doktora tezinde, ilk olarak (1.9) diferensiyel ifadesi yardımıyla üretilen diferensiyel operatör ele alınacak, bu operatörün spektral teorisine ilişkin sonuçlar elde edilecektir. Daha sonra ise, aynı problemler tüm reel eksende (1.9) ifadesinin diskre analoğu olan fark denklemi için incelenerek, elde edilen fark operatörünün sürekli ve diskre spektrumu bulunacaktır. Hem sürekli hem de kesikli durumda denklemlerin Jost fonksiyonuna ait asimptotikler bulunup, bu fonksiyonların bazı analitik özelliklerinden bahsedilecektir.

2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edeceğimiz sonuçlar için ihtiyaç duyacağımız bilinen bazı temel kavram ve teoremler verilecektir.
İlk olarak hem diferensiyel, hem de fark operatörü için ortak olan bazı genel tanımları ifade edelim:

Tanım 2.1 $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzay $T : D(T) \subset X \to X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün rezolvent operatörü ya da kısaca rezolventi denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.2 $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, sınırlı ve tanım cümlesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T operatörünün regüler değeri denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan cümleye ise T operatörünün rezolvent cümlesi denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.3 $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının cümlesine T operatörünün diskre spektrumu ya da nokta spektrumu adı verilir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.4 $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye T operatörünün sürekli spektrumu denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.5 X bir kompleks vektör uzay ve $T : X \to X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına T operatörünün özdeğeri denir. Bu x çözümüne ise T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.6 Bir T operatörünün rezolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve T operatörünün özdeğeri olmayan noktalara T operatörünün spektral tekillikleri denir (Naimark 1960).

Üçüncü bölümde incelenecek olan diferensiyel operatörün özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin ve bazı analitik özelliklerinin belirlenmesinde aşağıdaki teoremlerden yararlanılacaktır:

Teorem 2.1 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.2 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.3 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.4 (Privalov Teoremi**)**: Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan, analitik bir fonksiyonun reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.5 (Pavlov Teoremi): f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ kümesinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ kümesinde sonsuz mertebeden türevlenebilir, $\mu(E = \left\{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}) = 0$,

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq A_n \quad , \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ve

$$T(s) = \inf_n \frac{A_n s^n}{n!}$$

olmak üzere, bir $a > 0$ için

$$\int_0^a \ln T(s) d\mu(E,s) = -\infty$$

olsun. Eğer en az bir N pozitif reel sayısı için

$$\int_{-\infty}^{N} \frac{\ln|f(x)|}{x^2+1}dx < \infty \quad , \quad \int_{N}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{x^2+1}dx < \infty$$

ise, f fonksiyonu kapalı üst düzlemde özdeş olarak sıfırdır (Pavlov 1975).

Son olarak, dördüncü bölümde incelenecek olan fark operatörünün spektral özelliklerinin belirlenmesinde aşağıdaki teorem ve kriterlerden yararlanılacaktır:

Teorem 2.6 (l_2 de Kompaktlık Kriteri): $M \subset l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$ sınırlı bir küme olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $Y = \{Y_n\} \in M$ için $n > N_0$ oldukça $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|Y_i\|^2 < \varepsilon^2$ sağlanacak şekilde en az bir $N_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa M kompakttır (Lusternik ve Sobolev 1974).

Teorem 2.7 (Wehyl Kompakt Pertürbasyon Teoremi): A selfadjoint ve B kompakt bir operatör olmak üzere $T = A + B$ ise bu durumda $\sigma_c(T) = \sigma_c(A)$ eşitliği sağlanır (Glazman 1965).

3. STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ

Tüm reel eksendeki matris katsayılı operatörlerin spektral teorisini incelediğimiz bu doktora tezinde çalışmalarımıza ilk olarak Sturm-Liouville operatörleri ile başladık. Bu bölümde, ilk olarak kendine eşlenik olmayan matris katsayılı Sturm-Liouville denklem sistemi tanımlanmış, bu denklem sisteminin çözümleri, bu denklem sistemine ait Jost fonksiyonunun asimptotikleri ve bu fonksiyonun bazı analitik özellikleri verilmiştir. Daha sonra ise, analitik devam ilkesi ve analitik fonksiyonlar için olan teklik teoremleri kullanılarak bu diferensiyel denklem sistemi yardımıyla üretilen operatörün özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiştir.

$-\infty < x < \infty$ aralığında

$$Q(x) = [q_{jk}]_{j,k=1}^{n}$$

şeklinde tanımlanan singüler olmayan matris değerli Q fonksiyonu, potansiyel fonksiyon olmak üzere,

$$y_j'' + \lambda^2 y_j = \sum_{k=1}^{n} q_{jk} y_k, \qquad (j = 1, 2, ..., n) \tag{3.1}$$

diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada λ spektral parametre olmak üzere, (3.1) denklem sisteminin çözümü

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda^2 Y \tag{3.2}$$

diferensiyel denklemini sağlayan $n \times n$ tipinde karesel $Y = Y(x, \lambda)$ matrisi ile gösterilebilir. (3.2) ifadesinin her matris çözümünün sütunları (3.1) denklem sisteminin çözümleridir. Bu yüzden (3.1) denklem sistemi yerine (3.2) diferensiyel ifadesi ile çalışılacak ve $\|.\|$, S Öklid uzayındaki normu göstermek üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \|Q(x)\| \, dx < \infty \tag{3.3}$$

koşulunun gerçeklendiği kabul edilecektir.

3.1 Jost Fonksiyonu

I, S uzayındaki birim matris olmak üzere, $E^+(x,\lambda)$ ve $F^-(x,\lambda)$ ile sırasıyla (3.2) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} E^+(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = I \qquad , \qquad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty} F^-(x,\lambda)e^{i\lambda x} = I \qquad , \qquad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

koşullarını gerçekleyen iki çözümünü gösterelim. Ayrıca

$$-Z'' + ZQ(x) = \lambda^2 Z \tag{3.4}$$

denkleminin de

$$\lim_{x\to-\infty} Z(x,\lambda)e^{i\lambda x} = I \qquad , \qquad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

koşulunu gerçekleyen çözümü $E^-(x,\lambda)$ olsun. $K^{\pm}(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere, (3.3) koşulu altında $E^+(x,\lambda)$ ve $E^-(x,\lambda)$ çözümleri sırasıyla aşağıdaki integral gösterimlere sahiptir:

$$E^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x}I + \int_x^{\infty} K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \tag{3.5}$$

$$E^-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}I + \int_{-\infty}^{x} K^-(x,t)e^{-i\lambda t}dt \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+. \tag{3.6}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \eta^+(x) \ &: = \int_x^{\infty} \|Q(t)\|\, dt \ , \qquad \eta_1^+(x) := \int_x^{\infty} \eta^+(t)dt, \\ \eta^-(x) \ &: = \int_{-\infty}^{x} \|Q(t)\|\, dt \ , \qquad \eta_1^-(x) := \int_{-\infty}^{x} \eta^-(t)dt \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan integraller yakınsaktır.

Gerçekten de, (3.3) koşulundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|Q(x)\|\, dx \text{ ve } \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, \|Q(x)\|\, dx$$

integrallerinin yakınsak olduğu bilindiğinden $\eta^+(x)$ ile gösterilen integral de yakınsaktır. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\eta_1^+(x) &= \int_x^\infty \eta^+(t)dt = \int_x^\infty\int_t^\infty \|Q(s)\|\, dsdt \\ &= \int_x^\infty\int_x^s \|Q(s)\|\, dtds = \int_x^\infty \|Q(s)\|\,(s-x)ds \\ &= \int_x^\infty s\,\|Q(s)\|\, ds - x\int_x^\infty \|Q(s)\|\, ds\end{aligned}$$

bulunur, (3.3) koşulundan $\eta_1^+(x)$ ile gösterilen integralin de yakınsak olduğu ispatlanır. Benzer şekilde $\eta^-(x)$ ve $\eta_1^-(x)$ ile gösterilen integrallerin yakınsaklığı da gösterilir.

