T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ESNEK KONİ METRİK UZAYLARA GİRİŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Dilek KESİK**

| | | |
|---|---|---|
| **Enstitü Anabilim Dalı** | : | **MATEMATİK** |
| **Enstitü Bilim Dalı** | : | **TOPOLOJİ** |
| **Tez Danışmanı** | : | **Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ** |

**Aralık 2017**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ESNEK KONİ METRİK UZAYLARA GİRİŞ

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Dilek KESİK**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Bu tez 21.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.**

| | | |
|---|---|---|
| **Doç.Dr.** | **Doç.Dr.** | **Doç.Dr.** |
| **Ali DEMİR** | **İsmet ALTINTAŞ** | **Mahmut AKYİĞİT** |
| **Jüri Başkanı** | **Üye** | **Üye** |

# BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Dilek KESİK
21.12.2017

# ÖNSÖZ

Bilimin hemen hemen her dalında belirsizlik içeren problemleri matematiksel olarak modellemek ve belirsizlikle başa çıkmak amacıyla 1999 yılında esnek küme teorisinin, bir matematiksel araç olarak ortaya atılması, son yıllarda esnek kümelere olan ilgiyi artırmıştır. Günümüzde esnek kümeler üzerine matematiksel yapılar kurma ile ilgili çalışmalar hızla ilerlemektedir.

Esnek kümeler üzerine grup, halka, cisim gibi cebirsel yapılar kurulup, özellikleri çalışıldıktan sonra esnek küme teorisi birçok matematikçinin ilgisini çekmiş, esnek vektör uzaylar, esnek normlu uzaylar, esnek metrik uzaylar, esnek topolojik uzaylar v.s üzerine çok sayıda yeni çalışma literatüre kazandırılmıştır.

Bu çalışmanın her aşamasında matematiksel bakış açısını, bilgisini, öngörüsünü ve tecrübesini benimle paylaşan değerli hocam Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bana her türlü desteği veren aileme teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $A$ | : Parametreler kümesi |
| $E$ | : Evrensel küme |
| $(F,A)$ | : Esnek küme |
| $\tilde{E}$ | : Mutlak esnek küme |
| $\Phi$ | : Esnek boş küme |
| $S_A(E)$ | : E evrenseli üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi |
| $\tilde{x}$ | : Esnek eleman |
| $\tilde{r}$ | : Esnek reel sayı |
| $\overline{r}$ | : Her $\lambda$ parametresi için $\tilde{r}(\lambda)=r$ ile tanımlı özel esnek reel sayı |
| $S(\tilde{E})$ | : $\Phi$ esnek küme ve her $\lambda$ parametresi için $F(\lambda)\neq\emptyset$ olan esnek kümelerin ailesi |
| $SE(F,A)$ | : $(F,A)$ kümesinin esnek elemanlarının ailesi |
| $\mathbb{R}(A)$ | : Esnek reel sayılar ailesi |
| $\{\tilde{x}_n\}$ | : Esnek elemanlarının dizisi |
| $B(\tilde{x},\tilde{c})$ | : Esnek elemanlardan oluşan açık yuvar |
| $SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))$ | : Esnek açık yuvar |
| $SS[B(\tilde{x},\tilde{c})]$ | : Esnek kapalı yuvar |
| $\tau_{\tilde{c}}$ | : Esnek koni metrik topoloji |
| $\tilde{\cup}$ | : Esnek birleşim işlemi |
| $\tilde{\cap}$ | : Esnek kesişim işlemi |
| $\tilde{\subset}$ | : Esnek kapsama |

$\tilde{<}$ : Esnek küçüklük

$\tilde{\leq}$ : Esnek küçük eşitlik

$\tilde{\prec}$ : Esnek sıralama

$\Cup$ : Elemanter birleşim işlemi

$\Cap$ : Elemanter kesişim işlemi

EET : Elemanter esnek topoloji

BCK=BCI : Dolaylı anlatım içeren önerme hesabı

$\mathfrak{B}$ : Esnek baz

# ÖZET

Anahtar kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, elemanter esnek işlemler, esnek koni metrik, yakınsama, tamlık, sabit nokta teoremleri.

Doğruluk değeri göreceli olan kavramların matematiksel olarak modelleme girişimleri belirsizlik içeren problemlere ilgiyi artırmıştır. Bu problemlerin modellenmesi ve çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirildi. Bu teoriler arasında en ilgi çekicilerden birisi, bulanık kümeler teorisidir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanabilir. Her bir özel durumda üyelik fonksiyonu kurulduğu için son derece bireyseldir. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu ihtiyacı karşılamak ve belirsizliklerle başa çıkmak amacıyla günümüzde esnek küme teorisi, bir matematiksel araç olarak kullanılmaktadır. Esnek küme teorisi, bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine bir seçim dönüşümü ile belirsizliği ortadan kaldırmayı amaçlamaktadır. Sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, yöneylem araştırması, Riemann integrali, Peron integrali, olasılık teorisi, ölçüm teorisi gibi birçok matematik alanına esnek küme teorisi başarıyla uygulanmıştır. Yakın geçmişte esnek küme üzerine grup, halka ve cisim gibi birçok cebirsel yapı ve vektör, norm, metrik ve topolojik gibi uzaysal yapılar başarıyla kurulmuş ve oldukça ilgi çekici sonuçlar elde edilmiştir. Bu yöndeki çalışmalar hızla devam etmektedir.

Bu tezde, Esnek Banach uzaylarında esnek koni kavramı tanımlanmakta ve esnek kümeler üzerine, esnek eleman yardımıyla esnek koni metrik yapısı kurulmaktadır. Esnek koni metrik uzaylar ile klasik koni metrik uzaylar arasındaki ilişkiler ispatlanmakta ve örnekler verilmektedir. Esnek koni metrik uzaylarda esnek açık ve esnek kapalı yuvarlar, esnek açık kümeler tanımlanmakta ve temel özellikleri verilmektedir. Hangi şartlar altında esnek açık kümelerin elemanter esnek birleşimin ve elemanter esnek kesişiminin açık olduğu ispatlanmakta ve bir esnek koni metrik uzayların elemanter işlemler altında esnek topolojik uzay olduğu gösterilmektedir. Aynı zamanda esnek koni metrik uzaylarda dizilerin yakınsaması ve Cauchy dizileri kavramlar ve özellikleri verilmektedir. Son olarak esnek koni metrik uzaylarda bazı önemli sabit nokta teoremleri esnek eleman üzerinden ifade ve ispat edilmektedir.

Bu tez kapsamında elde edilen sonuçlar, bu konulardaki çalışmalara kaynak teşkil edecek ve ileri çalışmalara ışık tutacak niteliktedir.

# INTRODUCTION TO SOFT CONE METRIC SPACES


## SUMMARY

Keywords: Soft set, soft element, elementary operations, soft cone metric, convergence, completeness, fixed point theorems

Mathematical modeling attempts of Concepts that are relative to accuracy have increased the interest in the problems involving uncertainty. Different theories such as interval mathematics, probability theory, fuzzy set theory, approximated set theory, soft set theory have been developed for modeling and solving these problems. One of the most interesting of these theories is the fuzzy set theory. A fuzzy set can be defined by its membership function. Since a membership function is set up for each particular case it is extremely individual. For this reason, a set theory that is independent of the membership function construction was needed.

In order to meet this need and to deal with uncertainty, soft set theory is used as a mathematical tool at the present time. In contrast to the fuzzy set and intuitive fuzzy set theory, the flexible set theory aims to remove ambiguity with a selection transformation instead of a real valued function. The flexible set theory has been successfully applied to many mathematical fields such as continuous differentiable functions, game theory, navigation research, Riemann integral, Peron integral, probability theory, measurement theory. In the recent past, many algebraic structures such as groups, rings and objects and spatial structures such as vectors, norms, metrics and topological have been successfully established on soft sets and very interesting results have been obtained.

In this tesis, soft cone concept is defined in soft Banach spaces and soft cone metric structure is established on soft clusters with soft element. Relations between soft cone metric spaces and classical cone metric spaces are proved and examples are given. The soft open ball, soft closed ball, soft open set in soft cone metric spaces are defined and their basic properties are given. Under what conditions, it is proved that the elementary union and elementary intersection of soft open sets are open and a soft conic metric space is shown to be soft topological space relative to elementary operations. Also, the concepts of the convergence of sequences and Cauchy sequences in soft conic metric spaces and their properties are given. Finally, some important fixed point theorems in soft conic metric spaces are expressed and proved via soft element.

The results obtained within the scope of this tesis will be the basis for further studies in this context.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

Doğruluk değeri göreceli olan kavramları matematiksel olarak modelleme arzusu, birçok araştırmacının belirsizlik içeren problemlere karşı ilgi duymasını sağlamıştır. Bu problemleri klasik Aristo mantığı ile matematiksel olarak modellemek her zaman kolay değildir. Çünkü klasik matematiksel yaklaşımda, bir varlık ya bir kümenin elemanıdır ya da değildir. Günlük hayatta sıkça kullanılan güzel ev, soğuk hava, mutlu insan, vb. ifadeler kişiden kişiye göre değiştiği için kesinlik içermezler. Kesinlik içermeyen belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesi ve belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirildi. Bu teoriler arasında, en göze çarpanlardan birisi, Zadeh'in bulanık kümeler teorisidir [1]. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanabilir. Her bir özel durumda üyelik fonksiyonu kurulduğu için son derece bireyseldir. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu ihtiyacı karşılamak ve belirsizlikle başa çıkmak amacıyla 1999 yılında Molodtsov [2] tarafından esnek küme teorisi, bir matematiksel araç olarak ortaya atıldı. Esnek küme teorisi, bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine bir seçim fonksiyonuyla belirsizliği ortadan kaldırmayı amaçlamaktadır. Molodtsov [2,3] sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, yöneylem araştırması, Riemann integrali, Peron integrali, olasılık teorisi, ölçüm teorisi gibi birçok alana esnek küme teorisini başarıyla uygulamıştır.

Son zamanlarda matematiğin birçok alanında esnek küme teorisi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Maji ve ark. [4–6], Pawlak'ın [7] yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümenin uygulamasını sundular, esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladılar ve bulanık esnek kümeler üzerinde yaptıkları çalışmadan sonra sezgisel bulanık esnek küme teorisini ortaya attılar [6]. Xiao ve ark. [8] esnek küme temelli hesaplama metodu üzerine, Chen ve ark. [9] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine ve Mushrif ve ark. [10] esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine çalışmalar yaptılar. Yang ve ark. [11,12] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla karar verme problemini analiz ettiler. Ayrıca aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlayarak bu yeni kümenin kesişim, birleşim ve De Morgan gibi temel küme işlemi özelliklerinin sağladığını gösterdiler.

Yakın zamanda esnek kümeler üzerine cebirsel ve topolojik yapılar gibi matematiksel yapılar kurup bu yapılara göre esnek kümelerin özelliklerini ortaya çıkaran birçok çalışma yapılmaktadır. Aktaş ve Çağman [13] esnek grupların bir tanımını vererek, bazı temel özelliklerini elde ettiler. Yine Çağman ve ark. [14] esnek topoloji kavramını tanımlayıp temel özelliklerini incelediler. Feng ve ark. [15–17] esnek yarı halkayı tanımlayıp temel özelliklerini inceledikten sonra karar vermeye dayalı bulanık esnek kümeye ayarlanabilir yaklaşım tanımını verip bir uygulama sundular ve aralık değerli bulanık esnek kümelere dayalı olarak seviye esnek kümelerinin karar vermede uygulanmasını verdiler. 2008 yılında Jun [18] esnek BKC=BCI cebirlerini tanımladıktan sonra arkadaşlarıyla birlikte birçok önemli çalışma yaptılar. BCK cebirlerindeki değişmeli ideallere esnek küme teorisini uygulamaları [19], BCK cebirlerindeki ideallere esnek küme teorisini uygulamaları [20], Pseudo d-cebirlerini tanımlamaları [21] ve esnek küme teorisini d-cebirlerine uygulamaları [22], BCK-cebirlerinin esnek p-ideallerini incelemeleri [23], Hilbert cebirlerinde esnek kümelerin uygulamalarını araştırmaları ve bulanık esnek küme teorisini BCK-cebirlerine uygulamaları [24] bu çalışmalarından birkaçıdır. Sun ve ark. [25], Acar ve Tanay [26] Atagün ve Sezgin [27] ve diğer birçok yazar modüllerin, halka ve cisimlerin, esnek yapıları üzerinde çalıştılar. Aygünoğlu ve Aygün [28] bulanık esnek kümelerin bazı özelliklerini inceleyip bulanık esnek fonksiyon ve bulanık esnek homomorfizm tanımlarını verdikten sonra 2011 yılında esnek topolojik uzaylar üzerine bir çalışma yaptılar [29]. Aynı yılda Shabir ve Naz [30] tarafından esnek topolojik yapılar üzerine bir çalışma yayımlandı. Ardından Zorlutuna ve ark. [31] ve Min [32] esnek topolojik uzaylar üzerine temel bazı sonuçlar ortaya koydular. Taşköprü ve Altıntaş [33] henüz hakemlik sürecinde olan bir çalışmalarında esnek kümeler üzerine elemanter esnek küme işlemleri ile yeni esnek topolojik yapılar kurdular.

Günümüzde esnek kümeler ile ilgili analiz konuları yoğun ilgi çekmektedir. Özellikle Das ve Samanta'nın çalışmaları analiz konularına temel oluşturmaktadır. Das ve Samanta [34] esnek reel kümeler esnek reel sayılar, esnek kompleks kümeler ve esnek kompleks sayıları [35] inceledikten sonra esnek noktadan farklı olan esnek eleman kavramını ortaya attılar. Gerek esnek nokta gerekse esnek eleman ışığında, esnek metrik uzaylar [36,37] esnek vektör uzaylar [38], esnek normlu uzaylar [39,40], esnek iç çarpım uzayları [41], esnek Banach uzaylar [42] gibi önemli çalışmalar yaptılar. 2016 yılında Güler ve ark. [43] esnek eleman ışığında esnek G-metrik uzaylarını tanımladılar ve bu uzayda Banach sabit nokta teoremini ispatladılar. Bu literatür özetinden de anlaşılacağı üzere esnek küme teorisi ve onun uygulamaları üzerine yapılan güncel çalışmalar hızla gelişmektedir.

Diğer taraftan son zamanların bir başka ilgi çekici alanı koni metrik uzaylardır. 2007 yılında Huang ve Zhang [44] metrik uzayların bir genellemesi olarak normal koniye sahip koni metrik uzayları tanıtıp, bu uzayda bazı sabit nokta teoremleri ispatladılar. Rezapour ve Hamlbarani [45], koni metrik uzaylarda koninin normalliğine gerek olmadan da Huang ve Zhang'ın sonuçlarının doğru olduklarını gösterdikten sonra koni metrik uzaylar birçok yazarın ilgisini çekti. Bu konuda son zamanlarda yapılan bazı önemli çalışmalar için bakınız [46-52].

Bu tezin temel amacı, esnek kümeler üzerine, esnek eleman yardımıyla esnek koni metrik yapısı kurmak ve esnek koni metrik uzayların topolojik ve tamlık özelliklerini çalışmaktır. Bu amaca uygun olarak aşağıdaki çalışmalar yapıldı.

1. Esnek Banach uzaylarda esnek koni kavramı tanımlandı, çeşitleri açıklandı ve örnekler verildi.

2. Boş olmayan bir esnek küme üzerine esnek elemanlar yardımıyla esnek koni metrik yapısı kuruldu ve kesin (klasik) metrik uzaylarla ilişkileri incelendi.

3. Esnek koni metrik uzayların topolojik özellikleri incelendi ve bir esnek koni metrik uzayın bazı şartlar altında elemanter esnek kesişim ve birleşim işlemlerine göre bir esnek topolojik uzay olduğu ispatlandı.

4. Esnek koni metrik uzaylarda esnek elemanlardan oluşan diziler ele alındı, esnek dizilerin yakınsaklığı ve Cauchy dizilerinin yakınsaklığı incelendi.

