T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİNİN KOROVKİN YAKLAŞIM TEORİSİNE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Merve ABAY TOK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ**

Temmuz 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİNİN KOROVKİN YAKLAŞIM TEOREMİNE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Merve ABAY TOK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**

Bu tez 05/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.
Murat KİRİŞÇİ
Jüri Başkanı

Doç. Dr.
Selma ALTUNDAĞ
Üye

Doç. Dr.
Emrah Evren KARA
Üye

Doç. Dr.
Mahpeyker ÖZTÜRK
Üye

Dr. Öğr. Üyesi
Aynur ŞAHİN
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Merve ABAY TOK

05.07.2019

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Selma Altundağ ve Doç. Dr. Emrah Evren Kara'ya; tüm içtenliğiyle hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Hüseyin Altundağ ve Doç. Dr. Mahpeyker Öztürk'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca en büyük desteği aldığım çok kıymetli anne-babam Bahriye-Avni ABAY'a, ve büyük bir özveri ile bana destek olan eşim Hasan TOK'a, sabır ve anlayışlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmanın 2211/A yurtiçi doktora burs programı ile maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$C[a,b]$	: $[a,b]$ de tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$\rho(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$K(f;\delta)$	: f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli
$\lvert\delta(K)\rvert$	: K kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	: K kümesinin yoğunluğu
$Lip_M(\alpha)$	: Lipschitz sınıfı fonksiyonlar
$f_n(x)$	: $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
L_n	: $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere operatör dizisi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\omega(.;.)$	: Süreklilik modülü

ÖZET

Anahtar kelimeler: Korovkin Yaklaşım Teoremi, istatistiksel yakınsaklık, yakınsaklık hızı, Szasz operatörü.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin temelini oluşturan Korovkin yaklaşım teoremi ile ilgili kısa bir özet verildi. İkinci bölümde, ihtiyaç duyulan ve konusu geçen tüm tanım ve teoremlere detaylı olarak değinildi.

Üçüncü bölümde, daha önce tanımlanmış olan uyarlanmış ayrık (modified discrete) operatörün, $\alpha\beta$-istatistiksel düzgün yakınsaklık kullanılarak Korovkin yaklaşım teoremine uygulanması incelendi.

Dördüncü bölümde, yeni tanımlanan Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri Korovkin yaklaşım teoremine uygulandı. Ayrıca ağırlıklı uzaylarda da Korovkin yaklaşımı incelendi. Ayrıca çeşitli yöntemlerle yaklaşım hızı incelendi.

Beşinci bölümde, Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri q-analizine göre tanımlanıp Korovkin yaklaşım teoremine uygulaması incelendi. Süreklilik modülü ve Lipschitz şartı kulanılarak yaklaşım hızı incelendi.

APPLICATIONS TO KOROVKIN APPROXIMATION THEORY OF SOME TYPES OF CONVERGENCE

SUMMARY

Keywords; Korovkin Approximation Theorem, statistical convergence, rate of convergence, Szasz operator.

This study consists of five chapters. In the first chapter, a short summary of the Korovkin approximation theorem was given. In the second chapter, all the definitions and theorems which are needed and mentioned are mentioned in detail.

In the third chapter, the application of the modified discrete operator, which was previously described, to the Korovkin approximation theorem using $\alpha\beta$-statistical uniform convergence was investigated.

In the fourth chapter, we applied the newly defined Fibancci Dunkl analogue of Szasz operators to the Korovkin approximation theorem. Korovkin approximation was studied in weighted spaces. Then, rate of convergence was examined with various methods.

In the fifth chapter, the application of the $q-$Fibancci Dunkl analogue of Szasz operators to the Korovkin approximation theorem was investigated. Rate of convergence was evaluated with modulus of continuity and the Lipschitz requirement.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel analizin en çok uygulamaya sahip alanlarından biri olan yaklaşım teorisi, ilk olarak Rus matematikçi P.L. Chebyshev'in buhar makinası ile ilgili olarak ortaya koyduğu;

"Bir $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve pozitif bir n sayısı için, acaba f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında herhangi bir noktada maksimum hata kontrol edilebilecek şekilde en çok n dereceli bir $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu ile temsil edilebilir mi?"

problemini araştırmasıyla başlamıştır.

Yaklaşım teorisinin amacı, genellikle teorik matematikte ve gerçek hayatta karşılaşılan araştırılması zor bazı fonksiyonları, daha iyi özelliklere sahip, daha basit fonksiyonlar cinsinden ifade etmektir. Böylece, araştırılması zor olan fonksiyon hakkında daha kolay bilgi elde etmenin bir yöntemi bulunmuş olur. Genellikle bu basit fonksiyonlar olarak, iyi bilinen polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar ele alınmaktadır.

1885 de Weistrass'ın [1] verdiği yaklaşım teorisinin temelini oluşturan ifade; "sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için, $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında en az bir $p(x)$ polinomu bulabiliriz ki $\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-p(x)\right|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Yani sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün yakınsayan en az bir polinom bulabiliriz." şeklindedir. 1912 yılında Rus matematikçi Bernstein [2], Weierstrass'ın bu polinomunun nasıl olacağı üzerine çalışmış ve literatürde

Bernstein polinomları olarak bilinen, $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsayan polinomları

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır. Aynı zamanda, B_n Bernstein polinomları lineer pozitif operatörlerdir.

Korovkin [1], Bernstein operatörlerinden yola çıkarak, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili çok önemli bir teorem vermiştir. Lineer pozitif (A_n) operatörlerinin bir dizisinin $[a,b]$ kompakt aralığında f sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, sadece $k=0,1,2$ olmak üzere $e^k(x)=x^k$ fonksiyonu için $\left(A_n\left(e^k\right)\right)$ dizisinin e^k fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır. Yani, kompakt kümede sürekli olan fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşımda bazı lineer pozitif operatör dizileri kullanılabilir. Bu düzgün yakınsama probleminden sonra, yaklaşımın hızı problemi ortaya çıkmıştır. Bu problemin çözümü farklı metodlarla incelenmiştir.

Korovkin [1] tarafından verilen lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili teorem sayesinde birçok yeni lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir [3-16].

1950 yılında, sonlu aralık üzerinde tanımlı Berstein operatörü Szasz [17] tarafından sonsuz aralığa genişletilerek, $x\in[0,\infty)$ ve $f\in C[0,\infty)$ için $S_n:C[0,\infty)\to C[0,\infty)$

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

olarak tanımlanmıştır ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2014 yılına gelindiğinde Sucu [18], Szasz operatörünün Dunkl benzerini tanımlayarak, bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Genelleştirilmiş üstel fonksiyon $e_\mu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\gamma_\mu(k)}$ şeklinde tanımlanmıştır ve

$$\theta_k = \begin{cases} 0; & k \in 2\mathbb{N} \text{ ise} \\ 1; & k \in 2\mathbb{N}+1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere γ_μ katsayısı $k \in \mathbb{N}_0$ ve $\mu > -1/2$ için aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_\mu(2k) = \frac{2^{2k} k!\Gamma(k+\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+1/2)} \text{ ve } \gamma_\mu(2k+1) = \frac{2^{2k+1} k!\Gamma(k+\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1/2)}.$$

γ_μ için $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\gamma_\mu(k+1) = (k+1+2\mu\theta_{k+1})\gamma_\mu(k)$$

bağıntısı verilmektedir.

Bu bilgiler altında, Szasz operatörünün Dunkl benzeri

$$S_n^*(f;x) := \frac{1}{e_\mu(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{\gamma_\mu(k)} f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri de çalışılan fonksiyona alt uzayda en iyi yaklaşım elemanının var olup olmadığıdır. En iyi yaklaşım elemanının var oluşu, yaklaşım sayısı olarak bilinen bir parametrenin sıfıra yakınsaması probleminin araştırılmasına yönlendirmektedir. Böylece, yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemi ortaya çıkar. Bu problemin çözümü farklı metotlarla incelenmiştir.

Klasik analizdeki birçok teorem ve metod q-analizine genişletilebildiğinden, son yıllarda q-analizine olan ilgi artmıştır. Bernstein operatörleri tanımlandıktan sonra bu operatörün çeşitli genellemeleri ele alınmıştır. Bu genellemelerden bir kısmı q-analiz teorisine göre düzenlenmiştir. Lupaş, Bernstein operatörlerinin q-genellemesi ilk olarak 1987 de incelemiştir [19]. Bu çalışma, birçok yazar tarafından başka operatörlerin de q-genellemesi oluşturularak, Korovkin tipi yaklaşımı incelenmesine fayda sağlamıştır [20-24]. Daha sonra, İçöz ve Çekim tarafından genelleştirilmiş Szasz operatörünün Dunkl benzerinin q-analizi çalışılmıştır [25].

Klasik anlamdaki yakınsaklığı genelleyen yakınsaklık çeşidi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında Steinhaus [26] tarafından tanımlanmıştır ve Fast tarafından geliştirilmiştir. Son zamanlarda da çalışma alanlarında aktif bir rol almıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile Korovkin yaklaşım teorisi için daha güçlü sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, 2002 yılında Gadjiev ve Orhan [27] istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Korovkin yaklaşım teoremini incelemiştir. 1993 de Orhan ve Friday [28] Lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımladı. Savaş ve Patterson [29], Korovkin yaklaşım teoremini Lacunary istatistiksel yakınsaklığını kullanarak incelemiştir. Daha sonra, $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır [30]. Bu yakınsaklık çeşitlerinden yararlanarak Aktuğlu [31] $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramını vererek Korovkin teoremini bu yeni yakınsaklık kavramıyla incelemiştir ve daha birçok yazar yeni yakınsaklık çeşitleriyle Korovkin teoremini incelemiştir [32-45].

Bu tezde yaklaşımlar teorisi hakkında literatür taraması yapılacak, lineer pozitif operatörler tanıtılarak bu operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenmiştir. Daha sonra çalışmamızda kullanılacak olan bazı temel tanımlar verilmiştir. Bu bilgiler doğrultusunda Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri [46] ve Szasz operatörünün q- Fibonacci Dunkl benzeri [47] tanımlanıp, bu operatörlerin Korovkin teoremi yardımıyla yakınsamaları incelenmiştir. Ayrıca, tanımlanan bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda Korovkin teoremi ile yaklaşımı incelenmiştir. Daha sonra, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörlerin yaklaşım hızı tahmin edildi.. Üçüncü bölümde de, daha önce Agratini [48] tarafından tanımlanan Modified discrete operatörünün Korovkin tipi yaklaşım özelliği $\alpha\beta$-istatistiksel düzgün yakınsaklık yardımıyla incelendi. [49].