$K^\pm(x,t)$ çekirdek fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre kısmi türevlere sahip olup bu fonksiyona ve kısmi türevlerine ait aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığı gösterilebilir (Agranovich ve Marchenko 1965):

$$\left\|K^\pm(x,t)\right\| \le \frac{1}{2}\eta^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\eta_1^\pm(x)-\eta_1^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}, \tag{3.7}$$

$$\left\|K_x^\pm(x,t) \mp \frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| \le \frac{1}{2}\eta_1^\pm(x)\eta^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\eta_1^\pm(x), \tag{3.8}$$

$$\left\|K_t^\pm(x,t) \mp \frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| \le \frac{1}{2}\eta_1^\pm(t)\eta^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\eta_1^\pm(t) \tag{3.9}$$

Bu eşitsizlikler yardımıyla $K^\pm(.,.)$, $K_x^\pm(.,.)$, $K_t^\pm(.,.) \in L_1(\mathbb{R},S)$ olduğu görülür. Ayrıca, $E^+(x,\lambda)$ ve $E^-(x,\lambda)$ matris fonksiyonları $\mathbb{C}_+$ üzerinde λ değişkenine göre analitik olup reel eksene kadar süreklidir.

Teorem 3.1.1 $W[E^-(x,\lambda),E^+(x,\lambda)]$, $E^-(x,\lambda)$ ve $E^+(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskiyenini göstermek üzere,

$$D(\lambda) := W[E^-(x,\lambda),E^+(x,\lambda)] = E^-(x,\lambda)[E^+(x,\lambda)]' - [E^-(x,\lambda)]'E^+(x,\lambda)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon x değişkeninden bağımsızdır.

İspat. Y ve Z sırasıyla (3.2) ve (3.4) denklemlerinin çözümleri olsun.
(3.2) denklemi soldan Z ile, (3.4) denklemi ise sağdan Y ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$-ZY'' + Z''Y = [Z'Y - ZY']' = 0$$

eşitliği bulunur. Bu ise $W[Z, Y] = Z'Y - ZY'$ ifadesinin sabit olduğunu gösterir. $E^+(x, \lambda)$ (3.2) denkleminin, $E^-(x, \lambda)$ ise (3.4) denkleminin bir çözümü olduğundan $W[E^-(x, \lambda), E^+(x, \lambda)]$ ifadesi de x değişkeninden bağımsız olmalıdır. ■

Teorem 3.1.2

$$\begin{aligned} f(t) &= K_x^+(0,t) - K_x^-(0,-t) - K_t^+(0,t) + K_t^-(0,-t) - K^-(0,0)\,K^+(0,t) \\ &\quad -K^+(0,0)\,K^-(0,-t) + K^-(0,-t) * K_x^+(0,t) + K_x^-(0,-t) * K^+(0,t) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için D fonksiyonu

$$D(\lambda) = 2i\lambda I - 2K^+(0,0) - 2K^-(0,0) + \int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt \tag{3.10}$$

eşitliğini sağlar. Burada (*) ile konvolusyon operatorü gösterilmektedir.

İspat. Wronskiyenin tanımı ve x değişkeninden bağımsızlığı kullanılarak

$$D(\lambda) = E^-(0,\lambda)E_x^+(0,\lambda) - E_x^-(0,\lambda)E^+(0,\lambda)$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \left(I + \int_{-\infty}^0 K^-(0,t)\,e^{-i\lambda t}dt\right)\left(i\lambda I - K^+(0,0) + \int_0^\infty K_x^+(0,t)\,e^{i\lambda t}dt\right) \\ &\quad - \left(-i\lambda I + K^-(0,0) + \int_{-\infty}^0 K_x^-(0,t)\,e^{-i\lambda t}dt\right)\left(I + \int_0^\infty K^+(0,t)\,e^{i\lambda t}dt\right) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= 2i\lambda I - K^{+}(0,0) - K^{-}(0,0) + \int_{0}^{\infty} K_x^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt + i\lambda \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt \\
&\quad - K^{-}(0,0) \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt + i\lambda \int_{-\infty}^{0} K^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt \\
&\quad - K^{+}(0,0) \int_{-\infty}^{0} K^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt - \int_{-\infty}^{0} K_x^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt \\
&\quad + \int_{-\infty}^{0} K^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt \int_{0}^{\infty} K_x^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt \\
&\quad - \int_{-\infty}^{0} K_x^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki yedinci terimi dikkate alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
i\lambda \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt &= \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, d(e^{i\lambda t}) \\
&= -K^{+}(0,0) - \int_{0}^{\infty} K_t^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde dokuzuncu terim dikkate alındığında da

$$i\lambda \int_{-\infty}^{0} K^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt = -K^{-}(0,0) + \int_{-\infty}^{0} K_t^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt$$

denklemine ulaşılır. D fonksiyonu için elde edilen son eşitlikteki son iki terim için ise konvolusyonun özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} K^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt \int_{0}^{\infty} K_x^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt &= \int_{0}^{\infty} K^{-}(0,-t)\, e^{i\lambda t}dt \int_{0}^{\infty} K_x^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} [K^{-}(0,-t) * K_x^{+}(0,t)] e^{i\lambda t}dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} K_x^{-}(0,t)\, e^{-i\lambda t}dt \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt &= \int_{0}^{\infty} K_x^{-}(0,-t)\, e^{i\lambda t}dt \int_{0}^{\infty} K^{+}(0,t)\, e^{i\lambda t}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} [K_x^{-}(0,-t) * K^{+}(0,t)] e^{i\lambda t}dt
\end{aligned}$$

eşitliklerinin gerçeklendiği gösterilebilir. Son olarak elde ettiğimiz bu eşitlikler D fonksiyonunda yerine yazılırsa ispat tamamlanır. ■

Ayrıca f fonksiyonunda bulunan bütün terimler $L_1(\mathbb{R}, S)$ uzayından olduğundan $f \in L_1(\mathbb{R}, S)$ olduğu görülmektedir.

Teorem 3.1.3 Aşağıdaki asimptotik eşitlikler gerçeklenir:

$$D(\lambda) = 2i\lambda I - 2K^+(0,0) - 2K^-(0,0) + o(1) \quad , \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \ |\lambda| \to \infty, \tag{3.11}$$

$$D(\lambda) = 2i\lambda I + O(1) \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \ |\lambda| \to \infty. \tag{3.12}$$

İspat. a) $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$$A(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < t < 0 \\ f(t) & , \quad 0 \le t < \infty \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(t)dt = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)dt$$

elde edilir. $f(t) \in L_1(\mathbb{R}, S)$ olduğundan $A(t) \in L_1(\mathbb{R}, S)$ olur ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğunda, Fourier dönüşümleri için olan Riemann-Lebesgue lemmasından

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt = o(1), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ |\lambda| \to \infty$$

bulunur.

b) $\lambda \in \mathbb{C}_+$ olsun.

$$\begin{aligned} \left|\left|f(t)e^{i\lambda t}\right|\right| &\le ||f(t)|| \left|e^{i(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)t}\right| \\ &= ||f(t)|| \left|e^{-\operatorname{Im}\lambda t}\right| \\ &< ||f(t)|| \end{aligned}$$

sağlanır. $f(t) \in L_1(\mathbb{R}, S)$ olduğundan

$$\int\limits_{0}^{\infty} ||f(t)|| \, dt < \infty$$

gerçeklenir. O halde

$$\int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt$$

integrali $\lambda \in \mathbb{C}_+$ için düzgün yakınsaktır.

Bu durumda

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt = \int_0^\infty \left(\lim_{|\lambda|\to\infty} f(t)e^{i\lambda t} \right) dt = 0$$

bulunacağından

$$\int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt = o(1),\ \lambda \in \mathbb{C}_+,\ \ |\lambda| \to \infty$$

yazılabilir.

a) ve b) den

$$\int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt = o(1),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ \ |\lambda| \to \infty$$

elde edilir, bu da ispatı tamamlar.

Benzer şekilde $K^+(0,0)$ ve $K^-(0,0)$ sınırlı olup $f(t) \in L_1(\mathbb{R}, S)$ olduğundan (3.12) asimptotik eşitliği de ispatlanabilir. ■

3.2 Özdeğerler ve Spektral Tekillikler

$$D(\lambda) := W[E^-(x,\lambda), E^+(x,\lambda)] = E^-(x,\lambda)E_x^+(x,\lambda) - E_x^-(x,\lambda)E^+(x,\lambda)$$

olmak üzere

$$G(\lambda) := \det D(\lambda) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümeleri ile sırasıyla L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin kümesini gösterelim. O halde,

$$\sigma_d(L) = \left\{ z : z = \lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{C}_+,\ G(\lambda) = 0 \right\} \tag{3.14}$$

ve

$$\sigma_{ss}(L) = \left\{ z : z = \lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ G(\lambda) = 0 \right\} \tag{3.15}$$

yazılır.

