T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PELL DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve GÜNEY

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**Cebir ve Sayılar Teorisi**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Refik KESKİN**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PELL DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve GÜNEY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : Cebir ve Sayılar Teorisi

Bu tez 12/05/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik KESKİN Jüri Başkanı	Yrd. Doç. Dr. Bahar D. BİTİM Üye	Doç. Dr. Yusuf ATALAY Üye

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında engin bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, destek olan, yardımlarını ve zamanını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Refik KESKİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Doğduğum günden itibaren sonsuz sevgi ve şevkatlerini hiçbir zaman eksik etmeyen, bana güvenip her zaman destek olan, beni bugünlere getiren aileme sonsuz teşekkür ederim. Araştırmalarım sırasında ve her zaman yanımda olan, yardımlarıyla beni yalnız bırakmayan, destek olan Mehmet DUMAN'a çok teşekkür ederim.
Yetişmemde emeği geçen bütün öğretmenlerim ve Sakarya Üniversitesi öğretim üyelerine teşekkür ederim. Son olarak da Yüksek Lisans eğitimim boyunca desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$a\|b$	: a, b yi böler
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$>$	: Büyüktür
$\geq$	: Büyük eşittir
$\equiv$	: Denktir
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi $= \{1,2,3,\dots\}$
$\in$	: Elemanıdır
$=$	:Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\forall$	:Her
$\Leftarrow, \Rightarrow$	: İse
$<$	: Küçüktür
$\leq$	: Küçük eşittir
$\| \quad \|$	: Mutlak değer
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
[ ]	: Sürekli kesir
$[\![\quad]\!]$	: Tamdeğer
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi

ÇİZELGELER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Diophantine Denklemleri; Pell Denklemleri; Sürekli Kesirler; Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri.

Bu tez temel olarak dört bölümden ve bu bölümler de kendi içerisinde alt bölümlerden oluşmuştur. Birinci bölümde; öncelikle sayılar teorisi ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. Bu bölümün ikinci kısımında da sürekli kesirler hakkında bilgi verildi. $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının nasıl elde edileceği gösterildi.

İkinci bölümde; Pell denklemleri hakkında öncelikle kısa bir bilgi verildi. Pell denklemlerinin temel çözümünün tanımı verilerek sürekli kesir yaklaşımları yardımıyla nasıl hesaplanabileciği üzerinde duruldu. Bulunan temel çözümler ile de Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin nasıl elde edileceği gösterildi. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin çözümlerini sürekli kesir yaklaşımları yardımıyla hesaplamak için alternatif olarak Bhaskara'nın methodundan bahsedildi.

Üçüncü bölümde; $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin temel çözümlerinin nasıl elde edilebileceği hakkında bilgi verildi. Ayrıca, elde edilen temel çözümler yardımıyla $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümlerini elde etmek için gerekli olan formüller verildi.

Son olarak dördüncü bölümde; k pozitif tamsayı ve $d \in \{k^2 \pm 4, k^2 \pm 1\}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ve $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin bir çözümü varsa denklemlerin tüm pozitif tamsayı çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri ile verildi. Özel olarak $x^2 - 5y^2 = \pm 1$ ve $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümleri Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri olarak elde edildi.

PELL EQUATIONS

SUMMARY

Key Words: Diophantine Equations; Pell Equations; Continued Fractions; Generalized Fibonacci and Lucas Sequences.

This thesis consists of fundamentally four chapters and these chapters consist of subchapters in itself. In the first chapter, first of all, fundamental definitions and theorems concerning number theory are given. In the second part of this chapter, the information about continued fractions is given. Here, how to get the continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ is shown.

In the second chapter, the Pell equations are described briefly. Defininition of the solution to the Pell equations is given and the fundamental solutions to some Pell equations are calculated by means of the convergent of continued fraction. All positive integer solutions to the Pell equations are given by means of fundamental solutions. In order to calculate the solutions of Pell equation $x^2 - dy^2 = 1$ an alternative method called Bhaskara's method is used.

In the third chapter, it is given that how the fundamental solution to the equations $x^2 - dy^2 = \pm 4$ can be obtained. Moreover, the formulas are given to obtain all the positive integer solution to the equations $x^2 - dy^2 = \pm 4$ with the help of fundamental solution.

Finally, in the fourth chapter, if the equations $x^2 - dy^2 = \pm 4$ and $x^2 - dy^2 = \pm 1$ have a solution, then all positive integer solutions of them are given in terms of the generalized Fibonacci and Lucas sequences when $d \in \{k^2 \pm 4, k^2 \pm 1\}$ and k is a positive integer. Especially, all positive integer solutions of the equations $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ and $x^2 - 5y^2 = \pm 1$ are determined in terms of the Fibonacci and Lucas sequences.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. Bir reel sayıya eşit ya da ondan küçük olan en büyük tamsayıya o sayının tamdeğeri denir ve x reel sayısının tamdeğeri $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2 (Matematiksel Tümevarım). Doğal sayılarla ilgili bir önerme,
$n = 1$ için doğru ise,
$n = k$ için doğru olduğu kabul edildiğinde $n = k + 1$ doğal sayısı için de doğru olduğu gösterilebiliyorsa bu önerme bütün doğal sayılar için doğrudur. Buna matematiksel tümevarım denir.

Tanım 1.1.3. $x \neq 0, y$ tamsayılar olsun. $y = xz$ olacak şekilde bir z tamsayısı varsa x, y' yi böler denir ve bu durum $x \mid y$ ile gösterilir. x, y' yi bölmez ise bu durum $x \nmid y$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.4. x, y, a, b ve z tamsayılar olmak üzere

a) x sıfırdan farklı tamsayı ise $x \mid 0$,
b) $1 \mid x$ ve $x \mid x$,
c) $x \mid y$ ise $x \mid yz$,
d) $x \mid y$ ve $x \mid z$ ise $x \mid ya + zb$,
e) $x \mid y$ ve $y \mid z$ ise $x \mid z$,
f) $x \mid y$ ve $y \neq 0$ ise $\mid x \mid \leq \mid y \mid$,
g) $x|y$ ve $y|x$ ise $x = \pm y$,

özellikleri geçerlidir [2].

Tanım 1.1.5. $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun.

a) $d \mid x$ ve $d \mid y$ ise d' ye x ile y nin bir ortak böleni denir.

b) d, x ile y' nin bir pozitif ortak böleni olsun ve x ile y aynı anda sıfır olmasın. Eğer x ile y' nin her z ortak böleni için $z \mid d$ ise d ortak bölenine, x ile y' nin en büyük ortak böleni denir ve bu $d = (x, y)$ ile gösterilir.

c) $(x, y) = 1$ ise x ile y aralarında asaldır denir [2].

Tanım 1.1.6. Sıfırdan farklı bir m tamsayısı $x - y$ farkını bölüyorsa x, m modülüne göre y' ye denktir (ya da y, m modülüne göre x e denktir) denir ve bu $x \equiv y \ (mod\ m)$ şeklinde gösterilir. m, $x - y$ farkını bölmüyorsa x, m modülüne göre y' ye denk değildir (ya da y, m modülüne göre x e denk değildir) denir ve bu $x \not\equiv y \ (mod\ m)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.7. x, y, z, t, a, b ve m tamsayılar olmak üzere;

a) $x \equiv y \ (mod\ m)$ ise $x - y \equiv 0 \ (mod\ m)$,

b) $x \equiv y \ (mod\ m)$ ve $y \equiv z \ (mod\ m)$ ise $x \equiv z \ (mod\ m)$,

c) $x \equiv y \ (mod\ m)$ ve $z \equiv t \ (mod\ m)$ ise $xa + zb \equiv ya + tb \ (mod\ m)$,

d) $x \equiv y \ (mod\ m)$ ve $z \equiv t \ (mod\ m)$ ise $xz \equiv yt \ (mod\ m)$,

e) $x \equiv y \ (mod\ m)$ ve $d|m, d > 0$ ise $x \equiv y \ (mod\ d)$,

f) $x \equiv y \ (mod\ m)$ dir $\Leftrightarrow y \equiv x \ (mod\ m)$,

g) $m|x$ ise $x \equiv 0 \ (mod\ m)$,

özellikleri geçerlidir [2].

Tanım 1.1.8. α irrasyonel sayısı katsayıları tamsayı olan ikinci dereceden bir polinomun kökü ise α' ya kuadratik irrasyoneldir denir. Yani A, B ve C tamsayılar ve $A \neq 0$ olmak üzere $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ ise α' ya kuadratik irrasyoneldir denir.

Önerme 1.1.9. α reel sayısı kuadratik irrasyoneldir $\Leftrightarrow$ a, b, c tamsayılar, $c \neq 0$ ve $b > 0$ tamkare olmayan bir tamsayı olmak üzere $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ dir [16].

Önerme 1.1.10. α ve β iki kuadratik irrasyonel ise $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha\beta$ ve $\beta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\alpha}{\beta}$ sayıları da kuadratik irrasyoneldir.

Teorem 1.1.11. $\sqrt{d}$ irrasyonel sayı ve $x, y, n, m \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$x + y\sqrt{d} = m + n\sqrt{d} \text{ dir} \Leftrightarrow x = m \text{ ve } y = n \text{ dir.}$$

İspat. $\Rightarrow$ $x = m$ ve $y = n$ ise $x + y\sqrt{d} = m + n\sqrt{d}$ olduğu aşikardır.
$\Leftarrow$) $x + y\sqrt{d} = m + n\sqrt{d}$ ve $y \neq n$ olsun. O zaman $(x - m) = (n - y)\sqrt{d}$ olacağından $\sqrt{d} = \frac{x-m}{n-y}$ olur. $x, y, n, m \in \mathbb{Q}$ olduğundan $\frac{x-m}{n-y}$ rasyoneldir. Fakat bu ise $\sqrt{d}$' nin irrasyonel olmasıyla çelişir. O halde $y = n$ dir. Buradan $x = m$ elde edilir.

Tanım 1.1.12. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $\alpha = a + \sqrt{b}$ kuadratik irrasyonel olsun. Bu durumda α' nın eşleniği $\bar{\alpha}$ ile gösterilir ve $\bar{\alpha} = a - \sqrt{b}$ olarak tanımlanır.

Önerme 1.1.13. $\alpha = a + b\sqrt{d}$ ve $\beta = m + n\sqrt{d}$ olsun. α ve β iki kuadratik irrasyonel ya da iki rasyonel sayı olmak üzere

a) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ dir.

b) $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ dir.

c) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$ dir.

d) $\beta \neq 0$ olmak üzere $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ dir.

e) $(\bar{\alpha})^n = \overline{(\alpha^n)}$ dir.

f) α rasyonel sayı ise $\bar{\alpha} = \alpha$ dır [2].

Önerme 1.1.14. $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ polinomunun bir kökü α kuadratik irrasyoneli ise diğer kökü $\bar{\alpha}$ dir.

İspat. $A, B\ ve\ C$ tamsayılar ve $A \neq 0$ olmak üzere $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ polinomunu ele alalım. Önerme 1.1.13' den A, B, C tamsayılar olduğundan $\bar{A} = A$, $\bar{B} = B$ ve $\bar{C} = C$ dir. Ayrıca $\overline{(\alpha)}^2 = \overline{(\alpha^2)}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} A(\bar{\alpha})^2 + B\bar{\alpha} + C &= \bar{A}\overline{(\alpha^2)} + \bar{B}\bar{\alpha} + \bar{C} \\ &= \overline{A\alpha^2} + \overline{B\alpha} + \bar{C} \\ &= \overline{(A\alpha^2 + B\alpha + C)} \\ &= \bar{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{\alpha}$ nin polinomun diğer kökü olduğu görülür.

Teorem 1.1.15. x ve y aralarında asal iki tamsayı olsun. Eğer a bir irrasyonel sayı ise

$$\left|\frac{x}{y} - a\right| < \frac{1}{y^2}$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda (x, y) ikilisi vardır [12].

1.2. Sürekli Kesirler

d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{1.1}$$

denklemlerinin pozitif tamsayı çözümlerini bulmak için $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir yaklaşımlarından yararlanacağız. Bu yüzden bu bölüm de sürekli kesirler ile ilgili temel bilgileri vereceğiz.

Tanım 1.2.1. $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, ...$ tamsayı dizisi verilsin.

$$[a_0, a_1, a_2, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

şeklindeki bir ifadeye basit sonsuz sürekli kesir denir ve buradaki a_i değerlerine de kısmi bölenler denir ($i = 0,1,2, \dots$ için). Eğer $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \dots, a_n]$ değeri varsa sonsuz sürekli kesre yakınsaktır denir ve bu değer $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.2. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

a) $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]]$

b) $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{k-1} + \cfrac{1}{[a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]}}}}}$

dir [18].

Tanım 1.2.3. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ tamsayıları verilsin. k doğal sayı olmak üzere $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$ sürekli kesrine $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ sonsuz sürekli kesrinin k. yaklaşımı denir ve bu değer C_k ile gösterilir.

Teorem 1.2.4. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ tamsayıları verilsin.

$$p_{-2} = 0,\ p_{-1} = 1,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \tag{1.2}$$

$$q_{-2} = 1,\ q_{-1} = 0,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \tag{1.3}$$

şeklinde iki bağıntı tanımlansın. O zaman $C_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ ise

$$C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \tag{1.4}$$

dir [16].

İspat. Matematiksel tümevarım ile ispat yapalım.

$k = 0$ için $C_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$ olduğundan (1.4) eşitliği sağlanır.

$k = 1$ için $C_1 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$ olduğundan (1.4) eşitliği sağlanır.

k doğal sayısı için (1.4) eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. O halde

$$C_k = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

dir. $k + 1$ doğal sayısı için de (1.4) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için

$$C_{k+1} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k+1}] = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \tag{1.5}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde Önerme 1.2.2' den

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] \\ &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}]] \\ &= \left[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] \end{aligned}$$

dır. (1.5) eşitliğinde a_k yerine $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ koyulursa;

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \\ &= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $k+1$ için de (1.4) eşitliğinin doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.5. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ tamsayılarını ele alalım. p_k ve q_k, (1.2) ve (1.3)' deki gibi tanımlansın. Bu taktirde;

a) $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$ (1.6)

b) $p_k q_{k-2} - q_k p_{k-2} = a_k(-1)^k$ (1.7)

c) $(p_k, q_k) = 1$

d) $C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$

e) $C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}$

f) $k \geq 2$ olmak üzere $q_k \geq q_{k-1}$

g) $k \geq 0$ için $q_k \geq k$

dir [16].

İspat. a) Tümevarım ile ispat yapalım.

$k = 1$ için $p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + 1)1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^{1-1}$ olduğundan (1.6) eşitliği sağlanır.

k için (1.6) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. $k + 1$ için (1.6) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} q_k - q_{k+1} p_k &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\
&= a_{k+1} p_k q_k + q_k p_{k-1} - a_{k+1} q_k p_k - q_{k-1} p_k \\
&= q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k \\
&= (-1)(p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}) \\
&= (-1)(-1)^{k-1} = (-1)^k
\end{aligned}
$$

olduğundan istenilen elde edilir.

b) $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
&= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}) = a_n (-1)^{(n-1)-1} \\
&= a_n (-1)^n
\end{aligned}
$$

dır.

c) $(p_k, q_k) = d$ olsun. O zaman $d | p_k$ ve $d | q_k$ dir. Önerme 1.1.4' den

$$d | (p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)$$

yazılabilir. (1.6) eşitliğinden $d | (-1)^{k-1}$ elde edilir. Dolayısıyla $d = 1$ dir.

Diğerlerinin ispatları da benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 1.2.6. p_k ve q_k, (1.2) ve (1.3)' deki gibi tanımlansın.

a) Çift indisli C_k değerleri artan bir dizidir.

b) Tek indisli C_k değerleri azalan bir dizidir.

c) $k, m \in \mathbb{N}$ için C_{2m} değeri C_{2k-1} değerinden daha küçüktür [16].

Teorem 1.2.7. $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verilsin. $C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ise

$$\lim_{k \to \infty} C_k$$

vardır [18].

Tanım 1.2.8. $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verilsin. $C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ olmak üzere $\lim_{k\to\infty} C_k$ değeri

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

ile gösterilir.

Teorem 1.2.9. $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verilsin. Bu durumda $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri irrasyoneldir. Aksine her irrasyonel sayının tek türlü sonsuz sürekli kesir açılımı vardır [2].

Teorem 1.2.10. $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verilsin. $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrini ele alalım. k pozitif tamsayı ve $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$ olmak üzere

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots] = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$$

dir [1].

Teorem 1.2.11. α irrasyonel sayısı verilsin. Bu taktirde

$$\alpha = \alpha_0 \text{ , } a_k = [\![\alpha_k]\!] \text{ ve } \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad (k = 0,1,2,3, \ldots) \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlanırsa $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ dır (Ayrıca bu basit sonsuz sürekli kesir açılımı tek türlüdür) [16].

İspat. $\alpha = \alpha_0$ irrasyonel sayı olduğundan $\alpha_0 \neq a_0$ dır. Ayrıca tümevarımdan her $j \geq 0$ için

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}$$

olduğundan α_j vardır ve irrasyoneldir. Bu yüzden her $j \geq 0$ için $\alpha_j \neq a_j$ dir. Tanımdan $a_j < \alpha_j < a_j + 1 \Rightarrow 0 < \alpha_j - a_j < 1$ dir. Bu nedenle her $j \geq 0$ için

$$a_{j+1} = [\![\alpha_{j+1}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{1}{\alpha_j - a_j}\right]\!\!\right] \geq 1$$

dir. Her bir adımda (1.8) uygulanırsa

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}}$$

$$= \cdots$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_j + \cfrac{1}{\alpha_{j+1}}}}}}$$

$$= [a_0, a_1, \dots, a_j, \alpha_{j+1}]$$

elde edilir. Teorem 1.2.4 ve Teorem 1.2.10' dan

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_j, \alpha_{j+1}] = \frac{\alpha_{j+1} p_j + p_{j-1}}{\alpha_{j+1} q_j + q_{j-1}}$$

dır. $C_j = \frac{p_j}{q_j}$, $[\, a_0, a_1, \dots]$' nin j. yaklaşımı olduğundan

$$\alpha_0 - C_j = \frac{\alpha_{j+1} p_j + p_{j-1}}{\alpha_{j+1} q_j + q_{j-1}} - \frac{p_j}{q_j} = \frac{-(p_j q_{j-1} - p_{j-1} q_j)}{(\alpha_{j+1} q_j + q_{j-1}) q_j}$$

dir. (1.6)' dan

$$\alpha_0 - C_j = \frac{-(-1)^{j-1}}{(\alpha_{j+1} q_j + q_{j-1}) q_j}$$

dir. Ayrıca $\alpha_{j+1} q_j + q_{j-1} > a_{j+1} q_j + q_{j-1} = q_{j+1}$ olduğundan

$$|\alpha_0 - C_j| < \frac{1}{q_j q_{j+1}}$$

dir. Teorem 1.2.5 (g)' den

$$|\alpha_0 - C_j| < \frac{1}{j(j+1)}$$

dir. Dolayısıyla

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = \lim_{j \to \infty} C_j = \alpha = \alpha_0$$

bulunur [16].

Örnek 1.2.12. $\sqrt{10}$ sayısının sürekli kesir açılımını Teorem 1.2.11 yardımıyla bulalım.

$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{10}$ olsun.

$$a_0 = [\![\sqrt{10}]\!] = 3, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \frac{\sqrt{10}+3}{1}$$

$$a_1 = [\![\sqrt{10}+3]\!] = 6, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{10}+3-6} = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \frac{\sqrt{10}+3}{1}$$

$a_2 = [\![\sqrt{10}+3]\!] = 6, \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{10}+3-6} = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \frac{\sqrt{10}+3}{1}$

…

olduğundan

$$\alpha = [3,6,6,6,\dots]$$

bulunur.

Teorem 1.2.13. $\alpha > 1$ irrasyonel sayı olsun. Eğer $\frac{p_k}{q_k}$ ve $\frac{p'_k}{q'_k}$ sırasıyla α ve $1/\alpha$' nın k. yaklaşımları ise $k \geq 1$ için $p'_k = q_{k-1}$ ve $q'_k = p_{k-1}$ dir. Ayrıca $\alpha_k = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ ise $\frac{1}{\alpha} = [0, a_0, a_1, a_2, \dots]$ dir.

İspat. $1/\alpha$ nın k. yaklaşımı

$$[0, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}] = \frac{1}{[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]} = \frac{q_{k-1}}{p_{k-1}} = \frac{p'_k}{q'_k}$$

dır. Teorem 1.2.5 (c)' den $(p_{k-1}, q_{k-1}) = 1$ ve $(p'_k, q'_k) = 1$ dir. Dolayısıyla $k \geq 1$ için $p'_k = q_{k-1}$ ve $q'_k = p_{k-1}$ olduğu görülür. Ayrıca $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ olduğundan Önerme 1.2.2' den

$$[0, a_0, a_1, a_2, \dots] = 0 + \frac{1}{[a_0, a_1, a_2, \dots]} = 1/\alpha$$

bulunur.

Tanım 1.2.14. $i \geq 1$ için $a_i > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \dots$ tamsayı dizisi verilsin. $n \geq k$ şartını sağlayan tüm tamsayılar için $a_n = a_{n+l}$ eşitliğini sağlayan bir $l \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 0$ tamsayısı varsa $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ sonsuz sürekli kesrine periyodiktir denir. l bu şartı sağlayanların en küçüğü ise l' ye sonsuz sürekli kesrin periyodu denir. Yukarıdaki gibi tanımlanan periyodik sürekli kesir

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{l+k-1}}]$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.15. Bir α irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesir açılımının periyodik olması için gerek ve yeter şart α' nın kuadratik irrasyonel olmasıdır [16].

Tanım 1.2.16. $k = 0,1,2,3,...$ için $a_k = a_{n+k}$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa $[a_0, a_1, a_2, a_3, ...]$ sürekli kesrine tamamıyla periyodik sürekli kesir denir ve bu

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, ...] = [\overline{a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}}]$$

şeklinde gösterilir. n doğal sayısına da bu sonsuz sürekli kesrin periyodu denir.

