T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$p-$ KOMPLEKS FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yıldız KULAÇ

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Enstitü Bilim Dalı : **GEOMETRİ**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Murat TOSUN**

Şubat 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$p-$KOMPLEKS FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yıldız KULAÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 13.02.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Prof. Dr.**	**Doç. Dr.**
Mehmet Ali GÜNGÖR	**Murat TOSUN**	**Osman Zeki OKUYUCU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Yıldız KULAÇ

13.02.2019

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım esnasında değerli bilgileri ve tecrübeleriyle beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Murat TOSUN'a minnetle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasını titizlikle takip eden ve sabırla yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi yüksek lisans eğitimim boyunca da manevi desteklerini hissettiğim sevgili annem Figen KULAÇ'a ve sevgili babam Şenol KULAÇ'a sonsuz teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar cümlesi
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik sayılar cümlesi
F_n	: Fibonacci dizisi
L_n	: Lucas dizisi
H_n	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizi
$(C_p)_n$	: $p-$Kompleks Fibonacci sayıları
$(S_p)_n$	: $p-$Kompleks Lucas sayıları
$(D_p)_n$	: $p-$Kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayıları

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fibonacci ve Lucas sayıları, kompleks Fibonacci ve Lucas sayıları, $p-$ kompleks Fibonacci ve Lucas sayıları

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Konu ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar, birinci bölümde verilmiştir.

İkinci bölümde kompleks, dual, hiperbolik ve $p-$ kompleks sayılarının tanımları ve onlara dair cebirsel özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Fibonacci, Lucas ve genelleştirilmiş Fibonacci dizileri tanımlanmış ve Fibonacci ile Lucas sayılarını içeren özdeşlikler verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise bu tezin original kısmı olup kompleks, dual ve hiperbolik sayıların genel formu olan $p-$kompleks Fibonacci ve Lucas sayıları ile $p-$ kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayıları tanımlanarak bu sayıların cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu sayılar arasında Binet, Cassini, Catalan, d'Ocagne ve Pythagorean gibi birçok eşitlik incelenmiştir. Bu süreçte Fibonacci, Lucas ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren özdeşliklerden faydalanılmıştır.

Son bölümde $p-$kompleks Fibonacci, Lucas sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili tartışmalara ve sonuçlara yer verilmiştir.

$p-$ COMPLEX FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

SUMMARY

Keywords: Fibonacci and Lucas numbers, complex Fibonacci and Lucas numbers, $p-$ complex Fibonacci and Lucas numbers

This study consists of five parts. The studies which are related to the literatüre are given in the first part.

In the second part of this study; complex, dual, hyperbolic and generalized complex numbers' definitions and their algebraic properties are given.

In the third part; Fibonacci, Lucas and generalized Fibonacci numbers' sequences are defined and given the identities which includes them.

In the fourth part which is the original section of this thesis, $p-$ complex Fibonacci, Lucas numbers and $p-$ complex generalized Fibonacci numbers which are complex, dual and hyperbolic numbers' general form is defined and investigated of these numbers' algebraic properties. In addition to these, the equalities such as Binet, Cassini, Catalan, d'Ocagne and Pythagorean are examined. In this process, the identities which include Fibonacci, Lucas and generalized Fibonacci numbers are used.

Debates and results about $p-$complex Fibonacci, Lucas numbers and generalized Fibonacci numbers are given in the last section.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1170'li yıllarda İtalya'nın Pisa şehrinde doğduğu tahmin edilen Leonardo de Pisa Orta Çağ Avrupası'nın en seçkin matematikçilerindendir. Annesi Alessandra, Leonardo 9 yaşındayken ölmüştür. Babası Guglielmo'nun takma adı Bonaccio'dir. Bu ad Leonardo'ya miras olarak kalmıştır. Leonardo de Pisa, İtalyanca'da Bonacci'nin oğlu anlamındaki Filius Bonacci'nin kısaltılmışı olan Fibonacci adıyla anılmaktadır. Babası Cezayir ve İtalya arasında ticaret postasını idare etmekteydi. Leonardo babasının işine yardım için onunla seyahat ederdi. Bu süreçte birçok Arap matematikçiyle tanıştı ve onlarla çalışma fırsatı buldu. Onlardan Hint-Arap sayı sistemini öğrendi. Bu sayı sistemiyle yapılan aritmetik işlemlerin Roma rakamlarına göre oldukça kullanışlı olduğunu görmüş ve Abaküs Kitabı veya Hesaplama Kitabı anlamındaki Liber Abaci adlı eserinde bu bilgilere yer vermiştir. Bu eser 13.yy Avrupası'nda büyük yankı uyandırmış ve kilisenin yasaklamalarına karşın Hint-Arap sayı sistemi İtalyan tüccarlar arasında kullanılmıştır. Günümüzde ondalık sayı sistemi olarak bilinen bu sayılarla Avrupa müspet bilimde hızla ilerlemiştir. Fibonacci 1225 yılında Diophant denklemini içeren Liber Quadratornum adlı kitabını yazmıştır. Sayılar teorisine büyük katkı sağlayan bu eser, Liber Abaci kadar geniş bir çevreye yayılmamıştır.

Fibonacci yayımladığı kitaplardan ziyade, Liber Abaci adlı eserinde yer alan ve bir tavşan ailesinin artışını ele alan problemle günümüze kadar meşhur hale gelmiştir. Problem şöyledir: "Bir çift yetişkin tavşan, her ay yeni bir çift tavşan doğurmaktadır. Bu yavrular, bir ayın sonunda erişkin hale gelmekte ve sonraki her ay yeni bir çift tavşan doğurmaktadır. Herhangi bir ay sonunda yavruların ve yetişkin tavşanların sayısı kaçtır? Bu süreçte tavşanların hiç ölmedikleri ve her doğan tavşan çiftinin bir dişi ve bir erkek olduğu varsayılmaktadır." İlk ay yeni doğmuş bir tavşan çifti olsun. İkinci ayda, bu tavşan çifti doğurmadıklarından yine bir çift tavşan mevcuttur.

Üçüncü ayda bu tavşanlar yavrulayacaklarından iki çift tavşan olacaktır. Ancak yeni doğan çift dördüncü ay doğuramayacaktır, fakat ana babaları bir çift daha yavrulayacaktır. Toplamda üç çift tavşan olacaktır. Benzer şekilde devam edilirse;

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...$$

dizisi elde edilir. Bu dizide üçüncü terimden itibaren her sayının, kendinden önceki iki sayının toplamı şeklinde olduğu açıkça görülmektedir. $n.$ aydaki çift sayısı F_n, $(n+1).$ aydaki çift sayısı F_{n+1} olmak üzere olmak üzere $(n+2).$ aydaki çift sayısını,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklinde tanımlanabilir [1].

Fibonacci sayıları olarak adlandırılan bu sayılar doğada birçok yerde karşımıza çıkmaktadır. Bu dizideki her terim bir öncekine bölündüğünde bölüm, altın oran ya da kutsal oran olarak adlandırılan 1,61803398… sayısına yaklaşır. Altın orana canlılarda, insan vücudunda, mimaride ve birçok alanda rastlanmaktadır. Örneğin ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin olduğu görülmektedir. Ayrıca bazı mimari eserler de altın orana uygun olacak şekilde planlanmıştır. Örneğin, Mimar Sinan'ın Selimiye ve Süleymaniye camilerinin minarelerinin yapımında Fibonacci dizisi bulunmaktadır. Camilerin mimarilerindeki ışıklı bölmelerin oranı, altın orana eşittir. Sonuç olarak ölçüleri altın orana uygun olan nesnelerin ve canlıların daha estetik olduğu ve güzel göründüğü savunulmaktadır [2]. Ayrıca bu dizinin sayılar teorisinde de uygulamaları mevcuttur. Tüm bu nedenlerden dolayı Fibonacci sayıları 19.yy başlarından günümüze kadar önemini sürdürmüş ve matematikçiler tarafından çalışmaya değer görülmüştür.

Edouard Lucas bu diziyi yeniden keşfetmiştir ancak diziyi asıl bulan kişi Fibonacci'ye atfetmiştir.

Fibonacci sayılarından faydalanılarak birçok sayı sistemi oluşturulmuştur.

Kompleks Fibonacci sayıları, Horadam [3] tarafından bir kompleks sayının reel ve sanal kısımları ardışık Fibonacci sayıları olacak şekilde tanımlanmış ve bu sayılarla ilgili birkaç genel eşitlik verilmiştir. Bu sayılar Jordan [4] tarafından Gauss Fibonacci ve Lucas sayıları olarak adlandırılarak bazı bağıntılar elde edilmiştir. Benzer şekilde Berzsenyi'de [5] Gauss Fibonacci sayılarla ilgili eşitlikler bulmuştur. Harman [6] kompleks Fibonacci sayılarını, reel ve imajiner kısımları Fibnacci sayılarının ikili çarpımları olacak şekilde tanımlanmıştır. Harkin [7] ise bir parametre için $p-$kompleks sayılarını incelemiştir.

Biz bu çalışmada $p-$kompleks Fibonacci ve Lucas sayılarını, Harkin [7]'nin tanımladığı $p-$ kompleks sayılarının reel ve imajiner kısımları ardışık Fibonacci veya Lucas sayıları olacak şekilde düzenleyerek tezin orijinal kısmını oluşturduk. Ardından bu sayı sistemi için Binet, Cassini, Catalan, d'Ocagne ve Pythagorean gibi çeşitli özdeşlikler verdik. Bu süreçte Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki eşitliklerden faydalandık.

BÖLÜM 2. SAYILAR

Bu bölümde, kompleks, dual, hiperbolik ve $p-$kompleks sayı sistemleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu sayıların eşleniği, normu ile bu sayılar arasındaki toplama, çarpma, skalarla çarpma gibi cebirsel işlemlere yer verilmiştir.

2.1. Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar İtalyan matematikçiler G. Cardan (1501-1576) ve R. Bombelli (1526-1572) tarafından ilk kez cebirsel işlemlerde kullanılmıştır [7].
Kompleks sayılar cümlesi

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$$

şeklinde gösterilir. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının reel kısmı $\mathrm{Re}(z) = x,$ imajiner kısmı ise $\mathrm{Im}(z) = y$ dir [7].

z kompleks sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\bar{z} = x - iy \text{ ve } \|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şeklinde tanımlanır [7].

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, sırasıyla,

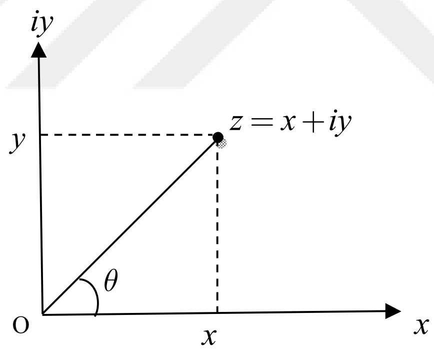
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + iy_1) = \lambda x_1 + i\lambda y_1$$

ile verilir.

Kompleks sayılar cümlesi ile $\mathbb{R}^2$ uzayı arasında birebir bir eşleme vardır. Bundan dolayı $\mathbb{R}^2$ deki her bir noktaya bir tek kompleks sayı karşılık gelir. Benzer şekilde her bir kompleks sayıya $\mathbb{R}^2$ uzayında tek bir nokta karşılık gelir. Buradan hareketle $z = x + iy$ herhangi kompleks sayısı düzlemde (x, y) noktasına eşlenir. Kartezyen koordinatlarda $z = x + iy$ kompleks sayısının reel kısmı apsise, sanal kısmı da ordinata karşılık gelir [8].



Şekil 2.1. Kompleks düzlem

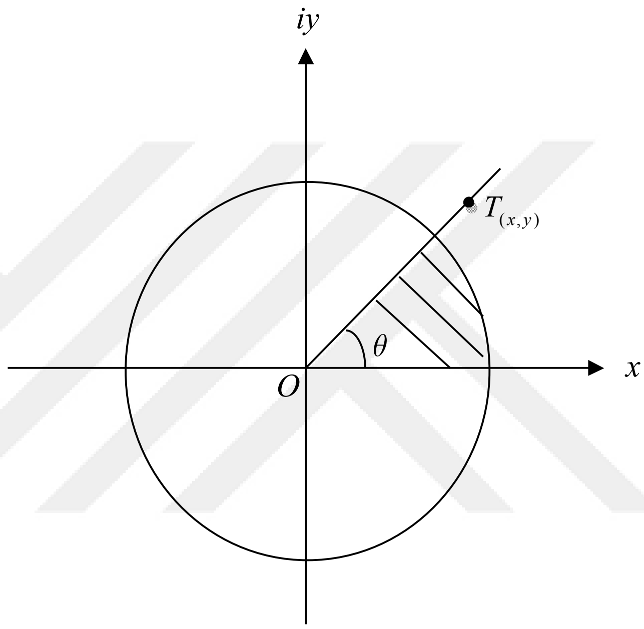
Şekil 2.1.'de verilen kompleks düzlemde alınan herhangi iki kompleks sayı $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olmak üzere bu iki sayı arasındaki uzaklık

$$\|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ile verilir [8].

Kompleks düzlemde başlangıç noktasına uzaklıkları 1 birim olan noktaların cümlesi $x^2 + y^2 = 1$ eşitliğini sağlayan merkezcil birim çember oluşturur [8].

$z = (x, y)$ kompleks sayısı, kompleks düzlem üzerinde $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile Şekil 2.2.' deki gibi gösterilebilir.



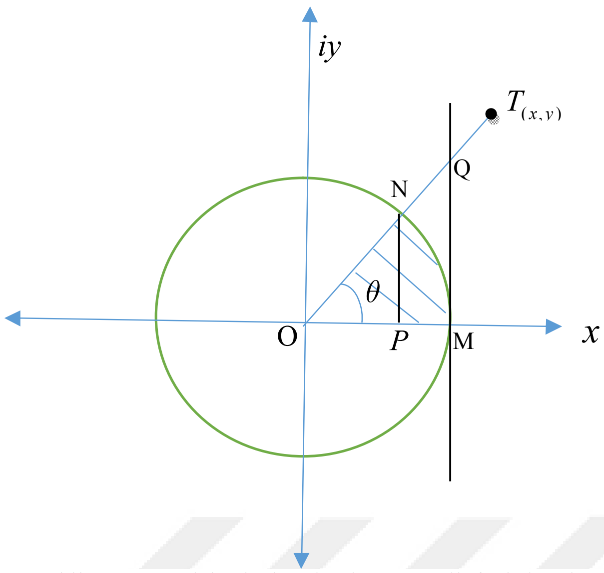
Şekil 2.2. Bir kompleks sayının kompleks düzlemde gösterilmesi

$\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile x ekseni arasında kalan yay uzunluğuna $z = (x, y)$ sayısının argümenti denir öyleki

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklindedir [8].