5. Esnek koni metrik uzaylarda, klasik koni metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerine benzer, bazı esnek sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edildi.

Bu tezde elde edilen sonuçlar, bu konulardaki çalışmalara kaynak teşkil edecek ve ileri çalışmalara ışık tutacak niteliktedir.

# BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramlar, bir sonraki bölümde tanım ve yapıların kurulmasında, teoremlerin ispatlanmasında önbilgi ve yöntem olarak kulanılacaktır

## 2.1. Esnek Kümeler

**Tanım 2.1.1.** [2] $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi, $E \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $\mathcal{P}(E)$, $E$ kümesinin bütün alt kümelerinin ailesi olsun. Bir $F : A \to \mathcal{P}(E)$ küme değerli dönüşümüne $E$ kümesi üzerinde bir *esnek küme* denir ve $(F, A)$ ikilisi ile gösterilir.

Başka bir ifade ile $E$ kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesine $E$ üzerinde bir *esnek küme* denir. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$ kümesi, $(F, A)$ esnek kümesinin $\lambda$-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak göz önünde bulundurulabilir. Böylece $E$ kümesi üzerinde bir $(F, A)$ esnek kümesi

$$(F, A) = \{(\lambda, F(\lambda)) : \lambda \in A \text{ ve } F(\lambda) \subset E\}$$

şeklinde ikililer ile ifade edilir. $A$ parametre kümesi tarafından parametrelendirilmiş $E$ evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi $S_A(E)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.2.** [2] $(F,A),(G,A)\in S_A(E)$ esnek kümeler olsun.

1. Her $\lambda\in A$ için $F(\lambda)=\varnothing$ ise $(F,A)$ kümesine *esnek boş küme denir* ve $\Phi$ ile gösterilir.
2. Her $\lambda\in A$ için $F(\lambda)=E$ ise $(F,A)$ esnek kümesine *mutlak esnek küme* denir ve $\tilde{E}$ ile gösterilir.
3. Her $\lambda\in A$ için $F(\lambda)\subset G(\lambda)$ ise $(F,A)$ esnek kümesine $(G,A)$ esnek kümesinin *esnek alt kümesi* denir ve $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ ile gösterilir. $(G,A)$ kümesine de $(F,A)$ kümesinin *esnek üst kümesi* denir ve $(G,A)\tilde{\supset}(F,A)$ ile gösterilir.
4. $(F,A)$ kümesi, $(G,A)$ kümesinin esnek alt kümesi ve $(G,A)$ de $(F,A)$ kümesinin esnek alt kümesi ise $(F,A)$ ve $(G,A)$ kümelerine *esnek eşit kümeler* denir.
5. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek kümelerinin *esnek birleşimi* $(H,A)$, her $\lambda\in A$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\cup G(\lambda)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,A)=(F,A)\tilde{\cup}(G,A)$ ile gösterilir.
6. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek kümelerinin *esnek kesişimi* $(H,A)$, her $\lambda\in A$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\cap G(\lambda)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,A)=(F,A)\tilde{\cap}(G,A)$ ile gösterilir.
7. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek kümelerinin *esnek farkı* $(H,A)$, her $\lambda\in A$ için $H(\lambda)=F(\lambda)\setminus G(\lambda)$ şeklinde tanımlanır ve $(H,A)=(F,A)\tilde{\setminus}(G,A)$ ile gösterilir.
8. Her $\lambda\in A$ için $F^c(\lambda)=E-F(\lambda)$ ile tanımlanan $F^c:A\to\mathcal{P}(E)$ dönüşümüne $E$ üzerinde $(F,A)$ esnek kümesinin *esnek tümleyeni* denir ve $(F^c,A)=(F,A)^c$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{E}^c=\Phi$ ve $\Phi^c=\tilde{E}$ olur.

9. Her $(\lambda,\mu)\in A\times A$ için $H(\lambda,\mu)=F(\lambda)\times G(\mu)$ ile tanımlanan $H:A\times A\to\mathcal{P}(E\times E)$ dönüşümüne $(F,A)$ ile $(G,A)$ esnek kümelerinin *kartezyen çarpımı* denir ve $(H,A\tilde{\times}A)=(F,A)\tilde{\times}(G,A)$ ile gösterilir.

**Önerme 2.1.1.** [2,3] $(F,A)$, $(G,A)$ ve $(H,A)$, $E$ üzerinde esnek kümeler olsun. Aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

1. $((F,A)\tilde{\cup}(G,A))^c=(F,A)^c\tilde{\cap}(G,A)^c$,
2. $((F,A)\tilde{\cap}(G,A))^c=(F,A)^c\tilde{\cup}(G,A)^c$,
3. $((F,A)\tilde{\cap}(G,A))\tilde{\cup}(H,A)=((F,A)\tilde{\cup}(H,A))\tilde{\cap}((G,A)\tilde{\cup}(H,A))$,
4. $((F,A)\tilde{\cup}(G,A))\tilde{\cap}(H,A)=((F,A)\tilde{\cap}(H,A))\tilde{\cup}((G,A)\tilde{\cap}(H,A))$.

**Tanım 2.1.3.** [34,37] Bir $\varepsilon:A\to E$ dönüşümüne $E$ kümesi üzerinde bir *esnek eleman* denir. $\varepsilon$, $E$ üzerinde bir esnek eleman ve bir $(F,A)\in S_A(E)$ verildiğinde her $\lambda\in A$ için $\varepsilon(\lambda)\in F(\lambda)$ ise $\varepsilon$ esnek elemanı $(F,A)$ esnek kümesine *aittir* denir ve $\varepsilon\tilde{\in}(F,A)$ ile gösterilir. Burada $(F,A)(\lambda)=\{\varepsilon(\lambda),\varepsilon\tilde{\in}(F,A)\}$ dir Her tek elemanlı esnek küme yalnızca bir tek esnek eleman ile özdeşlenebilir.

Esnek elemanlar için $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\ldots$ gösterimi kullanılmıştır. Her $\lambda\in A$ için $F(\lambda)\neq\varnothing$ olacak şekilde $E$ üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile birlikte $\Phi$ esnek boş kümenin oluşturduğu aile $S(\tilde{E})$ ve $(F,A)\in S(\tilde{E})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının ailesi $SE((F,A))$ ile gösterilir.

**Önerme 2.1.2.** [37] **1.** Bir $(F,A)\in S(\tilde{E})$ esnek kümenin esnek elemanlarının bir ailesi bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir.

2. $\mathfrak{B}$, $\tilde{E}$ mutlak esnek kümenin esnek elemanlarının bir ailesi olmak üzere $\mathfrak{B}$ ailesinin ürettiği esnek küme $SS(\mathfrak{B})$ ile gösterilir.

3. Herhangi bir $(F,A)\in S(\tilde{E})$ esnek kümesi için $SS(SE(F,A))=(F,A)$ olur. Ancak $\tilde{E}$ kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ sınıfı için $SE(SS(\mathfrak{B}))\neq\mathfrak{B}$ olur.

4. $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2\subset SE(\tilde{E})$ olmak üzere $\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}_2$ olsun. Her $\lambda\in A$ için $\mathfrak{B}_1(\lambda)=\mathfrak{B}_2(\lambda)$ ise $SS(\mathfrak{B}_1)=SS(\mathfrak{B}_2)$ olur.

5. Herhangi $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{E})$ esnek kümeleri için $(F,A)$ kümesinin her esnek elemanı $(G,A)$ esnek kümesinin de bir esnek elemanı ise $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olur.

**Uyarı 2.1.1.** [37] $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{E})$ verilsin.

1. $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)\tilde{\cup}(G,A)$ ise $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)$ veya $\tilde{x}\tilde{\in}(G,A)$ olması gerekmez.

2. Herhangi $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{E})$ esnek kümelerinin esnek tümleyenlerinin veya bu iki esnek kümenin esnek kesişiminin $S(E)$ sınıfına ait olması gerekmez.

## 2.2. Esnek Elemanter İşlemler

**Tanım 2.2.1.** [33,37] $(F,A),(G,A)\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

1. $\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}(F,A) \text{ veya } \tilde{x}\tilde{\in}(G,A)\right\}$ olmak üzere $(F,A)\Cup(G,A)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek kümelerinin *elemanter birleşimi* denir. Diğer bir deyişle

$$(F,A)\Cup(G,A)=SS\left(SE(F,A)\cup SE(G,A)\right)$$

olarak tanımlanır.

2. $\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}(F,A) \text{ ve } \tilde{x}\tilde{\in}(G,A)\right\}$ olmak üzere $(F,A)\Cap(G,A)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek kümelerinin *elemanter kesişimi* denir. Diğer bir deyişle

$$(F,A)\Cap(G,A)=SS\left(SE(F,A)\cap SE(G,A)\right)$$

olarak tanımlanır.

3. $\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}\left(F^{c},A\right)\right\}$ olmak üzere $\left(F^{\mathbb{C}},A\right)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine $(F,A)$ esnek kümesinin *elemanter tümleyeni* denir. Diğer bir deyişle

$$\left(F^{\mathbb{C}},A\right)=SS\left(SE\left(F^{c},A\right)\right)$$

olarak tanımlanır.

4. $\mathfrak{B}=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)\tilde{\setminus}(G,A)\right\}$ olmak üzere $(F,A)\mathbf{\setminus}(G,A)=SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek kümelerinin *elemanter farkı* denir. Diğer bir deyişle

$$(F,A)\mathbf{\setminus}(G,A)=SS\left(SE\left((F,A)\tilde{\setminus}(G,A)\right)\right)$$

olarak tanımlanır.

**Önerme 2.2.1.** [33,37] $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için aşağıdaki işlemler geçerlidir.

1. $(F,A) \Cup (G,A) = (F,A) \tilde{\cup} (G,A)$.

2. $(F,A) \Cap (G,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cap} (G,A)$.

3. $(F^{\mathbb{C}},A) \tilde{\subseteq} (F^{c},A)$.

4. $(F,A) \setminus (G,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\setminus} (G,A)$.

5. $(F,A) \Cup (F^{\mathbb{C}},A) \tilde{\subseteq} \tilde{X}$.

6. $(F,A) \Cap (F^{\mathbb{C}},A) = \Phi$.

7. Her $i \in I$ için $(F_i,A) = SS(\mathcal{B}_i)$ olmak üzere $\displaystyle\bigcup\!\!\!\bigcup_{i\in I}(F,A)_i = SS\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{B}_i\right)$.

8. Her $i \in I$ için $(F_i,A) = SS(\mathcal{B}_i)$ olmak üzere $\displaystyle\bigcap\!\!\!\bigcap_{i\in I}(F_i,A) \tilde{\supseteq} SS\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{B}_i\right)$.

**Uyarı 2.2.1.** Herhangi $(F,A),(G,A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $(F,A) \Cap (G,A) = \Phi$ olması $(F,A) \tilde{\subset} (G^{\mathbb{C}},A)$ ve $(G,A) \tilde{\subset} (F^{\mathbb{C}},A)$ olmasını gerektirmez.

Örneğin; $X = \{a,b,c,d\}$ ve $A = \{\lambda,\mu\}$ olmak üzere

$$F = \{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,c\})\},$$
$$G = \{(\lambda,\{c,d\}),(\mu,\{b,c\})\},$$
$$H = \{(\lambda,\{c,d\}),(\mu,\{a,b,d\})\},$$

esnek kümelerini ve onların elemanter tümleyenlerini ele alalım. $(F,A) \Cap (G,A) = \Phi$ ve $(F,A) \Cap (H,A) = \Phi$ olmasına rağmen $(F,A) \tilde{\not\subset} (G^{\mathbb{C}},A)$

veya $(G,A)\tilde{\not\subset}\left(F^{\mathbb{C}},A\right)$ ve $(F,A)\tilde{\not\subset}\left(H^{\mathbb{C}},A\right)$ veya $(H,A)\tilde{\not\subset}\left(F^{\mathbb{C}},A\right)$ olur. Fakat $\left(H^{\mathbb{C}},A\right)\tilde{\subset}(F,A)$ ve $\left(F^{\mathbb{C}},A\right)\tilde{\subset}(H,A)$ olur. Ayrıca $(G,A)\Cap(H,A)\neq\Phi$ olmasına rağmen $\left(G^{\mathbb{C}},A\right)\Cap\left(H^{\mathbb{C}},A\right)=\Phi$ olur.

**Önerme 2.2.2.** [33] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için $(F,A)\Cap(G,A)=\Phi$ ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise $(F,A)\tilde{\subset}(G^{\mathbb{C}},A)$ ve $(G,A)\tilde{\subset}(F^{\mathbb{C}},A)$ olur.

**Lemma 2.2.1.** [33,37] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için

1. $SE\left((F,A)\Cap(G,A)\right)=SE(F,A)\cap SE(G,A)$,
2. $SE\left((F,A)\Cup(G,A)\right)\tilde{\supseteq}SE(F,A)\cup SE(G,A)$.

**Önerme 2.2.3.** [33,37] $(F,A),(G,A),(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ herhangi esnek kümeler olsun.

1. $\left((F,A)\Cap(G,A)\right)\Cup(H,A)\tilde{\subseteq}\left((F,A)\Cup H,A)\right)\Cap\left((G,A)\Cup(H,A)\right)$,
2. $\left((F,A)\Cup(G,A)\right)\Cap(H,A)\tilde{\supseteq}\left((F,A)\Cap(H,A)\right)\Cup\left((G,A)\Cap(H,A)\right)$.

Hangi şartlarda elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerinin $S\left(\tilde{X}\right)$ üzerinde dağılma özelliğine sahip olacağı aşağıdaki önermede verilmiştir.

**Önerme 2.2.4.** [33] Herhangi $(F,A),(G,A),(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için

1. Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise

$$\big((F,A)\Cap(G,A)\big)\Cup(H,A)=\big((F,A)\Cup H,A)\big)\Cap\big((G,A)\Cup(H,A)\big).$$

2. Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $(G,A)\tilde{\cap}(H,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise

$$\big((F,A)\Cup(G,A)\big)\Cap(H,A)=\big((F,A)\Cap(H,A)\big)\Cup\big((G,A)\Cap(H,A)\big).$$

**Önerme 2.2.5.** [33] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için

1. $(F^{c},A)\Cap(G^{c},A)\neq\Phi$ ise $\big((F,A)\Cup(G,A)\big)^{c}=(F^{c},A)\Cap(G^{c},A)$,

2. $\big((F,A)\Cap(G,A)\big)^{c}\neq\Phi$ ise $\big((F,A)\Cap(G,A)\big)^{c}=(F^{c},A)\Cup(G^{c},A)$.

**Önerme 2.2.6.** [33] Herhangi $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri için

1. $(F^{c},A)\Cap(G^{c},A)\neq\Phi$, $(F^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ve $(G^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ise

$$\big((F,A)\Cup(G,A)\big)^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}},A)\Cap(G^{\mathbb{C}},A).$$

2. $(F,A)\Cap(G,A)\neq\Phi$, $(F^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ve $(G^{\mathbb{C}},A)\neq\Phi$ ise

$$\big((F,A)\Cap(G,A)\big)^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}},A)\Cup(G^{\mathbb{C}},A).$$

**Uyarı 2.2.2.** [33] Yukarıdaki önermede de görüldüğü gibi elemanter işlemler De Morgan kurallarını genelde sağlamazlar. Eğer her $(F,A),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ için

$(F,A)\tilde{\cap}(G,A)\in S(\tilde{X})$, $(F^c,A),(G^c,A)\in S(\tilde{X})$ ve $(F^c,A)\tilde{\cap}(G^c,A)\in S(\tilde{X})$ ise De Morgan kuralları elemanter işlemler için sağlanır.

**Tanım 2.2.2.** [33] $\mathcal{T}\subset S(\tilde{X})$ esnek elemanların bir ailesi olmak üzere

1. $\Phi,\tilde{X}\in\mathcal{T}$,

2. $\{U_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{T}$ için, $\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathcal{T}$,

3. $\{U_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathcal{T}$ için, $\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\mathcal{T}$.

şartları sağlanırsa $\mathcal{T}$ sınıfına $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter işlemlere göre bir *esnek topoloji* veya *elemanter esnek topoloji* ve $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ üçlüsüne de *elemanter esnek topolojik (EET) uzay* adı verilir.