Tanım 3.2.1 $\overline{\mathbb{C}}_+$ üzerinde (3.13) ile tanımlanan G fonksiyonunun bir sıfırının katına, L operatörünün bu sıfıra karşılık gelen özdeğerinin ve spektral tekilliğinin katı denir.

Dolayısıyla L operatörünün özdeğerlerini ve spektral tekilliklerini incelemek için G fonksiyonunun $\overline{\mathbb{C}}_+$ kümesi üzerindeki sıfırlarını incelemek gerekiyor.

$$M_1 = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_+,\ G(\lambda) = 0\}$$

$$M_2 = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R},\ G(\lambda) = 0\}$$

olarak tanımlanırsa, (3.14) ve (3.15) yardımıyla

$$\sigma_d(L) = \left\{z : z = \lambda^2,\ \lambda \in M_1\right\} \tag{3.16}$$

$$\sigma_{ss}(L) = \{z : z = \lambda^2,\ \lambda \in M_2\} \backslash \{0\} \tag{3.17}$$

kümelerini elde ederiz.
Bu gösterimler verildikten sonra aşağıdaki lemmayı ispatlayabiliriz:

Lemma 3.2.2
(**i**) M_1 kümesi sınırlı ve sayılabilirdir. Ayrıca bu kümenin limit noktaları (eğer varsa) reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.
(**ii**) M_2 kümesi kompakttır ve Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

İspat. (**i**) $c > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\left|\left|K^{\pm}(x,t)\right|\right| \leq c\eta^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right) \tag{3.18}$$

eşitsizliğinden

$$\int_x^{\infty} \left|\left|K^{+}(x,t)\right|\right| dt \leq c\int_x^{\infty} \eta^{+}\left(\frac{x+t}{2}\right)dt \leq c\int_0^{\infty} \eta^{+}\left(\frac{t}{2}\right)dt \leq 2c\int_0^{\infty} \eta^{+}(s)ds < \infty$$

ve benzer şekilde $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} ||K^{-}(x,t)||\, dt < \infty$ sağlanır.
Diğer yandan $\mathbb{C}_+$ üzerinde

$$\begin{aligned} \left|\left|K^{+}(x,t)e^{i\lambda t}\right|\right| &\leq \left|\left|K^{+}(x,t)\right|\right| \quad , \quad x < t < \infty \\ \left|\left|K^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}\right|\right| &\leq \left|\left|K^{-}(x,t)\right|\right| \quad , \quad -\infty < t < x \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde,

$$\left\|\int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt\right\| \le \int_x^\infty \left|\left|K^+(x,t)\right|\right| dt < \infty$$

olur. Ayrıca $\int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt$ fonksiyonu λ ya göre $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitiktir. Yani,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt\right) = \int_x^\infty itK^+(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

gerçeklenir. Gerçekten de $K^+(x,t)$ sınırlı olduğundan

$$\left\|\int_x^\infty itK^+(x,t)e^{i\lambda t}dt\right\| \le \int_x^\infty t\left|\left|K^+(x,t)\right|\right| e^{-t\dot{I}m\lambda}dt \le c\int_0^\infty te^{-t\dot{I}m\lambda}dt < \infty$$

elde edilir. Böylece E^+ çözümü λ ya göre $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik bir fonksiyondur. Hatta $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. $e^{i\lambda t}$, $\mathbb{C}_+$ üzerinde λ ya göre sürekli olduğundan E^+ fonksiyonunun sürekliliğini göstermek için

$$\int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

integralinin sürekliliğini göstermek yeterlidir. Bu integral $\mathbb{C}_+$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan keyfi bir $\lambda_o \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\lambda t}dt = \int_x^\infty K^+(x,t)\lim_{\lambda\to\lambda_0} e^{i\lambda t}dt = \int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\lambda_0 t}dt$$

bulunur. O halde istenilen elde edilmiş olur. Benzer işlemler E^-çözümü için de yapılırsa D fonksiyonunun hatta G fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik ve reel eksende sürekli olduğu görülür. Ayrıca (3.12) asimptotik eşitliğinden $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ olmak üzere,

$$G(\lambda) = 2i\lambda + O(1), \ \ |\lambda| \to \infty \tag{3.19}$$

asimptotiği gerçeklenir. Bu asimptotik bize $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için yeterince büyük $|\lambda|$ lar için $G(\lambda) \neq 0$ olduğunu, yani M_1 ve M_2 kümelerinin sınırlı olduğunu gösterir.

Teorem 2.1 gereğince özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrık olmalıdır. O halde G fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$

daki sıfırlarının kümesi ayrıktır. Bu durumda M_1 kümesi en çok sayılabilir sayıda eleman içerir. Ayrıca Teorem 2.2 gereğince özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun analitiklik bölgeleri içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırında olacağından M_1 kümesinin limit noktaları reel eksenin sınırlı bir alt aralığında yer alır.

(**ii**) M_2 kümesi reel sayıların bir alt kümesi olup sınırlı bir küme olduğundan kompakt olduğunu göstermek için kapalı olduğunu söylemek yeterli olacaktır.

$\lambda_0 \in \overline{M_2}$ olsun. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \in M_2$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ olacak bir biçimde bir (λ_n) dizisi vardır. Buna göre G, $\overline{\mathbb{C}}_+$ üzerinde sürekli olacağından

$$G(\lambda_0) = G(\lim_{n\to\infty} \lambda_n) = \lim_{n\to\infty} G(\lambda_n) = 0$$

olur, yani $\lambda_0 \in M_2$ gerçeklenir. O halde M_2 kümesi kapalıdır, dolayısıyla kompakttır. Diğer yandan G, $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik olduğundan ve özdeş olarak sıfır olmadığından G fonksiyonunun reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır. O halde $\mu(M_2) = 0$ olmalıdır. ■

(3.14), (3.15) ve Lemma 3.2.2 yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.2.3 Q matris fonksiyonunun gerçeklediği

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, ||Q(x)||\, dx < \infty$$

koşulu altında

(**i**) L operatörünün özdeğerler kümesi $(\sigma_d(L))$ sınırlıdır, özdeğerleri sayılabilirdir ve özdeğerlerin limit noktası $[0, \infty)$ kümesinin sınırlı bir alt aralığındadır.

(**ii**) L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi $(\sigma_{ss}(L))$ sınırlıdır ve bu kümenin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. $(\mu(\sigma_{ss}(L)) = 0)$.

Şimdi $\epsilon > 0$ olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\epsilon(|x|)\right) ||Q(x)||\, dx < \infty \tag{3.20}$$

koşulunu gözönüne alalım.

(3.18) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left|\left|K^{\pm}(x,t)\right|\right|, \left|\left|K_x^{\pm}(x,t)\right|\right|, \left|\left|K_t^{\pm}(x,t)\right|\right| \leq c\exp\left[-\epsilon\left|\frac{x+t}{2}\right|\right] \tag{3.21}$$

$$||f(t)|| \leq ce^{-\epsilon\frac{|t|}{2}} \tag{3.22}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.2.4 Q matris fonksiyonunun sağladığı (3.20) koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekillikleri vardır ve bunların katı da sonludur.

İspat.

$$D(\lambda) = 2i\lambda I - 2K^{+}(0,0) - 2K^{-}(0,0) + \int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. (3.21) ve (3.22) den faydalanarak D fonksiyonunun analitiklik bölgesini inceleyelim.

