T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN TOPLANABİLME METOTLARI

DOKTORA TEZİ

Rabia SAVAŞ

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	:	**Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**
Ortak Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Richard F. PATTERSON**

Aralık 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN TOPLANABİLME METOTLARI

DOKTORA TEZİ

Rabia SAVAŞ

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	TOPOLOJİ

Bu tez 20/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Ayhan ŞERBETÇİ
Jüri Başkanı

Doç. Dr.
Mahpeyker ÖZTÜRK
Üye

Doç. Dr.
Selma ALTUNDAĞ
Üye

Doç. Dr.
Önder Gökmen YILDIZ
Üye

Doç. Dr.
Mahmut AKYİĞİT
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Rabia SAVAŞ

6.12.2019

TEŞEKKÜR

Tüm zorluklarda sabrı ve cesaretlendirmeleri ile bana umut ve güven aşılayan danışmanım Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e bu tezin her aşamasında bana sağlamış olduğu tavsiye ve destekleri için teşekkür ederim. Dr. Öztürk'ün danışmanlığı olmadan bu uzun yolculuk tamamlanamazdı.

Ayrıca, eş danışmanım Prof. Dr. Richard F. PATTERSON'a daima ilham verici fikirleri, ufuk açıcı konuşmaları, danışmanlığı ve bu tez çalışmasında çalışılan problemle beni tanıştırdığı için en derin teşekkürlerimin kayda geçilmesi fırsatına sahip olduğum için çok mutluyum. Prof. Patterson'ın desteği olmadan bu tezin tamamlanması mümkün olmazdı, kendisine tüm destekleri için çok teşekkür ederim.

Bu çalışmada gösterilen çaba boyunca, her zaman bana destek olan hocam ve babam Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ'a ve "bilim sevgisinin kalbime ekildiğini ve diğer insanlara benden bunun miras kalacağını" bana hatırlatarak beni her zaman başarılı olmaya teşvik eden, yaptığım her işte desteği ile milletime ve diğer insanlara faydalı olmamı öğütleyen annem Dr. Asuman SAVAŞ'a en derin şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca, doktora öğrenimim boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı ve 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı kapsamında 2017-2019 yılları arasında, Amerika'nın Florida eyaletine bağlı Kuzey Florida Üniversitesinde (University of North Florida) doktora çalışmalarımı tamamlamama fırsat vererek finansal açıdan destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TUBITAK)'a çok teşekkür ederim.

Son olarak, bu çalışmaya dolaylı ya da dolaylı olmadan katkısı olan herkese en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\lvert B_m \rvert$	: B_m' nin eleman sayısı
χ_B	: B' nin karakteristik fonksiyonu
$\delta(B)$	: B kümesinin doğal yoğunluğu
$(C,1,1)$	: Cesáro toplanabilir çift dizilerin kümesi
$(y_{k,l})$	: Çift indisli dizi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\lvert \sigma_1 \rvert$	: Kuvvetli Cesáro toplanabilir dizilerin kümesi
W	: Kuvvetli toplanabilir lineer fonksiyonların kümesi
$[N_\theta]$	: Lacunary kuvvetli toplanabilir dizilerin kümesi
$N_{\theta_{s,v}}$	: Lacunary kuvvetli toplanabilir çift dizilerin kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
l_∞^2	: Sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$S(\mathcal{I})$	: Tüm $\mathcal{I}-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$y \overset{\ell}{\sim} w$	: $y=(y_k)$ ve $w=(w_k)$ dizilerinin asimptotik denkliği
$y \overset{P^2}{\sim} z$	: $y=(y_{k,l})$ ve $z=(z_{k,l})$ dizilerinin asimptotik denkliği
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	: $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç
$\mathcal{I}$	: $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
$\mathcal{I}_2$	: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
S_λ	: $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$[W,\lambda]$	: $\lambda-$kuvvetli toplanabilir lineer fonksiyonların kümesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Toplanabilme Teorisi, İstatistiksel Yakınsaklık, Pringsheim Anlamında Limit, Kuvvetli Toplanabilme, İki Değişkenli Ölçülebilir Fonksiyonlar.

Bu tez on bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölüm, ön kavramlar, temel tanımlar, örnekler ve bazı önemli iyi bilinen sonuçları içermektedir.

Üçüncü bölümde, çift diziler için çift istatistiksel sınırlılık ve çift lacunary istatistiksel sınırlılık kavramları sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, $(1,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan reel değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir iki fonksiyon göz önüne alınarak, α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_{\lambda}-$istatistiksel denk ve α dereceden kuvvetli $\mathcal{I}_{\lambda}-$asimptotik denk fonksiyonlar tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, Borwein`nin [5] sonuçları çift Cesáro toplanabilir fonksiyon uzaylarına genişletilmiştir.

Altıncı bölümde, $\lambda\mu-$çift asimptotik istatistiksel denklik ve kuvvetli $\lambda\mu-$çift asimptotik denklik kavramları iki değişkenli ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlanmıştır.

Yedinci bölümde, $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsak fonksiyonlar ve $\mathcal{I}_2-$çift lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların uzayı sunulmuş, bu kavramların kuvvetli toplanabilme teorisi ile ilişkisi incelenmiştir.

Sekizinci bölümün amacı, Gauge anlamında integrallenebilen fonksiyonlar ele alınarak toplanabilme teorisinde bazı sonuçlar elde edilmesidir.

Dokuzuncu bölümde, Pringsheim anlamında limit ve $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında Gauge anlamında integrallenebilen iki değişkenli ölçülebilir fonksiyonlar göz önüne alınarak toplanabilme teorisinin yeni yöntemleri tanımlanmıştır.

Son bölüm ise, sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

SUMMABILITY METHODS FOR TWO VARIABLES MEASURABLE FUNCTIONS

SUMMARY

Keywords: Summability Theory, Statistical Convergence, Pringsheim Limit, Strongly Summability, Gauge Integral, Two Variables Measurable Functions.

This dissertation comprises of ten chapters. The first section is devoted to the introduction.

Chapter 2 contains preliminary notions, basic definitions, examples and some significant well known results.

In Chapter 3, the notion of double statistical boundedness and double lacunary statistical boundedness for double sequences are presented.

In Chapter 4, by using two non-negative real valued Lebesgue measurable functions on $(1,\infty)$, the notions of asymptotically $\mathcal{I}_{\lambda}-$statistically equivalent of order α and strongly $\mathcal{I}_{\lambda}-$asymptotically equivalent of order α are introduced. In Chapter 5, Borwein`s [5] results is extended to multidimensional Cesáro type summable function spaces.

In Chapter 6, the notion of $\lambda\mu-$double asymptotically statistically equivalent and strongly $\lambda\mu-$double asymptotically equivalent function spaces for two variables measurable functions are presented.

In Chapter 7, $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$double statistical convergence of two variables functions and a new approach to the concept of $\mathcal{I}_2-$double lacunary statistical convergence are presented, and the relationship between those two concepts are examined.

The purpose of Chapter 8 is to obtain some results in Summability Theory by considering integrable functions in the Gauge sense.

In Chapter 9, the new methods of Summability Theory are introduced by considering Pringsheim limits and Gauge integrable two variables measurable functions defined on $(1,\infty)\times(1,\infty)$.

The last section is devoted to the results and recommendations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sonsuz diziler, yakınsama ve sonsuz serilerdeki konular temel analizde tanımlanır. Fakat, bir dizi veya seri ıraksak olduğunda, genellikle ilgi çekici bir konu sayılmaz. En basit örneği ile $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m$ alterne serisi, $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m = 1-1+1-1+\cdots$ olarak yazıldığında ilk bakışta sıfıra yakınsak olarak görünebilir. Fakat, kısmi toplamlar dizisi, sıfır ve birin salınımlı dizisidir. Dolayısıyla, bu seri yakınsak değildir. Her durumda, ıraksak diziler için bir dizi limitinin kavramı toplanabilme metoduna, dizi uzaylarının ve toplanabilme teorisinin bazı uygulama alanlarına genişletilebilir. Dizi uzayı çalışmaları, Niels Henrik Abel (1802-1829), Louis Cauchy (1789-1857), Ernesto Cesaro (1859-1906), Leonhard Euler (1707-1783), Otto Hölder (1859-1937), Peter Dirichlet (1805-1859), David Hilbert (1862-1943), Emile Borel (1871-1956) gibi ünlü matematikçilerin katkıda bulunduğu toplanabilme teorisinin klasik sonuçları olarak sunulmuştur. Buna ek olarak, 1928'de K. Knoop ve 1949'da G. H. Hardy, toplanabilme teorisinin geniş bir koleksiyonunu literatüre kazandırmıştır. Toplanabilme teorisinin en geniş uygulama ve araştırma alanlarından biri 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [15] ve Steinhaus [69] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık metodudur. Bu konuda aktif çalışmalar Fridy’ nin [20] çalışmasından sonra başlamıştır ve o zamandan beri geniş bir literatür koleksiyonu ortaya çıkmıştır. Bunun yanısıra, 20. yy.’ ın son çeyreğinde istatistiksel yakınsama kavramının sayılar teorisi [13], ölçüm teorisi [35], trigonometrik seriler [72], olasılık teorisi [11] ve yakınsama teorisi [22], [39] matematiğin farklı alanlarında önemli uygulamaları bulunmaktadır. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisi ile ilişkisi Connor [7], Et ve Nuray [14], Kolk [30], Duman ve Orhan [12], Kumar ve Mursaleen [26], Rath ve Tripathy [52], Freedman ve ark. [17], Fridy ve Orhan [21], Šalát [54] gibi sayısız yazarın çalışmaları ile incelenmiştir. Benzer şekilde, Zygmund [72] istatistiksel yakınsama kavramı ile kuvvetli toplanabilme arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Buna ek olarak, bu kavrama derece dahil edilerek, bir dizinin α dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımı ve α dereceden kuvvetli toplanabilirlik kavramı Çolak [9] tarafından tanımlanmıştır ve bu iki kavram arasındaki ilişki diziler için Çolak ve Bektaş [10] tarafından incelenmiştir. Diğer yandan, 1970 yılında, Bernstein [4], $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı $\mathcal{F}$ süzgeci ile ilişkili olarak dizilerin yakınsaklık kavramını tanımlamış ve Kostyrko ve ark. [31] tarafından ideal yakınsaklık kavramı $\mathcal{I}-$yakınsaklık kavramına genelleştirilmiştir. İdeal kavramının en önemli uygulamalarını görmek için [27], [28], [56], [57]' deki çalışmalara bakılabilir.

Günümüzde birçok bilim ve mühendislik dalında sıklıkla çift dizilere yani matris dizilerine rastlamaktayız ve tek diziler için tanımlanan genel yakınsama tanımlarının çift diziler üzerinde aktif rol oynamadığını görmekteyiz. Bu nedenle, bu gibi zorluklarla başa çıkabilmek için daha iyi bir araç ve uygun yöntem ile çalışılmayı sağlayacak bazı yeni ölçümlerin tanımlanması gerekmektedir. Bu amaçla, çift diziler için yakınsaklık kavramı ilk defa Pringsheim [50] tarafından tanımlanmıştır ve çift istatistiksel yakınsaklık kavramı bir çok matematikçi ([36], [37], [41], [45], [47], [55]) tarafından çalışılmıştır ve hala matematikçilerin ilgi alanı olmaya devam etmektedir.

2012 yılında, Belen ve Yıldırım [3] çift indisli dizilerde Pringsheim anlamında ideal yakınsaklık ve ideal kuvvetli toplanabilme kavramlarını tanımlamıştır. Diğer yandan, 1980 yılında, Pobyvanets [51] negatif terimli olmayan iki dizinin asimptotik denkliğini koruyan asimptotik regüler matris tanımını vermiştir. Dizilerde yer alan sıfır elemanlı terimlerin sık görülmesi, birçok durumda $\frac{y_k}{w_k}$ oranlamasını imkânsız hale getirmektedir. Bu sebeple, Fridy [19] yakınsama oranlarını karşılaştırmanın yeni yollarını ispatlamıştır. Buna ek olarak, 1993 yılında Marouf [34] asimptotik olarak eşdeğer ve asimptotik normal matris tanımlarını sunmuştur. 1997 yılında ise Li [32] dizilerin ve toplanabilirliğin asimptotik denkliğini çalışmıştır. Buna ek olarak, 2003 yılında, Patterson [46] negatif olmayan toplanabilir matrisler için bu tanımların asimptotik istatistiksel denkliğini tanımlamış ve bu kavramları daha da genişletmiştir. Ayrıca, çift asimptotik denklik kavramı 2002 yılında Patterson [47] tarafından tanımlanmıştır.

Diziler üzerinde çalışmalar devam ederken, Borwein [5], kuvvetli toplanabilir lineer fonksiyonları tanımlamıştır. Borwein'nin sonuçlarının ardından, Nuray [43], dizi yerine reel değerli ve $(1,\infty)$ aralığında tanımlı Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonları göz önüne alarak $\lambda-$ istatistiksel yakınsak fonksiyonları tanımlamıştır. Ayrıca, Connor ve Savaş [8] ölçülebilir fonksiyonlar için lacunary istatistiksel değişken açık yakınsaklık kavramını sunmuştur.

Her ne kadar reel analizin matematiksel alanı son yüzyılda büyük ölçüde ilerlemiş olsa da, integral teorisi meraklı konular arasındadır. Lebesgue integrali daha geniş fonksiyon sınıfını kapsamakta olduğundan ve Riemann integrali için geçerli olan daha genel yakınsaklık teoremleri Lebesgue integrali içinde sağlandığından, Lebesgue integralinin Riemann integralinden daha güçlü olduğu bilinmektedir. Ancak, Lebesgue integralini tanımlamak Riemann integraline göre teknik olarak daha karmaşıktır ve uygun olmayan (improper) integrali ve Lebesgue integrali karşılaştırıldığında, iki integral tekniğinden biri diğerinden daha genel değildir.

Diğer yandan, 1950'lerin sonlarında ve 1960'ların başlarında, Gauge integral kavramı, Kurzweil [29] ve Henstock [25] tarafından bağımsız olarak sunulmuştur. Gauge integralinin tanımı Lebesgue integralinin tanımlanmasından daha kolay ve Riemann integralinin tanımından görünüş bakımıyla biraz farklıdır, ancak tanımdaki bu küçük değişikliğin uygulama alanında çok büyük etkisi vardır. Gauge integrali, geometri, fizik, ekonomi, elektrik sistemleri gibi birçok pratik problemi çözen matematiksel bir araçtır. Ayrıca, Gauge integrali, dinamik sistemlerin modellenmesinde en önemli temellerden biridir [68]. Ancak, hem Gauge hem de toplanabilme teorisinin ezoterik olması nedeniyle, Gauge integralinin toplanabilme teorisinde ortaya çıkaracağı yeni metotlar ve sonuçlar bu zamana kadar incelenmemiştir. Bu nedenle literatürde bu alanda bir boşluk olduğu açıktır. Bu tez kapsamında, Gauge integrali ve toplanabilme teorisi arasındaki ilişki son bölüme kadar elde edilen sonuçlar göz önüne alınarak incelenecektir.

Yukarıda ifade edildiği gibi, son yıllarda yapılan yoğun çalışmalar, istatistiksel yakınsamanın önemini açıkça ortaya koymaktadır. Bu nedenle, bu tez çalışmasında, istatistiksel yakınsama, toplanabilme teorisi ve fonksiyonel analiz arasındaki ilişkinin incelenmesi ve literatürde var olan sonuçlardan daha genel sonuçların elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bu kapsamda, bu tez on bölümden oluşmaktadır.

İlk olarak, sonraki bölümlerde daha etkin sonuçlar elde etmek için gerekli olan çalışmamızla ilgili ön kavramlar, temel tanımlar, örnekler ve bazı iyi bilinen sonuçlar sunulmuştur. Daha sonrasında, çift istatistiksel sınırlılık ve çift lacunary istatistiksel sınırlılık kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, bu iki yeni kavram arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu tezin diğer bir bölümünde, $(1,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan reel değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir iki fonksiyon göz önüne alınarak α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_\lambda-$istatistiksel denk ve α dereceden kuvvetli $\mathcal{I}_\lambda-$asimptotik denk fonksiyonlar tanımlanmıştır ve bazı bağıntılar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, Borwein`in [5] sonuçları çift Cesáro toplanabilir fonksiyon uzaylarına genişletilmiştir. Ayrıca, çift fonksiyon uzayları için bazı önemli sonuçlar ortaya konmuştur. Bu tezin bir sonraki çalışmasında istatistiksel yakınsaklıklık kavramını genelleştirmek için $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında iki değişkenli ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar göz önüne alınarak, $\lambda\mu-$çift toplanabilir ve $\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsak fonksiyonlar tanımlanmıştır. Ayrıca, aynı bölümde iki değişkenli ölçülebilir fonksiyonlar için $\lambda\mu-$çift asimptotik istatistiksel denk ve kuvvetli $\lambda\mu-$çift asimptotik denk fonksiyonların uzayı da tanımlanmıştır. Buna ek olarak, bu kavramlar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir. Yedinci bölümde, iki değişkenli ölçülebilir fonksiyonlar için $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı $\mathcal{I}_2$ uygun ideal kavramı göz önüne alınarak kuvvetli $[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)-$çift toplanabilme kavramı ve $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsak fonksiyon uzaylarının tanımları verilmiştir. Bu kavramlar, aynı bölümün ikinci kısmındaki $\mathcal{I}_2-$çift lacunary istatistiksel yakınsak ve kuvvetli $\mathcal{I}_2-$çift lacunary toplanabilir fonksiyonların uzayına genelleştirilmiş ve yeni tanımlanan dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir. Sekizinci bölümde, $(1,\infty)$ aralığında ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar göz önüne alınarak genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık ve Gauge ile ilişkili olarak $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilme kavramı tanımlanmıştır. Buna ek olarak, açık gerektirmeler ve varyasyonlar sunulmuştur.

Ayrıca, $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında tanımlı iki değişkenli reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar ve Pringsheim limiti göz önüne alınarak, bir önceki bölümlerde tanımlanan bazı kavramlar Gauge anlamında çift kuvvetli Cesáro tipi toplanabilme kavramına genelleştirilmiştir. Ayrıca, bu tez kapsamında tanımlanan diğer iki boyutlu toplanabilme metotları ile arasındaki ilişki incelenmiştir.