Tanım 1.2.17. α bir kuadratik irrasyonel olsun. $\bar{\alpha}, \alpha$' nın eşleniği olmak üzere $\alpha > 1$ ve $-1 < \bar{\alpha} < 0$ ise α' ya indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı denir.

Teorem 1.2.18. α kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının tamamıyla periyodik olması için gerekli ve yeterli şart α' nın indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı olmasıdır [2].

Son olarak Pell denklemlerinin tamsayı çözümünü bulmak için gerekli olan $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımı ile ilgili bilgiler verelim.

Teorem 1.2.19. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $\sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı

$$a_0 = [\![\sqrt{d}]\!] \text{ olmak üzere } \sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, .. a_{n-1}, 2a_0}\ ]$$

formundadır ve $\sqrt{d}$' nin periyodu n dir [2].

($1 - 49$ arasındaki sayıların sürekli kesir açılımlarını incelemek için Çizelge 5.1'e bakınız.)

Örnek 1.2.20. $\sqrt{19}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımını Teorem 1.2.11 yardımıyla bulalım.

$\alpha = \alpha_0 = [\![\sqrt{19}]\!]$ olsun.

$$a_0 = [\![\sqrt{19}]\!] = 4,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3}$$

$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{19}+4}{3}\right]\!\!\right] = 2,\ \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+4}{3}-2} = \frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{5}$$

$$a_2 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{19}+2}{5}\right]\!\!\right] = 1,\ \alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+2}{5}-1} = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{5(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{2}$$

$$a_3 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{19}+3}{2}\right]\!\right] = 3,\ \alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+3}{2}-3} = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{2(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{5}$$

$$a_4 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{19}+3}{5}\right]\!\right] = 1,\ \alpha_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+3}{5}-1} = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{5(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{3}$$

$$a_5 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{19}+2}{3}\right]\!\right] = 2,\ \alpha_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+2}{3}-2} = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{3(\sqrt{19}+4)}{3} = \sqrt{19}+4$$

$$a_6 = [\![\sqrt{19}+4]\!] = 8 = 2a_0$$

olduğundan Teorem 1.2.19’ dan

$$\alpha = [4, \overline{2,1,3,1,2,8}]$$

elde edilir.

Sonuç 1.2.21. α bir irrasyonel sayı ve $k = 1, 2, \ldots$ için $\frac{p_k}{q_k}$, α’ nın k. yaklaşımı ise

$$\left|\sqrt{d} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{{q_k}^2}$$

dir [16].

Teorem 1.2.22. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $a_0 = [\![\sqrt{d}]\!]$ olmak üzere $k = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{P_k+\sqrt{d}}{Q_k} \\ a_k &= [\![\alpha_k]\!] \\ Q_{k+1} &= \frac{d-P^2{}_{k+1}}{Q_k} \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

ardışık olarak tanımlanırsa

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

dır [16].

Teorem 1.2.23. α bir irrasyonel sayı ve $k = 1, 2, \ldots$ için $\frac{p_k}{q_k}$, α’ nın k. yaklaşımı olsun. r ve $s > 0$ tamsayılar olmak üzere

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k| \text{ ise } s \geq q_{k+1}$$

dir [16].

Teorem 1.2.24. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. x ve y tamsayıları için $y > 0$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere

$$\left|\sqrt{d}-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{2y^2}$$

ise $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$' nin yaklaşımlarından biridir.

İspat. $\sqrt{d}$ irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesir yaklaşımları $k=0,1,2,...$ olmak üzere $\frac{p_k}{q_k}$ ile gösterilsin. $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$' nin yaklaşımlarından biri olmasın. O zaman $q_k \le y < q_{k+1}$ olacak biçimde $k \ge 0$ doğal sayısı vardır. Teorem 1.2.23' e göre

$$|q_k\alpha - p_k| \le |y\alpha - x| = y\left|\alpha-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{2y}$$

dir. Bu son eşitsizlik $1/q_k$ ile çarpılırsa ($q_k>0$)

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{2yq_k}$$

olur. Ayrıca $|yp_k - xq_k| \ge 1$ ve $yp_k - xq_k$ bir tamsayıdır.

$$\frac{1}{yq_k}\le\frac{|yp_k-xq_k|}{yq_k}=\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{x}{y}\right|=\left|\frac{p_k}{q_k}+\alpha-\alpha-\frac{x}{y}\right|$$

$$\le\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|+\left|\alpha-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{2yq_k}+\frac{1}{2y^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{yq_k}<\frac{1}{2yq_k}+\frac{1}{2y^2}$$

bulunur. Bu eşitsizlik $2yq_k$ ile çarpılırsa

$$2y<y+q_k$$

$$q_k>y$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.25. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. P_k ve Q_k, (1.9)' deki gibi tanımlansın. $\frac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{d}$' nin k. yaklaşımı olmak üzere

$$p_k^2-dq_k^2=(-1)^{k-1}Q_{k+1}$$

dir.

İspat. Teorem 1.2.10' dan $\sqrt{d}=[a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_k,\alpha_{k+1}]$ ve Teorem 1.2.4' den

$$\sqrt{d}=\frac{\alpha_{k+1}p_k+p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k+q_{k-1}}$$

yazılabilir. Ayrıca $\alpha_{k+1}=\frac{P_{k+1}+\sqrt{d}}{Q_{k+1}}$ olduğu kullanılırsa;

$$\sqrt{d} = \frac{\left(\frac{P_{k+1}+\sqrt{d}}{Q_{k+1}}\right)p_k + p_{k-1}}{\left(\frac{P_{k+1}+\sqrt{d}}{Q_{k+1}}\right)q_k + q_{k-1}}$$

$$= \frac{(P_{k+1}+\sqrt{d})p_k + p_{k-1}Q_{k+1}}{(P_{k+1}+\sqrt{d})q_k + q_{k-1}Q_{k+1}}$$

elde edilir. İçler dışlar çarpımı yapılırsa

$$dq_k + (P_{k+1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1})\sqrt{d} = (P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1}) + p_k\sqrt{d}$$

olup Teorem 1.1.11’ den

$$dq_k = P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1}$$

ve

$$p_k = P_{k+1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1}$$

bulunur. Birinci denklem $-q_k$ ve ikinci denklem p_k ile çarpılıp toplanırsa

$$\begin{aligned} p_k^2 - dq_k^2 &= -Q_{k+1}p_{k-1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1}p_k \\ &= Q_{k+1}(-p_{k-1}q_k + q_{k-1}p_k) \\ &= Q_{k+1}(-1)^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.26. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. P_k ve Q_k, (1.9)’ deki gibi tanımlanırsa $\alpha = \sqrt{d}$, $P_0 = 0, Q_0 = 1$ olmak üzere

$$Q_k = 1 \Leftrightarrow n|k$$

dır [1].

1.3. Sayısal Örnekler

Örnek 1.3.1. $\sqrt{2}$ sayısının sonsuz sürekli kesir açılımını bulalım.

$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{2}$ olsun.

$$a_0 = [\![\sqrt{2}]\!] = 1, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$a_1 = [\![\sqrt{2}+1]\!] = 2 = 2a_0$$

dır. Bu yüzden Teorem 1.2.19’ dan $\sqrt{2}$ sayısının sürekli kesir açılımı $[1, \overline{2}]$ bulunur. Aksine $[1, \overline{2}]$’ nin $\sqrt{2}$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha = [1,2,2,\dots] \Rightarrow \alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \Rightarrow \alpha - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

olduğundan

$$\alpha - 1 = \frac{1}{2 + (\alpha - 1)} \Rightarrow \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

olduğu görülür.

Örnek 1.3.2. $d = a^2b^2 + 2b$ olsun. $\sqrt{a^2b^2 + 2b} = [ab, \overline{a, 2ab}]$ olduğunu gösterelim.

$(ab)^2 < a^2b^2 + 2b < (ab + 1)^2$ olduğundan dolayı

$$a_0 = [\![\sqrt{a^2b^2 + 2b}]\!] = ab \text{ , } \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2b^2+2b} - ab} = \frac{\sqrt{a^2b^2+2b} + ab}{2b}$$

dır. $\frac{ab+ab}{2b} = a < \frac{\sqrt{a^2b^2+2b}+ab}{2b} < a + 1$ olduğundan

$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{a^2b^2+2b}+ab}{2b}\right]\!\!\right] = a, \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2b^2+2b}+ab}{2b} - a} = \sqrt{a^2b^2 + 2b} + ab$$

dır. O halde $a_2 = [\![\sqrt{a^2b^2 + 2b} + ab]\!] = 2ab = 2a_0$ dır. Teorem 1.2.19' dan

$$\sqrt{a^2b^2 + 2b} = [ab, \overline{a, 2ab}]$$

bulunur.

Örnek 1.3.3. $\sqrt{a^2b^2 + b} = [ab, \overline{2a, 2ab}]$ olduğunu gösterelim.

$(ab)^2 < a^2b^2 + b < (ab + 1)^2$ olduğundan dolayı

$$a_0 = [\![\sqrt{a^2b^2 + b}]\!] = ab, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2b^2+b} - ab} = \frac{\sqrt{a^2b^2+b} + ab}{b}$$

dır. $\frac{ab+ab}{b} = 2a < \frac{\sqrt{a^2b^2+b}+ab}{b} < 2a + 1$ olduğundan

$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{a^2b^2+b}+ab}{b}\right]\!\!\right] = 2a \text{ , } \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2b^2+b}+ab}{b} - 2a} = \sqrt{a^2b^2 + b} + ab$$

dır. $ab + ab < \sqrt{a^2b^2 + b} + ab < 2ab + 1$ olduğu kullanılırsa

$$a_2 = \left[\!\!\left[\sqrt{a^2b^2 + b} + ab\right]\!\!\right] = 2ab = 2a_0$$

dır. Teorem 1.2.19' dan

$$\sqrt{a^2b^2+b}=\left[ab,\overline{2a,2ab}\right]$$

bulunur.

Örnek 1.3.4. $\sqrt{m^2+m}=[m,\overline{2,2m}]$ olduğunu gösterelim.

$m^2<m^2+m<(m+1)^2$ olduğundan dolayı

$$a_0=\left[\!\left[\sqrt{m^2+m}\right]\!\right]=m\ ,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{m^2+m}-m}=\frac{\sqrt{m^2+m}+m}{m}$$

dır. $\frac{m+m}{m}=2<\frac{\sqrt{m^2+m}+m}{m}<3$ olduğundan

$$a_1=\left[\!\left[\frac{\sqrt{m^2+m}+m}{m}\right]\!\right]=2\ ,\ \alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2+m}+m}{m}-2}=\sqrt{m^2+m}+m$$

dır. O halde $2m<\sqrt{m^2+m}+m<2m+1$ olduğu kullanılırsa

$$a_2=\left[\!\left[\sqrt{m^2+m}+m\right]\!\right]=2m=2a_0$$

elde edilir. Teorem 1.2.19' dan

$$\sqrt{m^2+m}=[m,\overline{2,2m}]$$

bulunur.

Örnek 1.3.5. $\sqrt{m^2-m}=\left[m-1,\overline{2,2(m-1)}\right]$ olduğunu gösterelim.

$(m-1)^2<m^2-m<m^2$ olduğundan dolayı

$$a_0=\left[\!\left[\sqrt{m^2-m}\right]\!\right]=m-1\ ,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{m^2-m}-(m-1)}=\frac{\sqrt{m^2-m}+(m-1)}{m-1}$$

dır. Buradan $\frac{m-1+m-1}{m-1}=2<\frac{\sqrt{m^2-m}+m-1}{m-1}<3$ olduğundan

$$a_1=\left[\!\left[\frac{\sqrt{m^2-m}+m-1}{m-1}\right]\!\right]=2,$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-m}+m-1}{m-1}-2}=\sqrt{m^2-m}+(m-1)$$

dır. Ayrıca $2(m-1)<\sqrt{m^2-m}+m-1<2m-1$ olduğu kullanılırsa

$$a_2=\left[\!\left[\sqrt{m^2-m}+m-1\right]\!\right]=2(m-1)=2a_0$$

elde edilir. Teorem 1.2.19' dan

$$\sqrt{m^2-m}=\left[m-1,\overline{2,2(m-1)}\right]$$

bulunur.

Örnek 1.3.6. $\sqrt{m^2-2}=\left[m-1,\overline{1,m-2,1,2(m-1)}\right]$ olduğunu gösterelim.

$(m-1)^2<(m^2-2)<m^2$ olduğundan dolayı

$$a_0=[\![\sqrt{m^2-2}]\!]=m-1\ ,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{m^2-2}-(m-1)}=\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2m-3}$$

dır. Ayrıca $1+\frac{1}{2m-3}<\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2m-3}<1+\frac{2}{2m-3}$ olduğundan

$$a_1=\left[\!\!\left[\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2m-3}\right]\!\!\right]=1\,,$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-1)}{2m-3}-1}=\frac{2m-3}{\sqrt{m^2-2}-(m-2)}=\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}$$

dır. O halde $m-2+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}<m-1$ olduğu kullanılırsa

$$a_2=\left[\!\!\left[\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}\right]\!\!\right]=m-2,\ \alpha_3=\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2}-(m-2)}=\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2m-3}$$

dır. Böylece $1<\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2m-3}<1+\frac{1}{2m-3}$ olduğundan

$$a_3=\left[\!\!\left[\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2m-3}\right]\!\!\right]=1\ ,\ \alpha_3=\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-2}+(m-2)}{2m-3}-1}=\sqrt{m^2-2}+(m-1)$$

dır. Ayrıca $2(m-1)<\sqrt{m^2-2}+m-1<2m-1$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$a_3=[\![\sqrt{m^2-2}+m-1]\!]=2(m-1)\qquad=2a_0$$

dır. Teorem 1.2.19' dan

$$\sqrt{m^2-2}=\left[m-1,\overline{1,m-2,1,2(m-1)}\right]$$

bulunur.

Örnek 1.3.7. $\sqrt{m^2+2}=[m,\overline{m,2m}]$ olduğunu gösterelim.

$m^2<m^2+2<(m+1)^2$ olduğundan dolayı

$$a_0=[\![\sqrt{m^2+2}]\!]=m\ ,\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{m^2+2}-m}=\frac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}$$

dır. Ayrıca $m < \frac{\sqrt{m^2+2}+m}{2} < m+1$ olduğu kullanılırsa

$$a_1 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}\right]\!\right] = m\ ,\ \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{m^2+2}+m}{2}-m} = \sqrt{m^2+2}+m$$

elde edilir. O halde

$$a_2 = [\![\sqrt{m^2+2}+m]\!] = 2m = 2a_0$$

dır. Teorem 1.2.19' dan

$$\sqrt{m^2+2} = [m, \overline{m, 2m}]$$

olduğu görülür.

BÖLÜM 2. PELL DENKLEMLERİ

Bu bölümde öncelikle $x^2 - dy^2 = \pm 1$ denklemlerinin tamsayı çözümlerini ve temel çözümlerini elde etmek için gerekli olan tanım ve teoremler verilecektir. Daha sonra $x^2 - dy^2 = \pm 1$ denkleminin temel çözümlerinden yararlanarak $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin tamsayı çözümleri varsa bu çözümleri veren bağıntılar verilecektir. Son olarak da bazı Pell denklemlerin temel çözümlerini elde edeceğiz.

2.1. Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1. d doğal sayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{2.1}$$

Diophantine denklemlerine Pell denklemleri denir.

Tanım 2.1.2. d doğal sayı ve N tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = N \tag{2.2}$$

Diophantine denklemine Genel-Pell denklemi denir.

d doğal sayı ve N tamsayı olsun. Eğer $x = u$ ve $y = v$, $x^2 - dy^2 = N$ Pell denklemini sağlayan tamsayılar ise u+$v\sqrt{d}$' e (2.2) denkleminin bir çözümüdür denir.

Teorem 2.1.3. d tamkare olmayan pozitif tamsayı ve u, u', v, v' pozitif tamsayılar olmak üzere $u + v\sqrt{d}$ ve $u' + v'\sqrt{d}$, (2.2) denkleminin herhangi iki çözümü olsun.

a) $u = u'$ ve $v = v'$ dir $\Leftrightarrow u + v\sqrt{d} = u' + v'\sqrt{d}$ dir.

b) $u > u'$ ise $v > v'$ ve $u + v\sqrt{d} > u' + v'\sqrt{d}$ dir.

İspat. a) $\Leftrightarrow$) $\sqrt{d}$ irrasyonel sayı ve $u+v\sqrt{d}=u'+v'\sqrt{d}$ olsun. $v\neq v'$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$u+v\sqrt{d}=u'+v'\sqrt{d}\Leftrightarrow u-u'=(v'-v)\sqrt{d} \qquad (2.3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{d}=\frac{u-u\prime}{v\prime-v}$$

dir. $u-u'$ ve $v'-v$ tamsayı olduğundan $\frac{u-v\prime}{v\prime-v}$ rasyoneldir. O halde $\sqrt{d}$ de rasyonel olmalıdır. Dolayısıyla bu durum $\sqrt{d}$' nin irrasyonel sayı olmasıyla çelişir. O halde $v'=v$ dir. Bu yüzden (2.3)' den $u-u'=0 \Leftrightarrow u=u'$ dir.

b) $u+v\sqrt{d}$ ve $u'+v'\sqrt{d}$, (2.2) denkleminin herhangi iki çözümü ise

$$u^2-dv^2=(u')^2-d(v')^2=N \qquad (2.4)$$

dir. Hipotezden $u>u'$ ve $u'\geq 1$ olduğundan $u^2>(u')^2$ dir. Ayrıca (2.4) denkleminden

$$u^2-(u')^2=d(v^2-(v'))^2$$

dir. $u^2-(u')^2>0$ ve $d>0$ olduğundan $v^2-(v')^2>0$, yani $v^2>(v')^2$ dır. O halde $v>0$ ve $v'>0$ olduğundan $v>v'$ bulunur. $u>u'$ ve $v>v'$ olduğundan $u+v\sqrt{d}>u'+v'\sqrt{d}$ dir.

Sonuç 2.1.4. $x^2-dy^2=N$ Pell denkleminin çözümleri arasında bir sıralama vardır.

(2.2) denklemin herhangi bir çözümü (x,y) ise

$$(x,-y),(-x,y),(-x,-y)$$

ikilileri de (2.2) denkleminin diğer çözümlerdir. Biz bu tezde x ve y pozitif tamsayı olmak üzere (x,y) ikilileri ile ilgileneceğiz.

Teorem 2.1.5. N sıfırdan farklı bir tamsayı olsun. $d<0$ veya d tamkare ise $x^2-dy^2=N$ denkleminin sonlu sayıda tamsayı çözümü vardır.

İspat. $d<0$ olsun. Eğer $N<0$ ise denklemin tamsayı çözüm yoktur. Eğer $N>0$ ise $|x|\leq\sqrt{N}$ ve $|y|\leq\sqrt{\frac{N}{|d|}}$ olmalıdır. Dolayısıyla denklemin sonlu sayıda çözümü vardır.

Şimdi de d tamkare olsun. $d=m^2$ alalım. O zaman

$$x^2 - dy^2 = (x + my)(x - my) = N$$

olur. Ayrıca N nin bölenleri sonlu olduğundan elde edilen x ve y çözümleri sonlu tanedir.

2.2. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell Denklemi

Lemma 2.2.1. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. O zaman

$$x^2 - dy^2 < 1 + 2\sqrt{d}$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz tane x ve y doğal sayı çifti vardır [2].

İspat. $\sqrt{d}$ irrasyonel sayısı için Teorem 1.1.15' e göre

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{y^2} \tag{2.5}$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda x ve y pozitif tamsayı çifti vardır. Ayrıca

$$\left|\frac{x}{y} + \sqrt{d}\right| = \left|\frac{x}{y} - \sqrt{d} + 2\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d} \tag{2.6}$$

dir. (2.5) ve (2.6) kullanılarak

$$|x^2 - dy^2| = \left|x + y\sqrt{d}\right| \left|x - y\sqrt{d}\right| = |y| \left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| |y| \left|\frac{x}{y} + \sqrt{d}\right|$$

$$< y^2 \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d}\right) \leq 1 + 2\sqrt{d}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.2.2. $x^2 - dy^2 = k$ denkleminin herhangi iki çözümü (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olsun. Eğer $x_1 \equiv x_2 \ (mod\ k)$ ve $y_1 \equiv y_2 \ (mod\ k)$ ise $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümü vardır.

İspat. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2), $x^2 - dy^2 = k$ denkleminin herhangi iki çözümü olduğundan $x_1^2 - dy_1^2 = k$ ve $x_2^2 - dy_2^2 = k$ dir. Ayrıca

$$x_1^2 - dy_1^2 = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)$$

$$x_2^2 - dy_2^2 = \left(x_2 + y_2\sqrt{d}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{d}\right)$$

olduğundan dolayı

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{d}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{d}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)$$

$$k^2 = (x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

$$1 = \left(\frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{k}\right)^2 - d\left(\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{k}\right)^2 \tag{2.7}$$

elde edilir. Hipotezden

$$x_1 \equiv x_2 \ (mod\ k) \quad \text{ve} \quad y_1 \equiv y_2 \ (mod\ k)$$

olduğundan

$$x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv x_1x_1 - dy_1y_1 \equiv {x_1}^2 - d{y_1}^2 (mod\ k)$$

olur. Diğer yandan ${x_1}^2 - d{y_1}^2 = k$ ve $k \equiv 0\ (mod\ k)$ olduğundan

$$x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv 0\ (mod\ k) \tag{2.8}$$

dır. Aynı zamanda $x_1y_2 \equiv y_1x_2 (mod\ k)$ olduğundan

$$x_1y_2 - y_1x_2 \equiv 0 (mod\ k) \tag{2.9}$$

dır. (2.8) ve (2.9)' deki sonuçlar birleştirilirse (2.7) denkleminde karesi alınan sayıların tamsayı olduğu görülür. Bu yüzden

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümü vardır.

Teorem 2.2.3. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir tamsayı çözümü vardır.