**Tanım 2.2.3.** [33] $\mathcal{B}\subset S(\tilde{X})$ esnek kümelerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{B}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa $\tilde{X}$ üzerindeki bir *elemanter esnek topoloji için esnek bazdır* denir.

B1. Her $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{x}\tilde{\in}B$ olacak şekilde en az bir $B\in\mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

B2. $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ için $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $\tilde{x}\tilde{\in}B_1\Cap B_2$ ise $\tilde{x}\tilde{\in}B_3\tilde{\subset}B_1\Cap B_2$ olacak şekilde $B_3\in\mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

## 2.3. Esnek Reel Sayılar

**Tanım 2.3.1.** [34] $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin ailesi olsun. $F:A\to B(\mathbb{R})$ dönüşümü ile birlikte $(F,A)$ esnek kümesine *esnek reel küme* denir. Eğer $(F,A)$ esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise $(F,A)$ kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirerek bu esnek kümeye *esnek reel sayı* denir. Tüm esnek reel kümelerin ailesi $\mathrm{R}(A)$, tüm esnek reel sayıların ailesi $\mathbb{R}(A)$ ve negatif olmayan esnek reel sayıların ailesi $\mathbb{R}(A)^*$ ile gösterilir. $\mathbb{R}(A)=SE(\tilde{\mathbb{R}})$ olduğu açıktır. Esnek sayılar için $\tilde{r},\tilde{s},\tilde{t},\dots$ gösterimi ve özel olarak her $\lambda\in A$ için $\tilde{r}(\lambda)=r$ ise $\overline{r}$ gösterimi kullanılmıştır.

**Tanım 2.3.2.** [34] $\tilde{r},\tilde{s}\in\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayıları verildiğinde bu esnek reel sayıların sıralaması, her $\lambda\in A$ için

1. $\tilde{r}(\lambda)\leq\tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r}\,\tilde{\leq}\,\tilde{s}$,

2. $\tilde{r}(\lambda)\geq\tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r}\,\tilde{\geq}\,\tilde{s}$,

3. $\tilde{r}(\lambda)<\tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r}\,\tilde{<}\,\tilde{s}$,

4. $\tilde{r}(\lambda)>\tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r}\,\tilde{>}\,\tilde{s}$.

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.3.3.** [34] $(F,A),(G,A)\in\mathrm{R}(A)$, esnek reel kümeler olsun.

1. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek reel kümelerinin *toplamı* her $\lambda\in A$ için

$$(F+G)(\lambda)=\{a+b:a\in F(\lambda),b\in G(\lambda)\}$$

şeklinde tanımlanır.

2. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek reel kümelerinin *farkı* her $\lambda\in A$ için

$$(F-G)(\lambda)=\{a-b:a\in F(\lambda),b\in G(\lambda)\}$$

ile tanımlanır.

3. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek reel kümelerinin *çarpımı* her $\lambda \in A$ için

$(F.G)(\lambda)=\{a.b : a\in F(\lambda), b\in G(\lambda)\}$

ile tanımlanır.

4. $(F,A)$ ve $(G,A)$ esnek reel kümelerinin *bölümü* her $\lambda \in A$ için

$(F/G)(\lambda)=\{a/b : a\in F(\lambda), b\in G(\lambda)\setminus\{0\}\}$

ile tanımlanır.

$\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayılar sınıfı üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri $\mathrm{R}(A)$, üzerindeki işlemlere benzer şekilde yapılır. Örneğin; $\tilde{r},\tilde{s}\in\mathbb{R}(A)$ verildiğinde bu iki esnek reel sayının toplamı, her $\lambda\in A$ için

$(\tilde{r}+\tilde{s})(\lambda)=\{a+b : a=\tilde{r}(\lambda), b=\tilde{s}(\lambda)\}$

olmak üzere $\tilde{r}+\tilde{s}$ biçiminde ve bu iki esnek reel sayının çarpımı, her $\lambda\in A$ için

$(\tilde{r}.\tilde{s})(\lambda)=\{a.b : a=\tilde{r}(\lambda), b=\tilde{s}(\lambda)\}$

olmak üzere $\tilde{r}.\tilde{s}$ biçimindedir. Bu durumda $\mathbb{R}(A)$, tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim olur.

## 2.4. Esnek Fonksiyonlar

**Tanım 2.4.1.** [33] $X$ ve $Y$ boştan farklı iki küme ve $A$ boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f : SE(\tilde{X})\rightarrow SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir *esnek dönüşüm* denir.

$X$ ve $Y$ boştan farklı herhangi iki küme, $A$ boştan farklı parametreler kümesi ve $\{f_\lambda : \lambda \in A\}$, $X$ kümesinden $Y$ kümesine kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$f(\tilde{x})(\lambda) = f_\lambda(\tilde{x}(\lambda))$

şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşümdür.

Yine $X$ ve $Y$ boştan farklı herhangi iki küme ve $A$ boştan farklı parametreler kümesi olsun. $g : X \to Y$, bir kesin dönüşüm olmak üzere her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = g(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşümdür. Bu şekildeki bir esnek dönüşüme $g$ kesin dönüşümü tarafından *üretilen esnek dönüşüm* denir.

Böylece, $X$ kümesinden $Y$ kümesine herhangi bir kesin dönüşüm bir esnek dönüşüme genişletilebilir.

Dikkat edilmelidir ki, kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesi bir esnek dönüşüm olmasına rağmen bir esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesi olmayabilir.

Böylece esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi parametrize edilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

**Teorem 2.4.1.** [33] $X$ ve $Y$ boştan farklı herhangi iki küme ve $A$ boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü aşağıdaki $(f_*)$ şartını sağlarsa her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\xi \in X$ için $\tilde{x}(\lambda) = \xi$ olmak üzere $f_\lambda(\xi) = f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda : X \to Y$, her bir $\lambda \in A$ için bir kesin dönüşümdür.

**($f_*$).** Her $\lambda \in A$ ve $\xi \in X$ için $\left\{ f(\tilde{x})(\lambda) : \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \ni \tilde{x}(\lambda) = \xi \right\}$ tek elemanlı bir kümedir.

**Tanım 2.4.2.** [33] $X$ ve $Y$ boştan farklı iki küme ve $A$ boştan farklı parametreler kümesi olsun. ($f_*$) şartını sağlayan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir *esnek fonksiyon* denir.

## 2.5. Esnek Metrik Uzaylar

**Tanım 2.5.1.** [37] $X \neq \varnothing$ bir evrensel küme ve $A \neq \varnothing$ bir parametreler kümesi olmak üzere ve $d : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \to \mathbb{R}(A)^*$ esnek dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $d$ dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde *esnek metrik* denir.

m1. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\geq} \overline{0}$,

m2. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$,

m3. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$,

m4. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\leq} d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \tilde{y})$.

$\tilde{X}$ esnek kümesine, üzerindeki $d$ esnek metriği ile birlikte *esnek metrik uzay* denir ve $(\tilde{X}, d, A)$ ile gösterilir.

$\{ d_\lambda : \lambda \in A \}$, bir $X$ kesin kümesi üzerindeki kesin metriklerin herhangi parametrize edilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$$d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$$

şeklinde tanımlanan $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metrik olur.

Benzer şekilde $\rho$, bir $X$ kesin kümesi üzerindeki herhangi kesin metrik olmak üzere, her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=\rho(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü bir esnek metrik olur. Bu esnek metriğe $\rho$ kesin metriği tarafından *üretilen esnek metrik* denir. Böylece $X$ üzerindeki herhangi metrik bir esnek metriğe genişletilebilir.

**Teorem 2.5.1.** [37] Eğer $\tilde{X}$ üzerinde bir $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathbb{R}(A)^*$ esnek metriği aşağıdaki (m5) şartını sağlarsa her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d_\lambda(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))=d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $d_\lambda:X\times X\to\mathbb{R}^+$, her $\lambda\in A$ için $X$ üzerinde bir metriktir.

**(m5).** Her $\lambda\in A$, $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $(\eta,\xi)\in X\times X$ için $\{d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda):\tilde{x}(\lambda)=\eta,\tilde{y}(\lambda)=\xi\}$ tek elemanlı bir kümedir.

## 2.6. Esnek Banach Uzaylar

**Tanım 2.6.1.** [38] $E$, bir $K$ cismi üzerinde bir vektör uzay, $A$ boştan farklı bir parametreler kümesi ve $(F,A)$, $E$ üzerinde bir esnek küme olsun. Her $\lambda\in A$ için $F(\lambda)$, $E$ vektör uzayının bir alt uzayı ise $(F,A)$ esnek kümesine *esnek vektör uzay* veya *esnek lineer uzay* denir. Esnek vektör uzayın her bir esnek elemanına bir *esnek vektör* denir ve $\tilde{x}$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $(K, A)$ esnek kümesine *esnek cisim* ve esnek cismin her bir elemanına *esnek skaler* adı verilir ve $\tilde{\alpha}$ ile gösterilir.

$\theta$, $E$ vektör uzayının sıfır vektörü olmak üzere her $\lambda \in A$ için $\tilde{x}(\lambda) = \theta$ ise $\tilde{x}$ elemanına *sıfır esnek vektör* denir ve $\Theta$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $\tilde{x}, \tilde{y}$ esnek vektörlerin $\tilde{x} + \tilde{y}$ toplamı $(\tilde{x} + \tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) + \tilde{y}(\lambda)$ ve $\tilde{\alpha}.\tilde{x}$ skaler çarpımı $(\tilde{\alpha}.\tilde{x})(\lambda) = \tilde{\alpha}(\lambda).\tilde{x}(\lambda)$ şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.6.2.** [39] $\tilde{E}$ mutlak esnek lineer uzay ve $\|.\| : SE(\tilde{E}) \to \mathbb{R}(A)^*$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\|.\|$ dönüşümüne $\tilde{E}$ üzerinde bir *esnek norm* denir.

n1. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{E}$ için $\|\tilde{x}\| \tilde{\geq} \overline{0}$,

n2. $\|\tilde{x}\| = \overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \Theta$,

n3. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve her $\tilde{\alpha}$ skaleri için $\|\tilde{\alpha}.\tilde{x}\| = |\tilde{\alpha}|.\|\tilde{x}\|$,

n4. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{E}$ için $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \tilde{\leq} \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$.

$\tilde{E}$ mutlak esnek lineer uzayına üzerindeki $\|.\|$ esnek norm dönüşümü ile birlikte *esnek normlu uzay* veya *esnek normlu lineer uzay* denir ve $(\tilde{E}, \|.\|, A)$ ile gösterilir.

**Örnek 2.6.1.** [39] $\mathbb{R}(A)$, $A$ parametre kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek reel sayıların kümesi olsun. Her $\tilde{x}\tilde{\in}\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayısı için $\|.\|:\mathbb{R}(A)\rightarrow\mathbb{R}(A)^{*}$ fonksiyonu $\|\tilde{x}\|=|\tilde{x}|$ şeklinde tanımlansın. Burada $|\tilde{x}|$ esnek reel sayıların modülüdür. Bu durumda $\|.\|:\mathbb{R}(A)\rightarrow\mathbb{R}(A)^{*}$ fonksiyonu esnek norm aksiyomlarını sağladığından bir esnek normdur. $(\mathbb{R}(A),\|.\|,A)$ esnek normlu bir uzaydır.

**Tanım 2.6.3.** [39] $(\tilde{E},\|.\|,A)$ bir esnek normlu uzay, $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{E}$ ve $\tilde{\varepsilon}\tilde{\in}\mathbb{R}(A)^{*}$ olsun. Bu durumda

$$B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})=\{\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}:\|\tilde{x}-\tilde{y}\|\tilde{<}\tilde{\varepsilon}\}\subset SE(\tilde{E}),$$

$$B[\tilde{x},\tilde{\varepsilon}]=\{\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}:\|\tilde{x}-\tilde{y}\|\tilde{\leq}\tilde{\varepsilon}\}\subset SE(\tilde{E}),$$

$$S(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})=\{\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}:\|\tilde{x}-\tilde{y}\|=\tilde{\varepsilon}\}\subset SE(\tilde{E})$$

ailelerine sırasıyla $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı *açık yuvar*, *kapalı yuvar* ve *küre*, $SS(B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$, $SS(\overline{B}(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$ ve $SS(S(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}))$ esnek kümelerine de sırasıyla $\tilde{x}$ merkezli $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı *esnek açık yuvar*, *esnek kapalı yuvar* ve *esnek kür*e denir.

**Tanım 2.6.4.** [39] $(\tilde{E},\|.\|,A)$, bir esnek normlu uzay olsun.

1. $(\tilde{E},\|.\|,A)$ esnek normlu uzayında bir $(F,A)$ esnek kümesi verilsin. Bir $\tilde{x}\tilde{\in}(F,A)$ esnek elemanı için $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{\varepsilon})\subset SE(F,A)$ olacak şekilde $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ esnek reel sayısı varsa $\tilde{x}$ esnek elemanına $(F,A)$ esnek kümesinin bir *iç elemanı* denir. $(F,A)$ esnek kümesinin tüm iç elemanlarının kümesi $Int(F,A)$ ile gösterilir. Buradan $SS(Int(F,A))$ esnek kümesine de $(F,A)$ esnek kümesinin *esnek içi* denir.

2. $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ bir esnek normlu uzay ve $\mathfrak{B}\subset SE\left(\tilde{E}\right)$ ailesi boştan farklı olsun. Eğer bir $\tilde{x}\in\mathfrak{B}$ esnek elemanı için $\tilde{x}\in B\left(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}\right)\subset\mathfrak{B}$ olacak şekilde $\tilde{\varepsilon}\mathrel{\tilde{>}}\overline{0}$ esnek reel sayısı varsa $\tilde{x}$ esnek elemanına $\mathfrak{B}$ ailesinin bir *iç elemanı* denir. $\mathfrak{B}$ ailesinin her elemanı iç eleman ise $\mathfrak{B}$ ailesine $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ *içinde açıktır* denir. Buradan $SS\left(\mathfrak{B}\right)$ esnek kümesine de *esnek açık* denir.

3. $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ esnek normlu uzay olsun. Bir $\left(F,A\right)\in S\left(\tilde{E}\right)$ esnek kümesinin esnek tümleyeni $\left(F,A\right)^{c}$, $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ içinde esnek açık ise $\left(F,A\right)$ esnek kümesine $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ içinde *esnek kapalıdır* denir.

**Tanım 2.6.5.** [39] $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ bir esnek normlu uzayı verilsin.

1. $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ esnek normlu uzayının esnek elemanlarından oluşan bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi verilsin. Eğer $n\to\infty$ için $\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|\to\overline{0}$ ise $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{E}$ noktasına *yakınsaktır* denir. Bunun anlamı, keyfi seçilen her $\tilde{\varepsilon}\mathrel{\tilde{>}}\overline{0}$ için bir $N=N\left(\tilde{\varepsilon}\right)$ var öyle ki $\forall n>N$ için $\overline{0}\mathrel{\tilde{\leq}}\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|\mathrel{\tilde{<}}\tilde{\varepsilon}$ olur. Yani $n>N\Rightarrow\tilde{x}_n\in B\left(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}\right)$. Burada $B\left(\tilde{x},\tilde{\varepsilon}\right)$, $\tilde{x}$ merkezli ve $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı açık yuvardır.

2. $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ esnek normlu uzayında esnek elemanlarından oluşan bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\tilde{\varepsilon}\mathrel{\tilde{>}}\overline{0}$ esnek reel sayısına karşılık bir $N=N\left(\tilde{\varepsilon}\right)$ varsa öyle ki $\forall m,n>N$ için $\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|\mathrel{\tilde{\leq}}\tilde{\varepsilon}$ ise diğer bir ifadeyle $m,n\to\infty$ iken $\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|\to\overline{0}$ ise $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

3. $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ esnek normlu lineer uzayı verilsin. Eğer $\tilde{E}$ uzayında esnek elemanlardan oluşan her Cauchy dizisi bu uzayda bir esnek elemana yakınsıyor ise $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ esnek normlu uzayına *tamdır* denir. Her tam esnek normlu uzaya *esnek Banach uzayı* adı verilir.