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_0^\infty f(t)e^{i\lambda t}dt\right|\right| &\leq \int_0^\infty ||f(t)||\left|e^{i\lambda t}\right|dt \\ &\leq \int_0^\infty ce^{-\epsilon\frac{t}{2}}e^{-\operatorname{Im}\lambda t}dt \\ &= c\int_0^\infty e^{-t(\frac{\epsilon}{2}+\operatorname{Im}\lambda)}dt\end{aligned}$$

olur. Bu integralin λ ya göre düzgün yakınsak olması için $\frac{\epsilon}{2} + \operatorname{Im}\lambda > 0$ olmalı, yani $\operatorname{Im}\lambda > -\frac{\epsilon}{2}$ olmalıdır. O halde bu integral açık üst yarı düzlemden böyle bir şerite analitik devam ettirilir. Yani fonksiyonu da $\operatorname{Im}\lambda > -\frac{\epsilon}{2}$ için analitiktir ve reel eksen analitiklik bölgesinin içinde kalır. O halde bu fonksiyonun $\mathbb{C}_+$ kümesindeki sıfırlarının limit noktaları reel eksen üzerinde bulunamaz. Ancak daha önce ispatladığımız gibi M_1 ve M_2 kümeleri sınırlıdır. Buradan M_1 ve M_2 kümelerinin sonlu olması gerektiği görülür. $\operatorname{Im}\lambda > -\frac{\epsilon}{2}$ için $G(\lambda)$ analitik devama sahip olduğundan ve özdeş olarak sıfırdan farklı bir fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının katı sonlu olacağından (sonsuz katlı sıfırlar varsa sınırdadır) $G(\lambda)$ nın $\mathbb{C}_+$daki sıfırlarının katı sonludur. Dolayısıyla $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümelerinin sonlu sayıda elemanı olup bunların katı da sonludur. ■

Şimdi (3.20) koşulundan daha zayıf bir koşul olan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\epsilon\sqrt{|x|})\,||Q(x)||\,dx < \infty, \qquad \epsilon > 0 \tag{3.23}$$

koşulunu gözönüne alalım. Bu koşul altında da G fonksiyonu açık üst düzlemde analitik olup reel eksende her mertebeden türevlere sahiptir.

M_3 ile M_1 kümesinin, M_4 ile de M_2 kümesinin yığılma noktaları kümesini, M_5 ile de G fonksiyonunun $\overline{\mathbb{C}}_+$ üzerindeki sonsuz katlı sıfırlarının kümesini gösterirsek analitik fonksiyonlar için olan teklik teoremlerinden

$$M_3 \subset M_2, M_4 \subset M_2, M_5 \subset M_2, M_3 \subset M_5, M_4 \subset M_5$$

olduğu ve Lemma 3.2.2 yardımıyla

$$\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$$

olduğu bulunur.

Lemma 3.2.5. (3.23) koşulu altında,

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 + c2^2 \int_0^{\infty} t e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}} dt \\ A_n &= c2^{n+1} \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}} dt \quad , \quad n = 2, 3, .. \end{aligned}$$

sabitler olmak üzere, G fonksiyonu ve türevleri

$$\left|G^{(n)}(\lambda)\right| \leq A_n \ , \ \ n = 1, 2, ... \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0 \tag{3.24}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca b ve B sabit sayılar olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n \leq Bb^n n! n^n$$

eşitsizliği de gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned} D^{'}(\lambda) &= 2i\lambda + \int_0^\infty f(t)ite^{i\lambda t}dt \text{ olup} \\ \left|\left|D^{'}(\lambda)\right|\right| &\leq 2 + \int_0^\infty ||f(t)||\, tdt \\ &\leq 2 + \int_0^\infty ce^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{t}{2}}}tdt \\ &\leq 2 + 2^2\int_0^\infty cte^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}}dt \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left|G^{'}(\lambda)\right| \leq 2 + 2^2\int_0^\infty cte^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}}dt$$

bulunur. Benzer şekilde

$$D^{''}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)(-t^2)e^{i\lambda t}dt$$

olup

$$\left|\left|D^{''}(\lambda)\right|\right| \leq \int_0^\infty ce^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{t}{2}}}t^2dt$$

bulunur. O halde,

$$\left|G^{''}(\lambda)\right| \leq c2^3\int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}}t^2dt$$

elde edilir. Bu şekilde türev almaya devam edilirse,

$$\left|G^{(n)}(\lambda)\right| \leq c2^{n+1}\int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}}t^ndt$$

eşitsizliği bulunur. Diğer yandan

$$A_n = c2^{n+1}\int_0^\infty t^ne^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}}dt \quad , \quad n = 2, 3, ..$$

eşitliğinde yer alan integralde $\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t} = u$ dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned} A_n &= c2^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-u} 2^{2n+3}\frac{u^{2n+1}}{\epsilon^{2n+2}}du \\ &= c\frac{2^{3n+4}}{\epsilon^{2n+2}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{2n+1}du \\ &= c\frac{2^{3n+4}}{\epsilon^{2n+2}}\Gamma(2n+2) \\ &= c\frac{2^{3n+4}}{\epsilon^{2n+2}}(2n+1)(2n)...2.1 \\ &\leq c\frac{2^{3n+4}}{\epsilon^{2n+2}}(2n+2)^{2n+1} \\ &\leq c\frac{2^{3n+4}}{\epsilon^{2n+2}}2^{2n+2}(n+1)^{2n+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $b_0^n = \dfrac{2^{3n+4}}{\epsilon^{2n+2}}2^{2n+2}$ denilirse,

$$A_n \leq cb_0^n(n+1)^{2n}(n+1)^2$$

bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} (1+\frac{1}{n}) &\leq e, \\ e^n &\geq 1+n, \\ n^n &\leq e^n n!, \\ n+1 &\leq e^n \end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçeklendiğinden

$$\begin{aligned} A_n &\leq cb_0^n(n+1)^{2n}e^{2n} \\ &\leq cb_0^n(1+\frac{1}{n})^{2n}n^{2n}e^{2n} \\ &\leq cb_0^n e^{2n}n^{2n}e^{2n} \\ &\leq cb_0^n e^{5n}n!n^n \\ &\leq Bb^n n!n^n \end{aligned}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.3.6 Q matris fonksiyonunun gerçeklediği (3.23) koşulu altında

$$M_5 = \left\{ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ : \forall k \in \mathbb{N}, \frac{d^k(G(\lambda))}{d\lambda^k} = 0 \right\}$$

kümesi boştur.

İspat. Lemma 3.2.2 gereğince yeterince büyük $T > 0$ için $|\ln(G(\lambda)| < \infty$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{T} \frac{|\ln(G(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \text{ ve } \int_{T}^{\infty} \frac{|\ln(G(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \tag{3.25}$$

integralleri mutlak yakınsaktır. Ayrıca $T(s) = \inf\limits_n \frac{A_n s^n}{n!}$ olmak üzere, Lemma 3.2.5 gereğince

$$T(s) \leq B \inf_n \{b^n s^n n^n\} \leq B \exp\{-b^{-1}s^{-1}e^{-1}\}$$

ve

$$\ln T(s) \leq -b^{-1}s^{-1}e^{-1} \tag{3.26}$$

bulunur. $G(\lambda) \neq 0$ olduğundan, $\mu(M_5, s)$ ise M_5 kümesinin s komşuluğunun Lebesgue ölçüsü olmak üzere, (3.24), (3.25) ve Pavlov Teoremi gereğince, $h > 0$ olmak üzere

$$\int_0^h \ln T(s) d\mu(M_5, s) > -\infty \tag{3.27}$$

olmalıdır. Bu durumda (3.27) gereğince

$$\int_0^h \frac{1}{bes} d\mu(M_5, s) \leq -\int_0^h \ln T(s) d\mu(M_5, s) < \infty$$

olacağından

$$\int_0^h \frac{1}{s} d\mu(M_5, s)$$

integralinin yakınsak olabilmesi ancak $d\mu(M_5, s) = 0$ olmasıyla, yani $M_5 = \varnothing$ olmasıyla sağlanır. ■

4. FARK OPERATÖRLERİ

Bu bölümde tüm eksendeki selfadjoint durumdaki fark operatörü ele alınıp, bu operatörün polinom türden Jost çözümleri verilerek bu çözümlerin analitiklik özellikleri ve asimptotik davranışları incelenecektir. Ayrıca bu operatörün sürekli spektrumu ve özdeğerlerinin özellikleri elde edilecektir.

$\mathbb{C}^\nu$, ν-boyutlu kompleks Euclid uzayı ($\nu < \infty$), $\|Y_n\|_{\mathbb{C}^\nu}$ bu uzaydaki $Y = \{Y_n\}$ ($Y_n \in \mathbb{C}^\nu$, $n \in \mathbb{Z}$) şeklindeki matris dizilerinin normu olsun. Tüm reel eksende

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Y_n\|^2_{\mathbb{C}^\nu} < \infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm matris dizilerinin Hilbert uzayı ise $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\nu)$ ile gösterilsin. λ kompleks parametre, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, $\mathbb{C}^\nu$ uzayında tanımlı $\nu \times \nu$ tipinde matris diziler olsun. İkinci mertebeden

$$A_{n-1}Y_{n-1} + B_nY_n + A_nY_{n+1} = \lambda Y_n, n \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

matris fark denklemini ele alalım. $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\nu)$ Hilbert uzayında (4.1) fark denklemi tarafından üretilen operatorü $\widetilde{L}$ ile gösterelim. 0, $\mathbb{C}^\nu$ uzayındaki sıfır matrisi olmak üzere, $\widetilde{L}$ operatörüne karşılık gelen Jakobi matrisinin

$$(\widetilde{J})_{ij} = \begin{cases} B_i & , \quad i = j \text{ ise} \\ A_{i-1} & , \quad i = j+1 \text{ ise} \\ A_i & , \quad i = j-1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad ; \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

olduğu ve $\widetilde{L}$ operatörünün selfadjoint olduğu açıktır.