İspat. $0 < |x^2 - dy^2|, 1 + 2\sqrt{d} > 1$ ve $x^2 - dy^2$ bir tamsayı olduğundan Lemma 2.2.1' e göre en az bir k tamsayısı için $x^2 - dy^2 = k$ olan (x,y)' ler sonsuz tanedir. Bu çiftler arasında x_1, x_2 ve y_1, y_2 sayılarının mod k' a göre kalanları sonlu bir yolla kombine edilebildiğinden

$$x_1 \equiv x_2 \ (mod\ k) \quad \text{ve} \quad y_1 \equiv y_2 \ (mod\ k)$$

kongrüans şartını sağlayan en küçük bir (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ikilileri vardır. Bu yüzden Lemma 2.2.2' e göre $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir tamsayı çözümü vardır.

Teorem 2.2.4. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin herhangi bir çözümü (a, b) olsun. (a, b) denklemin pozitif tamsayı çözümüdür ⇔ $a + b\sqrt{d} > 1$ dir.

İspat. ⇒) (a, b), $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin pozitif çözümü ise $a + b\sqrt{d} \geq 1 + \sqrt{d} > 1$ olduğu açıktır.

⇐) $a + b\sqrt{d} > 1$ olsun. O zaman a ve b tamsayılarının birlikte negatif olmadığı aşikardır. Dolayısıyla aşağıdaki iki durum vardır.

a) $a > 0, b \leq 0$ olsun. O zaman $-b \geq b$ ve böylece $a - b\sqrt{d} \geq a + b\sqrt{d} > 1$ dır. Dolayısıyla $a^2 - db^2 = (a - b\sqrt{d})(a + b\sqrt{d}) > 1$ olur. Bu, $a^2 - db^2 = 1$ olmasıyla çelişir.

b) $a \leq 0,\ b > 0$ olsun. O zaman $-a \geq a$ ve böylece $-a + b\sqrt{d} \geq a + b\sqrt{d} > 1$ olur. Dolayısıyla $-a^2 + db^2 = (-a + b\sqrt{d})(a + b\sqrt{d}) > 1$ olduğundan $-(a^2 - db^2) > 1$ dır. Bu ise $a^2 - db^2 = 1$ olmasıyla çelişir.

O halde eldeki bilgiler ışığında a ve b tamsayılarının ikisi de pozitif tamsayıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.2.5. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasından x' in en küçük değerini aldığı (x, y) çözümüne denklemin temel çözümü denir.

x tamsayısı en küçük değeri aldığında Teorem 2.1.3' e göre y ve $x + y\sqrt{d}$ tamsayıları da en küçük değerini alır. Bu yüzden birinin alabileceği en küçük tamsayı değerini alması temel çözümü bulmak için yeterlidir.

Teorem 2.2.6. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Eğer δ ve ξ doğal sayıları

$$\delta > \frac{1}{2}\xi^2 - 1 \qquad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ve $\delta + \xi\sqrt{d}, x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ise $\delta + \xi\sqrt{d},\ x^2 - dy^2 = 1$ denklemin temel çözümüdür [12].

İspat. $\xi = 1$ ise $\delta + \xi\sqrt{d}$ nin temel çözüm olduğu aşikardır.

$\xi > 1$ için teoremi ispatlayalım. $x_1 + y_1\sqrt{d},\ x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümü olsun. Ayrıca $1 \leq y_1 < \xi$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$d = \frac{{x_1}^2 - 1}{{y_1}^2} = \frac{\delta^2 - 1}{\xi^2}$$

ve böylece

$${x_1}^2\xi^2 - {y_1}^2\delta^2 = \xi^2 - y_1^2 = m > 0$$

dır. m_1 ve m_2 doğal sayılar olmak üzere

$$m_1 = x_1\xi + y_1\,\delta \quad \text{ve} \quad m_2 = x_1\xi - y_1\,\delta$$

olsun. O halde elde edilen bilgiler ışığında $m = m_1 m_2$ olduğundan

$$\delta = \frac{m_1 - m_2}{2y_1} \leq \frac{m-1}{2y_1} = \frac{\xi^2 - {y_1}^2 - 1}{2y_1} \leq \frac{1}{2}\xi^2 - 1$$

bulunur. Ama bu durum (2.10) eşitsizliği ile çelişir. Dolayısıyla ξ temel çözümdür.

Teorem 2.2.7. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. (p,q)

$$x^2 - dy^2 = 1$$

denkleminin bir pozitif çözümü ise $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$' nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

İspat. $p - q\sqrt{d} = \frac{1}{p+q\sqrt{d}}$ olduğundan $\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p+q\sqrt{d})}$ dir. (p,q) denklemin pozitif bir çözümü olduğundan $p > q\sqrt{d}$ olduğu görülebilir. Buradan da $p + q\sqrt{d} > 2q\sqrt{d}$ elde edilir. O halde

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} < \frac{1}{2q^2\sqrt{d}} < \frac{1}{2q^2}$$

dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.24' e göre $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

Örnek 2.2.8. $x^2 - 6y^2 = 1$ Pell denkleminin ilk üç pozitif tamsayı çözümünü bulalım.

$\sqrt{6}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının $\alpha = [2, \overline{2,4}]$ olduğunu gözönüne alalım. $x^2 - 6y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $\sqrt{6}$' nın bazı sürekli kesir yaklaşımlarından elde edildiğinden ilk altı yaklaşımı Teorem 1.2.4' deki (1.2) ve (1.3) bağıntıları yardımıyla hesaplayalım. O halde

$p_0 = a_0 = 2$	$q_0 = 1$
$p_1 = a_1 p_0 + 1$	$q_1 = a_1$
$p_1 = 2.2 + 1 = 5$	$q_1 = 2$
$p_2 = a_2 p_1 + p_0$	$q_2 = a_2 q_1 + 1$
$p_2 = 4.5 + 2 = 22$	$q_2 = 4.2 + 1 = 9$

$$p_3 = a_3p_2 + p_1 \qquad q_3 = a_3q_2 + q_1$$

$$p_3 = 2.22 + 5 = 49 \qquad q_3 = 2.9 + 2 = 20$$

$$p_4 = 4.49 + 22 = 218 \qquad q_4 = 4.20 + 9 = 89$$

$$p_5 = 2.218 + 49 = 485 \qquad q_5 = 2.89 + 20 = 198$$

bulunur. Bu yaklaşımlar incelenirse $x^2 - 6y^2 = 1$ denkleminin ilk üç çözümünün $(p_1, q_1) = (5,2)$, $(p_3, q_3) = (49,20)$ ve $(p_5, q_5) = (485,198)$ olduğu görülür.

Yukarıdaki örnek incelenirse denklemin ilk üç çözümünün $\sqrt{6}$ sayısının bazı sürekli kesir yaklaşımlarından elde edildiği görülür. Yani, bir irrasyonel sayının her yaklaşımı denklemin bir çözümü değildir. Şimdi Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümlerini veren bağıntılarını verelim.

Teorem 2.2.9. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının periyodu m olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n, y_n) ile gösterilsin. Bu taktirde

a) m çift ise $(x_n, y_n) = (p_{mn-1}, q_{mn-1})$ biçimindedir,
b) m tek ise $(x_n, y_n) = (p_{2mn-1}, q_{2mn-1})$ biçimindedir [1].

İspat. Teorem 2.2.7' den $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif çözümlerinin $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir yaklaşımlarından biri olduğu görülür. Eğer $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin pozitif bir çözümü (p_k, q_k) ise Teorem 1.2.25' e göre

$$p_k{}^2 - dq_k{}^2 = (-1)^{k-1}Q_{k+1}$$

olduğundan k tek olmalıdır ve $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir açılımının periyodu m olduğundan Teorem 1.2.26' e göre $m|k+1$ dır. O halde $k = tm - 1$ olacak şekilde $t \geq 1$ tamsayısı vardır. Eğer m çift ise t' nin her değeri için k tek olacağından $t = n$ için $k = nm - 1$ dir. Eğer m tek ise k' nın tek olması için $t = 2n$ biçiminde olmalıdır. Yani $k = 2nm - 1$ biçiminde olmalıdır. Tersine $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere (x_n, y_n)' leri ele alalım. Hipotezden m çift ise $(x_n, y_n) = (p_{mn-1}, q_{mn-1})$ biçimindedir. O halde Teorem 1.2.25 ve Teorem 1.2.26' a göre

$$x_n^2 - dy_n^2 = p_{mn}^2 - dq_{mn}^2 = (-1)^{mn-2} = 1$$

dir. Yani (x_n, y_n)' ler $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin çözümleridir. Benzer olarak hipotezden m tek ise $(x_n, y_n) = (p_{2mn-1}, q_{2mn-1})$ biçimindedir. O halde Teorem 1.2.25 ve Teorem 1.2.26' a göre

$$x_n^2 - dy_n^2 = p_{2mn}^2 - dq_{2mn}^2 = (-1)^{2mn-2} = 1$$

dir. Yani (x_n, y_n)' ler $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin çözümleridir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.2.10. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Pell denkleminin temel çözümü

a) m çift ise $(x, y) = (p_{m-1}, q_{m-1})$ dir.
b) m tek ise $(x, y) = (p_{2m-1}, q_{2m-1})$ dir [2].

İspat. $(p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots$ ikilileri $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini içerir ve $a_0 = [\![\sqrt{d}]\!] > 0$ olduğundan bu değerler artandır. Eğer (x_1, y_1) denklemin ilk çözümü olarak alınırsa diğer (x, y) çözümleri için $x > x_1$ ve $y > y_1$ olur. Bu yüzden $x_1 + y_1\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü olur. Teorem 2.2.9' a göre

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \begin{cases} p_{m-1} + q_{m-1}\sqrt{d}, & m \text{ çift ise} \\ p_{2m-1} + q_{2m-1}\sqrt{d}, & m \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.11. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin herhangi iki çözümü (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ise bu çözümlerin çarpımı da yine denklemin bir çözümüdür. Yani

$$r + s\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d})$$

olmak üzere (r, s), $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümüdür.

İspat. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2), $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin herhangi iki çözümü olduğundan

$$x_1^2 - dy_1^2 = x_2^2 - dy_2^2 = 1$$

dir. Aynı zamanda

$$r + s\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d}) = (x_1x_2 + y_1y_2d) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{d}$$

olduğundan Teorem 1.1.11' den

$$r = x_1x_2 + dy_1y_2 \text{ ve } s = x_1y_2 + y_1x_2$$

dir. Şimdi (r,s)'i $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminde yerine koyalım. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} r^2 - ds^2 &= (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + 2dx_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2d^2 - dx_1^2y_2^2 - 2dx_1x_2y_1y_2 - y_1^2x_2^2d^2 \\ &= x_1^2(x_2^2 - dy_2^2) - dy_1^2(x_2^2 - dy_2^2) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan $(r,s), x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 2.2.12. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı, $n \in \mathbb{N}$ ve x, y pozitif tamsayılar olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \qquad (2.11)$$

formülü ile elde edilir.

İspat. Öncelikle (2.11) eşitliğinden elde edilen (x_n, y_n)' lerin $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. O halde $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ olduğundan dolayı

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n \qquad (2.12)$$

dir. (2.11) ve (2.12) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} x_n^2 - dy_n^2 &= (x_1^2 - dy_1^2)^n \\ &= 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzden $x_n + y_n\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümüdür. Şimdi (2.11) eşitliğinden elde edilen ardışık iki çözüm arasında başka herhangi bir çözümünün olmadığını gösterelim. O halde u ve v pozitif tamsayılar olmak üzere (2.11) eşitliğinden elde edilmeyen bir çözüm $u + v\sqrt{d}$ olsun. O zaman

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n < u + v\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}$$

olacak şekilde n doğal sayısı vardır. Buradan

$$x_n + y_n\sqrt{d} < u + v\sqrt{d} < (x_n + y_n\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) \qquad (2.13)$$

dir. (2.13) eşitsizliği $x_n - y_n\sqrt{d}$ pozitif sayısı ile çarpılırsa

$$1 < (u + v\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) < x_1 + y_1\sqrt{d} \qquad (2.14)$$

elde edilir.

$$x + y\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) \qquad (2.15)$$

olsun. (2.15) eşitliğinin eşleniği alınırsa

$$x - y\sqrt{d} = (u - v\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d})$$

bulunur. Bu son iki denklem taraf tarafa çarpılırsa

$$1 = (u^2 - dv^2)(x_n^2 - dy_n^2) = x^2 - dy^2$$

elde edilir. Buradan $x + y\sqrt{d}$ de $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü olduğu görülür. Ayrıca (2.14)' den $x + y\sqrt{d} > 1$ olduğundan Teorem 2.2.4' e göre x,y ler pozitif tamsayı ve $0 < \frac{1}{x+ y\sqrt{d}} = x - y\sqrt{d} < 1$ yazılabilir. (2.14)' den

$$x + y\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$$

bulunur. Ama bu durum $x_1 + y_1\sqrt{d}$' nin temel çözüm olmasıyla çelişir. O halde (2.11) eşitliğinden elde edilen ardışık herhangi iki çözümü arasında başka pozitif tamsayı çözümü yoktur. Yani, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini (2.11) eşitliği verir.

Sonuç 2.2.13. d tamkare olmayan pozitif tamsayı olsun. m, n pozitif tamsayılar ve $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. O zaman

$$x_{mn} + y_{mn}\sqrt{d} = (x_m + y_m\sqrt{d})^n$$

sağlanır.

İspat. Teorem 2.2.12' de $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ olduğu gösterildi. O halde

$$x_{nm} + y_{nm}\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{nm} = ((x_1 + y_1\sqrt{d})^m)^n = (x_m + y_m\sqrt{d})^n$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.14. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere

$$x_{n+1} = x_1 x_n + d y_1 y_n$$
$$y_{n+1} = x_1 y_n + y_1 x_n$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Teorem 2.2.12' de $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ olduğu gösterildi. Buradan

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1} \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 + y_1\sqrt{d}) \\ &= (x_n + y_n\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) \\ &= (x_1 x_n + y_1 y_n d) + (x_1 y_n + x_n y_1)\sqrt{d} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 1.1.11' den

$$x_{n+1} = x_n x_1 + d y_n y_1$$
$$y_{n+1} = x_1 y_n + x_n y_1$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.15. $x_1 > 1, y_1 \geq 1$ ve $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_{n+1} > x_n$ ve $y_{n+1} > y_n$ dir.

İspat. Matematiksel tümevarımla ispat yapalım. $n = 1$ için Sonuç 2.2.14' den $x_2 = x_1^2 + d y_1^2$ ve $y_2 = 2x_1 y_1$ bulunur. $x_1 > 1, y_1 \geq 1$ olduğundan açık olarak $x_2 > x_1$ ve $y_2 > y_1$ dir. x_n ve y_n, 1 den büyük tamsayılar olmak üzere (x_n, y_n) bir çözüm olsun. Sonuç 2.2.14' den

$$x_{n+1} = x_n x_1 + d y_n y_1$$
$$y_{n+1} = x_1 y_n + x_n y_1$$

dir. $x_n x_1 > x_n$ ve $d y_1 y_n > 0$ dır. Bu yüzden eldeki bilgiler ışığında

$$x_{n+1} = x_n x_1 + d y_n y_1 > x_n$$

dir. $y_n x_1 > y_n$ ve $y_1 x_n > 0$ olduğundan

$$y_{n+1} = x_1 y_n + x_n y_1 > y_n$$

dir. O halde $y_{n+1} > y_n$ ve $x_{n+1} > x_n$ dir.

Sonuç 2.2.16. m, n pozitif tamsayılar, d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. O zaman

$$x_{n+m} = x_n x_m + d y_n y_m$$
$$y_{n+m} = x_m y_n + x_n y_m$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Teorem 2.2.12' den $x_{n+m} + y_{n+m}\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+m}$ olduğu biliniyor. O halde

$$\begin{aligned} x_{n+m} + y_{n+m}\sqrt{d} &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+m} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n}(x_1 + y_1\sqrt{d})^{m} \\ &= \left(x_n + y_n\sqrt{d}\right)\left(x_m + y_m\sqrt{d}\right) \\ &= (x_m x_n + y_m y_n d) + (x_m y_n + x_n y_m)\sqrt{d} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 1.1.11' den

$$x_{n+m} = x_n x_m + d y_n y_m$$

$$y_{n+m} = x_m y_n + x_n y_m$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.12 ve Teorem 2.2.3' den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.17. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir tamsayı çözümü varsa sonsuz tamsayı çözümü vardır.

Teorem 2.2.12 ve binom formüllerinden yararlanarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 2.2.18. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. O zaman $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n = x_1^n + \sum_{k=1} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} y_1^{2k}\, d^k$$

$$y_n = \sum_{k=1} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k+1} y_1^{2k-1}\, d^{k-1}$$

dir [12].

Teorem 2.2.19. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu taktirde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = 2x_n x_1 - x_{n-1}$$

$$y_{n+1} = 2y_n x_1 - y_{n-1}$$

dir.

İspat. $x_1 + y_1\sqrt{d} = \alpha$ ve $\bar{\alpha} = \beta$ olmak üzere $x_1 - y_1\sqrt{d} = \beta$ olsun. Dolayısıyla $\alpha + \beta = 2x_1$ ve $\alpha\beta = 1$ dir. Ayrıca Teorem 2.2.12' e göre $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ dir. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \alpha^n$$
$$x_n - y_n\sqrt{d} = \beta^n$$

dir. Buradan

$$x_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{d}}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$x_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad y_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{2\sqrt{d}}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} 2x_n x_1 - x_{n-1} &= (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right) - \left(\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2}\right) \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+(\alpha\beta)\beta^{n-1}+(\beta\alpha)\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2} \\ &= x_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} 2y_n x_1 - y_{n-1} &= (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2\sqrt{d}}\right) - \left(\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2\sqrt{d}}\right) \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2\sqrt{d}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+(\alpha\beta)\beta^{n-1}+(\beta\alpha)\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2\sqrt{d}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2\sqrt{d}} \\ &= y_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.20. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu taktirde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n = \frac{1}{2}(x_1 + y_1\sqrt{d})^n + \frac{1}{2}(x_1 - y_1\sqrt{d})^n$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}(x_1 + y_1\sqrt{d})^n - \frac{1}{2\sqrt{d}}(x_1 - y_1\sqrt{d})^n$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Teorem 2.2.12' e göre $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ dır. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n$$

dir. Buradan

$$x_n = \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})^n + (x_1-y_1\sqrt{d})^n}{2}$$

ve

$$y_n = \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})^n - (x_1-y_1\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.21. $x^2 - 6y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini bulalım.

Çizelge 5.1' e göre $\sqrt{6}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı $\alpha = [2, \overline{2,4}]$ dır. Örnek 2.2.8' de $x^2 - 6y^2 = 1$ Pell denkleminin ilk üç pozitif tamsayı çözümünü $\sqrt{6}$' nın sürekli kesir yaklaşımları yardımıyla elde etmiştik. Şimdi ise Teorem 2.2.9 ve Teorem 2.2.12' i kullanarak $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini elde edelim.

$\sqrt{6}$ irrasyonel sayısının periyodu 2 olduğundan Teorem 2.2.9' a göre $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin çözümleri $n \in N$ olmak üzere $(x, y) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$ şeklindedir. O halde eldeki bilgiler ışığında denklemin bazı çözümleri

$n = 1$ için $(x, y) = (p_1, q_1) = (5,2)$

$n = 2$ için $(x, y) = (p_3, q_3) = (49,20)$

$n = 3$ için $(x, y) = (p_5, q_5) = (485,198)$

…

dir. Ayrıca $(x_1, y_1) = (5,2)$ olduğundan Tanım 2.2.5' e göre $5 + 2\sqrt{6}$, denklemimizin temel çözümüdür. Bu yüzden Teorem 2.2.12' e göre $x^2 - 6y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^n$$

formülünden elde edilir.

2.3. $x^2 - dy^2 = -1$ Pell Denklemi

Tanım 2.3.1. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{2.16}$$

Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasından ξ' nin en küçük değerini aldığı (ξ, η) çözümüne (2.16) denkleminin temel çözümü denir.

Teorem 2.3.2. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve N tamsayı olsun. (p, q),

$$x^2 - dy^2 = -1$$

denkleminin bir pozitif çözümü ise $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$' nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

İspat. $p^2 - dq^2 = -1$ olduğundan $p - q\sqrt{d} = \frac{-1}{p+q\sqrt{d}}$ dir. Bu yüzden $\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{-1}{q(p+q\sqrt{d})}$ dir. (p, q) denklemin pozitif bir çözümü olduğundan $p > q$ olduğu görülebilir ve buradan da $p + q\sqrt{d} > 2q$ olduğu görülür. O halde

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{q(2q)} < \frac{1}{2q^2}$$

dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.24' e göre $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

Teorem 2.3.3. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tüm pozitif çözümleri

a) m çift tamsayı ise çözüm yoktur.

b) m tek tamsayı ise $(x_n, y_n) = (p_{(2n-1)m-1}, q_{(2n-1)m-1})$ biçimindedir

[1].

Teorem 2.3.4. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = -1$$

Pell denkleminin

a) m çift ise tamsayı çözümü yoktur.

b) m tek ise temel çözümü $(\xi, \eta) = (p_{m-1}, q_{m-1})$ dir

[2].

Teorem 2.3.5. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{2.17}$$

Pell denklemi çözülebilir olsun. (2.17) denkleminin temel çözümü (ξ_1, η_1) ise

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^2 \tag{2.18}$$

olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) dir [2].

Teorem 2.3.6. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{2.19}$$

ve

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{2.20}$$

denklemleri ele alınsın. (2.19) denkleminin temel çözümü (ξ_1, η_1) ve

$$\xi_n + \eta_n\sqrt{d} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^n \tag{2.21}$$

olmak üzere

a) n pozitif tek tamsayı ise (ξ_n, η_n)' ler, (2.19) denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini verir.

b) n pozitif çift tamsayı ise (ξ_n, η_n)' ler, (2.20) denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini verir.