**Teorem 2.6.1.** [39] $A$ sonlu parametreler kümesi olmak üzere $\left(\tilde{\mathbb{R}},|.|,A\right)$ uzayında esnek elemanlardan oluşan her Cauchy dizisi yakınsaktır.

Başka bir ifadeyle sonlu parametreler kümesi üzerinde alışılmış modülün ürettiği esnek norm ile esnek reel sayıların ailesi ürettiği mutlak esnek reel küme, Banach uzayıdır.

**Önerme 2.6.1.** [39] $\left(\tilde{E},\|.\|,A\right)$ esnek normlu lineer uzay olsun. Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\|\tilde{x}-\tilde{y}\|$ şeklinde tanımlanan $d:SE\left(\tilde{E}\right)\times SE\left(\tilde{E}\right)\to\mathbb{R}\left(A\right)^{*}$ dönüşümü $\tilde{E}$ üzerinde bir esnek metriktir.

## 2.7. Koni Metrik Uzaylar

**Tanım 2.7.1.** [44] $E$ bir reel Banach uzayı ve $P\subset E$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $P\subset E$ alt kümesine bir *koni* denir.

1. $P\neq\emptyset$ ve $P\neq\{\theta\}$ bir kapalı küme, burada $\theta$, $E$ uzayının sıfır vektörünü gösterir.
2. $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\geq 0$, $x,y\in P\Rightarrow ax+by\in P$.
3. $x\in P$ ve $-x\in P\Rightarrow x=\theta$.

$P\subset E$ verildiğinde, $P$ konisine göre bir $\preceq$ kısmi sıralama bağıntısı "$x\preceq y\Leftrightarrow y-x\in P$" şeklinde tanımlanır. $x\preceq y$ ve $x\neq y$ için "$x\prec y\Leftrightarrow y-x\in P$" ifadesine karşılık $x\ll y$ sembolü kullanılır. Burada $int\,P$, $P$ konisinin iç noktalarının kümesidir.

Eğer her $x, y \in E$ için $\theta \prec x \prec y \Rightarrow \|x\| \leq \alpha \|y\|$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı varsa $P$ konisine *normal koni* denir. $\alpha$ sayısına koninin normal sabiti adı verilir. Eğer üstten sınırlı her azalan dizi sınırlı ise $P$ konisine *düzenli koni* adı verilir. Buna benzer olarak eğer alttan sınırlı her artan dizi sınırlı ise $P$ konisi düzenli koni adını alır.

Düzenli koniler normaldir ve normal konilerin düzenli olmadığı açıktır.

**Tanım 2.7.2.** [44] $X \neq \varnothing$ bir küme ve $E$ bir reel Banach uzayı olsun. Eğer $d : X \times X \to E$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $d$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir *koni metrik* ve $(X, d)$ ikilisine *koni metrik uzay* denir.

1. Her $x, y \in X$ için $\theta \prec d(x, y)$ ve $d(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y$.

2. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$.

3. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$.

# BÖLÜM 3. ESNEK KONİ METRİK UZAYLAR

## 3.1. Esnek Koni Metrik

**Tanım 3.1.1.** $(\tilde{E},\|.\|,A)$ esnek reel Banach uzayı ve $(P,A)\in S(\tilde{E})$, $\tilde{E}$ kümesinin bir esnek alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(P,A)$ esnek kümesine bir *esnek koni* denir.

1. $(P,A)$ kapalı, $(P,A)\neq\Phi$ ve $(P,A)\neq SS(\{\Theta\})$,
2. $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathbb{R}(A)^{*}$, $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}(P,A)$ ise $\tilde{a}\tilde{x}+\tilde{b}\tilde{y}\tilde{\in}(P,A)$,
3. $\tilde{x}\tilde{\in}(P,A)$ ve $-\tilde{x}\tilde{\in}(P,A)$ ise $\tilde{x}=\Theta$.

$(P,A)\in S(\tilde{E})$ verildiğinde $(P,A)$ konisine göre bir $\tilde{\preceq}$ kısmi sıralama bağıntısı, her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}$ için $\tilde{x}\tilde{\preceq}\tilde{y}\Leftrightarrow\tilde{y}-\tilde{x}\in(P,A)$ şeklinde tanımlanır. $\tilde{x}\tilde{\preceq}\tilde{y}$ ve $\tilde{x}\neq\tilde{y}$ için $\tilde{x}\tilde{\prec}\tilde{y}$ sıralama bağıntısı $\tilde{y}-\tilde{x}\in int(P,A)$ ifadesine karşılık gelir ve $\tilde{x}\tilde{\ll}\tilde{y}$ sembolü ile gösterilir. Burada $int(P,A)$, $(P,A)$ konisinin esnek iç elemanlarının kümesidir.

**Tanım 3.1.2.** $(P,A)$, $(\tilde{E},\|.\|,A)$ esnek reel Banach uzayında bir esnek koni olsun.

1. Eğer her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}$ için $\Theta\tilde{\preceq}\tilde{x}\tilde{\preceq}\tilde{y}$ olması $\|\tilde{x}\|\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\|\tilde{y}\|$ olmasını gerektirecek şekilde bir $\tilde{\alpha}\tilde{>}\overline{0}$ esnek reel sayı varsa $(P,A)$ esnek konisine *normal koni* ve $\tilde{\alpha}$ sayısına, $(P,A)$ konisinin *esnek sabiti adı* verilir.

2. Eğer her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{E}$ için $\tilde{E}$ içinde $sup(\tilde{x},\tilde{y})$ varsa $(P,A)$ esnek konisine *minihedraldir* denir.

3. Eğer $\tilde{E}$ uzayında üstten sınırlı her esnek küme ($(F,A)\in S(\tilde{E})$olsun. Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}(F,A)$ için $\|\tilde{x}-\tilde{y}\|\tilde{\leq}\|\tilde{c}\|$ olacak şekilde $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ varsa $(F,A)$ esnek kümesine üstten sınırlıdır denir) bir supremuma sahip ise $(P,A)$ esnek konisine *güçlü minihedraldir* denir.

4. Eğer $Int(P,A)\neq\varnothing$ ise $(P,A)$ esnek konisine *katıdır* denir.

5. Eğer $\tilde{E}$ uzayında esnek elemanlardan oluşan üstten sınırlı her azalan dizi yakınsak ise $(P,A)$ esnek konisine *regülerdir* denir. Yani $\tilde{E}$ uzayında $\tilde{x}_1\tilde{\preceq}\tilde{x}_2\tilde{\preceq}\cdots\tilde{\preceq}\tilde{x}_n\cdots$ olacak şekilde esnek elemanların dizisi $\{\tilde{x}_n\}$ ise bu durumda bir $\tilde{x}\in\tilde{E}$ esnek elemanı vardır öyle ki $n\to\infty$ iken $\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|\to\overline{0}$ olur. Buna denk olarak, eğer esnek elemanların alttan sınırlı her artan dizisi yakınsak ise $(P,A)$ esnek konisine *regülerdir* denir.

**Örnek 3.1.1.** $\mathbb{R}(A)$, $A$ sonlu parametreler kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek reel sayıların ailesi, $\tilde{\mathbb{R}}$ mutlak esnek reel küme ve $\tilde{\mathbb{R}}^n=\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\times}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\times}\cdots\tilde{\times}\tilde{\mathbb{R}}$ olsun. Teorem 2.6.1. nın bir sonucu olarak $\tilde{\mathbb{R}}^n$, bir esnek Banach uzayıdır. $\tilde{E}=\tilde{\mathbb{R}}^n$ uzayında

$$(P,A)=SS\{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n):\tilde{x}_i\tilde{\geq}\overline{0},\forall i=1,2,\cdots,n\}$$

esnek kümesi bir esnek konidir. Aynı zamanda bu $(P,A)$ konisi normal, minihedral, güçlü minihedral ve katıdır.

Bundan sonra $\tilde{E}$ esnek Banach uzayında bir $(P,A)$ esnek koniyi, bir katı koni ve $"\tilde{\preceq}"$ bağıntısını, $(P,A)$ esnek katı koniye göre kısmi sıralama bağıntısı olarak göz önüne alacağız.

**Tanım 3.1.3.** $A\neq\varnothing$ parametreler kümesi, $X\neq\varnothing$ bir küme ve $\tilde{X}$ mutlak esnek küme olsun. Eğer $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{E})$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $d$ dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde bir *esnek koni metrik* ve $\tilde{X}$ esnek kümesine üzerindeki $d$ esnek koni metriği ile birlikte *esnek koni metrik uzay* denir ve $(\tilde{X},d,A)$ ile gösterilir.

d1. Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\Theta\tilde{\prec}d(\tilde{x},\tilde{y})$ ve $d(\tilde{x},\tilde{y})=\Theta\Leftrightarrow\tilde{x}=\tilde{y}$,

d2. Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})=d(\tilde{y},\tilde{x})$,

d3. Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\preceq}d(\tilde{x},\tilde{z})+d(\tilde{z},\tilde{y})$.

Her esnek metrik uzayın bir esnek koni metriği olduğu açıktır.

**Örnek 3.1.2.** $A$ sonlu parametreler kümesi, $\tilde{E}=\mathbb{R}^2$,

$$(P,A)=SS\{(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\in}\tilde{E}:\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\geq}\overline{0}\},$$

$\tilde{X}=\tilde{\mathbb{R}}$ ve $\tilde{\alpha}\tilde{\geq}\overline{0}$ esnek sabit olmak üzere

$$d(\tilde{x},\tilde{y})=(|\tilde{x}-\tilde{y}|,\tilde{\alpha}|\tilde{x}-\tilde{y}|)$$

ile tanımlı $d: SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{E})$ dönüşüm verilsin. $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek koni metrik uzaydır.

**Teorem 3.1.1.** $\{d_\lambda : \lambda \in A\}$, bir $X$ kümesi üzerindeki kesin koni metriklerin her parametrize edilmiş ailesi, $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek koni metriktir.

**İspat.** $\forall \lambda \in A$ ve $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \in X$ olsun. $\forall \lambda \in A$ ve $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $d: SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{E})$ dönüşümünün $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metrik olduğunu göstermek için (d1-d3) aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

d1. $\forall \lambda \in A$ ve $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\Theta(\lambda) = \theta \prec d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda))$ eşitliğine sahip olduğumuzdan $\Theta \tilde{\prec} d(\tilde{x}, \tilde{y})$ elde ederiz. Ayrıca,

$$d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)) = \theta, \ \forall \lambda \in A$$

$$\Leftrightarrow \| d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)) \| = \| \theta \|$$

$$\Leftrightarrow \| d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)) \| = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}(\lambda) = \tilde{y}(\lambda), \forall \lambda \in A$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}.$$

d2. $d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)) = d_\lambda(\tilde{y}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = d(\tilde{y}, \tilde{x})(\lambda), \forall \lambda \in A$

$$\Rightarrow d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x}), \forall \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}.$$

**d3.** Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için

$$\left[d(\tilde{x},\tilde{z})+d(\tilde{z},\tilde{y})\right](\lambda)=d(\tilde{x},\tilde{z})(\lambda)+d(\tilde{z},\tilde{y})(\lambda)$$

$$=d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{z}(\lambda)\right)+d_\lambda\left(\tilde{z}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)\geq d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)$$

$$=d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda),\forall\lambda\in A.$$

Böylece $d(\tilde{x},\tilde{y})\,\tilde{\preceq}\,d(\tilde{x},\tilde{z})+d(\tilde{z},\tilde{y})$ elde edilir. O halde $d$ dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir koni metriktir.

**Sonuç 3.1.1.** $\rho$, bir $X$ kümesi üzerindeki herhangi bir kesin metrik olmak üzere, $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metriğe genişletilebilir.

**İspat.** Önce mutlak esnek kümeyi ve $\tilde{E}$ esnek Banach uzayını boş olmayan $A$ parametreler kümesini kullanarak oluşturalım. Her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)=\rho\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)$ şeklinde tanımlanan $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{E})$ dönüşümü tanımlayalım. Teorem 3.1.1. ile aynı işlemi kullanarak $d$ dönüşümünün $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek koni metrik olduğu kolaylıkla ispatlanır.

$\rho$ kesin koni metriği kullanarak tanımlanan esnek koni metriğe, $\rho$ metriği tarafından *üretilen esnek koni metrik* denir.

**Uyarı 3.1.1**. Teorem 3.1.1. nın tersi doğru değildir. Kesin metriklerin herhangi parametrize edilmiş ailesi bir esnek metrik olmasına rağmen, herhangi esnek metrik, kesin metriklerin parametrize edilmiş bir ailesi olması gerekmez. Böylece esnek metrik, kesin metriklerin herhangi parametrize edilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

**Teorem 3.1.2.** Eğer $\tilde{X}$ üzerinde bir $d$ esnek metriği aşağıdaki (d4) aksiyomunu sağlarsa her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)=d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $d_\lambda : X\times X\to E$, fonksiyonu her $\lambda\in A$ için $X$ üzerinde bir koni metriktir.

(d4). Her $\lambda\in A$, $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ ve $(r,s)\in X\times X$ için $\left\{d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda):\tilde{x}(\lambda)=r,\tilde{y}(\lambda)=s\right\}$ tek elemanlı kümedir.

**İspat.** Açıkça $\forall\lambda\in A$ için $d_\lambda : X\times X\to E$, $X$ kümesinin bir sıralı çiftini bir $e\in E$ elemanına karşılık getiren bir kuraldır. (d1) aksiyomundan $\theta\preceq e$ olur. Her $\lambda\in A$ için $d_\lambda$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu (d4) aksiyomundan çıkar. Böylece esnek koni metrik uzay aksiyomları her $\lambda\in A$ için $d_\lambda$ dönüşümünün koni metrik şartlarını verir. Bu bakış açısından $d_\lambda$ metriği, (d4) aksiyomunu sağlayan bir koni metrik olduğu görülür. Burada $d_\lambda$, [40] da tanımlandığı gibi bir özel dönüşümdür öyle ki $d : A\to\left(E^*\right)^{X\times X}$ bir dönüşümdür. ($E^*$, $\theta\preceq e$ şartını sağlayan bütün $e\in E$ elemanların kümesini gösterir.)

**Önerme 3.1.1.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzay olsun. Bu durumda her $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ için bir $\tilde{\delta}\tilde{>}\overline{0}$ esnek reel sayısı vardır öyle ki $\|\tilde{x}\|\tilde{<}\tilde{\delta}$ iken $\left(\tilde{c}-\tilde{x}\right)\in int\left(P,A\right)$, yani $\tilde{x}\tilde{\ll}\tilde{c}$ olur.

**İspat.** $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ olduğundan $\tilde{c} \in int(P,A)$ olur. Böylece $\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{E} : \|\tilde{x}-\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\delta}\} \subset int(P,A)$ olacak şekilde $\tilde{\delta} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısı bulunabilir. O halde $\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ ise $\|(\tilde{c}-\tilde{x})-\tilde{c}\| = \|-\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olur. Yani $(\tilde{c}-\tilde{x}) \in int(P,A)$ olur.

**Önerme 3.1.2.** $(\tilde{X},d,A)$ esnek koni metrik uzay olsun. Bu durumda her bir $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}_1$, $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}_2$ ile $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \tilde{\in} \tilde{E}$ için $\tilde{c} \tilde{\ll} \tilde{c}_1$ ve $\tilde{c} \tilde{\ll} \tilde{c}_2$ olacak şekilde $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ vardır.

**İspat.** $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}_1$ olduğundan Önerme 3.1.1. ile $\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olacak şekilde $\tilde{\delta} \tilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısı vardır ki bu $\tilde{x} \tilde{\ll} \tilde{c}$ olmasını gerektirir. Bir $n_0$ doğal sayısı seçelim öyle ki $\dfrac{\tilde{1}}{n_0} < \dfrac{\tilde{\delta}}{\|\tilde{c}_1\|}$ olsun. $\tilde{c} = \dfrac{\tilde{c}_1}{n_0}$ diyelim. Bu durumda $\|\tilde{c}\| = \left\|\dfrac{\tilde{c}_1}{n_0}\right\| = \dfrac{\|\tilde{c}_1\|}{n_0} \tilde{<} \tilde{\delta}$ olur. Böylece $\tilde{c} \tilde{\ll} \tilde{c}_1$ olur. Benzer şekilde $\tilde{c} \tilde{\ll} \tilde{c}_2$ olduğu gösterilebilir.