Bu çalışma boyunca, $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n = A_n^*$, $B_n = B_n^*$ ve $\det A_n \neq 0$ olduğu kabul edilerek, (4.1) denkleminin birim yuvarda analitik olan polinom türden Jost çözümleri elde edilecek, daha sonra $\widetilde{L}$ operatörünün sürekli ve diskre spektrumu incelenerek özdeğerleri hakkında yorum yapılacaktır.

4.1 Jost Çözümleri

$\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ matris dizilerinin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\|I - A_n\| + \|B_n\| \right) < \infty \tag{4.2}$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin. Burada $\|.\|$, $\mathbb{C}^\nu$ uzayındaki matris normu ve I birim matrisi göstermektedir.
$\lambda = z + z^{-1}$ için

$$A_{n-1}Y_{n-1} + B_n Y_n + A_n Y_{n+1} = \left(z + z^{-1} \right) Y_n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.3}$$

denkleminin

$$\lim_{n \to \infty} E_n(z) z^{-n} = I, \qquad z \in D_0 := \{z : |z| = 1\} \tag{4.4}$$

koşulunu sağlayan matris çözümü $E(z) := \{E_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ ile,

$$\lim_{n \to -\infty} F_n(z) z^{n} = I, \qquad z \in D_0$$

koşulunu sağlayan matris çözümü ise $F(z) := \{F_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ ile gösterilsin. $E(z)$ ve $F(z)$ çözümlerine (4.3) fark denkleminin Jost çözümleri denir.

Teorem 4.1.1 $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ matris dizilerinin sağladığı (4.2) koşulu altında $E(z)$ ve $F(z)$ Jost çözümleri sırasıyla

$$E_n(z) = T_n z^n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right]; \ n \in \mathbb{Z}, \ z \in D_0 \tag{4.5}$$

ve

$$F_n(z) = R_n z^{-n} \left[I + \sum_{-\infty}^{m=-1} M_{nm} z^{-m} \right]; \ n \in \mathbb{Z}, \ z \in D_0 \tag{4.6}$$

gösterimine sahiptir. Burada T_n, R_n, K_{nm} ve M_{nm} matrisleri $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizileriyle ifade edilir. Pozitif m tamsayıları için

$$T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1}, \tag{4.7}$$

$$K_{n1} = - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p, \tag{4.8}$$

$$K_{n2}=-\sum_{p=n+1}^{\infty}T_p^{-1}B_pT_pK_{p1}+\sum_{p=n+1}^{\infty}T_p^{-1}\left(I-A_p^2\right)T_p, \tag{4.9}$$

$$K_{n,m+2}=\sum_{p=n+1}^{\infty}T_p^{-1}\left(I-A_p^2\right)T_pK_{p+1,m}-\sum_{p=n+1}^{\infty}T_p^{-1}B_pT_pK_{p,m+1}+K_{n+1,m} \tag{4.10}$$

eşitlikleri, negatif m tamsayıları içinse

$$R_n=\prod_{-\infty}^{p=n-1}A_p^{-1}, \tag{4.11}$$

$$M_{n,-1}=-\sum_{-\infty}^{p=n-1}R_p^{-1}B_pR_p, \tag{4.12}$$

$$M_{n,-2}=-\sum_{-\infty}^{p=n-1}R_p^{-1}B_pR_pM_{p,-1}+\sum_{-\infty}^{p=n-1}R_p^{-1}\left(I-A_{p-1}^2\right)R_p, \tag{4.13}$$

$$M_{n,m-2}=\sum_{-\infty}^{p=n-1}R_p^{-1}\left(I-A_{p-1}^2\right)R_pM_{p-1,m}-\sum_{-\infty}^{p=n-1}R_p^{-1}B_pR_pM_{p,m-1}+M_{n-1,m} \tag{4.14}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat. (4.5) eşitliğiyle verilen $E_n(z)$ çözümü (4.3) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&A_{n-1}T_{n-1}z^{n-1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n-1,m}z^m\right]+B_nT_nz^n\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}z^m\right]\\
&+A_nT_{n+1}z^{n+1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n+1,m}z^m\right]\\
=\;&T_nz^{n+1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}z^m\right]+T_nz^{n-1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}z^m\right]
\end{aligned}$$

bulunur. (4.7)-(4.10) ifadelerinin elde edilişi $n\in\mathbb{N}$ için daha önce ispatlanmıştır (Aygar ve Bairamov 2012). Son eşitlikte terimlerin katsayıları karşılaştırılarak $n\in\mathbb{Z}$ için de ispat benzer şekilde yapılır.

Şimdi (4.11)-(4.14) eşitliklerini elde edelim. (4.6) eşitliğiyle verilen $F_n(z)$ çözümü (4.3) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&A_{n-1}R_{n-1}z^{-n+1}\left[I+\sum_{-\infty}^{m=-1}M_{n-1,m}z^{-m}\right]+B_nR_nz^{-n}\left[I+\sum_{-\infty}^{m=-1}M_{nm}z^{-m}\right]\\
&+A_nR_{n+1}z^{-n-1}\left[I+\sum_{-\infty}^{m=-1}M_{n+1,m}z^{-m}\right]\\
=\;&R_nz^{-n+1}\left[I+\sum_{-\infty}^{m=-1}M_{nm}z^{-m}\right]+R_nz^{-n-1}\left[I+\sum_{-\infty}^{m=-1}M_{nm}z^{-m}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. En son eşitlikte terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında, z^{-n-1} li terimin katsayısından

$$A_n R_{n+1} = R_n$$

elde edilir ve iterasyonlar yardımıyla

$$\prod_{-\infty}^{p=n} A_p^{-1} = R_{n+1}$$

bulunur. Buradan

$$A_n^{-1} \prod_{-\infty}^{p=n-1} A_p^{-1} = R_{n+1}$$

olup

$$\prod_{-\infty}^{p=n-1} A_p^{-1} = A_n R_{n+1} = R_n$$

eşitliğinin gerçeklendiği ispatlanır. Diğer yandan z^{-n} li terimin katsayısından

$$B_n R_n + A_n R_{n+1} M_{n+1,-1} = R_n M_{n,-1}$$

eşitliği elde edilir ve iterasyonlar yardımıyla

$$M_{n,-1} = -\sum_{-\infty}^{p=n-1} R_p^{-1} B_p R_p$$

eşitliğinin gerçeklendiği ispatlanır. z^{-n+1} li terimin katsayısından ise

$$A_{n-1} R_{n-1} + B_n R_n M_{n,-1} + A_n R_{n+1} M_{n+1,-2} = R_n + R_n M_{n,-2}$$

elde edilir. Bilinen eşitlikler ve iterasyonlar yardımıyla

$$M_{n,-2} = -\sum_{-\infty}^{p=n-1} R_p^{-1} B_p R_p M_{p,-1} + \sum_{-\infty}^{p=n-1} R_p^{-1} \left(I - A_{p-1}^2\right) R_p$$

eşitliğinin gerçeklendiği ispatlanır. Son olarak $m \leq -1$ için z^{-n-m+1} li terimin katsayısından

$$A_{n-1} R_{n-1} M_{n-1,m} + B_n R_n M_{n,m-1} + A_n R_{n+1} M_{n+1,m-2} = R_n M_{n,m} + R_n M_{n,m-2}$$

elde edilir, buradan da (4.14) eşitliğinin gerçeklendiği gösterilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

(4.2) koşulundan dolayı T_n, R_n, M_{nm} ve K_{nm} tanımlarındaki sonsuz çarpım ve seriler mutlak yakınsaktır.