Kompleks düzlemde trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.



Şekil 2.3. Kompleks düzlemde trigonometrik fonksiyonlar

$\cos\theta$, $\sin\theta$ ve $\tan\theta$ fonksiyonları sırasıyla $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{NP}$ ve $\overrightarrow{QM}$ vektörleri ile tanımlanır. $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ fonksiyonları Maclaurin serisine açılırsa, sırasıyla,

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}$$

ve

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$$

olur. Buradan,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Euler denklemi yardımıyla $z = x + iy$ kompleks sayısı $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta) = \|z\|e^{i\theta} = \|z\|e^{i(\theta+2k\pi)}$$

biçiminde de yazılabilir.

Argümenti θ olan $z=(x,y)$ kompleks sayısının

$$z=\|z\|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

şeklindeki gösterimine kompleks sayının kutupsal gösterimi adı verilir. Kutupsal gösterimden faydalanarak herhangi iki kompleks sayı çarpılırken sayıların normları çarpılır, argümentleri ise toplanarak yeni bir kompleks sayı elde edilir. Yani, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ için $z_1=\|z_1\|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ve $z_2=\|z_2\|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ olmak üzere z_1z_2 çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$z_1z_2=\|z_1\|\|z_2\|\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

Ayrıca, n tamsayı olmak üzere $z=x+iy$ kompleks sayısının $n.$ kuvveti

$$z^n=\|z\|^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)=\|z\|^n e^{i(n\theta)}$$

şeklindedir [8].

2.2. Dual Sayılar

Dual sayıları Alman matematikçi E.Study (1903) tanımlamıştır [9]. Kinematik, robotik kontrol, uzaysal mekanik gibi birçok alanda dual sayıların uygulamaları mevcuttur.

Dual sayılar cümlesi

$$\mathbb{D}=\left\{z=x+\varepsilon y: x,y\in\mathbb{R},\ \varepsilon^2=0,\ \varepsilon\neq 0\right\}$$

şeklinde gösterilir. $z = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısının reel kısmı $\mathrm{Re}(z) = x,$ dual kısmı ise $Du(z) = y$ dir [9].

z dual sayısının eşleniği ve normu, sırasıyla,

$\overline{z} = x - \varepsilon y$ ve $\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} = |x|$

şeklinde tanımlanır [9].

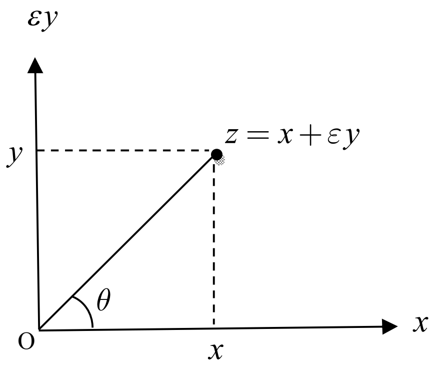
$\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1,\ z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in \mathbb{D}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, sırasıyla, aşağıdaki gibidir.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \varepsilon(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \varepsilon y_1)(x_2 + \varepsilon y_2) = x_1 x_2 + \varepsilon(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + \varepsilon y_1) = \lambda x_1 + \varepsilon \lambda y_1.$$

Dual sayılar cümlesi ile $\mathbb{R}^2$ uzayı arasında birebir bir eşleme vardır. Bu nedenle $\mathbb{R}^2$ üzerindeki her bir noktaya bir tek dual sayı karşılık gelir. Tersine her bir dual sayıya $\mathbb{R}^2$ uzayında tek bir nokta karşılık gelir. Buradan $z = x + \varepsilon y$ herhangi dual sayısı düzlemde (x, y) noktasına eşlendiği görülür. Kartezyen koordinatlarda $z = x + \varepsilon y$ dual sayısının reel kısmı apsise, sanal kısmı da ordinata karşılık gelir [9].



Şekil 2.4. Dual düzlem (Galile düzlemi)

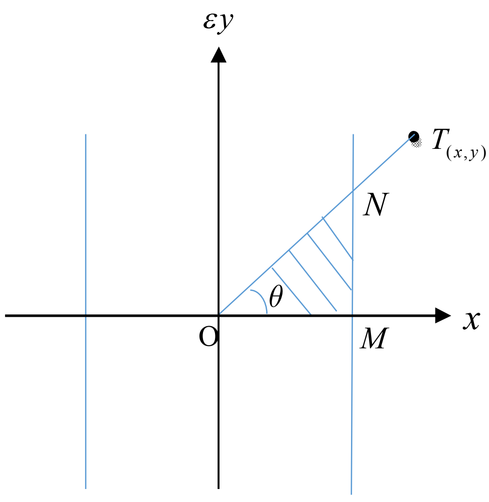
Şekil 2.4.'de verilen dual düzlemde alınan herhangi iki dual sayı arasındaki uzaklık $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$ ve $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2$ olmak üzere bu iki dual sayı arasındaki uzaklık

$$\|z_1 - z_2\| = |x_1 - x_2|$$

şeklindedir [9].

Dual düzlemde başlangıç noktasına uzaklıkları 1 birim olan noktaların cümlesi $\|z\| = 1$ eşitliğini sağlayan $x = \pm 1$ paralel doğrularıdır [9].

$z = (x, y)$ dual sayısı dual düzlem üzerinde $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile Şekil 2.5.'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.5. Bir dual sayının dual düzlemde gösterilmesi

$\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile x ekseni arasında kalan yay uzunluğuna $z=(x,y)$ dual sayısının argümenti denir öyleki

$$\theta=\frac{y}{x}$$

dir [9].

Dual düzlemde trigonometrik fonksiyonlar da tanımlanabilir. $\cos\theta=1$ ve $\sin\theta=\theta$ sırasıyla, Şekil 2.5.' deki $\overrightarrow{OM}$ ve $\overrightarrow{NM}$ vektörleri ile tanımlanır. Buradan tanjant fonksiyonu için $\tan\theta=\theta$ eşitliği kolayca görülür. $z=x+\varepsilon y$ bir dual olmak üzere Euler denklemi yardımıyla

$$e^{\varepsilon\theta}=\cos\theta+\varepsilon\sin\theta$$

$$z=\|z\|(\cos\theta+\varepsilon\sin\theta)=\|z\|e^{\varepsilon\theta}$$

elde edilir. Dual düzlemde argümenti θ olan $z=(x,y)$ dual sayısının

$$z=\|z\|(\cos\theta+\varepsilon\sin\theta)$$

şeklindeki gösterimine, dual sayının kutupsal gösterimi denir. Kutupsal gösterimden faydalanarak herhangi iki dual sayı çarpılırken sayıların normları çarpılır, argümentleri ise toplanarak yeni bir dual sayı elde edilebilir. Yani, $z_1=\|z_1\|(\cos\theta_1+\varepsilon\sin\theta_1)$ ve $z_2=\|z_2\|(\cos\theta_2+\varepsilon\sin\theta_2)$ dual sayıları için z_1z_2 çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$z_1z_2=\|z_1\|\|z_2\|\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+\varepsilon\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

Ayrıca $z=x+\varepsilon y$ bir dual sayı ve $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$z^n = \|z\|^n \left(\cos(n\theta) + \varepsilon \sin(n\theta)\right) = \|z\|^n e^{\varepsilon(n\theta)}$$

biçimindedir [9].

2.3. Hiperbolik Sayılar

Hiperbolik sayılar İngiliz matematikçi W.Clifford (1968) tarafından geliştirilmiştir [10]. Bu sayılar mekanik problemlerinin çözümünde kolaylıklar sağlamıştır.

Hiperbolik sayılar cümlesi

$$\mathbb{H} = \left\{ z = x + uy : x, y \in \mathbb{R},\ u^2 = 1,\ u \neq \mp 1 \right\}$$

ile verilebilir. $z = x + uy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının reel kısmı $\mathrm{Re}(z) = x$, imajiner kısmı ise $\mathrm{Im}(z) = y$ dir [10].

z hiperbolik sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\bar{z} = x - uy \text{ ve } \|z\| = \sqrt{|z\bar{z}|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

şeklinde tanımlanır [10].

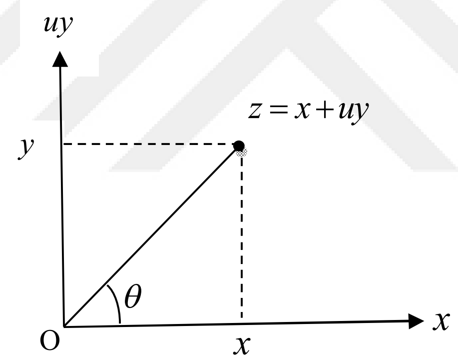
$\mathbb{H}$ hiperbolik sayılar cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri $z_1 = x_1 + uy_1,\ z_2 = x_2 + uy_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, sırasıyla, aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + u(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + uy_1)(x_2 + uy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + u(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + uy_1) = \lambda x_1 + u\lambda y_1.$$

Hiperbolik sayılar cümlesi ile $\mathbb{R}^2$ uzayı arasında birebir bir eşleme vardır. Böylece $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki her bir noktaya bir tek hiperbolik sayı karşılık gelir. Tersine her bir hiperbolik sayıya $\mathbb{R}^2$de bir tek nokta karşılık gelir. Dolayısıyla $z = x + uy$ herhangi hiperbolik sayısı düzlemde (x, y) noktasına eşlenir. Kartezyen koordinatlarda $z = x + uy$ hiperbolik sayısının reel kısmı apsise, sanal kısmı da ordinata karşılık gelir [10].



Şekil 2.6. Hiperbolik düzlem

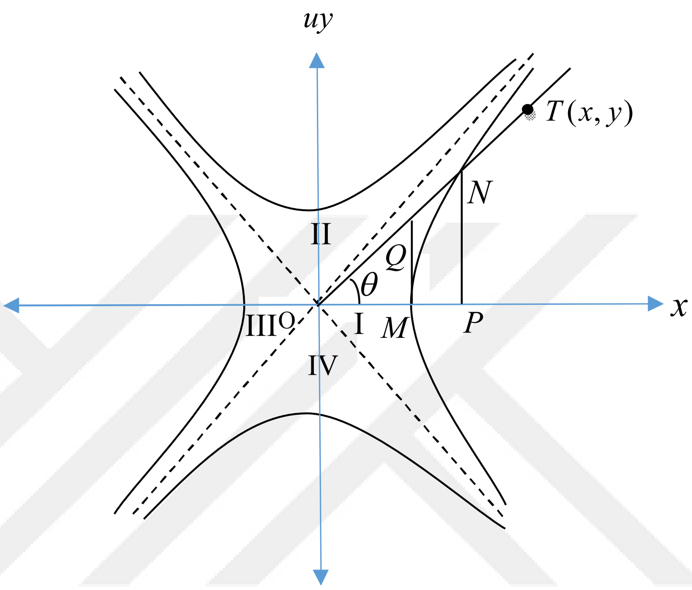
Şekil 2.6.' da verilen hiperbolik düzlemde alınan herhangi iki hiperbolik sayı arasındaki uzaklık $z_1 = x_1 + uy_1$ ve $z_2 = x_2 + uy_2$ sayıları için

$$\|z_1 - z_2\| = \sqrt{\left|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2\right|}$$

şeklindedir.

Hiperbolik düzlemde başlangıç noktasına uzaklıkları 1 birim olan noktaların cümlesi, $x^2 - y^2 = 1$ eşitliğini sağlayan hiperboldür [10].

$z = (x, y)$ hiperbolik sayısı hiperbolik düzlem üzerinde $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile Şekil 2.7.'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.7. Bir hiperbolik sayının hiperbolik düzlemde gösterilmesi

$\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile x ekseni arasında kalan yay uzunluğuna $z = (x, y)$ hiperbolik sayısının argümenti denir. I. ve II. bölgede bulunan hiperbolik sayıların argümenti

$$\theta = \tanh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ile verilir [10]. Benzer şekilde III. ve IV. bölgede bulunan hiperbolik sayıların argümenti

$$\theta = \tanh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

şeklindedir [10].

Trigonometrik fonksiyonlar, hiperbolik düzlemde tanımlanabilir. O halde kosinüs, sinüs ve tanjant fonksiyonları sırasıyla $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{NP}$ ve $\overrightarrow{QM}$ vektörleri ile tanımlanır. Kosinüs hiperbolik fonksiyonu $\cosh\theta$, sinüs hiperbolik fonksiyonu $\sinh\theta$ ve tanjant hiperbolik fonksiyonu $\tanh\theta$ ile gösterilirler.

$\cosh\theta$ ve $\sinh\theta$ fonksiyonları Maclaurin serisine açılırsa sırasıyla

$$\cosh\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\theta^{2n}$$

ve

$$\sinh\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$$

elde edilir. Böylece,

$$e^{u\theta} = \cosh\theta + u\sinh\theta$$

Euler denklemi yardımıyla hiperbolik sayının kutupsal gösterimi verilebilir.
Argümenti θ olan $z=(x,y)$ hiperbolik sayısı Şekil 2.7.'de görüldüğü gibi I. ve III. bölgede ise

$$z = \|z\|(\cosh\theta + u\sinh\theta) = \|z\|e^{u\theta}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, argümenti θ olan $z=(x,y)$ hiperbolik sayısı Şekil 2.7.'de görüldüğü gibi II. ve IV. bölgede ise

$$z = \|z\|(\sinh\theta + u\cosh\theta) = \|z\|ue^{u\theta}$$

olur. Bu gösterime, hiperbolik sayının kutupsal gösterimi adı verilir. Kutupsal gösterimden faydalanarak, herhangi iki hiperbolik sayı çarpılırken sayıların normları çarpılır, argümentleri ise toplanarak yeni bir hiperbolik sayı elde edilir. Örnek olarak, I. veya II. bölgede alınan

$$z_1 = \|z\|\left(\cosh\theta_1 + u\sinh\theta_1\right) \text{ ve } z_2 = \|z_2\|\left(\cosh\theta_2 + u\sinh\theta_2\right)$$

hiperbolik sayıları için $z_1 z_2$ çarpımı

$$z_1 z_2 = \|z_1\|\|z_2\|\left(\cosh\left(\theta_1+\theta_2\right) + u\sinh\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

şeklindedir. Diğer bölgeler için de benzer yol takip edilir.