## 3.2. Esnek Koni Metrik Uzayların Topolojisi

**Tanım 3.2.1.** $(\tilde{X},d,A)$ bir esnek koni metrik uzay $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ olsun. $d(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\ll} \tilde{c}$ şartını sağlayan $\tilde{X}$ uzayının esnek elemanlarının ailesine bir *açık yuvar* denir ve $B(\tilde{x},\tilde{c})$ ile gösterilir. Yani

$$B(\tilde{x},\tilde{c}) = \{\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X} : d(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\ll} \tilde{c}\} \subset SE(\tilde{X})$$

olarak tanımlanır.Benzer şekilde $\tilde{X}$ uzayının esnek elemanlarının

$$B[\tilde{x},\tilde{c}]=\left\{\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}:d(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\preceq}\tilde{c}\right\}\subset SE(\tilde{X})$$

ailesine bir *kapalı yuvar* denir.

$d(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\ll}\tilde{c}$ ise $\left(\tilde{c}-d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\right)\in int\left(P,A\right)$ ve $d(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\preceq}\tilde{c}$ ise $(\tilde{c}-d(\tilde{x},\tilde{y}))\tilde{\in}(P,A)$

olduğuna dikkat edilmelidir.

$SS\left(B\left(\tilde{x},\tilde{c}\right)\right)$ ve $SS\left(B[\tilde{x},\tilde{c}]\right)$ esnek kümelerine sırasıyla *esnek açık yuvar* ve *esnek kapalı yuvar* diyeceğiz.

**Tanım 3.2.2.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek koni metrik uzay ve $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ olsun. Eğer $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{\succ}\Theta$ şartını sağlayan herhangi iki $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanı için $SS\left(B(\tilde{x},\tilde{c})\cap B(\tilde{y},\tilde{c})\right)=\Phi$ (Bu, $B(\tilde{x},\tilde{c})\cap B(\tilde{y},\tilde{c})=\varnothing$ ifadesine denktir) olacak şekilde $B(\tilde{x},\tilde{c})$ ve $B(\tilde{y},\tilde{c})$ açık yuvarları varsa $\left(\tilde{X},d,A\right)$ uzayına *Hausdorff özelliğine sahiptir* denir.

**Teorem 3.2.1.** Her esnek koni metrik uzay Hausdorff özelliğine sahiptir.

**İspat.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek koni metrik uzay ve $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ olsun. Herhangi iki $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek elemanı verilsin. $d(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\succ}\Theta$ olduğundan her $\lambda\in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)\succ\theta$ yani $\left\|d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)\right\|>0$ olur. $0<\left\|c_\lambda\right\|<\frac{1}{2}\left\|d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda)\right\|,\forall\lambda\in A$ ile $\left\|c_\lambda\right\|$ reel sayısını gözönüne alalım. Her $\lambda\in A$ için $\tilde{c}\left(\lambda\right)=c_\lambda$ olsun. Bu durumda

$B(\tilde{x},\tilde{c})=\{\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}:d(\tilde{x},\tilde{z})\tilde{\ll}\tilde{c}\}$ ve $B(\tilde{y},\tilde{c})=\{\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}:d(\tilde{y},\tilde{z})\tilde{\ll}\tilde{c}\}$ açık yuvarlarına sahibiz. $B(\tilde{x},\tilde{c})\cap B(\tilde{y},\tilde{c})=\varnothing$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $SS\left(B(\tilde{x},\tilde{c})\cap B(\tilde{y},\tilde{c})\right)=\Phi$ olur.

**Tanım 3.2.3.** $\mathfrak{B}$, $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzayında esnek elemanlarının bir ailesi, $\tilde{x}\in\mathfrak{B}$ bir esnek eleman olsun. $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset\mathfrak{B}$ olacak şekilde $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile bir $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanı varsa $\tilde{x}$ esnek elemanına $\mathfrak{B}$ ailesinin bir *iç elemanı* denir.

**Tanım 3.2.4.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzay, $(F,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ bir esnek küme olsun. $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(F,A)$ olacak şekilde $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile bir $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanı varsa $\tilde{x}$ esnek elemanına $(F,A)$ kümesinin bir *iç elemanı* denir. $(F,A)$ kümesinin bütün iç elemanlarının ailesi $int(F,A)$ ile gösterilir. Böylece

$$int(F,A)=\left\{\tilde{x}\tilde{\in}(F,A):\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(F,A),\ \Theta\tilde{\ll}\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}\right\}$$

olarak tanımlanır. $SS\left(int(F,A)\right)$ esnek kümesine $(F,A)$ kümesinin *esnek içi* denir.

**Teorem 3.2.2.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzay, $(F,A,),(G,A)\in S\left(\tilde{X}\right)$ iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $SS\left(int(F,A)\right)\tilde{\subset}(F,A)$.
2. $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)\Rightarrow int(F,A)\subset int(G,A)$.
3. $\left(int(F,A)\cap int(G,A)\right)\subset int\left((F,A)\Cap(G,A)\right)$.

4. $\left(int(F,A)\cup int(G,A)\right)\subset int\left((F,A)\Cup(G,A)\right)$.

**İspat.** 1. $\tilde{x}\in int(F,A)$ herhangi bir esnek eleman olsun. Bu durumda $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile bir $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanı vardır öyle ki $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(F,A)$ olur. Buradan

$\tilde{x}\in SE(F,A)$ ve $SS\left(int(F,A)\right)\tilde{\subset}(F,A)$ elde edilir.

2. $\tilde{x}\in int(F,A)$ olsun. Bu durumda $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile bir $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanı vardır öyle ki $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(F,A)$ olur. $(F,A)\tilde{\subset}(G,A)$ olduğundan

$$\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(F,A)\subset SE(G,A)\Rightarrow\tilde{x}\in int(G,A)$$

olur. Buradan $int(F,A)\subset int(G,A)$ elde edilir.

3. $\tilde{x}\in\left(int(F,A)\cap int(G,A)\right)$ olsun. Bu durumda $\tilde{x}\in int(F,A)$ ve $\tilde{x}\in int(G,A)$ olur. Böylece $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c}_1)\subset SE(F,A)$ ve $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c}_2)\subset SE(G,A)$ olacak şekilde $\Theta\tilde{\ll}c_1$ ve $\Theta\tilde{\ll}c_2$ ile $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanları vardır. Önerme 3.1.2. ile $\tilde{c}\tilde{\ll}\tilde{c}_1$ ve $\tilde{c}\tilde{\ll}\tilde{c}_2$ olacak şekilde bir $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanı vardır. Şimdi

$$\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(F,A) \text{ ve } \tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE(G,A)$$

$$\Rightarrow\tilde{x}\in int(F,A) \text{ ve } \tilde{x}\in int(G,A)$$

$$\Rightarrow\tilde{x}\in int\left((F,A)\Cap(G,A)\right)$$

olur. Buradan $\left(int\left(F,A\right)\cap int\left(G,A\right)\right)\subset int\left(\left(F,A\right)\Cap\left(G,A\right)\right)$ bulunur.

4. $\tilde{x}\in\left(int\left(F,A\right)\cup int\left(G,A\right)\right)\Rightarrow\tilde{x}\in int(F,A)$ veya $\tilde{x}\in int\left(G,A\right)$

$\Rightarrow\exists\Theta\lll\tilde{c}\,\tilde{\in}\,\tilde{E}\ni\tilde{x}\in B\left(\tilde{x},\tilde{c}\right)\subset SE\left(F,A\right)$ veya $\tilde{x}\in B\left(\tilde{x},\tilde{c}\right)\subset SE\left(G,A\right)$

$\Rightarrow\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset\left(SE(F,A)\cup SE(F,A)\right)\subset SE(F,A)\Cup SE(G,A)$

$\Rightarrow\left(int\left(F,A\right)\cup int\left(G,A\right)\right)\subset int\left(\left(F,A\right)\Cup\left(G,A\right)\right)$

$\Rightarrow\tilde{x}\in int\left(\left(F,A\right)\Cup\left(G,A\right)\right)$

olur. Buradan $\left(int\left(F,A\right)\cup int\left(G,A\right)\right)\subset int\left(\left(F,A\right)\Cup\left(G,A\right)\right)$ yazılır.

**Tanım 3.2.5.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek koni metrik uzayı, $\mathfrak{B}$ esnek elemanlarının bir ailesi, $\mathfrak{B}$ ailesinin her elemanı bir iç eleman ise $\mathfrak{B}$ ailesine *açıktır* denir. $\left(F,A\right)\in S\left(\tilde{X}\right)$ boştan farklı bir esnek küme olsun. Eğer $(F,A)=SS(\mathfrak{B})$ olacak şekilde $(F,A)$ kümesinin esnek elemanlarının bir açık $\mathfrak{B}$ ailesi varsa $\left(F,A\right)$ e*snek açık küme* denir. Açıkça her açık yuvar bir açık küme ve her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir.

**Önerme 3.2.1.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$, $\left(\text{d4}\right)$ aksiyomunu sağlayan bir esnek koni metrik uzay olsun. Bu durumda $\left(\tilde{X},d,A\right)$ içinde her $B(\tilde{x},\tilde{c})$ açık yuvarı için,

$SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda)=B(\tilde{x}(\lambda),\tilde{c}(\lambda)),\ \forall\lambda\in A,$

$\left(X,d_{\lambda},A\right)$ içinde bir açık yuvardır.

**İspat.** $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile bir $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve her $\lambda \in A$ için $\theta \ll \tilde{c}(\lambda) \in E$ olmak üzere $B(\tilde{x},\tilde{c})$ bir açık yuvar olsun. $y \in SS\left(B(\tilde{x},\tilde{c})\right)(\lambda)$ alalım. Bu durumda $\tilde{y}(\lambda) = y$ olacak şekilde bir $\tilde{y} \in B(\tilde{x},\tilde{c})$ vardır. $\tilde{y} \in B(\tilde{x},\tilde{c})$ olduğundan $d(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olur. Böylece $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), y) \ll \tilde{c}(\lambda)$ olacak şekilde bir $\theta \ll \tilde{c}(\lambda) \in E$ vardır. Buradan her $y \in SS\left(B(\tilde{x},\tilde{c})\right)(\lambda)$ için $d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), y) \ll \tilde{c}(\lambda)$ olduğundan

$$SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda) \subset B(\tilde{x}(\lambda),\tilde{c}(\lambda))$$

elde edilir. Tersine olarak, $d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), y) \ll \tilde{c}(\lambda)$ olacak şekilde $y \in X$ olsun. $\tilde{x}' \in B(\tilde{x},\tilde{c})$ seçelim ve $\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanını $\mu \in A$ için $\mu = \lambda$ ise $\tilde{y}(\mu) = y$ ile $\mu \neq \lambda$ ise $\tilde{y}(\mu) = \tilde{x}'(\mu)$ ile tanımlayalım. Bu durumda $(\mathrm{d4})$ aksiyomundan $d(\tilde{x},\tilde{y}) \tilde{\ll} \tilde{c}$ ve böylece $\tilde{y} \in B(\tilde{x},\tilde{c})$ ve her $\lambda \in A$ için $\tilde{y}(\lambda) = \mathrm{y}$ olur. Buradan da

$$B(\tilde{x}(\lambda),\tilde{c}(\lambda)) \subset SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda)$$

elde edilir. O halde $SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda) = B(\tilde{x}(\lambda),\tilde{c}(\lambda))$ olur. Bu her $\lambda \in A$ için doğru olduğundan her $\lambda \in A$ için $SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda)$, $(X, d_\lambda, A)$ kesin koni metrik uzayında bir açık yuvardır.

**Teorem 3.2.3.** $(\tilde{X}, d, A)$, $(\mathrm{d4})$ aksiyomunu sağlayan bir esnek koni metrik uzay olsun. Bu durumda $(F, A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin esnek açık olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in A$ için $(F, A)(\lambda)$ kümesinin $(X, d_\lambda, A)$ kesin koni metrik uzayında açık olmasıdır.

**İspat.** $(F,A)$ bir esnek açık küme olsun. $(F,A)$ kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ ailesi vardır öyle ki $\mathfrak{B}$ açıktır ve $(F,A)=SS(\mathfrak{B})$ olur. $x\in SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ alalım. Bu durumda $\tilde{x}(\lambda)=x$ olacak şekilde bir $\tilde{x}\in\mathfrak{B}$ esnek elemanı vardır. $\mathfrak{B}$ açık olduğundan $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset\mathfrak{B}$ olacak şekilde $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ile bir $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ vardır. Yani

$$x=\tilde{x}(\lambda)\in SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda)\subset SS(\mathfrak{B})(\lambda)$$

olduğundan $SS(B(\tilde{x},\tilde{c}))(\lambda)$, $(X,d_\lambda,A)$ uzayında bir açık yuvardır ve $x$, $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ kümesinin bir iç elemanıdır. $x$ elemanı keyfi olduğundan her $x\in SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ elemanı bir iç elemandır ve $\lambda\in A$ için $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$, $(X,d_\lambda,A)$ uzayında bir açık kümedir.

Tersine $\lambda\in A$ için $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$, $(X,d_\lambda,A)$ uzayında bir açık küme olsun. $\tilde{x}\tilde{\in}SS(\mathfrak{B})$ alalım. Bu durumda $\lambda\in A$ için $\tilde{x}(\lambda)\in SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ olur. $SS(\mathfrak{B})(\lambda)$, açık olduğundan $\theta\ll c_\lambda$ ile bir $c_\lambda\in E$ elemanı ve $(X,d_\lambda,A)$ içinde bir $B_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),c_\lambda\right)$, açık yuvarı vardır öyle ki her $\lambda\in A$ için $\tilde{x}(\lambda)\in B_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),c_\lambda\right)\subset SS(\mathfrak{B})(\lambda)$ olur. Her $\lambda\in A$ için $\tilde{c}(\lambda)=c_\lambda$ ile $\tilde{c}\tilde{\in}\tilde{E}$ esnek elemanını gözönüne alalım. Bu durumda $\Theta\tilde{\ll}\tilde{c}$ ve $B(\tilde{x},\tilde{c})$, $(\tilde{X},d,A)$ uzayında bir açık yuvardır. Böylece $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\tilde{c})\subset SE\left(SS\left(\mathfrak{B}\right)\right)$ ve $SE(SS(\mathfrak{B}))=\bigcup_{\tilde{x}\tilde{\in}SS(\mathfrak{B})}B(\tilde{x},\tilde{c})$ olur. $SE(SS(\mathfrak{B}))$ açık ailelerin birleşimi olduğundan $SE(SS(\mathfrak{B}))$ açıktır. $SS\left(\mathfrak{B}\right)=SS\left(SE\left(SS(B\left(\tilde{x},\tilde{c}\right))\right)\right)$ olduğundan $\left(F,A\right)=SS\left(\mathfrak{B}\right)$ esnek açıktır.

**Teorem 3.2.4.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek koni metrik uzayı olsun. Bu durumda,

1. $\Phi$ ve $\tilde{X}$ esnek kümeleri esnek açıktırlar,

2. Esnek açık kümelerin keyfi elemanter birleşimi esnek açıktır.

**İspat.1.** $\Phi$ kümesinin esnek açık olduğu aşikardır. Her $\tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ için $\tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{c}) \subset SE(\tilde{X})$ olacak şekilde $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile bir $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek eleman var olduğundan $\tilde{x}$, $SE(\tilde{X})$ ailesinin bir iç elemanıdır. $\tilde{X} = SS(SE(\tilde{X}))$ olduğundan $\tilde{X}$ esnek açıktır.