Teorem 4.1.2. $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ matris dizilerinin sağladığı (4.2) koşulu altında

$$\|K_{nm}\| \leq C_1 \sum_{p=n+\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}^{\infty} \left(\|I - A_p\| + \|B_p\| \right), \; m \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.15}$$

ve

$$\|M_{nm}\| \leq C_2 \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \left(\|I - A_p\| + \|B_p\| \right), \; m \in \mathbb{Z}^- \tag{4.16}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada C_1 ve C_2 pozitif sabitler olup, $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmıdır.

İspat. (4.12)- (4.14) kullanılarak (4.16) eşitsizliği aşağıdaki gibi tümevarım yöntemiyle elde edilir.

$m = -1$ için

$$\|M_{n,-1}\| = \left\| - \sum_{-\infty}^{p=n-1} R_p^{-1} B_p R_p \right\| \leq \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| R_p^{-1} B_p R_p \right\| \leq \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| R_p^{-1} \right\| \|B_p\| \|R_p\|$$

yazılır. $\|R_p\|$ ve $\left\| R_p^{-1} \right\|$ sınırlı olduğundan

$$\|M_{n,-1}\| \leq C \sum_{-\infty}^{p=n-1} \|B_p\| \leq C \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left(\|I - A_p\| + \|B_p\| \right)$$

elde edilir.

$m = k$ için

$$\|M_{n,k}\| \leq C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \left(\|I - A_p\| + \|B_p\| \right)$$

olsun.

$m = k - 1$ için gerçeklenip gerçeklenmeyeceğini araştıralım.

(4.14) eşitliğinde $m = k + 1$ yazılarak

$$\begin{aligned}
\|M_{n,k-1}\| &= \left\| \sum_{-\infty}^{p=n-1} R_p^{-1}\left(I - A_{p-1}^2\right) R_p M_{p-1,k+1} - \sum_{-\infty}^{p=n-1} R_p^{-1} B_p R_p M_{p,k} + M_{n-1,k+1} \right\| \\
&\leq \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| R_p^{-1}\left(I - A_{p-1}^2\right) R_p M_{p-1,k+1} \right\| \\
&\quad + \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| R_p^{-1} B_p R_p M_{p,k} \right\| + \|M_{n-1,k+1}\| \\
&\leq \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| R_p^{-1} \right\| \left\| I - A_{p-1}^2 \right\| \|R_p\| \|M_{p-1,k+1}\| \\
&\quad + \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| R_p^{-1} \right\| \|B_p\| \|R_p\| \|M_{p,k+1}\| \\
&\quad + \|M_{n-1,k+1}\|
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve $\|R_p\|$ ve $\left\|R_p^{-1}\right\|$ sınırlı olduğundan kabulümüz kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|M_{n,k-1}\| &\leq \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left\| I - A_{p-1}^2 \right\| \left\{ C \sum_{-\infty}^{s=p-1+\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \left(\|I - A_s\| + \|B_s\|\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{-\infty}^{p=n-1} \|B_p\| \left\{ C \sum_{-\infty}^{s=p+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \left(\|I - A_s\| + \|B_s\|\right) \right\} + \|M_{n-1,k+1}\| \\
&\leq C \sum_{-\infty}^{p=n-1} \left(\left\| I - A_{p-1}^2 \right\| + \|B_p\| \right) \sum_{-\infty}^{s=p+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \left(\|I - A_s\| + \|B_s\|\right) \\
&\quad + \|M_{n-1,k+1}\|
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\left\|I - A_{p-1}^2\right\| + \|B_p\| = G_p$ ve $\|I - A_s\| + \|B_s\| = H_s$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|M_{n,k-1}\| &\leq C \sum_{-\infty}^{p=n-1+\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \left(\|I - A_p\| + \|B_p\|\right) + C \sum_{p=-\infty}^{n-1} G_p \sum_{-\infty}^{s=p+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} H_s \\
&= C \left\{ \sum_{-\infty}^{p=n-1+\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} H_p + \sum_{-\infty}^{p=n-1} G_p \sum_{-\infty}^{s=p+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} H_s \right\}
\end{aligned}$$

yazılacağından

$$
\begin{aligned}
\|M_{n,k-1}\| &\leq C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} H_p \\
&\quad + C \left\{ \begin{array}{c} G_{n-1} \sum\limits_{-\infty}^{s=n-1+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} H_s \\ +G_{n-2} \sum\limits_{-\infty}^{s=n-2+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} H_s \\ +G_{n-3} \sum\limits_{-\infty}^{s=n-3+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} H_s + \dots \end{array} \right\} \\
&\leq C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} H_p + C \sum_{-\infty}^{p=n-1} G_p \sum_{-\infty}^{s=n-1+\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} H_s \\
&\leq C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} H_p + C \sum_{-\infty}^{p=n-1} G_p . \sum_{-\infty}^{s=n+\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} H_s
\end{aligned}
$$

yazılır. $\sum\limits_{-\infty}^{p=n-1} G_p$ sınırlı olduğundan son eşitsizlikten

$$
\begin{aligned}
\|M_{n,k-1}\| &\leq C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} H_p \\
&= C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \|I - A_p\| + \|B_p\|
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir . Bu da ispatı tamamlar. ∎

(4.15) eşitsizliğinin ispatı da benzer şekilde tümevarım yöntemiyle yapılabilir. O halde $E(z)$ ve $F(z)$ çözümleri, birim çemberin üzerinden $D_1 := \{z : |z| < 1\} \setminus \{0\}$ kümesine analitik devama sahiptir.

Teorem 4.1.3. $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ matris dizilerinin sağladığı (4.2) koşulu altında Jost çözümleri için aşağıdaki asimptotikler elde edilir:

$$E_n(z) = z^n [I + o(1)], \quad z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}, \; n \to \infty \tag{4.17}$$

$$F_n(z) = z^{-n} [I + o(1)], \quad z \in D, \; n \to -\infty \tag{4.18}$$

İspat. $T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1} < \infty$ olduğundan ve yakınsak çarpımın kalan teriminin limiti I olacağından $\lim_{n\to\infty} T_n = I$ bulunur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \|T_n - I\| = 0$ yazılır. Ayrıca Teorem 4.1.2 kullanılarak $\forall z \in D$ için

$$\left\|\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m\right\| \le 2C \sum_{p=n}^{\infty} p\left(\|I - A_p\| + \|B_p\|\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında (4.2) koşulundan sağ taraf sıfıra gider ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m = o\left(1\right), \; z \in D, \; n \to \infty$$

bulunur. (4.5) eşitliği dikkate alındığında $E\left(z\right)$ matris çözümü

$$E_n\left(z\right) = z^n\left[I + o\left(1\right)\right], \quad z \in D, \; n \to \infty$$

asimptotiğini gerçekler. (4.17) eşitliğinin ispatı bu şekilde tamamlanır.
(4.18) asimptotiğini elde etmek için de benzer şekilde

$$\lim_{n\to-\infty} R_n = I \text{ ve } \sum_{-\infty}^{m=-1} M_{nm} z^{-m} = o\left(1\right), \; z \in D, \; n \to -\infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $R_n = \prod_{-\infty}^{p=n-1} A_p^{-1}$ olup yakınsak çarpımın kalan teriminin limiti I olacağından

$$\lim_{n\to-\infty} R_n = I$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{-\infty}^{m=-1} M_{nm} z^{-m}\right\| &\le \sum_{-\infty}^{m=-1} ||M_{nm}|| \\
&\le \sum_{-\infty}^{m=-1} C \sum_{-\infty}^{p=n+\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} H_p \\
&= C_1 \sum_{-\infty}^{p=n-1} (-p+n) H_p \\
&< C_1 \sum_{-\infty}^{p=n-1} -pH_p
\end{aligned}$$

olduğundan (4.2) koşulundan $\sum_{-\infty}^{p=n-1} pH_p$ serisinin kalan teriminin limiti sıfır olur. (4.6) eşitliği dikkate alındığında ispat tamamlanır. ■

4.2 $\widetilde{L}$ Operatörünün Sürekli ve Diskre Spektrumu

Teorem 4.2.1 (4.2) koşulu altında $\widetilde{L}$ operatörünün sürekli spektrumu $[-2,2]$ aralığıdır.