Ayrıca I. veya II. bölgede alınan $z = x + uy$ hiperbolik sayısının $n.$ kuvveti ise

$$z^n = \|z\|^n\left(\cosh\left(n\theta\right) + u\sinh\left(n\theta\right)\right) = \|z\|^n e^{u(n\theta)}$$

ile verilir [10]. Benzer şekilde n tamsayı olmak üzere III. veya IV. bölgede alınan hiperbolik sayının $n.$ kuvveti

$$z^n = \|z\|^n\left(\sinh\left(n\theta\right) + u\cosh\left(n\theta\right)\right) = \|z\|^n u e^{u(n\theta)}$$

şeklindedir.

2.4. $p-$Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar ilk kez G. Cardan (1501-1576) ve R. Bombelli (1526-1572) tarafından cebirsel işlemlerde kullanılmıştır. i kompleks birimi birçok matematikçi tarafından modifiye edilmiştir. $i^2 = 1$ $(i \neq \mp 1)$ şeklinde olmak üzere İngiliz matematikçi W. Clifford tarafından hiperbolik sayılar tanımlanmıştır [10]. Ayrıca

$i^2 = 0 \; (i \neq 0)$ şeklinde olmak üzere Alman matematikçi E. Study tarafından dual sayılar tanımlanmıştır [9].

İlerleyen yıllarda bu sayı sistemleri $i^2 = p \; (p \in \mathbb{R})$ olacak şekilde genelleştirilmiş ve bu sayı sistemi $p-$ kompleks sayı sistemi olarak adlandırılmıştır.

$p \in \mathbb{R}$ değeri $(-\infty, \infty)$ aralığında olmak üzere $p < 0$ için elde edilen sayı sistemine eliptik sayılar sistemi adı verilir. Özel olarak $p = -1$ olduğunda kompleks sayılar elde edilir.

$p = 0$ için parabolik veya dual sayılar sistemi, $p > 0$ için ise hiperbolik sayılar elde edilir. $q, p \in \mathbb{R}$ için $i^2 = iq + p$ olmak üzere $z = x + iy \; (x, y \in \mathbb{R})$ ifadesine kompleks sayılar sisteminin iki parametreli ailesi olan $p-$ kompleks sayılar denir.

$q = 0$ iken $i^2 = p \; (-\infty < p < \infty)$ olup, $p-$ kompleks sayılar sisteminin bir parametreli ailesi elde edilir [7]. Harkin A. A ve Harkin J. B. $\mathbb{C}_p$, $p-$ kompleks sayı sistemini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

x reel, y imajiner kısım olmak üzere,

$$\mathbb{C}_p = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, \; i^2 = p\}$$

şeklindedir.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere z_1 ve z_2 nin çarpımı,

$$z_1.z_2 = \begin{cases} (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) & , \; p = -1 \\ x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) & , \; p = 0 \\ (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) & , \; p = 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Bu özel durumlar sırasıyla Kompleks, Dual (Galile) ve Hiperbolik sayılara karşılık gelir.

olur [7]. Bu özel durumlar sırasıyla

$z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere z 'nin modülü negatif olmayan reel sayılar için

$$\|z\| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{\left|x^2 - py^2\right|}$$

ile verilir [7].

$p-$kompleks düzlemde toplama veya çıkarma işlemi yapılırken reel kısımlar kendi aralarında, imajiner kısımlar kendi aralarında toplanır veya çıkarılır. Aynı düzlemde çarpma işlemi yapılırken $i^2 = p\ (p \in \mathbb{R})$ olduğu göz önüne alınarak dağılma özelliği kullanılır ve reel sayılarda olduğu gibi çarpma işlemi yapılır. Bu düzlemde bölme işlemi yapılırken paydadaki $p-$kompleks sayının eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

.

BÖLÜM 3. SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde, Fibonacci, Lucas ve genelleştirilmiş Fibonacci dizileri tanımlanacak ve bu sayıları içeren çeşitli özdeşlikler verilecektir.

3.1. Fibonacci Dizisi

Fibonacci sayılarına, doğada bir çok yerde karşılaşabiliriz. Örnek olarak bir bitki sapının yapraklarında, bir ağacın dallarının düzeninde Fibonacci sayısı bulunur. Başlangıç noktası olarak yapraklardan biri alınır ve bundan başlayarak, başlangıç noktasının tam olarak altında veya üstünde olan bir yaprak bulunana kadar yapraklar sayılırsa, daima Fibonacci sayısı ortaya çıkar. Papatyaların taç yaprakları, Fibonacci sayısı kadardır. Bu çiçeğin yaprak sayısı da Fibonacci sayısıdır. Ayçiçeği bitkisinin çiçek kısmında küçük bölmeler vardır. Sarmal şeklinde olan bu bölmelerin sınırları merkezden çiçeğin dış kısmına doğrudur. Bu sarmalların sayısı yine Fibonacci sayısıdır. Kozalak ve ananasın kabuklarında, soğanın katmanlarında, kıvırcığın yapraklarında; tütün bitkisi, eğrelti otu gibi bitkilerde, deniz kabuğunda, salyangozda ve doğada daha bir çok yerde bu sayılar mevcuttur.

Mimaride, sanatta Fibonacci sayıları ve altın oran bulunmaktadır. Mısır Piramitlerinin boyutlarının bazılarında altın orana rastlanır. Leonarda da Vinci de birçok esernde bu orana dikkat ederek tablolar yapmıştır. Mona Lisa tablosu bunun en bilindik örneğidir. Altın orana ayrıca insan vücudunda da rastlanır.

Fibonacci sayılarının doğada birçok yerde karşımıza çıkması, ardışık iki Fibonacci sayısının oranının limit olarak altın oran olarak adlandırılan $1,61803399...$ sayısına yaklaşması ve sayılar teorisinde Fibonacci sayılarının birçok uygulamasının bulunması Fibonacci sayılarını keşfedildiği zamandan günümüze kadar değerli kılmaktadır.

$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç şartları ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 2)$ lineer rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye Fibonacci dizisi denir. Burada F_n, n. Fibonacci sayısı olarak isimlendirilir.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 2)$ lineer rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ şeklindedir ve bu karakteristik denklemin kökleri; $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir. Ayrıca Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

biçimindedir. Başlangıç değerleri $n = 1$ ve $n = 2$ için;

$$k_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + k_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$
$$k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini çözersek

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ve} \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Böylece Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olur. Böylece,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$

bulunur. Ayrıca

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$

eşitliği Binet formülü olarak adlandırılır. Bu formülü 1843 yılında, Fransız matematikçi Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856) keşfetmiştir [1].

$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç şartlarını göz önünde bulundurarak $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Fibonacci dizisini ele alalım.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$=1,61803398...$$

bulunur. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,61803398...$ sayısına altın oran ya da kutsal oran denir. Ayrıca bu dizi D'alambert testine göre $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,61803>1$ olduğundan ıraksaktır.

Fibonacci sayıları ile ilgili aşağıdaki bağıntıları ispatsız olarak verelim, [1,11].

$$F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1}F_{n-m} \tag{3.1}$$
$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n} \tag{3.2}$$
$$F_{n+2k}^2 - F_n^2 = F_{2k}F_{2n+2k} \tag{3.3}$$
$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2}F_{n-1} \tag{3.4}$$

$$F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}F_{n-1} = F_{n+m} \tag{3.5}$$
$$F_m F_n - F_{m+k}F_{n-k} = (-1)^{n-k}F_{m+k-n}F_k \tag{3.6}$$
$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2 \tag{3.7}$$

Fibonacci sayıları arasında olan eşitliklerden bazılarının ispatını gösterelim.

Teorem 3.1.1. F_k Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

eşitliği mevcuttur [11].

İspat: $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bağıntısından faydalanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
F_3 &= F_5 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} F_i &= F_{n+2} - F_2 \\
&= F_{n+2} - 1
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 3.1.2. (Cassini Teoremi)

$n \in \mathbb{Z}$ ve F_n Fibonacci sayısı olmak üzere $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ dir [11].

İspat: F_n Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \left(F_{n-1} + F_n\right)F_{n-1} - F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_n\left(F_{n-1} - F_n\right) \\
&= F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2 &= -\left(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2\right)\\
&= \left(-1\right)^2\left(F_{n-1}F_{n-3}-F_{n-2}^2\right)\\
&= \left(-1\right)^3\left(F_{n-2}F_{n-4}-F_{n-3}^2\right)\\
&\ \ \vdots\\
&= \left(-1\right)^n\left(F_1F_{-1}-F_0^2\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Son eşitlikte $F_{-1}=F_1=1$ ve $F_0=0$ değerleri yerine yazılırsa

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=\left(-1\right)^n$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

$x^2-x-1=0$ denkleminin köklerinin $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\alpha+\beta=1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ve $\alpha\beta=-1$ eşitlikleri açıkça görülür. Bu bilgilerden faydalanarak aşağıdaki lemmalar ve teoremler verilebilir.

Lemma 3.1.3. $n\in\mathbb{Z}^+$ için $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve F_n Fibonacci sayısı olmak üzere $\alpha^n=\alpha F_n+F_{n-1}$ dır [1].

İspat:

İspat yaparken tümevarım metodunu kullanalım.

$n=1$ için $\alpha=\alpha F_1+F_0$ eşitliği $F_0=0,\ \ F_1=1$ olduğundan eşitlik sağlanır.

$n=k+1$ için $\alpha^k=\alpha F_k+F_{k-1}$ eşitliği doğru olsun.

$n = k$ için

$$\begin{aligned}
\alpha^{k+1} = \alpha\alpha^k &= \alpha\left(\alpha F_k + F_{k-1}\right) \\
&= \alpha^2 F_k + \alpha F_{k-1} \\
&= \left(\alpha+1\right)F_k + \alpha F_{k-1} \\
&= \alpha F_k + \alpha F_{k-1} + F_k \\
&= \alpha\left(F_k + F_{k-1}\right) + F_k \\
&= \alpha F_{k+1} + F_k
\end{aligned}$$

olur. $n = k+1$ için de doğru olduğundan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ eşitliği geçerlidir.

Lemma 3.1.4. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve F_n Fibonacci sayısı olmak üzere $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ dir [1].

İspat: $\alpha\beta = -1$ eşitliğinden $\beta = \dfrac{-1}{\alpha}$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafının *n*. kuvveti alınırsa

$$\beta^n = \frac{(-1)^n}{\alpha^n}$$

bulunur. Lemma 3.1.3.'deki $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\beta^n = \frac{(-1)^n}{\alpha F_n + F_{n-1}}$$

olur. Kesrin pay ve paydası $\beta F_n + F_{n-1}$ ile çarpılırsa

$$\beta^n = \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{(\alpha F_n + F_{n-1})(\beta F_n + F_{n-1})}$$

bulunur. Son eşitlikte, kesrin paydası düzenlenir ve $\alpha + \beta = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$\beta^n = \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{-F_n^2 + F_{n-1}F_{n+1}}$$

elde edilir. Teorem 3.1.2.'deki Cassini teoremi kullanılırsa

$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$$

bulunur.

Teorem 3.1.5. $n \in \mathbb{Z}^+$ için F_n Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklindedir [11].

İspat: Binet formülü kullanılırsa,

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\sqrt{5}} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}(\alpha\beta)^n} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}(-1)^n}$$

bulunur. Binet formülünden $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ olduğu göz önünde bulundurulursa $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ elde edilir.

Teorem 3.1.6. $n, m \in \mathbb{Z}$ için F_{n+m}, F_{n-1}, F_n, F_m ve F_{n+1} Fibonacci sayıları olmak üzere $F_{n+m} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ dir [11].

İspat: İspat yaparken tümevarım metodunu kullanalım.

$n = 1$ için $F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1} + F_m$ olup eşitlik doğrudur.

$n = k$ ve $n = k-1$ için özdeşliği doğru kabul edelim.

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}$$
$$F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} F_{m+k} + F_{m+(k-1)} &= F_{m-1}\left(F_{k-1} + F_k\right) + F_m\left(F_k + F_{k+1}\right) \\ &= F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2} \end{aligned}$$

elde edilir. $n = k+1$ için de eşitlik doğru olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7. $n \in \mathbb{Z}$ için F_n ve F_{n+1} Fibonacci sayıları olmak üzere $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ dir [11].

İspat: $n, m \in \mathbb{Z}$ için (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_{2n+1} = F_{(n+1)+1} &= F_nF_n + F_{n+1}F_{n+1} \\ &= F_n^2 + F_{n+1}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

3.2. Lucas Dizisi

Fransız matematikçi Edouard Lucas (1842-1891) 1877 yılında Fibonacci sayılarını incelerken bu sayılara benzer bir seri buldu. Bu seride Fibonacci dizisinden farklı başlangıç koşulları belirlenmiş ancak dizideki herhangi bir sayı kendinden önceki iki sayının toplamı şeklindeki kural, Fibonacci dizilerinde olduğu gibidir.

$L_o = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşullarıyla ve

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ n \geq 2$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Lucas dizisi denir. Bu dizideki her n tam sayısına karşılık gelen her bir sayıya Lucas sayısı adı verilir.
$n = 1, 2, 3, \ldots$ değerlerine karşılık gelen Lucas sayıları,

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

şeklindedir.

Lucas dizisi negatif indislerle de verilebilir. Böylece,

$$\ldots, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7 \ldots$$

şeklindeki Lucas dizisi için $L_{-n} = (-1)^n L_n$ dir. Çünkü,
$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ eşitliğinde n yerine $-n$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
L_{-n} &= F_{-n-1} + F_{-n+1} \\
&= F_{-(n+1)} + F_{-(n-1)} \\
&= (-1)^{n+2} F_{n+1} + (-1)^n F_{n-1} \\
&= (-1)^n \left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) \\
&= (-1)^n L_n
\end{aligned}
$$

elde edilir.