İspat. $\xi_n + \eta_n\sqrt{d} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^n$ olduğundan

$$\xi_n - \eta_n\sqrt{d} = (\xi_1 - \eta_1\sqrt{d})^n$$

dir. Bu iki denklem çarpılırsa

$$\xi_n^2 - d\eta_n^2 = \xi_1^2 - d\eta_1^2 = (-1)^n$$

elde edilir. Buradan;

a) n tek ise $\xi_n^2 - d\eta_n^2 = -1$ olduğundan (ξ_n, η_n), (2.19) denkleminin bir çözümüdür.

b) n çift ise $\xi_n^2 - d\eta_n^2 = +1$ olduğundan (ξ_n, η_n), (2.20) denkleminin bir çözümüdür.

n çift tamsayı ise Teorem 2.2.12 ve Teorem 2.3.5' den istenilen elde edilir.
Şimdi de n tek tamsayı olsun. $n = 2k - 1$ alalım. O halde (2.21) eşitliğinden

$$\xi_{2k-1} + \eta_{2k-1}\sqrt{d} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^{2k-1} \tag{2.22}$$

dir ve (2.22) eşitliğinin eşleniği alınırsa

$$\xi_{2k-1} - \eta_{2k-1}\sqrt{d} = (\xi_1 - \eta_1\sqrt{d})^{2k-1}$$

bulunur. Şimdi (2.22) formülünden elde edilen ardışık iki çözüm arasında bu formülünden elde edilmeyen bir $u + v\sqrt{d}$ çözümünün olduğunu kabul edelim. O halde

$$(\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^{2k-1} < u + v\sqrt{d} < (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^{2k+1}$$

olacak biçimde $k \geq 1$ vardır. Son denklem $(\xi_1 - \eta_1\sqrt{d})^{2k}$ ile çarpılırsa

$$(\xi_1^2 - d\eta_1^2)^{2k}(\xi_1 + d\eta_1)^{-1} < \left(u + v\sqrt{d}\right)(\xi_1 - \eta_1\sqrt{d})^{2k} < (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^{2k}(\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})(\xi_1 - \eta_1\sqrt{d})^{2k}$$

ve buradan

$$\frac{1}{\xi_1 + \eta_1\sqrt{d}} < \left(u + v\sqrt{d}\right)(\xi_{2k} - \eta_{2k}\sqrt{d}) < \xi_1 + \eta_1\sqrt{d} \tag{2.23}$$

elde edilir. $x = u\xi_{2k} - vd\eta_{2k}$ ve $y = v\xi_{2k} - u\eta_{2k}$ alınırsa

$$x + y\sqrt{d} = \left(u + v\sqrt{d}\right)(\xi_{2k} - \eta_{2k}\sqrt{d}\,) \tag{2.24}$$

ve

$$x - y\sqrt{d} = \left(u - v\sqrt{d}\right)(\xi_{2k} + \eta_{2k}\sqrt{d}) \tag{2.25}$$

olur. (2.24) ve (2.25) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$$x^2 - dy^2 = (u^2 - dv^2)(\xi_{2k}^2 - d\eta_{2k}^2)$$
$$x^2 - dy^2 = -1$$

bulunur. O halde (x, y), $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin bir çözümüdür. (2.24), (2.23) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{\xi_1 + \eta_1\sqrt{d}} < x + y\sqrt{d} < \xi_1 + \eta_1\sqrt{d}$$

bulunur. O halde (x, y) ve (ξ_1, η_1) ikilileri (2.19) denkleminin çözümleridir. Bu ise (ξ_1, η_1) çözümünün (2.19) denkleminin temel çözümü olmasıyla çelişir. Bu yüzden

(2.19) denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri n tek tamsayı olmak üzere (2.21) formülünden elde edilir.

Sonuç 2.3.7. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü (ξ_1, η_1) ise $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\xi_n + \eta_n\sqrt{d} = (\xi_1 + \eta_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

bağıntısı ile elde edilir.

Teorem 2.3.8. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü (a_1, b_1) olsun. $\mu = a_1 + b_1\sqrt{d}$ ve $\bar{\mu} = a_1 - b_1\sqrt{d}$ olmak üzere

$$a_n = \frac{\mu^{2n-1} + \bar{\mu}^{2n-1}}{2} \quad \text{ve} \quad b_n = \frac{\mu^{2n-1} - \bar{\mu}^{2n-1}}{2\sqrt{d}}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü (a_1, b_1) olduğundan Sonuç 2.3.7' den dolayı

$$a_n + b_n\sqrt{d} = (a_1 + b_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

dir. Her iki yanın eşleniği alınırsa

$$a_n - b_n\sqrt{d} = (a_1 - b_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\mu^{2n-1} = (a_1 + b_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

dir ve bu denkleminin eşleniği alınırsa

$$\bar{\mu}^{2n-1} = (a_1 - b_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

olur. Eldeki bilgiler ışığında

$$2a_n = \mu^{2n-1} + \bar{\mu}^{2n-1}$$

ve böylece

$$a_n = \frac{\mu^{2n-1} + \bar{\mu}^{2n-1}}{2}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$2\sqrt{d}b_n = \mu^{2n-1} - \bar{\mu}^{2n-1}$$

$$b_n = \frac{\mu^{2n-1} - \bar{\mu}^{2n-1}}{2\sqrt{d}}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.9. p asal sayı olmak üzere $p \equiv 1\ (mod\ 4)$ ise

$$x^2 - py^2 = -1$$

Pell denkleminin tamsayı çözümü vardır.

İspat. $a^2 - pb^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $a_1 + b_1\sqrt{p}$ olsun. O zaman

$$a_1^2 - pb_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow a_1^2 - 1 = pb_1^2 \qquad (2.26)$$

dir. a_1 çift tamsayı olsun. O halde b_1 tek tamsayı olmalıdır. Dolayısıyla

$$a_1^2 \equiv 0\ (mod 4) \text{ ve } b_1^2 \equiv 1\ (mod 4)$$

dir. O halde (2.26) eşitliğinden

$$p \equiv -1 (mod 4)$$

olur. Bu ise $p \equiv 1\ (mod\ 4)$ olması ile çeliştiğinden dolayı a_1 tek tamsayı ve buradan da b_1 çift tamsayı olmalıdır. O halde $(a_1 - 1, a_1 + 1) = 2$ dir. Böylece (2.26) eşitliğine göre

$$(a_1 - 1)(a_1 + 1) = pb_1^2$$

olduğundan x, y doğal sayılar ve $b_1 = 2xy$ olmak üzere

$$a_1 \mp 1 = 2x^2, a_1 \pm 1 = 2py^2$$

yazılabilir. Son denklemlerin farkı alınırsa

$$x^2 - py^2 = \pm 1$$

elde edilir. Fakat $b_1 > y$ ve $a^2 - pb^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $a_1 + b_1\sqrt{p}$ olduğundan $x^2 - py^2 = 1$ olamaz. O halde $x^2 - py^2 = -1$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.10. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve p asal sayı olsun. d, 4 ile veya $p \equiv 3\ (mod 4)$ şartını sağlayan bir p asal sayısı ile bölünebilirse $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur [2].

Teorem 2.3.11. d'nin $4k + 3$ biçimindeki bir asal böleni varsa $\sqrt{d}$' nin periyod uzunluğu çifttir [1].

Teorem 2.3.12. $d \equiv 1,2\ (mod 4)$ tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ise $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü vardır $\Leftrightarrow$ $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere $x_1 \equiv -1\ (mod\ 2d)$ dir.

İspat. $\Rightarrow$) $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denklemi çözülebilir ve temel çözümü (a_1, b_1) olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) alınsın. O halde Teorem 2.3.5' e göre

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = (a_1 + b_1\sqrt{d})^2 = a_1^2 + db_1^2 + 2\sqrt{d}a_1b_1$$

dir. Ayrıca Teorem 1.1.11' e göre

$$x_1 = a_1^2 + db_1^2$$

dir. $a_1^2 - db_1^2 = -1$ olduğundan

$$x_1 = -1 + 2db_1^2 \equiv -1\ (mod\ 2d\ )$$

dir.

$\Leftarrow$) $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere $x_1 \equiv -1\ (mod\ 2d)$ olsun. O halde $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x_1 = -1 + 2dk$ dır. $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ olduğundan $(-1 + 2dk)^2 - dy_1^2 = 1$ dir ve $d \equiv 1,2\ (mod 4)$ olduğundan da y_1 tamsayısının çift olduğu görülebilir. Bu denklemde $y_2 = y_1/2$ alınırsa

$$dk^2 - k - y_2^2 = 0$$

bulunur. Bu yüzden $k(dk - 1) = y_2^2$ olur. $(k, dk - 1) = 1$ olduğundan dolayı

$$k = r^2 \quad \text{ve} \quad dk - 1 = s^2$$

olacak biçimde r ve s tamsayıları vardır. Buradan

$$dk - 1 = dr^2 - 1 = s^2$$

$$s^2 - dr^2 = -1$$

bulunur. O halde (s, r), $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin bir çözümüdür. Böylece $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denklemi çözülebilirdir.

2.4. $x^2 - dy^2 = N$ Genel Pell Denklemleri

Teorem 2.4.1. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $N \neq 0$ tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = N \qquad (2.27)$$

Pell denklemi çözülebilir olsun. (2.27) denkleminin herhangi bir çözümü $u + v\sqrt{d}$ ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin herhangi bir çözümü $x + y\sqrt{d}$ olsun. O halde

$$u' + v'\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) \qquad (2.28)$$

olmak üzere (u', v'), (2.27) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. (2.28)' e göre

$$u' + v'\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = ux + vyd + (uy + vx)\sqrt{d}$$

dir. O halde Teorem 1.1.11' den

$$u' = ux + vyd \text{ ve } v' = uy + vx$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(u')^2 - d(v')^2 &= (ux + vyd)^2 - d(uy + vx)^2 \\ &= u^2x^2 + 2uxvyd + v^2y^2d^2 - du^2y^2 - 2uyvxd - dv^2x^2 \\ &= u^2(x^2 - dy^2) - dv^2(x^2 - dy^2) \\ &= (u^2 - dv^2)(x^2 - dy^2) \\ &= N.1 \\ &= N\end{aligned}$$

dir. Bu yüzden (u', v'), (2.27) denkleminin bir çözümüdür.

Tanım 2.4.2. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $N \neq 0$ tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = N \qquad (2.29)$$

Pell denklemi çözülebilir olsun. (2.29) denkleminin herhangi iki çözümü $u + v\sqrt{d}$ ve $u' + v'\sqrt{d}$ olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin (2.28) eşitliğini sağlayan bir $x + y\sqrt{d}$ çözümü varsa $u + v\sqrt{d}$ ve $u' + v'\sqrt{d}$ aynı sınıftadır denir. Aynı sınıftaki tüm çözümlerin oluşturduğu kümeye ise çözüm sınıfı denir.

Ayrıca (2.28) eşitliğinden elde edilen $u' + v'\sqrt{d}$ çözümü ile $u + v\sqrt{d}$ çözümüne ilgilidir denir. (2.27) denkleminin bir çözüm sınıfındaki çözümlerin hepsi birbiriyle ilgilidir.

Teorem 2.4.3. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere (2.29) denkleminin herhangi iki çözümü $u + v\sqrt{d}$ ve $u' + v'\sqrt{d}$ olsun.

$$\frac{uu' - vv'd}{N}, \frac{vu' - uv'}{N}$$

sayıları tamsayıdır $\Leftrightarrow$ $u + v\sqrt{d}$ ve $u' + v'\sqrt{d}$ çözümleri ilgilidir.

İspat. $\Leftarrow$) (2.29) denklemini sağlayan herhangi iki ilgili çözüm $u+v\sqrt{d}$ ve $u'+v'\sqrt{d}$ olsun. $x^2-dy^2=1$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü $x+y\sqrt{d}$ olmak üzere

$$u'+v'\sqrt{d}=(u+v\sqrt{d})(x+y\sqrt{d})$$

dir. O halde

$$x+y\sqrt{d}=\frac{u'+v'\sqrt{d}}{u+v\sqrt{d}}=\frac{uu'-vv'd}{u^2-dv^2}+\left(\frac{vu'-uv'}{u^2-dv^2}\right)\sqrt{d}$$
$$=\frac{uu'-vv'd}{N}+\left(\frac{vu'-uv'}{N}\right)\sqrt{d}$$

elde edilir. Teorem 1.1.11' den dolayı

$$x=\frac{uu'-vv'd}{N} \text{ ve } y=\frac{vu'-uv'}{N}$$

yazılabilir. x ve y tamsayılar olduğundan dolayı $\frac{uu'-vv'd}{N}$ ve $\frac{vu'-uv'}{N}$ sayıları da tamsayılardır.

$\Rightarrow$) (2.29) denklemini sağlayan herhangi iki çözüm $u+v\sqrt{d}$ ve $u'+v'\sqrt{d}$ olmak üzere $\frac{uu'-vv'd}{N}$ ve $\frac{vu'-uv'}{N}$ sayıları tamsayı olsun. O halde

$$\frac{uu'-vv'd}{N}+\left(\frac{vu'-uv'}{N}\right)\sqrt{d}=\frac{uu'-vv'd}{u^2-dv^2}+\left(\frac{vu'-uv'}{u^2-dv^2}\right)\sqrt{d}=\frac{u'+v'\sqrt{d}}{u+v\sqrt{d}}$$

dir.

$$\frac{u'+v'\sqrt{d}}{u+v\sqrt{d}}=a+b\sqrt{d}$$

alınsın. (a,b), $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminde yerine yazılırsa denklemin bir çözümü olduğu görülür. Bu yüzden Tanım 2.4.2' e göre $u+v\sqrt{d}$ ve $u'+v'\sqrt{d}$ çözümleri ilgilidir.

Eğer $N=\pm 1$ ise sadece bir çözüm sınıfı olduğu önceki teoremden görülebilir.

Tanım 2.4.4. K bir çözüm sınıfı olsun. $K=\{u_i+v_i\sqrt{d}\}$ alınsın. O zaman $\{u_i-v_i\sqrt{d}\}$ kümesi de $\overline{K}$ ile ifade edilen bir çözüm sınıfıdır ve bu sınıfa K nin eşlenik sınıfı denir. K ve $\overline{K}$ lere birbirlerinin eşlenikleri denir.

Eşlenik sınıflar genel olarak ayrıdır. Ama bazı durumlarda aynı olabilir. Eşlenik sınıfları aynı olan sınıflara belirsiz (ambiguous) sınıflar denir.

Tanım 2.4.5. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = N$$

denkleminin bir $u + v\sqrt{d}$ çözümünün K sınıfındaki bir $u^* + v^*\sqrt{d}$ çözümü;

v^*, K sınıfının çözümlerinin en küçük negatif olmayan değeri olmak üzere

a) Eğer K belirsiz sınıf değilse ozaman u^* sayısı tek türlü belirlidir. Çünkü $-u^* + v^*\sqrt{d}$ çözümü $\overline{K}$ eşlenik sınıfındadır.
b) Eğer K belirsiz sınıf ise $u^* \geq 0$ şartına bağlı olarak u^* tek türlü olarak belirlidir.

Yukarıdaki gibi belirlenen $u^* + v^*\sqrt{d}$ çözümüne K sınıfının temel çözümü denir.

Teorem 2.4.6. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve N tamsayı olmak üzere $|N| < \sqrt{d}$ olsun. Eğer

$$x^2 - dy^2 = N$$

ise $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$' nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

İspat. x ve y aralarında asal pozitif tamsayı olmak üzere $N > 0$ durumunu inceleyelim. $x^2 - dy^2 = N$ olduğundan

$$(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = N$$

yazılabilir. $x + y\sqrt{d} > 0$ olduğundan $x - y\sqrt{d} > 0$ dır. Dolayısıyla $x > y\sqrt{d}$ ve $\frac{x}{y} - \sqrt{d} > 0$ dır. $0 < N < \sqrt{d}$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{x - y\sqrt{d}}{y} = \frac{x^2 - dy^2}{y(x + y\sqrt{d})} < \frac{N}{y(2y\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{2y^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2y^2}$$

elde edilir. O halde

$$0 < \frac{x - y\sqrt{d}}{y} < \frac{1}{2y^2}$$

dir. Teorem 1.2.24' e göre $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

Şimdi de $N < 0$ durumunu inceleyelim. $x^2 - dy^2 = N$ denklemi

$$y^2 - \left(\frac{1}{d}\right)x^2 = -\frac{N}{d}$$

şeklinde düzenlenirse $-\frac{N}{d} > 0$ olduğundan bir önceki duruma benzer olarak $\frac{y}{x}, \frac{1}{\sqrt{d}}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımı olur. Teorem 1.2.13' den $\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}$, $\sqrt{d} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{d}}}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

Teorem 2.4.7. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Eğer

$$x^2 - dy^2 = N$$

Pell denkleminin bir K sınıfının temel çözümü $u + v\sqrt{d}$ ve

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Pell denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{d}$ ise

$$0 \leq v \leq \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1+1)}}\sqrt{N} \tag{2.30}$$

ve

$$0 < |u| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + 1)N} \tag{2.31}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (2.30) ve (2.31) eşitsizlikleri bir K sınıfı için doğru ise onun eşlenik sınıfı olan $\overline{K}$ için de doğrudur. Bu yüzden u nun pozitif olduğunu kabul etmek yeterlidir. Hipotezden $u^2 - dv^2 = N$ ve $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ dir. O halde

$$ux_1 - dvy_1 = ux_1 - \sqrt{(u^2 - N)(x_1^2 - 1)} > 0 \tag{2.32}$$

dır. $u + v\sqrt{d}$ nin çözüm sınıfındaki

$$(u + v\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = ux_1 - dvy_1 + (vx_1 - uy_1)\sqrt{d}$$

çözümü ele alınsın. $u + v\sqrt{d}$ sınıfın temel çözümü olduğundan ve (2.32)' e gore $ux_1 - dvy_1$ pozitif olduğundan

$$ux_1 - dvy_1 \geq u$$

$$\Rightarrow u(x_1 - 1) \geq dvy_1$$

$$\Rightarrow u^2(x_1 - 1)^2 \geq d^2v^2y_1^2 = (u^2 - N)(x_1^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \geq 1 - \frac{N}{u^2}$$

$$\Rightarrow\ 1-\tfrac{2}{x_1+1} \geq 1-\tfrac{N}{u^2}$$

$$\Rightarrow u^2 \leq \tfrac{1}{2}(x_1+1)N$$

dır. Bu ise (2.31) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Benzer şekilde (2.31) eşitsizliğinden de (2.30) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir.

Teorem 2.4.8. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Eğer

$$x^2 - dy^2 = -N$$

Pell denkleminin bir K sınıfının temel çözümü $u + v\sqrt{d}$ ve

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Pell denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{d}$ ise

$$0 < v \leq \tfrac{y_1}{\sqrt{2(x_1-1)}}\sqrt{N} \tag{2.33}$$

ve

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}(x_1-1)N} \tag{2.34}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (2.33) ve (2.34) eşitsizlikleri bir K sınıfı için doğru ise onun eşlenik sınıfı olan $\overline{K}$ için de doğrudur. Bu yüzden u nun pozitif olduğunu kabul etmek yeterlidir.

$$(x_1 v)^2 = \left(y_1^2 + \frac{1}{d}\right)(u^2+N) > y_1^2 u^2$$

olduğundan

$$vx_1 - uy_1 > 0 \tag{2.35}$$

dır. $u + v\sqrt{d}$ nın çözüm sınıfındaki

$$(u+v\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = ux_1 - dvy_1 + (vx_1 - uy_1)\sqrt{d}$$

çözümünü ele alalım. $u + v\sqrt{d}$ sınıfın temel çözümü olduğundan ve (2.35)' e göre $vx_1 - uy_1$ pozitif olduğundan

$$vx_1 - uy_1 \geq v$$

$$\Rightarrow v(x_1 - 1) \geq uy_1$$

$$\Rightarrow\ dv^2(x_1-1)^2 \geq du^2y_1^2 = u^2(x_1^2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} \leq 1 + \frac{N}{u^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tfrac{2}{x_1-1} \leq 1 + \tfrac{N}{u^2}$$

$$\Rightarrow u^2 \leq \frac{1}{2}(x_1 - 1)N$$

dir. Bu ise (2.34) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Benzer şekilde (2.34) eşitsizliğinden (2.33) eşitsizliğinin sağlandığı da gösterilebilir.

Örnek 2.4.9. $x^2 - 13y^2 = 31$ Pell denkleminin tamsayı çözümünün olup olmadığını araştıralım.

Öncelikle $\sqrt{13}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımını bulmalıyız.

$$a_0 = [\![\sqrt{13}]\!] = 3,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$$

$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{13}+3}{4}\right]\!\!\right] = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+3}{4}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$$

$$a_2 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{13}+1}{3}\right]\!\!\right] = 1,\ \alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+1}{3}-1} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$$

$$a_3 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right]\!\!\right] = 1,\ \alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+2}{3}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4}$$

$$a_4 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right]\!\!\right] = 1,\ \alpha_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+1}{4}-1} = \sqrt{13}+3$$

$$a_5 = [\![\sqrt{13}+3]\!] = 6 = 2a_0$$

olduğundan dolayı Teorem 1.2.19' a göre

$$\alpha = [3, \overline{1,1,1,1,6}]$$

bulunur. O halde $\sqrt{13}$ sayısının periyodunun 5 olduğu görülür. Dolayısıyla Sonuç 2.2.10' a göre $x^2 - 13y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (p_9, q_9)$ dır. O halde (1.2) ve (1.3) bağıntıları yardımıyla

$p_0 = a_0 = 3$	$q_0 = 1$
$p_1 = a_1 p_0 + 1$	$q_1 = a_1$
$p_1 = 1.3 + 1 = 4$	$q_1 = 1$
$p_2 = a_2 p_1 + p_0$	$q_2 = a_2 q_1 + 1$
$p_2 = 1.4 + 3 = 7$	$q_2 = 1.1 + 1 = 2$
$p_3 = a_3 p_2 + p_1$	$q_3 = a_3 q_2 + q_1$
$p_3 = 1.7 + 4 = 11$	$q_3 = 1.2 + 1 = 3$
$p_4 = 1.11 + 7 = 18$	$q_4 = 1.3 + 2 = 5$

$p_5 = 6.18 + 11 = 119 \qquad q_5 = 6.5 + 3 = 33$

$p_6 = 1.119 + 18 = 137 \qquad q_6 = 1.33 + 5 = 38$

$p_7 = 1.137 + 119 = 256 \qquad q_7 = 1.38 + 33 = 71$

$p_8 = 1.256 + 137 = 393 \qquad q_8 = 1.71 + 38 = 109$

$p_9 = 1.493 + 256 = 649 \qquad q_9 = 1.109 + 71 = 180$

dir. Eldeki bilgiler ışığında $(x_1, y_1) = (p_9, q_9) = (649,180)$ denklemin temel çözümüdür. Teorem 2.2.12' den denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{6} = (649 + 180\sqrt{6})^n$$

formülü ile elde edilir. $x^2 - 13y^2 = 31$ denkleminin bir K sınıfının temel çözümü (u, v) ise (2.30) ve (2.31)' den

$$0 < v \leq \frac{180}{\sqrt{2(649+1)}}\sqrt{31} \cong 27$$

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(649 + 1)31} \cong 100.3$$

yazılabilir. Dolayısıyla $u = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm100$ ve $v = 1,2,3, \ldots, 27$ dir. $x^2 - 13y^2 = 31$ denkleminde bulunan u ve v değerleri yerine yazılırsa $u^2 - 13v^2 = 31$ denkleminin tamsayı çözümünün olmadığı görülür. Sonuç olarak $x^2 - 13y^2 = 31$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Teorem 2.4.10. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denkleminin bir K sınıfının temel çözümü $u_1 + v_1\sqrt{d}$ ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{d}$ olsun. O halde $x^2 - dy^2 = N$ Pell denkleminin bir K sınıfına ait tüm pozitif tamsayı çözümleri $u_n + v_n\sqrt{d}$ olmak üzere

$$u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{d} = \left(u_1 + v_1\sqrt{d}\right)(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

formülü ile bulunur [12].