Bu tezin sonunda, toplanabilme teorisi ve matematiğin ilgili alanlarında çalışan araştırmacılar için tez kapsamında elde edilen genel sonuçlar kısaca sunulmuştur.

BÖLÜM 2. TOPLANABİLME TEORİSİNDE TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, ileriki çalışmalarımız için önemli olan bazı temel gösterimler, ön hazırlık tanımları ve sonuçlar sunulmuştur.

Toplanabilme teorisinde önemli rol oynayan istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamak için doğal sayıların alt kümelerinin doğal yoğunluğu tanımı Fast [15] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1.1. [15] $\mathbb{N}$, bütün doğal sayıların kümesi, $B \subseteq \mathbb{N}$ ve $B_m = \{k \leq m : k \in B\}$ olsun. $|B_m|$, B_m kümesinin kardinalitesi olmak üzere, eğer $\frac{|B_m|}{m}$ dizisinin limiti mevcut ise B kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(B) = \lim_m \frac{1}{m}|B_m|$$

olarak tanmlanır.

Ayrıca, asimptotik yoğunluk kavramı, Šalát [54] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.2. [54] $B \subseteq \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ve ayrıca χ_B fonksiyonu B kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$p_m(B) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\chi_B(k)$$

olarak tanımlansın.

$$\underline{p}(B) = \liminf_{m\to\infty} p_m(B)$$

ve

$$\overline{p}(B) = \limsup_{m\to\infty} p_m(B)$$

sırasıyla B kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu olarak adlandırılır. Eğer $p(B) = \lim_{m\to\infty} p_m(B)$ limiti mevcut ise bu limite B kümesinin asimptotik yoğunluğu denir.

Örnek 2.1.3. $B = \{m^3 : m \in \mathbb{N}\}$ kümesi verilsin. Bu kümenin doğal yoğunluğu

$$\delta(B) = \lim_{m\to\infty}\frac{m}{m^3} = 0$$

olarak elde edilir.

Burada özellikle doğal yoğunluğu sıfır olan kümeler göz önünde bulundurulacaktır. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 2.1.4. [20] Eğer $y = (y_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir P özelliğini sağlıyorsa $y = (y_k)$ dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "$h.h.k$" şeklinde gösterilir.

Fast [15] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsak dizilerin tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.1.5. [15] Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m} \frac{1}{m}\left|\left\{k \le m : \left|y_k - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani $h.h.k$ için $\left|y_k - L\right| < \varepsilon$ ise $y = \left(y_k\right)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st - \lim y_k = L$ ile ifade edilir.

Her adi yakınsak dizi istatistiksel yakınsak olarak aynı sayıya yakınsamaktadır. Bu nedenle istatistiksel yakınsaklık kavramı, adi yakınsaklık kavramının doğal bir genellemesidir. Bunun yanı sıra, sınırlı olmayan diziler de istatistiksel yakınsak olabilir.

Örnek 2.1.6. [20] $y = \left(y_k\right)$ dizisi

$$y_k = \begin{cases} k, & k = l^2, \left(l = 1, 2, 3, ...\right) \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $y = \left(y_k\right)$ dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu dizi sınırlı değildir.

Örnek 2.1.7. [20] $y = \left(y_k\right)$ dizisi

$$y_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \left(m = 1, 2, 3, ...\right) \text{ ise,} \\ 5, & k \ne m^2 \text{ ise,} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $y = \left(y_k\right)$ dizisi için $st - \lim y_k = 5$ dir.

Örnek 2.1.8. [20] $y=(1,0,1,0,...)$ dizisi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Yakın zamanda, $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramı, Leindler [33] tarafından sunulan $[V,\lambda]-$toplanabilme kavramının genelleştirilmesi olarak Mursaleen [38] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.9. [38] $\lambda_{u+1}\leq\lambda_u+1$ ve $\lambda_1=1$ olacak şekilde $\lambda=(\lambda_u)$ dizisi pozitif sayıların ∞' a ıraksayan azalmayan bir dizisi olsun. $I_u=[u-\lambda_u+1,u]$ ve $B\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere B kümesinin $\lambda-$yoğunluğu

$$\delta_\lambda(B)=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\lambda_u}\left|\{k:u-\lambda_u+1\leq k\leq u \text{ ve } k\in B\}\right|$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $\lambda_u=u$ olduğu durumda, $\lambda-$yoğunluk doğal yoğunluğa indirgenir.

Tanım 2.1.10. [38] Her $\varepsilon>0$ için $B_\varepsilon=\{k:k\in I_u \text{ ve } |y_k-L|>\varepsilon\}$ olacak şekilde eğer $\delta_\lambda(B_\varepsilon)=0$ ve

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\lambda_u}\left|\{k:k\in I_u \text{ ve } |y_k-L|>\varepsilon\}\right|=0$$

oluyorsa $y=(y_k)$ dizisi L sayısına $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st_\lambda-\lim_{k\to\infty}y_k=L$ olarak yazılır ve bütün $\lambda-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir.

Örnek 2.1.11. $[\psi]$, $\psi\in\mathbb{R}$ deki en büyük tam sayı olmak üzere, 2 ile bölünebilen 1 ile k arasındaki sayıların toplam sayısı $\left[\frac{k}{2}\right]$ dir. Aynı şekilde, 3 ile bölünebilen 1 ile

k arasındaki sayıların toplam sayısı $\left[\frac{k}{3}\right]$ tür. Genel olarak, $\left(l \in \mathbb{N} \text{ için}\right)$ l ile bölünebilen 1 ile k arasındaki sayıların toplam sayısı $\left[\frac{k}{l}\right]$ ve $y = \left(y_k\right)$ dizisi

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k \text{ sayısı } l = \sqrt{k} \text{ ile bölünürse,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $y_k = \frac{1}{2}$ için 1 ile l arasındaki sayıların toplam sayısı $\left[\frac{k}{l}\right] = \left[\frac{k}{\sqrt{k}}\right] \leq \sqrt{k}$ olur ve bu değer sıfıra eşittir. Sonuç olarak, $\left|\left\{l : l \leq k \text{ ve } y_l \neq 0\right\}\right| \leq \sqrt{k}$ ve $st - \lim_{k \to \infty} y_k = 0$ dır.

Örnek 2.1.12. Eğer $k = m^2$ ise l nin m' den az olmasının dışında tam olarak $2l+1$ tam böleni vardır. $k = 36 = 6^2$ olsun. 4' ün 6' dan az olmasının dışında, bu tür bölenlerin toplam sayısı dokuz $\left(1,2,3,4,6,9,12,18,36\right)$ olacaktır. $y = \left(y_k\right)$ dizisini l nin bölen sayısı olduğu durumda aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 1 < k = m^2 \text{ ise,} \\ \frac{e^{-\frac{1}{k}}}{k}, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

O halde, $st_\lambda - \lim_{k \to \infty} y_k = 0$ olur.

2001 yılında, Volkov [71] Cesáro toplanabilir dizilerin kümesini tanımlamıştır. Buna ek olarak, bu kavram farklı Cesáro metotlarına aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Tanım 2.1.13. [71] $y=(y_k)$ dizisi için

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}y_k=L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $y=(y_k)$ dizisi L sayısına Cesáro toplanabilirdir denir.

Tanım 2.1.14. [17] $y=(y_k)$ dizisi için $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|y_k-L|=0$ olacak şekilde bir L sayısı varsa, $y=(y_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Cesáro toplanabilirdir denir. Kuvvetli Cesáro toplanabilir dizilerin uzayı

$$|\sigma_1|:=\left\{y=(y_k):\quad \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|y_k-L|\to 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.15. [7] ω, kompleks terimli tüm dizilerin kümesi olarak tanımlansın ve $y=(y_k)\in\omega$ olsun. Ayrıca, p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer $\lim_{m}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|y_k-L|^p=0$ olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, $y=(y_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli $p-$ Cesáro toplanabilirdir denir. Kuvvetli $p-$Cesáro toplanabilir dizilerin kümesi w_p ile gösterilir.

Diğer taraftan, lacunary dizi kavramı Freedman ve arkadaşları tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [17].

Tanım 2.1.16. [17] $\theta=(r_s)$ dizisi olmak üzere $r_0=0$ ve $s\to\infty$ iken $t_s=r_s-r_{s-1}\to\infty$ olacak şekilde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise

$\theta = (r_s)$ dizisine lacunary dizisidir denir ve θ tarafından belirlenen aralıklar $I_s = (r_{s-1}, r_s]$ olarak belirtilir.

Örnek 2.1.17. [17] $\theta = (r_s) = 2^s - 1$ dizisi bir lacunary dizisidir çünkü $r_0 = 2^0 - 1 = 0$ ve $s \to \infty$ için $t_s = r_s - r_{s-1} = (2^s - 1) - (2^{s-1} - 1) = 2^{s-1} \to \infty$ dir. Buna ek olarak, $r_0 = 0,\ r_1 = 1,\ r_2 = 3,\ r_3 = 7,\ r_4 = 15,\ \cdots$ olduğundan bu dizi negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisidir.

Freedman'ın tanımının ardından, 1993 yılında, Fridy ve Orhan [18] lacunary istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi incelenmiştir.

Tanım 2.1.18. [18] $\theta = (r_s)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $y = (y_k)$ dizisi için $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_s \frac{1}{r_s} \left| \left\{ k \in I_s : |y_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa $y = (y_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim y = L$ ile gösterilir.

Literatürde lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı iki farklı şekilde de tanımlanmıştır.

1) [39] $B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $\delta_\theta(B) = \lim_s \frac{1}{r_s} \left| \left\{ k \in I_s : k \in B \right\} \right|$ ifadesi B kümesinin $\theta -$yoğunluğunu göstermek üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için $B_\varepsilon := \left\{ k \in \mathbb{N} : |y_k - L| \geq \varepsilon \right\}$ kümesinin $\theta -$yoğunluğu sıfır; yani

$\delta_\theta\left(B_\varepsilon\right)=0$ ise $y=\left(y_k\right)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda, $S_\theta-\lim y=L$ dir.

2) [18] Her $\varepsilon>0$ için $B(\varepsilon)=\left|\left\{k\in\mathbb{N}:\left|y_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$ olmak üzere, eğer $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{\left|I_s\cap B(\varepsilon)\right|}{r_s}=0$ ise $y=\left(y_k\right)$ dizisi L sayısına $S_\theta-$yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.19. [18] $y=(y_k)$ kompleks ya da reel sayı dizisi içi $\theta=\left(r_s\right)$ bir lacunary dizisi olmak üzere, eğer $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{1}{r_s}\sum\limits_{k\in I_s}\left|y_k-L\right|=0$ olacak şekilde bir L sayısı varsa, $y=\left(y_k\right)$ dizisi L sayısına kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir ve kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayı

$$\left[N_\theta\right]:=\left\{y=\left(y_k\right):\ \lim_s\frac{1}{r_s}\sum_{k\in I_s}\left|y_k-L\right|=0\right\}$$

ile gösterilir.

Diğer yandan, 1980 yılında Pobyvanets [51] negatif terimli olmayan iki dizinin asimptotik denkliğini koruyan asimptotik regüler matris kavramını tanımlamıştır. Dizilerde yer alan sıfır elemanlı terimlerin sık görülmesi, birçok durumda $\dfrac{y_k}{w_k}$ oranlamasını imkânsız hale getirmektedir. Bu sebeple, Fridy [19] yakınsama oranlarını karşılaştırmanın yeni yollarını ispatlamıştır. Buna ek olarak, 1993 yılında Marouf [34] asimptotik olarak eşdeğer ve asimptotik normal matris tanımlarını sunmuştur. 1997 yılında ise Li [32] dizilerin ve toplanabilirliğin asimptotik denkliğini çalışmış ve 2003 yılında, Patterson [46] negatif olmayan toplanabilir matrisler için bu tanımların asimptotik istatistiksel denkliğini tanımlamış ve bu kavramları daha da genişletmiştir.

Tanım 2.1.20. [34] Negatif terimli olmayan $y=(y_k)$ ve $w=(w_k)$ dizileri için eğer $\lim_k \frac{y_k}{w_k}=1$ oluyorsa $y=(y_k)$ ve $w=(w_k)$ dizilerine asimptotik denk diziler denir ve $y\sim w$ ile gösterilir. Eğer limit değeri ℓ ise $y\overset{\ell}{\sim}w$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.21. [46] Negatif terimli olmayan $y=(y_k)$ ve $w=(w_k)$ dizileri verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\left|\left\{k\le m:\left|\frac{y_k}{w_k}-\ell\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

oluyorsa $y=(y_k)$ ve $w=(w_k)$ dizilerine asimptotik istatistiksel denk diziler denir ve $y\overset{S_\ell}{\sim}w$ ile gösterilir.

Ayrıca, pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{N}$' nin altkümelerinin $\mathcal{I}$ idealine dayanan $\mathcal{I}-$ yakınsaklık kavramı, istatistiksel yakınsaklık kavramının genellemesidir ve Kostyrko ve arkadaşları [31] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.22. [31] Eğer Y boştan farklı bir küme ve $\mathcal{I}\subset 2^Y$ kümelerinin bir ailesi

1) $\varnothing\in\mathcal{I}$,
2) $R,S\in\mathcal{I}$ için $R\cup S\in\mathcal{I}$,
3) $R\in\mathcal{I}$ ve her $S\subset R$ için $S\in\mathcal{I}$,

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{I}$ ailesine Y' nin ideali denir.

Tanım 2.1.23. [31] Eğer Y boştan farklı bir küme ve $\mathcal{F}\subset 2^Y$ kümelerinin bir ailesi

1) $\varnothing\notin\mathcal{F}$,

2) $R,S\in\mathcal{F}$ için $R\cap S\in\mathcal{F}$,

3) $R\in\mathcal{F}$, $R\subseteq S$ için $S\in\mathcal{F}$,

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine Y' nin süzgeci denir.

Tanım 2.1.24. [31] Eğer $\mathcal{I}\neq\emptyset$ ve $Y\notin\mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ idealine aşikâr olmayan (non-trivial) ideal denir.

Tanım 2.1.25. [31] Eğer $\mathcal{I}$ ideali Y' nin bir aşikâr olmayan ideali olmak üzere, $\mathcal{F}(\mathcal{I})=\{M\subset Y:\exists A\in\mathcal{I}: M=Y\setminus A\}$ kümelerinin ailesi Y' nin bir süzgecidir denir ve ideal ile ilişkili süzgeç olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.26. [31] $\mathcal{I}$, 2^Y de bir aşikar olmayan ideal olsun. Eğer $\{\{y\}:y\in Y\}\subset\mathcal{I}$ yani $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$' nin her sonlu alt kümesini kapsıyorsa, $\mathcal{I}$ 'ya uygun (admissible) ideal adı verilir.

Tanım 2.1.27. [31] $y=(y_k)$ bir reel sayı dizisi ve $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olmak üzere $\varepsilon>0$ için

$$A(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|y_k-\psi|\geq\varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ idealinin elemanı oluyorsa, $y=(y_k)$ dizisi $\psi\in\mathbb{N}$ sayısına $\mathcal{I}-$yakınsaktır denir ve $\psi=\mathcal{I}-\lim_k y_k$ ile gösterilir. ψ sayısı $y=(y_k)$ dizisinin limiti olarak isimlendirilir.

Kostyrko ve arkadaşlarının sonuçlarını kullanarak, Savaş ve Das [57] $\mathcal{I}-$istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}-\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.1.28. [57] $y=(y_k)$ bir reel sayı dizisi ve eğer her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m}\left|\left\{ k \leq m : \left| y_k - L \right| \geq \varepsilon \right\}\right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

ise yani her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{m}\left|\left\{ k \leq m : \left| y_k - L \right| \geq \varepsilon \right\}\right|$ dizisi sıfıra $\mathcal{I}-$yakınsak ise $y = (y_k)$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}-$istatistiksel yakınsaktır veya $S(\mathcal{I})-$yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.29. [57] $y = (y_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u}\left|\left\{ k \in I_u : \left| y_k - L \right| \geq \varepsilon \right\}\right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

ise $y = (y_k)$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}-\lambda-$istatistiksel yakınsak veya $S_\lambda(\mathcal{I})-$yakınsaktır denir.

$\mathcal{I}_{fin}$, $\mathbb{N}$' nin sonlu ideallerinin kümesi olmak üzere, eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{fin}$ olarak alınırsa $S(\mathcal{I})-$yakınsaklık ve $S_\lambda(\mathcal{I})-$yakınsaklık kavramları sırasıyla istatistiksel yakınsaklık ve $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramlarına denk gelir.

2.2. Çift Diziler İçin Bazı Temel Kavramlar

Bu bölümde, çift dizi ve çift diziler için yakınsaklık kavramları hakkında kısaca bilgi verilecektir.

Tanım 2.2.1. [1] Y boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to Y \\ &(k,l) \to h(k,l) = y_{k,l} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna bir çift indisli dizi denir.

Çift doğal yoğunluk ve çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramları sunulmadan önce, Pringsheim anlamında yakınsak olan çift indisli diziler için en iyi bilinen yakınsama kavramı aşağıdaki gibi verilmiştir [50].

Tanım 2.2.2. [50] $y=(y_{k,l})$ kompleks terimli bir çift indisli dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için $k,l\in N_\varepsilon$ olduğunda, $|y_{k,l}-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, y dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Kısaca, $y=(y_{k,l})$ dizisi $"P-yakınsak"$ dizidir denir. Bu durumda y dizisinin limiti $P-\lim y=L$ veya $y\xrightarrow{P}L$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. [1] $y=(y_{k,l})$ kompleks terimli bir çift indisli dizi olmak üzere

$$\sup_{k,l\geq 0}|y_{k,l}|<\infty$$

oluyorsa y dizisine sınırlıdır denir.

Tek değişkenli dizilerdeki durumun aksine Pringsheim anlamında yakınsak olan bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.4. [48] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun ve

$$y=(y_{k,l})=\begin{cases} l, & k=1 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan çift indisli y dizisi Pringsheim anlamında yakınsaktır fakat sınırlı değildir.