L_n Lucas sayıları $n \geq 1$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$ eşitliği ile de tanımlanabilir. Bu eşitlik Binet formülü olarak adlandırılır.

Fibonacci sayılarında olduğu gibi Lucas sayılarında da dizinin her terimi kendinden önceki terime bölünerek $n \to \infty$ için limit alınırsa sonuç $1,61803398...$ irrasyonel sayısına yakınsar. Yani,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= 1,61803398...
\end{aligned}
$$

bulunur.

Lucas sayılarının kısmi toplamları için var olan birkaç eşitlik aşağıda verilmiştir.

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$$
$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2$$
$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1$$

Fibonacci ve Lucas sayıları ilişkili olduğundan aralarında birçok bağıntı vardır. Bunlardan bazıları ispatsız olarak aşağıdadır, [11].

$$F_n + L_n = 2F_{n+1} \tag{3.8}$$
$$F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} = F_m L_n \tag{3.9}$$
$$F_n + 2F_{n-1} = L_n \tag{3.10}$$
$$F_{n+3} - 2F_n = L_n \tag{3.11}$$
$$F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m} = L_m F_n \tag{3.12}$$
$$F_{n+1}L_{n+1} - F_n L_n = F_{2n+1} \tag{3.13}$$
$$F_n L_m - L_n F_m = (-1)^m 2F_{n-m} \tag{3.14}$$
$$F_{n+1}L_n = F_{2n+1} - 1 \tag{3.15}$$
$$3F_n + L_n = 2F_{n+2} \tag{3.16}$$
$$5F_n + 3L_n = 2L_{n+2} \tag{3.17}$$

Teorem 3.2.1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için F_{n-1} ve F_{n+1} Fibonacci sayıları ve L_n Lucas sayısı olmak üzere $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$ dir [11].

İspat: Fibonacci sayıları için $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ Binet formülünü kullanılırsa,

$$F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

bulunur. $\alpha\beta=-1$ eşitliğinin olduğunu biliyoruz. O halde,

$$F_{n-1}+F_{n+1}=\frac{-(\alpha\beta)\alpha^{n-1}+(\alpha\beta)\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^{n}(-\beta+\alpha)+\beta^{n}(-\beta+\alpha)}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{(\alpha^{n}+\beta^{n})(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$

olur. Lucas sayıları için geçerli olan $L_n=\alpha^n+\beta^n$ Binet formülü kullanılırsa $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ bulunur.

Teorem 3.2.2. $n\in\mathbb{Z}$ için $n\geq 2$ olmak üzere F_{n+2} ve F_{n-2} Fibonacci sayıları ve L_n Lucas sayısı olmak üzere $F_{n+2}-F_{n-2}=L_n$ dir [11].

İspat: Fibonacci sayıları için Binet formülü kullanılırsa

$$F_{n+2}-F_{n-2}=\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}-\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}}{\alpha-\beta}$$

bulunur. $(\alpha\beta)^2=1$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$F_{n+2}-F_{n-2}=\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}-(\alpha\beta)^2\alpha^{n-2}+(\alpha\beta)^2\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-(\alpha\beta)^2\alpha^{n-2}+(\alpha\beta)^2\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} - F_{n-2} &= \frac{\alpha^n\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \beta^n\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\left(\alpha^n + \beta^n\right)\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}{\alpha - \beta} \\
&= \left(\alpha^n + \beta^n\right)\left(\alpha + \beta\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $L_n = \alpha^n + \beta^n$ Binet formülünü ve $\alpha + \beta = 1$ kullanılırsa $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$ elde edilir.

Teorem 3.2.3. $n \in \mathbb{Z}$ için F_n ve F_{2n} Fibonacci sayıları ve L_n Lucas sayısı olmak üzere $F_{2n} = F_n L_n$ dir [11].

İspat: Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
F_n L_n &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\alpha^n + \beta^n\right) \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\
&= F_{2n}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 3.2.4. $n \in \mathbb{Z}$ için F_n Fibonacci ve L_n Lucas sayısı olmak üzere $5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n$ dir [11].

İspat:

$L_n = \alpha^n + \beta^n$ Binet formülünü kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
L_n^2 - 4\left(-1\right)^n &= \left(\alpha^n + \beta^n\right)^2 - 4\left(-1\right)^n \\
&= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\left(\alpha\beta\right)^n - 4\left(-1\right)^n
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\alpha\beta=-1$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} L_n^2-4(-1)^n &= \alpha^{2n}+\beta^{2n}+2(-1)^n-4(-1)^n \\ &= \alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(-1)^n \\ &= \left(\alpha^n-\beta^n\right)^2 \end{aligned}$$

bulunur. $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ Binet formülünde her iki tarafın karesi alınıp $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ eşitliği kullanılırsa $\left(\alpha^n-\beta^n\right)^2=5F_n^2$ olur. Böylece

$$5F_n^2=L_n^2-4(-1)^n$$

elde edilir.

3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

Fibonacci sayıları arasındaki tekrar bağıntısı korunup $H_n=H_{n-1}+H_{n-2}$ $(n\geq 3,\ n\in\mathbb{Z})$ bağıntısıyla başlangıç şartları p ve q keyfi tamsayılar olmak üzere $H_1=p$ ve $H_2=p+q$ olacak şekilde değiştirilirse yeni oluşan diziye genelleştirimiş Fibonacci dizisi, dizinin her bir elemanına da genelleştirimiş Fibonacci sayısı adı verilir ve H_n ile gösterilir.

Dizinin elemanları,

$$p,p+q,2p+q,3p+2q,5p+3q,\ldots$$

şeklindedir.

Bu dizinin terimlerinde p ve q nun katsayıları Fibonacci sayılarıdır. Yani

$$H_{n+1} = qF_n + pF_{n+1} \tag{3.18}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğin genelleştirilmiş hali $n \in \mathbb{Z},\ n \geq 3$ ve $r \in \mathbb{Z},\ r \geq 0$ tamsayı olmak üzere;

$$H_{n+r} = H_{n-1}F_r + H_nF_{r+1}$$

şeklindedir [11].

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ olmak üzere $H_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}(l\alpha^n - m\beta^n)$ eşitliği geçerlidir. Burada $l = 2(p - q\beta),\ m = 2(p - q\alpha)$ $l + m = 2(2p - q), l - m = 2q\sqrt{5}$ ve $\frac{lm}{4} = p^2 - pq - q^2$ dir [11].

Fibonacci ve Lucas sayılarında olduğu gibi genelleştirilmiş Fibonacci sayılarında da dizinin her terimi kendinden önceki terime bölünerek $n \to \infty$ için limit alınırsa sonuç $1,61803398...$ irrasyonel sayısına yakınsar ki bu sayı altın orandır. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{H_n}{H_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

dir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının kısmi toplamlarından bazıları p ve q herhangi tamsayıları için $H_1 = p$ ve $H_2 = p + q$ olacak şekilde aşağıda verilmiştir.

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} = H_{2n} - q$$

$$\sum_{i=1}^{n} H_{2i} = H_{2n+1} - p$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(H_{2i-1} - H_{2i} \right) = -H_{2n-1} + p - q$$

$$\sum_{i=1}^{n} H_{k+i} = H_{n+i+2} - H_{i+2}$$

Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasında birçok eşitlik vardır.

n ve m herhangi tamsayılar olmak üzere bu eşitliklerden bazıları aşağıda verilmiştir[11].

$$H_{n-m} = \left(-1\right)^{m} \left(F_{m+1} H_{n} - F_{m} H_{n+1} \right) \quad (3.19)$$

$$H_{n+m} = F_{m-1} H_{n} + F_{m} H_{n+1} \quad (3.20)$$

$$H_{n+m} + (-1)^{m} H_{n-m} = L_{m} H_{n}$$

$$H_{n+m} - (-1)^{m} H_{n-m} = F_{m} (H_{n-1} + H_{n+1})$$

BÖLÜM 4. $p-$ KOMPLEKS FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

Bu bölüm tezin orijinal kısmı olup $p-$kompleks Fibonacci ve Lucas sayıları ile genelleştirilmiş $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımları verilmiştir. Ayrıca bu kısımda, bu sayıların eşleniği, normu ile bu sayılar arasındaki toplama, çarpma, skalarla çarpma gibi cebirsel işlemler bulunmaktadır.

4.1. $p-$ Kompleks Fibonacci ve Lucas Sayıları

$p-$ kompleks sayılar eliptik, parabolik ve hiperbolik sayıların genel formudur. Bu sayıların, reel ve imajiner kısımlarında ardışık Fibonacci sayılarını kullanırsak $p-$ kompleks Fibonacci sayılarını elde ederiz. $\left(C_p\right)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayıları için $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left(C_p\right)_n = F_n + iF_{n+1}, \qquad i^2 = p \tag{4.1}$$

ile gösterilir.

$\overline{\left(C_p\right)_n}$, $p-$ kompleks Fibonacci sayılarının eşleniği olmak üzere

$$\overline{\left(C_p\right)_n} = F_n - iF_{n+1}, \qquad i^2 = p \tag{4.2}$$

şeklindedir. Ayrıca $\left(C_p\right)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayılarının modülü

$$\left\|\left(C_p\right)_n\right\|^2 = \left|F_n^2 - pF_{n+1}^2\right|$$

olarak gösterilir.

$p-$kompleks Fibonacci sayıları i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. Bu nedenle $p-$kompleks Fibonacci sayılarında çarpma işlemi, polinomlardaki gibi yapılır. İki polinomun çarpımı işlemi ile dağılma ve birleşme özellikleri kullanılır.

Benzer şekilde $\left(S_p\right)_n$, $p-$kompleks Lucas sayıları olmak üzere

$$\left(S_p\right)_n = L_n + iL_{n+1}, \qquad i^2 = p \tag{4.3}$$

şeklindedir.

$\overline{\left(S_p\right)_n}$, $p-$kompleks Lucas sayılarının eşleniği olmak üzere

$$\overline{\left(S_p\right)_n} = L_n - iL_{n+1}, \qquad i^2 = p$$

şeklindedir.

Ayrıca $\left(S_p\right)_n$, $p-$kompleks Lucas sayılarının modülü

$$\left\|\left(S_p\right)_n\right\|^2 = \left|L_n^2 - pL_{n+1}^2\right|$$

ile verilir. $p-$kompleks Lucas sayılarında çarpma işlemi $p-$kompleks Fibonacci sayılarında olduğu gibidir.

4.2. $p-$Kompleks Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

H_n genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olmak üzere ve $\left(D_p\right)_n$, $p-$kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayıları

$$\left(D_p\right)_n = H_n + iH_{n+1}, \qquad i^2 = p \tag{4.4}$$

şeklindedir.

$\overline{\left(D_p\right)_n}$, $p-$kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının eşleniği olmak üzere

$$\overline{\left(D_p\right)_n} = H_n - iH_{n+1}, \qquad i^2 = p \tag{4.5}$$

şeklindedir.

Ayrıca $\left(D_p\right)_n$, $p-$kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının modülü

$$\left\|\left(D_p\right)_n\right\|^2 = \left|H_n^2 - pH_{n+1}^2\right|$$

olarak gösterilir.

$p-$kompleks Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları ile $p-$kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayılarında toplama ve çıkarma işlemleri kompleks düzlemde olduğu gibi bileşen bileşendir.

Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren çeşitli eşitlikler yüzyıllar öncesinde keşfedilmiştir. Biz bu çalışmada $p-$kompleks Fibonacci sayıları ve Lucas sayılarını içeren birçok eşitliği aşağıdaki teoremlerle verdik.

Teorem 4.2.1. $(C_p)_n$, $p-$kompleks Fibonacci sayısı, $x^2-x-1=0$ denkleminin kökleri $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)\,(C_p)_n+(C_p)_{n+1}=(C_p)_{n+2}$

$ii)\,(C_p)_{-n}=(-1)^{n+1}(F_n-iF_{n-1})$

$iii)\,(C_p)_1F_n+(C_p)_0F_{n-1}=(C_p)_n$

$iv)\,(C_p)_{n+m}+(-1)^m(C_p)_{n-m}=L_m(C_p)_n$

$v)\,\dfrac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=F_{r+1}+F_{r-1}=\alpha^r+\beta^r$ (n'den bağımsız)

$vi)\,(C_p)_n-i(C_p)_{n+1}=F_n-pF_{n+2}$

İspat:

$i)$ (4.1) göz önüne alınır ve $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ Fibonacci sayılarının toplamı eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_n+(C_p)_{n+1}&=(F_n+iF_{n+1})+(F_{n+1}+iF_{n+2})\\&=(F_n+F_{n+1})+i(F_{n+1}+F_{n+2})\\&=F_{n+2}+iF_{n+3}\\&=(C_p)_{n+2}\end{aligned}$$

bulunur.