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde literatürde var olan lineer pozitif operatör tanıtıldı ve sağladığı temel özellikler verildi. Daha sonra, Korovkin yaklaşım teorisinde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecek ve ayrıca Korovkin teoremi ifade ve ispat edildi.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere X kümesinden Y kümesine olan L dönüşümüne operatör denir ve X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir Lf fonksiyonu karşılık gelir. Bu Lf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer $L(f;x)$ ile gösterilir [50].

Tanım 2.1.2. X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere; her $x_1, x_2 \in X$ ve her λ, μ skalerleri için

$$L(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda L(x_1) + \mu L(x_2)$$

koşulu sağlanıyorsa $L : X \to Y$ şeklindeki L operatörüne lineer operatör denir [51].

Tanım 2.1.3. $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olmak üzere, eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir. Yani

$$f(x) \geq 0$$

olduğunda

$$L(f;x)\geq 0$$

olur. O halde aşikardır ki her x için

$$f(x)\leq g(x)$$

olursa o takdirde

$$L(f;x)\leq L(g;x)$$

olur. Yani lineer pozitif operatörler monotondur [52].

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

Lemma 2.1.4. Lineer pozitif operatörler monoton azalmayandır [52].

Lemma 2.1.5. L bir lineer pozitif operatör ise

$$\left|L(f)\right|\leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır [52].

Tanım 2.1.6. $A\subseteq\mathbb{R}$ ve $f:A\to\mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n(x)$ e fonksiyon dizisi denir [52].

Tanım 2.1.7. Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norma $f\in C[a,b]$ olmak üzere

$$\| f \|_{C[a,b]} = \underset{a \le x \le b}{maks} | f(x) |$$

şeklinde tanımlanır [52].

Tanım 2.1.8. X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere, $L : X \to Y$ şeklindeki L operatörü ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(f;x)$ e bir operatör dizisi denir ve (L_n) ile gösterilir [52].

2.2. Yakınsaklık Çeşitleri

Bu bölüm yakınsaklık çeşitleri ile ilgili tanımlara ayrılmıştır.

Tanım 2.2.1. (f_n), $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ verildiğinde her $n \ge n_0$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir n_0 sayısının var olmasıdır [53].

Tanım 2.2.2. (f_n), $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \ge n_0$ ve her bir $x \in A$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir n_0 sayısının var olmasıdır. Düzgün yakınsama kısaca, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir [53].

Tanım 2.2.3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi K ve $K_n := \{k \le n : k \in K\}$ olsun. K_n kümesinin eleman sayısı $|K_n|$ ile gösterilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu veya doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [54].

Tanım 2.2.4. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \ge \varepsilon\} = 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}|}{n} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [54].

İstatistiksel yakınsaklık tanımından; eğer $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabileceği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla istatistiksel yakınsaklık, klasik olarak bilinen yakınsaklıktan daha geneldir. Yani, yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.2.5. $x=(x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k=\begin{cases}1, & k=m^2 \text{ ise}\\ 0, & k\neq m^2 \text{ ise}\end{cases},\quad m=1,2,3,...$$

şeklinde tanımlansın. $st-\lim x=0$ dır. Fakat yakınsak değildir.

Duman ve Orhan [55] tarafından reel sayıların bir D alt kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. $D\subset\mathbb{R}$ olmak üzere (f_n), D üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. İstatistiksel noktasal yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramları aşağıdaki şekilde tanımlandı.

Tanım 2.2.6. Her $\varepsilon>0$ ve her bir $x\in D$ için

$$\delta\left\{n\in\mathbb{N}:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

şartı sağlanıyorsa (f_n) dizisi $f:D\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve $f_n\to f$ *(istatistiksel)* ile gösterilir [55].

Tanım 2.2.7. (f_n), D üzerinde sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|f_n-f\right\|_{B(D)}=0$$

ise, bu durumda (f_n) dizisi $f:D\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel düzgün yakınsaktır denir [55] ve $f_n\rightrightarrows f$ *(istatistiksel)* olarak gösterilir.

Tanım 2.2.8. $k_0=0$ ve $(n\to\infty)$ iken $h_n=k_n-k_{n-1}\to\infty$ şartlarını sağlayan $\theta=\{k_n\}$ artan indisli lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in(k_{n-1},k_n]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{h_n}=0$$

ise x dizisi L ye lacunary istatiksel yakınsaktır denir [28].

Tanım 2.2.9. $\lambda_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, $\lambda_1=1$ ve $\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1$ şartlarını sağlayan $\lambda=(\lambda_n)$ azalmayan pozitif terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in[n-\lambda_n+1,n]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{\lambda_n}=0$$

ise x dizisi L ye λ - istatiksel yakınsaktır denir [30].

Tanım 2.2.10. $\alpha(n)$ ve $\beta(n)$ aşağıdaki şartları sağlayan pozitif terimli iki dizi olsun.

P_1 : α ve β azalmayan iki dizi,

P_2 : $\beta(n)\geq\alpha(n)$, $(\text{her } n\in\mathbb{N} \text{ için})$,

P_3 : $\beta(n)-\alpha(n)\to\infty$, $(n\to\infty \text{ iken})$,

ve Λ; P_1, P_2, P_3 şartlarını sağlayan (α,β) çiftlerinin bir kümesi olsun.

Her bir $(\alpha,\beta)\in\Lambda$ çifti, $0<\gamma\leq1$ ve $K\subset\mathbb{N}$ için,

$$\delta^{\alpha,\beta}(K,\gamma)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|K\cap P_n^{\alpha,\beta}\right|}{\left(\beta(n)-\alpha(n)+1\right)^{\gamma}}$$

şeklinde tanımlanan ifade, K kümesinin γ ıncı mertebeden $\alpha\beta$ -yoğunluğudur. $\left[\alpha(n),\beta(n)\right]$ kapalı aralığı $P_n^{\alpha\beta}$ ile, S kümesinin eleman sayısı $|S|$ ile gösterilir.

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}, \gamma\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \in P_n^{\alpha,\beta} : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right|}{\left(\beta(n) - \alpha(n) + 1\right)^{\gamma}} = 0$$

ise x dizisi L ye γ ıncı mertebeden $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\alpha\beta}^{\gamma} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$ ile gösterilir. $\gamma = 1$ için, x dizisi L ye $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\alpha\beta} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$ ile gösterilir [31].

Tanım 2.2.11. X , $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi, $0 < \gamma \leq 1$ ve $f_r : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k : \| f_k(x) - f(x)\|_{C(X)} \geq \varepsilon\right\}, \gamma\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \in P_n^{\alpha,\beta} : \| f_k(x) - f(x)\|_{C(X)} \geq \varepsilon\right\}\right|}{\left(\beta(n) - \alpha(n) + 1\right)^{\gamma}} = 0$$

koşulunu sağlayan f_r fonksiyon dizisi X deki f ye düzgün olarak γ ıncı mertebeden $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır ve $f_k \rightrightarrows f$ ($\alpha\beta^{\gamma}$-istatistiksel) ile gösterilir [31].

Tanım 2.2.10. de verilen tanımda özel olarak;

$$\alpha(n) = 1,\ \beta(n) = n \text{ ve } \gamma = 1$$

seçilirse

$$P_n^{\alpha\beta} = [1, n]$$

olup

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq n:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{n}=0$$

dır. O halde, $\alpha\beta$ -istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

$\lambda=\left(\lambda_n\right)$ azalmayan pozitif terimli bir dizi, $\lambda_1=1$, $\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1$ ve

$$\alpha(n)=n-\lambda_n+1,\ \beta(n)=n,\ \gamma=1$$

seçilirse

$$P_n^{\alpha\beta}=[n-\lambda_n+1,n]$$

olup

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in[n-\lambda_n+1,n]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{\lambda_n}=0$$

elde edilir. Bu şekilde $\alpha\beta$ -istatistiksel yakınsaklık, λ -istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

$\theta=\left\{k_n\right\}$ artan indisli lacunary dizisi, $k_0=0$, $h_r=k_r-k_{r-1}$ ve

$$\alpha(r)=k_{r-1}+1,\ \beta(r)=k_r \text{ ve } \gamma=1$$

seçilirse

$$P_r^{\alpha\beta}=[k_{r-1}+1,k_r]$$

olur. Fakat $(k_{r-1},k_r]\cap\mathbb{N}=[k_{r-1}+1,k_r]\cap\mathbb{N}$ olup

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in[k_{r-1}+1,k_r]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{h_r}$$
$$=\lim_{r\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in(k_{r-1},k_r]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{h_r}=0$$

dır. $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık tanımı, lacunary istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

2.3. Korovkin Teoremi

Matematiksel analizin en çok uygulamaya sahip alanlarından biri olan yaklaşım teorisi, ilk olarak Rus matematikçi P.L. Chebyshev'in buhar makinası ile ilgili olarak ortaya koyduğu, "bir $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve pozitif bir n sayısı için, acaba f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında herhangi bir noktada maksimum hata kontrol edilebilecek şekilde en çok n dereceli bir $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ polinomu ile temsil edilebilir mi?" problemini araştırmasıyla başlamıştır.

Yaklaşım teorisinin amacı, genellikle teorik matematikte ve gerçek hayatta karşılaşılan araştırılması zor bazı fonksiyonları, daha iyi özelliklere sahip, daha basit fonksiyonlar cinsinden ifade etmektir. Böylece, araştırılması zor olan fonksiyon hakkında daha kolay bilgi elde etmenin bir yöntemi bulunmuş olur. Basit fonksiyonlar olarak, genelde iyi bilinen polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar ele alınmaktadır.

Korovkin tipi teoremler, yaklaşımlar teorisinde temel oluşturmaktadır. Bunun için, 1953 yılında Korovkin [56] tarafından ispatlanan lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili Korovkin teoremi bu bölümde detaylı olarak incelendi.

Teorem 2.3.1. $f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(x)| \leq M_f$ olsun. Eğer $L_n(f)$ lineer operatörler dizisi, her $x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$$
$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$
$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ de

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

dir [56].

2.4. Süreklilik Modülü

Tanım 2.4.1. X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere, $L: X \to Y$ şeklindeki L operatörü ve her $n \in \mathbb{N}$ için (L_n) operatör dizisi verilsin.

$$L_n\left((t-x)^k;x\right), \quad \{k = 0,1,2,...\}$$

ile tanımlanan ifadelere (L_n) operatör dizisinin $k-$yıncı merkezi momenti denir [57].

Tanım 2.4.2. (α_n) ve (β_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \leq \beta_n$ ve $n \to \infty$ iken $\alpha_n \to 0$ ve $\beta_n \to 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızından daha fazladır denir.