Tanım 2.2.5. [40] $E \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi ve $E(r,s)=\{(v,w)\in E : v\le r \text{ ve } w<s\}$ olsun. Eğer $\left(\frac{|E(r,s)|}{rs}\right)$ çift indisli dizisi Pringsheim anlamında bir limite sahip ise E kümesi bir çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$P-\lim_{r,s}\frac{|E(r,s)|}{rs}=\delta_2(E)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.6. [40] $E=\{(v^2,w^2): v,w\in\mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda

$$\delta_2(E)=P-\lim_{r,s}\frac{E(r,s)}{rs}\le P-\lim_{r,s}\frac{\sqrt{r}\sqrt{s}}{rs}=0$$

dır.

Ayrıca, Mursaleen ve Edely [40], [41] ve [42] de çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 2.2.7. [40] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\{(k,l): k\le r \text{ and } l\le s : |y_{k,l}-\ell|\ge\varepsilon\}$$

kümesi sıfır çift doğal yoğunluğu sahip ise $y=(y_{k,l})$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st_2-\lim y=\ell$ ile gösterilir.

Ayrıca, çift indisli diziler için istatistiksel Cauchy kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [42].

Tanım 2.2.8. [42] $y=\left(y_{k,l}\right)$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer $k,p\geq N$ ve $l,q\geq M$ olacak şekilde $M=M\left(\varepsilon\right)$ ve $N=N\left(\varepsilon\right)$ sayıları mevcut ve her $\varepsilon>0$ için

$$\left\{\left(k,l\right):k\leq r,l\leq s:\left|y_{k,l}-y_{p,q}\right|\geq\varepsilon\right\}$$

kümesi çift doğal yoğunluğa sahip ise $y=\left(y_{k,l}\right)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.2.9. [42] $y=\left(y_{k,l}\right)$ çift indisli dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul y dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

2014 yılında, çift indisli diziler için Cesàro toplanabilme kavramı Mursaleen ve Mohiuddine [42] tarafından tanımlanmış ve aşağıdaki gibi bazı sonuçlar da elde edilmiştir.

Tanım 2.2.10. [42] $y=\left(y_{k,l}\right)$ bir çift indisli dizisi olsun. Eğer

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{rs}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s}y_{k,l}=\ell$$

ise $y=\left(y_{k,l}\right)$ dizisi ℓ sayısına Cesáro toplanabilirdir denir. Bu koşullar altında bütün Cesáro toplanabilir çift indisli dizilerin uzayı $\left(C,1,1\right)$ ile gösterilir.

Eğer $y=\left(y_{k,l}\right)$ yakınsak dizisi sınırlı değil ise $y=\left(y_{k,l}\right)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır. Fakat Cesáro kuvvetli toplanabilir değildir.

Örnek 2.2.11. [42] $y=\left(y_{k,l}\right)$ çift indisli dizisi

$$y_{k,l}=\begin{cases} l, & k=1, \text{ her } l \text{ için},\\ k, & l=1, \text{ her } k \text{ için},\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde, $P-\lim_{k,l} y_{k,l}=0$ dır. Fakat

$$P-\lim_{r,s}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} y_{k,l}=P-\lim_{r,s}\frac{1}{rs}\frac{1}{2}\left(r^2+s^2+r+s-2\right)$$

ifadesi sonlu bir limite sahip olmadığından y dizisi Cesáro kuvvetli toplanabilir değildir. Diğer taraftan,

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{rs}\left|\left\{(k,l):\left|y_{k,l}-0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=P-\lim_{r,s}\frac{r+s-1}{rs}=0$$

olduğundan y dizisi 0' a istatistiksel yakınsaktır.

Eğer $y=\left(y_{k,l}\right)$ sınırlı dizisi istatistiksel yakınsak ise $(C,1,1)$ toplanabilirdir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek. 2.2.12. [42] $y=\left(y_{k,l}\right)$ çift indisli dizisi $\forall l$ için $y_{k,l}=(-1)^k$ olarak tanımlansın. O halde

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{rs}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} y_{k,l}=0$$

olur. Fakat $y=\left(y_{k,l}\right)$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Yakın zamanda, genelleştirilmiş de la Vallée-Pousin ortalaması Mursaleen ve ark. tarafından tanımlanmış ve bu tanım kullanılarak çift indisli diziler için istatistiksel yakınsama kavramından daha genel olan $\lambda\mu-$istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $(V,\lambda,\mu)-$toplanabilirlik kavramları aşağıdaki gibi vermiştir [41].

Tanım 2.2.13. [41] $\lambda=(\lambda_r)$ ve $\mu=(\mu_s)$ pozitif sayıların sonsuza ıraksayan azalmayan dizileri olsun. Ayrıca $\lambda_{r+1}\le\lambda_r+1,\ \lambda_1=1$ ve $\mu_{s+1}\le\mu_s+1,\ \mu_1=1$ olmak üzere, λ ve μ pozitif dizilerin kümesi Δ ile tanımlansın. Genelleştirilmiş de la Vallée- Poussin ortalaması $I_r=[r-\lambda_r+1,r]$ ve $J_s=[s-\mu_s+1,s]$ aralığında

$$t_{r,s}(y)=\frac{1}{\lambda_r\mu_s}\sum_{k\in I_r}\sum_{l\in J_s}y_{k,l}$$

dir.

Tanım 2.2.14. [41] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için $P-\lim\limits_{r,s}t_{r,s}\left(\left|y_{k,l}-\ell\right|\right)=0$ ise $y=(y_{k,l})$ dizisi ℓ sayısına $(V,\lambda,\mu)-$kuvvetli toplanabilirdir denir.

Tanım 2.2.15. [41] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{\lambda_r\mu_s}\left|\left\{k\in I_r,l\in J_s:\left|y_{k,l}-\ell\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $y=(y_{k,l})$ dizisi ℓ ye $(\lambda,\mu)-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st_{\lambda,\mu}-\lim_{k,l}y_{k,l}=\ell$ ile gösterilir.

Ayrıca, çift asimptotik denklik kavramını Patterson [47] tarafından aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.16. [47] Terimleri negatif olmayan $y=(y_{k,l})$ ve $z=(z_{k,l})$ çift indisli dizileri için $P-\lim_{k,l}\dfrac{y_{k,l}}{z_{k,l}}=1$ oluyorsa y ve z dizilerine asimptotik denk diziler denir ve $y\overset{P^2}{\sim}z$ ile gösterilir.

2006 yılında, Fridy ve Orhan'nın sonuçlarını kullanarak Savaş ve Patterson [58] aşağıdaki tanımları vermiştir.

Tanım 2.2.17. [58] $\theta_{s,v}=(r_s,u_v)$ çift dizisi için $r_0=0$, $s\to\infty$ iken $t_s=r_s-r_{s-1}\to\infty$ ve $u_0=0$, $v\to\infty$ iken $\bar{t}_v=u_v-u_{v-1}\to\infty$ olacak şekilde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise $\theta_{s,v}=(r_s,u_v)$ dizisine çift lacunary dizisi denir. Ayrıca $I_{s,v}=\{(k,l):r_{s-1}<k\le r_s \;\&\; u_{v-1}<l\le u_v\}$, $\xi_s=\dfrac{r_s}{r_{s-1}}$, $\bar{\xi}_v=\dfrac{u_v}{u_{v-1}}$, $\xi_{s,v}=\xi_s\bar{\xi}_v$, $r_{s,v}=r_su_v$ ve $t_{s,v}=t_s\bar{t}_v$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.18. [58] $\theta_{s,v}$ çift lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{s,v}\frac{1}{r_{s,v}}\sum_{(k,l)\in I_{s,v}}\left|y_{k,l}-L\right|=0$$

ise $y=(y_{k,l})$ çift indisli dizisi L sayısına lacunary kuvvetli toplanabilirdir denir. lacunary kuvvetli toplanabilir çift dizilerin uzayı $N_{\theta_{s,v}}$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2.19. [58] $\theta_{s,v}$ lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{s,v}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $y=\left(y_{k,l}\right)$ dizisi L sayısına lacunary çift istatistiksel yakınsaktır denir. Lacunary çift istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_{\theta_{s,v}}$ ile gösterilir.

Ayrıca, çift diziler için sınırlılık tanımı Savaş ve Patterson [58] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.2.20. [58] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer her k ve l için

$$\|y\|_{(\infty,2)}=\sup_{k,l}\left|y_{k,l}\right|<\infty$$

ise $y=(y_{k,l})$ dizisine sınırlı çift dizi denir. Çift indisli sınırlı dizilerin kümesi l_{∞}^{2} ile gösterilir.

2012 yılında, Belen ve Yıldırım [3] çift indisli dizilerde Pringsheim anlamında ideal yakınsaklık ve ideal kuvvetli toplanabilme kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.21. [3] $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir aşikar olmayan ideal olsun. Her bir $i,j\in\mathbb{N}$ için $\{i\}\times\mathbb{N}\in\mathcal{I}_2$ ve $\mathbb{N}\times\{i\}\in\mathcal{I}_2$ oluyorsa $\mathcal{I}_2$ idealine kuvvetli uygun ideal denir. Bir kuvvetli uygun ideal uygun idealdir.

Bu tezin diğer bölümlerinde kullanılan $\mathcal{I}_2$ ideali kuvvetli uygun ideal olarak göz önüne alınacaktır. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde

$$\mathcal{I}_0=\left\{B\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\left(\exists m\left(B\right)\in\mathbb{N}\right)\ \left(i,j\geq m\left(B\right)\Rightarrow\left(i,j\right)\notin B\right)\right\}$$

ideali bir kuvvetli uygun idealdir. $\mathcal{I}_2$ idealinin kuvvetli uygun ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}_0\subset\mathcal{I}_2$ olmasıdır.

Tanım 2.2.22. [3] $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun ideal ve $y=(y_{k,l})$ çift indisli bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$B(\varepsilon)=\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\left|y_{k,l}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $y=(y_{k,l})$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}_2-$yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_2-\lim_{k,l} y_{k,l}=L$ ile gösterilir.

Eğer $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathcal{I}_0$ olarak alınırsa, açık bir şekilde görülür ki ideal yakınsaklık ve Pringsheim anlamında adi yakınsaklık $\mathcal{I}_d=\left\{B\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\delta_2(B)=0\right\}$ koşulu altında çakışır.

Tanım 2.2.23. [3] $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde uygun bir ideal ve $y=(y_{k,l})$ çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{rs}\left|\left\{k\leq r,l\leq s:\left|y_{k,l}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $y=(y_{k,l})$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}_2-$istatistiksel yakınsaktır veya $S(\mathcal{I}_2)-$ yakınsaktır denir ve $y_{k,l}\xrightarrow{P}L\left(S(\mathcal{I}_2)\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.24. [3] $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde uygun bir ideal, $\lambda=(\lambda_r)\in\Delta$ ve $\mu=(\mu_s)\in\Delta$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_r\mu_s}\left|\left\{(k,l)\in I_{r,s}:\left|y_{k,l}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

oluyorsa $y=(y_{k,l})$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}_2-(\lambda,\mu)-$istatistiksel yakınsaktır veya $S_{\lambda,\mu}(\mathcal{I}_2)-$yakınsaktır denir ve $y_{k,l}\xrightarrow{P} L(S_{\lambda,\mu}(\mathcal{I}_2))$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.25. [3] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:|t_{r,s}(y)-L|\geq\delta\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $y=(y_{k,l})$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}_2-(V,\lambda,\mu)-$kuvvetli toplanabilirdir denir.

Tanım 2.2.26. [3] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\delta>0$ için

$$\{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:|c_{r.s}(y)-L|\geq\delta\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $y=(y_{k,l})$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}_2-(C,1,1)$ toplanabilirdir denir. Burada $c_{r,s}(y):=\dfrac{1}{rs}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s}y_{k,l}$ dir.

Eğer $\mathcal{I}_2$ idealini $\mathcal{I}_0$ ideali olarak alırsak, $S(\mathcal{I}_2)-$yakınsaklık, $S_{\lambda,\mu}(\mathcal{I}_2)-$ yakınsaklık, $\mathcal{I}_2-(V,\lambda,\mu)-$toplanabilme ve $\mathcal{I}_2-(C,1,1)-$toplanabilme kavramları sırayla, istatistiksel yakınsaklık, $(\lambda,\mu)-$istatistiksel yakınsaklık, $(V,\lambda,\mu)-$ toplanabilme ve $(C,1,1)-$toplanabilme ile çakışır.

Son olarak, sınırlı salınımlı çift indisli dizileri Patterson [49] aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.2.27. [49] $y=(y_{k,l})$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer r ve $s=0$ ve/veya 1 olmak üzere

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \left| y_{k,l} - y_{k-r,l-s} \right| < B$$

şeklinde pozitif bir B tamsayısı varsa $y = \left(y_{k,l} \right)$ dizisine sınırlı salınımlı dizidir denir.

2.3. Riemann İntegrali

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerdeki çalışmalar arasında ilişki kurmak amacıyla $\left[c, d \right]$ aralığında tanımlı reel ve sınırlı fonksiyonların Riemann anlamında integralleri kısaca tanımlanacak ve bilinen bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.3.1. [2] $h : \left[c, d \right] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu, $Q = \left\{ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \right\}$, $\left[c, d \right]$ kapalı aralığının bölüntüsü ya da parçalanması ve $\omega \in \left(y_{k-1,} y_k \right)$ için $h\left(\omega \right) = h_k$ olsun.

$$\int_a^b h\left(y \right) dy = \sum_{k=1}^{m} h_k \delta = h_1 \left(y_1 - y_0 \right) + \ldots + h_m \left(y_m - y_{m-1} \right)$$

sayısına h fonksiyonunun c' den d' ye kadar integrali denir.

Tanım 2.3.2. [2] $h : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $J = \left[c, d \right]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $\left[c, d \right]$ aralığı $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$ olacak şekilde $y_0, y_1, \ldots, y_m$ noktalarıyla m tane alt aralığa bölünsün. $Q = \left\{ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \right\}$ kümesine $\left[c, d \right]$ kapalı aralığının bölüntüsü adı verilir. $1 \le j \le m$ için $\delta > 0$ olacak şekilde $y_j - y_{j-1} < \delta$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $y_{j-1} \le \omega_i \le y_j$ için

$$\left|\sum_{j=1}^{m} h\left(\omega_j\right)\left(y_j - y_{j-1}\right) - A\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $A \in \mathbb{R}$ var ise h fonksiyonuna J aralığı üzerinde Riemann anlamında integrallenebilirdir denir. $\sum_{j=1}^{m} h\left(\omega_j\right)\left(y_j - y_{j-1}\right)$ toplamı Q bölüntüsü ve seçilen ω_j noktasıyla ilişkili olarak h fonksiyonunun bir Riemann toplamı olarak isimlendirilir. Ayrıca, A sayısı J aralığı üzerinde h fonksiyonunun Riemann integralidir denir ve ${}^{R}\int_J h(\omega)\,d\omega$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.3. [2] Dirichlet fonksiyonu, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olmak üzere,

$$d(y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & y \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Dirichlet fonksiyonu $[c,d]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir değildir.

Tanım 2.3.4. [53] Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\ell(J_k)$, J_k' nın uzunluğu olmak üzere

1) $B \subset \bigcup_k J_k$,
2) $\sum_k \ell(J_k) < \varepsilon$,

olacak şekilde $\{J_k\}$ açık aralıklarının sayılabilir bir kümesi bulunabilir ise B kümesinin ölçümü sıfırdır denir.

Örnek 2.3.5. [53] Her sınırlı kümenin ölçümü sıfırdır.

$B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ verilsin. Her $\varepsilon>0$ için $J_k=\left(b_k-\dfrac{\varepsilon}{3m},b_k+\dfrac{\varepsilon}{3m}\right)$ olsun. O halde, $B\subset\bigcup_{k=1}^{m}J_k$ ve $\sum_{k=1}^{m}l\left(J_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\dfrac{2\varepsilon}{3m}=\dfrac{2}{3}\varepsilon$ dır.

Örnek 2.3.6. [53] $B=\left\{\dfrac{1}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ kümesinin ölçümü sıfırdır.

Her $\varepsilon>0$ ve $J_m=\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{\varepsilon}{4\cdot 2^m},\dfrac{1}{m}+\dfrac{\varepsilon}{4\cdot 2^m}\right)$ olsun. O halde, $B\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}J_m$ ve $\sum_{m=1}^{\infty}\ell\left(J_m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\varepsilon}{2\cdot 2^m}=\dfrac{1}{2}\varepsilon$ dır.

2.4. Lebesgue İntegrali

Riemann, bir fonksiyonun integrallenebilir olduğunu garanti eden uygulanabilir tanımlar ve koşullar tanımlamış olsa da bazı fonksiyonların integrallenebilirliğini ifade etmek için bu çalışmalar yetersiz kalmıştır. Dolayısıyla 1902 yılında Henri Lebesgue bölgeyi dikey yerine yatay dilimlere ayıran bir yaklaşım ile Lebesgue integralini tanımlamıştır. Bu bölümde bir sonraki bölümlerde geliştirilecek olan kavramların temeli olan Lebesgue integrali ve ölçülebilir fonksiyonlar göz önüne alınarak bazı sonuçlar sunulacaktır.

Tanım 2.4.1. [53] h fonksiyonu $J=\left[c,d\right]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\alpha<h<\beta$ için $\left[\alpha,\beta\right]$ nin $Q=\left\{\left[y_{k-1},y_k\right]\right\}_{k=1}^{m}$ bölüntüsü ve $k=1,2,\dots,m$ için $E_k=\left\{\omega:y_{k-1}\le h\left(\omega\right)\le y_k\right\}$ olsun. $\left\{E_k\right\}_{k=1}^{m}$, $\left[c,d\right]$ nin birleşimi olan ayrık kümelerden oluşur. O halde, $m^*(E_k)$, E_k kümesinin ölçüsü olmak üzere alt ve üst Lebesgue toplamları, $S_{\underline{L}}(h,Q)=\sum_{k=1}^{m}y_{k-1}\cdot m^*(E_k)$ ve $S_{\overline{L}}(h,Q)=y_k\cdot m^*(E_k)$

olsun. Eğer alt ve üst Lebesgue toplamları birbirine eşit ise h fonksiyonu $[c,d]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirdir denir ve $L\int_J h(y)\,dy$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.2. [53] $d(y)$, Dirichlet fonksiyonu

$$d(y)=\begin{cases}1, & y\in\mathbb{Q},\\ 0, & y\notin\mathbb{Q},\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Dirichlet fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirdir.