$ii)$ (4.1) denklemi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_{-n}&=F_{-n}+iF_{-n+1}\\&=F_{-n}+iF_{-(n-1)}\end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde Teorem 3.1.5. dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_{-n} &= (-1)^{n+1}F_n + i(-1)^n F_{n-1} \\ &= (-1)^n(-F_n + iF_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1}(F_n - iF_{n-1})\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $(C_p)_1 F_n + (C_p)_0 F_{n-1}$ ifadesinde, (4.1) eşitliği $(C_p)_0$ ve $(C_p)_1$ için gözönüne alınırsa

$$(C_p)_1 F_n + (C_p)_0 F_{n-1} = (F_1 + iF_2)F_n + (F_0 + iF_1)F_{n-1}$$

elde edilir. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ Fibonacci sayıları, son denklemde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_1 F_n + (C_p)_0 F_{n-1} &= (1+i)F_n + iF_{n-1} \\ &= F_n + i(F_n + F_{n-1}) \\ &= F_n + iF_{n+1} \\ &= (C_p)_n\end{aligned}$$

bulunur [12].

iv) $(C_p)_{n+m} + (-1)^m (C_p)_{n-m}$ ifadesinde, (4.1) $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı kullanılırsa

$$(C_p)_{n+m} + (-1)^m (C_p)_{n-m} = (F_{n+m} + iF_{n+m+1}) + (-1)^m (F_{n-m} + iF_{n-m+1})$$

olur. Son eşitlik tekrar düzenlenirse

$$(C_p)_{n+m} + (-1)^m (C_p)_{n-m} = (F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m}) + i(F_{n+m+1} + (-1)^m F_{n-m+1})$$

bulunur. (3.12) ve (4.1)'den

$$
\begin{aligned}
(C_p)_{n+m}+(-1)^m(C_p)_{n-m} &= L_mF_n+iL_mF_{n+1} \\
&= L_m(F_n+iF_{n+1}) \\
&= L_m(C_p)_n
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$v)$ $\dfrac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}$ ifadesinde (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=\frac{(F_{n+r}+iF_{n+r+1})+(-1)^r(F_{n-r}+iF_{n-r+1})}{F_n+iF_{n+1}}$$

bulunur. Burada eşitlik tekrar düzenlenirse

$$\frac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=\frac{(F_{n+r}+(-1)^rF_{n-r})+i\left((-1)^rF_{n-r+1}+F_{n+r+1}\right)}{F_n+iF_{n+1}}$$

elde edilir. Son denklemde (3.12) eşitliği yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=L_r$$

bulunur. Burada Teorem 3.2.1. gözönünde bulundurulursa

$$\frac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=F_{r-1}+F_{r+1}$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=L_r$ eşitliğinde $L_n=\alpha^n+\beta^n$ özdeşliği kullanılırsa

$$\frac{(C_p)_{n+r}+(-1)^r(C_p)_{n-r}}{(C_p)_n}=\alpha^r+\beta^r=F_{r-1}+F_{r+1}$$

bulunarak ispat tamamlanır [12]. Bu sonuç Horadam'ın kompleks Fibonacci sayıları için bulduğu eşitlik ile aynıdır[3].

$vi)(C_p)_n-i(C_p)_{n+1}$ ifadesinde, (4.1) $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı kullanılırsa

$$(C_p)_n-i(C_p)_{n+1}=(F_n+iF_{n+1})-i(F_{n+1}+iF_{n+2})$$

bulunur. Bulunan eşitlikte $p-$kompleks Fibonacci sayılarının $i^2=p$ birim tanımı kullanılıp sadeleştirme yapılırsa

$$(C_p)_n-i(C_p)_{n+1}=F_n-pF_{n+2}$$

elde edilir.

Özel olarak p 'nin -1, 0, 1 durumlarını inceleyelim.

$a)\,p=-1$ için

$$\begin{aligned}(C_p)_n-i(C_p)_{n+1}&=F_n-pF_{n+2}\\&=F_n-(-1)F_{n+2}\\&=F_n+F_{n+2}\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte Teorem 3.2.1. kullanılırsa

$$(C_p)_n - i(C_p)_{n+1} = L_{n+1}$$

elde edilir.

$b)$ $p = 0$ için

$$(C_p)_n - i(C_p)_{n+1} = F_n$$

olur.

$c)$ $p = 1$ için

$$(C_p)_n - i(C_p)_{n+1} = F_n - F_{n+2}$$

olur. Fibonacci sayılarının tanımından faydalanılıp sadeleştirme yapılırsa

$$(C_p)_n - i(C_p)_{n+1} = -F_{n+1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$(C_p)_n - i(C_p)_{n+1} = \begin{cases} L_{n+1} & , \quad p = -1 \\ F_n & , \quad p = 0 \\ -F_{n+1} & , \quad p = 1 \end{cases}$$

verilebilir.

Teorem 4.2.2. $(C_p)_n$, $p-$kompleks Fibonacci sayısı için aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

$i)\,(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = F_{2n+1} + 2iF_{2n+2} + pF_{2n+3}$
$ii)\,(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n} + 2iF_{2n+1} + pF_{2n+2}$
$iii)\,(C_p)_{n-1}^2 + (C_p)_{n+1}^2 = (F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2) + p(F_n^2 + F_{n+2}^2) + 2i(F_{2n} + F_{n+1}^2)$
$iv)\,(C_p)_n^2 = F_n^2 + 2iF_nF_{n+1} + pF_{n+1}^2$

İspat:

$i)\,(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2$ ifadesinde (4.1) $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı kullanılırsa

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = (F_n + iF_{n+1})^2 + (F_{n+1} + iF_{n+2})^2$$

bulunur. Parantezlerin içindeki ifadeler açılıp $i^2 = p$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = (F_n^2 + F_{n+1}^2) + 2i(F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2}) + p(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$$

bulunur. Burada (3.1) özdeşliği ve Teorem 3.1.7. kullanılırsa

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = F_{2n+1} + 2iF_{2n+2} + pF_{2n+3}$$

bulunur.

p 'nin -1, 0, 1 özel durumlarını inceleyelim.
$a)\,p = -1$ için

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = F_{2n+1} + 2iF_{2n+2} - F_{2n+3}$$

olur. Burada $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ ardışık Fibonacci sayılarının toplamı eşitliği kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = F_{2n+2}(2i-1)$$

bulunur. Bu sonuç Horadam'ın kompleks Fibonacci sayıları için bulduğu eşitliktir[3].

$b)\ p = 0$ için

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = F_{2n+1} + 2iF_{2n+2}$$

bulunur.

$c)\ p = 1$ için

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = F_{2n+1} + 2iF_{2n+2} + F_{2n+3}$$

olur. Burada Teorem 3.2.1. kullanılırsa

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = L_{2n+2} + 2iF_{2n+2}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$(C_p)_n^2 + (C_p)_{n+1}^2 = \begin{cases} F_{2n+2}(2i-1) & , \quad p = -1 \\ F_{2n+1} + 2iF_{2n+2} & , \quad p = 0 \\ L_{2n+2} + 2iF_{2n+2} & , \quad p = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

$ii)\ (C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2$ ifadesinde, (4.1) ile verilen $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı kullanılırsa

$$(C_p)_{n+1}^2-(C_p)_{n-1}^2=(F_{n+1}+iF_{n+2})^2-(F_{n-1}+iF_n)^2$$

bulunur. Parantezli ifadeler açılıp düzenlenirse

$$(C_p)_{n+1}^2-(C_p)_{n-1}^2=(F_{n+1}^2-F_{n-1}^2)+2i(F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n)+p(F_{n+2}^2-F_n^2)$$

bulunur. Son ifade de (3.2) ve (3.3) denklemleri kullanılırsa

$$(C_p)_{n+1}^2-(C_p)_{n-1}^2=F_{2n}+2i(F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n)+pF_{2n+2}$$

elde edilir. Ardışık Fibonacci sayılarının toplamı kuralından faydalanılarak $F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n$ ifadesi düzenlenirse

$$F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n=F_{n+1}(F_n+F_{n+1})-F_{n-1}F_n$$

bulunur. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğinden dolayı

$$F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n=F_{n+1}F_n+F_{n+1}^2-F_{n-1}F_n$$

olur. Buradan

$$F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})+F_{n+1}^2$$

bulunur. Son denklemde $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ Fibonacci sayılarının toplamı eşitliği gözönünde bulundurulursa

$$F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-1}F_n=F_n^2+F_{n+1}^2$$

elde edilir. Burada Teorem 3.1.7. kullanılırsa

$$F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n = F_{2n+1}$$

bulunur. Bulunan son eşitlik $(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n} + 2i(F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n) + pF_{2n+2}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n} + 2iF_{2n+1} + pF_{2n+2}$$

elde edilir [12].

Özel olarak p 'nin -1, 0, 1 durumlarını inceleyelim.

$a)$ $p = -1$ için

$(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n} + 2iF_{2n+1} - F_{2n+2}$ olur. Burada $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ ardışık Fibonacci sayılarının toplamı özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n+1}(2i - 1)$$

elde edilir. Bu sonuç Horadam'ın kompleks Fibonacci sayıları için bulduğu eşitliktir[3].

$b)$ $p = 0$ için

$$(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n} + 2iF_{2n+1}$$

bulunur.

$c)$ $p = 1$ için

$$(C_p)_{n+1}^2 - (C_p)_{n-1}^2 = F_{2n} + 2iF_{2n+1} + F_{2n+2}$$

bulunur. Burada Teorem 3.2.1 kullanılırsa

$$(C_p)_{n+1}^2-(C_p)_{n-1}^2=L_{n+1}+2iF_{n+1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$(C_p)_{n+1}^2-(C_p)_{n-1}^2=\begin{cases} F_{2n+1}(2i-1) & , \quad p=-1 \\ F_{2n}+2iF_{2n+1} & , \quad p=0 \\ L_{n+1}+2iF_{n+1} & , \quad p=1 \end{cases}$$

verilebilir [12].

$iii)(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2$ ifadesinde, (4.1) ile verilen $p-$ kompleks Fibonacci sayılarının tanımından

$$\begin{aligned}(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2&=(F_{n-1}+iF_n)^2+(F_{n+1}+iF_{n+2})^2\\&=(F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)+p(F_n^2+F_{n+2}^2)+2i(F_{n-1}F_n+F_{n-1}F_{n+2})\end{aligned}$$

bulunur. $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ ardışık Fibonacci sayılarının toplamı eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2&=(F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)+p(F_n^2+F_{n+2}^2)+2i(F_{n-1}F_n+F_{n+1}(F_n+F_{n+1}))\\&=(F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)+p(F_n^2+F_{n+2}^2)+2i(F_n(F_{n-1}+F_{n+1})+F_{n+1}^2))\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.2.3. kullanılırsa,

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=(F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)+p(F_n^2+F_{n+2}^2)+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

bulunur.

Özel olarak p 'nin -1, 0, 1 durumlarını ele alalım.

$a)$ $p=-1$ için

$$\begin{aligned}(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2&=(F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)-(F_n^2+F_{n+2}^2)+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)\\&=-(F_n^2-F_{n-1}^2)-(F_{n+2}^2-F_{n+1}^2)+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)\end{aligned}$$

olur. Burada (3.4) özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=-F_{n+1}F_{n-2}-F_{n+3}F_n+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

elde edilir.

$b)$ $p=0$ için

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=(F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

bulunur.

$c)$ $p=1$ için

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=(F_{n-1}^2+F_n^2)+(F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

Eğer Teorem 3.1.7.'den faydalanırsak

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=F_{2n-1}+F_{2n+3}+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

bulunur. $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ eşitliği kullanılırsa

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=F_{2n-1}+(F_{2n+1}+F_{2n+2})+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

olur. Son eşitlikte Teorem 3.2.1. gözönüne alınırsa

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=L_{2n}+(F_{2n}+F_{2n+1})+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

bulunur. Burada (3.8) özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=3F_{2n+1}+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2)$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$(C_p)_{n-1}^2+(C_p)_{n+1}^2=\begin{cases}-F_{n+1}F_{n-2}-F_{n+3}F_n+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2) & , \quad p=-1\\ (F_{n-1}^2+F_{n+1}^2)+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2) & , \quad p=0\\ 3F_{2n+1}+2i(F_{2n}+F_{n+1}^2) & , \quad p=1\end{cases}$$

elde edilir.

$iv)$ (4.1) denklemi $(C_p)_n^2$ için düzenlenirse

$$(C_p)_n^2=F_n^2+2iF_nF_{n+1}+pF_{n+1}^2$$

bulunur.

p 'nin -1, 0, 1 özel durumlarını inceleyelim.

$a)$ $p=-1$ için

$$(C_p)_n^2 = (F_n^2 - F_{n+1}^2) + 2iF_nF_{n+1}$$

olur. (3.4) özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_n^2 = -F_{n+2}F_{n-1} + 2iF_nF_{n+1}$$

elde edilir.

$b)$ $p=0$ için

$$(C_p)_n^2 = F_n^2 + 2iF_nF_{n+1}$$

bulunur.

$c)$ $p=1$ için

$$(C_p)_n^2 = (F_n^2 + F_{n+1}^2) + 2iF_nF_{n+1}$$

olur. Son eşitlikte Teorem 3.1.7. kullanılırsa

$$(C_p)_n^2 = F_{2n+1} + 2iF_nF_{n+1}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$(C_p)_n^2 = \begin{cases} -F_{n+2}F_{n-1} + 2iF_nF_{n+1} & , \quad p=-1 \\ F_n^2 + 2iF_nF_{n+1} & , \quad p=0 \\ F_{2n+1} + 2iF_nF_{n+1} & , \quad p=1 \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. $(C_p)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayısı ve $i^2 = p$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$i)(C_p)_n(C_p)_m + (C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1} = (F_{n+m+1} + iF_{n+m+2}) + iF_{n+m+2} + pF_{n+m+3}$$
$$ii)(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1} - (C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1} = F_{n+m} + pF_{n+m+2} + 2iF_{n+m+1}$$
$$iii)(C_p)_n(C_p)_{n+2} - (C_p)_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}(1+i) - pF_{n+2}$$
$$iv)(C_p)_m(C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1}(C_p)_{n-m} = (C_p)_n + iF_{n+1} + pF_{n+2}$$
$$v)(C_p)_m(C_p)_n - (C_p)_{m+k}(C_p)_{n-k} = (-1)^{n-k}F_k[F_{m+k-n}(1-p) + i(-F_{m+k-n-1} + F_{m+k+1-n})]$$

İspat:

$i)(C_p)_n(C_p)_m + (C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}$ ifadesinde $p-$ kompleks Fibonacci sayılarının tanımı (4.1) kullanılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_m + (C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1} = (F_n + iF_{n+1})(F_m + iF_{m+1}) + (F_{n+1} + iF_{n+2})(F_{m+1} + iF_{m+2})$$

bulunur. Burada parantezli ifadeler açılıp tekrar gruplama yapılırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_n(C_p)_m + (C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1} &= (F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1}) + i(F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2}) \\ &+ i(F_{n+1}F_m + F_{n+2}F_{m+1}) + p(F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2})\end{aligned}$$

elde edilir. Parantez içindeki ifadelerde (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_m + (C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1} = (F_{n+m+1} + iF_{n+m+2}) + iF_{n+m+2} + pF_{n+m+3}$$

bulunur [12].

Özel olarak p ’nin -1, 0, 1 durumlarını inceleyelim.

$a)\ p = -1$ için

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=(-1+2i)F_{n+m+2}$$

olur.