$\left(\left\|L_n(f)-f\right\|\right)$ dizisi sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. $n \to \infty$ için $\beta_n \to 0$ ve M sabit bir sayı olmak üzere; eğer

$$\left\|L_n(f)-f\right\| \leq M\beta_n$$

olacak şekilde bir (β_n) dizisi mevcut ise, (β_n) nin yaklaşım hızı $L_n(f;x)$'in $f(x)$ e yaklaşım hızını değerlendirmeye yardımcı olur [58].

Tanım 2.4.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ olacak şekilde (α_n) ve (β_n) dizileri mevcut olsun. Buna göre;

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ise (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisinden daha hızlıdır denir.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$ ise (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (α_n) dizisinden daha hızlıdır denir

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$ ise (α_n) ve (β_n) dizilerinin sıfıra yaklaşma hızı aynıdır denir.

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = c$ ise c ye asimptotik değer, (β_n) dizisine de (α_n) dizisinin asimptotik hızı denir.

Operatörlerde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|L_n(f;x)-f(x)\right|}{\beta_n} = A(n,x)$$

ise $A(n,x)$ fonksiyonu asimptotik değer, (β_n) dizisi ise $\left|L_n(f;x)-f(x)\right|$ in asimptotik hızıdır [58].

Yaklaşım hızı hakkında yorum yapabilmek için birçok yöntem vardır. Bu yöntemlerden bazıları aşağıda gösterilmektedir:

Tanım 2.4.4. $f \in C\left[a,b\right]$ olmak üzere, her $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b] \\ |y-x|\leq\delta}} \left| f(y) - f(x) \right|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [57].

Lemma 2.4.5. Süreklilik modülü;

- **a.** $\omega(f;\delta) \geq 0$
- **b.** $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$
- **c.** $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$
- **d.** $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$
- **e.** $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$
- **f.** $\left| f(y) - f(x) \right| \leq \omega(f;|y-x|)$
- **g.** $\left| f(y) - f(x) \right| \leq \left(\frac{|y-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f;\delta)$

özelliklerine sahiptir [57].

Tanım 2.4.6. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$$\left| f(t) - f(x) \right| \leq M \left| t-x \right|^{\alpha}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M 'ye de Lipschitz sabiti denir ve $f \in Lip_M\left(\alpha\right)$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.4.7. $C_B^2[0,\infty)$ uzayı

$$C_B^2[0,\infty)=\left\{ f \in C_B[0,\infty): f, f', f'' \in C_B[0,\infty)\right\}$$

şeklindedir.[59].

Tanım 2.4.8. $[0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli f fonksiyonlarının oluşturduğu küme $C_B[0,\infty)$ olmak üzere, bu uzaydaki norm

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Her $\delta \geq 0$ için Peetre-K fonksiyoneli

$$K_2(f;\delta) = \inf_{x\in C_B^2[0,\infty)} \left\{\|f-g\| + \delta\|g''\|\right\}$$

şeklinde tanımlıdır [59].

Tanım 2.4.9. f fonksiyonunun ikinci dereceden süreklilik modülü $\omega_2(f,\delta)$ olmak üzere

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{0<p<\sqrt{\delta}} \sup_{x\in[0,\infty)} \left| f(x+2p) - 2f(x+p) + f(x)\right|$$

şeklinde tanımlanır [59].

$K_2(f,\delta) \leq C\omega_2(f,\delta)$ olacak şekilde öyle bir $C>0$ sayısı vardır [60].

Tanım 2.4.10. $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı uzayları aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$P_\rho(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \left| f(x) \right| \le M_f \rho(x) \right\}$$

$$Q_\rho(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : f \in P_\rho\left(\mathbb{R}^+\right) \cap C[0,\infty) \right\}$$

$$Q_\rho^k(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : f \in Q_\rho(\mathbb{R}^+) \text{ ve } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k\left(k \text{ sabit}\right) \right\},$$

burada $\rho(x) = 1 + x^2$ bir ağırlık fonksiyonu ve M_f yalnızca f ye bağlı bir sabittir. $Q_\rho\left(\mathbb{R}^+\right)$ uzayındaki norm

$$\| f \|_\rho = \sup_{x\ge 0} \frac{f(x)}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlıdır [52].

2.5. q −Analizde Temel Kavramlar

Son yıllarda q-analizi, bazı uygulamalı alanlarda bilimsel problemler için birçok uygulama alanına sahip olduğundan araştırmacılar tarafından ilgi görmektedir. Klasik anlamdaki birçok teori ve sonuçları genellemektedir.

q-analizinde temel ifade;

$x, y \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$xq = qx$$
$$yq = qy$$
$$y^k x = q^k x y^k$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.1. $|q|<1$ için

$$[n]_q=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+...+q^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan $[n]_q$ eşitliğine n'nin q-tamsayısı denir [61].

Tanım 2.5.2. $|q|<1$ için

$$[n]_q!=\begin{cases}1, & (n=0)\\ \prod_{k=1}^{n}[k]_q, & (n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye n'nin q-faktöriyeli denir.

$n\geq 1$ için,

$$\begin{aligned}[n]_q! &=[1]_q[2]_q...[n]_q\\ &=\frac{(1-q)}{(1-q)}\frac{(1-q^2)}{(1-q)}...\frac{(1-q^n)}{(1-q)}\\ &=\frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}{(1-q)^n}\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir [61].

BÖLÜM 3. UYARLANMIŞ AYRIK OPERATÖRÜN KOROVKIN YAKLAŞIM TEOREMİNE UYGULAMASI

Agratini [48], seri olarak ifade edilen ayrık tipte genel bir pozitif yaklaşım ile ilgili çalışmalar yapıp, bunları sonlu toplamlara dönüştürdü ve sürekli fonksiyonların ağırlıklı uzaylarında yaklaşım özelliklerini inceledi.

Bu bölümde γ ıncı mertebeden $\alpha\beta-$istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak uyarlanmış ayrık operatörün Korovkin yaklaşım özellikleri incelendi [49].

Öncelikli olarak uyarlanmış ayrık operatörünün tanımı ve özellikleri verildi.

3.1. Uyarlanmış Ayrık Operatör

Tanım 3.1.1. $e_j(t) = t^j$, $j \in \mathbb{N}_0$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şartlar sağlansın:

a. Her $k \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n,k} = O(n^{-\gamma_k})(n \to \infty)$ şartını sağlayan bir γ_k dizisi mevcut olsun. $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir ağ olarak adlandırılan $\Delta_n = \left(x_{n,k}\right)_{k\geq 0}$ sabittir.

b. $\mathbb{R}^+$ da diferansiyellenebilir reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olan $C'(\mathbb{R}^+)$ ye ait bir $\phi_{n,k}$ dizisi mevcut olsun. Bu dizi; $\phi_{n,k} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k} = e_0 ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}x_{n,k}\phi_{n,k} = e_1$$

şartlarını sağlasın.

c. $\psi(n,x)\phi'_{n,k}(x) = \left(x_{n,k} - x\right)\phi_{n,k}(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $x \geq 0$ şartını sağlayan pozitif $\psi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+}$, $\psi(n,\cdot) \in C\left(\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu mevcut olsun.

Yukarıdaki şartlar sağlanacak şekilde; F, $\mathbb{R}^+$ üzerinde bütün sürekli fonksiyonların kümesini içeren L_n nin görüntü kümesi olmak üzere

$$\left(L_n f\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}(x) f\left(x_{n,k}\right),\ x \geq 0,\ f \in F \tag{3.1.1}$$

operatörü Agritini [48] tarafından tanımlandı.

Lemma 3.1.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere L_n operatörü (3.1.1) deki gibi tanımlansın. $\zeta_{n,r}$, L_n operatörünün r inci merkezi momenti olsun. Her $x \in \mathbb{R}^+$ için, aşağıdaki özdeşlikler sağlanır [48]:

$$\zeta_{n,0}(x) = 1,$$

$$\zeta_{n,1}(x) = 0,$$

$$\zeta_{n,r+1}(x) = \psi\left(n,x\right)\left(\zeta'_{n,r}(x) + r\zeta_{n,r+1}(x)\right), \left(r \in \mathbb{N}\right),$$

$$\zeta_{n,2}(x) = \psi(n,x) .$$

Agritini [48] tarafından, uyarlanmış ayrık operatörünü tanımlayabilmek için bazı bilgiler verildi:

ψ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\psi(n,x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\psi_i(x)}{a_n^i}, \; x \geq 0 \quad \text{ve}$$

$$x_{n,k} = \frac{k}{a_n} \leq k, \; k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

olacak şekilde $(a_n)_{n\geq 1}$ pozitif dizisi ve $\psi_i \in C\left(\mathbb{R}^+\right), i = 1,2,...,l$ fonksiyonu mevcut olsun. Bu koşullar altında $\delta = \left(\delta(n)\right)_{n\geq 1}$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere uyarlanmış ayrık operatörü $x \geq 0$ ve $f \in F$ için

$$L_{n,\delta}\left(f;x\right) = \sum_{k=0}^{[a_n(x+\delta(n))]} \phi_{n,k} \, f\left(\frac{k}{a_n}\right),$$

şeklindedir.

Lemma 3.1.3. $n \in \mathbb{N}$ için $\left(L_n f\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k}(x) f\left(x_{n,k}\right)$ operatörü

$$x_{n,k} = \frac{k}{a_n} \leq k \;\; \left(k \in \mathbb{N}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

$$\psi(n,x)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\psi_i(x)}{a_n^i},\ x\geq 0$$

şartlarını sağlasın ve K, $\mathbb{R}^+$ nın kompakt bir alt aralığı olsun. Eğer $\psi_i \in C^{2m-2}(\mathbb{R}^+), i=1,2,3,...,l$ ise $2m$ inci merkezi moment

$$\zeta_{n,2m}(x)\leq\frac{C(m,K)}{a_n{}^m},\ x\in K$$

eşitsizliği sağlanır. $C(m,K)$ yalnızca m ye bağlı bir sabittir [48].

3.2. Uyarlanmış Ayrık Operatörün Korovkin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, γ ıncı mertebeden $\alpha\beta-$istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak uyarlanmış ayrık operatörün Korovkin yaklaşım özellikleri incelendi [49].

Teorem 3.2.1. $L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}(x)f(x_{n,k})$ olsun. K, $\mathbb{R}^+$ nın kompakt bir alt aralığı olmak üzere, eğer K üzerinde

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\Psi(n,x)=0 \ \text{(düzgün)}$$

ise her $f\in F$ için

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f;x)-f(x)\right\|_{C(K)}=0$$

dır.