**2.** $\Lambda$ keyfi bir indis kümesi ve her $i \in \Lambda$ için $(F_i, A)$ soft kümeleri $(\tilde{X}, d, A)$ uzayında açık kümeler olsun. $(F, A) = \Cup_{i\in\Lambda} (F_i, A)$ kümesinin esnek açık olduğunu gösterelim. $\Lambda = \varnothing$ ise $(F, A) = \Cup_{i\in\Lambda} (F_i, A) = \Phi$ kümesi esnek açıktır. $\Lambda \neq \varnothing$ olsun. Her $i \in \Lambda$ için $(F_i, A) = \Phi$ ise $(F, A) = \Cup_{i\in\Lambda} (F_i, A) = \Phi$ olur ki esnek açıktır. En az bir $i \in \Lambda$ için $(F_i, A) \neq \Phi$ olsun. Her bir $(F_i, A)$ kümesi esnek açık olduğunda $(F_i, A) = SS(\mathfrak{B}_i)$ olacak şekilde $(F_i, A)$ kümesinin esnek elemanlarının $\mathfrak{B}_i$ açık ailesi vardır. Bu durumda $\bigcup_{i\in\Lambda} \mathfrak{B}_i$ açıktır. Böylece $(F, A) = \Cup_{i\in\Lambda} (F_i, A) = SS\left(\bigcup_{i\in\Lambda} \mathfrak{B}_i\right)$ esnek açıktır.

**Uyarı 3.2.1.** Genel olarak $SS(\mathfrak{B}_1) \Cap SS(\mathfrak{B}_2) \neq SS(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2)$ olduğundan iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olması gerekmez. Buna rağmen aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.2.5.** (d4) aksiyomunu sağlayan bir esnek koni metrik uzayda esnek açık iki kümenin elemanter kesişimi esnek açıktır.

**İspat.** $\left(\tilde{X}, d, A\right)$, $(\mathrm{d4})$ aksiyomunu sağlayan bir esnek koni metrik uzay, $(F,A),(G,A) \in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek açık iki küme olsun. Bu durumda $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ uzayında esnek elemanların $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ açık aileleri vardır öyle ki $(F,A) = SS(\mathfrak{B}_1)$ ve $(G,A) = SS(\mathfrak{B}_2)$ olur. Eğer $(F,A) \Cap (G,A) = \Phi$ ise esnek açıktır.

$(F,A) \Cap (G,A) \neq \Phi$ ise $(F,A) \Cap (G,A) = (F,A) \tilde{\cap} (G,A)$

olur. Buradan

$$\left((F,A) \tilde{\cap} (G,A)\right)(\lambda) = (F,A)(\lambda) \cap (G,A)(\lambda), \ \forall \lambda \in \mathrm{A}$$

olur. Her $\lambda \in A$ için $(F,A)(\lambda)$ ve $(G,A)(\lambda)$ kümeleri $\left(X, d_\lambda\right)$ içinde açık olduklarından $\left((F,A) \tilde{\cap} (G,A)\right)(\lambda)$ kümesi de açıktır. Böylece Teorem 3.2.3. ile $(F,A) \tilde{\cap} (G,A)$ yani $(F,A) \Cap (G,A)$ esnek açıktır.

**Teorem 3.2.6.** $(\mathrm{d4})$ aksiyomunu sağlayan her esnek koni metrik uzay, elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemine göre $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojik uzaydır. Bu topolojiye *elemanter esnek koni metrik topoloji* diyeceğiz.

**İspat.** $\left(\tilde{X}, d, A\right)$, $(\mathrm{d4})$ aksiyomunu sağlayan bir esnek koni metrik uzay, $\mathfrak{B}$ esnek elemanların bir ailesi ve

$$\tau_{\tilde{c}} = \left\{ (F,A) \tilde{\subset} \tilde{X} : \forall \tilde{x} \in \mathfrak{B}, \exists B(\tilde{x}, \tilde{c}) \ni \tilde{x} \in B(\tilde{x}, \tilde{c}) \subset \mathfrak{B}, (F,A) = SS(\mathfrak{B}), \Theta \tilde{\ll} \tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E} \right\} \subset S(\tilde{X})$$

ailesinin $\tilde{X}$ üzerinde elemanter işlemlere göre bir topoloji olduğunu göstermeliyiz. Bu, Tanım 2.2.2. ye göre Teorem 3.2.4. ve Teorem 3.2.5. den çıkar.

## 3.3. Esnek Koni Metrik Uzayların Tamlığı

**Tanım 3.3.1.** $(\tilde{X}, d, A)$ esnek koni metrik uzay ve $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ verildiğinde her $n > N$ doğal sayısı için $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olacak şekilde $N$ doğal sayısı varsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanına *yakınsaktır* ve $\tilde{x}$ esnek elemanına da, $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin *limitidir* denir. Bu $n \to \infty$ iken $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$ veya $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ile gösterilir.

**Önerme 3.3.1.** $(\tilde{X}, d, A)$ esnek koni metrik uzay , $(P, A)$ normal esnek sabiti $\tilde{\alpha}$ olan esnek normal koni ve $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X}, d, A)$ esnek koni metrik uzayın esnek elemanlarının bir dizisi olsun. $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to \Theta$

**İspat.** Kabul edelim ki $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi, $\tilde{x}$ elemanına yakınsasın. Her esnek reel $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ ve $\tilde{\alpha}\|\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ seçelim. Her $n > N$ doğal sayısı için $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olacak şekilde $N$ sayısı vardır. Böylece $n > N$ olduğunda $\|d(\tilde{x}_n, \tilde{x})\| \tilde{\leq} \tilde{\alpha}\|\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ elde edilir. Bunun anlamı $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to \Theta$ olur.

Tersine olarak $n \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to \Theta$ olduğunu kabul edelim. Her $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ için $\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olacak şekilde $\tilde{\delta} \tilde{>} \overline{0}$ var ise Önerme 3.1.1. ile $\tilde{c} - \tilde{x} \tilde{\in} Int(P, A)$

elde edilir. Bu $\tilde{\delta}$ için, bir $N$ sayısı vardır öyle ki her $n > N$ doğal sayısı için $\left\| d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right) \right\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olur. Buradan $d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right) \tilde{\ll} \tilde{c}$ elde edilir. Böylece $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi, $\tilde{x}$ elemanına yakınsar.

**Teorem 3.3.1.** $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ bir esnek koni metrik uzay , $(P, A)$, normal esnek sabiti $\tilde{\alpha}$ olan bir normal esnek koni ve $\{\tilde{x}_n\}$, $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek koni metrik uzayın esnek elemanlarının bir dizisi olsun. $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin limiti tektir.

**İspat.** $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ ile $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ alalım. $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ve $\tilde{x}_n \to \tilde{y}$ olacak şekilde $\tilde{X}$ üzerinde esnek elemanlardan oluşan bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin var olduğunu kabul edelim. $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ olduğundan $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)(\lambda) \neq \theta$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in A$ vardır. $E$ Banach uzayında $\theta \ll c_\lambda$ ile $0 < \left\| c_\lambda \right\| < \frac{1}{2} \left\| d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)(\lambda) \right\|$ şartını sağlayan bir $c_\lambda$ elemanını gözönüne alalım. $\forall \lambda \in A$ için $\tilde{c}(\lambda) = c_\lambda$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ olsun. $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ ve $\tilde{x}_n \to \tilde{y}$ olduğundan bir $N$ sayısı vardır öyle ki her $n > N$ doğal sayısı için

$$d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right) \ll \tilde{c} \Rightarrow d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right)(\lambda) \ll c_\lambda \text{ ve } d\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}\right) \ll \tilde{c} \Rightarrow d\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}\right)(\lambda) \ll c_\lambda$$

olur. (d3) aksiyomundan

$$d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)(\lambda) \preceq d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}\right)(\lambda) + d\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}\right)(\lambda) \ll 2c_\lambda$$

elde ederiz. Böylece $(P, A)$, normal esnek sabiti $\tilde{\alpha}$ olan normal esnek koni olduğundan

$$\left\| d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda)\right\| < 2\tilde{\alpha}(\lambda)\left\|c_\lambda\right\| \text{ veya } \left\|c_\lambda\right\| > \frac{1}{2\tilde{\alpha}(\lambda)}\left\| d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda)\right\|$$

elde edilir. Bu $c_\lambda$ elemanının keyfi olduğu gerçeği ile çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır ve dolaysıyla $\tilde{c}$ keyfidir. Böylece sonuç elde edilir.

**Önerme 3.3.2.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek koni metrik uzay ve $(P,A)$, normal esnek sabiti $\tilde{\alpha}$ olan bir normal esnek koni olsun. $\{\tilde{x}_n\}$ ve $\{\tilde{y}_n\}$, $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzayın esnek elemanlarının iki dizisi olsun. $n\to\infty$ iken $\tilde{x}_n\to\tilde{x}$ ve $\tilde{x}_n\to\tilde{y}$ ise $n\to\infty$ için $d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)\to d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)$ olur.

**İspat.** Her esnek reel $\tilde{\varepsilon}\,\tilde{>}\,\overline{0}$ sayısı için $\Theta \ll \tilde{c}$ ile $\tilde{c}\,\tilde{\in}\,\tilde{E}$ ve $\left\|\tilde{c}\right\| \,\tilde{<}\, \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{4\left\|\tilde{\alpha}\right\|+2}$ seçelim. $\tilde{x}_n\to\tilde{x}$ ve $\tilde{y}_n\to\tilde{y}$ olduğundan her $n>N$ doğal sayısı için $d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}\right)\,\tilde{\ll}\,\tilde{c}$ ve $d\left(\tilde{y}_n,\tilde{y}\right)\ll\tilde{c}$ olacak şekilde $N$ sayısı vardır. Şimdi

$$d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)\,\tilde{\preceq}\, d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}\right)+d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)+d\left(\tilde{y}_n,\tilde{y}\right)\,\tilde{\preceq}\, d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)+2\tilde{c},$$

$$d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\,\tilde{\preceq}\, d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}\right)+d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)+d\left(\tilde{y}_n,\tilde{y}\right)\,\tilde{\preceq}\, d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)+2\tilde{c},$$

sahibiz. Buradan $\overline{0}\,\tilde{\preceq}\, d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)+2\tilde{c}-d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)\,\tilde{\preceq}\, 4\tilde{c}$ ve

$\left\|d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)+2\tilde{c}-d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)\right\|\le 4\tilde{\alpha}\left\|\tilde{c}\right\|$ olduğundan

$$\left\| d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)-d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\right\| \tilde{\leq} \left\| d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)+2\tilde{c}-d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)\right\| + \left\| 2\tilde{c}\right\| \tilde{\leq} (4\tilde{\alpha}+2)\left\|\tilde{c}\right\| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$$

elde edilir. Böylece $d\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\right)\to d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)$, $(n\to\infty)$ olur.

**Tanım 3.3.2.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzay olsun ve $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{X}$ esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek elemanı verildiğinde her $n,m>N$ için $d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m\right) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olacak şekilde bir $N$ sayısı varsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine $\tilde{X}$ içinde bir *Cauchy dizisidir* denir.

**Tanım 3.3.3.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek koni metrik uzay olsun. Eğer her Cauchy dizisi $\tilde{X}$ kümesindeki bir esnek elemana yakınsıyorsa $\left(\tilde{X},d,A\right)$ uzayına *esnek tam koni metrik uzay* adı verilir.

**Önerme 3.3.3.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir esnek koni metrik uzay olsun. $\tilde{X}$ esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

**İspat.** $\{\tilde{x}_n\}$ $\tilde{X}$ kümesinin esnek elemanlarından oluşan bir dizi ve $n\to\infty$ iken $\tilde{x}_n\to\tilde{x}$ olsun. Bu durumda $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ şartını sağlayan her $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ karşılık bir $N$ sayısı vardır öyle ki her $n,m>N$ doğal sayısı için $d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}\right) \tilde{\ll} \frac{\tilde{c}}{2}$ ve $d\left(\tilde{x}_m,\tilde{x}\right) \tilde{\ll} \frac{\tilde{c}}{2}$ olur. Buradan $(\mathrm{d3})$ aksiyomu ile

$$d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \preceq d(\tilde{x}_n,\tilde{x}) + d(\tilde{x}_m,\tilde{x}) \ll \tilde{c}$$

elde edilir. Böylece $\{\tilde{x}_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

**Teorem 3.3.2.** $(\tilde{X},d,A)$ bir esnek koni metrik uzay, $(P,A)$ normal esnek sabiti $\tilde{\alpha}$ olan bir normal esnek koni ve $\{\tilde{x}_n\}$, $(\tilde{X},d,A)$ esnek koni metrik uzayın esnek elemanlarının bir dizisi olsun. $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $n,m>N$ iken $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \to \Theta$ olmasıdır.

**İspat.** $\{\tilde{x}_n\}$ bir Cauchy dizisi olsun. Her esnek reel $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ sayısı için $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek elemanını ve $\tilde{\alpha}\|\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ eçelim. Her $n,m>N$ doğal sayısı için $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olacak şekilde $N$ sayısı vardır. Böylece $(P,A)$ normal esnek sabiti $\tilde{\alpha}$ olan bir normal esnek koni olduğundan $n,m>N$ için $\|d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\| \tilde{\leq} \tilde{\alpha}\|\tilde{c}\| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ elde edilir. Bu, $n,m \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \to \Theta$ demektir.

Tersine olarak $n,m \to \infty$ iken $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \to \Theta$ olsun. Her $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek elemanı için $\|\tilde{x}\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olacak şekilde $\tilde{\delta} \tilde{>} \overline{0}$ var ise $\tilde{c} - \tilde{x} \in Int(P,A)$ elde edilir. Bu $\tilde{\delta}$ için bir $N$ sayısı vardır öyle ki her $n,m>N$ doğal sayısı için $\|d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\| \tilde{<} \tilde{\delta}$ olur. Böylece $\tilde{c} - d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \in Int(P,A)$ olur. Bu $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \tilde{\ll} \tilde{c}$ demektir. O halde $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi, bir Cauchy dizisidir.

## 3.4. Sabit Nokta Teorisi

Bu kesimde esnek koni metrik uzaylar üzerinde daralma dönüşümleri için sabit nokta teoremlerini ispatlayacağız.

**Tanım 3.4.1.** $(\tilde{X}, d, A)$ esnek koni metrik uzay ve $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı varsa bu durumda $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanına $T$ *dönüşümünün bir sabiti* denir.

**Tanım 3.4.2.** $(\tilde{X}, d, A)$ esnek koni metrik uzay ve $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ bir dönüşüm olsun. Her $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ için

$$\tilde{x}_1 = T\tilde{x}_0, \;\; \tilde{x}_2 = T\tilde{x}_1 = T^2\tilde{x}_0, \; \ldots, \; \tilde{x}_n = T\tilde{x}_{n-1} = T^n\tilde{x}_0, \ldots$$

esnek elemanlarının $\{\tilde{x}_n\}$ dizisini oluşturalım. Bu durumda $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine, *tekrarlama metodu ile oluşturulan bir dizidir* denir.

**Tanım 3.4.3.** $(\tilde{X}, d, A)$ esnek koni metrik uzay ve $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(T\tilde{x}, T\tilde{y}) \tilde{\preceq} \tilde{t} d(\tilde{x}, \tilde{y})$ olacak şekilde $\overline{0} \tilde{\leq} \tilde{t} \tilde{<} \overline{1}$ ile bir $\tilde{t}$ pozitif esnek reel sayısı varsa $T$ dönüşümüne *daralma dönüşümü* denir.

**Teorem 3.4.1.** $(\tilde{X}, d, A)$ tam esnek koni metrik uzay ve $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $T$, $\tilde{X}$ içinde bir tek sabit esnek elemana sahiptir ve her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için tekrarlama metoduyla oluşan $\{T^n\tilde{x}\}$ dizisi bu sabit esnek elemana yakınsar.