$b)$ $p=0$ için

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=(F_{n+m+1}+iF_{n+m+2})+iF_{n+m+2}$$

elde edilir. Bulunan eşitlikte $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı (4.1) kullanılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=(C_p)_{n+m+1}+iF_{n+m+2}$$

bulunur.

$c)$ $p=1$ için

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=(F_{n+m+1}+iF_{n+m+2})+iF_{n+m+2}+F_{n+m+3}$$

olur. Burada (4.1) $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı ve $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ eşitliği kullanılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=(C_p)_{n+m+1}+iF_{n+m+2}+(F_{n+m+1}+F_{n+m+2})$$

bulunur. Benzer şekilde tekrar $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı (4.1) kullanılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=2(C_p)_{n+m+1}+F_{n+m+2}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$(C_p)_n(C_p)_m+(C_p)_{n+1}(C_p)_{m+1}=\begin{cases}(-1+2i)F_{n+m+2} & , \quad p=-1\\ (C_p)_{n+m+1}+iF_{n+m+2} & , \quad p=0\\ 2(C_p)_{n+m+1}+F_{n+m+2} & , \quad p=1\end{cases}$$

olur [12].

$ii)$ $p-$kompleks Fibonacci sayılarının (4.1) ile verilen tanımından

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=(F_{m+1}+iF_{m+2})(F_{n+1}+iF_{n+2})-(F_{m-1}+iF_m)(F_{n-1}+iF_n)$$

olur. Parantezler açılır ve tekrar gruplama yapılırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}&=(F_{m+1}F_{n+1}-F_{m-1}F_{n-1})+p(F_{m+2}F_{n+2}-F_mF_n)\\&+i(F_{m+1}F_{n+2}-F_{m-1}F_n)+p(F_{m+2}F_{n+1}-F_mF_{n-1})\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte (3.5) özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=F_{n+m}+pF_{n+m+2}+2iF_{n+m+1}$$

bulunur [12].

Özel olarak p 'nin -1, 0, 1 durumlarını inceleyelim.

$a)$ $p=-1$ için

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=F_{n+m}-F_{n+m+2}+2iF_{n+m+1}$$

olur. Eşitlik düzenlenerek, $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı (4.1) kullanılırsa

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=(C_p)_{n+m}-F_{n+m}-F_{n+m+1}(1-i)$$

elde edilir.

$b)$ $p=0$ için

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=F_{n+m}+2iF_{n+m+1}$$

bulunur. (4.1) denklemi gözönünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=(C_p)_{n+m}+iF_{n+m+1}$$

bulunur.

$c)$ $p=1$ için

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=F_{n+m}+F_{n+m+2}+2iF_{n+m+1}$$

Burada $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ ardışık Fibonacci sayılarının toplamı kuralı ve (4.1) denklemi dikkate alınarak düzenleme yapılırsa

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=2(C_p)_{n+m}+F_{n+m+1}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$(C_p)_{m+1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_{m-1}(C_p)_{n-1}=\begin{cases}(C_p)_{n+m}-F_{n+m}-(1-i)F_{n+m+1} & , \quad p=-1\\ (C_p)_{n+m}+iF_{n+m+1} & , \quad p=0\\ 2(C_p)_{n+m}+F_{n+m+1} & , \quad p=1\end{cases}$$

elde edilir [12].

iii) (4.1) denklemiyle verilen $p-$kompleks Fibonacci sayıları tanımı kullanılıp eşitlik düzenlenirse

$$(C_p)_n(C_p)_{n+2}-(C_p)_{n+1}^2=(F_n+iF_{n+1})(F_{n+2}+iF_{n+3})-(F_{n+1}+iF_{n+2})^2$$

olur. Parantezli ifadeler açılır ve yeniden gruplama yapılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_{n+2}-(C_p)_{n+1}^2=(F_nF_{n+2}-F_{n+1}^2)+i(F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2})+p(F_{n+1}F_{n+3}-F_{n+2}^2)$$

bulunur. Burada (3.6) özdeşliği kullanırsa

$$(C_p)_n(C_p)_{n+2}-(C_p)_{n+1}^2=(-1)^{n+1}+i(-1)^{n+2}F_{-2}F_1-pF_{n+2}$$

elde edilir. $F_1=1$ ve $F_2=-1$ Fibonacci sayıları yerine yazılırsa

$$(C_p)_n(C_p)_{n+2}-(C_p)_{n+1}^2=(-1)^{n+1}(1+i)-pF_{n+2}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$(C_p)_n(C_p)_{n+2}-(C_p)_{n+1}^2=\begin{cases}(-1)^{n+1}(1+i)+F_{n+2} & , \quad p=-1\\ (-1)^{n+1}(1+i) & , \quad p=0\\ (-1)^{n+1}(1+i)-F_{n+2} & , \quad p=1\end{cases}$$

olur.

$iv) (C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_n$ ifadesinde, $p-$kompleks Fibonacci sayılarının tanımı (4.1) kullanılırsa

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = (F_m + iF_{m+1})(F_{n+1-m} + iF_{n-m+2}) + (F_{m-1} + iF_m)(F_{n-m} + iF_{n-m+1})$$

bulunur. Parantezli ifadeler açılıp yeniden gruplama yapılırsa

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = (F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m}) + i(F_m F_{n-m+2} + F_{m-1} F_{n-m+1}) + i(F_{m+1} F_{n+1-m} + F_m F_{n-m}) + p(F_{m+1} F_{n-m+2} + F_m F_{n-m+1})$$

elde edilir. Son eşitlikte (3.1) özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = F_n + 2iF_{n+1} + pF_{n+2}$$

bulunur.

Şimdi p nin -1, 0, 1 özel durumlarını inceleyelim.

$a)\ p = -1$ için

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = F_n + 2iF_{n+1} - F_{n+2}$$

olur. $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ Fibonacci sayılarının tanımından faydalanılarak düzenlenirse

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = (2i-1)F_{n+1}$$

elde edilir.

$b)\ p = 0$ için

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = F_n + 2iF_{n+1}$$

bulunur.

$c)\, p=1$ için

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = F_n + 2iF_{n+1} + F_{n+2}$$

bulunur. Burada.Teorem 3.2.1. kullanılırsa

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = 2(C_p)_n + F_{n+1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$(C_p)_m (C_p)_{n+1-m} + (C_p)_{m-1} (C_p)_{n-m} = \begin{cases} (2i-1)F_{n+1} & , \quad p=-1 \\ F_n + 2iF_{n+1} & , \quad p=0 \\ L_{n+1} + 2iF_{n+1} & , \quad p=1 \end{cases}$$

verilebilir.

$v)$ (4.1) ile verilen $p-$kompleks Fibonacci sayıları tanımı $(C_p)_m (C_p)_n - (C_p)_{m+k} (C_p)_{n-k}$ için yazılırsa

$$(C_p)_m (C_p)_n - (C_p)_{m+k} (C_p)_{n-k} = (F_m + iF_{m+1})(F_n + iF_{n+1}) - (F_{m+k} + iF_{m+k+1})(F_{n-k} + iF_{n-k+1})$$

olur. Parantezli ifadeler açılır ve tekrar gruplama yapılırsa

$$\begin{aligned}(C_p)_m (C_p)_n - (C_p)_{m+k} (C_p)_{n-k} &= (F_m F_n - F_{m+k} F_{n-k}) + i(F_m F_{n+1} - F_{m+k} F_{n-k+1}) \\ &\quad + i(F_{m+1} F_n - F_{m+k+1} F_{n-k}) + p(F_{m+1} F_{n+1} - F_{m+k+1} F_{n-k+1})\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte (3.6) özdeşliği kullanılırsa

$$F_m F_n - F_{m+k} F_{n-k} = (-1)^{n-k} F_k \left[F_{m+k-n}(1-p) + i(-F_{m+k-n-1} + F_{m+k+1-n}) \right]$$

bulunur.

Şimdi p 'nin -1, 0, 1 özel durumları için incelenirse

$$(C_p)_m (C_p)_n - (C_p)_{m+k} (C_p)_{n-k} = \begin{cases} (-1)^{n-k} F_k [2F_{m+k-n} + i(-F_{m+k-n-1} + F_{m+k+1-n})] & , \quad p=-1 \\ (-1)^{n-k} F_k [F_{m+k-n} + i(-F_{m+k-n-1} + F_{m+k+1-n})] & , \quad p=0 \\ (-1)^{n-k} F_k i(-F_{m+k-n-1} + F_{m+k+1-n}) & , \quad p=1 \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4. $(C_p)_n$, $p-$kompleks Fibonacci sayısı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)$ $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_s = (C_p)_{n+2} - (C_p)_2$

$ii)$ $\sum_{s=0}^{t} (C_p)_{n+s} + (C_p)_{n+1} = (C_p)_{n+t+2}$

$iii)$ $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s-1} = (C_p)_{2n} - (C_p)_0$

$iv)$ $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s} = (C_p)_{2n+1} - (C_p)_1$

İspat:

$i)$ $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_s$ toplamında (4.1) eşitliğini kullanırsak

$$\sum_{s=1}^{n} (C_p)_s = \sum_{s=1}^{n} F_s + i\left(\sum_{s=1}^{n+1} F_s - \sum_{s=1}^{1} F_s \right)$$

bulunur. Burada Teorem 3.1.1. eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{s=1}^{n}(C_p)_s=(C_p)_{n+2}-(1+2i)$$

ifadesi elde edilir. Son eşitlikte $F_0=0$ ve $F_1=1$ Fibonacci sayıları yerine yazılıp (4.1) tanımı kullanılırsa

$$\sum_{s=1}^{n}(C_p)_s=(C_p)_{n+2}-(C_p)_2$$

olduğu görülür [12].

ii) $\sum_{s=0}^{t}(C_p)_{n+s}+(C_p)_{n+1}$ ifadesini düzenlersek

$$\sum_{s=0}^{t}(C_p)_{n+s}+(C_p)_{n+1}=\sum_{r=1}^{n+t}(C_p)_r-\sum_{r=1}^{n-1}(C_p)_r+(C_p)_{n+1}$$

bulunur. Burada Teorem 4.2.4.'deki *i.* eşitlik $\sum_{s=1}^{n}(C_p)_s=(C_p)_{n+2}-(C_p)_2$ kullanılırsa

$$\sum_{s=0}^{t}(C_p)_{n+s}+(C_p)_{n+1}=(C_p)_{n+t+2}$$

bulunur.

iii) Teorem 4.2.4.'deki *i.* eşitlik $\sum_{s=1}^{n}(C_p)_s=(C_p)_{n+2}-(C_p)_2$ kullanılırsa aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$(C_p)_1 = (C_p)_2 - (C_p)_0$$
$$(C_p)_3 = (C_p)_4 - (C_p)_2$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$(C_p)_{2n-3} = (C_p)_{2n-2} - (C_p)_{2n-4}$$
$$(C_p)_{2n-1} = (C_p)_{2n} - (C_p)_{2n-2}$$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s-1} = (C_p)_{2n} - (C_p)_0$$

olduğu kolayca görülür.

iv) $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s}$ ifadesi $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s} = \sum_{s=1}^{2n} (C_p)_s - \sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s-1}$ şeklinde yazılabilir.

Son eşitliğin sağ tarafında Teorem 4.2.4.'deki *i.* eşitlik $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_s = (C_p)_{n+2} - (C_p)_2$ ve Teorem 4.2.4.'deki *iii.* eşitlik $\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s-1} = (C_p)_{2n} - (C_p)_0$ dikkate alınırsa

$$\sum_{s=1}^{n} (C_p)_{2s} = (C_p)_{2n+1} - (C_p)_1$$

bulunur.

Teorem 4.2.5. $\left(C_p\right)_n$ $p-$kompleks Fibonacci sayısı, $\left(D_p\right)_n$ $p-$kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayısı ve p ile q herhangi tamsayılar olmak üzere

$$p\left(C_p\right)_n + q\left(C_p\right)_{n-1} = \left(D_p\right)_n$$

elde edilir.

İspat:

$p\left(C_p\right)_n + q\left(C_p\right)_{n-1} = \left(D_p\right)_n$ ifadesinde (4.1) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} p\left(C_p\right)_n + q\left(C_p\right)_{n-1} &= p(F_n + iF_{n+1}) + q(F_{n-1} + iF_n) \\ &= (pF_n + qF_{n-1}) + i(pF_{n+1} + qF_n) \end{aligned}$$

olur. H_n genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olmak üzere (3.18) eşitliği kullanılırsa

$$p\left(C_p\right)_n + q\left(C_p\right)_{n+1} = H_n + iH_{n+1}$$

bulunur. Burada (4.4) eşitliğinden faydalanılırsa

$$p\left(C_p\right)_n + q\left(C_p\right)_{n-1} = \left(D_p\right)_n$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6. $\left(C_p\right)_n$ $p-$kompleks Fibonacci sayısı, $\overline{\left(C_p\right)_n}$ $p-$kompleks Fibonacci sayısının eşleniği, $\left(D_p\right)_n$ genelleştirilmiş $p-$kompleks Fibonacci sayısı, $\overline{\left(D_p\right)_n}$ genelleştirilmiş $p-$kompleks Fibonacci sayısının eşleniği olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)\,(C_p)_n\overline{(C_p)_n} = F_n^2 - pF_{n+1}^2$

$ii)\ (D_p)_n\overline{(C_p)_n} - \overline{(D_p)_n}(C_p)_n = 2iH_0(-1)^{1-n}$

$iii)\ (D_p)_n(C_p)_n - \overline{(D_p)_n}\,\overline{(C_p)_n} = 2iH_{2n}$

$iv)\ (D_p)_n\overline{(C_p)_n} + \overline{(D_p)_n}(C_p)_n = 2(H_nF_n - pH_{n+1}F_{n+1})$

İspat:

$i)\left(C_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}$ ifadesinde (4.1) eşitliği ve bu eşitliğin eşleniği tanımı (4.2) kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}=(F_n+iF_{n+1})(F_n-iF_{n+1})$$

bulunur. Buradan

$$\left(C_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}=F_n^2-pF_{n+1}^2$$

elde edilir [12].

Özel durum:

$$\left(C_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}=\begin{cases}F_n^2+F_{n+1}^2 & , \quad p=-1\\ F_n^2 & , \quad p=0\\ F_n^2-F_{n+1}^2 & , \quad p=1\end{cases}$$

olur [12].