Tanım 2.4.3. [53] $B\subset\mathbb{R}$ kümesi verilsin. Elemanları B kümesini örten aralıklar sınıfının her seçimi için sınıfı oluşturan aralıkların toplamı olan kümenin en büyük alt sınırına B kümesinin Lebesgue dış ölçüsü denir ve

$$\mu^*(B)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(J_k):\ \forall k \text{ için } J_k=(c_k,d_k) \text{ ve } B\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada $l(J)$, J aralığının uzunluğudur.

Tanım 2.4.4. [53] X, gerçek sayıların ölçülebilir bir alt kümesi ve $h: X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her aralığın h fonksiyonu altındaki ön görüntüsü ölçülebilir ise h fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyondur denir.

Bu tanım yeterince basit olmasına rağmen, aralık formlarının çeşitliliği bu durumu biraz zorlaştırabilir. Bu yüzden, yukarıdaki tanımı $h^{-1}((c,d))$ formunun ön görüntüsü olarak düşünerek kısıtlasak bile, işlemler gereksiz yere karmaşık hale gelebilir. Bu yüzden, bütün aralıkların ön görüntülerin ölçülebilir olma durumu

$h^{-1}\left((-\infty, c]\right)$ ve $h^{-1}\left((c, +\infty)\right)$ kümelerinin ölçülebilir olması durumu ile gösterilir [53].

Örnek 2.4.5. [53] $h(y)=|y|$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda bu fonksiyonun ön görüntüsü

$$h^{-1}\left((-\infty, c)\right)=\begin{cases}\varnothing & , \ c \leq 0 \text{ ise,} \\ (-c, c), & 0 < c \text{ ise,}\end{cases}$$

fonksiyonudur ve ölçülebilir bir küme olduğu için h fonksiyonu da ölçülebilir fonksiyondur.

Lemma 2.4.6. [53] g ve h fonksiyonları $[c, d]$ aralığında ölçülebilir fonksiyon ve k bir reel sayı olsun. O halde, $kg,\ g+h,\ \max\{g, h\}$ ve $\min\{g, h\}$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Tanım 2.4.7. [53] Eğer bir özellik bir kümesinin sıfır ölçümlü bir küme oluşturan noktaların dışındaki tüm noktalarda sağlıyorsa, bu özelliğe kümenin üzerinde hemen hemen her yerde $(h.h.h)$ sağlanıyor denir.

Reel değerli fonksiyonlar için aşağıdaki temel integral özellikleri sağlanır.

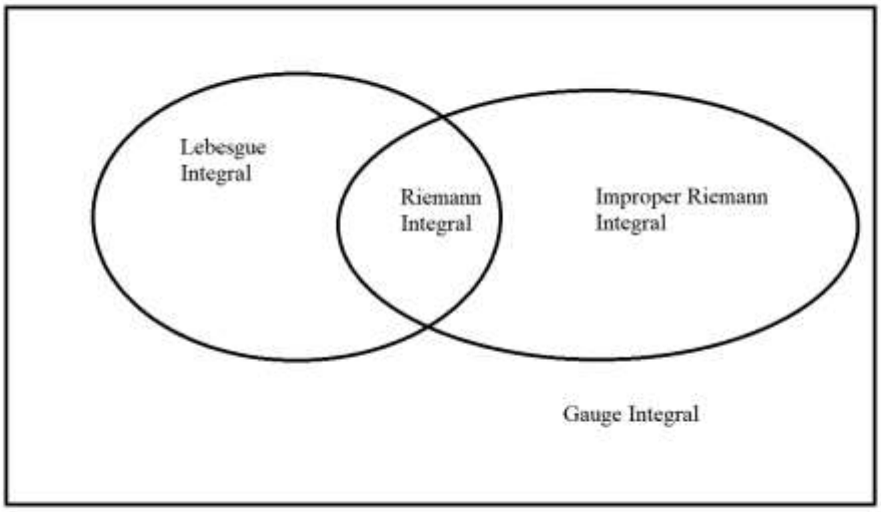
1) A kümesi ölçülebilir bir küme ve 1_A, A' nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\int_c^d 1_A = \lambda\left([c, d] \cap A\right)$ dir.
2) $\int_c^d \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int_c^d h_k$ dir.
3) Eğer $[c, d]$ aralığı üzerinde $g \leq h$ ise $\int_c^d g \leq \int_c^d h$ dir.

İlk iki özelliğin birleşiminden, $[c,d]$ aralığı üzerinde tanımlı ölçülebilir $\phi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot 1_{E_k}$ fonksiyonun integrali $\int_c^d \phi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \lambda\left([c,d] \cap E_k\right)$ dir. Eğer $Q = \left\{[y_{k-1}, y_k]\right\}_k$, h fonksiyonunun bir bölüntü aralığı ve $E_k = h^{-1}\left((y_{k-1}, y_k]\right)$ ise $\sum_k y_{k-1} \cdot 1_{E_k} \le h < \sum_k y_k \cdot 1_{E_k}$ dir. Böylece $\int_c^d \left(\sum_k y_{k-1} \cdot 1_{E_k}\right) \le \int_c^d h < \int_c^d \left(\sum_k y_k \cdot 1_{E_k}\right)$ olur. [53]

Teorem 2.4.8. [53] (Riemann$\Rightarrow$Lebesgue) Eğer h fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon ise h fonksiyonu $[c,d]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyondur.

2.5. Gauge İntegrali

1957 yılında, Kurweil [29] Gauge integralini tanımladı. Daha sonrasında, bu kavram Henstock [25] tarafından geliştirildi ve "Gauge teorisi" olarak isimlendirildi. Bu yeni kavram, görünüş bakımıyla Riemann'ın tanımına benzemekte, fakat Lebesgue'in tanımlamış olduğu kavramdan daha da güçlü etkiye sahiptir. Henstock-Kurweil'in formülü Riemann integralinde çok az farklı olsa da Gauge integrali Lebesgue integralinden daha geneldir ve Lebesgue integralinin bütün yakınsaklık özelliklerine sahiptir. Ayrıca, Riemann integralinden daha kolay tanımlanmaktadır. Tek farklılık Riemann integralinde tanımlanan standart δ sabiti Gauge integralinde fonksiyon olarak alınmaktadır. γ olarak gösterilen bu fonksiyon Gauge olarak isimlendirilir ve uzunluğu farklılık gösteren açık bir aralığı temsil eder. Bu ufak değişiklik moduli uzayları, topolojik değişmezler ve kuantum alan teorisi gibi birçok uygulama alanında yeniliğe sebep olmuştur. Gauge integrali ile diğer integrallerin arasındaki ilişki aşağıdaki şema ile verilebilir.



Şekil 2.1. Gauge integrali ve diğer integraller arasındaki ilişki

Yukarıdaki şema da görüldüğü gibi Gauge anlamında integrallenebilen ve Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı birbiri ile yakından ilişkilidir. $[c,d]$ aralığından $\mathbb{R}$'e tanımlı fonksiyonlar için uygun olmayan (improper) Riemann anlamında integrallenebilen bazı fonksiyonlar Lebesgue anlamında integrallenebilir değildir.

Örnek 2.5.1. $h(r)=r^2\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)$ reel değerli fonksiyonu için $h(0)=0$ dır. Ayrıca, $\int_0^1 |h'(r)|dr$ integralinin değeri sonsuzdur ve $\int_0^1 h'(r)dr$ Lebesgue integrali tanımsızdır. Ancak, her R için uygun olmayan (improper) Riemann integrali $\int_0^R h'(r)dr$ vardır ve $h(R)$ değerine eşittir.

Buna ek olarak, yukarıdaki şemada görüldüğü gibi, Lebesgue anlamında integrallenebilen ve uygun olmayan (improper) Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar Gauge anlamında da integrallenebilirdir. Birçok alanda, Gauge integralinin en büyük avantajı Lebesgue teorisine kazandırdığı yeni bir boyuttur.

Gauge teorinin temeli olan Gauge tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.5.2. [70] $J=[c,d]$ aralığının bir tagged bölüntüsü ya da sıralısı $D=\{(\omega_i,J_i):1\le i\le p\}$ verilsin ve $\{J_i:1\le i\le p\}$, J aralığının kapalı bir alt aralığının bölüntüsü ve ω_i, J_i aralığında bir nokta olsun. ω_i, J_i bölüntüsünün etiketi (tagged)'ı olarak isimlendirilsin. $h:J\to R$ fonksiyonu için D ile ilişkili olarak h fonksiyonunun Riemann toplamı $\ell(J_i)$, J_i alt aralığının uzunluğu olmak üzere $S(h,D)=\sum_{i=1}^{m}h(\omega_i)\ell(J_i)$ olarak tanımlansın. Eğer $\delta:J\to(0,\infty)$ bir fonksiyon ise $\gamma(\omega)=(\omega-\delta(\omega),\omega+\delta(\omega))$'ı kullanarak açık aralık değerli bir fonksiyon tanımlansın. Eğer $J_i=[y_i,y_{i+1}]$ ise $\omega_i-\delta<y_i\le\omega_i\le y_{i+1}<\omega_i+\delta$ yerine $\omega_i\in J_i\subset\gamma(\omega_i)$ yazılabilir. J aralığının üzerinde tanımlı herhangi bir γ aralığı için $\gamma(\omega)$, her $\omega\in J$ noktası için ω noktasını içeren açık bir aralıktır ve J aralığı üzerinde Gauge'dır denir. Bütün böyle aralıkların kümesi Δ_G olarak adlandırılır. Eğer $\omega_i\in J_i\subset\gamma(\omega_i)$ şartı sağlanıyorsa D' ye $\gamma-$ *fine* denir.

Örnek 2.5.3. $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlanan aralık fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\gamma(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, y=0,\\ \frac{y}{3}, 0<y\le 1.\end{cases}$$

Ayrıca, başlangıç aralığındaki ilk etiketi (tag) sıfır olacak şekilde seçip her aralığın sağ ve bitiş noktası olacak şekilde diğer her aralıktan her etiketi (tag) seçerek aşağıdaki bölüntü elde edilir.

$$m\left(\left[0,\frac{1}{5}\right]\right)<\frac{1}{5}<\gamma(0)=\frac{1}{4},\ m\left(\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]\right)<\frac{1}{20}<\gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12},$$
$$m\left(\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]\right)<\frac{1}{12}<\gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9},\ m\left(\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]\right)<\frac{1}{12}<\gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9},$$
$$m\left(\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]\right)<\frac{1}{15}<\gamma\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{15},\ m\left(\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]\right)<\frac{1}{10}<\gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6},$$
$$m\left(\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]\right)<\frac{1}{10}<\gamma\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5},\ m\left(\left[\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right]\right)<\frac{3}{20}<\gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},$$
$$m\left(\left[\frac{3}{4},1\right]\right)<\frac{1}{4}<\gamma(1)=\frac{1}{3}.$$

Bu da $\gamma(y)-$ *fine* tagged bölüntüsünün bir örneğidir.

Tanım 2.5.4. [70] $h:[c,d]\to\mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $|S(h,D)-A|<\varepsilon$ olacak şekilde $[c,d]$ aralığı üzerinde $A\in\mathbb{R}$ varsa ve γ Gauge için D, $[c,d]$ aralığının $\gamma-$ *fine* tagged bölüntüsü ise, h fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üzerinde Gauge integrallenebilirdir denir. A sayısına h fonksiyonunun $J=[c,d]$ aralığı üzerinde Gauge integrali denir ve ${}^{g}\int_{c}^{d} h$ veya ${}^{g}\int_{J} h$ olarak gösterilir. İntegrali parametreye bağlı olarak tanımlamak gerekirse ${}^{g}\int_{c}^{d} h(\omega)$ veya ${}^{g}\int_{J} h(\omega)$ olarak yazılır.

Örnek 2.5.5. [70] Dirichlet fonksiyonu

$$d(y)=\begin{cases}1, & y\in\mathbb{Q},\\ 0, & y\in\mathbb{R}/\mathbb{Q},\end{cases}$$

olarak tanımlansın. $d(y)$ fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üzerinde Gauge integrallenebilirdir. Bunu göstermek için $\varepsilon>0$ ve $[c,d]$ aralığında $\{r_l\}$, rasyonel sayıların bir sayısı olsun. $[c,d]$ aralığı üzerindeki Gauge γ fonksiyonu

$$\gamma(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{2^l}, & \omega=r_l \text{ ise,}\\ 0, & \omega\notin\mathbb{Q} \text{ ise,}\end{cases}$$

olarak tanımlanır. Eğer Q, $[c,d]$ aralığının bir $\gamma-fine$ bölüntüsü ise Q bölüntüsünü rasyonel sayıların etiketlenmiş (tagged) aralıkları için Q_r, irrasyonel sayıların tagged aralıkları için Q_s olarak bölelim. Burada,

$$\begin{aligned}\left|S(h,Q)-0\right| &= \sum_{Q} d(\omega_l)\Delta y_l\\ &= \sum_{Q_r} 1\cdot\Delta y_l+\sum_{Q_s} 0\cdot\Delta y_l\\ &< \sum_{m}\frac{\varepsilon}{2^m}=\varepsilon.\end{aligned}$$

olur. O halde, Dirichlet fonksiyonu Gauge integrallenebilirdir ve integral değeri ${}^{g}\int_{c}^{d} d=0$ dır.

Örnek 2.5.6. [53] Aşağıda tanımlanan

$$h(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

fonksiyonu sınırlı olmadığı için $[0,1]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon değildir. Fakat h fonksiyonu $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir ve ${}^{g}\int_{0}^{1} h=2$ olur. Bir fonksiyonun Gauge anlamında integrallenebilir olduğu integral değeri teleskopik bir toplam ile değiştirilerek gösterilir. Bunu doğrulamak için $0<\varepsilon\le 1$ olsun. $[0,1]$ aralığının her $\gamma-fine$ tagged bölüntüsü D için $\left|S(h,D)-2\right|<\varepsilon$ sağlayacak şekilde seçilen bir Gauge γ fonksiyonunu

$$\gamma(\omega)=\begin{cases}\left(\omega\cdot a^2(\omega),\dfrac{\omega}{a^2(\omega)}\right), & \omega>0 \text{ ise},\\ \left(-\varepsilon^2,\varepsilon^2\right) & , \ \omega=0 \text{ ise},\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada $0<a(\omega)<1$ dir. $Q=\left\{\omega_l,\left[y_{l-1},y_l\right]\right\}_{l=1}^{m}$, $[0,1]$ aralığının $\gamma-fine$ tagged (ince etiketlenmiş) bölüntüsü olsun. Her $l>1$ için $\dfrac{2}{\sqrt{y_l}+\sqrt{y_{l-1}}}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{\omega_l}}$ kesirleri $\left[\dfrac{1}{\sqrt{y_l}},\dfrac{1}{\sqrt{y_{l-1}}}\right]$ aralığının içine düşer. O halde,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{\sqrt{y_l}+\sqrt{y_{l-1}}}-\frac{1}{\sqrt{\omega_l}}\right| &< \frac{1}{\sqrt{y_{l-1}}}-\frac{1}{\sqrt{y_l}}\\ &< \frac{1}{\sqrt{a^2(\omega_l)\cdot\omega_l}}-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\omega_l}{a^2(\omega_l)}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega_l}}\left(\frac{1}{a(\omega_l)}-a(\omega_l)\right)\end{aligned}$$

dir. Eğer $a(\omega)=1-\dfrac{\varepsilon\sqrt{\omega}}{4}$ olarak alınırsa, $0<\varepsilon,\ \omega\le 1$ için

$$\frac{1}{a(\omega)}-a(\omega)=\frac{2\varepsilon\sqrt{\omega}-\frac{1}{4}\varepsilon^2\omega}{4-\sqrt{\omega}}<\frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{\omega}$$

olur. Böylece,

$$\left|\frac{2}{\sqrt{y_l}+\sqrt{y_{l-1}}}-\frac{1}{\sqrt{\omega_l}}\right|<\varepsilon$$

dır. γ nın tanımından dolayı eğer $\omega_0 = 0$ olmaz ise $\left(\omega_0,\left[y_0, y_1\right]\right)$ tagged (etiketlenmiş) aralığı $y_0 = 0$ noktasına sahip değildir Dolayısıyla, $l = 1$, $h\left(\omega_1\right) = h\left(0\right) = 0$ ve $0 < y_1 < \varepsilon^2$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\left|S\left(h,D\right)-2\right| &= \left|\sum_{l=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{\omega_l}}\left(y_l-y_{l-1}\right)-2\sum_{l=1}^{m}\left(\sqrt{y_l}-\sqrt{y_{l-1}}\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{l=2}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_l}}-\frac{2}{\sqrt{y_l}+\sqrt{y_{l-1}}}\right)\left(y_l-y_{l-1}\right)\right|+2\sqrt{y_1} \\
&< \sum_{l=2}^{m}\varepsilon\cdot\left(y_l-y_{l-1}\right)+2\varepsilon \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak h fonksiyonu Gauge integrallenebilirdir ve ${}^{g}\int_{0}^{1} h = 2$ dir.

Gauge integralinin temel özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.5.7. [53] $h, h_1, h_2 : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $J = \left[c,d\right]$ aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

1) $h_1 + h_2$ fonksiyonlarının toplamı J aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir ise ${}^{g}\int_{J}\left(h_1+h_2\right) = {}^{g}\int_{J} h_1 + {}^{g}\int_{J} h_2$ dir.

2) Her $\omega \in \mathbb{R}$ için ωh_1, J aralığı üzerinde Gauge integrallenebilirdir ve ${}^{g}\int_{J}\omega h_1 = \omega\,{}^{g}\int_{J} h_1$ dir.