İspat: $L_n\left(e_0;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}=e_0$ ve $L_n\left(e_1;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}x_{n,k}=e_1$ olduğundan

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(e_0;x\right)-e_0\right\|=0\,,$$

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(e_1;x\right)-e_1\right\|=0$$

dir. $r\in\mathbb{N}_0$ için

$$\zeta_{n,r}\left(x\right)=L_n\left(\left(e_1-xe_0\right)^r;x\right)$$

olduğu bilindiğine göre $r=2$ için

$$\psi\left(n,x\right)=\zeta_{n,2}\left(x\right)=L_n\left(\left(e_1-xe_0\right)^2;x\right)$$

yazılabilir. L_n lineer operatör olduğundan

$$\psi\left(n,x\right)=L_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)=L_n\left(t^2;x\right)-2xL_n\left(t;x\right)+x^2L_n\left(1;x\right)$$

dir. $L_n\left(t;x\right)=x$ olduğundan,

$$\psi\left(n,x\right)=L_n\left(\mathrm{e}_2;x\right)-x^2$$

dir. O halde,

$$\left\|\psi\left(n,x\right)\right\|_{C(K)}=\left\|L_n\left(\mathrm{e}_2;x\right)-e_2\right\|_{C(K)}$$

dir. $st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\Psi(n,x)=0$ (düzgün) olduğundan

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(\mathrm{e}_2;x)-e_2\right\|_{C(K)}=0$$

dir. Teorem 2.3.1 gereğince

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f;x)-f(x)\right\|_{C(K)}=0$$

elde edilir.

Süreklilik modülü kullanılarak $L_n\left(f;x\right)$ operatörünün γ ıncı mertebeden $\alpha\beta-$istatistiksel düzgün yakınsaklığından bahsedildi.

Her $f\in C_B\left(\mathbb{R}^+\right)$, $x\geq 0$ ve $\delta>0$ için $L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}(x)f(x_{n,k})$ olsun. Süreklilik modülünün özelliklerini ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}(x)\left|f(x_{n,k})-f\left(x\right)\right| \\ &\leq \left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}(x)\left|f(x_{n,k})-f\left(x\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\omega\left(f;\delta\right) \\ &\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\psi\left(n,x\right)}\right)\omega\left(f;\delta\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer, $\delta=\delta_n=\left[\psi\left(n,x\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ olarak seçilirse

$$\left\|L_n\left(f;.\right)-f\right\|\leq 2\omega\left(f;\delta_n\right)$$

bulunur. $st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\Psi(n,x)=0$ olduğundan,

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{n,k}(x)f(x_{n,k})$$

operatörünün yakınsaklık hızına sahip olduğu görülür.

$m \in \mathbb{N}_0$, $x \geq 0$ için $\omega_m(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^{2m}\right)}$ olmak üzere; her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$E_m := \left\{ f \in C\left(\mathbb{R}^+\right) : \|f\|_m := \sup_{x\geq 0} \omega_m(x) \left| f(x) \right| < \infty \right\}$$

olarak alınırsa, bu bilgiler altında aşağıdaki teorem mevcuttur:

Teorem 3.2.2. $L_{n,\delta}(f;x) = \sum\limits_{k=0}^{[a_n(x+\delta(n))]} \phi_{n,k}(x) f\left(\dfrac{k}{a_n}\right)$ olsun.

Eğer $\psi_i \in C^{2m-2}(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, l$ ve

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}\,\delta(n) = \infty$$

ise her $f \in E_m \cap F$ için

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma} - \lim_{n\to\infty} \left\| L_{n,\delta}(f;x) - f(x) \right\|_{C(K)} = 0$$

dır.

İspat: A ve B pozitif sabitler olmak üzere, $t \geq 0$, $x \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ için

$$t^{2m} < 2^{2m-1}\left(x^{2m} + (t-x)^{2m}\right)$$

eşitsizliği kullanarak $|f| \leq A + Be_{2m}$ elde edilir. O halde,

$$\left| f(t) \right| \leq A + B\left(2^{2m-1}\left(x^{2m} + (t-x)^{2m}\right)\right)$$

$$= A + B2^{2m-1}x^{2m} + B2^{2m-1}(t-x)^{2m}$$

$$= g_m(x) + 2^{2m-1}B(t-x)^{2m}$$

dir. Bu eşitsizlikten, $k \in \mathbb{N}_0$, $x \geq 0$ için

$$\left| f\left(\frac{k}{a_n}\right) \right| \leq g_m(x) + 2^{2m-1}B\left(\frac{k}{a_n} - x\right)^{2m} \tag{3.2.1}$$

yazılabilir. x, $\delta(n)$ ve a_n pozitif olduğundan, eğer

$$k \geq \left[a_n\left(x+\delta(n)\right)\right]+1$$

ise

$$\frac{k}{a_n} \geq x$$

dir. Dolayısıyla,

$$\left\{k \in \mathbb{N}_0 : k \geq \left[a_n\left(x+\delta(n)\right)\right]+1\right\} \subset \left\{k \in \mathbb{N}_0 : \left|\frac{k}{a_n} - x\right| > \delta(n)\right\} := I_{n,x,\delta} \tag{3.2.2}$$

olur. $R_n := L_n - L_{n,\delta}$ olsun. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitsizlikleri göz önüne alınarak,

$$\left|R_n(f;x)\right| = \left| \sum_{k=\left[a_n\left(x+\delta(n)\right)\right]+1}^{\infty} \phi_{n,k} f\left(\frac{k}{a_n}\right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=\left[a_n\left(x+\delta(n)\right)\right]+1}^{\infty} \phi_{n,k} \left[g_m(x) + 2^{2m-1}B\left(\frac{k}{a_n} - x\right)^{2m} \right]$$

$$\leq \sum_{k\in I_{n,x,\delta}}^{\infty} \phi_{n,k} g_m(x) + 2^{2m-1} B \sum_{k\in I_{n,x,\delta}}^{\infty} \phi_{n,k} \left(\frac{k}{a_n} - x\right)^{2m}$$

$$\leq g_m(x) \frac{1}{\delta^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k} \left(\frac{k}{a_n} - x\right)^{2m} + 2^{2m-1} B \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k} \left(\frac{k}{a_n} - x\right)^{2m}$$

$$= g_m(x) \frac{1}{\delta^{2m}} \zeta_{n,2m}(x) + 2^{2m-1} B \zeta_{n,2m}(x)$$

elde edilir. $\zeta_{n,2m} \leq \dfrac{C(m,K)}{a_n^m}$ eşitsizliğinden,

$$|R_n(f;x)| = \left(g_m(x) \frac{1}{\delta^{2m}(n)} + 2^{2m-1} B \right) \frac{C(m,K)}{a_n^m}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte K üzerinden norm alınırsa,

$$\|R_n(f;x)\|_{C(K)} = \|g_m\| C(m,K) \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}\,\delta(n)} \right)^{2m} + 2^{2m-1} B \frac{C(m,K)}{a_n^m}$$

olur. $\varepsilon > 0$ için

$$A := \left\{ k \leq P_n^{\alpha,\beta} : \|R_n(f;\mathrm{x})\| \geq \varepsilon \right\}$$

$$A_1 := \left\{ k \leq P_n^{\alpha,\beta} : \left(\sqrt{a_k}\,\delta(k)\right)^{-2m} \geq \frac{\varepsilon}{2^{2m} \|g_m\| C(m,K)} \right\}$$

$$A_2 := \left\{ k \leq P_n^{\alpha,\beta} : a_k^{-m} \geq \frac{\varepsilon}{2^{2m} B C(m,K)} \right\}.$$

kümeleri tanımlı olsun:

$$A \subset A_1 \cup A_2$$

ve

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(A;\gamma\right)\leq\delta^{\alpha,\beta}\left(A_1;\gamma\right)+\delta^{\alpha,\beta}\left(A_2;\gamma\right)$$

Olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, $st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}\,\delta\left(n\right)=\infty$ ve $st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}a_n^{-1}=0$ olduğundan

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma}-\lim_{n\to\infty}\left\|L_{n,\delta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C(K)}=0$$

dır.

BÖLÜM 4. SZASZ OPERATÖRÜNÜN FIBONACCI DUNKL BENZERİ

Bu bölümde, yeni tanımlanan Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin [46] oluşturulup merkezi momentleri ve yaklaşım özellikleri incelendi. Ayrıca, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelendi.

4.1. Szasz Operatörünün Fibonacci Dunkl Benzeri

Tanım 4.1.1. Kabul edelim ki (f_n) Fibonacci dizisi ve $s_n(x)=x-\dfrac{1}{f_n}$ olsun. $n\in\mathbb{N}$ ve $x\geq 0$ için

$$F_n(f;x)=\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\,f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right),$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörlere Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri denir.

$\gamma_\mu\left(2k\right)=\dfrac{2^{2k}k!\Gamma\left(k+\mu+1/2\right)}{\Gamma\left(\mu+1/2\right)}$ ve $\gamma_\mu\left(2k+1\right)=\dfrac{2^{2k+1}k!\Gamma\left(k+\mu+3/2\right)}{\Gamma\left(\mu+1/2\right)}$ olmak üzere, genelleştirilmiş üstel fonksiyon

$$e_\mu(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\gamma_\mu\left(k\right)},$$

şeklinde tanımlandı [62].

$$\theta_k = \begin{cases} 0; & k \in 2\mathbb{N} \text{ ise} \\ 1; & k \in 2\mathbb{N}+1 \text{ ise} \end{cases}$$ olmak üzere $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\gamma_\mu(k+1) = \left(k+1+2\mu\theta_{k+1}\right)\gamma_\mu(k)$$

dır.

4.2. Szasz Operatörünün Fibonacci Dunkl Benzerinin Moment Tahminleri

Operatörün yaklaşım özelliklerini incelerken gerekli olan bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir:

Lemma 4.2.1. $F_n(f;x)$ Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri olsun.

1. $F_n(1;x) = 1$

2. $F_n(t;x) = s_n(x)$

3. $$F_n(t^2;x) = x^2 + \left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)\frac{x}{n} - \frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right) + \frac{1}{f_n}\left(\frac{1}{f_n}-2x\right)$$

dir.

İspat: Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin tanımı kullanılarak

$$F_n\left(1;x\right) = \frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)} = 1$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$k \in \mathbb{N}_0$ için $\gamma_\mu(k+1) = \left(k+1+2\mu\theta_{k+1}\right)\gamma_\mu(k)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
F_n(\mathrm{t};x) &= \frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{ne_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\left(k+2\mu\theta_k\right)\gamma_\mu(k-1)}\left(k+2\mu\theta_k\right) \\
&= \frac{1}{ne_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_\mu(k)} \\
&= \frac{ns_n(x)}{ne_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)} \\
&= s_n(x) \\
&= x-\frac{1}{f_n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$F_n(t;x) = s_n(x)$$

şartı sağlanmış olur.