**İspat.** $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek tam koni metrik uzay ve $T : SE\left(\tilde{X}\right) \rightarrow SE\left(\tilde{X}\right)$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d\left(T\tilde{x}, T\tilde{y}\right) \tilde{\preceq} \tilde{t}d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)$ olacak şekilde $\overline{0} \tilde{\leq} \tilde{t} \tilde{<} \overline{1}$ ile bir $\tilde{t}$ pozitif esnek reel sayısı vardır. Her bir $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $n \geq 1$ için, tekrarlama metoduna göre

$$\tilde{x}_1 = T\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_2 = T\tilde{x}_1 = T^2\tilde{x}_0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n = T\tilde{x}_{n-1} = T^n\tilde{x}_0,\ \ldots$$

ile $\tilde{X}$ esnek kümesinin esnek elemanların bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine sahibiz. Buradan,

$$d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n\right) = d\left(T\tilde{x}_n, T\tilde{x}_{n-1}\right) \tilde{\preceq} \tilde{t}d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}\right) \tilde{\preceq} \tilde{t}^2 d\left(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}\right) \tilde{\preceq} \ldots \tilde{\preceq} \tilde{t}^n d\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0\right)$$

elde edilir. Böylece $n > m$ için

$$\begin{aligned} d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m\right) &\tilde{\preceq} d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}\right) + d\left(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}\right) + \cdots + d\left(\tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_m\right) \\ &\tilde{\preceq} \left(\tilde{t}^{n-1} + \tilde{t}^{n-2} + \cdots + \tilde{t}^m\right) d\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0\right) \\ &\tilde{\preceq} \frac{\tilde{t}^m}{\overline{1} - \tilde{t}} d\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0\right) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek elemanı verilsin ve $\tilde{\delta} \tilde{>} \overline{0}$ keyfi esnek reel sayısı seçelim öyle ki $\tilde{c} + N_{\tilde{\delta}}(\Theta) \tilde{\subset} (P, A)$ olsun. Burada $N_{\tilde{\delta}}(\Theta) = SS\left(\left\{\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{E} : \|\tilde{y}\| \tilde{<} \tilde{\delta}\right\}\right)$ ve $(P, A)$ bir esnek konidir. Aynı zamanda bir $N_1$ doğal sayısı seçelim öyle ki

$\forall m \geq N_1$ için $\dfrac{\tilde{t}^m}{\bar{1}-\tilde{t}} d\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0\right) \tilde{\in} N_{\tilde{\delta}}(\Theta)$ olsun. Bu durumda $\forall m \geq N_1$ için $\dfrac{\tilde{t}^m}{\bar{1}-\tilde{t}} d\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0\right) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olur. Böylece her $n > m$ için

$$d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m\right) \tilde{\preceq} \frac{\tilde{t}^m}{\bar{1}-\tilde{t}} d\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0\right) \tilde{\ll} \tilde{c}$$

bulunur. O halde $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi, $\tilde{X}$ içinde bir Cauchy dizisidir. $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek tam koni uzayı olduğunda $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}^*$ olacak şekilde bir $\tilde{x}^* \tilde{\in} \tilde{X}$ vardır. $\forall n \geq N_2$ için $d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right) \tilde{\ll} \dfrac{\tilde{c}}{2}$ olacak şekilde bir $N_2$ doğal sayısı seçelim. (d3) aksiyomundan $\forall n \geq N_2$ için

$$\begin{aligned}
d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) &\tilde{\preceq} d\left(T\tilde{x}_n, T\tilde{x}^*\right) + d\left(T\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right) \\
&\tilde{\preceq} \tilde{t} d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right) \\
&\tilde{\preceq} d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right) \\
&\tilde{\preceq} \frac{\tilde{c}}{2} + \frac{\tilde{c}}{2} = \tilde{c}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $\forall m \geq 1$ için $d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\ll} \dfrac{\tilde{c}}{m}$ olur. Buradan $\forall m \geq 1$ için $\dfrac{\tilde{c}}{m} - d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\in} (P, A)$ olur. $m \to \infty$ iken $\dfrac{\tilde{c}}{m} \to \Theta$ ve $(P, A)$ kapalı koni olduğundan $-d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\in} (P, A)$ elde edilir. Bu nedenle $d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) = \Theta$ ve buradan $T\tilde{x}^* = \tilde{x}^*$ olur.

**Sonuç 3.4.1.** $(\tilde{X},d,A)$ bir tam esnek koni metrik uzay olsun. $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek sabit elemanı ve $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ için esnek elemanların $B[\tilde{x}_0,\tilde{c}] = \{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : d(\tilde{x}_0,\tilde{x}) \tilde{\preceq} \tilde{c}\}$ kapalı yuvarı ve $(P,A) = SS(B[\tilde{x}_0,\tilde{c}])$ verilsin. Kabul edelim ki $\overline{0} \tilde{\leq} \tilde{t} \tilde{<} \overline{1}$ ile bir $\tilde{t}$ esnek sabit ve $d(T\tilde{x}_0,\tilde{x}_0) \tilde{\preceq} (\overline{1}-\tilde{t})\tilde{c}$ olmak üzere $T:(\tilde{X},d,A) \to (\tilde{X},d,A)$ dönüşümü

$$d(T\tilde{x},T\tilde{y}) \tilde{\preceq} \tilde{t} d(\tilde{x},\tilde{y}),\ \forall \tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} (P,A)$$

daralma şartını sağlasın. Bu durumda $T$, $(P,A)$ içinde bir tek sabit esnek elemana sahiptir.

**İspat.** $(P,A)$ esnek konisinin tam olduğunu ve $\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ için $T\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ olduğunu göstermeliyiz. $(P,A)$ içinde esnek elemanlarının $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi $\tilde{X}$ içinde de bir Cauchy dizisidir. $(\tilde{X},d,A)$ esnek koni metrik uzayın tamlığından $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı vardır. (d3) aksiyomundan

$$d(\tilde{x}_0,\tilde{x}) \tilde{\preceq} d(\tilde{x}_0,\tilde{x}_n) + d(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \tilde{\preceq} d(\tilde{x}_n,\tilde{x}) + \tilde{c}$$

elde edilir. $\tilde{x}_n \to \tilde{x} \Rightarrow d(\tilde{x}_n,\tilde{x}) \to \Theta$ olduğundan $d(\tilde{x}_0,\tilde{x}) \tilde{\preceq} \tilde{c}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ bulunur.

Her $\tilde{x} \tilde{\in} (P,A)$ için

$$d\left(\tilde{x}_0, \mathrm{T}\tilde{x}\right) \tilde{\preceq} d\left(T\tilde{x}_0, \tilde{x}_0\right) + d\left(T\tilde{x}_0, T\tilde{x}\right) \tilde{\preceq} \left(\overline{1} - \tilde{t}\right)\tilde{c} + \tilde{t}d\left(\tilde{x}_0, \tilde{x}\right) \tilde{\preceq} \left(\overline{1} - \tilde{t}\right)\tilde{c} + \tilde{t}\tilde{c} = \tilde{c}$$

olur. Böylece $T\tilde{x} \tilde{\in} \left(P, A\right)$ olur ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 3.4.2.** $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ bir tam esnek koni metrik uzay olsun. $\overline{0} \tilde{\leq} \tilde{t} \tilde{<} \overline{1}$ ile $\tilde{t}$ bir esnek sabit olmak üzere bir *n* pozitif tam sayısı için $T : SE\left(\tilde{X}\right) \rightarrow SE\left(\tilde{X}\right)$ dönüşümü

$$d\left(T^n\tilde{x}, T^n\tilde{y}\right) \tilde{\preceq} \tilde{t}d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right), \ \forall \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$$

daralma şartını sağlasın. Bu durumda $T$, $\tilde{X}$ içinde bir tek sabit esnek elemana sahiptir.

**İspat.** Teorem 3.4.1. ile $T^n$, $\tilde{X}$ içinde bir tek $\tilde{x}^*$ sabit esnek elemana sahiptir. $T^n\left(T\tilde{x}^*\right) = T\left(T^n\tilde{x}^*\right) = T\tilde{x}^*$ olduğundan $T\tilde{x}^*$ da $T^n$ nin bir sabit esnek elemanıdır. Böylece $T\tilde{x}^* = \tilde{x}^*$ olduğundan $\tilde{x}^*$, $T$ nin bir sabit esnek elemanıdır. $T$ nin sabit esnek elemanı aynı zamanda $T^n$ nin sabit esnek elemanı olduğu için $T$ nin sabit esnek elemanı tektir.

**Teorem 3.4.2.** $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ bir tam esnek koni metrik uzay ve $T : SE\left(\tilde{X}\right) \rightarrow SE\left(\tilde{X}\right)$ dönüşümü $\overline{0} \tilde{\leq} \tilde{t} \tilde{<} \frac{\overline{1}}{2}$ ile $\tilde{t}$ bir esnek sabit olmak üzere

$$d\left(T\tilde{x},T\tilde{y}\right)\tilde{\preceq}\,\tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x},\tilde{x}\right)+d\left(T\tilde{y},\tilde{y}\right)\right),\ \forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$$

daralma şartını sağlasın. Bu durumda $T$, bir tek sabit esnek elemana sahiptir. Her bir $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\{\tilde{x}_n\}$ tekrarlama dizisi sabit esnek elemana yakınsaktır.

**İspat.** Her bir $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ için

$$\tilde{x}_1=T\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_2=T\tilde{x}_1=T^2\tilde{x}_0,\ \dots,\tilde{x}_{n+1}=T\tilde{x}_n=T^{n+1}\tilde{x}_0,\ \dots$$

diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}d\left(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}_n\right)&=d\left(T\tilde{x}_n,T\tilde{x}_{n-1}\right)\\&\tilde{\preceq}\,\tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x}_n,\tilde{x}_n\right)+d\left(T\tilde{x}_{n-1},\tilde{x}_{n-1}\right)\right)\\&=\tilde{t}\left(d\left(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}_n\right)+d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}_{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d\left(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}_n\right)\tilde{\preceq}\frac{\tilde{t}}{\bar{1}-\tilde{t}}d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}_{n-1}\right)=\tilde{s}d\left(\tilde{x}_n,\tilde{x}_{n-1}\right)$$

yazılır. Burada $\tilde{s}=\dfrac{\tilde{t}}{\bar{1}-\tilde{t}}$ olsun. Buradan $n>m$ için,

$$d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \tilde{\preceq} d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_{n-1})+...+d(\tilde{x}_{m+1},\tilde{x}_m)$$

$$\tilde{\preceq}\left(\tilde{s}^{n-1}+\tilde{s}^{n-2}+...+\tilde{s}^{m}\right)d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_0)$$

$$\tilde{\preceq}\frac{\tilde{s}^m}{\overline{1}-\tilde{s}}d(\tilde{x}_1,x_0)$$

yazılır. $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek sabit elemanı verilsin. $\forall m \geq N_1$ için $\frac{\tilde{s}^m}{\overline{1}-\tilde{s}}d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_0) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olacak şekilde bir $N_1$ doğal sayısı seçilirse, $n > m$ için $d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olur. O halde $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{X}$ içinde bir Cauchy dizisidir. $(\tilde{X},d,A)$ bir tam esnek koni metrik uzay olduğundan bir $\tilde{x}^* \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı vardır öyle ki $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}^*$ olur. Her $n \geq N_2$ için

$$d(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}_n) \tilde{\ll} \left(\frac{\overline{1}-\tilde{t}}{\tilde{t}}\right)\frac{\tilde{c}}{2} \text{ ve } d(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}^*) \tilde{\ll} \left(\overline{1}-\tilde{t}\right)\frac{\tilde{c}}{2}$$

olacak şekilde bir $N_2$ doğal sayısı seçelim. Böylece $n \geq N_2$ için

$$d(T\tilde{x}^*,\tilde{x}^*) \tilde{\preceq} d(T\tilde{x}_n,T\tilde{x}^*)+d(T\tilde{x}_n,\tilde{x}^*)$$

$$\tilde{\preceq}\tilde{t}\left(d(T\tilde{x}_n,\tilde{x}_n)+d(T\tilde{x}^*,\tilde{x}^*)\right)+d(\tilde{x}^*_{n+1},\tilde{x}^*)$$

elde edilir. Buradan

$$d(T\tilde{x}^*,\tilde{x}^*) \tilde{\preceq} \frac{\overline{1}}{\overline{1}-\tilde{t}}\left(\tilde{t}d(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}_n)+d(\tilde{x}_{n+1},\tilde{x}^*)\right) \tilde{\ll} \frac{\tilde{c}}{2}+\frac{\tilde{c}}{2}=\tilde{c}$$

bulunur. O halde $d\left(T\tilde{x}^{*},\tilde{x}^{*}\right)\tilde{\ll}\frac{\tilde{c}}{m}$, $\forall m\geq 1$ ve $\frac{\tilde{c}}{m}-d\left(T\tilde{x}^{*},\tilde{x}^{*}\right)\tilde{\in}\left(P,A\right)$ olur. $\frac{\tilde{c}}{m}\to\Theta,(\mathrm{m}\to\infty)$ ve $\left(P,A\right)$ kapalı koni olduğundan $-d\left(T\tilde{x}^{*},\tilde{x}^{*}\right)\tilde{\in}\left(P,A\right)$ olur. Aynı zamanda $d\left(T\tilde{x}^{*},\tilde{x}^{*}\right)\tilde{\in}\left(P,A\right)$ olduğu için $d\left(T\tilde{x}^{*},\tilde{x}^{*}\right)=\Theta$ ve $T\tilde{x}^{*}=\tilde{x}^{*}$ elde edilir.

Eğer $\tilde{y}^{*}$, $T$ nin bir diğer sabit esnek elemanı ise bu durumda

$$d\left(\tilde{x}^{*},\tilde{y}^{*}\right)=d\left(T\tilde{x}^{*},T\tilde{y}^{*}\right)\tilde{\preceq}\tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x}^{*},\tilde{x}^{*}\right)+d\left(T\tilde{y}^{*},\tilde{y}^{*}\right)\right)=\Theta$$

olur. Buradan $\tilde{x}^{*}=\tilde{y}^{*}$ çıkar. Yani $T$ nin sabit esnek elemanı tektir.

**Teorem 3.4.3.** $\left(\tilde{X},d,A\right)$ bir tam esnek koni metrik uzay ve $T:SE\left(\tilde{X}\right)\to SE\left(\tilde{X}\right)$ dönüşümü $\overline{0}\tilde{\leq}\tilde{t}\tilde{<}\overline{\frac{1}{2}}$ ile $\tilde{t}$ bir esnek sabit olmak üzere,

$$d\left(T\tilde{x},T\tilde{y}\right)\tilde{\preceq}\tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x},\tilde{y}\right)+d\left(T\tilde{y},\tilde{x}\right)\right),\ \forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$$

daralma şartını sağlasın. Bu durumda $T$, bir tek sabit esnek elemana sahiptir. Her bir $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\left\{\tilde{x}_n\right\}$ tekrarlama dizisi sabit esnek elemana yakınsaktır.