3) Eğer J aralığı üzerinde $h_1 \geq 0$ ise ${}^{g}\int_{J} h_1 \geq 0$ dir.

4) Eğer J aralığı üzerinde $h_1 \geq h_2$ ise ${}^g\int_J h_1 \geq {}^g\int_J h_2$ dir.

5) Eğer h fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise $\left| {}^g\int_J h \right| \leq {}^g\int_J |h|$ dir.

6) Eğer h ve $|h|$ fonksiyonları J aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir ise h fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge mutlak integrallenebilir bir fonksiyondur.

Teorem 2.5.8. [53] $c < e < d$ olsun. Eğer h fonksiyonu $[c,e]$ ve $[e,d]$ aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir ise h fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üzerinde Gauge integrallenebilirdir ve ${}^g\int_c^d h = {}^g\int_c^e h + {}^g\int_e^d h$ dir.

Teorem 2.5.9. [53] $h : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, J aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer J aralığı J aralığının kapalı bir alt aralığı ise h fonksiyonu J aralığında Gauge integrallenebilirdir.

Tanım 2.5.10. [53]

1) $\omega_i \in J_i \subseteq [c,d]$,

2) J_i ve J_j $i \neq j$ iken örtüşmeyen aralıklar

olmak üzere $[c,d]$ aralığının kısmi etiketlenmiş bir bölüntüsü kapalı, etiketlenmiş $\{(\omega_i, J_i)\}$ aralıklarının sonlu bir kümesidir.

Lemma 2.5.11. [53] h fonksiyonu $[c,d]$ aralığında Gauge integrallenebilen bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $\gamma - fine$ Q bölüntüsü için

$$\left| S(h,Q) - {}^{g}\!\int_{c}^{d} h \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $[c,d]$ aralığı üzerinde γ Gauge olsun. Eğer $Q = \{(\omega_i, J_i)\}$, $[c,d]$ aralığının $\gamma - fine$ tagged bölüntüsü ise

$$\left| \sum_{Q} \left\{ h(\omega_i) \cdot \Delta y_i - {}^{g}\!\int_{J_i} h \right\} \right| \le \varepsilon$$

dır.

Lemma 2.5.12. [53] Lemma 2.5.11 kullanılarak,

$$\sum_{Q} \left| h(\omega_i) \cdot \Delta y_i - {}^{g}\!\int_{J_i} h \right| \le 2\varepsilon$$

ve

$$\left| \sum_{Q} \left(|h(\omega_i)| \cdot \Delta y_i - \left| {}^{g}\!\int_{J_i} h \right| \right) \right| \le 2\varepsilon$$

dir veya buna denk olarak

$$\left| S(|h|, Q) - \sum_{Q} \left| {}^{g}\!\int_{J_i} h \right| \right| \le 2\varepsilon$$

dir.

Ayrıca, fonksiyonlar için sınırlı salınımlılık tanımı ve özellikleri aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.5.13. [53] h, $[c,d]$ aralığında bir fonksiyon ve $Q=\{[y_{l-1},y_l]\}$, $[c,d]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. Q bölüntüsü ile ilişkili olarak h fonksiyonunun varyasyonu

$$V(h,Q)=\sum_l \left|h(y_l)-h(y_{l-1})\right|$$

olarak tanımlanır ve $[c,d]$ aralığında h fonksiyonunun varyasyonu, $[c,d]$ aralığının mümkün olan bütün Q bölüntülerinin supremumunun alınması durumunda $V_c^d h=\sup V(h,Q)$ dir. Eğer $V_c^d h<\infty$ ise h fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımdır denir. Bu durumda sınırlı salınımlı fonksiyonların kümesi $BV([c,d])$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.14. [53] h, $[c,d]$ aralığında bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

1) Q ve R, $[c,d]$ aralığının iki bölüntüsü ve R, Q bölüntüsünün düzeltilmesi (refinement) olmak üzere $V(h,Q)\le V(h,R)$ dir.
2) Herhangi $e\in(c,d)$ için $h\in BV([c,d])$ ise $V_c^d h=V_c^e h+V_e^d h$ dir.
3) Eğer $h\in BV([c,d])$ ise $V_c^y h$ ve $V_c^y h-h(y)$ fonksiyonları y fonksiyonunun $[c,d]$ aralığında artan fonksiyonlarıdır.

Ayrıca, fonksiyonlar için sınırlı salınımlılık tanımı ve $V_c^d h$ nin özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.5.15. [23] $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a\le b$, $c\le d$ ve $h:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $m\in\mathbb{N}$ ve $(x_0,y_0),\dots,(x_m,y_m)$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$(a,c)=(x_0,y_0)\le(x_1,y_1)\le\cdots\le(x_{n-1},y_{n-1})\le(x_n,y_n)=(b,d)$$

şartını sağlayan noktalar olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{m}\left|f\left(x_i,y_i\right)-f\left(x_{i-1},y_{i-1}\right)\right|$$

formundaki sonlu toplamları içeren R nin alt kümeleri R_f ile gösterilsin. Eğer R_f kümesi üstten sınırlı ise f sınırlı salınımlıdır denir. Bu durumda R_f kümesinin supremumu $V\left(f\right)$ ile gösterilir ve f fonksiyonunun $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ üzerindeki total salınımı olarak adlandırılır.

2.6. Kuvvetli Cesáro Toplanabilir Lineer Fonksiyonlar

Bu bölümün son kısmında, Borwein [5] tarafından tanımlanan kuvvetli toplanabilir lineer fonksiyonlar ve özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.6.1. [5] $f\left(y\right)$, reel değerli ve $\left(1,\infty\right)$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{1}^{n}\left|f\left(y\right)-L\right|dy=0$$

ise $f(y)$ fonksiyonu kuvvetli toplanabilirdir denir. Bu durumda reel değerli kuvvetli toplanabilir ölçülebilir fonksiyonların uzayı W ile gösterilir.

Borwein'nin sonuçlarının ardından, Nuray [43] dizi yerine reel değerli ve $\left(1,\infty\right)$ aralığında tanımlı Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonları kullanarak alarak $\lambda-$ istatistiksel yakınsak fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.6.2. [43] $\lambda\in\Delta$ ve $f(y)$, reel değerli ve $\left(1,\infty\right)$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\lambda_u}\int_{u-\lambda_u+1}^{u}\left|f(y)-L\right|dy=0$$

ise $f(y)$ fonksiyonu L sayısına $\lambda-$kuvvetli toplanabilirdir denir. Bu durumda $[W,\lambda]-\lim f(y)=L$ ile gösterilir. Eğer $\lambda_r=r$ ise $[W,\lambda]$ aynı zamanda kuvvetli toplanabilir fonksiyonların uzayı $[W]$' e indirgenir.

Tanım 2.6.3. [43] $f(y)$, $(1,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere, eğer $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{y\le n:\left|f(y)-L\right|\right\}\right|=0$$

ise $f(y)$ fonksiyonu L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S-\lim f(y)=L$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.4. [43] $\lambda\in\Delta$ ve $f(y)$, $(1,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\lambda_u}\left|\left\{y\in I_u:\left|f(y)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $f(y)$ fonksiyonu L sayısına $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır denir ve $(S,\lambda)-\lim f(y)=L$ veya $f(y)\to L[S_\lambda]$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca, Nuray [43] aşağıdaki sonucu da vermiştir.

Teorem 2.6.5. [43] $\lambda \in \Delta$ ve $f(y)$, $(1,\infty)$ aralığında tanımlı Lebesgue anlamında ölçülebilir, reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $[W,\lambda] \subset (S,\lambda)$ dir ve bu kapsama bağıntısının tersi doğru değildir.

BÖLÜM 3. ÇİFT DİZİLERİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI

Bu bölümde, Savaş ve Patterson'ın [58] tanımları kullanılarak, çift istatistiksel sınırlılık ve çift lacunary istatistiksel sınırlılık kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca bu iki yeni kavram arasındaki ilişki incelenmiştir [59].

Tanım 3.1. $y=\left(y_{k,l}\right)$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer $\delta_2\left(\left\{(k,l):\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right)=0$, diğer bir ifadeyle hemen hemen her (k,l) için $\left|y_{k,l}\right|\leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı varsa $y=\left(y_{k,l}\right)$ dizisine çift istatistiksel sınırlıdır denir. Çift istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S^2\left(B\right)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. $E\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olsun. Eğer $P-\lim\limits_{s,v}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v}:(k,l)\in E\right\}\right|$ limiti mevcut ise E kümesi $\delta_2^{\theta}\left(E\right)$ çift lacunary yoğunluğa sahiptir denir.

Tanım 3.3. $\theta_{s,v}$ çift lacunary dizisi olsun. Eğer

$$P-\lim_{s,v\to\infty}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s.v}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|=0,$$

diğer bir ifadeyle $\delta_{\theta_{s,v}}^2\left(\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right)=0$ veya $\theta_{s,v}$ çift dizisine göre hemen hemen her (k,l) için $\left|y_{k,l}\right|\leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı var ise

$y=(y_{k,l})$ dizisine çift lacunary istatistiksel sınırlıdır veya $S^2_{\theta_{s,v}}$ – sınırlıdır denir. Çift lacunary istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S^2_{\theta_{s,v}}(B)$ ile gösterilir.

Teorem 3.4. Her çift sınırlı dizi çift lacunary istatistiksel sınırlıdır. Başka bir ifadeyle her çift lacunary dizisi $\theta_{s,v}$ için $\ell^2_\infty \subset S^2_{\theta_{s,v}}(B)$ dir.

Bu teoremin ispatı açıktır.

Teorem 3.5. Her çift lacunary istatistiksel yakınsak dizi çift lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

İspat. $y=(y_{k,l})\in S_{\theta_{s,v}}$ ve $\varepsilon>0$ verilsin. Bu durumda

$$P-\lim_{s,v\to\infty}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s.v}:\left|y_{k,l}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde $L\in\mathbb{C}$ vardır ve Pringsheim anlamında

$$\lim_{s,v\to\infty}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}\right|>\left|L\right|+\varepsilon\right\}\right|<\lim_{s,v\to\infty}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

dır. Kapsamın diğer tarafını göstermek için $s,v=1,2,3,...$ olmak üzere $y=(y_{k,l})$ çift dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$y_{k,l}=\begin{cases}1, & k=2s, l=2v \text{ ise,}\\ -1, & k\neq 2s, l\neq 2v \text{ ise,}\end{cases}$$

Buradan $y=(y_{k,l})\in S^2_{\theta_{s,v}}(B)$ fakat $y\notin S_{\theta_{s,v}}$ olduğu görülür.

Teorem 3.6. $\theta_{s.v}$ çift lacunary dizisi olsun. $y=(y_{k,l})$ dizisinin çift lacunary istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\theta_{s.v}$ lacunary dizisine göre hemen hemen her (k,l) için $y_{k,l}=z_{k,l}$ olacak şekilde $z_{k,l}$ sınırlı çift dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat. $y=(y_{k,l})$ dizisi çift lacunary istatistiksel sınırlı olsun. Bu durumda $B=\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:|y_{k,l}|>M\}$ olduğunda $\delta^2_{\theta_{s,v}}(B)=0$ olacak şekilde $M\geq 0$ sayısı vardır.

$$z=(z_{k,l})=\begin{cases} y_{k,l}, & (k,l)\notin B\times B \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

dizisi tanımlansın. $z\in\ell^2_\infty$ ve $\theta_{s.v}$ lacunary dizisine göre hemen hemen her (k,l) için $y_{k,l}=z_{k,l}$ dir.

Diğer taraftan $z=(z_{k,l})\in\ell^2_\infty$ olsun. Bu durumda her $(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $|z_{k,l}|\leq L$ olacak şekilde $L>0$ sayısı vardır. $E=\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, y_{k,l}\neq z_{k,l}\}$ olarak tanımlansın. $\delta^2_{\theta_{s,v}}(E)=0$ olduğundan $\theta_{s.v}$ lacunary dizisine göre hemen hemen her (k,l) için $|z_{k,l}|\leq L$ dir.

Teorem 3.7. $\theta_{s,v}=(r_s,u_v)$ lacunary çift dizisi için $S^2(B)\subset S^2_{\theta_{s,v}}(B)$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_s \xi_s>1$ ve $\liminf_v \overline{\xi}_v>1$ olmasıdır.

İspat. $\liminf_s \xi_s>1$ ve $\liminf_v \overline{\xi}_v>1$ olsun. Ayrıca, $\xi_s\geq 1+\beta_1$ ve $\overline{\xi}_v\geq 1+\beta_2$ olacak şekilde $\beta_1>0$ ve $\beta_2>0$ sayıları verilsin. Böylece,

$$\frac{t_{s,v}}{r_{s,v}}=\frac{r_s-r_{s-1}}{r_s}\cdot\frac{u_v-u_{v-1}}{u_v}=\left(1-\frac{1}{\xi_s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\overline{\xi}_v}\right)$$
$$\geq\left(1-\frac{1}{1+\beta_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+\beta_2}\right)=\beta_1\frac{1}{1+\beta_1}\cdot\beta_2\frac{1}{1+\beta_2}$$

ve

$$\frac{r_{s-1,v-1}}{t_{s,v}}\leq\frac{1}{\beta_1}\cdot\frac{1}{\beta_2}$$

olur. $\left(y_{k,l}\right)\in S^2_{\theta_{s,v}}\left(B\right)$ için

$$\lim_{s,v\to\infty}\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{\left(k,l\right)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|=0$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Ayrıca yeterince büyük s ve v için

$$\frac{1}{r_{s,v}}\left|\left\{k\leq r_s\ \&\ l\leq u_v:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|\geq\frac{t_{s,v}}{r_{s,v}}\cdot\frac{1}{t_{s,v}}\left|\left\{\left(k,l\right)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|$$
$$\geq\frac{\beta_1}{1+\beta_1}\cdot\frac{\beta_2}{1+\beta_2}\cdot\frac{1}{t_{s,v}}\left|\left\{\left(k,l\right)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|$$

olur. Diğer taraftan, $\liminf_s \xi_s=1$ ve $\liminf_v \overline{\xi}_v=1$ olsun ve $\theta_{s,v}=\left(r_s,u_v\right)$ lacunary çift dizisi için

$$\frac{r_{s_i}}{r_{s_i-1}}<1+\frac{1}{i}\quad \text{ve}\quad \frac{r_{s_i-1}}{r_{s_{i-1}}}>i$$

ve

$$\frac{u_{v_j}}{u_{v_j-1}} < 1 + \frac{1}{j} \text{ ve } \frac{u_{v_j-1}}{u_{v_{j-1}}} > j$$

olmak üzere $s_i \geq s_{i-1} + 2$ ve $v_j > v_{j-1} + 2$ iken r_{s_i} ve u_{v_j} alt dizileri seçilsin. Ayrıca, $y = (y_{k,l})$ dizisi de aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$y_{k,l} = \begin{cases} kl, \ (k,l) \in I_{s_i,v_j} \ , \ i = 1,2,3,... \text{ ve } j = 1,2,3,... \text{ ise} \\ 0, \ \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

O halde, $M > 0$ için $r_{s_{i_0-1}} > M$ ve $u_{v_{j_0-1}} > M$ olacak şekilde $i_0, j_0 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (sonsuz sayıda i_0 ve j_0 indisleri vardır) sayıları için

$$\frac{1}{t_{s_{i_0},v_{j_0}}} \left| \left\{ (k,l) \in I_{s_{i_0},v_{j_0}} : |y_{k,l}| > M \right\} \right| \geq \frac{1}{t_{s_{i_0},v_{j_0}}} \left| \left\{ (k,l) \in I_{s_{i_0},v_{j_0}} : |y_{k,l}| > r_{s_{i_0-1},v_{j_0-1}} \right\} \right| = 1$$

dir. Böylece, $i \geq i_0$ ve $j \geq j_0$ için

$$\frac{1}{t_{s_i,v_j}} \left| \left\{ (k,l) \in I_{r_{s_i},v_j} : |y_{k,l}| > M \right\} \right| = 1$$

dir. Ayrıca, $s \neq s_i$ ve $v \neq v_j$ iken

$$\frac{1}{t_{s,v}} \left| \left\{ (k,l) \in I_{r_{s,v}} : |y_{k,l}| > M \right\} \right| = 0$$

olur ve $y = (y_{k,l}) \notin S_\theta^2(B)$ dir. Şimdi yeterince büyük m ve n tamsayıları için $r_{s_{i-1}} < m \leq r_{s_{i+1}-1}$ ve $u_{v_{j-1}} < n \leq u_{v_{j+1}-1}$ olacak şekilde i ve j tek (unique) olarak bulunabilir. Bu durumda

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{k \le m, l \le n : \left|y_{k,l}\right| > \frac{1}{2}\right\}\right| < \frac{r_{s_{i-1},v_{j-1}} + t_{s_i,v_j}}{r_{s_{i-1},v_{j-1}}} < \frac{1}{ij} + \frac{1}{ij} = \frac{2}{ij}$$

dir. $m,n \to \infty$ olması $i, j \to \infty$ olmasını gerektirir ve $\left(y_{k,l}\right) \in S^2\left(B\right)$ elde edilir.

Sonuç olarak Teorem 3.7' nin gereklilik kısmında verilen $y = \left(y_{k,l}\right)$ dizisi çift istatistiksel sınırlı fakat çift lacunary istatistiksel sınırlı olmayan diziye bir örnektir.

Teorem 3.8. $\theta_{s,v} = \left(r_s, u_v\right)$ lacunary çift dizisi için $S_\theta^2\left(B\right) \subset S^2\left(B\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_s \xi_s < \infty$ ve $\limsup_v \overline{\xi}_v < \infty$ olmasıdır.