Örnek 2.4.11. $x^2 - 6y^2 = -69$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini bulalım.

$x^2 - dy^2 = N$ denklemlerinin çözümleri $u_n + v_n\sqrt{d}$ ile gösterilsin ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{d}$ olsun. (2.33) ve (2.34) eşitsizlikleri göz önüne alınmalıdır. Örnek 2.2.8' den $x^2 - 6y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünün $x_1 + y_1\sqrt{d}$= $5 + 2\sqrt{6}$ olduğu görülebilir. O halde $x_1 = 5$ ve $y_1 = 2$ olduğundan (2.33) ve (2.34) eşitsizliklerinden

$$0 < v \leq \frac{2}{\sqrt{2(5-1)}}\sqrt{69} = \sqrt{34.5}$$

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(5-1)69} = \sqrt{138}$$

elde edilir. Dolayısıyla $u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 11$ ve $v = 1,2,3,4,5$ dir. Bu u ve v değerleri $x^2 - 6y^2 = -69$ denklemin de yerine koyulursa çözümlerin $9 + 5\sqrt{6}$ ve $-9 + 5\sqrt{6}$ olduğu görülür. Şimdi de $u + v\sqrt{d} = 9 + 5\sqrt{6}$ ve $u' + v'\sqrt{d} = -9 + 5\sqrt{6}$ alalım ve iki çözümün ilgili olup olmadığını Teorem 2.4.3' e göre inceleyelim.

$$\frac{uu\prime - vv\prime d}{N} = \frac{9(-9) - 5.5.6}{-69} = 1$$

olduğundan $9 + 5\sqrt{6}$ ve $-9 + 5\sqrt{6}$ çözümleri ilgilidir. O halde bu iki çözümün çözüm sınıfları aynıdır. Bu yüzden Tanım 2.4.5' e göre temel çözüm $9 + 5\sqrt{6}$ dir ve denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri Teorem 2.4.10' e göre

$$u_n + v_n\sqrt{6} = (9 + 5\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n$$

formülü ile bulunur.

Teorem 2.4.12 (Brahmagupta Teoremi). d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = M$ genel Pell denkleminin bir çözümü (x_1, y_1) ve $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denkleminin bir çözümü (x_2, y_2) ise

$$r + s\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)(x_2 + y_2\sqrt{d}) \tag{2.36}$$

olmak üzere (r, s), $x^2 - dy^2 = MN$ genel Pell denkleminin bir çözümüdür.

İspat. Hipotezden $x_1^2 - dy_1^2 = M$ ve $x_2^2 - dy_2^2 = N$ dir. (2.36) den

$$\begin{aligned} r + s\sqrt{d} &= \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)(x_2 + y_2\sqrt{d}) \\ &= x_1x_2 + \sqrt{d}(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2d \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 1.1.11' e göre

$$r = x_1x_2 + dy_1y_2$$

ve

$$s = x_1y_2 + y_1x_2$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} r^2 - ds^2 &= (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + 2dx_1x_2y_2y_1 + y_2^2y_1^2d^2 - dx_1^2y_2^2 - 2dx_2x_1y_2y_1 - y_2^2x_2^2d^2 \\ &= x_1^2(x_2^2 - dy_2^2) - dy_1^2(x_2^2 - dy_2^2) \\ &= (x_2^2 - dy_2^2)(x_1^2 - dy_1^2) = NM \end{aligned}$$

olduğundan dolayı (r,s) , $x^2 - dy^2 = MN$ genel Pell denkleminin bir çözümüdür.

Brahmagupta Teoremi'nin aksi her zaman doğru değildir. Örneğin, $x^2 - 37y^2 = 33$ denklemi çözülebilir olduğunda $x^2 - 37y^2 = 11$ ve $x^2 - 37y^2 = 3$ denklemleri de çözülebilirmiş yanılgısına düşülebiliyor. Ama $x^2 - 37y^2 = 3$ ve $x^2 - 37y^2 = 11$ denklemleri çözülemezdir (Daha fazla örnek için Çizelge 5.3 incelenebilir).

Sonuç 2.4.13. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise

$$a_n + b_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

olmak üzere (a_n, b_n), $x^2 - dy^2 = N^n$ Pell denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 2.4.14. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = N$ denklemi çözülebilir ve $\sqrt{d}$ nin periyodu tek ise $x^2 - dy^2 = -N$ denklemi çözülebilirdir.

İspat. $\sqrt{d}$ nin periyodu tek ise $x^2 - dy^2 = -1$ denklemi çözülebilirdir. $x^2 - dy^2 = N$ denklemi de çözülebilir olduğundan Brahmagupta Teoremi'ne göre $x^2 - dy^2 = -N$ denklemi de çözülebilirdir.

Teorem 2.4.15. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $q, 4k + 3$ biçimindeki bir asal sayı olmak üzere $q|d$ olsun. $(N, d) = 1$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin tamsayı çözümü varsa $x^2 - dy^2 = -N$ denklemi çözülemezdir [1].

Teorem 2.4.16. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. N tamkare ise $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denklemi çözülebilirdir.

İspat. N tamkare olsun. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $N = k^2$ alınsın. Ayrıca Teorem 2.2.3' den $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir tamsayı çözümü vardır. $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin herhangi bir çözümü (u, v) olsun. O halde $u^2 - dv^2 = 1$ dir. Denklemin her iki yanı k^2 ile çarpılırsa

$$k^2u^2 - dk^2v^2 = k^2$$
$$(ku)^2 - d(kv)^2 = k^2$$

elde edilir. O halde (ku, kv), $x^2 - dy^2 = k^2$ Pell denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denklemi çözülebilirdir.

Teorem 2.4.17. $x^2 \equiv N \ (mod\ d)$ olacak şekilde bir x doğal sayısı yok ise $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur [27].

Lemma 2.4.18 (Bhaskara). d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = N$ genel Pell denkleminin herhangi bir çözümü (x_0, y_0) ise her m tamsayısı için

$$(mx_0 + dy_0, my_0 + x_0),$$

$x^2 - dy^2 = N(m^2 - d)$ genel Pell denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca eğer $(N, y_0) = 1$ ve $l \in \mathbb{Z}$ için $Nl = my_0 + x_0$ ise

$$N|(m^2 - d) \text{ ve } N|(mx_0 + dy_0)$$

dır.

İspat. $(mx_0 + dy_0)^2 = m^2x_0^2 + 2mdx_0y_0 + d^2y_0^2$

$(my_0 + x_0)^2 = m^2y_0^2 + 2mx_0y_0 + x_0^2$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}(mx_0 + dy_0)^2 - d(my_0 + x_0)^2 &= \\ &= m^2x_0^2 + 2mdx_0y_0 + d^2y_0^2 - dm^2y_0^2 - 2dmx_0y_0 - dx_0^2 \\ &= (m^2 - d)x_0^2 - d(m^2 - d)y_0^2 \\ &= (m^2 - d)(x_0^2 - dy_0^2) \\ &= N(m^2 - d)\end{aligned}$$

dir. Yani, $(mx_0 + dy_0, my_0 + x_0), x^2 - dy^2 = N(m^2 - d)$ genel Pell denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi de $l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $Nl = my_0 + x_0$ ve $(N, y_0) = 1$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} N\big(1 - l(x_0 - my_0)\big) &= N - Nl(x_0 - my_0) \\ &= N - (my_0 + x_0)\,(x_0 - my_0) \\ &= N - x_0^2 + m^2 y_0^2 \\ &= m^2 y_0^2 - dy_0^2 \\ &= y_0^2(m^2 - d) \end{aligned}$$

dir. O halde $N|(m^2 - d)y_0^2$ dir. $(N, y_0) = 1$ olduğundan $N|(m^2 - d)$ dir. Ayrıca $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $Nr = (m^2 - d)$ dir.

Şimdi de $N|(mx_0 + dy_0)$ olduğunu gösterelim. Açık olarak

$$\begin{aligned} N(ml - ry_0) &= Nml - Nry_0 \\ &= (my_0 + x_0)m - (m^2 - d)y_0 \\ &= m^2 y_0 + x_0 m - m^2 y_0 + dy_0 \\ &= mx_0 + dy_0 \end{aligned}$$

dır. $N(ml - ry_0) = mx_0 + dy_0$ olduğundan $N|(mx_0 + dy_0)$ elde edilir.

Teorem 2.4.19 (Bhaskara Metodu ile Pell Denklemlerinin Çözümü).

p asal sayı olmak üzere $x^2 - py^2 = 1$ Pell denkleminin çözümü bulunurken; a, b tamsayıları $a^2 - pb^2 = k$ ve $(k, b) = 1$ olacak şekilde seçilir. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için Bhaskara'nın lemmasına göre

$$(ma + pb)^2 - p(mb + a)^2 = k(m^2 - p)$$

olduğu göz önüne alınsın. Bu son denklem $\frac{1}{k^2}$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{ma+pb}{k}\right)^2 - p\left(\frac{mb+a}{k}\right)^2 = \frac{m^2-p}{k} \tag{2.37}$$

elde edilir. Pozitif m tamsayısı, $k|(mb + a)$ şartını sağlayacak ve $\left|\frac{m^2-p}{k}\right|$ tamsayısını mümkün olduğu kadar küçük yapacak şekilde seçilsin. Böylece Bhaskara'nın lemmasına göre (2.37) denklemi genel Pell denklemi şeklinde olur. Eğer $\frac{m^2-p}{k} = 1$ ise çözüm bulunmuş olur. Eğer $\frac{m^2-p}{k} \neq 1$ ise $a' = \frac{ma+pb}{k}$, $b' = \frac{mb+a}{k}$ ve $k' = \frac{m^2-p}{k}$ alınır. Buradan

$$(a')^2 - p(b')^2 = k' \tag{2.38}$$

bulunur. Ayrıca $(k', b') = 1$ olur ve benzer şekilde Bhaskara'nın metoduna devam edilir. (2.38) denklemi $\frac{1}{(k')^2}$ ile çarpılırak

$$\left(\frac{m'a'+p'b'}{k'}\right)^2 - p\left(\frac{m'b'+a'}{k'}\right)^2 = \frac{(m')^2-p}{k'} \tag{2.39}$$

bulunur. Herhangi bir pozitif m tamsayısı için pozitif m' tamsayısını $k'|(m'b'+a')$ şartını sağlayacak ve $\left|\frac{(m')^2-p}{k'}\right|$ tamsayısını mümkün olduğu kadar küçük yapacak şekilde seçilsin. Böylece Bhaskara'nın lemmasına göre (2.39) denklemi genel Pell denklemi şeklinde olur. Eğer $\frac{(m')^2-p}{k'} = 1$ ise çözüm bulunmuş olur. Eğer $\frac{(m')^2-p}{k'} \neq 1$ ise Bhaskara'nın metoduna $\frac{(m')^2-p}{k'} = 1$ olana kadar devam ettirilerek istenilen sonuca ulaşılır [19].

Örnek 2.4.20. $x^2 - 7y^2 = 2$ denkleminin temel çözümünün (3,1) olmasından yararlanarak $x^2 - 7y^2 = 1$ Pell denkleminin çözümlerini Bhaskara'nın metodu yardımı ile elde edelim.

m pozitif bir tamsayı olmak üzere Bhaskara'nın metoduna göre

$$\left(\frac{3m+7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{m+3}{2}\right)^2 = \frac{m^2-7}{2} \tag{2.40}$$

dir. $2|m+3$ şartını sağlayacak ve $\left|\frac{m^2-7}{2}\right|$ sayısını en küçük tamsayı yapacak şekildeki pozitif tamsayı $m = 3$ olur. O halde $m = 3$ tamsayısı (2.40) denkleminde yerine yazılırsa

$$8^2 - 7.3^2 = 1$$

elde edilir. Böylece $x^2 - 7y^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümü $(8,3)$ bulunur.

Örnek 2.4.21. $x^2 - 11y^2 = 5$ denkleminin temel çözümünün (4,1) olmasından yararlanarak $x^2 - 11y^2 = 1$ Pell denkleminin çözümlerini Bhaskara'nın metodu yardımı ile elde edelim.

m pozitif tamsayı olmak üzere Bhaskara'nın metoduna göre

$$\left(\frac{4m+11}{5}\right)^2 - 11\left(\frac{4+m}{5}\right)^2 = \frac{m^2-11}{5} \tag{2.41}$$

dir. $5|m+4$ şartını sağlayacak ve $\left|\frac{m^2-11}{5}\right|$ sayısını en küçük tamsayı yapacak şekildeki sayı $m=1$ olur. O halde $m=1$ tamsayısı için (2.41) denkleminde yerine yazılırsa

$$3^2-11.1^2=-2$$

elde edilir. $\left|\frac{m^2-11}{5}\right|=2$ olduğundan algoritmaya devam edilir. m' pozitif bir tamsayı olmak üzere Bhaskara'nın lemmasından

$$\left(\frac{3m'+11}{-2}\right)^2-11\left(\frac{3+m'}{-2}\right)^2=\frac{(m')^2-11}{-2} \tag{2.42}$$

dir. $2|m'+3$ şartını sağlayacak ve $\left|\frac{(m')^2-11}{-2}\right|$ sayısını en küçük tamsayı yapacak şekildeki pozitif tamsayıyı $m'=3$ seçelim. O halde $m'=3$ tamsayı (2.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$10^2-11.3^2=1$$

elde edilir. Böylece $x^2-11y^2=1$ Pell denkleminin bir çözümü $(10,3)$ bulunur.

Teorem 2.4.22. p asal sayı ise $x^2-dy^2=\pm p$ Pell denkleminin sırasıyla (2.30), (2.31) ya da (2.33), (2.34) eşitsizliklerini sağlayan en fazla bir $u+v\sqrt{d}$ çözümü vardır. Ayrıca $x^2-dy^2=\pm p$ denklemi çözülebilir ise

a) $p|2d$ ise $x^2-dy^2=\pm p$ denkleminin 1 çözüm sınıfı vardır.

b) $p\nmid 2d$ ise $x^2-dy^2=\pm p$ denkleminin 2 çözüm sınıfı vardır

[12].

Teorem 2.4.23. p asal sayı, u ve v doğal sayılar olmak üzere

a) $p\equiv\pm1\ (mod\ 8)$ ve $u^2-2v^2=p$ ise $u<\sqrt{2p}$ ve $v<\sqrt{\frac{1}{2}p}$ dir.

b) $p\equiv\pm1\ (mod\ 8)$ ve $u^2-2v^2=-p$ ise $u<\sqrt{p}$ ve $v<\sqrt{p}$ dir.

c) $p\equiv1\ (mod\ 12)$ ve $u^2-3v^2=p$ ise $u<\sqrt{\frac{1}{2}p}$ ve $v<\sqrt{\frac{1}{6}p}$ dir.

d) $p \equiv -1\ (mod\ 12)$ ve $u^2 - 3v^2 = -p$ ise $u < \sqrt{\frac{1}{2}p}$ ve $v < \sqrt{\frac{1}{2}p}$ dir

[16].

Örnek 2.4.24. $u^2 - 3v^2 = -11$ denkleminin varsa pozitif tamsayı çözümlerini bulalım.

$u^2 - 3v^2 = -11$ ve $p \equiv 11 \equiv -1\ (mod\ 12)$ olduğundan dolayı Teorem 2.4.23' e göre $u < \sqrt{\frac{11}{2}}$ ve $v < \sqrt{\frac{11}{2}}$ yazılabilir. O halde $u = 0,1,2$ ve $v = 0,1,2$ dir. Bu değerler $u^2 - 3v^2 = -11$ denkleminde yerine yazılırsa $u = 1$ ve $v = 2$ için denklemin sağlandığı görülür. O halde denklemin temel çözümü $(1,2)$ dir.

2.5. Sayısal Örnekler

Örnek 2.5.1. $m > 1$, $d = m^2 - 2$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (m^2 - 1, m)$ dir.

Çözüm. Örnek 1.3.6' da $\sqrt{m^2 - 2} = \left[m - 1, \overline{1, m - 2, 1, 2(m - 1)}\right]$ olduğu gösterildi. O halde $\sqrt{m^2 - 2}$ nin periyodu 4 dir. Dolayısıyla Sonuç 2.2.10' a göre temel çözüm (p_3, q_3) dir.

$$\frac{p_3}{q_3} = (m-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(m-2) + \frac{1}{1}}}$$

$$= (m-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(m-1)}}$$

$$= (m-1) + \frac{1}{\frac{m}{(m-1)}} = m - 1 + \frac{m-1}{m}$$

$$= \frac{m^2 - 1}{m}$$

olduğundan dolayı $p_3 = m^2 - 1$ ve $q_3 = m$, yani $(x_1, y_1) = (m^2 - 1, m)$ dir.

Örnek 2.5.2. $d = a^2b^2 + 2b$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (a^2b + 1, a)$ dır.

Çözüm. Örnek 1.3.2' de $\sqrt{a^2b^2 + 2b} = [ab, \overline{a, 2ab}]$ olduğu gösterildi. Dolayısıyla $\sqrt{a^2b^2 + 2b}$ nin periyodu 2 dir. O halde Sonuç 2.2.10' a göre temel çözüm (p_1, q_1) dir.

$$\frac{p_1}{q_1} = ab + \frac{1}{a} = \frac{a^2b + 1}{a}$$

olduğundan temel çözüm $(x_1, y_1) = (a^2b + 1, a)$ olur.

Örnek 2.5.3. $d = a^2b^2 + b$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (2a^2b + 1{,}2a)$ dır.

Çözüm. Örnek 1.3.3' de $\sqrt{a^2b^2 + b} = [ab, \overline{2a, 2ab}]$ olduğu gösterildi. Dolayısıyla $\sqrt{a^2b^2 + b}$ nin periyodu 2 dir. O halde Sonuç 2.2.10' a göre temel çözüm (p_1, q_1) dir.

$$\frac{p_1}{q_1} = ab + \frac{1}{2a} = \frac{2a^2b + 1}{2a}$$

olduğundan temel çözüm $(x_1, y_1) = (2a^2b + 1{,}2a)$ dir.

Örnek 2.5.4. $d = m^2 + m$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (2m + 1{,}2)$ dir.

Çözüm. Örnek 1.3.4' de $\sqrt{m^2 + m} = [m, \overline{2{,}2m}]$ olduğu gösterildi. Dolayısıyla $\sqrt{m^2 + m}$ nin periyodu 2 dir. O halde Sonuç 2.2.10' a göre temel çözüm (p_1, q_1) dir.

$$\frac{p_1}{q_1} = m + \frac{1}{2} = \frac{2m + 1}{2}$$

olduğundan temel çözüm $(x_1, y_1) = (2m + 1{,}2)$ dir.

Örnek 2.5.5. $d = m^2 - m$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (2m - 1{,}2)$ dir.

Çözüm. Örnek 1.3.5' de $\sqrt{m^2-m} = \left[m-1, \overline{2, 2(m-1)}\right]$ olduğu gösterildi. Dolayısıyla $\sqrt{m^2-m}$ nin periyodu 2 dir. O halde Sonuç 2.2.10' a göre temel çözüm (p_1, q_1) dir. Dolayısıyla

$$\frac{p_1}{q_1} = m - 1 + \frac{1}{2} = \frac{2m-1}{2}$$

olduğundan temel çözüm $(x_1, y_1) = (2m-1, 2)$ dir.

Örnek 2.5.6. $m > 1$, $d = m^2 + 2$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (m^2+1, m)$ dir.

Çözüm. Örnek 1.3.7' de $\sqrt{m^2+2} = [m, \overline{m, 2m}]$ olduğu gösterildi. Dolayısıyla $\sqrt{m^2+2}$ nin periyodu 4 dir. O halde Sonuç 2.2.10' dan dolayı temel çözüm (p_1, q_1) dir.

$$\frac{p_1}{q_1} = m + \frac{1}{m} = \frac{m^2-1}{m}$$

olduğundan $(x_1, y_1) = (m^2-1, m)$ elde edilir.

Örnek 2.5.7. $d = m^2 \pm m, m^2 \pm 2m, a^2b^2 + 2b, a^2b^2 + b$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Çözüm. Çizelge 5.4' den $d = m^2 \pm m, m^2 \pm 2m, a^2b^2 + 2b, a^2b^2 + b$ olmak üzere $\sqrt{d}$ sayısının periyotlarının çift olduğu görülebilir. O halde Teorem 2.3.4' e göre $d = m^2 \pm m, m^2 \pm 2m, a^2b^2 + 2b, a^2b^2 + b$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denklemin tamsayı çözümü yoktur.