İspat. $l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^\nu)$ uzayında

$$(l_0Y)_n = Y_{n-1} + Y_{n+1}$$

ve

$$(l_1Y)_n = (A_{n-1} - I)\,Y_{n-1} + B_nY_n + (A_n - I)\,Y_{n+1}$$

diferensiyel ifadeleri yardımıyla üretilen operatörler sırasıyla $\widetilde{J}_0$ ve $\widetilde{J}_1$ ile gösterilsin. Bu operatörler sırasıyla aşağıdaki Jacobi matrisleri ile eşleştirilir:

$$(\widetilde{J}_0)_{ij} = \begin{cases} I & , \quad i=j+1 \text{ ve } i=j-1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad ; \quad i,j\in\mathbb{Z}$$

$$(\widetilde{J}_1)_{ij} = \begin{cases} B_i & , \quad i=j \text{ ise} \\ A_{i-1} & , \quad i=j-1 \text{ ise} \\ A_{i-1}-I & , \quad i=j+1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad ; \quad i,j\in\mathbb{Z},$$

Daha açık biçimde göstermek gerekirse

$$(\widetilde{J}_0)_{ij} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & . \\ . & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & . \\ . & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ve

$$(\widetilde{J_1})_{ij} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & B_{-2} & A_{-2}-I & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & A_{-2}-I & B_{-1} & A_{-1}-I & 0 & 0 & 0 & . \\ . & 0 & A_{-1}-I & B_0 & A_0-I & 0 & 0 & . \\ . & 0 & 0 & A_0-I & B_1 & A_1-I & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & A_1-1 & B_2 & A_2-I & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2-I & B_3 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. Buradan $\widetilde{L} = \widetilde{L_0} + \widetilde{L_1}$ olduğu görülür. $\widetilde{L_0}$ self-adjoint operator, $\widetilde{L_1}$ ise kompakt operatördür (Aygar ve Bairamov 2012). Ayrıca

$$\sigma\left(\widetilde{L_0}\right) = \sigma_c\left(\widetilde{L_0}\right) = [-2, 2]$$

olduğu bilinmektedir (Serebryakov 1980).
O halde Weyl Kompakt Pertürbasyon Teoremi gereğince

$$\sigma_c\left(\widetilde{L}\right) = \sigma_c\left(\widetilde{L_0}\right) = [-2, 2]$$

elde edilir. Burada $\sigma_c\left(\widetilde{L}\right)$, $\widetilde{L}$ operatörünün sürekli spektrum kümesini göstermektedir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi de

$$U_{n-1}A_{n-1} + U_nB_n + U_{n+1}A_n = (z + z^{-1})U_n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.19}$$

denklemini ele alalım ve bu denklemin

$$\lim_{n\to-\infty} U_n(z)z^n = I, \quad z \in D_0$$

koşulunu gerçekleyen çözümünü $G(z) := \{G_n(z)\}$ ile gösterelim. $G(z)$ matris fonksiyon dizisinin (4.3) denkleminin bir çözümü olan $F(z)$ matris fonksiyon dizisinin adjointi olduğu açıktır.

O halde bu iki çözümü kullanarak

$$f(z) := \det W\,[E(z), G(z)] \tag{4.20}$$

determinant fonksiyonunu tanımlayalım. Burada bu iki fonksiyonun Wronksiyenlerinin

$$W[E(z), G(z)] = G_{n-1}A_{n-1}E_n - G_nA_{n-1}E_{n-1}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. (4.20) yardımıyla ise sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilen $\widetilde{L}$ operatörünün özdeğerler kümesini yazalım:

$$\sigma_{\mathrm{d}}(\widetilde{L}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = z + z^{-1}, \quad z \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad f(z) = 0\right\}.$$

Özdeğerler kümesi ile sürekli spektrum kümesinin ayrık olduğu bilindiğinden

$$\sigma_{\mathrm{d}}(\widetilde{L}) \subset (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \tag{4.21}$$

yazılabilir.

Tanım 4.2.2 f fonksiyonunun herhangi bir sıfırının katı $\widetilde{L}$ operatörünün o sıfıra karşılık gelen özdeğerlerinin katı olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.3 (4.2) koşulu altında $\widetilde{L}$ operatörü sonlu sayıda reel özdeğerlere sahiptir.

İspat. $\widetilde{L}$ operatörü selfadjoint olduğundan özdeğerlerinin reel olduğu aşikardır. $\widetilde{L}$ operatörünün özdeğerlerinin sonlu sayıda olduğunu göstermek içinse f fonksiyonunun sonlu sayıda sıfırının olduğunu göstermek yeterlidir. (4.21) ifadesinden anlaşıldığı üzere $\widetilde{L}$ operatörünün özdeğerler kümesinin limit noktaları ± 2 ve $\pm\infty$ dan farklı olamaz. $\lambda = z + z^{-1}$ olduğundan $\sigma_{\mathrm{d}}(\widetilde{L})$ kümesinin limit noktalarının $\pm\infty$ olması ancak $z = 0$ olması durumunda gerçeklenir. Bu da $\widetilde{L}$ operatörünün sınırlı olması ile çelişir. O halde $z = 0$ noktası f fonksiyonunun bir sıfırı olamaz. Diğer yandan $\sigma_{\mathrm{d}}(\widetilde{L})$ kümesinin limit noktalarının ± 2 olması ise ancak $z = \pm 1$ durumunda mümkündür. Ancak selfadjoint operatörlerin özdeğerlerinin bu operatörün sürekli spektrumuna ait olamayacağı bilindiğinden $z = \pm 1$ sayıları da f fonksiyonun sıfırı olamaz. Bu durumda $\sigma_{\mathrm{d}}(\widetilde{L})$ kümesinin hiçbir limit noktası bulunmamaktadır. Bolzano- Weierstrass teoremi gereğince f fonksiyonunun sonlu sayıda sıfırı olduğu ispatlanabilir. O halde $\widetilde{L}$ operatörü sonlu sayıda özdeğere sahiptir. $\blacksquare$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fonksiyonel analiz, uygulamalı matematik ve kuantum mekaniğinin birçok probleminin modellenip çözülmesinde en çok kullanılan denklemler diferensiyel denklemler ya da fark denklemleridir. Çalışılan probleme göre bu seçim değişkenlik gösterir. Modelde kullanılan zaman aralığı ayrık zaman dilimleri halinde ise fark denklemleri, değişim sürekli bir zamanda gerçekleşiyor ise diferensiyel denklemler kullanılır. Spektral teoride ise, modellenen bu problemlerin çözümü için operatör teorisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sebeple Sturm-Liouville, Dirac, Schrödinger ve Klein-Gordon diferensiyel denklemleri yardımıyla elde edilen diferensiyel operatörlerin ve fark denklemleri yardımıyla elde edilen fark operatörlerinin spektral analizi günümüze kadar birçok matematikçinin araştırma konusu olmuştur.

Literatür incelendiğinde, Hilbert uzaylarında tanımlı lineer sınırlı-sınırsız, selfadjoint-non-selfadjoint operatörlerin spektral özellikleri ile ilgili günümüze kadar pek çok çalışma mevcut olduğu görülmektedir. Ancak yapılan çalışmaların çoğu skaler katsayılı denklemler üzerine olup, matris katsayılı denklemlere ilişkin literatürde yeteri kadar çalışma bulunmamaktadır. Bu doktora tezinde amaçlanan tüm eksendeki matris katsayılı diferensiyel ve fark operatörlerinin spektral teorisini inceleyerek literatürdeki bu boşluğu kapatmaktır.

Tezin ilk bölümünde, Q, $Q^* \neq Q$ koşulunu gerçekleyen $n \times n$ tipinde fonksiyon bileşenli bir matris olmak üzere, $L^2(\mathbb{R}, S)$ Hilbert uzayında

$$l(Y) = -Y'' + Q(x)Y, \quad -\infty < x < \infty$$

vektör değerli diferensiyel ifadesi yardımıyla tanımlanan non-selfadjoint L operatörü ele alınmış, bu operatörün sürekli spektrumu, özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde ise, $\{A_n\}$; $n \in \mathbb{Z}$ ve $\{B_n\}$; $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{C}^\nu$ uzayında tanımlı $\nu \times \nu$ tipinde matris diziler olmak üzere $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\nu)$ Hilbert uzayında

$$\widetilde{l}(Y) = A_{n-1}Y_{n-1} + B_nY_n + A_nY_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$$

fark ifadesi yardımıyla üretilen selfadjoint fark operatörü $\widetilde{L}$ ele alınmıştır. Bu operatörün polinom türden Jost çözümü verilmiş, bu çözümün analitiklik özellikleri ve asimptotik davranışları incelenmiştir. Ayrıca $\widetilde{L}$ operatörünün sürekli spektrumu ve özdeğerlerinin özellikleri elde edilmiştir.