İspat. Savaş ve Patterson [28] tarafından sunulan methoda benzer olarak teoremin yeter şartı ispatlanır. Gerek şartı için $\limsup_s \xi_s = \infty$ ve $\limsup_v \overline{\xi}_v = \infty$ olsun. [28] ile benzer şekilde $\xi_{s_i} > i$ ve $\overline{\xi}_{v_j} > j$ olmak üzere $\theta_{s,v} = \left(r_s, u_v\right)$ lacunary dizisinin $\left(r_{s_i}\right)$ ve $\left(u_{v_j}\right)$ iki alt dizisi seçilsin. Ayrıca, $y = \left(y_{k,l}\right)$ dizisi

$$y_{k,l} = \begin{cases} kl, \; r_{s_{i-1}} < k \le 2r_{s_{i-1}} \text{ ve } u_{v_{j-1}} < l < 2u_{v_{j-1}} & , i, j = 1,2,\ldots \text{ ise,} \\ 0, \; \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\tau_{s_i,v_j} = \frac{1}{t_{s_i,v_j}}\left|\left\{\left(k,l\right) \in I_{r_{s_i,v_j}} : \left|y_{k,l}\right| > \frac{1}{2}\right\}\right| < \frac{r_{s_{i-1}}}{r_{s_i} - r_{s_{i-1}}} \cdot \frac{u_{v_{j-1}}}{u_{v_j} - u_{v_{j-1}}} < \frac{1}{i-1}\frac{1}{j-1}$$

dır ve eğer $s \ne s_i$ ve $v \ne v_j$ ise $\tau_{s,v} = 0$ olur. Bu yüzden, $\left(y_{k,l}\right) \in S_{\theta_{s,v}}^2\left(B\right)$ dir. Ancak, $M > 0$ ve her $i \ge i_0$ ve $j \ge j_0$ için $r_{s_{i-1}} > M$ ve $u_{v_{j-1}} > M$ olacak şekilde i_0 ve j_0 vardır. O halde, aşağıdaki ifade bütün $i \ge i_0$ ve $j \ge j_0$ indisleri için doğrudur. Bu durumda,

$$\frac{1}{2r_{s_{i-1}}}\frac{1}{2u_{v_{j-1}}}\left|\left\{k \le 2r_{s_i-1}, l \le 2u_{v_j-1} : \left|y_{k,l}\right| > M\right\}\right|$$
$$= \frac{1}{2r_{s_{i-1}}}\frac{1}{2u_{v_{j-1}}}\left[r_{s_1}-1+r_{s_2}-1+\cdots+r_{s_i}-1\right]\left[u_{v_1}-1+u_{v_2}-1+\cdots+u_{v_j}-1\right] \ge \frac{1}{4}$$

dır. Dolayısıyla, $\left(y_{k,l}\right) \notin S^2\left(B\right)$ olur.

Sonuç olarak, Teorem 3.8' in gerek şartında tanımlanan $y = \left(y_{k,l}\right)$ dizisi çift lacunary istatistiksel sınırlı fakat çift istatistiksel sınırlı olmayan dizilerin bir örneğidir.

Teorem 3.7 ve Teorem 3.8' in birleştirilmesi sonucunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.9. $\theta_{s,v} = \left(r_s, u_v\right)$ lacunary çift dizisi olsun, bu durumda $S^2\left(B\right) = S^2_{\theta_{s,v}}\left(B\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$1 < \liminf_s \xi_s \le \limsup_s \xi_s < \infty$$

ve

$$1 < \liminf_v \overline{\xi}_v \le \limsup_v \overline{\xi}_v < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 3.10. $\theta_{s,v} = \left(r_s, u_v\right)$ lacunary çift dizisi için eğer

$$\liminf_{s,v} \frac{t_{s,v}}{r_{s,v}} > 0$$

ise bu durumda $S^2\left(B\right) \subset S^2_{\theta_{s,v}}\left(B\right)$ dir.

İspat. $M>0$ için

$$\left\{k\leq r_s, l\leq u_v : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}\supset\left\{(k,l)\in I_{s,v} : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_s u_v}\left|\left\{k\leq r_s, l\leq u_v : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right| &\geq \frac{1}{r_s u_v}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v} : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right| \\ &= \frac{t_{s,v}}{r_{s,v}}\frac{1}{t_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v} : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. $r,s\to\infty$ için limit alınırsa ve $\liminf\limits_{s,v}\dfrac{t_{s,v}}{r_{s,v}}>0$ olduğundan $S^2(B)\subset S^2_{\theta_{s,v}}(B)$ elde edilir.

Teorem 3.11. $\theta_1=(r_s,u_v)$ ve $\theta_2=\left(\overline{r}_s,\overline{u}_v\right)$ iki lacunary dizisi ve her $(s,v)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $I_{s,v}\subset\overline{J}_{s,v}$ olsun. Eğer

$$\liminf_{s,v\to\infty}\frac{t_{s,v}}{u_{s,v}}>0$$

ise $S^2_{\theta_2}(B)\subseteq S^2_{\theta_1}(B)$ dir.

İspat. $(s,v)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $I_{s,v}\subset\overline{J}_{s,v}$ olsun ve $\liminf\limits_{s,v\to\infty}\dfrac{t_{s,v}}{u_{s,v}}>0$ şartı sağlansın. $M>0$ için

$$\left\{(k,l)\in\overline{J}_{s,v} : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}\supseteq\left\{(k,l)\in I_{s,v} : \left|y_{k,l}\right|>M\right\}$$

dır. Böylece, her $(s,v)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{u_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in \bar{J}_{s,v}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|\geq\frac{t_{s,v}}{u_{s,v}}\frac{1}{t_{s,v}}\left|\left\{(k,l)\in I_{s,v}:\left|y_{k,l}\right|>M\right\}\right|$$

olur ki burada $\bar{J}_{s,v}=\left\{(k,l):\bar{r}_{s-1}<k\leq\bar{r}_s \text{ ve } \bar{u}_{v-1}<l\leq u_v\right\}$ dir. Bu durumda, $s,v\to\infty$ için limit alınır ve $\liminf\limits_{s,v\to\infty}\frac{t_{s,v}}{u_{s,v}}>0$ şartı kullanılırsa $S_{\theta_1}^2(B)\subset S_{\theta_2}^2(B)$ kapsama bağıntısı elde edilir.

BÖLÜM 4. α DERECEDEN İDEAL ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, $(1,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan reel değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir iki fonksiyon göz önüne alınarak, α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_\lambda -$istatistiksel denk ve α dereceden kuvvetli $\mathcal{I}_\lambda -$asimptotik denk fonksiyonlar tanımlanmıştır. Ayrıca, bazı kapsama bağıntıları da incelenmiştir [60].

Tanım 4.1. $\lambda \in \Delta$ ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de uygun bir ideal olsun. Ayrıca, $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere, eğer

$$\mathcal{I}_\lambda - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_u^\alpha} \int_{u-\lambda_u+1}^{u} \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| ds = 0$$

ise, $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları L sayısına α dereceden kuvvetli $\mathcal{I}_\lambda -$asimptotik denk fonksiyonlardır denir ve $f(s) \overset{V_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ ile gösterilir.

Sonuç 4.2. Eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ kümesi sonlu bir alt kümedir}\}$ ise α dereceden kuvvetli $\mathcal{I}_\lambda -$asimptotik denk fonksiyonlar

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u^\alpha} \int_{u-\lambda_u+1}^{u} \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| ds = 0$$

limiti ile formüle edilir ise α dereceden kuvvetli $\lambda-$asimptotik denk fonksiyonlar olur ve $\alpha=1$ için

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\lambda_u}\int_{u-\lambda_u+1}^{u}\left|\frac{f(s)}{g(s)}-L\right|ds=0$$

limiti ile formüle edilir ise kuvvetli $\lambda-$asimptotik denk fonksiyonlar olur.

Tanım 4.3. $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı admissible (uygun) bir ideal olsun. $0<\alpha\leq 1$ olması durumunda eğer $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{u\in\mathbb{N}:\frac{1}{u^{\alpha}}\left|\left\{s\leq u:\left|\frac{f(s)}{g(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}$$

ise $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları L sayısına α dereceden asimptotik $\mathcal{I}-$istatistiksel denktir denir ve $f(s)\overset{S(\mathcal{I})^{\alpha}}{\sim}g(s)$ ile gösterilir.

Tanım 4.4. $\lambda\in\Delta$ ve $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı admissible (uygun) bir ideal olsun. $0<\alpha\leq 1$ olması durumunda, eğer $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{u\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_u^{\alpha}}\left|\left\{s\in I_u:\left|\frac{f(s)}{g(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}$$

ise $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_{\lambda}-$istatistiksel denktir denir ve $f(s)\overset{S_{\lambda}(\mathcal{I})^{\alpha}}{\sim}g(s)$ ile gösterilir. α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_{\lambda}-$istatistiksel denk fonksiyonların uzayı $S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha$ dir. $\mathcal{I}=\mathcal{I}_{fin}$ için α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_\lambda-$ istatistiksel denk fonksiyonlar aşağıda tanımlanmış olan α dereceden asimptotik $\lambda-$istatistiksel denk fonksiyonlar ile çakışır.

Tanım 4.5. $\lambda \in \Delta$ ve $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $0<\alpha \leq 1$ olması durumunda, eğer $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u^\alpha} \left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları α dereceden asimptotik $\lambda-$istatistiksel denk fonksiyonlardır denir.

Teorem 4.6. $0<\alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda, $S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\lambda(\mathcal{I})^\beta$ dir.

İspat. $0<\alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{\left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{\lambda_n^\beta} \leq \frac{\left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{\lambda_n^\alpha}$$

dir ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{\left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{\lambda_n^\beta} \geq \delta \right\} \leq \left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{\left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{\lambda_n^\alpha} \geq \delta \right\}$$

olur. O halde, eğer sağ kısımdaki küme $\mathcal{I}$ idealinin bir elemanı ise açıkca söylenebilir ki sol kısımdaki küme de $\mathcal{I}$ idealinin bir elemanıdır ve $S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\lambda(\mathcal{I})^\beta$ dır.

Teorem 4.7. $\lambda = (\lambda_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler doğrudur.

1) Eğer $f(s) \overset{V_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ ise $f(s) \overset{S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ dir.
2) Her $\mathcal{I}$ ideali için, $V_\lambda(\mathcal{I})^\alpha$, $S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha$ nin uygun (proper) bir alt kümesidir.

İspat. 1) $\varepsilon > 0$ ve $f(s) \overset{V_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{s\in I_u} \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| ds \geq \int_{s\in I_u \& \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| > \varepsilon} \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| ds$$
$$\geq \varepsilon \left|\left\{ s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon \right\}\right|$$

dir. Her $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{ s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\int_{s\in I_u} \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| ds \geq \varepsilon\delta$$

diğer bir ifade ile

$$\left\{ u\in\mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{ s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \geq \delta \right\}$$
$$\subset \left\{ u\in\mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left\{ \int_{s\in I_u} \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| ds \geq \varepsilon \right\} \geq \varepsilon\delta \right\}$$

dir. Sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ idealinin bir elemanı ise son taraftaki küme de $\mathcal{I}$ idealinin bir elemanı olacaktır.

2) $f(s) \overset{S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s) \subsetneq f(s) \overset{V_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ olduğunu göstermek için $A \in \mathcal{I}$ olacak şekilde A sabit kümesi göz önüne alınsın. Ayrıca $f(s)$ fonksiyonu

$$f(s) = \begin{cases} s, & u - \left[\sqrt{\lambda_u^\alpha}\right] + 1 \le s \le u,\ u \notin A, \\ s, & u - \lambda_u^\alpha + 1 \le s \le u,\ u \in A, \\ \theta, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve $g(s) = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $u \notin A$ ve $u \to \infty$ iken

$$\frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = \frac{\left[\sqrt{\lambda_u^\alpha}\right]}{\lambda_u^\alpha} \to 0$$

olur. $\delta > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{u \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \delta\right\} \subset A \cup \{1, 2, \ldots, m\}$$

dir. $\mathcal{I}$ ideali uygun (admissible) ideal olduğundan, $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları α dereceden L sayısına asimptotik $\mathcal{I}_\lambda -$istatistiksel denktir ve $n \to \infty$ için

$$\frac{1}{\lambda_u^\alpha}\int_{s \in I_u}\left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \to \infty$$

olduğu açıktır ki $f(s)$ ve $g(s)$ fonksiyonları α dereceden L sayısına kuvvetli $\mathcal{I}_\lambda$ $-$asimptotik istatistiksel denk değildir.

Teorem 4.8. Eğer $\liminf_{u\to\infty} \frac{\lambda_u^\alpha}{u^\alpha} > 0$ ise $f(s) \overset{S(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s) \Rightarrow f(s) \overset{S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{u^\alpha}\left|\left\{s \le u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$
$$\ge \frac{\lambda_n^\alpha}{n^\alpha}\frac{1}{\lambda_n^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

dir. Eğer $\liminf_{u\to\infty} \frac{\lambda_u^\alpha}{u^\alpha} = \varsigma$ ise $\left\{u \in \mathbb{N} : \frac{\lambda_u^\alpha}{u^\alpha} < \frac{\zeta}{2}\right\}$ sonludur. Bu durumda $\delta > 0$ için

$$\left\{u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \delta\right\}$$
$$\subset \left\{u \in \mathbb{N} : \frac{1}{u^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \frac{\zeta}{2}\delta\right\} \cup \left\{u \in \mathbb{N} : \frac{\lambda_u}{u} < \frac{\zeta}{2}\right\}$$

elde edilir. Sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ idealinin bir elemanı olduğundan sol taraftaki kümede $\mathcal{I}$ idealinin bir elemanıdır. Sonuç olarak, $f(s) \overset{S(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ olması $f(s) \overset{S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ olmasını gerektirir.

Teorem 4.9. Eğer $\lambda \in \Delta$ için $\lim_u \frac{\lambda_u^\alpha}{u^\alpha} = 1$ ise $f(s) \overset{S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s) \Rightarrow f(s) \overset{S(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ dir.

İspat. $\delta > 0$ olsun. $\lim_{u} \frac{\lambda_u^\alpha}{u^\alpha} = 1$ olduğundan, $m \in \mathbb{N}$ ve her $u \geq m$ için

$$\left| \frac{\lambda_u^\alpha}{u^\alpha} - 1 \right| < \frac{\delta}{2}$$

dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $u \geq m$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ s \leq u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| &= \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ s \leq u - \lambda_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\quad + \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ s \leq I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\leq \frac{u - \lambda_u}{u^\alpha} + \frac{1}{u^\alpha} \left| \left\{ s \leq I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\leq 1 - \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{1}{u^\alpha} \left| \left\{ s \leq I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&= \frac{\delta}{2} + \frac{1}{u^\alpha} \left| \left\{ s \leq I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{1}{u^\alpha} \left| \left\{ s \leq u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \\
&\subset \left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{1}{u^\alpha} \left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \cup \{1, 2, \cdots, m\}
\end{aligned}$$

olur ve $f(s) \overset{S(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ dir.

Teorem 4.10. Her $u \in \mathbb{N}$ için $\lambda_u \leq \mu_u$ olacak şekilde Δ ailesinde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ iki dizisi ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde α ve β sabit sayıları ele alınsın.

1) Eğer $\liminf_{u \to \infty} \frac{\lambda_u^\alpha}{\mu_u^\beta} > 0$ ise $S_\mu(\mathcal{I})^\beta \subseteq S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha$ dir.

2) Eğer $\lim_{u \to \infty} \frac{\mu_u}{\lambda_u^\beta} = 1$ ise $S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\mu(\mathcal{I})^\beta$ dir.

İspat. 1) Her $u \in \mathbb{N}$ için $\lambda_u \leq \mu_u$ ve $\liminf_{u \to \infty} \frac{\lambda_u^\alpha}{\mu_u^\beta} > 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$I_u = [u - \lambda_u + 1, u]$ ve $J_u = [u - \mu_u + 1, u]$ olmak üzere

$$\left\{ s \in J_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \supseteq \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\}$$

dir. Bu durumda

$$\frac{1}{\mu_u^\beta} \left| \left\{ s \in J_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\lambda_u^\alpha}{\mu_u^\beta} \frac{1}{\lambda_u^\alpha} \left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. Her $u \in \mathbb{N}$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u^\alpha} \left| \left\{ s \in I_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\}$$
$$\subset \left\{ u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_u^\alpha} \left| \left\{ s \in J_u : \left| \frac{f(s)}{g(s)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \frac{\lambda_u^\alpha}{\mu_u^\alpha} \right\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Sonuç olarak $S_\mu(\mathcal{I})^\beta \subseteq S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha$ dir.

2) $f(s) \overset{S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha}{\sim} g(s)$ ve $\lim_{u\to\infty} \frac{\mu_u}{\lambda_u^\beta} = 1$ olsun. $I_u \subset J_u$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $u \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{\mu_u^\beta}\left|\left\{s \in J_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = \frac{1}{\mu_u^\beta}\left|\left\{u - \mu_u < s < n - \lambda_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$+\frac{1}{\mu_u^\beta}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{\mu_u - \lambda_u}{\mu_u^\beta} + \frac{1}{\lambda_u^\beta}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{\mu_u - \lambda_u^\beta}{\lambda_u^\beta} + \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \left(\frac{\mu_u}{\lambda_u^\beta} - 1\right) + \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{s \in I_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dir. Her $\delta > 0$ için

$$\left\{u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\mu_u^\beta}\left|\left\{s \in J_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\}$$
$$\subseteq \left\{u \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_u^\alpha}\left|\left\{s \in J_u : \left|\frac{f(s)}{g(s)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

olur ve $S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\mu(\mathcal{I})^\beta$ sonucu elde edilir.

Sonuç 4.11. Her $u \in \mathbb{N}$ için $\lambda_u \leq \mu_u$ olacak şekilde Δ ailesinde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ iki dizi olsun. Eğer $\liminf_{u\to\infty} \frac{\lambda_u^\alpha}{\mu_u^\beta} > 0$ ise

1) Her $\alpha \in (0,1]$ için $S_\mu(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\lambda(\mathcal{I})^\alpha$,

2) Her $\alpha \in (0,1]$ için $S_{\mu}^{L}(\mathcal{I}) \subseteq S_{\lambda}^{L}(\mathcal{I})^{\alpha}$,

3) $S_{\mu}^{L}(\mathcal{I}) \subseteq S_{\lambda}^{L}(\mathcal{I})$,

dir.