**İspat.** Her bir $\tilde{x}_0\tilde{\in}\tilde{X}$ için

$$\tilde{x}_1=T\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_2=T\tilde{x}_1=T^2\tilde{x}_0,\ \ldots\ ,\tilde{x}_{n+1}=T\tilde{x}_n=T^{n+1}\tilde{x}_0,\ \ldots$$

diyelim. Bu durumda

$$d(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n) = d(T\tilde{x}_n, T\tilde{x}_{n-1})$$

$$\tilde{\preceq}\, \tilde{t}\left(d(T\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}) + d(T\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n)\right)$$

$$\tilde{\preceq}\, \tilde{t}\left(d(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1})\right)$$

olur. Böylece

$$d(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n) \tilde{\preceq} \frac{\tilde{t}}{\bar{1} - \tilde{t}} d(\tilde{x}_n, x_{n-1})$$

elde edilir. Burada $\tilde{s} = \frac{\tilde{t}}{\bar{1} - \tilde{t}}$ olsun. Buradan $n > m$ için,

$$d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{\preceq} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}) + \ldots + d(\tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_m)$$

$$\tilde{\preceq} \left(\tilde{s}^{n-1} + \tilde{s}^{n-2} + \ldots + \tilde{s}^{m}\right) d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0)$$

$$\tilde{\preceq} \frac{\tilde{s}^m}{\bar{1} - \tilde{s}} d(\tilde{x}_1, x_0)$$

yazılır. $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek sabit elemanı verilsin. $\forall m \geq N_1$ için $\frac{\tilde{s}^m}{\bar{1} - \tilde{s}} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olacak şekilde bir $N_1$ doğal sayısı seçilirse $n > m$ için $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olur. O halde $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{X}$ içinde bir Cauchy dizisidir. $(\tilde{X}, d, A)$ bir tam esnek koni metrik uzay olduğundan bir $\tilde{x}^* \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı vardır öyle ki $n \to \infty$

iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}^*$ olur. Her $n \geq N_2$ için $d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right) \ll \left(\bar{1} - \tilde{t}\right)\frac{\tilde{c}}{3}$ olacak şekilde bir $N_2$ doğal sayısı seçelim. Böylece $n \geq N_2$ için

$$d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\preceq} d\left(T\tilde{x}_n, T\tilde{x}^*\right) + d\left(T\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right)$$

$$\tilde{\preceq} \tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}_n\right) + d\left(T\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right)\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right)$$

$$\tilde{\preceq} \tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) + d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right)\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right)$$

elde edilir. Buradan

$$d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\preceq} \frac{\bar{1}}{\bar{1} - \tilde{t}}\left(\tilde{t} d\left(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right)\right) + d\left(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}^*\right) \tilde{\ll} \frac{\tilde{c}}{3} + \frac{\tilde{c}}{3} + \frac{\tilde{c}}{3} = \tilde{c}$$

bulunur. O halde $\forall m \geq 1$ için $d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\ll} \frac{\tilde{c}}{m}$ ve $\frac{\tilde{c}}{m} - d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\in} (P, A)$ olur. $\frac{\tilde{c}}{m} \to \Theta, (m \to \infty)$ ve $(P, A)$ kapalı koni olduğundan $-d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\in} (P, A)$ olur. Aynı zamanda $d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) \tilde{\in} (P, A)$ olduğu için $d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\right) = \Theta$ ve $T\tilde{x}^* = \tilde{x}^*$ elde edilir. Eğer $\tilde{y}^*$, $T$ nin bir diğer sabit esnek elemanı ise bu durumda

$$d\left(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*\right) = d\left(T\tilde{x}^*, T\tilde{y}^*\right) \tilde{\preceq} \tilde{t}\left(d\left(T\tilde{x}^*, \tilde{y}^*\right) + d\left(T\tilde{y}^*, \tilde{x}^*\right)\right) = 2\tilde{t} d\left(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*\right).$$

olur. Buradan $d\left(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*\right) = \Theta$ ve $\tilde{x}^* = \tilde{y}^*$ çıkar. Yani $T$ nin sabit esnek elemanı tektir.

**Teorem 3.4.4.** $(\tilde{X}, d, A)$ bir tam esnek koni metrik uzay ve $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ dönüşümü $\overline{0} \precsim \tilde{t}, \tilde{r} \precsim \overline{1}$ esnek sabitler olmak üzere

$$d(T\tilde{x}, T\tilde{y}) \precsim \tilde{t} d(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{r} d(\tilde{y}, T\tilde{x}), \ \forall \tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$$

daralma şartını sağlasın. Bu durumda $\tilde{t} + \tilde{r} \precsim \overline{1}$ olduğunda $T$ bir tek sabit esnek elemana sahiptir.

**İspat.** Her bir $\tilde{x}_0 \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x}_1 = T\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_2 = T\tilde{x}_1 = T^2 \tilde{x}_0$, $\cdots$ , $\tilde{x}_{n+1} = T\tilde{x}_n = T^{n+1}\tilde{x}_0$, $\cdots$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n) &= d(T\tilde{x}_n, T\tilde{x}_{n-1}) \\
&\precsim \tilde{t}\left(d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}) + d(T\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n)\right) \\
&= \tilde{t} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}) \\
&\precsim \tilde{t}^n d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $n > m$ için,

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) &\precsim d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}) + \ldots + d(\tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_m) \\
&\precsim \left(\tilde{t}^{n-1} + \tilde{t}^{n-2} + \ldots + \tilde{t}^m\right) d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0) \\
&\precsim \frac{\tilde{t}^m}{1 - \tilde{t}} d(\tilde{x}_1, x_0)
\end{aligned}$$

yazılır. $\Theta \tilde{\ll} \tilde{c}$ ile $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{E}$ esnek sabit elemanı verilsin. $\forall m \geq N_1$ için $\frac{\tilde{t}^m}{\overline{1}-\tilde{t}} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_0) \ll \tilde{c}$ olacak şekilde bir $N_1$ doğal sayısı seçilirse $n > m$ için $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \tilde{\ll} \tilde{c}$ olur. O halde $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{X}$ içinde bir Cauchy dizisidir. $(\tilde{X}, d, A)$ bir tam esnek koni metrik uzay olduğundan bir $\tilde{x}^* \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı vardır öyle ki $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}^*$ olur. Her $n \geq N_2$ için $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \ll (\overline{1}-\tilde{t})\frac{\tilde{c}}{3}$ olacak şekilde bir $N_2$ doğal sayısı seçelim. Böylece $n \geq N_2$ için

$$
\begin{aligned}
d(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*) &\tilde{\preceq} d(\tilde{x}_n, T\tilde{x}^*) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*) \\
&= d(T\tilde{x}_{n-1}, T\tilde{x}^*) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*) \\
&\tilde{\preceq} \tilde{t} d(T\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}^*) + \tilde{r} d(T\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}^*) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*) \\
&\tilde{\preceq} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^*) \\
&\tilde{\ll} \tfrac{\tilde{c}}{3} + \tfrac{\tilde{c}}{3} + \tfrac{\tilde{c}}{3} = \tilde{c}
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde $d(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*) \tilde{\ll} \frac{\tilde{c}}{m}, \forall m \geq 1$ ve $\frac{\tilde{c}}{m} - d(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*) \tilde{\in} (P, A)$ olur. $\frac{\tilde{c}}{m} \to \Theta, (m \to \infty)$ ve $(P, A)$ kapalı olduğundan $-d(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*) \tilde{\in} (P, A)$ olur. Aynı zamanda $d(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*) \tilde{\in} (P, A)$ olduğu için $d(T\tilde{x}^*, \tilde{x}^*) = \Theta$ ve $T\tilde{x}^* = \tilde{x}^*$ elde edilir. Eğer $\tilde{y}^*$, $T$ nin bir diğer sabit esnek elemanı ve $\tilde{t} + \tilde{r} \tilde{<} \overline{1}$ ise bu durumda

$$
d(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = d(T\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \tilde{\preceq} \tilde{t} d(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) + \tilde{r} d(T\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = (\tilde{t} + \tilde{r}) d(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)
$$

olur. Buradan, $d\left(\tilde{x}^{*},\tilde{y}^{*}\right)=\Theta$ ve $\tilde{x}^{*}=\tilde{y}^{*}$ çıkar. Böylece $\tilde{t}+\tilde{r}\,\tilde{<}\,\overline{1}$ için $T$ nin sabit esnek elemanı tektir.

# BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez esnek koni metrik uzaylara giriş niteliğindedir. Tezde ilk önce esnek koni metrik uzaylar tanımlanmış ve birçok özelliği ispatlanmıştır. Esnek koni metrik uzaylarda açık yuvarlar, esnek elemanların oluşturduğu açık aileler ve esnek kümeler ile bir esnek kümenin esnek içi gerektiği kadar incelenmiştir. Bu kavramların ileri konularda kullanılabilecek birçok özelliği ortaya çıkarılmıştır. Bu sayede bazı şartlar ((d4) aksiyomu) altında koni metrik uzayların elemanter esnek topolojik uzaylar olduğu görülmüştür. Benzer yöntemlerle esnek kapalı kümeler, esnek türev kümeleri, esnek kapanış kümeler, esnek yoğun kümeler v.s. ve onların temel özellikleri incelenebilir.

Tezde ikinci olarak esnek koni metrik uzayların tamlığına bir giriş yapılmıştır. Bu bağlamda esnek elamanlardan oluşan yakınsak dizilerin limitinin tek olduğu, esnek yakınsak her dizinin bir esnek Cauchy dizisi olduğu v.s gibi birkaç özellik ispatlanmıştır. Tezde yapılan tanımlar ve ispat yöntemleriyle yakınsak diziler ve Cauchy dizilerin birçok özelliği incelenebilir. Aynı şekilde esnek tam koni metrik uzayların birçok özelliği çalışılabilir.

Tezde son olarak esnek metrik uzaylarda daralma dönüşümlerinin sabit nokta teorisi ele alınmıştır. Önemli bazı sabit nokta teoremleri esnek eleman teriminde ifade ve ispat edilmiştir. Benzer yöntemler ile esnek koni metrik uzaylarda çap olarak daralma dönüşümlerinin sabit nokta teorisi çalışılabilir ve bu dönüşümler için de sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilebilir.

Bu tezde, klasik koni metrik uzayların hangi kavramlarının esnek koni metrik uzaylarda eleman bazında ve elemanter küme işlemleri altında hangi şartlarla ele alınabileceğini incelenmiştir. Bu yönüyle tez araştırmacılar için kaynak teşkil edebilecek niteliktedir. Tezde kavramları ele alma yöntemlerine benzer yöntemlerle, esnek elemandan farklı olan esnek nokta bazında ve esnek küme işlemleri altında esnek kümeler üzerine koni metrik yapılar kurulabilir.

# KAYNAKLAR


[1] Zadeh, L. A., Fuzzy Sets. Information and Control, 8(3): 338-353, 1965.

[2] Molodtsov, D., Soft Set Theory-First Results. Computers and Mathematics with Applications, 37(4-5): 19-31, 1999.

[3] Molodtsov, D., The Theory of Soft Sets (in Russian), URSS Publishers, Moscow, 2004.

[4] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem. Computers and Mathematics with Applications, 44(8-9): 1077-1083, 2002.

[5] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., Soft Set Theory. Computers and Mathematics with Applications, 45(1): 555-562, 2003.

[6] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., On Intuitionistic Fuzzy Soft Sets. J. Fuzzy Math, 12(3): 669-683, 2004.

[7] Pawlak, Z., Rough Sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1): 341-356, 1982.

[8] Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B., Ye, S., Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J.Chen), IEEE, 2, 1104-1106, 2005.

[9] Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang, X., The parameterization reduction of soft sets and its applications Computers and Mathematics with Applications, 49(1): 757-763, 2005.

[10] Mushrif, M. M., Sengupta, S., Ray, A. K., Texture Classication Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classication. Algorithm. Lecture Notes in Computer Science, 3851, 246-254, 2006.

[11] Yang, X., Yu, D., Yang, J., Wu, C., Generalization of Soft Set Theory From Crisp to Fuzzy Case. in Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, Advances in Soft Computing 40, Springer, 345-355, 2007.

[12] Yang, X., Lin, T., Yang, Y. J., Li, Y., Yu, D., Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. Computers and Mathematics with Applications, 58, 521-527, 2009.

[13] Aktaş, H., Çağman, N., Soft Sets and Soft Groups. Information Sciences, 177(1): 2726-2735, 2007.

[14] Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., Soft Topology. Computers and Mathematics with Applications, 62, 351-358, 2011.

[15] Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft Semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56(10): 2621-2628, 2008.

[16] Feng, F., Li, Y., Leoreanu-Fotea, V., Application of level soft sets in decision making based on interval-valued fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1756-1767, 2010.

[17] Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B., Soft sets and soft rough sets. Information Sciences, 181, 1125-1137, 2011.

[18] Jun, Y. B., Soft BCK/BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 56(1): 1408-1413, 2008.

[19] Jun, Y. B., Lee, K. J., Park, C. H., Soft set theory applied to commutative ideals in BCK-algebras. Journal of Applied Mathematics and Informatics, 26(3-4): 707-720, 2008.

[20] Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK=BCI-algebras. Information Sciences, 178(1): 2466-2475, 2008.

[21] Jun, Y. B., Kim, H. S., Pseudo d-algebras. Information Sciences, 179, 1751-1759, 2009.

[22] Jun, Y. B., Lee, K. J., Park, C. H., Soft set theory applied to ideals in d-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 57, 367-378, 2009.

[23] Jun, Y. B., Lee, K. J., Zhan, J., Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 58, 2060-2068, 2009.

[24] Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in Hilbert algebras. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6(2): 75-86, 2009.

[25] Sun, Qiu-Mei., Zhang, Zi-Liong., Liu, Jing., Soft Sets and Soft Modules. (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu Yao Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology. RSKT, Proceedings, Springer, 403-409, 2008.

[26] Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463, 2010.

[27] Atagün, A. O., Sezgin, A., Soft substructures of rings, fields and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61, 592-601, 2011.

[28] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Introduction to fuzzy soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 58 ,1279-1286, 2009

[29] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces. Neural Computation and Application, 113-119, 2011.

[30] Shabir, M., Naz, M., On Soft Topological Spaces. Comput. Math. Appl. 61, 1786-1799, 2011.

[31] Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., Remarks on Soft Topological Spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3(2): 171-185, 2011.

[32] Min, W. K., A Note on Soft Topological Spaces. Comput. Math. Appl. 62, 3524-3528, 2011.

[33] Taşköprü, K., Altıntaş, İ., Introduction to Elementary Soft Topology. Under review.

[34] Das, S., Samanta, S. K., Soft real sets, soft real numbers and their properties. The Journal of Fuzzy Mathematics, 20(3): 551-576, 2012.

[35] Das, S., Samanta, S. K., On soft complex sets and soft complex numbers. J. Fuzzy Math., 21(1): 195-216, 2013.

[36] Das, S., Samanta, S. K., Soft metric. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1): 77-94,2013,.

[37] Das, S., Samanta, S. K., On soft metric spaces, J. Fuzzy Math., 21(3): 707-734, 2013.

[38] Chiney, M., Samanta, S. K., Vector soft topology. Ann. Fuzzy Math. Inform.,10(1): 45-64, 2015.

[39] Das, S., Samanta, S. K., Soft linear operators in soft normed linear spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(2): 295-314, 2013.

[40] Das, S., Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft linear spaces and soft normed linear spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 9(1): 91-109, 2015.

[41] Das, S., Samanta, S. K., On soft inner product spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1): 151-170, 2013.

[42] Das, S., Samanta, S. K., Soft linear functionals in soft normed linear spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume 7, No. 4, 629-651, 2014.

[43] Guler, A. C., Yıldırım, E. D., Ozbakır, O. B., A fixed point theorem on soft G-metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl., 9(3): 885-894, 2016.

[44] Huang, L-G., Zhang, X., Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. J. Math. Anal. Appl., 332(2): 1468-1476, 2007.

[45] Rezapour, S., Hamlbarani, R., Some notes on the paper Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. J. Math. Anal. Appl., 345(2): 719-724, 2008.

[46] Abbas, M., Jungck, G., Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. J. Math. Anal. Appl., 341(1): 416-420, 2008.

[47] Arshad, M., Azam, A., Vetro, P., Some common fixed point results in cone metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 11-22, 2009.

[48] Azam, A., Arshad, M., Beg, I., Common fixed points of two maps in cone metric spaces. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 57(3): 433-441, 2009.

[49] Azam, A., Arshad, M., Beg, I., Existence of fixed points in complete cone metric spaces. Int. J. Mod. Math., 5(1): 2010, 91-99, 2010.

[50] S. H. Cho and J. S. Bae, Fixed point theorems for multivalued maps in cone metric spaces. Fixed Point Theory Appl., (87): 33-41, 2011.

[51] Jankovic, S., Kadelburg, Z., Radenovic, S., On cone metric spaces: a survey. Nonlinear Anal., 74(7): 2591-2601, 2011.

[52] Mehmood, N., Azam, A., Kocinac, L. D. R., Multivalued fixed point results in cone metric spaces. Topology Appl., 179, 156-170, 2015.

## ÖZGEÇMİŞ

Dilek Kesik, 17.06.1972 tarihinde İstanbul'da dünyaya geldi. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 1990 yılında İnönü Teknik Lisesinden makine bölümünden mezun oldu. Teknik ressam olarak işe başladı. 1993 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümünü 1998 yılında bitirdi. Emekli Matematik Öğretmenidir. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.