BÖLÜM 3. $x^2 - dy^2 = 4$ ve $x^2 - dy^2 = -4$ PELL DENKLEMLERİ

d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm 4 \tag{3.1}$$

Pell denklemleri göz önüne alınsın. x ve y tamsayıları (3.1) denklemini sağlıyorsa (3.1) denkleminin tamsayı çözümleri $x + y\sqrt{d}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1. (3.1) denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri arasından x_1 nin en küçük tamsayı değerini aldığı bir $x_1 + y_1\sqrt{d}$ çözümü vardır. Bu çözüme (3.1) denkleminin temel çözümü denir.

Teorem 3.2. a) $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $x' + y'\sqrt{d}$ ve $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{d}$ olsun.

1) $d \equiv 1\ (mod8),\ d \equiv 2\ (mod4),\ d \equiv 3\ (mod4)$ ise $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü

$$2x' + 2y'\sqrt{d}$$

dir.

2) $d \equiv 5\ (mod8)$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tek tamsayı çözümleri var ise $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü

$$\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^3 = x' + y'\sqrt{d}$$

bağıntısı ile bulunur. Eğer $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin sadece çift tamsayı çözümleri var ise bu denklemin temel çözümü

$$2x' + 2y'\sqrt{d}$$

dir.

3) $d \equiv 0\ (mod4)$ ise $x^2 - \frac{d}{4}y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $x^* + y^*\sqrt{\frac{d}{4}}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü

$$2x^* + y^*\sqrt{d}$$

dir. Eğer y^* çift tamsayı ise $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü

$$x^* + \frac{y^*}{2}\sqrt{d}$$

dir ve $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü ise $2x' + 2y'\sqrt{d}$ dir [17].

b) $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü $x' + y'\sqrt{d}$ ve $x^2 - dy^2 = -4$ denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{d}$ olsun.

1) $d \equiv 2\ (mod4), d \equiv 3\ (mod4)$ ise $x^2 - dy^2 = -4$ denkleminin temel çözümü

$$2x' + 2y'\sqrt{d}$$

dir.

2) $d \equiv 0\ (mod4)$ ise $x^2 - \frac{d}{4}y^2 = -1$ denkleminin temel çözümü $x^* + y^*\sqrt{\frac{d}{4}}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = -4$ denkleminin temel çözümü

$$2x^* + y^*\sqrt{d}$$

dir [4].

Örnek 3.3. $x^2 - 6y^2 = 4$ denkleminin temel çözümünü bulalım.
Örnek 2.2.8' den $x^2 - 6y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(5,2)$ dir. $d \equiv 2\ (mod\ 4)$ olduğundan Teorem 3.2' den $x^2 - 6y^2 = 4$ denkleminin temel çözümü $10 + 4\sqrt{6}$ dir.

Teorem 3.4. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $x^2 - dy^2 = 4$ denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = 2\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

formülü ile elde edilir [15].

Teorem 3.5. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $x^2 - dy^2 = 4$ denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_1 x_n + y_1 y_n d)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_1 y_n + y_1 x_n)$$

bağıntısını sağlar.

İspat. Teorem 3.4' den dolayı $x_n + y_n\sqrt{d} = 2\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}\right)^n$ ve benzer olarak

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} = 2\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^{n+1}$$

yazılabilir. O halde eldeki bilgiler ışığında

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} &= 2\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}\right)^n \left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x_n+y_n\sqrt{d}}{2}\right)\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}\right) \\ &= \frac{(x_1x_n + y_1y_nd) + (x_1y_n + y_1x_n)\sqrt{d}}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 1.1.11' den ise

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_1x_n + y_1y_nd) \quad \text{ve} \quad y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_1y_n + y_1x_n)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.6. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere $x^2 - dy^2 = 4$ denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $x_0 = 2, y_0 = 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = x_1x_n - x_{n-1}$$

$$y_{n+1} = x_1y_n - y_{n-1}$$

bağıntısını sağlar.

İspat. $\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}=\alpha$ ve $\bar{\alpha}=\beta$ olmak üzere $\frac{x_1-y_1\sqrt{d}}{2}=\beta$ olsun. Buradan $\alpha+\beta=x_1$ ve $\alpha\beta=1$ dir. Ayrıca Teorem 3.4' e göre $x_n+y_n\sqrt{d}=2\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}\right)^n$ dır. O halde

$$x_n+y_n\sqrt{d}=2\alpha^n \quad \text{ve} \quad x_n-y_n\sqrt{d}=2\beta^n$$

dir. Buradan

$$x_n=\alpha^n+\beta^n \quad \text{ve} \quad y_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{d}}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$x_{n+1}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1} \ \text{ve} \ y_{n+1}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{d}}$$

dir. O halde eldeki bilgiler ışığında

$$\begin{aligned} x_nx_1-x_{n-1} &= (\alpha^n+\beta^n)(\alpha+\beta)-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) \\ &= \alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1} \\ &= \alpha^{n+1}+(\alpha\beta)\beta^{n-1}+(\beta\alpha)\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1} \\ &= \alpha^{n+1}+\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1} \\ &= x_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} y_nx_1-y_{n-1} &= \left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{\sqrt{d}}\right)(\alpha+\beta)-\left(\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{\sqrt{d}}\right) \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{d}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+(\alpha\beta)\beta^{n-1}+(\beta\alpha)\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{d}} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}+\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{d}}=y_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2-dy^2=-4$ denkleminin temel çözümü (x_1,y_1) olmak üzere

$$x_n+y_n\sqrt{d}=2\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{2}\right)^n \tag{3.2}$$

olsun. O halde

a) n tek ise (x_n,y_n) ikilileri $x^2-dy^2=-4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini verir.

b) n çift ise (x_n, y_n) ikilileri $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini verir [15].

Teorem 3.7' den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.8. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = -4$ denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = 2\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^{2n-1}$$

formülü ile bulunur.

Örnek 3.9. $x^2 - 12y^2 = 4$ denkleminin temel çözümünü ve tüm pozitif tamsayı çözümlerini bulalım.

$d \equiv 0\ (mod\ 4)$ olduğundan Teorem 3.2' e göre $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünden yararlanmalıyız. $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünün $(2,1)$ olduğu açıktır. O halde Teorem 3.2' den $x^2 - 12y^2 = 4$ denkleminin temel çözümü $4 + \sqrt{12}$ dir ve Teorem 3.4' den $x^2 - 12y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{12} = 2\left(\frac{4+\sqrt{12}}{2}\right)^n$$

formülü ile elde edilir.

Teorem 3.10. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Eğer a ve b doğal sayıları

$$a > b^2 - 2 \tag{3.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ve $a + b\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin bir çözümü ise $a + b\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 4$ denklemin temel çözümüdür.

İspat. $b = 1$ için $a + 1\sqrt{d}$' nin $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü olduğu açıktır.

$b > 1$ için (3.3) eşitsizliği sağlansın. $x_1 + y_1\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin temel çözümü olmak üzere $1 \leq y_1 < b$ olsun. O zaman

$$a^2 - db^2 = x_1^2 - dy_1^2 = 4$$
$$d = \frac{x_1^2 - 4}{y_1^2} = \frac{a^2 - 4}{b^2}$$

ve

$$x_1^2 b^2 - y_1^2 a^2 = 4(b^2 - y_1^2) > 0$$
$$m = b^2 - y_1^2 = \left(\frac{x_1 b + y_1 a}{2}\right)\left(\frac{x_1 b - y_1 a}{2}\right)$$

dır. Ayrıca $x_1 b - y_1 a$ ve $x_1 b + y_1 a$ tamsayılarının çift tamsayı olduğunu görmek kolaydır. Eğer

$$m_1 = \frac{x_1 b + y_1 a}{2}\ ,\ m_2 = \frac{x_1 b - y_1 a}{2}$$

olarak alınırsa m_1 ve m_2 tamsayı olur. O halde elde edilen bilgiler ışığında

$$a = \frac{m_1 - m_2}{y_1} \leq \frac{m-1}{y_1} = \frac{b^2 - {y_1}^2 - 1}{y_1} \leq b^2 - {y_1}^2 - 1 \leq b^2 - 2$$

bulunur. Ama bu durum (3.3) eşitsizliği ile çelişir. Bu yüzden $b = y_1$ olmalıdır. Böylece istenilen elde edilir.

Teorem 3.11. $d \not\equiv 0\ (mod\ 4)$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = -4$ denklemi çözülebilirdir $\Leftrightarrow x^2 - dy^2 = -1$ denklemi çözülebilirdir [4].

Teorem 3.11' den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.12. d tamkare olmayan pozitif bir tek tamsayı olmak üzere $x^2 - dy^2 = -4$ denklemi çözülebilirdir $\Leftrightarrow$ $x^2 - dy^2 = -1$ denklemi çözülebilirdir.

Teorem 3.13. d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tek tamsayı çözümleri varsa $d \equiv 5\ (mod 8)$ dir.

İspat. $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tek tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n, y_n) ile gösterilsin. O halde $x_n^2 \equiv y_n^2 \equiv 1\ (mod\ 8)$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x_n^2 - dy_n^2 = 4 &\Rightarrow 1 - d \equiv 4\ (mod\ 8) \\ &\Rightarrow -d \equiv 3 \equiv -5\ (mod\ 8) \\ &\Rightarrow d \equiv 5\ (mod\ 8) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

BÖLÜM 4. BAZI PELL DENKLEMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, k pozitif bir tamsayı ve $d \in \{k^2 \pm 4, k^2 \pm 1\}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ve $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin çözümü varsa tüm pozitif tamsayı çözümlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ifade edilebileceği gösterilecektir. $d \in \{k^2 \pm 4, k^2 \pm 1\}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin temel çözümleri $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir yaklaşımları yardımıyla bulunacaktır. Daha sonra bulunan temel çözüm kullanılarak $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümleri elde edilecektir.

Buradan itibaren d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olarak düşünülecektir.

Tanım 4.1. Fibonacci dizisi

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ ve } n \geq 2 \text{ olmak üzere } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır ve F_n sayısına n. Fibonacci sayısı denir.

Tanım 4.2. Lucas dizisi

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ ve } n \geq 2 \text{ olmak üzere } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır ve L_n sayısına da n. Lucas sayısı denir.

Tanım 4.3. k ve t tamsayı olmak üzere $k^2 + 4t > 0$ olsun. Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

$$U_0(k,t) = 0, U_1(k,t) = 1$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$U_n(k,t) = kU_{n-1}(k,t) + tU_{n-2}(k,t)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır. Benzer biçimde genelleştirilmiş Lucas dizisi

$$V_0(k,t) = 2\,, V_1(k,t) = k$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$V_n(k,t) = kV_{n-1}(k,t) + tV_{n-2}(k,t)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır.

$k = t = 1$ için $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri sırasıyla Fibonacci ve Lucas dizilerini temsil eder. $x^2 - kx - t = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4t}}{2} \quad \text{ve} \quad \bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4t}}{2}$$

olmak üzere

$$U_n(k,t) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad V_n(k,t) = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Bu formüllere Binet Formülleri denir. Ayrıca $n \geq 1$ için $\alpha + \beta = k$ ve $\alpha\beta = -t$ dır.

Özel olarak, eğer $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ ise

$$U_n(k,1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad V_n(k,1) = \alpha^n + \beta^n \tag{4.1}$$

dir. Eğer $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ ise

$$U_n(k,-1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad V_n(k,-1) = \alpha^n + \beta^n \tag{4.2}$$

dir. Eğer $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ise

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{4.3}$$

dir.

Teorem 4.4. k tamsayı olmak üzere $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri için

a) k çift ise

$U_n(k,\pm 1)$ tektir $\Leftrightarrow$ n tektir.

$U_n(k,\pm 1)$ çifttir $\Leftrightarrow$ n çifttir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n(k,\pm 1)$ çifttir.

b) k tek ise

$$2|V_n(k,\pm 1) \Leftrightarrow 2|U_n(k,\pm 1) \Leftrightarrow 3|n$$

dir. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri hakkında detaylı bilgi için [13] ve [14] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Şimdi $\sqrt{k^2+4}$ ve $\sqrt{k^2-4}$ sayılarının sürekli kesir açılımlarını verelim.

Teorem 4.5. $k>1$ olsun. O zaman

$$\sqrt{k^2+4}=\begin{cases}\left[k,\overline{\frac{k}{2},2k}\right], & k \text{ çift ise}\\ \left[k,\overline{\frac{k-1}{2},1,1,\frac{k-1}{2},2k}\right], & k \text{ tek ise}\end{cases}$$

dır.

İspat. $k=2t$ olsun. $k^2+4=4t^2+4$ olduğundan $\sqrt{4t^2+4}$ sayısının sürekli kesir açılımı bulunmalıdır.

$2t<\sqrt{4t^2+4}<2t+1$ olduğundan

$$a_0=[\![\sqrt{4t^2+4}]\!]=2t,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{4t^2+4}-2t}=\frac{\sqrt{4t^2+4}+2t}{4}$$

bulunur. $t<\frac{\sqrt{4t^2+4}+2t}{4}<t+\frac{1}{4}$ olduğundan

$$a_1=\left[\!\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4}+2t}{4}\right]\!\!\right]=t,\ \alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4}+2t}{4}-t}=\sqrt{4t^2+4}+2t$$

olduğu görülür. $4t<\sqrt{4t^2+4}+2t<4t+1$ olduğundan

$$a_2=[\![\sqrt{4t^2+4}+2t]\!]=4t\Rightarrow a_2=4t=2a_0$$

olur. Teorem 1.2.19' a göre $\sqrt{4t^2+4}=[2t,\overline{t,4t}]$ olduğu görülür. Böylece $k=2t$ olduğundan $\sqrt{k^2+4}=\left[k,\overline{\frac{k}{2},2k}\right]$ dir.

Şimdi de $k=2t+1$ alalım. $k^2+4=4t^2+4t+5$ olduğundan $\sqrt{4t^2+4t+5}$ sayısının sürekli kesir açılımı bulunmalıdır.

$2t+1<\sqrt{4t^2+4t+5}<2t+2$ olduğundan

$$a_0=[\![\sqrt{4t^2+4t+5}]\!]=2t+1,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{4t^2+4t+5}-(2t+1)}=\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4}$$

dır. $t+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4}<t+\frac{3}{4}$ olduğu kullanılırsa

$$a_1=\left[\!\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4}\right]\!\!\right]=t,\ \alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4}-t}=\frac{(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1)}{2t+1}$$

elde edilir. $2-\frac{2}{2t+1}<\frac{(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1)}{2t+1}<2-\frac{1}{2t+1}$ olduğundan

$$a_2=\left[\!\left[\frac{\left(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1\right)}{2t+1}\right]\!\right]=1,$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1\right)}{2t+1}-1}=\frac{(\sqrt{4t^2+4t+5}+2)}{(2t+1)}$$

dır. $1+\frac{2}{2t+1}<\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1}<1+\frac{3}{2t+1}$ olduğu kullanılırsa

$$a_3=\left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1}\right]\!\right]=1,\ \alpha_4=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1}-1}=\frac{(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1)}{4}$$

olduğu görülür. $t<\frac{(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1)}{4}<t+\frac{1}{4}$ olduğundan

$$a_4=\left[\!\left[\frac{(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1)}{4}\right]\!\right]=t,\ \alpha_5=\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1\right)}{4}-t}=\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1$$

dır. Buradan da

$$a_5=\left[\!\left[\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1\right]\!\right]=2(2t+1)=2a_0$$

elde edilir. Teorem 1.2.19' a göre $\sqrt{4t^2+4t+5}=\left[2t+1,\overline{t,1,1,t,2(2t+1)}\right]$ bulunur. Böylece $k=2t+1$ olduğundan $\sqrt{k^2+4}=\left[k,\overline{\frac{k-1}{2},1,1,\frac{k-1}{2},2k}\right]$ olduğu görülür.

Teorem 4.6. $k>3$ için

$$\sqrt{k^2-4}=\begin{cases}\left[k-1,\overline{1,\frac{k-4}{2},1,2(k-1)}\right], & k \text{ çift ise}\\ \left[k-1,\overline{1,\frac{k-3}{2},2,\frac{k-3}{2},1,2(k-1)}\right], & k \text{ tek ise}\end{cases}$$

dir.

İspat. $k=2t$ olsun. $k^2-4=4t^2-4$ olduğundan $\sqrt{4t^2-4}$ sayısının sürekli kesir açılımı bulunmalıdır. $2t-1<\sqrt{4t^2-4}<2t$ olduğundan dolayı

$$a_0=\left[\!\left[\sqrt{4t^2-4}\right]\!\right]=2t-1,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{4t^2-4}-(2t-1)}=\frac{\sqrt{4t^2-4}+(2t-1)}{4t-5}$$

dır. $1+\frac{3}{4t-5}<\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-1}{4t-5}<1+\frac{4}{4t-5}$ olduğu kullanılırsa

$$a_1=\left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-1}{4t-5}\right]\!\right]=1,\ \alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-1}{4t-5}-1}=\frac{\left(\sqrt{4t^2-4}+2t-4\right)}{4}$$

bulunur. $t-2+\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-4}{4}<t-1$ olduğundan

$$a_2=\left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-4}{4}\right]\!\right]=t-2,\ \alpha_3=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-4}{4}-(t-2)}=\frac{\left(\sqrt{4t^2-4}+2t-4\right)}{4t-5}$$

dır. $1<\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-4}{4t-5}<1+\frac{1}{4t-5}$ olduğu kullanılırsa

$$a_3=\left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-4}{4t-5}\right]\!\right]=1,\ \alpha_4=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2-4}+2t-4}{4t-5}-1}=\left(\sqrt{4t^2-4}+2t-1\right)$$

elde edilir. Buradan

$$a_4=\left[\!\left[\sqrt{4t^2-4}+2t-1\right]\!\right]=2(2t-1)\ =2a_0$$

olduğu görülür. Teorem 1.2.19' a göre $\sqrt{4t^2-4}=\left[2t-1,\overline{1,t-2,1,2(2t-1)}\right]$ elde edilir. Dolayısıyla $k=2t$ olduğundan $\sqrt{k^2-4}=\left[k-1,\overline{1,\frac{k-4}{2},1,2(k-1)}\right]$ dir.

Şimdi de $k=2t-1$ olsun. $k^2-4=4t^2-4t-3$ olduğundan $\sqrt{4t^2-4t-3}$ sayısının sürekli kesir açılımı bulunmalıdır. $2t-2<\sqrt{4t^2-4t-3}<2t-1$ olduğundan dolayı

$$a_0=\left[\!\left[\sqrt{4t^2-4t-3}\right]\!\right]=2t-2\ ,\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{4t^2-4t-3}-(2t-2)}=\frac{\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2}{4t-7}$$

dır. $1+\frac{5}{4t-7}<\frac{\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2}{4t-7}<1+\frac{4}{4t-7}$ olduğu kullanılırsa

$$a_1=\left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2}{4t-7}\right]\!\right]=1,\ \alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2}{4t-7}-1}=\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5)}{4}$$

elde edilir. $t-2+\frac{1}{4}<\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5)}{4}<t-2+\frac{2}{4}$ olduğundan

$$a_2=\left[\!\left[\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5)}{4}\right]\!\right]=t-2\ ,\ \alpha_3=\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5\right)}{4}-(t-2)}=\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3)}{(2t-3)}$$

dır. Ayrıca $2+\frac{1}{2t-3}<\frac{\sqrt{4t^2-4t-5}+2t-3}{2t-3}<2+\frac{2}{2t-3}$ olduğundan

$$a_3=\left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3}{2t-3}\right]\!\right]=2\ ,\ \alpha_4=\frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3}{2t-3}-2}=\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3)}{4}$$

olur. $t-2+\frac{3}{4}<\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3)}{4}<t-1$ olduğu kullanılırsa

$$a_4=\left[\!\left[\frac{\left(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3\right)}{4}\right]\!\right]=t-2,$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-3\right)}{4}-(t-2)} = \frac{\left(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5\right)}{4t-7}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $1+\frac{1}{4t-7} < \frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5)}{4t-7} < 1+\frac{2}{4t-7}$ olduğundan

$$a_5 = \left[\!\left[\frac{(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5)}{4t-7}\right]\!\right] = 1, \alpha_6 = \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-5\right)}{4t-7}-1} = \sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2$$

dır. $2(2t-2) < \sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2 < 4t-3$ olduğundan

$$a_6 = \left[\!\left[\sqrt{4t^2-4t-3}+2t-2\right]\!\right] = 2(2t-2) = 2a_0$$

olur. Teorem 1.2.19' a göre $\sqrt{4t^2-4t-3} = \left[2t-2, \overline{1, t-2, 2, t-2, 1, 2(2t-2)}\right]$ bulunur. O halde $k = 2t-1$ olduğunda

$$\sqrt{k^2-4} = \left[k-1, \overline{1, \frac{k-3}{2}, 2, \frac{k-3}{2}, 1, 2(k-1)}\right]$$

dir.

Şimdi $d = k^2+4$ ve $k > 1$ için $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin temel çözümünü bulacağız. k tek iken $\sqrt{k^2+4}$ sayısının periyodu 5 olduğundan $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü Sonuç 2.2.10' a göre $(x_1, y_1) = (p_9, q_9)$ dir. Bu yaklaşımı hesaplamak oldukça zaman alacağından alternatif olarak Teorem 2.3.5 kullanılarak $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünü $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü yardımıyla bulacağız.

Sonuç 4.7. $d = k^2+4$ ve $k > 1$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü, k tek ise

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \frac{k^3+3k}{2} + \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d}$$

dir ve k çift ise $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. k çift olsun. $d = \sqrt{k^2+4}$ sayısının periyodu Teorem 4.5' e göre çifttir. Bu yüzden Teorem 2.3.4' e göre $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur. Şimdi de k tek olsun. O halde $\sqrt{k^2+4}$ sayısının periyodu 5 dir. Dolayısıyla Teorem 2.3.4' e göre $(x_1, y_1) = (p_4, q_4)$ dir.

$$\frac{p_4}{q_4} = k + \cfrac{1}{(k-1)/2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(k-1)/2}}}} = \frac{\frac{k^3+3k}{2}}{\frac{k^2+1}{2}}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.8. $d = k^2 + 4$ ve $k > 1$ olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \begin{cases} \left(\dfrac{k^3+3k}{2} + \dfrac{k^2+1}{2}\sqrt{d}\right)^2, & k \text{ tek ise} \\ \dfrac{k^2+2}{2} + \dfrac{k}{2}\sqrt{d}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. k tek ise Teorem 4.5 ve Teorem 2.3.5' den ve k çift ise Teorem 4.5 ve Sonuç 2.2.10' dan istenilen elde edilir.