Sonuç 4.12. Her $u \in \mathbb{N}$ için $\lambda_u \leq \mu_u$ olacak şekilde Δ ailesinde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ iki dizi olsun. Eğer $\lim_{u\to\infty} \frac{\mu_u}{\lambda_u^{\beta}} = 1$ ise

1) Her $\alpha \in (0,1]$ için $S_{\lambda}(\mathcal{I})^{\alpha} \subseteq S_{\mu}(\mathcal{I})^{\alpha}$,

2) Her $\alpha \in (0,1]$ için $S_{\lambda}(\mathcal{I})^{\alpha} \subseteq S_{\mu}(\mathcal{I})$,

3) $S_{\lambda}(\mathcal{I}) \subseteq S_{\mu}(\mathcal{I})$,

dir.

BÖLÜM 5. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN ÇİFT CESÁRO TOPLANABİLME METODU

Bu bölümde, Borwein`in [5] lineer fonksiyonlar için elde ettiği sonuçlar çift Cesáro toplanabilir fonksiyon uzaylarına genişletilmiştir. Ayrıca, çift fonksiyon uzayları için bazı önemli sonuçlar verilmiştir [44].

Tanım 5.1. $w_p^{"}$ uzayı,

$$\sum_{k,l=1,1}^{M,N} \left| x_{k,l} - L_x \right| = o\left(MN \right)$$

özellikli $x = \left(x_{k,l} \right)$ formundaki değişkenlere ayrılabilir bir çift dizi uzayıdır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|x\| = \sup_{M,N \geq 1,1} \left(\frac{1}{MN} \sum_{k,l=1,1}^{M,N} \left| x_{k,l} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 5.2. $W_p^{"}$ uzayı,

$$\int_1^R \int_1^S \left| x\left(s,t \right) - L_x \right|^p = o\left(RS \right)$$

özellikli $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında iki değişkenli ölçülebilir reel değerli $x(s,t)$ formundaki bir fonksiyon uzayıdır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|x\| = \sup_{R,S\geq 1,1}\left(\frac{1}{R}\frac{1}{S}\int_1^R\int_1^S |x(s,t)|^p\, dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 5.3. $\alpha=(\alpha_{k,l})$ çift reel dizisi için $(\phi_{k,l}(\alpha,\beta))$ çift dizisi

$$\phi_{k,l}(\alpha,p)=\begin{cases}\sup_{\{2^k\leq\zeta<2^{k+1}\ \&\ 2^l\leq\eta<2^{l+1}\}} |\zeta\eta\alpha_{\zeta,\eta}|, & p=1 \text{ ise,}\\ \left(\dfrac{1}{2^{k+l}}\displaystyle\sum_{\zeta=2^k,\eta=2^l}^{2^{k+1}-1,2^{l+1}-1} |\zeta\eta\alpha_{\zeta,\eta}|^q\right)^{\frac{1}{q}}, & p>1 \text{ ise,}\end{cases}$$

dir.

Tanım 5.4. $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında tanımlı iki değişkenli ölçülebilir reel değerli $\alpha=(\alpha_{k,l})$ fonksiyonu için $(\Phi_{k,l}(\alpha,p))$ çift dizisi

$$\Phi_{k,l}(\alpha,p)=\begin{cases} ess.\sup_{\{2^k\leq s\leq 2^{k+1}\ \&\ 2^l\leq t\leq 2^{l+1}\}} |\tau\upsilon\alpha(s,t)|, & p=1 \text{ ise,}\\ \left(\dfrac{1}{2^{k+l}}\displaystyle\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}} |st\alpha(s,t)|^q\, dsdt\right)^{\frac{1}{q}}, & p>1 \text{ ise,}\end{cases}$$

dir.

Bu bölümde, f fonksiyonu iki değişkenli, değişkenlere ayrılabilir, toplanabilir, homojen fonksiyonları temsil etmektedir.

Teorem 5.5. 1) Eğer f fonksiyonu $W_p^{"}$ uzayında bir fonksiyon ise bu durumda her $x \in W_p^{"}$ için

$$f(x) = aL_x + \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \alpha(s,t)\,x(s,t)\,dsdt$$

olacak şekilde a reel sayısı ve $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında tanımlı $\alpha = (\alpha_{k,l})$ reel değerli fonksiyonu vardır ve

$$\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha, p) < \infty$$

dir.

2) Eğer $\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha, p) < \infty$ olacak şekilde bir a reel sayısı var ve α , $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$f(x) = aL_x + \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \alpha(s,t)\,x(s,t)\,dsdt$$

olacak şekilde

$$\|f\| \le |a| + 4^{\frac{1}{p}} \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha, p)$$

normu ile $W_p^{"}$ uzayında bir f fonksiyonu tanımlanır ve her $x \in W_p^{"}$ için

$$f(x) = aL_x + \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \alpha(s,t)\,x(s,t)\,dsdt$$

çift integrali mutlak $P-$yakınsaktır.

İspat. 1) $L_p^{"}$ uzayı $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir x fonksiyonlarının uzayı ve bu uzaydaki norm

$$\|x\|_{L_p^{"}}=\left(\int_1^\infty\int_1^\infty |x(s,t)|^p\,dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere

$$\int_1^\infty\int_1^\infty |x(s,t)|^p\,dsdt<\infty$$

olsun. Eğer $x\in L_p^{"}$ ise $L_x=0$ ve $\|x\|=\|x\|_{W_p^{"}}\le\|x\|_{L_p^{"}}$ için $x\in W_p^{"}$ dir. Bu durumda, $W_p^{"}$ uzayında tanımlanan f fonksiyonunun $L_p^{"}$ kısıtlaması, $L_p^{"}$ uzayında toplanabilir ve homojendir. Her $x\in L_p^{"}$ için $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı

$$f(x)=\int_1^\infty\int_1^\infty \alpha(s,t)\,x(s,t)\,dsdt \tag{5.1}$$

olacak şekilde α ölçülebilir fonksiyonu vardır veya eğer $p=1$ için $ess.\sup\limits_{1<s<\infty\ \&\ 1<t<\infty}|\alpha(s,t)|<\infty$ ya da $p>1$ için $\int_1^\infty\int_1^\infty|\alpha(s,t)|^q\,dsdt<\infty$ dir. Bunu göstermek için α fonksiyonunun $\sum\limits_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\Phi_{k,l}(\alpha,p)<\infty$ koşulunu sağlaması gerekmektedir. Bu durumda, $p=1$ ve $p>1$ durumları ayrı ayrı göz önüne alınsın. Bu amaçla, ilk olarak $p=1$ durumunu inceleyelim. $\Phi_{k,l}=\Phi_{k,l}(\alpha,1)$ olsun ve her $(s,t)\in e_{k,l}$ için

$$\left|st\alpha\left(s,t\right)\right| > \Phi_{k,l} - \frac{1}{2^{k+l}}$$

olacak şekilde $\left(2^k,2^{k+1}\right)\times\left(2^l,2^{l+1}\right)$ aralığında $\left|e_{k,l}\right|$ pozitif ölçümünün $e_{s,k}$ iki değişkenli ölçülebilir kümesi vardır. Ayrıca,

$$x\left(s,t\right)=\begin{cases}\dfrac{2^{k+l}}{\left|e_{k,l}\right|}sign\,\alpha\left(s,t\right), & \left(s,t\right)\in e_{k,l}\ ,\ k\le\Delta\ \&\ l\le\Delta^{"}\ \text{ise,}\\ \qquad 0 & ,\ \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

tanımlansın. $x\in L_1^{"}$ olduğundan

$$f\left(x\right)=\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\alpha\left(s,t\right)x\left(s,t\right)dsdt$$

olur ve

$$\begin{aligned}\|f\|\cdot\|x\|\ge f\left(x\right)&=\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\alpha\left(s,t\right)x\left(s,t\right)dsdt \qquad (5.2)\\ &=\sum_{k,l=0,0}^{\Delta,\Delta^{"}}\iint_{e_{k,l}}\frac{2^{k+l}}{\left|e_{k,l}\right|}\left|\alpha\left(s,t\right)\right|dsdt\\ &\ge\frac{1}{4}\sum_{k,l=0,0}^{\Delta,\Delta^{"}}\frac{1}{\left|e_{k,l}\right|}\left|st\alpha\left(s,t\right)\right|dsdt\\ &\ge\frac{1}{4}\sum_{k,l=0,0}^{\Delta,\Delta^{"}}\left(\Phi_{k,l}-\frac{1}{2^{k+l}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna ek olarak $2^{\psi}\le R\le 2^{\psi+1}\le 2^{\Delta+1}$ ve $2^{\psi'}\le S\le 2^{\psi'+1}\le 2^{\Delta^{"}+1}$ için

$$\frac{1}{RS}\int_1^R\int_1^S\left|x(s,t)\right|dsdt\le\frac{1}{2^{\psi+\psi'}}\int_1^{2^{\psi+1}}\int_1^{2^{\psi'+1}}\left|x(s,t)\right|dsdt$$
$$=\frac{1}{2^{\psi+\psi'}}\sum_{k,l=0,0}^{\psi,\psi'}\iint_{e_{k,l}}\left|x(s,t)\right|dsdt$$
$$\le\frac{1}{2^{\psi+\psi'}}\sum_{k,l=0,0}^{\psi,\psi'}2^{k+1}<4$$

olur. Ayrıca $R>2^{\Delta+1}$ ve $S>2^{\Delta''+1}$ için

$$\frac{1}{RS}\int_1^R\int_1^S\left|x(s,t)\right|dsdt\le\frac{1}{2^{\Delta+\Delta''}}\int_1^{2^{\Delta+1}}\int_1^{2^{\Delta''+1}}\left|x(s,t)\right|dsdt<1$$

dir. O halde, $\|x\|<4$ ve (5.2) eşitisizliği göz önüne alındığında

$$4\left\|f(x)\right\|+\frac{1}{4}\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\frac{1}{2^{k+l}}=4\left\|f(x)\right\|+2\ge\frac{1}{4}\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\Phi_{k,l}$$

elde edilir. Bu durumda $p=1$ olduğunda $\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\Phi_{k,l}(\alpha,p)<\infty$ olur. Şimdi ikinci durum $p>1$ koşulunu inceleyelim. $\Phi_{k,l}=\Phi_{k,l}(\alpha,p)$ olsun ve

$$x(s,t)=\begin{cases}\dfrac{(st)^q}{2^{k+l}}\left|\dfrac{\alpha(s,t)}{\Phi_{k,l}}\right|^{\frac{q}{p}}sign\,\alpha(s,t), & 2^k\le s\le 2^{k+1}\le 2^{\Delta+1}\ \&\ 2^l\le t<2^{l+1}\le 2^{\Delta''+1}\\ & \text{ve }\ \Phi_{k,l}\ne 0\text{ ise,}\\ 0 & ,\ \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $x\in L_p''$ olduğundan ve (5.1) eşitsizliğinden

$$f(x)=\int_{1}^{2^{\Delta+1}}\int_{1}^{2^{\Delta''+1}}|\alpha(s,t)x(s,t)|dsdt \tag{5.3}$$
$$=\sum_{k,l=0,0}^{\Delta,\Delta''}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}}|x(s,t)\alpha(s,t)|dsdt$$
$$=\sum_{k,l=0,0}^{\Delta,\Delta''}\Phi_{k,l}\le\|f\|\cdot\|x\|$$

dir. Ayrıca $2^{\psi}\le R\le 2^{\psi+1}\le 2^{\Delta+1}$ ve $2^{\psi'}\le S\le 2^{\psi'+1}\le 2^{\Delta''+1}$ için

$$\frac{1}{RS}\int_1^R\int_1^S|x(s,t)|^p\,dsdt\le\frac{1}{2^{\psi+\psi'}}\int_1^{2\psi+1}\int_1^{2\psi'+1}|x(s,t)|^p\,dsdt$$
$$=\frac{1}{2^{\psi+\psi'}}\sum_{k,l=0,0}^{\psi,\psi'}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}}|x(s,t)|^p\,dsdt$$
$$\le 2^{2p-\psi-\psi'}\sum_{k,l=0,0}^{\psi,\psi'}2^{k+1}<2^{2p+2}$$

elde edilir. Bununla birlikte $R\ge 2^{\Delta+1}$ ve $S\ge 2^{\Delta''+1}$ için

$$\frac{1}{RS}\int_1^R\int_1^S|x(s,t)|^p\,dsdt\le\frac{1}{2^{\Delta+\Delta''+2}}\int_1^{2^{\Delta+1}}\int_1^{2^{\Delta''+1}}|x(s,t)|^p\,dsdt<4^p$$

olur. O halde, $\|x\|<4^{1+\frac{1}{p}}$ ve (5.3) eşitsizliğinden

$$\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\Phi_{k,l}\le 4^{1+\frac{1}{p}}\|f\|$$

dir. Bu durumda $p>1$ için $\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\Phi_{k,l}(\alpha,p)<\infty$ olur. $p\ge 1$, $\Phi_{k,l}=\Phi_{k,l}(\alpha,p)$ ve $x\in W_p''$ olsun. Bu durumda, iki boyutlu Hölder'in [16] eşitsizliğinden

$$\int_1^\infty\int_1^\infty |\alpha(s,t)x(s,t)|dsdt = \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\alpha(s,t)x(s,t)|dsdt \tag{5.4}$$

$$\leq \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{2^{k+l}} \displaystyle\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}} |stx(s,t)|^q dsdt \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \left(2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)(k+l)} \displaystyle\int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}} \left|\dfrac{x(s,t)}{st}\right|^p dsdt \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right]$$

$$\leq \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l} \left(2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)(k+l)} \int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}} \left|\frac{x(s,t)}{st}\right|^p dsdt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l} \left(2^{-(k+l)} \int_{2^k}^{2^{k+1}}\int_{2^l}^{2^{l+1}} |x(s,t)|^p dsdt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 4^{\frac{1}{p}} \|x\| \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}$$

elde edilir. Yani

$$\int_1^\infty\int_1^\infty |\alpha(s,t)x(s,t)|dsdt < \infty$$

olur. $x \in W_p^{''}$ ve $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında tanımlı bir karakteristik fonksiyon, $W_p^{''}$ uzayında olduğundan

$$\int_1^\infty\int_1^\infty |\alpha(s,t)|dsdt < \infty$$

dır. $x \in W_p^{''}$, $L = L_x$, $y(s,t) = x(s,t) - L$ olsun ve

$$y_{k,l}(s,t) = \begin{cases} y(s,t), & 1 \leq s \leq k \ \& \ 1 \leq t \leq l \text{ ise,} \\ 0 \ , & s > k \ \& \ t > l \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde $y \in W_p^{"}$ ve $y_{k,l} \in L_p^{"}$ olduğundan Prinsgheim anlamında

$$\left\|y_{k,l} - y\right\| = \sup_{R,S>k,l}\left(\frac{1}{RS}\int_k^R\int_l^S \left|x(s,t) - L\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = o(1)$$

olur ve

$$\left|f\left(y_{k,l} - y\right)\right| = \left|f\left(y_{k,l}\right) - f(y)\right| \le \left\|y_{k,l} - y\right\| \cdot \|f\|$$

dir. (5.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} f\left(y(s,t)\right) &= P - \lim_{k,l} f\left(y_{k,l}(s,t)\right) \\ &= P - \lim_{k,l}\int_1^k\int_1^l y(s,t)\alpha(s,t)\,dsdt \\ &= \int_1^\infty\int_1^\infty y(s,t)\alpha(s,t)\,dsdt - L\int_1^\infty\int_1^\infty \alpha(s,t)\,dsdt \end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. $\int_1^\infty\int_1^\infty y(s,t)\alpha(s,t)\,dsdt,$ $\int_1^\infty\int_1^\infty \alpha(s,t)\,dsdt$ integralleri mutlak yakınsak olduğundan, $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında δ karakteristik fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $a = f(\delta) - \int_1^\infty\int_1^\infty \alpha(s,t)\,dsdt$ için

$$f(x) = f(y + L\delta) = f(y) + Lf(\delta) = \int_1^\infty\int_1^\infty x(s,t)\alpha(s,t)\,dsdt + La$$

olur ve teoremin birinci kısmı ispatlanır.

Teoremin ikinci kısmı göz önüne alınırsa, (5.5) eşitsizliğinden eğer $x \in W_p^{"}$ ve $\Phi_{k,l} = \Phi_{k,l}(\alpha, p)$ ise

$$\left|f(x)\right| = \left|\int_1^\infty \int_1^\infty \alpha(s,t)\, x(s,t)\, dsdt + aL\right| \tag{5.6}$$
$$\leq 4^{\frac{1}{p}} \|x\| \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha, p) + |aL|$$

olur. O halde, iki boyutlu Minkowski'nin eşitsizliğinden [[24], Teorem 202],

$$\left(\left(1-\frac{1}{R}\right)\left(1-\frac{1}{S}\right)\right)^{\frac{1}{p}} |L| \leq \left(\frac{1}{RS}\int_1^R \int_1^S \left|x(s,t)-L\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{RS}\int_1^R \int_1^S \left|x(s,t)\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ve sağ taraftaki ilk terim Pringsheim sıfır dizisidir. Bu durumda, $|L| \leq \|x\|$ ve (5.6) eşitsizliğinden her $x \in W_p^{''}$ için

$$\left|f(x)\right| \leq \|x\| \left(|a| + 4^{\frac{1}{p}} \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha, p)\right)$$

dir. Toplanabilir, homojen iki değişkenli f fonksiyonu

$$f(x) = aL + \int_1^\infty \int_1^\infty \alpha(s,t)\, x(s,t)\, dsdt$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu $W_p^{''}$ uzayında süreklidir ve

$$\|f\| \leq |a| + 4^{\frac{1}{p}} \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha, p)$$

elde edilir. (5.4) eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \alpha(s,t)\, x(s,t)\, dsdt$$

integrali mutlak $P-$yakınsaktır.

Teorem 5.6. 3) Eğer f fonksiyonu $w_p^{''}$ uzayında bir fonksiyon ise her $x \in w_p^{''}$ için

$$f(x) = aL_x + \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \alpha_{k,l} x_{k,l} \tag{5.7}$$

olacak şekilde a reel sayısı ve $\alpha = (\alpha_{k,l})$ çift dizisi vardır ve

$$\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l}(\alpha, p) < \infty$$

dir.