$ii)\left(D_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}-\overline{\left(D_p\right)_n}\left(C_p\right)_n$ ifadesinde (4.1) ile (4.4) ve bu eşitliklerin eşlenikleri (4.2) ile (4.5) kullanılırsa

$$\left(D_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}-\overline{\left(D_p\right)_n}\left(C_p\right)_n=(H_n+iH_{n+1})(F_n-iF_{n+1})-(H_n-iH_{n+1})(F_n+iF_{n+1})$$

bulunur. Parantez içindeki ifadeler açılır ve gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapılırsa

$$\left(D_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}-\overline{\left(D_p\right)_n}\left(C_p\right)_n=-2i(F_{n+1}H_n-F_nH_{n+1})$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.18) özdeşliğinden fadalanılırsa

$$(D_p)_n\overline{(C_p)_n}-\overline{(D_p)_n}(C_p)_n=2iH_0(-1)^{1-n}$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Ayrıca p ve q herhangi tamsayılar olmak üzere $H_0=q, H_1=p, H_2=p+q,\ldots$ olmak üzere son eşitlik;

$$(D_p)_n\overline{(C_p)_n}-\overline{(D_p)_n}(C_p)_n=2iH_0(-1)^{1-n}$$

şeklinde de düzenlenebilir.

iii) $\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n-\overline{\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n}$ ifadesinde (4.1) ile (4.4) ve bu eşitliklerin eşlenikleri (4.2) ile (4.5) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n-\overline{\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n}=(H_n+iH_{n+1})(F_n+iF_{n+1})-(H_n-iH_{n+1})(F_n-iF_{n+1})$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte parantez içindeki ifadeler dağıtılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n-\overline{\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n}=2i(H_nF_{n+1}+H_{n+1}F_n)$$

bulunur. Son eşitlikte (3.19) gözönünde bulundurulursa

$$\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n-\overline{\left(D_p\right)_n\left(C_p\right)_n}=2iH_{2n}$$

elde edilir.

$iv)\left(D_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}+\overline{\left(D_p\right)_n}\left(C_p\right)_n$ ifadesinde (4.1) ile (4.4) eşitlikleri ve bu eşitliklerin eşleniği tanımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left(D_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}+\overline{\left(D_p\right)_n}\left(C_p\right)_n &= (H_n+iH_{n+1})(F_n-iF_{n+1})+(H_n-iH_{n+1})(F_n+iF_{n+1}) \\ &= 2(H_nF_n-pH_{n+1}F_{n+1})\end{aligned}$$

bulunur.

Özel durum:

$$\left(D_p\right)_n\overline{\left(C_p\right)_n}+\overline{\left(D_p\right)_n}\left(C_p\right)_n=\begin{cases}2H_{2n+1} & , \quad p=-1\\ 2H_nF_n & , \quad p=0\\ 2(H_nF_n-H_{n+1}F_{n+1}) & , \quad p=1\end{cases}$$

bulunur.

Teorem 4.2.7. (Cassini Teoremi)

$\left(C_p\right)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayısı, n herhangi doğal sayı olmak üzere

$$(C_p)_{n-1}(C_p)_{n+1}-(C_p)_n^2=(-1)^n(1-p+i)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$\left(C_p\right)_{n-1}\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_n^2$ ifadesinde, (4.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(C_p\right)_{n-1}\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_n^2 &= (F_{n-1}+iF_n)(F_{n+1}+iF_{n+2})-(F_n+iF_{n+1})^2 \\ &= (F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2)+i(F_{n-1}F_{n+2}-F_nF_{n+1})+p(F_nF_{n+2}-F_{n+1}^2)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Cassini eşitliği olarak bilinen Teorem 3.1.2. ve (3.6) eşitliği kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n-1}\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^n+p(-1)^{n+1}+i(-1)^{n-1}F_{-2}F_1$$

bulunur. Son eşitlikte $F_1=1$ ve $F_{-2}=-1$ Fibonacci sayıları yerlerine yazılırsa

$$\left(C_p\right)_{n-1}\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^n(1-p+i)$$

olur.

Özel durum:

$$\left(C_p\right)_{n-1}\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_n^2=\begin{cases}(-1)^n(2+i) & , \quad p=-1\\ (-1)^n(1+i) & , \quad p=\ \ 0\\ (-1)^n i & , \quad p=\ \ 1\end{cases}$$

olur. Burada $p=-1$ için $\left(C_p\right)_{n-1}\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^n(2+i)$ eşitliği Horadam'ın kompleks Fibonacci sayıları için bulduğu eşitliktir [3].

Teorem 4.2.8. (Catalan Eşitliği)

$\left(C_p\right)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayısı, n ve r herhangi doğal sayılar, $n\geq r$ olmak üzere

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^{n+r}F_r^2(-1+p)+i(-1)^nF_r(F_{1-r}+(-1)^{r+1}F_{1+r})$$

eşitliği geçerlidir.

$a)\,r$ tek iken,

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^n F_r^2(1-p+i)$$

şeklindedir.

$b)\,r$ çift iken,

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^n F_r^2(-1+p-i)$$

bulunur.

İspat:

$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2$ ifadesinde, (4.1) dikkate alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2 &= (F_{n+r}+iF_{n+r+1})(F_{n-r}+iF_{n-r+1})-(F_n+iF_{n+1})^2\\ &= (F_{n+r}F_{n-r}-F_n^2)+i(F_{n+r}F_{n-r+1}-F_nF_{n+1})\\ &+i(F_{n+r+1}F_{n-r}-F_nF_{n+1})+p(F_{n+r+1}F_{n-r+1}-F_{n+1}^2)\end{aligned}$$

bulunur. Fibonacci sayıları arasındaki Catalan eşitliği olarak bilinen (3.7) özdeşliği kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)C_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^{n+r}F_r^2(-1+p)+i(-1)^n F_{1-r}F_r+i(-1)^{n+1}F_{-1-r}F_r$$

elde edilir. Burada Teorem 3.1.5.'den faydalanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^{n+r}F_r^2(-1+p)+i(-1)^n F_r(F_{1-r}+(-1)^{r+1}F_{1+r})$$

bulunur.

$a)$ r tek iken,

$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2$ ifadesinde (4.1) tanımı ve Teorem 3.1.5. özdeşliği uygulanırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^{n+r}F_r^2(-1+p)+i(-1)^nF_r(-F_{r-1}+F_{r+1})$$

elde edilir. Son eşitlikte Fibonacci sayılarının tanımı $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ ve r' nin tek olma durumu kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^nF_r^2(1-p+i)$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Özel durum:

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=\begin{cases}(-1)^nF_r^2(2+i) & , \quad p=-1\\ (-1)^nF_r^2(1+i) & , \quad p=0\\ (-1)^nF_r^2 i & , \quad p=1\end{cases}$$

olur.

$b)$ r çift iken,

$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2$ ifadesinde, (4.1) tanımı ve Teorem 3.1.5. kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r}-\left(C_p\right)_n^2=(-1)^{n+r}F_r^2(-1+p)+i(-1)^nF_r((-1)^rF_{r-1}-F_{r+1})$$

elde edilir. Burada Fibonacci sayılarının tanımı $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ve r ’ nin çift olma durumu dikkate alınırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r} - \left(C_p\right)_n^2 = (-1)^n F_r^2(-1+p-i)$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Özel durum:

$$\left(C_p\right)_{n+r}\left(C_p\right)_{n-r} - \left(C_p\right)_n^2 = \begin{cases} (-1)^{n+1}F_r^2(2+i) & , \quad p=-1 \\ (-1)^{n+1}F_r^2(1+i) & , \quad p=0 \\ (-1)^{n+1}F_r^2 i & , \quad p=1 \end{cases}$$

olur.

Teorem 4.2.9. $(C_p)_n$, $p-$kompleks Fibonacci sayısı ve $(S_p)_n$, $p-$ kompleks Lucas sayısı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)\ (C_p)_{n+2} - (C_p)_{n-2} = (S_p)_n$

$ii)\ (C_p)_{n-1} + (C_p)_{n+1} = (S_p)_n$

$iii)\ (C_p)_{n+m} - (-1)^m (C_p)_{n-m} = F_m (S_p)_n$

$iv)\ (C_p)_n + 2(C_p)_{n-1} = (S_p)_n$

$v)\ (C_p)_{n+3} - 2(C_p)_n = (S_p)_n$

İspat:

$i)(C_p)_{n+2} - (C_p)_{n-2}$ ifadesinde, (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$(C_p)_{n+2} - (C_p)_{n-2} = (F_{n+2} - F_{n-2}) + i(F_{n+3} - F_{n-1})$$

bulunur. Burada Teorem 3.2.2. ve (4.3) kullanılırsa

$$(C_p)_{n+2}-(C_p)_{n-2}=(S_p)_n$$

elde edilir.

ii) Teorem 4.2.9.'daki i şıkkı kullanılarak ispat kolayca yapılır.

$iii)\,(C_p)_{n+m}-(-1)^m(C_p)_{n-m}$ ifadesinde (4.1) denklemi kullanılırsa

$$(C_p)_{n+m}-(-1)^m(C_p)_{n-m}=(F_{n+m}+iF_{n+m+1})-(-1)^m(F_{n-m}+iF_{n-m+1})$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.9) ve (4.3) eşitlikleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(C_p)_{n+m}-(-1)^m(C_p)_{n-m}=F_m(S_p)_n$$

bulunur.

$iv)$ $(C_p)_n+2(C_p)_{n-1}$ ifadesinde (4.1) denklemi gözönüne alınırsa

$$(C_p)_n+2(C_p)_{n-1}=(F_n+iF_{n+1})+2(F_{n-1}+iF_n)$$

elde edilir. Burada (3.10) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$(C_p)_n+2(C_p)_{n-1}=(S_p)_n$$

sonucuna ulaşılır.

$v)\,(C_p)_{n+3}-2(C_p)_n$ ifadesinde, (4.1) eşitliği uygulanırsa

$$(C_p)_{n+3}-2(C_p)_n=(F_{n+3}+iF_{n+4})-2(F_n+iF_{n+1})$$

bulunur. Burada (3.11) özdeşliği kullanılırsa

$$(C_p)_{n+3} - 2(C_p)_n = (S_p)_n$$

elde edilir.

Teorem 4. 2.10. $\left(C_p\right)_n$, $p-$kompleks Fibonacci sayısı, L_n Lucas sayısı ve $i^2 = p$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)\left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = \left(C_p\right)_{2n-2r} + (-1)^{n-r} i$

$ii)\ \left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} = \left(C_p\right)_{2n+2r} + (-1)^{n+r} i$

$iii)\ \left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} - \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = \left(C_p\right)_{2n+2r} - \left(C_p\right)_{2n-2r}$

$iv)\ \left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} + \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = L_{2r} \left(C_p\right)_{2n} + 2i(-1)^{n+r}$

$v)\ \left(C_p\right)_{n+1} L_{n+1} - \left(C_p\right)_n L_n = \left(C_p\right)_{2n+1} + 2i(-1)^m$

$vi)\ \left(C_p\right)_{n+1} L_n = \left(C_p\right)_{2n+1} - 2$

$vii)\ 3\left(C_p\right)_n + L_n = 2F_{n+2} + 3iF_{n+1}$

$viii)\ 5\left(C_p\right)_n + 3L_n = 2L_{n+2} + 5iF_{n+1}$

$ix)\ 5\left(C_p\right)_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1} + 5F_{n+1}(2iF_n + pF_{n+1})$

İspat:

$i)\left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r}$ ifadesinde, (4.1) eşitliği uygulanırsa

$$\left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = F_{n-r}L_{n-r} + iF_{n-r+1}L_{n-r}$$

elde edilir. Burada (3.12) özdeşliği ile $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ Fibonacci sayıları dikkate alınırsa

$$\left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = \left(C_p\right)_{2n-2r} + (-1)^{n-r} i$$

elde edilir.

$ii)$ İspat $i.$ şıkka benzer şekilde yapılır.

$iii)$ $\left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} - \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r}$ ifadesinde, (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} - \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = (F_{n+r} L_{n+r} - F_{n-r} L_{n-r}) + i(F_{n+r+1} L_{n+r} - F_{n-r+1} L_{n-r})$$

bulunur. Burada Teorem 3.2.3. ve (3.9) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} - \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = {} & F_{2n+2r} - (-1)^{n+r+1} F_0 - F_{2n-2r} + (-1)^{n-r+1} F_0 \\ & + i(F_{2n+2r+1} - (-1)^{n+r+1} F_1 - F_{2n-2r+1} + (-1)^{n-r+1} F_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ Fibonacci sayıları ve $(-1)^{n+r} = (-1)^{n-r}$ olduğu göz önüne alınıp sadeleştirmeler yapılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} - \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = (F_{2n+2r} + iF_{2n+2r+1}) - (F_{2n-2r} + iF_{2n-2r+1})$$

bulunur. Burada Fibonacci sayılarının toplamı tanımı $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ eşitliğinden

$$\left(C_p\right)_{n+r} L_{n+r} - \left(C_p\right)_{n-r} L_{n-r} = \left(C_p\right)_{2n+2r} - \left(C_p\right)_{2n-2r}$$

elde edilir.

$iv)\left(C_p\right)_{n+r}L_{n+r}+\left(C_p\right)_{n-r}L_{n-r}$ eşitliğinde, (4.1) eşitliğini kullanıp Teorem 3.2.3. ve (3.9) özdeşliklerinden faydalanılırsa

$$\begin{aligned}\left(C_p\right)_{n+r}L_{n+r}+\left(C_p\right)_{n-r}L_{n-r}&=F_{2n+2r}-(-1)^{n+r+1}F_0+i(F_{2n+2r+1}-(-1)^{n+r+1}F_1)\\&+F_{2n-2r}-(-1)^{n-r+1}F_0+i(F_{2n-2r+1}-(-1)^{n-r+1}F_1)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada $F_0=0$ ve $F_1=1$ Fibonacci sayıları yerine yazılır ve $(-1)^{n+r}=(-1)^{n-r}$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}L_{n+r}+\left(C_p\right)_{n-r}L_{n-r}=(F_{2n+2r}+iF_{2n+2r+1})+(F_{2n-2r}+iF_{2n-2r+1})+2i(-1)^{n+r}$$

bulunur. Son eşitlikte (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+r}L_{n+r}+\left(C_p\right)_{n-r}L_{n-r}=\left(C_p\right)_{2n+2r}+\left(C_p\right)_{2n-2r}+2i(-1)^{n+r}$$

elde edilir. Önceki eşitliği tekrar düzenleyerek (3.12) özdeşliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}\left(C_p\right)_{n+r}L_{n+r}+\left(C_p\right)_{n-r}L_{n-r}&=F_{2n}L_{2n}+(-1)^{2r+1}F_{2n-2r}+iF_{2n+1}L_{2r}+i(-1)^{2r+1}F_{2n-2r+1}\\&+F_{2n-2r}+iF_{2n-2r+1}+2i(-1)^{n+r}\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\left(C_p\right)_{n+r}L_{n+r}+\left(C_p\right)_{n-r}L_{n-r}=L_{2r}\left(C_p\right)_{2n}+2i(-1)^{n+r}$$

bulunarak ispat tamamlanır.