θ_k nın tanımı kullanılarak elde edilen

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \left(-1\right)^k$$

eşitiliğinden,

$$\begin{aligned}
F_n(\mathrm{t}^2;x) &= \frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\left(k+2\mu\theta_k\right)\gamma_\mu(k-1)}\left(k+2\mu\theta_k\right)^2
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n^2 e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k-1)}\left(k+2\mu\theta_k\right)$$

$$=\frac{1}{n^2 e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_\mu(k)}\left(k+1+2\mu\theta_{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2 e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_\mu(k)}\left(k+1+2\mu\theta_k+2\mu\left(-1\right)^k\right)$$

$$=\frac{\left(ns_n(x)\right)}{n^2 e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k}}{\gamma_\mu(k)}\left(k+1+2\mu\theta_k+2\mu\left(-1\right)^k\right)$$

$$=\frac{\left(s_n(x)\right)}{ne_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k}}{\gamma_\mu(k)}\left(k+2\mu\theta_k\right)$$

$$+2\mu\frac{\left(s_n(x)\right)}{ne_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-ns_n(x)\right)^{k}}{\gamma_\mu(k)}$$

$$+\frac{\left(s_n(x)\right)}{ne_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k}}{\gamma_\mu(k)}$$

$$=\frac{\left(s_n(x)\right)}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^{k}}{\gamma_\mu(k)}\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)$$

$$+2\mu\frac{\left(s_n(x)\right)}{ne_\mu(ns_n(x))}e_\mu(-ns_n(x))+\frac{\left(s_n(x)\right)}{n}$$

$$=\left(s_n(x)\right)^2+\frac{2\mu}{n}\left(s_n(x)\right)\frac{e_\mu(-ns_n(x))}{e_\mu(ns_n(x))}+\frac{\left(s_n(x)\right)}{n}$$

$$=\left(x-\frac{1}{f_n}\right)^2+\frac{2\mu}{n}\left(x-\frac{1}{f_n}\right)\frac{e_\mu(-ns_n(x))}{e_\mu(ns_n(x))}+\frac{1}{n}\left(x-\frac{1}{f_n}\right)$$

$$=x^2+\left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-nr_n(x)\right)}{e_\mu\left(nr_n(x)\right)}\right)\frac{x}{n}-\frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-nr_n(x)\right)}{e_\mu\left(nr_n(x)\right)}\right)$$

$$+\frac{1}{f_n}\left(\frac{1}{f_n}-2x\right)$$

olduğu görülür.

Lemma 4.2.2. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ için

$$F_n(f;x) = \frac{1}{e_\mu(ns_n(x))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)} f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)$$

olmak üzere,

$$F_n(t-x;x) = -\frac{1}{f_n}$$

$$F_n\left((t-x)^2;x\right) = \frac{x}{n}\left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right) - \frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right) + \frac{1}{\left(f_n\right)^2}$$

dir.

İspat: F_n operatörünün lineerliği kullanılarak,

$$F_n(t-x;x) = F_n\left(t;x\right) - xF_n\left(1;x\right) = -\frac{1}{f_n}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1. yardımıyla

$$\begin{aligned}
F_n\left((t-x)^2;x\right) &= F_n\left(t^2;x\right) - 2xF_n\left(t;x\right) + x^2F_n\left(1;x\right) \\
&= x^2 + \left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)\frac{x}{n} - \frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{f_n}\left(\frac{1}{f_n} - 2x\right) - 2xs_n(x) + x^2 \\
&= 2x^2 + \left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)\frac{x}{n} - \frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\left(f_n\right)^2}-\frac{2x}{f_n}-2x\left(x-\frac{1}{f_n}\right)$$

$$=\left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)\frac{x}{n}-\frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)+\frac{1}{\left(f_n\right)^2}$$

eşitliği bulunur.

4.3. Korovkin Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin Korovkin yaklaşım teorisine uygulaması incelendi [46].

Teorem 4.3.1. $\mathrm{E}:=\left\{f : x\in\left[0,\infty\right), \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ yakınsak } x\to\infty \text{ iken}\right\}$ olmak üzere

$$F_n(f;x)=\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\,f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)$$

olsun. Eğer $f\in C[0,\infty)\cap E$ ise

$$st-\lim_{n\to\infty}F_n(f,x)=f(x)$$

$[0,\infty)$ aralığının her bir kompakt alt kümesinde düzgündür.

İspat: Teorem 4.2.2. den,

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_n(1,x)-1\right\|=0\,,$$

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_n\left(t;x\right)-x\right\|=0\,,$$

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_n\left(t^2;x\right)-x\right\|=0$$

olduğu aşikardır. Dolayısıyla klasik Korovkin teoremi gereğince Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaktır.

Teorem 4.3.2. $F_n(f;x)=\dfrac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\dfrac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)$ olsun. $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı uzayı $Q_\rho^k\left(\mathbb{R}^+\right)$ olmak üzere, $f\in Q_\rho^k\left(\mathbb{R}^+\right)$ için

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_n\left(f;x\right)-f\right\|_\rho=0$$

dir.

İspat: $F_n(1;x)=1$ olduğundan $st-\lim\limits_{n\to\infty}\left\|F_n(1,x)-1\right\|_\rho=0$ eşitliği kolaylıkla görülür. Teorem 4.2.1. i kullanılarak,

$$\left\|F_n\left(t;x\right)-x\right\|_\rho=\sup_{x\geq 0}\frac{\left|F_n\left(t;x\right)-x\right|}{1+x^2}\leq\frac{1}{f_n}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $st-\lim\limits_{n\to\infty}\left\|F_n(\mathrm{t},x)-x\right\|_\rho=0$ dır.

$$F_n(t^2;x)=x^2+\left(1+2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)\frac{x}{n}-\frac{1}{nf_n}\left(1-2\mu\frac{e_\mu\left(-ns_n(x)\right)}{e_\mu\left(ns_n(x)\right)}\right)+\frac{1}{f_n}\left(\frac{1}{f_n}-2x\right)$$

olduğundan,

$$\left\| F_n\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_\rho = \sup_{x\geq 0}\frac{\left|F_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2} \leq \frac{\left(f_n\right)^2+2\mu\left(f_n\right)^2+f_n+2\mu f_n+n+2nf_n}{n\left(f_n\right)^2}\sup_{x\geq 0}\frac{x}{1+x^2}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikte n üzerinden limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left\| F_n\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_\rho = 0$$

sonucuna ulaşılır.

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\| F_n(1,x)-1 \right\|_\rho = 0,\ st-\lim_{n\to\infty}\left\| F_n(\mathrm{t},x)-x \right\|_\rho = 0,\ \lim_{n\to\infty}\left\| F_n\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_\rho = 0$$

koşulları sağlandığına göre ağırlıklı Korovkin teoreminden

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\| F_n\left(f;x\right)-f \right\|_\rho = 0$$

olduğu görülür.

4.4. Yaklaşım Hızı

Bu bölümde $F_n\left(f;x\right)$ operatörünün, Bölüm 2 de tanımlanan ve özellikleri verilen süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelendi.

Teorem 4.4.1. $f\in Lip_M\left(\alpha\right)$, $0<\alpha\leq 1$ ve $M>0$ olsun. O halde,

$$\upsilon_n\left(x\right)=F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)$$

olmak üzere

$$\left|F_n\left(f;x\right)-f(x)\right|\leq M\left(\upsilon_n\left(x\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir.

İspat: $\left|F_n(f;x)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|$ ve

$\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\geq 0$, $\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\geq 0$ olduğundan

$$\left|F_n(f;x)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|$$

yazılabilir. $f\in Lip_M\left(\alpha\right)$ olduğundan Lipschitz sınıfından fonksiyonların tanımı kullanılarak,

$$\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^{\alpha}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik,

$$\left|F_n(f;x)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|$$

eşitsizliğinde kullanılmasıyla

$$\left|F_n(f;x)-f(x)\right| \le \frac{M}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^\alpha$$

$$= M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^\alpha\left(\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|F_n(f;x)-f(x)\right| \le M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^\alpha\left(\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$= M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$\le M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$= M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(F_n(1;x)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1. den

$$\left|F_n(f;x)-f(x)\right| \le M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= M\left(F_n\left(t-x\right)^2;x\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.2. $[0,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayı $\tilde{C}[0,\infty)$ ve $f\in\tilde{C}[0,\infty)\cap E$ olsun. $\delta_{n,x}=\sqrt{F_n\left((t-x)^2;x\right)}$ olmak üzere

$$\left|F_n\left(f;x\right)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

dir.

İspat: $\left|F_n(f;x)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|$ ve

$\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\ge 0$, $\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\ge 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|F_n(f;x)-f\left(x\right)\right|&=\left|\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\right|\\
&=\left|\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left(f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right)\right|\\
&\le\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün

$$\left|f(y)-f(x)\right|\le\left(\frac{|y-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$$

özelliği kullanılarak

$$\left|F_n(f;x)-f\left(x\right)\right|\le\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n(x)\right)^k}{\gamma_\mu(k)}\left|f\left(\frac{k+2\mu\theta_k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\left(1+\frac{\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\left(\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|}{\delta}\right)\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\omega(f;\delta)\left(1+\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|}{\delta}\right)$$

$$=\omega(f;\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)\right)$$

elde edilir. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)$ ifadesi düzenlenip Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{(ns_n(x))^k}{\gamma_\mu(k)}\frac{1}{e_\mu(ns_n(x))}\right)^{\frac{1}{2}}(F_n(1;x))^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{\left(ns_n\left(x\right)\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\frac{1}{e_\mu\left(ns_n\left(x\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Dolayısıyla, elde edilen bu son eşitsizlik

$$\left|F_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|=\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|\frac{\left(ns_n\left(x\right)\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\frac{1}{e_\mu\left(ns_n\left(x\right)\right)}\right)\right)$$

eşitliğinde yerine yazılarak

$$\left|F_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\frac{\left(ns_n\left(x\right)\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\frac{1}{e_\mu\left(ns_n\left(x\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{e_\mu\left(ns_n\left(x\right)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ns_n\left(x\right)\right)^k}{\gamma_\mu\left(k\right)}\left|\frac{k+2\mu\theta_k}{n}-x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

elde edilir. Eğer $\delta=\delta_{n,x}=\sqrt{F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}$ olarak seçilirse,

$$\left|F_n\left(f;x\right)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

elde edilir.