Teorem 4.6 ve Sonuç 2.2.10' dan aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 4.9. $d = k^2 - 4$ ve $k > 3$ olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \begin{cases} \dfrac{k^3-3k}{2} + \dfrac{k^2-1}{2}\sqrt{d}, & k \text{ tek ise} \\ \dfrac{k^2-2}{2} + \dfrac{k}{2}\sqrt{d}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.10. $d = k^2 - 4$ ve $k > 3$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $d = \sqrt{k^2 - 4}$ sayısının periyodu Teorem 4.6' a göre her zaman çifttir. Bu yüzden Teorem 2.3.4' e göre $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Teorem 4.11. $d = k^2 + 4$ ve $k > 1$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{V_{6n}(k,1)}{2}, \frac{U_{6n}(k,1)}{2}\right), & k \text{ tek ise} \\ \left(\frac{V_{2n}(k,1)}{2}, \frac{U_{2n}(k,1)}{2}\right), & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

ile verilir.

İspat. k çift olsun. O zaman Teorem 2.2.12 ve Sonuç 4.8' den $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(\frac{k^2 + 2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{d}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha_1 = \frac{k^2+2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{d}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{k^2+2}{2} - \frac{k}{2}\sqrt{d}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = \beta_1^n$$

dir. Dolayısıyla

$$x_n = \frac{\alpha_1^n + \beta_1^n}{2} \text{ ve } y_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{2\sqrt{d}}$$

olur. $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olduğundan

$$\alpha^2 = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^2 = \frac{k^2+2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{k^2+4} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^2$$

dir. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} = \frac{V_{2n}(k,1)}{2}$$

ve

$$y_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2(\alpha - \beta)} = \frac{U_{2n}(k,1)}{2}$$

bulunur. Şimdi de k tek olsun. O zaman Teorem 2.2.12 ve Sonuç 4.8' den $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(\left(\frac{k^3 + 3k}{2} + \frac{k^2 + 1}{2}\sqrt{d}\right)^2\right)^n$$

ile verilir.

$$\alpha_1 = \left(\frac{k^3+3k}{2} + \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d}\right)^2 \text{ ve } \overline{\alpha_1} = \beta_1 = \left(\frac{k^3+3k}{2} - \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d}\right)^2$$

alınsın. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = \beta_1^n$$

dir. Dolayısıyla

$$x_n = \frac{\alpha_1^n+\beta_1^n}{2} \text{ ve } y_n = \frac{\alpha_1^n-\beta_1^n}{2\sqrt{d}}$$

olur. $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olduğundan

$$\alpha^6 = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^6 = \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} + \frac{k^5+4k^3+3k}{2}\sqrt{d} = \alpha_1$$

ve

$$\beta^6 = \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} - \frac{k^5+4k^3+3k}{2}\sqrt{d} = \beta_1$$

dir. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{6n}+\beta^{6n}}{2} = \frac{V_{6n}(k,1)}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{6n}-\beta^{6n}}{2(\alpha-\beta)} = \frac{U_{6n}(k,1)}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.12. $d = k^2+4$, k tek ve $k > 1$ olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y) = \left(\frac{V_{6n-3}(k,-1)}{2}, \frac{U_{6n-3}(k,-1)}{2}\right)$$

ile verilir.

İspat. k tek olsun. Sonuç 4.7 ve Sonuç 2.3.7' den $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(\frac{k^3+3k}{2} + \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d}\right)^{2n-1}$$

ile verilir. $\alpha_1 = \frac{k^3+3k}{2} + \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{k^3+3k}{2} - \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d}$ olsun. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \alpha_1^{2n-1} \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = \beta_1^{2n-1}$$

dir. Dolayısıyla $x_n = \frac{\alpha_1^{2n-1}+\beta_1^{2n-1}}{2}$ ve $y_n = \frac{\alpha_1^{2n-1}-\beta_1^{2n-1}}{2\sqrt{d}}$ olur.

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olsun. O zaman

$$\alpha^3 = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^3 = \frac{k^3+3k}{2} + \frac{k^2+1}{2}\sqrt{d} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^3$$

olur. O halde (4.1)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{6n-3}+\beta^{6n-3}}{2} = \frac{V_{6n-3}(k,-1)}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{6n-3}-\beta^{6n-3}}{2(\alpha-\beta)} = \frac{U_{6n-3}(k,-1)}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.13. $d = k^2 - 4$ ve $k > 3$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{V_{3n}(k,1)}{2}, \dfrac{U_{3n}(k,1)}{2}\right), & k \text{ tek ise} \\ \left(\dfrac{V_{2n}(k,1)}{2}, \dfrac{U_{2n}(k,1)}{2}\right), & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

ile verilir.

İspat. k çift olsun. Teorem 2.2.12 ve Sonuç 4.9' a göre $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(\frac{k^2 - 2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{d}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha_1 = \frac{k^2-2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{d}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{k^2-2}{2} - \frac{k}{2}\sqrt{d}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = \beta_1^n$$

dir. Dolayısıyla

$$x_n = \frac{\alpha_1^n + \beta_1^n}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{2\sqrt{d}}$$

olur. $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\alpha^2 = \left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^2 = \frac{k^2-2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{k^2-4} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^2$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} = \frac{V_{2n}(k,1)}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2(\alpha - \beta)} = \frac{U_{2n}(k,1)}{2}$$

olduğu görülür. Şimdi de k tek olsun. O halde Sonuç 4.9 ve Teorem 2.2.12' e göre $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(\frac{k^3 - 3k}{2} + \frac{k^2 - 1}{2}\sqrt{d}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha_1 = \frac{k^3-3k}{2} + \frac{k^2-1}{2}\sqrt{d}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{k^3-3k}{2} - \frac{k^2-1}{2}\sqrt{d}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = \beta_1^n$$

dir. Dolayısıyla $x_n = \frac{\alpha_1^n + \beta_1^n}{2}$ ve $y_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{2\sqrt{d}}$ olur.

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$$

olduğundan

$$\alpha^3=\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^3=\frac{k^3-3k}{2}+\frac{k^2-1}{2}\sqrt{d}=\alpha_1 \text{ ve } \beta_1=\beta^3$$

olur. Dolayısıyla (4.2)' den

$$x_n=\frac{\alpha^{3n}+\beta^{3n}}{2}=\frac{V_{3n}(k,1)}{2} \quad \text{ve } y_n=\frac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{2(\alpha-\beta)}=\frac{U_{3n}(k,1)}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.14. $d=k^2+4$ ve $k>1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=4$ Pell denkleminin temel çözümü (k^2+2,k) dır.

İspat. $(k^2+2)^2-(k^2+4)k^2=4$ olduğundan (k^2+2,k), $x^2-dy^2=4$ Pell denkleminin bir çözümüdür. Teorem 3.10' a göre $a=k^2+2$ ve $b=k$ için

$$a=k^2+2>\ k^2-2=b^2-2$$

olduğundan dolayı (k^2+2,k), $x^2-(k^2+4)y^2=4$ denklemin temel çözümüdür.

Sonuç 4.15. $d=k^2+4$ ve $k>1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=-4$ Pell denkleminin temel çözümü $(k,1)$ dır.

İspat. $k^2-(k^2+4)\,1^2=-4$ olduğundan $(k,1)$, $x^2-dy^2=-4$ denklemin bir çözümüdür. Ayrıca 1 en küçük pozitif tamsayı olduğundan temel çözüm tanımına göre $(k,1)$, $x^2-(k^2+4)\,y^2=-4$ denkleminin temel çözümüdür.

Sonuç 4.16. $k>3$ ve $d=k^2-4$ olsun. Bu taktirde $x^2-dy^2=4$ Pell denkleminin temel çözümü $(k,1)$ dır.

İspat. $(k,1)$, $x^2-(k^2-4)\,y^2=4$ denklemini sağladığından denklemin bir çözümüdür. Ayrıca 1 en küçük pozitif tamsayı olduğundan temel çözüm tanımına göre $(k,1)$, $x^2-(k^2-4)\,y^2=4$ denkleminin temel çözümüdür.

Teorem 4.17. $d=k^2+4$ ve $k>1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y)=\big(V_{2n}\,(k,1),U_{2n}\,(k,1)\big)$$

ile verilir.

İspat. Sonuç 4.14 ve Teorem 3.4' e göre $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{((k^2+2)+k\sqrt{d})^n}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{((k^2+2)+k\sqrt{d})}{2}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha_1 = \frac{(k^2+2)+k\sqrt{d}}{2}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{(k^2+2)-k\sqrt{d}}{2}$ olsun. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{d} = 2\alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = 2\beta_1^n$$

dir. Dolayısıyla $x_n = \alpha_1^n + \beta_1^n$ ve $y_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\sqrt{d}}$ olur. Ayrıca

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olmak üzere

$$\alpha^2 = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^2 = \frac{(k^2+2)+k\sqrt{k^2+4}}{2} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^2$$

dir. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = V_{2n}(k,1) \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = U_{2n}(k,1)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.18. $d = k^2 + 4$ ve $k > 1$ olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = -4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_{2n-1}(k, -1), U_{2n-1}(k, -1))$$

ile verilir.

İspat. Sonuç 4.15 ve Sonuç 3.8' e göre $x^2 - dy^2 = -4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{(k+\sqrt{d})^{2n-1}}{4^{n-1}} = 2\left(\frac{k+\sqrt{d}}{2}\right)^{2n-1}$$

ile verilir. $\alpha = \frac{k+\sqrt{d}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{d}}{2}$ olsun. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{d} = 2\alpha^{2n-1} \text{ ve } x_n - y_n\sqrt{d} = 2\beta^{2n-1}$$

dir. Dolayısıyla $x_n = \alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}$ ve $y_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\sqrt{d}}$ olur. Böylece (4.1)' den

$$x_n = V_{2n-1}(k, -1) \text{ ve } y_n = U_{2n-1}(k, -)$$

elde edilir.

Teorem 4.19. $d = k^2 - 4$ ve $k > 3$ olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_n(k, 1), U_n(k, 1))$$

ile verilir.

İspat. Sonuç 4.16 ve Teorem 3.4' e göre $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{(k+\sqrt{d})^n}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{k+\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha = \frac{k+\sqrt{d}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{d}}{2}$ olsun. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{d} = 2\alpha^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{d} = 2\beta^n$$

dir. Dolayısıyla (4.2)' den

$$x_n = \alpha^n + \beta^n = V_n(k, 1) \ \text{ve}\ y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{d}} = U_n(k, 1)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de $d = k^2 \pm 1$ için $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ve $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümlerini temel çözümlerinden yararlanarak bulalım.

Teorem 4.20. $k \geq 1$ ise $\sqrt{k^2+1} = [k, \overline{2k}]$ dir.

İspat. $k^2 < (k^2+1) < (k+1)^2$ olduğundan dolayı

$$a_0 = [\![\sqrt{k^2+1}]\!] = k\ ,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}-k} = \sqrt{k^2+1} + k$$

dır. $2k < \sqrt{k^2+1} + k < 2k+1$ olduğundan

$$a_1 = \left[\!\left[\sqrt{k^2+1} + k\right]\!\right] = 2k = 2a_0$$

dır. O halde Teorem 1.2.19' a göre $\sqrt{k^2+1} = [k, \overline{2k}]$ bulunur.

Teorem 4.21. $k > 1$ ise $\sqrt{k^2-1} = [k-1, \overline{1, 2(k-1)}]$ dir.

İspat. $(k-1)^2 < (k^2-1) < k^2$ olduğundan dolayı

$$a_0 = [\![\sqrt{k^2-1}]\!] = k - 1\ ,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}-(k-1)} = \frac{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}{2(k-1)}$$

dır. $1 < \frac{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}{2(k-1)} < 2$ olduğundan

$$a_1 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}{2(k-1)}\right]\!\right] = 1\ ,\ \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}{2(k-1)}-1} = \sqrt{k^2-1}+(k-1)$$

dır. $2(k-1) < \sqrt{k^2-1}+(k-1) < 2k-1$ olduğundan

$$a_2 = \left[\!\left[\sqrt{k^2-1}+(k-1)\right]\!\right] = 2(k-1) = 2a_0$$

olur. O halde Teorem 1.2.19' a göre $\sqrt{k^2-1} = \left[k-1, \overline{1,2(k-1)}\right]$ elde edilir.

Sonuç 4.22. $k \geq 1$ ve $d = k^2+1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = 2k^2+1+\ 2k\sqrt{d}$$

dır.

İspat. Teorem 4.20 ve Sonuç 2.2.10' e göre $x^2-(\,k^2+1\,)y^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü (p_1, q_1) dir.

$$\frac{p_1}{q_1} = k + \frac{1}{2k} = \frac{2k^2+1}{2k}$$

olduğundan denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (2k^2+1, 2k)$ olur.

Teorem 4.20 ve Teorem 2.3.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.23. $k \geq 1$ ve $d = k^2+1$ olsun. Bu taktirde $x^2-dy^2=-1$ Pell denkleminin temel çözümü

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = k + \sqrt{d}$$

dır.

Teorem 4.21 ve Sonuç 2.2.10 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.24. $k > 1$ ve $d =\ k^2-1$ olsun. Bu taktirde $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (k, 1)$ dır.

Teorem 4.25. $k \geq 1\,, k \neq 2$ ve $d = k^2+1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y)=\left(\frac{V_{2n}(2k,1)}{2},U_{2n}(2k,1)\right)$$

ile verilir.

İspat. Teorem 2.2.12 ve Teorem 4.20' e göre $d=k^2+1$ olmak üzere $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n+y_n\sqrt{k^2+1}=\left(2k^2+1+2k\sqrt{k^2+1}\right)^n$$
$$=\left(2k^2+1+k\sqrt{(2k)^2+4}\right)^n$$

biçimindedir. $\alpha_1=2k^2+1+k\sqrt{(2k)^2+4}$ ve $\beta_1=2k^2+1-k\sqrt{(2k)^2+4}$ olsun. O halde $\alpha=\frac{2k+\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ ve $\beta=\frac{2k-\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ ise

$$\alpha^2=\left(\frac{2k+\sqrt{(2k)^2+4}}{2}\right)^2=2k^2+1+k\sqrt{(2k)^2+4}=\alpha_1 \text{ ve } \beta^2=\beta_1$$

dır. Ayrıca

$$x_n+y_n\sqrt{k^2+1}=x_n+\frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2+4}=\alpha_1^n=\alpha^{2n}$$

ve

$$x_n-y_n\sqrt{k^2+1}=x_n-\frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2+4}=\beta_1^n=\beta^{2n}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}=\frac{V_{2n}(2k,1)}{2} \text{ ve } y_n=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{(2k)^2+4}}=U_{2n}(2k,1)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.26. $k\geq 1, k\neq 2$ ve $d=k^2+1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=-1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y)=\left(\frac{V_{2n-1}(2k,-1)}{2},U_{2n-1}(2k,-1)\right)$$

biçimindedir.

İspat. Sonuç 4.23 ve Sonuç 2.3.7' e göre $d=k^2+1$ için $x^2-dy^2=-1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n+y_n\sqrt{k^2+1}=\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)^{2n-1}$$
$$=\left(\frac{2k+2\sqrt{k^2+1}}{2}\right)^{2n-1}=\left(\frac{2k+\sqrt{(2k)^2+4}}{2}\right)^{2n-1}$$

ile verilir. $\alpha=\frac{2k+\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ ve $\beta=\frac{2k-\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{k^2+1} = x_n + \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2+4} = \alpha^{2n-1}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{k^2+1} = x_n - \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2+4} = \beta^{2n-1}$$

olur. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2} = \frac{V_{2n-1}(2k,-1)}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\sqrt{(2k)^2+4}} = U_{2n-1}(2k,-1)$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.27. $k > 1$ ve $d = k^2 - 1$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = \left(\frac{V_n(2k,1)}{2}, U_n(2k,1)\right)$$

ile verilir.

İspat. Sonuç 4.24 ve Teorem 2.2.12' e göre $d = k^2 - 1$ ise $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{k^2-1} = \left(k + \sqrt{k^2-1}\right)^n = \left(\frac{2k+\sqrt{(2k)^2-4}}{2}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha = \frac{2k+\sqrt{(2k)^2-4}}{2}$ ve $\beta = \frac{2k-\sqrt{(2k)^2-4}}{2}$ olsun. O zaman

$$x_n + \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2-4} = \alpha^n \text{ ve } x_n - \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2-4} = \beta^n$$

olur. Dolayısıyla (4.2)' den

$$x_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} = \frac{V_n(2k,1)}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{(2k)^2-4}} = U_n(2k,1)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.28. $k > 1$ ve $d = k^2 - 1$ olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. Teorem 4.21' e göre $\sqrt{k^2-1}$ sayısının sürekli kesir açılımının periyodu çifttir. Bu yüzden Teorem 2.3.4' e göre denklemin tamsayı çözümü yoktur.

Teorem 4.29. $d = k^2 - 4$ ve $k > 3$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = -4$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. k tek olsun. O halde k^2-4 tektir ve böylece Teorem 3.11 ve Sonuç 4.10' dan ispat tamamlanır. Şimdi k çift olsun. Eğer (a,b), $x^2-(k^2-4)y^2=-4$ denkleminin bir çözümü ise a çifttir. Buradan

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{k}{2}\right)^2-1\right)b^2=-1$$

elde edilir. Bu ise Teorem 4.28' e göre imkansızdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.30. $k>1$ ve $d=k^2-1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y)=\big(V_n(2k,1),2\,U_n(2k,1)\big)$$

biçimindedir.

İspat. $(2k,2)$ ikilisi $x^2-(k^2-1)y^2=4$ Pell denklemini sağlar. Aynı zamanda $y=1$ olmak üzere $x^2-(k^2-1)y^2=4$ Pell denklemini sağlayan x tamsayısı yoktur. Bu yüzden denklemin temel çözümü $(2k,2)$ dir. O halde Teorem 3.4' den $d=k^2-1$ için $x^2-dy^2=4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n+y_n\sqrt{k^2-1}=2\left(\frac{2k+2\sqrt{k^2-1}}{2}\right)^n=2\left(\frac{2k+\sqrt{(2k)^2-4}}{2}\right)^n$$

dir. $\alpha=\frac{2k+\sqrt{(2k)^2-4}}{2}$ ve $\beta=\frac{2k-\sqrt{(2k)^2-4}}{2}$ alınsın. O zaman

$$x_n+y_n\sqrt{k^2-1}=x_n+\frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2-4}=2\alpha^n$$

ve

$$x_n-y_n\sqrt{k^2-1}=x_n-\frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2-4}=2\beta^n$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2)' den

$$x_n=\alpha^n+\beta^n=V_n(2k,1)\quad\text{ve}\quad y_n=2\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{\sqrt{(2k)^2-4}}=2U_n(2k,1)$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.31. $k\geq 1, k\neq 2$ ve $d=k^2+1$ olsun. O zaman $x^2-dy^2=-4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y)=\big(V_{2n-1}(2k,-1),2\,U_{2n-1}(2k,-1)\big)$$

biçimindedir.

İspat. $(2k, 2)$ ikilisi $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -4$ Pell denklemini sağlar. Aynı zamanda $y = 1$ olmak üzere $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -4$ Pell denklemini sağlayan x tamsayısı yoktur. Bu yüzden denklemin temel çözümü $(2k, 2)$ dir. O halde Sonuç 3.8' e göre $d = k^2 + 1$ için $x^2 - dy^2 = -4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{k^2 + 1} = 2\left(\frac{2k + 2\sqrt{k^2 + 1}}{2}\right)^{2n-1} = 2\left(\frac{2k + \sqrt{(2k)^2 + 4}}{2}\right)^{2n-1}$$

biçimindedir. $\alpha = \frac{2k+\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{2k-\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{k^2 + 1} = x_n + \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2 + 4} = 2\alpha^{2n-1}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{k^2 + 1} = x_n - \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2 + 4} = 2\beta^{2n-1}$$

dır. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n = \alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1} = V_{2n-1}(2k, -1)$$

ve

$$y_n = 2\frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\sqrt{(2k)^2 + 4}} = 2U_{2n-1}(2k, -1)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.31 ve Teorem 4.4' den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.32. (a, b), $x^2 - (k^2 + 1\,)y^2 = -4$ Pell denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü ise a ve b çift tamsayıdır.

Teorem 4.33. $k \geq 1, k \neq 2$ ve $d = k^2 + 1$ olsun. Bu taktirde $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = \big(V_{2n}(2k, 1), 2\,U_{2n}(2k, 1)\big)$$

biçimindedir.