$v)\left(C_p\right)_{n+1}L_{n+1}-\left(C_p\right)_{n}L_{n}$ eşitliğinde, (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+1}L_{n+1}-\left(C_p\right)_{n}L_{n}=(F_{n+1}L_{n+1}-F_nL_n)+i(F_{n+2}L_{n+1}-F_{n+1}L_n)$$

bulunur. Burada $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ile (3.13) eşitliklerinden faydalanırsak

$$\left(C_p\right)_{n+1} L_{n+1} - \left(C_p\right)_n L_n = F_{2n+1} + i(F_n L_{n+1} - F_{n+1} L_n) + iF_{n+1} L_{n+1}$$

bulunur. Son eşitlikte (3.14) ve Teorem 3.2.3.'deki eşitliklerinden faydalanılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+1} L_{n+1} - \left(C_p\right)_n L_n = F_{2n+1} + i(-1)^m 2F_{-1} + iF_{2n+2}$$

bulunur. Burada $F_{-1} = 1$ Fibonacci sayısı yerine yazılırsa

$$\left(C_p\right)_{n+1} L_{n+1} - \left(C_p\right)_n L_n = \left(C_p\right)_{2n+1} + 2i(-1)^m$$

bulunarak ispat tamamlanır.

$vi)\left(C_p\right)_{n+1} L_n$ ifadesinde, (4.1) ile (3.15) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\left(C_p\right)_{n+1} L_n = \left(C_p\right)_{2n+1} - 2$$

bulunur.

$vii)\, 3\left(C_p\right)_n + L_n$ ifadesinde, (4.1) ile (3.16) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$3\left(C_p\right)_n + L_n = 2F_{n+2} + 3iF_{n+1}$$

olduğu açıkça görülür.

$viii)\, 5\left(C_p\right)_n + 3L_n$ ifadesinde, (4.1) ile (3.17) eşitlikleri kullanılırsa

$$5\left(C_p\right)_n + 3L_n = 2L_{n+2} + 5iF_{n+1}$$

elde edilir.

$ix)\,5\left(C_p\right)_n^2 - L_n^2$ ifadesinde, (4.1) ile Teorem 3.2.4. kullanılırsa

$$5\left(C_p\right)_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1} + 5F_{n+1}(2iF_n + pF_{n+1})$$

elde edilir.

Özel durum:

$$5\left(C_p\right)_n^2 - L_n^2 = \begin{cases} 4(-1)^{n+1} + 5F_{n+1}(2iF_n - F_{n+1}) & , \quad p=-1 \\ 4(-1)^{n+1} + 10iF_{n+1}F_n & , \quad p=0 \\ 4(-1)^{n+1} + 10iF_nF_{n+1} + 5F_{n+1}^2 & , \quad p=1 \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.11. $\left(C_p\right)_n$, $p-$kompleks Fibonacci sayısı ve $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)\,\alpha\left(C_p\right)_n + \left(C_p\right)_{n-1} = \alpha^n + i\alpha^{n+1}$

$ii)\,\beta\left(C_p\right)_n + \left(C_p\right)_{n-1} = \beta^n + i\beta^{n+1}$

$iii)\,\dfrac{(\alpha^n + i\alpha^{n+1}) - (\beta^n + i\beta^{n+1})}{\alpha - \beta} = \left(C_p\right)_n$

İspat:

$i)\,\alpha\left(C_p\right)_n + \left(C_p\right)_{n-1}$ ifadesinde, (4.1) ile lemma 3.1.3. deki eşitlikler kullanılırsa

$$\alpha\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}=\alpha^n+i\alpha^{n+1}$$

bulunur.

ii) $\beta\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}$ ifadesinde (4.1) ile lemma 3.1.4. den faydalanılırsa

$$\beta\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}=\beta^n+i\beta^{n+1}$$

bulunur.

iii) $\dfrac{(\alpha^n+i\alpha^{n+1})-(\beta^n+i\beta^{n+1})}{\alpha-\beta}$ ifadesinde $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ Binet formülü dikkate alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{(\alpha^n+i\alpha^{n+1})-(\beta^n+i\beta^{n+1})}{\alpha-\beta}=\left(C_p\right)_n$$

elde edilir.

Teorem 4.2.12. (Binet Formülü)

$\left(C_p\right)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayısı, $n\geq 0$, $x^2-x-1=0$ denkleminin kökleri $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\underline{\alpha}=1+i\alpha$, $\underline{\beta}=1+i\beta$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $\dfrac{\underline{\alpha}\alpha^n-\underline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}=\left(C_p\right)_n$

ii) $\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n=\left(S_p\right)_n$

İspat:

$i)$ Teorem 4.2.11.'de verilen $\alpha\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}=\alpha^n+i\alpha^{n+1}$ eşitliğinde $\underline{\alpha}=1+i\alpha$ olmak üzere

$$\alpha\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}=\alpha^n\underline{\alpha}$$

yazılabilir. Benzer şekilde Teorem 4.2.11.'de $\underline{\beta}=1+i\beta$ olmak üzere

$$\beta\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}=\beta^n\underline{\beta}$$

bulunur. Son iki eşitlik kullanılarak $\dfrac{\underline{\alpha}\alpha^n-\underline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}$ ifadesi düzenlenirse

$$\frac{\underline{\alpha}\alpha^n-\underline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}=\left(C_p\right)_n$$

elde edilir.

$ii)$ $\underline{\alpha}=1+i\alpha$ ve $\underline{\beta}=1+i\beta$ olmak üzere $\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n$ ifadesinde Teorem 4.2.11.'deki $i.$ ve $ii.$ eşitlikler kullanılırsa

$$\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n=(\alpha+\beta)\left(C_p\right)_n+2\left(C_p\right)_{n-1}$$

bulunur. Burada $x^2-x-1=0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere $\alpha+\beta=1$ eşitliğinden faydalanılırsa

$$\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n=\left(C_p\right)_n+2\left(C_p\right)_{n-1}$$

elde edilir. Son eşitlik,

$$\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n=(\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1})+\left(C_p\right)_{n-1}$$
$$=\left(C_p\right)_{n+1}+\left(C_p\right)_{n-1}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada (4.1) tanımı kullanılarak $\left(C_p\right)_n+\left(C_p\right)_{n-1}=\left(C_p\right)_{n+1}$ eşitliğinin geçerli olduğu açıkça görülür. Teorem 4.2.9.'daki $ii.\left(C_p\right)_{n+1}+\left(C_p\right)_{n-1}=\left(S_p\right)_n$ eşitliği kullanılarak

$$\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n=\left(S_p\right)_n$$

bulunur.

Teorem 4.2.13. (d'Ocagne Eşitliği)

$\left(C_p\right)_n$ $p-$ kompleks Fibonacci sayısı, $n\geq 0$, m herhangi bir doğal sayı ve $m\geq n$ olmak üzere

$$\left(C_p\right)_m\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_{m+1}\left(C_p\right)_n=(-1)^n F_{m-n}(1+i-p)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\left(C_p\right)_m\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_{m+1}\left(C_p\right)_n$ ifadesinde (4.1) ile H_n genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olmak üzere (3.18) eşitliklerinden faydalanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(C_p\right)_m\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_{m+1}\left(C_p\right)_n=(-1)^n F_{m-n}+(-1)^n i(F_{m-n+1}-F_{m-n-1})+p(-1)^{n+1}F_{m-n}$$

bulunur. Burada $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ Fibonacci sayılarının toplamı tanımı kullanılara $F_{m-n+1}=F_{m-n-1}+F_{m-n}$ şeklinde yazılırsa

$$\left(C_p\right)_m\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_{m+1}\left(C_p\right)_n=(-1)^n F_{m-n}(1+i-p)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Özel durum:

$$\left(C_p\right)_m\left(C_p\right)_{n+1}-\left(C_p\right)_{m+1}\left(C_p\right)_n=\begin{cases}(-1)^n F_{m-n}(2+i) & , \quad p=-1\\ (-1)^n F_{m-n}(1+i) & , \quad p=0\\ (-1)^n iF_{m-n} & , \quad p=1\end{cases}$$

olur.

Teorem 4.2.14. (Pytagorean Teoremi)

$(C_p)_n$, $p-$ kompleks Fibonacci sayısı olmak üzere

$$[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2=[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n^2]^2$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2$ ifadesinde $x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy$ özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2 &= \{2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n[2(C_p)_{n+1}+(C_p)_n]\}^2\\ &\quad -4(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}(C_p)_n(C_p)_{n+3}\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.2.1'deki $i.$ eşitliğe göre $(C_p)_{n+3}$ $p-$kompleks Fibonacci sayısı yerine $(C_p)_{n+1}+(C_p)_{n+2}$ yazılırsa

$$[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2 =\{2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n[(C_p)_{n+1}+(C_p)_{n+2}]\}^2$$
$$-4(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}(C_p)_n(C_p)_{n+3}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 4.2.1.'deki $i.$ eşitlikten faydalanılırsa

$$[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2=\{2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n[(C_p)_{n+1}+((C_p)_n+(C_p)_{n+1})]\}^2$$
$$-4(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}(C_p)_n(C_p)_{n+3}$$

elde edilir. Son eşitlikte parantez içindeki ifadeler tekrar düzenlenirse

$$[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2=\left[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+2(C_p)_n(C_p)_{n+1}+(C_p)^2{}_n\right]^2$$
$$-4(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}(C_p)_n(C_p)_{n+3}$$

olur. Burada $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ özdeşliğinden faydalanılırsa

$$[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2=[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n^2]^2+4(C_p)_n^2(C_p)_{n+1}^2$$
$$+2[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n^2]2(C_p)_n(C_p)_{n+1}$$
$$-4(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}(C_p)_n(C_p)_{n+3}$$

bulunur. Teorem 4.2.1. $i.$eşitlik kullanılarak tekrar düzenleme yapılırsa

$$[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}]^2+[(C_p)_n(C_p)_{n+3}]^2=[2(C_p)_{n+1}(C_p)_{n+2}+(C_p)_n^2]^2$$

eşitliği elde edilerek ispat tamamlanır. Bu sonuç Horadam'ın kompleks Fibonacci sayıları için bulduğu eşitlik ile aynıdır [3].

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$\mathbb{C}_p$, $p-$ kompleks sayıları cümlesi olmak üzere $\mathbb{C}_p = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = p\}$ olacak şekilde Harkin tarafından tanımlanmıştır [7]. $i^2 = -1$ olması durumunda kompleks sayılara [8], $i^2 = 0$ için dual sayılara [9] ve $i^2 = 1$ için hiperbolik sayılara [10] karşılık gelir.

Biz bu çalışmada $p-$ kompleks Fibonacci, $p-$ kompleks Lucas ve $p-$ kompleks genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıyla bu sayıların eşlenik, norm gibi cebirsel özelliklerini tanımladık. Bu sayıları; Harkin [7]'in tanımladığı $p-$ kompleks sayılarının reel ve imajiner kısmı Fibonacci, Lucas veya genelleştirilmiş Fibonacci sayıları yazarak elde ettik. $p-$ kompleks Fibonacci sayılarını içeren Binet, Cassini, Catalan, d'Ocagne ve Pythagorean gibi birçok eşitlik bulduk. Bu süreçte; Fibonacci, Lucas ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren özdeşliklerden faydalandık.

$p-$ kompleks Fibonacci sayıları için bulduğumuz eşitliklerden birkaçının $i^2 = -1$ özel durumu, Horadam [3]'ın kompleks Fibonacci sayıları için yaptığı eşitliklerle aynıdır.

KAYNAKLAR

[1] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication, USA., 2001.

[2] Duran, S.Ş., Kainattaki Gizli İmza Altın Oran, Altın Burç Yayınları, İzmir, 2008.

[3] Horadam, A.F., Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. Amer. Math. Monthly, 70(3): 289-291, 1963.

[4] Jordan, J.H., Gaussian Fibonacci and Lucas numbers. Fibonacci Quarterly, 3: 315-318, 1965.

[5] Berzsenyi, G., Gaussian Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 15: 233-236, 1977.

[6] Harman, C.J., Complex Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 19(1): 82-86, 1981.

[7] Harkin, A. A., Harkin, J. B., Geometry of generalized complex numbers. Mathematics Magazine, 77(2): 118-129, 2004.

[8] Sasane, S. M., Sasane, A., A friendly approach to complex analysis. Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2014.

[9] Study, E., Geometrie der dynamen, Leipzig, 1903.

[10] Clifford, W. K., Mathematical Papers (ed. R. Tucker), Chelsea Pub. Co Bronx, NY, 1968.

[11] Dunlap, R. A., The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Scientific, 1997.

[12] Kulaç, Y., Tosun, M., Some equations on $p-$complex Fibonacci numbers. AIP Conf. Proc.,1926: 020024-1-020024-6, 2018.

ÖZGEÇMİŞ

Yıldız KULAÇ, 11.04.1990 tarihinde Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 2004 yılında Ahmet Andiçen İlköğretim Okulu'ndan mezun oldu. Lise öğrenimini 2008 yılında Ankara Ayrancı Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde tamamladı ve aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2012 yılında ikincilikle bitirdi. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde geometri bilim dalında yükseklisans eğitimine başladı. 2015 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda matematik öğretmeni olarak başladığı görevini halen sürdürmektedir.