4.5. Voronovskaja Asimptotik Yaklaşım

Bu bölümde $F_n\left(f;x\right)$ operatörünün Voronovskaja asimptotik yaklaşımı incelendi.

Teorem 4.5.1. $F_n(f;x)$ Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri olsun. $C_B^2\left(\mathbb{R}^+\right)=\left\{h\in C_B\left(\mathbb{R}^+\right): h', h''\in C_B\left(\mathbb{R}^+\right)\right\}$ uzayı

$$\|h\|_{C_B^2\left(\mathbb{R}^+\right)}=\|h\|_{C_B\left(\mathbb{R}^+\right)}+\|h'\|_{C_B\left(\mathbb{R}^+\right)}+\|h''\|_{C_B\left(\mathbb{R}^+\right)}$$

normu ile tanımlı olmak üzere, her $h\in C_B^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ için

$$\left|F_n\left(h;x\right)-h\left(x\right)\right|\leq\left(\frac{1}{f_n}+\frac{F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}{2}\right)\|h\|_{C_B^2\left(\mathbb{R}^+\right)}$$

dir.

İspat: $h\in C_B^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ olsun. Taylor seri açılımında genelleştirilmiş ortalama değer teoremi kullanılırsa, $\xi\in\left(x,t\right)$ için

$$h\left(t\right)=h\left(x\right)+h'\left(x\right)\left(t-x\right)+h''\left(\xi\right)\frac{\left(t-x\right)^2}{2} \quad ,$$

olmak üzere eşitliğin her iki tarafına $F_n\left(f;x\right)$ lineer operatörü uygulanırsa;

$$F_n\left(h;x\right)-h\left(x\right)=h'\left(x\right)F_n\left(\left(t-x\right);x\right)+\frac{h''\left(\xi\right)}{2}F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)$$

elde edilir. Lemma 4.2.2. kullanılarak,

$$\left|F_n(h;x)-h(x)\right| \le \|h'\|_{C_B(\mathbb{R}^+)}\frac{1}{f_n}+\frac{\|h''\|_{C_B(\mathbb{R}^+)}}{2}F_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$\le \|h\|_{C_B^2(\mathbb{R}^+)}\frac{1}{f_n}+\frac{\|h\|_{C_B^2(\mathbb{R}^+)}}{2}F_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=\|h\|_{C_B^2(\mathbb{R}^+)}\left(\frac{1}{f_n}+\frac{F_n\left((t-x)^2;x\right)}{2}\right)$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.2. g fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü

$$\omega_2(\mathrm{g};\delta)=\sup_{0<t\le\delta}\left\|g(.+2t)-2g(.+t)+g(.)\right\|_{C_B[0,\infty)}$$

şeklinde tanımlı olsun. L, n ye bağlı pozitif bir sabit olmak üzere, her $g\in C_B[0,\infty)$ ve $x\in\mathbb{R}^+$ için

$$\left|F_n(g;x)-g(x)\right|\le 2L\left\{\omega_2\left(\mathrm{g};\sqrt{\frac{1}{2f_n}+F_n\left((t-x)^2;x\right)}\right)+\min\left(1,\frac{1}{2f_n}+F_n\left((t-x)^2;x\right)\right)\|g\|_{C_B[0,\infty)}\right\}$$

dir.

İspat: Teorem 4.5.1. ve Lemma 4.2.1. göz önüne alınarak, $g\in C_B[0,\infty)$, $h\in C_B^2[0,\infty)$ ve $x\in\mathbb{R}^+$ için

$$\left|F_n(g;x)-g(x)\right|\le\left|F_n(g-h;x)\right|+\left|F_n(h;x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right|$$

$$\le\|h-g\|_{C_B[0,\infty)}F_n(1;x)+\left(1+\frac{F_n\left((t-x)^2;x\right)}{2}\right)\|h\|_{C_B^2[0,\infty)}+\|h-g\|_{C_B[0,\infty)}$$

$$= 2\left\|h-g\right\|_{C_B[0,\infty)} + \left(1+\frac{F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}{2}\right)\left\|h\right\|_{C_B^2[0,\infty)}$$

$$\leq 2K_2\left(g,\frac{1}{2}+F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right)$$

$$\leq 2L\left\{\omega_2\left(\mathrm{g};\sqrt{\frac{1}{2}+F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}\right)+\min\left(1,\frac{1}{2}+F_n\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right)\left\|g\right\|_{C_B[0,\infty)}\right\}$$

dir.

BÖLÜM 5. SZASZ OPERATÖRÜNÜN q −FIBONACCI DUNKL BENZERİ

Bu bölümde, Szasz operatörünün $q-$Fibonacci Dunkl benzeri tanımlandı ve q-analizin gösterim ve yöntemleri kullanılarak Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin yaklaşım özellikleri incelendi [47].

5.1. Szasz Operatörünün q −Fibonacci Dunkl Benzerinin Tanımı

Tanım 5.1.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (f_n) Fibonacci dizisi, $x \geq 0$, $0 < q < 1$, $s_n(x) = x - \dfrac{1}{f_n}$ olmak üzere Szasz operatörünün $q-$Fibonacci Dunkl benzeri

$$F_{n,q}(f;x) = \frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)} f\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)$$

dir. Buradaki genelleştirilmiş üstel fonksiyonun $q-$benzeri, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\gamma_{\mu,q}(k+1) = \left(\frac{1-q^{k+1+2\mu\theta_{k+1}}}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k)$$

olmak üzere, $\mu > -1/2$ ve $0 < q < 1$ için

$$e_{\mu,q}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}$$

şeklinde [25] tanımlandı. Eğer $q \to 1$ alınırsa, Bölüm 4 deki Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzeri elde edilir.

Lemma 5.1.2. $\theta_k = \begin{cases} 0; & k \in 2\mathbb{N} \text{ ise} \\ 1; & k \in 2\mathbb{N}+1 \text{ ise} \end{cases}$ olmak üzere ;

$$\left[2\mu\theta_{k+1} + k + 1\right]_q = \left[2\mu\theta_k + k\right]_q + q^{2\mu\theta_k + k}\left[2\mu\left(-1\right)^k + 1\right]_q$$

eşitliği sağlanır [63].

5.2. Szasz Operatörünün q −Fibonacci Dunkl Benzerinin Moment Tahminleri

$F_{n,q}\left(f;x\right)$ operatörünün yaklaşım özelliklerini incelerken gerekli olan bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir:

Lemma 5.2.1. Szasz operatörünün $q-$Fibonacci Dunkl benzeri $F_{n,q}(f;x)$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

1. $F_{n,q}(1;x) = 1$

2. $F_{n,q}(t;x) = s_n(x)$

3. $(s_n(x))^2 + \frac{s_n(x)}{[n]_q}[1+2\mu]_q(1+q^{2\mu}) \geq F_{n,q}(t^2;x)$

$$F_{n,q}(t^2;x) \geq (s_n(x))^2 + \frac{s_n(x)}{[n]_q} q^{2\mu}[1-2\mu]_q \frac{e_{\mu,q}\left([n]_q q s_n(x)\right)}{e_{\mu,q}\left([n]_q s_n(x)\right)}(1+q^{2\mu}) \; .$$

İspat: $F_{n,q}(f;x)=\dfrac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\, f\left(\dfrac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)$ eşitliğinde

$f\left(t\right)=1$ ise,

$$F_{n,q}(1;x)=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}=1$$

dir. $\gamma_{\mu,q}(k+1)=\left(\dfrac{1-q^{k+1+2\mu\theta_{k+1}}}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k)$ bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
F_{n,q}\left(t;x\right)&=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\\
&=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\left(\dfrac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k-1)}\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\\
&=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\left(\dfrac{1}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k-1)}\frac{1}{1-q^n}\\
&=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k-1)}\frac{1-q}{1-q^n}\\
&=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k-1)}\frac{1}{[n]_q}\\
&=\frac{[n]_q s_n(x)}{[n]_q e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k-1}}{\gamma_{\mu,q}(k-1)}\\
&=s_n(x)
\end{aligned}$$

bulunur. $F_{n,q}\left(t^2;x\right)$ için,

$$F_{n,q}\left(t^2;x\right)=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k-1)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\left(\frac{1}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k-1)}\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{\left(1-q^n\right)^2}$$

$$=\frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k-1)}\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{(1-q)}$$

$$=\frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\frac{1-q^{2\mu\theta_{k+1}+k+1}}{(1-q)}$$

dır. Lemma 5.1.2. ve yukarıdaki son eşitlik kullanılarak;

$$F_{n,q}\left(t^2;x\right)=\frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\left[2\mu\theta_k+k\right]_q+q^{2\mu\theta_k+k}\left[2\mu\left(-1\right)^k+1\right]_q\right)$$

$$=\frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(q^{2\mu\theta_k+k}\left[2\mu\left(-1\right)^k+1\right]_q\right)$$

$$=\frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)\right)$$

$$+\frac{\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+1}}{\gamma_{\mu,q}(2k)}q^{2\mu\theta_{2k}+2k}$$

$$+\frac{\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+2}}{\gamma_{\mu,q}(2k+1)}q^{2\mu\theta_{2k+1}+2k+1}$$

elde edilir ve son eşitlikte

$$\left[1-2\mu\right]_q \leq \left[1+2\mu\right]_q$$

eşitsizliği uygulanarak

$$F_{n,q}\left(t^2;x\right) \geq \frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)\right)$$

$$+\frac{\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+1}}{\gamma_{\mu,q}(2k)} q^{2\mu\theta_{2k}+2k}$$

$$+\frac{\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+2}}{\gamma_{\mu,q}(2k+1)} q^{2\mu\theta_{2k+1}+2k+1}$$

$$=\frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)\gamma_{\mu,q}(k-1)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)\right)$$

$$+\frac{[n]_q s_n(x)\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(q[n]_q s_n(x)\right)^{2k}}{\gamma_{\mu,q}(2k)}$$

$$+\frac{q^{2\mu}[n]_q s_n(x)\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(q[n]_q s_n(x)\right)^{2k+1}}{\gamma_{\mu,q}(2k+1)}$$

$$=\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^2}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k-1}}{\gamma_{\mu,q}(k-1)}\right)$$

$$+\frac{s_n(x)\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))} e_{\mu,q}\left(q[n]_q s_n(x)\right)$$

$$+\frac{q^{2\mu} s_n(x)\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))} e_{\mu,q}\left(q[n]_q s_n(x)\right)$$

$$=\left(s_n(x)\right)^2+\frac{s_n(x)\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q}\frac{e_{\mu,q}\left(q[n]_q s_n(x)\right)}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(1+q^{2\mu}\right)$$