İspat. $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 4$ denkleminin bir çözümü (a, b) olsun. İlk olarak a ve b nin çift tamsayı olması gerektiğini gösterelim. k tek olsun. O zaman bazı tek t tamsayıları için $k^2 + 1 = 2t$ yazılabilir. Böylece $a^2 - 2tb^2 = 4$ olduğundan a çift tamsayı ve dolayısıyla b çift tamsayıdır. Şimdi k çift olsun. O zaman

$d = k^2 + 1$ tektir. a ve b tek tamsayılar olsun. $x_1 = |db - ka|$, $y_1 = |a - kb|$ alınsın. O zaman x_1 ve y_1 tek tamsayılardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_1^2 - dy_1^2 &= (db - ka)^2 - d(a - kb)^2 \\ &= b^2 d(d - k^2) + a^2(k^2 - d) \\ &= b^2 d - a^2 \\ &= -(a^2 - db^2) = -4 \end{aligned}$$

dir. O halde $x_1 + y_1\sqrt{d}$, $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -4$ denkleminin bir çözümü olur. Fakat bu durum Sonuç 4.32 ile çelişir. Dolayısıyla $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -4$ denkleminin herhangi bir çözümü $a + b\sqrt{d}$ ise a ve b çift tamsayılardır. Bu yüzden $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümüdür. O zaman $x^2 - dy^2 =4$ denkleminin temel çözümü $4k^2 + 2 + 4k\sqrt{d}$ dir. Dolayısıyla Teorem 3.4' e göre $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{k^2 + 1} = 2\left(\frac{4k^2+2+4k\sqrt{k^2+1}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{4k^2+2+2k\sqrt{(2k)^2+4}}{2}\right)^n$$

ile verilir. $\alpha_1 = \frac{4k^2+2+2k\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ ve $\beta_1 = \frac{4k^2+2-2k\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$ olsun.

$$\alpha = \frac{2k+\sqrt{(2k)^2+4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{2k-\sqrt{(2k)^2+4}}{2}$$

için

$$\alpha^2 = \left(\frac{2k + \sqrt{(2k)^2 + 4}}{2}\right)^2 = \frac{4k^2 + 2 + 2k\sqrt{(2k)^2 + 4}}{2} = \alpha_1$$

ve

$$\beta^2 = \left(\frac{2k - \sqrt{(2k)^2 + 4}}{2}\right)^2 = \frac{4k^2 + 2 - 2k\sqrt{(2k)^2 + 4}}{2} = \beta_1$$

bulunur. Böylece

$$x_n + y_n\sqrt{k^2 + 1} = x_n + \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2 + 4} = 2\alpha_1^n = 2\alpha^{2n}$$

ve

$$x_n - y_n\sqrt{k^2 + 1} = x_n - \frac{y_n}{2}\sqrt{(2k)^2 + 4} = 2\beta_1^n = 2\beta^{2n}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.1)' den

$$x_n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = V_{2n}(2k, 1) \quad \text{ve} \quad y_n = 2\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{(2k)^2+4}} = 2U_{2n}(2k, 1)$$

bulunur.

Teorem 4.34. $k \geq 2$ ve $k \neq 3$ olsun. O zaman $x^2 - (k^2 - 1\,)y^2 = -4$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. k çift ise $k^2 - 1$ tek olduğundan Sonuç 3.12 ve Teorem 4.28' den dolayı $x^2 - (k^2 - 1\,)y^2 = -4$ Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.
Şimdi k tek olsun ve $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a^2 - (k^2 - 1)b^2 = -4$ olsun. O zaman a çift ve

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2 - 1}{4}\right)b^2 = -1$$

dir. $n = \frac{k+1}{2}$ olmak üzere $\frac{k^2-1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \frac{k+1}{2}$ olduğundan Örnek 2.5.7' e göre bu imkansızdır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de özel olarak $k^2 + 1 = 5$ durumunu inceleyelim.$\sqrt{5}$ sayısının sürekli kesir açılımı $[2, \overline{4}]$ dir. Bu yüzden $\sqrt{5}$ sayısının periyodu 1 dir. Dolayısıyla Sonuç 2.2.10' dan $x^2 - 5y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünün $9 + 4\sqrt{5}$ ve Teorem 2.3.4' den $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümünün $2 + \sqrt{5}$ olduğu görülür. Bu bilgiler ışığında $x^2 - 5y^2 = \pm 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini inceleyelim.

Teorem 4.35. $x^2 - 5y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = \left(\frac{L_{6n}}{2}, \frac{F_{6n}}{2}\right)$$

biçimindedir.

İspat. $x^2 - 5y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $9 + 4\sqrt{5}$ olduğundan Teorem 2.2.12' e göre $x^2 - 5y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n$$

biçimindedir. $\alpha_1 = 9 + 4\sqrt{5}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = 9 - 4\sqrt{5}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{5} = \beta_1^n$$

dır. Dolayısıyla $x_n = \frac{\alpha_1^n + \beta_1^n}{2}$ ve $y_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{2\sqrt{5}}$ dır. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan

$$\alpha^6 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 = 9 + 4\sqrt{5} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^6$$

dir. Dolayısıyla (4.3)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{6n}+\beta^{6n}}{2} = \frac{L_{6n}}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{6n}-\beta^{6n}}{2(\alpha-\beta)} = \frac{F_{6n}}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.36. $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x,y) = \left(\frac{L_{6n-3}}{2}, \frac{F_{6n-3}}{2}\right)$$

biçimindedir.

İspat. $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü $2 + \sqrt{5}$ olduğundan Sonuç 2.3.7' e göre $x^2 - 5y^2 = -1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2n-1}$$

ile verilir. $\alpha_1 = 2 + \sqrt{5}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = 2 - \sqrt{5}$ olsun. O halde

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \alpha_1^{2n-1} \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{5} = \beta_1^{2n-1}$$

dir. Dolayısıyla $x_n = \frac{\alpha_1^{2n-1}+\beta_1^{2n-1}}{2}$ ve $y_n = \frac{\alpha_1^{2n-1}-\beta_1^{2n-1}}{2\sqrt{5}}$ dır. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan

$$\alpha^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 + \sqrt{5} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^3$$

dir. Eldeki bilgiler ışığında (4.3)' den

$$x_n = \frac{\alpha^{6n-3}+\beta^{6n-3}}{2} = \frac{L_{6n-3}}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{6n-3}-\beta^{6n-3}}{2(\alpha-\beta)} = \frac{F_{6n-3}}{2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

$x^2 - 5y^2 = -4$ ve $x^2 - 5y^2 = 4$ Pell denklemlerinin temel çözümlerinin sırasıyla $1 + \sqrt{5}$ ve $3 + \sqrt{5}$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi de $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini F_n ve L_n cinsinden ifade edelim.

Teorem 4.37. $x^2 - 5y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = (L_{2n}, F_{2n})$$

biçimindedir.

İspat. $x^2 - 5y^2 = 4$ Pell denkleminin temel çözümü $3 + \sqrt{5}$ olduğundan Teorem 3.4' den $x^2 - 5y^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \frac{(3+\sqrt{5})^n}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

biçimindedir. $\alpha_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{5} = 2\alpha_1^n \quad \text{ve} \quad x_n - y_n\sqrt{5} = 2\beta_1^n$$

dir. Buradan

$$x_n = \alpha_1^n + \beta_1^n \text{ ve } y_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\sqrt{5}}$$

dır. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan

$$\alpha^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha_1 \text{ ve } \beta_1 = \beta^2$$

dir. Dolayısıyla (4.3)' den

$$x_n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = L_{2n} \text{ ve } y_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.38. $x^2 - 5y^2 = -4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x, y) = (L_{2n-1}, F_{2n-1})$$

biçimindedir.

İspat. $x^2 - 5y^2 = -4$ Pell denkleminin temel çözümü $1 + \sqrt{5}$ olduğundan Sonuç 3.8' e göre $x^2 - 5y^2 = -4$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \frac{(1+\sqrt{5})^{2n-1}}{4^{n-1}} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$$

biçimindedir. $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$ ve $\overline{\alpha_1} = \beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta$ olsun. O zaman

$$x_n + y_n\sqrt{5} = 2\alpha^{2n-1} \text{ ve } x_n - y_n\sqrt{5} = 2\beta^{2n-1}$$

dir. Dolayısıyla (4.3)' den

$$x_n = \alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1} = L_{2n-1} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta} = F_{2n-1}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 5.

SONUÇ VE ÖNERİLER

İncelemenin ana konusu Pell denklemlerinin eğer bir tamsayı çözümü varsa tüm pozitif tamsayı çözümlerinin nasıl elde edilebileceği olmuştur. $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin temel çözümünün $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir yaklaşımlarından elde edilebileceği gösterilmiştir. $x^2 - dy^2 = \pm 1$ denklemlerinin bulunan temel çözümü yardımıyla da $x^2 - dy^2 = \pm N$ denklemlerinin temel çözümünü veren bağıntılara ulaşılmıştır. Daha sonra benzer olarak $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin temel çözümünün nasıl bulunacağı hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. Ayrıca $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümlerini veren bağıntılar verilmiştir. Özel olarak $d = k^2 \pm 4$ ve $d = k^2 \pm 1$ alınarak $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ve $x^2 - dy^2 = \pm 4$ denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilişkilendirilmiştir.

Bu tezde yapılan incelemeler $x^2 - dy^2 = \pm 2$ ve $x^2 - dy^2 = \pm 8$ gibi bazı özel Pell denklemlerinin temel çözümlerini ve tüm pozitif tamsayı çözümlerini veren bağıntıların elde edilmesine genişletilebilir. Ayrıca $x^2 - dy^2 = \pm 1$, $x^2 - dy^2 = \pm 4$ ve en genelde $x^2 - dy^2 = N$ denklemlerinin çözümü $ax^2 + bxy + cy^2 = r$ biçimindeki Diophantine denklemlerinin çözümünde kullanılabilir. Bu konuyla ilgili [40] ve [41] numaralı makalelere bakılabilir.

d	$\sqrt{d}$ Sürekli Kesir Açılımı
2	$[1,\overline{2}]$
3	$[1,\overline{1,2}]$
5	$[2,\overline{4}]$
6	$[2,\overline{2,4}]$
7	$[2,\overline{1,1,1,4}]$
8	$[2,\overline{1,4}]$
10	$[3,\overline{6}]$
11	$[3,\overline{3,6}]$
12	$[3,\overline{2,6}]$
13	$[3,\overline{1,1,1,1,6}]$
14	$[3,\overline{1,2,1,6}]$
15	$[3,\overline{1,6}]$
17	$[4,\overline{8}]$
18	$[4,\overline{4,4,8}]$
19	$[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$
20	$[4,\overline{2,8}]$
21	$[4,\overline{1,1,2,1,1,8}]$
22	$[4,\overline{1,2,4,2,1,8}]$
23	$[4,\overline{1,3,1,8}]$
24	$[4,\overline{1,8}]$
26	$[5,\overline{10}]$
27	$[5,\overline{5,10}]$
28	$[5,\overline{3,2,3,10}]$
29	$[5,\overline{2,1,1,2,10}]$
30	$[5,\overline{2,10}]$
31	$[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$
32	$[5,\overline{1,1,1,10}]$
33	$[5,\overline{1,2,1,10}]$
34	$[5,\overline{1,4,1,10}]$
35	$[5,\overline{1,10}]$
37	$[6,\overline{12}]$
38	$[6,\overline{6,12}]$
39	$[6,\overline{4,12}]$
40	$[6,\overline{3,12}]$
41	$[6,\overline{2,2,12}]$
42	$[6,\overline{2,12}]$
43	$[6,\overline{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12}]$
44	$[6,\overline{1,1,1,2,1,1,1,12}]$
45	$[6,\overline{1,2,2,2,1,12}]$
46	$[6,\overline{1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12}]$
47	$[6,\overline{1,5,1,12}]$
48	$[6,\overline{1,12}]$

Çizelge 5.1. $1-49$ arasındaki İrrasyonel Sayıların Sürekli Kesir Açılımları

$\sqrt{d}$	Sürekli Kesir Açılımı	$x^2 - dy^2 = 1$	$x^2 - dy^2 = -1$
$\sqrt{a^2b^2 + 2b}$	$[ab, \overline{a, 2ab}]$	$(a^2b + 1, a)$	tamsayı çözümü yoktur
$\sqrt{a^2b^2 + b}$	$[ab, \overline{2a, 2ab}]$	$(2a^2b + 1{,}2a)$	tamsayı çözümü yoktur
$\sqrt{m^2 - m}$	$[m - 1, \overline{2{,}2(m - 1)}]$	$(2m - 1{,}2)$	tamsayı çözümü yoktur
$\sqrt{m^2 + m}$	$[m, \overline{2{,}2m}]$	$(2m + 1{,}2)$	tamsayı çözümü yoktur
$\sqrt{m^2 - 2}$	$[m - 1, \overline{1, m - 2{,}1{,}2(m - 1)}]$	$(m^2 - 1, m)$	tamsayı çözümü yoktur
$\sqrt{m^2 + 2}$	$[m, \overline{m, 2m}]$	$(m^2 + 1, m)$	tamsayı çözümü yoktur

Çizelge 5.2. Bazı Pell Denklemlerinin Çözümleri

d	M	çözülebilirlik	N	çözülebilirlik	MN	çözülebilirlik
3	6	çözülebilir	13	çözülebilir	78	çözülebilir
2	7	çözülebilir	2	çözülemez	14	çözülebilir
5	5	çözülemez	7	çözülemez	35	çözülemez
11	2	çözülemez	7	çözülemez	14	çözülebilir
17	17	çözülebilir	2	çözülemez	34	çözülemez
37	11	çözülemez	3	çözülemez	33	çözülebilir
41	9	çözülemez	2	çözülebilir	18	çözülebilir
37	12	çözülebilir	9	çözülebilir	108	çözülebilir

Çizelge 5.3. Bazı $x^2 - dy^2 = MN$ Denklemlerinin çözülebilirliği

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">$x^2 - dy^2 = N$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{d}$</td><td colspan="2">Sürekli kesir açılımı</td><td>1</td><td>-1</td><td>4</td><td>-4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{k^2+4}$</td><td>k çift ise</td><td>$\left[k-1, \overline{1, \frac{k-4}{2}, 1, 2(k-1)}\right]$</td><td>$\left(\frac{V_{2n}(k,1)}{2}, \frac{U_{2n}(k,1)}{2}\right)$</td><td>tamsayı çözümü yoktur</td><td rowspan="2">$\left(V_{2n}(k,1), U_{2n}(k,1)\right)$</td><td rowspan="2">$(V_{2n-1}(k,1), U_{2n-1}(k,1))$</td></tr>
<tr><td>k tek ise</td><td>$\left[k, \overline{\frac{k-1}{2}, 1, 1, \frac{k-1}{2}, 2k}\right]$</td><td>$\left(\frac{V_{6n}(k,1)}{2}, \frac{U_{6n}(k,1)}{2}\right)$</td><td>$\left(\frac{V_{6n-3}(k,1)}{2}, \frac{U_{6n-3}(k,1)}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{k^2-4}$</td><td>k çift ise</td><td>$\left[k-1, \overline{1, \frac{k-4}{2}, 1, 2(k-1)}\right]$</td><td>$\left(\frac{V_{2n}(k,-1)}{2}, \frac{U_{2n}(k,-1)}{2}\right)$</td><td>tamsayı çözümü yoktur</td><td rowspan="2">$(V_n(k,-1), U_n(k,-1))$</td><td rowspan="2">tamsayı çözümü yoktur.</td></tr>
<tr><td>k tek ise</td><td>$\left[k-1, \overline{1, \frac{k-3}{2}, 2, \frac{k-3}{2}, 1, 2(k-1)}\right]$</td><td>$\left(\frac{V_{3n}(k,-1)}{2}, \frac{U_{3n}(k,-1)}{2}\right)$</td><td>tamsayı çözümü yoktur</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{k^2+1}$</td><td colspan="2">$[k, \overline{2k}]$</td><td>$\left(\frac{V_{2n}(2k,1)}{2}, U_{2n}(2k,1)\right)$</td><td>$\left(\frac{V_{2n-1}(2k,1)}{2}, U_{2n-1}(2k,1)\right)$</td><td>$\left(V_{2n}(2k,1), 2\,U_{2n}(2k,1)\right)$</td><td>$\left(V_{2n-1}(2k,1), 2\,U_{2n-1}(2k,1)\right)$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{k^2-1}$</td><td colspan="2">$[k-1, \overline{1, 2(k-1)}]$</td><td>$\left(\frac{V_n(2k,-1)}{2}, U_n(2k,-1)\right)$</td><td>tamsayı çözümü yoktur</td><td>$\left(V_n(2k,-1), 2\,U_n(2k,-1)\right)$</td><td>tamsayı çözümü yoktur</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{5}$</td><td colspan="2">$[2, \overline{4}]$</td><td>$\left(\frac{L_{6n}}{2}, \frac{F_{6n}}{2}\right)$</td><td>$\left(\frac{L_{6n-3}}{2}, \frac{F_{6n-3}}{2}\right)$</td><td>$(L_{2n}, F_{2n})$</td><td>$(L_{2n-1}, F_{2n-1})$</td></tr>
</table>

Çizelge 5.4. $d = k^2 \pm 4$ ve $d = k^2 \pm 1$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ve $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell Denklemlerinin Çözümler

KAYNAKLAR

[1] ADLER, A., CLOURY, J.E., The Theory of Numbers, A text and Source Book of Problems, Jones and Bartlett Publishers, Baston, MA., 1995.

[2] REDMOND, D., Number Theory: An Introduction, Markel Dekker, Inc, 1996.

[3] KONINCK, J., MERCIER, A., 1001 Problems in Classical Number Theory, American Mathematical Society, 2007.

[4] ROBERTSON, J., Solving the generalized Pell equation $\mathrm{x}^2 - \mathrm{Dy}^2 = \mathrm{N}$, http://hometown.aol.com/jpr2718/pell.pdf, May 2003. (Description of LMM Algorithm for solving Pell's equation).

[5] ROBERTSON, J., On D so that $x^2 - Dy^2$ represents m and $-m$ and not -1, Acta Mathematica Academia Paedogogocae Nyiregyhaziensis, 25, 2009.

[6] JONES, J. P., Representation of Solutions of Pell Equations Using Lucas Sequences, Acta Academia Pead. Agr., Sectio Mathematicae 30, 2003.

[7] KALMAN, D., MENA, R., The Fibonacci Numbers exposed, Mathematics Magazine 76, 2003.

[8] KESKİN, R., Solutions of Some Quadratic Diophantine Equations, Computers and Mathematics with Applications, 60, 2225-2230, 2010.

[9] MCDANIEL, W. L., Diophantine Representation of Lucas Sequences, The Fibonacci Quarterly 33, 1995.

[10] MELHAM, R., Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers, Portugaliae Mathematica 56(3), 309-317, 1999.

[11] JACOBSON, M. J., Hugh C. Williams, Solving the Pell Equation, Springer, (2006).

[12] NAGELL, T., Introduction to Number Theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1981.

[13] RIBENBOIM, P., My Numbers, My Friends, Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

[14] ROBINIWITZ, S., Algorithmic Manipulation of Fibonacci Identities, in: Application of Fibonacci Numbers, vol. 6, Kluwer Academic Pub., Dordrect, The Netherlands, 1996.

[15] LEVEQUE, W.J., Topics in Numbers Theory, Printed in the United States of America, 1956.

[16] MOLLIN, R. A., Fundamental Number Theory with Applications, CRC Press, Boca Raton, New York-London-Tokyo 1998.

[17] STOLT, B., On the Diophantine Equation $u^2 - dv^2 = -4N$, Arkiv för Math., 2 , 1-23, 1951.

[18] PEKASİL, M., Sürekli Kesirler ve Pell Denklemleri, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya 2006.

[19] SMITH, J., Solvability Characterizations of Pell Like Equations, Boise State University, Master of Scince in Mathematics, 2009.

[20] WALDSCHMİDT, M., Pell's Equation, http://www.math.jussieu.fr/_miw/articles/pdf/Bamako/Pell2010.pdf, 2010.

[21] LENSTRA, H. W., Solving the Pell equation, Notices Amer. Math. Soc, 49 No. 2 February 2002.

[22] BARBEAU, E. J., Pell's Equation, Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[23] PRIDDIS, N. C., Some Congruence Properties of Pell's Equation, Brigham Young University, Master of Science, 2009.

[24] KAUFER, A. H., Applications of Continued Fractions in Cryptography and Diophantine Equations, Master of Science in the School of Mathematical Sciences Rochester Institute of Technology.

[25] ROSEN, H.K., Elementary Number Theory And Its Application 3th Edition, Addison-Wesley, 1993.

[26] ZHIWEI, S., Singlefold Diophantine Representation of the Sequence $u_0 = 0, u_1 = 1$ and $u_{n+2} = mu_{n+1} + u_n$, Pure and Applied Logic, Beijing Univ. Press, Beijing, 97-101, 1992.

[27] WRIGHT, M., Pell Equations, Undegrad honors Project, Messiah College 2006.

[28] BURTON, D. M., Elementary Number Theory, Fourth Editon, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.

[29] ANDERSON, J., BELL, J., Number Theory With Applications, Prentice Hall, 3d Edition, 1997.

[30] CARMICHEAL, R. D., Diophantine Analysis, New York: Wiley, 1915.

[31] MOLLIN, R. A., Solving Diophantine equations via Lucas-Lehmer theory, Int. Math. Forum, Vol. 5, no. 25-28, 1339-1346, 2010.

[32] SHANKS, D., Solved And Unsolved Problems In Number Theory, Chelsea Publishing Company, New York, Fourth Edition, 1993.

[33] WHITFORT, E. E., The Pell Equation, College of the City of New York, New York, 1912.

[34] MOLLIN, R. A., A Note on the Negative Pell Equation, International Journal of Algebra, Vol. 4, no. 19, 2010.

[35] OLDS, C.D., Continued Fractions, Random House, New Mathematical Library, 1963.

[36] NIVEN, I., ZUCKERMAN, S.H., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley Sons Inc., New York, 1972.

[37] VAJDA, S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications, Ellies Horwood Limited Publ., England, 1989.

[38] BALCI, M., Matematik Analiz 2, Balcı Yayınları, Ankara, 1997.

[39] DEMİRTÜRK, B., Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri ve Bazı Uygulamaları, Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010.

[40] KESKİN, R., ŞİAR, Z., KARAATLI, O., On The Diophantine Equations $x^2 - kxy + y^2 - 2^n = 0$, Czechoslovak Journal of Mathematics (accepted).

[41] KESKİN, R., ŞİAR, Z., KARAATLI, O., On The Diophantine Equations $x^2 - kxy + y^2 + 2^n = 0$, Miskolc Mathematical Notes (accepted).

ÖZGEÇMİŞ

Merve GÜNEY, 23.11.1988 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2005 yılında Sakarya Mithatpaşa Şükrü Ayna Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2009 yılında bitirdi. 2009-2010 eğitim öğretim yılları arasında Sakarya Kavram Dershanesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2010-2011 yılları arasında Sakarya Üniversitesi'nde formasyon eğitimi aldı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.