Tezdeki bu çalışmaların devamı olarak tüm eksendeki matris katsayılı Dirac operatörlerinin spektral teorisi de incelenebilir. Diğer yandan, en genel anlamıyla sürekli ve ayrık analizin birleştirilmesi olarak bilinen zaman skalası kavramı son yıllarda birçok matematikçi tarafından ilgi görmüş, diferensiyel denklemler ve fark denklemleri ile yapılan çalışmalar zaman skalasına taşınarak bu çalışmalar sonucunda daha genel sonuçlara ulaşılmıştır. Bu tez çalışmasının konusunu oluşturan operatörlerin spektral teorisi üzerine yapılan çalışmalar da zaman skalasında modellenerek, hem skaler hem de matris durumunun detaylı bir şekilde incelenmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. J. Math. Anal. Appl., 261, 461-478.

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2003. Difference equations of second order with spectral singularities. J. Math. Anal. Appl., 277, 714-721.

Aygar, Y. and Bairamov, E. 2012. Jost solution and the spectral properties of the matrix-valued difference operators. Appl. Math. Comput., 218(19), 9676–9681.

Agarwal, R. P. and Wong, P. J. Y. 1997. Advanced topics in difference equations, Mathematics and its Applications. 404, Kluwer, Dordrecht.

Agarwal, R. P. 2000. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 228, Marcel Dekker, Inc., New York.

Agranovich, Z. S. and Marchenko, V. A. 1965. The inverse problem of scattering theory, Gordon and Breach.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems. New York, Academic Press.

Bairamov, E., Çakar Ö. and Çelebi A. O. 1997. Quadratic pencil of Schrödinger operators with spectral sngularities: Discrete spectrum and principal functions. Jour. Math. Anal. Appl., 216, 303-320.

Bairamov, E., Çakar Ö. and Krall, A. M. 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition. J. Diff. Equation, 151, 252-267.

Bairamov, E. and Çelebi, A. O. 1999. Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. Quart. J. Math. Oxford Ser., (2)50, 371-384.

Bairamov, E., Çakar Ö. and Krall, A. M. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. Math. Nacr., 229, 5-14.

Bairamov, E. and Coskun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. Appl. Math. Lett., 17, 1039-1045.

Bairamov, E. and Coskun, C. 2005. The structure of the spectrum of a system of difference equations. Appl. Math. Lett.,18, 387-394.

Bairamov, E. and Karaman, O. 2002. Spectral singularities of Klein-Gordon s-wave equations with an integral boundary condition. Acta Math. Hungar, 97, 121-131.

Carlson, R. 2002. An inverse problem for the matrix Schrödinger equation. J. Math. Anal. Appl., 267, 564-575.

Clark, S., Gesztesy, F. and Renger, W. 2002. Weyl-Titchmarsh M-function asymptotics local uniqueness results, trace formulas and Borg-type theorems for Dirac operators. Trans. Am. Math. Soc., 354, 3475-3534.

Coskun, C. and Olgun, M. 2011. Principal functions of non-selfadjoint matrix Sturm–Liouville equations. J. Comput. Appl. Math., 235(16), 4834-4838.

Dolzhenko, E. P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. Math. Notes, 26, 437-442.

Gasymov, M. G. and Levitan, B. M. 1966. Determination of the Dirac system from scattering phase. Sov. Math. Dokl., 167, 1219-1222.

Gasymov, M. G. 1968. Expansion in terms of the solutions of a scattering theory problem for the non-selfadjoint Schrödinger equation. Soviet Math. Dokl., 9, 390-393.

Gesztesy, F., Kiselev, A. and Makarov, K. A. 2012. Uniqueness results for matrix valued Schrödinger, Jacobi and Dirac-type operators. Math. Nachr., 239, 103-145.

Glazman, I. M. 1965. Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators. Jerusalem.

Gohberg, I. C. and Krein, M. G. 1969. Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators. American Math. Society.

Guseinov, G. S. 1976a. The determination of an infinite Jacobi matrix from the scattering data. Sov. Math. Dokl., 17, 596-600.

Guseinov, G. S. 1976b. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation. Sov. Math. Dokl., 230, 1045-1048.

Jaulent, M. and Jean, C. 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials deending on energy. Comm. Math. Phys., 28(3), 177-220.

Keldyš, M. V. 1951. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-selfadjoint equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 77, 11-14.

Kelly, W. G. and Peterson, A. C. 2001. Difference Equations. An introduction with applications. Harcourt Academic Press.

Kemp, R. R. D. 1958. A singular boundary value problem for a non-selfadjoint differential operator. Canad. J. Math., 10, 447-462.

Kir, E. 2005. Spectrum and principal functions of the non-selfadjoint Sturm-Liouville operators with a singular potential. Appl. Math. Lett., 18, 1247-1255.

Krall, A. M. 1965a. The adjoint of differential operators with integral boundary conditions. Proc. AMS, 16, 738-742.

Krall, A. M. 1965b. A nonhomogenous eigenfunction expansion. Trans AMS, 117, 352-361.

Krall, A. M. 1965c. Second order ordinary differential operators with general boundary conditions. Duke. Jour. Math., 32, 617-625.

Krall, A. M., Bairamov, E. and Çakar Ö. 1999. An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. J. Diff. Equation, 151, 268-289.

Krall, A. M., Bairamov, E. and Çakar Ö. 2001. Spectral analysis of non-selfadjoint discrete Schrödinger operators with spectral singularities. Math. Nachr., 229, 5-14.

Kreyszig , E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: Wiley&Sons. Inc.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S. 1975. Introduction to spectral theory, Translations of Mathematical Monographs, 39.

Levitan, B. M. 1987. Inverse Sturm-Liouville Problems. VSP, Zeist.

Liouville, J. 1836. Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosins. Journ. Math. Pures Appl., 1, 14-32.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1974. Elements of functional analysis. Halsted Press, New York.

Lyance, V. E. 1967. A differential operator with spectral singularities. I, II, AMS Translations, 2(60), 185-225, 227-283.

Marchenko, V. A. 1977. Some questions of the theory of one dimensional linear differential operators II. Amer. Math. Soc. Transl., (2)101, 107-191.

Marchenko, V. A. 1986. Sturm-Liouville operators and applications. Birkhauser Verlag, Basel.

Naimark, M. A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS Translations, 2(16), 103-193.

Naimark, M. A. 1968. Linear differential operators II. Ungar, New York.

Olgun, M. and Coskun, C. 2010. Non-selfadjoint matrix Sturm-Liouville operators with spectral singularities. Appl. Math. Comp., 216, 2271-2275.

Pavlov, B. S. 1967. The non-selfadjoint Schrödinger operator. Topics in Mathematics and Physics, 1, 87-114.

Pavlov, B. S. 1965. On seperation condition for spectral components of a dissipative operator. Math. USSR Izvestiya, 9, 113-137.

Serebryakov, V. P. 1980. A inverse problem of scattering theory for difference equations with matrix coefficients. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 250, 562-565.

Schwartz, J. T. 1960. Some non-selfadjoint operators. Comm. Pure Appl. Math., 13, 609-639.

Sturm, C. 1836. Mémoire sur les Équations différentielles linéaires du second ordre. Journ. Math. Pures Appl., 1, 106-186.

Tunca, G. B. and Bairamov, E. 1999. Discrete spectrum and principal functions of non-selfadjoint differential operator. Czechoslovak Math. J., 49(124), no. 4, 689-700.

Yardımcı, S. 2010. A note on the spectral singularities of non-selfadjoint matrix-valued difference operators. Journ. of Comput. and Appl. Math., 234(10), 3039-3042.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şerifenur CEBESOY

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 31/05/1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Etimesgut Anadolu Lisesi (2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Hitit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,
Araştırma Görevlisi (Eylül 2010- Nisan 2011)

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü,
Araştırma Görevlisi (Nisan 2011-...)

Yayınları:

Bairamov, E., **Cebesoy S**. 2016. Spectral Singularities of the Matrix Schrödinger Equations. Hacet. J. Math. Stat. 45, no.4, 1007-1014 (SCI Exp.).

Bairamov, E., Aygar Y., **Cebesoy S.** 2016. Spectral Analysis of a Selfadjoint Matrix-valued Discrete Operator on the Whole Axis. J. Nonlinear Sci. Appl. 9, 4257–4262 (SCI Exp.).