olduğu görülür. Önceki sayfada gösterilen

$$
\begin{aligned}
F_{n,q}\left(t^2;\mathrm{x}\right) = {} & \frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)\right) \\
& +\frac{\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+1}}{\gamma_{\mu,q}(2k)}q^{2\mu\theta_{2k}+2k} \\
& +\frac{\left[1-2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+2}}{\gamma_{\mu,q}(2k+1)}q^{2\mu\theta_{2k+1}+2k+1}
\end{aligned}
$$

eşitlikte $\left[1-2\mu\right]_q \le \left[1+2\mu\right]_q$ eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
F_{n,q}\left(t^2;x\right) \le {} & \frac{1}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k+1}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q}\right)\right) \\
& +\frac{\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+1}}{\gamma_{\mu,q}(2k)}q^{2\mu\theta_{2k}+2k} \\
& +\frac{\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{2k+2}}{\gamma_{\mu,q}(2k+1)}q^{2\mu\theta_{2k+1}+2k+1} \\
= {} & \frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^2}{[n]_q^2 e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^{k-1}}{\gamma_{\mu,q}(k-1)}\right) \\
& +\frac{s_n(x)\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}e_{\mu,q}\left(q[n]_q s_n(x)\right) \\
& +\frac{q^{2\mu}s_n(x)\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}e_{\mu,q}\left(q[n]_q s_n(x)\right) \\
\le {} & \left(s_n(x)\right)^2+\frac{s_n(x)\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q}\left(1+q^{2\mu}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Lemma 5.2.2. Szasz operatörünün $q-$Fibonacci Dunkl benzeri

$$F_{n,q}(f;x)=\frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\, f\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)$$

olmak üzere,

$$F_{n,q}(t-x;x)=-\frac{1}{f_n},$$

$$F_{n,q}((t-x)^2;x)\leq\frac{1}{\left(f_n\right)^2}+\frac{1}{[n]_q}[1+2\mu]_q(1+q^{2\mu})$$

dir.

İspat: $F_{n,q}\left(f;x\right)$ operatörünün lineerliği kullanılarak,

$$F_{n,q}(t-x;x)=F_{n,q}\left(t;x\right)-xF_{n,q}\left(1;x\right)=-\frac{1}{f_n}$$

elde edilir. Lemma 5.2.1. yardımıyla

$$\begin{aligned}F_n\left((t-x)^2;x\right)&=F_n\left(t^2;x\right)-2xF_n\left(t;x\right)+x^2F_n\left(1;x\right)\\&\leq\left(s_n(x)\right)^2+\frac{s_n(x)\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q}\left(1+q^{2\mu}\right)-2xs_n(x)+x^2\\&=\frac{1}{\left(f_n\right)^2}+\frac{s_n(x)\left[1+2\mu\right]_q}{[n]_q}\left(1+q^{2\mu}\right)\end{aligned}$$

bulunur.

5.3. Szasz Operatörünün q −Fibonacci Dunkl Benzerinin Korovkin Teoremine Uygulaması

Teorem 5.3.1. $E := \left\{ f : x \in [0,\infty),\ \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ yakınsak } x \to \infty \text{ iken} \right\}$ olmak üzere

$$F_{n,q}(f;x) = \frac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)} f\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)$$

olsun. Eğer $f \in C[0,\infty) \cap E$ ise

$$st - \lim_{n\to\infty} F_{n,q}(f,x) = f(x)$$

$[0,\infty)$ aralığının her bir kompakt alt kümesinde düzgündür.

İspat: $F_{n,q}(1;x) = 1$ ve $F_{n,q}(\mathrm{t};\mathrm{x}) = \mathrm{s}_\mathrm{n}(\mathrm{x})$ eşitliklerinin sağlandığı daha önce gösterilmiştir. Dolayısıyla

$$st - \lim_{n\to\infty} \left\| F_{n,q}(1,x) - 1 \right\| = 0,$$

$$st - \lim_{n\to\infty} \left\| F_{n,q}(t,x) - x \right\| = 0$$

olduğu aşikardır.

$$F_{n,q}(t^2;x) \le (s_n(x))^2 + \frac{s_n(x)}{[n]_q}[1+2\mu]_q(1+q^{2\mu})$$

olduğundan

$$st-\lim_{n\to\infty} F_{n,q}\left(t^2;x\right)=x^2$$

$[0,\infty)$ aralığının her bir kompakt alt kümesinde düzgündür. O halde klasik Korovkin teoremi gereğince Szasz operatörünün q-Fibonacci Dunkl benzerinin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsadığı söylenir. Yani, $[0,\infty)$ aralığının her bir kompakt alt kümesinde

$$st-\lim_{n\to\infty} F_{n,q}(f,x)=f(x)$$

düzgündür.

Teorem 5.3.2. $F_{n,q}(f;x)=\dfrac{1}{e_{\mu,q}([n]_q s_n(x))}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)} f\left(\frac{1-q^{2\mu\theta_k+k}}{1-q^n}\right)$ olsun. $Q_\rho^k\left(\mathbb{R}^+\right)$, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı uzayı olmak üzere $f\in Q_\rho^k\left(\mathbb{R}^+\right)$ için

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}(f;x)-f\right\|_\rho=0$$

dır.

İspat: $F_{n,q}(1;x)=1$ olduğundan

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}(1,x)-1\right\|_\rho=0$$

eşitliği kolaylıkla görülür. $F_{n,q}(t;x)=s_n(x)=x-\dfrac{1}{f_n}$ eşitliği kullanılarak,

$$\left\|F_{n,q}(t;x)-x\right\|_\rho=\sup_{x\geq 0}\frac{\left|F_{n,q}(t;x)-x\right|}{1+x^2}\leq\frac{1}{f_n}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}(t,x)-x\right\|_{\rho}=0$$

dır.

$$F_{n,q}(t^2;x)\leq(s_n(x))^2+\frac{s_n(x)}{[n]_q}[1+2\mu]_q(1+q^{2\mu})$$

olduğundan,

$$\left\|F_{n,q}\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{\rho}=\sup_{x\geq0}\frac{\left|F_{n,q}\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2}$$
$$\leq\frac{\left(f_n\right)^2+2\mu\left(f_n\right)^2+f_n+2\mu f_n+[n]_q+2[n]_q f_n}{[n]_q\left(f_n\right)^2}\sup_{x\geq0}\frac{x}{1+x^2}$$

dir. Bu eşitsizlikte n üzerinden limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{\rho}=0$$

sonucuna ulaşılır.

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}(1,x)-1\right\|_{\rho}=0,\ st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}(\mathrm{t},x)-x\right\|_{\rho}=0,\ \lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{\rho}=0$$

koşulları sağlandığından ağırlıklı Korovkin teoreminden

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|F_{n,q}\left(f;x\right)-f\right\|_{\rho}=0$$

eşitliğinin varlığı söylenir.

5.4. Szasz Operatörünün q −Fibonacci Dunkl Benzerinin Yaklaşım Hızı

Teorem 5.4.1. $0<\alpha\leq 1,\ M>0\quad f\in Lip_M(\alpha)$ olmak üzere

$$\left|F_{n,q}(f;x)-f(x)\right|\leq M\left(F_{n,q}((\mathrm{t-x})^2;x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir.

İspat: Lipschitz fonksiyon tanımından

$$\left|F_{n,q}(f;x)-f(x)\right|\leq MF_{n,q}\left(|t-x|^{\alpha};x\right)$$

dir ve $F_{n,q}$ operatörünün lineerliğinden,

$$\left|F_{n,q}(f;x)-f(x)\right|=\left|\frac{1}{e_\mu\left([n]_q s_n(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}f\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}\right)\right.$$

$$\left.-f(x)\frac{1}{e_\mu\left([n]_q s_n(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{e_\mu\left([n]_q s_n(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(f\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}\right)-f(x)\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{e_\mu\left([n]_q s_n(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left|f\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}\right)-f(x)\right|$$

$$\leq M\frac{1}{e_\mu\left([n]_q s_n(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}-x\right|$$

eşitsizliği mevcuttur ve bu eşitsizlikte Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|F_{n,q}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$\times\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}-x\right|^{\alpha}$$

$$=M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}-x\right|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$\leq M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}-x\right|^2\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$=M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)\gamma_{\mu,q}(k)}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}-x\right|^2\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left(F_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir.

Teorem 5.4.2. $[0,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayı $C[0,\infty)$ ve $f\in C[0,\infty)\cap E$ olsun. O halde, $\delta_{n,x}=\sqrt{F_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}$ olmak üzere

$$\left|F_{n,q}\left(f;x\right)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

dır.

İspat: Süreklilik modülünün özelliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|F_{n,q}(f;x)-f(x)\right|=\left|\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}f\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right)\right.$$

$$\left.-f(x)\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(f\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right)-f(x)\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left|f\left(\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right)-f(x)\right|$$

$$\leq\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\left(1+\frac{\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\left(\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right|}{\delta}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right)\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\omega(f;\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right|\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\right)$$

$$=\omega(f;\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_{k}}}{1-q^{n}}\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{e_{\mu}\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)}\frac{\left(\left[n\right]_{q}s_{n}(x)\right)^{k}}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq \omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}\right|^2 \frac{1}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)}\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1-q^{k+2\mu\theta_k}}{1-q^n}\right|^2 \frac{1}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)}\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_\mu\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)}\frac{\left(\left[n\right]_q s_n(x)\right)^k}{\gamma_{\mu,q}(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(F_{n,q}\left(t-x\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

elde edilir. $\delta=\delta_{n,x}=\sqrt{F_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}$ olarak seçilirse,

$$\left|F_{n,q}\left(f;x\right)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

bulunur.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmı olan üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümde elde edilen sonuçlar özet olarak verildi.

Bölüm 3 ün ikinci kısmında uyarlanmış ayrık operatörün Korovkin yaklaşım özelliği, istatistiksel yakınsaklıktan daha genel olan γ ıncı mertebeden $\alpha\beta-$istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı ile birlikte incelendi [49].

Bölüm 4 ün ilk kısmında Szasz operatöründen esinlenerek yeni tanımlanan Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin tanımı verildi [46].

Bölüm 4 ün ikinci kısmında Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin birinci ve ikinci moment tahminleri verildi. Moment tahminlerini hesaplarken yardımcı olacak olan bazı eşitlikler verildi [46].

Bölüm 4 ün üçüncü kısmında ise Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin Korovkin yaklaşım özelliği verildi. Ayrıca ağırlıklı uzaylarda da, Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin Korovkin teoremi incelendi [46].

Bölüm 4 ün dördüncü kısmında, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin yaklaşım hızları incelendi [46].

Bölüm 4 ün son kısmında ise, Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin Voronovskaja asimpotik yaklaşımı incelendi [46].

Bölüm 5 in ilk kısmında, Bölüm 4 de tanımlanan Szasz operatörünün Fibonacci Dunkl benzerinin q genellemesi ile oluşan Szasz operatörünün q-Fibonacci Dunkl benzeri tanımlandı [47].

Bölüm 5 in ikinci kısmında Szasz operatörünün q-Fibonacci Dunkl benzerinin birinci, ikinci moment tahminleri incelendi [47].

Bölüm 5 in üçüncü kısmında Szasz operatörünün q-Fibonacci Dunkl benzerinin $C(0,\infty)\cap E$ uzayında Korovkin teoremine ve ağırlıklı uzaylarda Korovkin teoremine uygulaması verildi [47].

Bölüm 5 in son kısmında Szasz operatörünün q-Fibonacci Dunkl benzerinin farklı metodlarla yaklaşım hızı incelendi [47].

Bu çalışmalara benzer bir yol izlenerek, yeni bir pozitif lineer operatör tanımlanabilir. Tanımlanacak olan bu operatörün Korovkin teoremine uygulaması ve yaklaşım hızı incelenebilir.

Ayrıca Bölüm 5 de elde edilen sonuçlardan yararlanılarak Szasz operatörünün q-Fibonacci Dunkl benzerinin (p,q) genellemesi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Korovkin P. P., Linear operators and approximation theory, Hindustan Publ. Corp., India, 1960.

[2] Bernstein SN., Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilities, Commun. Soc. Math. Kharkow, 13, 1-2, 1912.

[3] Kirişçi M. Karaisa A., Fibonacci numbers, statistical convergence and applications, Journal of İnequalities and Applications, 229, 1-15, 2017.

[4] Canatan R., A note on the statistical approximation properties of the modified discrete operators, Open Journal of Discrete Mathematics, 2, 114-117, 2012.

[5] Canatan R., A note on the statistical approximation properties of the modified discrete operators, Open Journal of Discrete Mathematics, 2, 114-117, 2012.

[6] Aral A., A generalization of Szasz-Mirakya operators based on $q-$integers, Mathematical and Computer Modelling, 47, 1052-1062, 2008.

[7] Cai Q., Lian B., Zhou G., Approximation properties of $\lambda-$Bernstein operators, Journal of Inequalities and Applications, 61, 1-11, 2018

[8] Ostrovska S., On the Lupaş $q-$Analogue of the Bernstein Operators, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36, 1615-1629, 2006.

[9] Mishra V. N., Pandey S., Khan I. A., On a Modification of Dunkl generalization of Szasz operators via $q-$calculus, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 10, 1067-1077, 2017.

[10] Mursaleen M., Khan T., Nasiruzzaman Md., Approximating properties of generalized Dunkl analogue of Szasz operators, Applied Mathematics and Information Sciences, 10, 2023-2010, 2016.

[11] Lehnoff H. G., On a Modified Szasz-Mirakjan-Operators, Journal of Approximation Theory, 42, 278-282, 1984.

[12] İspir N., Atakut Ç., Approximation by modified Szasz-Mirakjan operators on weighted spaces, Proc. Indian Acad. Sci., 112, 571-578, 2002.

[13] Gürhan İ., Çekim B., Stancu-type generalization of Dunkl analogue of Szasz-Kantorovich operators, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39, 1083-1810, 2016.

[14] Gupta V., Rassias T. M., Direct estimates for certain Szasz type operators, Appl. Math. Comput., 251, 469-474, 2015.

[15] Finta Z., Gupta V., Approximation by q-Durrmeyer operators, J. Appl. Math. Comput., 29, 401-415, 2009.

[16] Aktaş R., Çekim B., Taşdelen F., A Dunkl analogue of operators including two-variable Hermite polynomials, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, doi.org/10.1007/s40840-018-0631-z, 2018.

[17] Szasz O., Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, J. Res. Natl. Bur. Stand., 45, 239-245, 1950.

[18] Sucu S., Dunkl Analogue of Szasz Operators, Applied Mathematics and Computation, 244, 42-48, 2014.

[19] Lupaş, A.. q-Analogue of the Bernstein operator. Babeş-Bolyai University, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 1987.

[20] Nowak G., Gupta V., The rate of pointwise approximation of positive linear operators based on q-integer, Ukr. Math. J., 63, 403-415, 2011.

[21] Wang H., Properties of convergence for ω, q-Bernstein polynomials, J. Math. Anal. Appl., 340, 1096-1108, 2008.

[22] Wang H., Properties of convergence for the q-Meyer-König and Zeller operators, J. Math. Anal. Appl., 335, 1360-1373, 2007.

[23] Aral A., Gupta V., Generalized q-Baskakov operators, Math. Slovaca, 61, 619-634, 2011.

[24] Phillips M. G., A generalization of the Bernstein polynomials based on the q-integers, Ann. Numer. Math., 4, 511-518, 1997.

[25] İçöz G., Çekim B. Dunkl generalization of Szász operators via q-calculus, Journal of Inequalities and Applications, 284,1-11, 2015.

[26] Steinhaus H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.

[27] Gadjiev A. D., Orhan C.,. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. of Math., 32, 129-138, 2002.

[28] Fridy J. A., Orhan C., Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math. 160, 45-51, 1993.

[29] Savaş E., Patterson R.F. ,Korovkin and Weierstrass Approximation via Lacunary Statistical Sequences, Journal of mathematics and statistics, 1 (2) 165-167, 2005.

[30] Mursaleen M., λ-statistical convergence, Math. Slovaca, 50, 111-115, 2000.

[31] Aktuğlu H., Korovkin type approximation theorems proved via $\alpha\beta$-statistically convergence, J. Comput. Appl. Math., 259, 174-181, 2014.

[32] Mursaleen M., Alotaibi A., Korovkin type approximation theorem for functions of two variable through statistical A-summability, Advances in Difference Equations 65, 1-10, 2012.

[33] Mursaleen M., Mohiuddine S. A., Korovkin type approximation theorem for function of two variables via statistical summability $(C,1)$, Acta Scientiarum, 37, 237-243, 2015.

[34] Mohiuddine S. A., Alotaibi A., Hazarika B., Weighted A-statistical convergence for sequences of positive linear operator, Hindawi Publishing Corporation the Scientific World, doi 10.1155/2014/437863, 2014.

[35] Karakaya V., Karaisa A., Korovkin type approximation theorems for weighted $\alpha\beta$-statistically convergence, Bull. Math. Sci, 5, 159-169, 2015.

[36] Mohiuddine S. A., An application of almost convergence in approximation theorems, Appl. Math. Lett., 23, 1382-1387, 2010.

[37] Mohiuddine S. A., Alotaibi A., Statistical convergence and approximation theorems for function of two variables, J. Comput. Anal. Appl., 15, 218-223, 2013.

[38] Mohiuddine S. A., Alotaibi A., Mursaleen M., Statistical summability $(C,1)$ and a Korovkin type approximation theorem, J. Inequal. Appl., 172, 1-8, 2012.

[39] Belen C., Mursaleen M., Yıldırım M., Statistical A-summability of double sequences and a korovkin type approximation theorem, Bull. Korean Math. Soc, 49, 851-861, 2012.

[40] Edely O. H. H., Mohiuddine S. A., Noman A. K., Korovkin type approximation theorems obtained through generalized statistical convergence, Appl. Math. Lett., 23, 1382-1387, 2010.

[41] Srivastava H. M., Mursaleen M., Khan A., Generalized equi-statistical convergence of positive linear operators and associated approximation theorems, Math. Comput. Mod., 55, 2040-2051, 2012.

[42] Mursaleen M., Alotaibi A., Statistical summability and approximation by de la Vallee-Poussin mean, Appl. Math. Lett., 24, 320-324, 2011.

[43] Mursaleen M., Ahmad R., Korovkin type approximation theorem through statistical lacunary summability, Iranian Journal of Sci. Technogly, 37, 99-102, 2013.

[44] Mohiuddine S. A., An application of almost convergence in approximation theorems, Appl. Math. Lett., 24, 1856-1860, 2011.

[45] Karaisa A., Statistical $\alpha\beta-$summability and Korovkin type approximation theorem, Filomat, 30, 3483-3491, 2016.

[46] Tok A. M., Kara E. E., Altundağ S., Some approximation theorems for Fibonacci Dunkl analogue of Szasz operators, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, (incelemede).

[47] Tok A. M., Kara E. E., Altundağ S., For new Szasz operators via $q-$Calculus, Filomat, (incelemede).

[48] Agratini O., On the convergence of truncated of operators, Bull. Inst. Math. Aca. 3, 213-223, 2013.

[49] Tok A. M., Kara E. E., Altundağ S., On the $\alpha\beta-$statistical convergence of the modified discrete operators, Advances in Difference Equations, 252, 1-6, 2018.

[50] Kreysing E. Introductory functional analysis with applications, Toronto 1978.

[51] Maddox I. J., Elements of functional analysis, Cambridge Univ. Press., 1970.

[52] Hacısalihoğlu H., Hacıyev A., Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, Ankara, 1995.

[53] Rudin W., Principles of Mathematical Analysis. Mcgraw-Hill, New York, 1953.

[54] Fast H., Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244, 1951.

[55] Duman O., Orhan C., Statistical approximation by positive linear operators, Studia Mathematica, 161, 187-197, 2004.

[56] Korovkin P. P., On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S), 90, 961-964, 1953.

[57] Altomare F., Campiti M., Korovkin type approximation theory and its applications, De Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, New York 17 1994.

[58] Karakoç F., Szasz operatörünün Dunkl analoğunun Stancu tipi genellemesi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 2017.

[59] Ayık A., Charlier polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin Kantrovich tipi genelleştirilmesi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 2018.

[60] Lorentz, G.G., Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto, 1953.

[61] Kac V., Cheugn P., Quantum calculus, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

[62] Cheikh B., Gaied Y., Zaghouani M., $q-$Dunkl-classical $q-$Hermite type polynomials, Georgian Math. J., 21, 125-135, 2014.

[63] Mursaleen M., Nasiruzzaman Md., Alotaibi A., On modified Dunkl generalization of Szasz operators via $q-$ calculus, Journal of Inequalities and Applications, 38, 1-12, , 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Merve Abay Tok, 19.06.1990'da Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2008'de Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne başlayıp 2012 yılında lisans eğitimini bitirdi. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans eğitimini 2014 yılında tamamladı. 2014 yılında doktora öğrenimine Sakarya Üniversitesinde Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda başladı.