4) Eğer a bir reel sayı ve $\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l}(\alpha, p) < \infty$ olacak şekilde $\alpha = (\alpha_{k,l})$ bir çift reel dizi ise bu durumda

$$f(x) = aL_x + \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \alpha_{k,l} x_{k,l}$$

olacak şekilde

$$\|f\| \le |a| + 4^{\frac{1}{p}} \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l}(\alpha, p)$$

normu ile $w_p^{''}$ uzayında bir f fonksiyonu tanımlanır ve her $x \in w_p^{''}$ için

$$f(x) = aL_x + \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \alpha_{k,l} x_{k,l}$$

çift serisi mutlak $P-$yakınsaktır.

İspat. $x=\left(x_{k,l}\right)$ çift dizisi verilsin. $k<s\le k+1$ ve $l<t<l+1$; $k,l=1,2,3,...$ için

$$x^{*}\left(s,t\right)=x_{k,l}$$

eş fonksiyonu tanımlansın. Tek boyutlu duruma benzer şekilde, $L_{x^{*}}=L$ ve

$$\left\|x^{*}\right\|\le\left\|x\right\|\le 4^{\frac{1}{p}}\left\|x^{*}\right\|$$

olacak şekilde $w_p^{''}$ ile $W_p^{''}$ nin $W_p^{''*}$ lineer alt uzayı arasında bire-bir bir eşleme vardır. Böylece, $w_p^{''}$ uzayında alınan bir f fonksiyonu için

$$f^{*}\left(x^{*}\right)=f\left(x\right)$$

olacak şekilde $W_p^{''}$ de toplanabilir ve homojen bir f^{*} fonksiyonu tanımlansın. Nachbin teoreminden [6],

$$\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty}\Phi_{k,l}\left(\alpha^{*},p\right)<\infty$$

olacak şekilde a reel sayısı ve $\left(1,\infty\right)\times\left(1,\infty\right)$ aralığında tanımlı reel değerli α^{*} fonksiyonu vardır. Her $x\in w_p^{''}$ için

$$\alpha_{k,l}=\int_{k}^{k+1}\int_{l}^{l+1}\alpha^{*}\left(s,t\right)dsdt$$

olduğundan

$$f(x) = f^*(x^*) = aL_{x^*} + \int_1^\infty \int_1^\infty \alpha^*(s,t)\, x^*(s,t)\, ds dt$$
$$= aL_{x^*} + \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \alpha_{k,l} x_{k,l}$$

olur ve her $\alpha = (\alpha_{k,l})$ için

$$\sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l}(\alpha, p) \le \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \Phi_{k,l}(\alpha^*, p)$$

dir. Bu durum, teoremin 3. kısmını ispatlar. İki boyutlu Hölder'in [16] ve Minkowski'nin [24] eşitsizliğinden, 2. kısımdaki gibi,

$$f(s,t) = aL + \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} \alpha_{k,l} x_{k,l}$$
$$\le |aL| + \sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty} |\alpha_{k,l} x_{k,l}|$$
$$\le |aL| + 4^{\frac{1}{p}} \|x\| \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l}$$
$$\le \|x\| \left(|\alpha| + 4^{\frac{1}{p}} \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l} \right)$$

elde edilir. Böylece, (5.7) eşitsizliğinden $W_p^{''}$ uzayı üzerinde tanımlı toplanabilir ve homojen f fonksiyonu

$$\|f\| \le |a| + 4^{\frac{1}{p}} \sum_{k,l=0,0}^{\infty,\infty} \phi_{k,l}$$

olarak elde edilir. O halde, (5.7) eşitisizliğindeki seri mutlak $P-$yakınsaktır. Bu sonuç Teorem 5.6.' yı ispatlar.

BÖLÜM 6. İKİ DEĞİŞKENLİ ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN İSTATİSTİKSEL PRINGSHEIM YAKINSAKLIK VE TOPLANABİLME

6.1. $\lambda\mu-$ Çift İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Çift Toplanabilme

Bu bölümde, istatistiksel yakınsaklıklık kavramını genelleştirmek için $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında iki değişkenli ölçülebilir reel değerli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu göz önüne alınarak, $\lambda\mu-$çift toplanabilme ve $\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, bu tanımlar kullanılarak bazı kapsama bağıntıları sunulmuş ve literatürde var olan sonuçların en genel hali verilmiştir [61].

Bu bölümde, $\left(k\in I_m, l\in J_n\right)$ ifadesi yerine $\left(k,l\right)\in I_{m,n}$ ve $\lambda_{m,n}=\lambda_m\cdot\mu_n$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 6.1.1. $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına kuvvetli çift toplanabilirdir denir ve $\left[V\right]_2-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ veya $\lim h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left[V\right]_2$ ile gösterilir. Bu durumda, kuvvetli çift toplanabilir fonksiyonların uzayı $\left[V\right]_2$ olarak tanımlanır.

Tanım 6.1.2. $\lambda, \mu \in \Delta$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{m-\lambda_m+1}^{m}\int_{n-\mu_n+1}^{n}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına kuvvetli $\lambda\mu-$çift toplanabilirdir denir ve $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ veya $\lim h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L[V,\lambda,\mu]$ ile gösterilir. Kuvvetli $\lambda\mu-$ çift toplanabilir fonksiyonların uzayı $[V,\lambda,\mu]$ olarak tanımlanır. Eğer $\lambda_{m,n}=mn$ alınırsa, $[V,\lambda,\mu]$ uzayı $[V]_2$' ye indirgenir.

Tanım 6.1.3. A kümesi $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığının ölçülebilir bir altkümesi olsun. $|\cdot|$ ifadesi belirtilen kümenin Lebesgue ölçümünü göstermek üzere eğer

$$P-\lim_{m.n}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:(\tau,\upsilon)\in A\right\}\right|=0,$$

ise A kümesi sıfır doğal yoğunluğa sahiptir denir.

Tanım 6.1.4. $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere, eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına çift istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_f-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ veya $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L(S_f)$ ile gösterilir.

Tanım 6.1.5. $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\geq\varepsilon\right|\right\}\right|=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına $\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda, $S_f^{\lambda\mu}-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ veya $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L(S,\lambda,\mu)$ ile gösterilir. Eğer $\lambda_{m,n}=mn$ alınırsa, (S,λ,μ) uzayı S_f uzayına indirgenir.

Tanım 6.1.6. $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\leq m,\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)-h(\tau_0,\upsilon_0)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde $\tau_0=\tau_0(\varepsilon)>1$ ve $\upsilon_0=\upsilon_0(\varepsilon)>1$ reel sayıları varsa $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonuna çift istatistiksel Cauchy fonksiyonu denir.

Tanım 6.1.7. $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun ve $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere eğer

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\leq m,\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)\right|\geq R\right\}\right|=0$$

olacak şekilde R pozitif reel sayısı varsa $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonuna çift istatistiksel sınırlı fonksiyon denir. Çift istatistiksel sınırlı fonksiyonların uzayı $\ell_{f_\infty}^2$ ile gösterilir.

Teorem 6.1.8. İki değişkenli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun çift istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun çift istatistiksel Cauchy olmasıdır.

İspat. $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu çift istatistiksel yakınsak ise çift istatistiksel Cauchy olduğunun ispatı adi yakınsaklık durumundan aşikardır. Diğer taraftan $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu çift istatistiksel Cauchy olsun, fakat istatistiksel yakınsak olmasın. $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu çift istatistiksel Cauchy olduğundan her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-h(\tau_0,\upsilon_0)\right|<\varepsilon\right\}\right|=1$$

olacak şekilde $\tau_0=\tau_0(\varepsilon)>1$ ve $\upsilon_0=\upsilon_0(\varepsilon)>1$ reel sayıları vardır ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu çift istatistiksel yakınsak olmadığından

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>\varepsilon\right\}\right|=1$$

olur. Dolayısıyla, eğer $\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ ise

$$\left|h(\tau,\upsilon)-h(\tau_0,\upsilon_0)\right|\le 2\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|<\varepsilon$$

olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-h(\tau_0,\upsilon_0)\right|>\varepsilon\right\}\right|=0$$

elde edilir. Buna denk olarak

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-h(\tau_0,\upsilon_0)\right|>\varepsilon\right\}\right|=1$$

olur ki bu da varsayımla ile çelişir. Bu sebeple, $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu çift istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 6.1.9. Eğer $h_1:(1,\infty)\times(1,\infty)\to\mathbb{R}$ ve $h_2:(1,\infty)\times(1,\infty)\to\mathbb{R}$ iki değişkenli fonksiyonları var ve aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa,

1) $h(\tau,\upsilon)=h_1(\tau,\upsilon)+h_2(\tau,\upsilon)$,
2) $\lim\limits_{\tau,\upsilon\to\infty} h_1(\tau,\upsilon)=L$,
3) $\lim\limits_{m,n\to\infty}\dfrac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n: h_2(\tau,\upsilon)\ne 0\right\}\right|=0,$
4) Eğer h fonksiyonu çift istatistiksel sınırlı ise, hem $h_1(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu hem de $h_2(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu çift istatistiksel sınırlıdır,

iki değişkenli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

İspat. $S_f-\lim h_1(\tau,\upsilon)=L$ ve pozitif tamsayıların bir (Q_p) dizisi $p=1,2,3,...$ olmak üzere

$$2Q_p\le Q_{p+1}$$

olsun. Eğer $m,n\ge Q_p$ ise

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>2^{-p}\right\}\right|<2^{-2p}$$

olur. $h_1(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın. Eğer $\min\{\tau,\upsilon\}<Q_1$ ise $h_1(\tau,\upsilon)=h(\tau,\upsilon)$ dir. Eğer $Q_p\le\tau\le Q_{p+1}$ ve $Q_q\le\upsilon\le Q_{q+1}$ ise $h_1(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu

$$h_1(\tau,\upsilon)=\begin{cases} h(\tau,\upsilon), & \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\le 2^{-\min\{p,q\}} \text{ ise,}\\ L, & \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge 2^{-\min\{p,q\}} \text{ ise,}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Son olarak, $h_2(\tau,\upsilon)=h(\tau,\upsilon)-h_1(\tau,\upsilon)$ olsun. Bu durumda $h(\tau,\upsilon)=h_1(\tau,\upsilon)+h_2(\tau,\upsilon)$ koşulu sağlanacaktır. Her $\varepsilon>0$ için $2^{-p_0}<\varepsilon$ olacak şekilde bir p_0 reel sayısı seçilsin. Buradan eğer $p\geq p_0$ için $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı $Q_p\leq\min\{\tau,\upsilon\}<Q_{p+1}$ ise

$$\left|h_1(\tau,\upsilon)-L\right|=\begin{cases}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\leq 2^{-p}<\varepsilon, & \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\leq 2^{-p} \text{ ise,}\\ \left|L-L\right|=0 \quad , & \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>2^{-p} \text{ ise,}\end{cases}$$

dır. Eğer $\tau,\upsilon\geq Q_{p_0}$ ise

$$\left|h_1(\tau,\upsilon)-L\right|<\varepsilon$$

olur. Böylece, $h_1(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına yakınsar. Ayrıca, $h_2(\tau,\upsilon)=0$ olduğundan, eğer $\min\{\tau,\upsilon\}<Q_1$ ise $h_2(\tau,\upsilon)=0$ ve $p,q\geq 1$ için

$$Q_p\leq\tau\leq Q_{p+1} \text{ ve } Q_q\leq\upsilon\leq Q_{q+1}$$

ve $z=\min\{p,q\}$ olsun. $h_1(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}&\{(\tau,\upsilon):\tau\leq m \text{ ve } \upsilon\leq n: h_2(\tau,\upsilon)=0\}\\ &\qquad=\left\{(\tau,\upsilon):Q_z\leq\tau\leq m \text{ ve } Q_z\leq\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>2^{-z}\right\}\\ &\qquad\bigcup_{s=1}^{z-1}\left[\begin{array}{l}\left\{(\tau,\upsilon):Q_s\leq\tau\leq m \text{ ve } Q_s\leq\upsilon\leq Q_{s+1}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>2^{-s}\right\}\\ \cup\left\{(\tau,\upsilon):Q_s\leq\upsilon\leq Q_{s+1} \text{ ve } Q_s\leq\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>2^{-s}\right\}\end{array}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $p=1,2,3,\ldots$ için $2Q_p\leq Q_{p+1}$ olduğundan, eğer $m,n\geq Q_p$ ise

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\leq m,\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|>2^{-p}\right\}\right|<2^{-2p}$$

dir. Bu durumda, $z=\min\{p,q\}\to\infty$ için veya buna denk olarak $m,n\to\infty$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m \text{ ve } \upsilon\le n: h_2(\tau,\upsilon)\ne 0\right\}\right| &\le 2^{-2z}+\sum_{s=1}^{z-1}\left[\frac{Q_{s+1}}{m}2^{-2s}+\frac{Q_{s+1}}{n}2^{-2s}\right]\\ &\le 2^{-2z}+\left[\frac{Q_z}{m}+\frac{Q_z}{n}\right]\sum_{s=1}^{z-1}2^{-2s-(z-1-s)}\\ &\le 2^{-2z}+2^{-z+1}\to 0\end{aligned}$$

olur.

Teorem 6.1.10. $\lambda=(\lambda_{m,n})\in\Delta$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli fonksiyon olsun. Bu durumda

1) $[V,\lambda,\mu]\subset(S,\lambda,\mu)$ dır ve kapsamanın tersi sağlanmaz,
2) Eğer $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı ve $S_f^{\lambda\mu}-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ ise $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ dır ve eğer $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sabit değil ise $[V]_2-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ dır.

İspat. 1) $\varepsilon>0$ ve $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}|h(\tau,\upsilon)-L|\,d\tau d\upsilon &\ge \int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n},\,|h(\tau,\upsilon)-L|\ge\varepsilon}|h(\tau,\upsilon)-L|\,d\tau d\upsilon\\ &\ge \varepsilon\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:|h(\tau,\upsilon)-L|\ge\varepsilon\right\}\right|\end{aligned}$$

olur. O halde, $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$, $S_f^{\lambda\mu}-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ elde edilir. Ayrıca, $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{cases}\tau\upsilon,\ m-\sqrt{\lambda_m}+1\le\tau\le m, n-\sqrt{\mu_n}+1\le\upsilon\le n \text{ ise},\\ 0\ ,\ \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon değildir ve her $0<\varepsilon\leq 1$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{\lambda_{m,n}}=0$$

olur. Bu durumda, $S_f^{\lambda\mu}-\lim h(\tau,\upsilon)=0$ dır. Diğer yandan

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{m-\lambda_m+1}^{m}\int_{n-\mu_n+1}^{n}\left|h(\tau,\upsilon)-0\right|d\tau d\upsilon=\infty$$

elde edilir. Yani $h(\tau,\upsilon)\notin[V,\lambda,\mu]$ dir.

2) $S_f^{\lambda\mu}-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda her τ,υ için $\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\leq M$ dir. Her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon&=\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&\quad+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|<\varepsilon}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&\leq\frac{M}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+\varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ elde edilir. Ayrıca, her m,n için $\frac{\lambda_{m,n}}{mn}\leq 1$ şartı kullanılırsa

$$\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left(h(\tau,\upsilon)-L\right)d\tau d\upsilon=\frac{1}{mn}\int_1^{m-\lambda_m}\int_1^{n-\mu_n}\left(h(\tau,\upsilon)-L\right)d\tau d\upsilon+\frac{1}{mn}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left(h(\tau,\upsilon)-L\right)d\tau d\upsilon$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_1^{m-\lambda_m}\int_1^{n-\mu_n}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$\leq\frac{2}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak, $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ olduğundan $[V]_2-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ dir.

Teorem 6.1.11. $S_f\subset(S,\lambda,\mu)$ olması için gerek ve yeter şart $P-\liminf\limits_{m,n\to\infty}\frac{\lambda_{m,n}}{mn}>0$ olmasıdır.

İspat: Her $\varepsilon>0$ için

$$\left\{\tau\leq m,\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\supset\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{\tau\leq m,\upsilon\leq n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq\frac{\lambda_{m,n}}{mn}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

ifadesinin $m,n\to\infty$ iken Pringsheim anlamında limitini göstermek için $P-\liminf\limits_{m,n\to\infty}\frac{\lambda_{m,n}}{mn}>0$ şartı göz önüne alınmalıdır. Bu ise $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_f\right)$ ve $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S,\lambda,\mu\right)$ olmasını gerektirir.

Tersine, $P-\lim_{m,n\to\infty}\inf\frac{\lambda_{m,n}}{mn}=0$ olsun. $\frac{\lambda_{m_j,n_k}}{m_j n_k}<\frac{1}{jk}$ olacak şekilde (m_j) ve (n_k) indisleri seçilsin,

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{cases}1, & (\tau,\upsilon)\in I_{m_j,n_k},\ j=k=1,2,\ldots \text{ ise,}\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

olacak şekilde bir $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu tanımlansın. $h(\tau,\upsilon)\in[V]_2$ olduğundan $h(\tau,\upsilon)\in S_f$ olur. Diğer yandan $h(\tau,\upsilon)\notin(S,\lambda,\mu)$ ve Teorem 6.1.10' un (2) şıkkından dolayı $h(\tau,\upsilon)\notin[V,\lambda,\mu]$ olacağından $P-\lim_{m,n\to\infty}\inf\frac{\lambda_{m,n}}{mn}>0$ olur.

Tanım 6.1.12. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve p reel bir sayı olsun. Eğer

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{m-\lambda_m+1}^{m}\int_{n-\mu_n+1}^{n}|h(\tau,\upsilon)-L|^p\,d\tau d\upsilon=0$$

ise iki değişkenli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına kuvvetli λ_p −çift toplanabilirdir denir ve $[V_p,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ ile gösterilir. Eğer $\lambda_m=m,\mu_n=n$ alınırsa $[V_p,\lambda,\mu]$ uzayı kuvvetli $p-$Cesáro toplanabilir fonksiyonların uzayı $[V_p]$ ile çakışır.

Aşağıdaki teoremlerin ispatları Teorem 6.1.10' da kullanılan ispat metodu ile benzerlik gösterdiği için ispatsız olarak sunulmuştur.

Teorem 6.1.13. $1\le p<\infty$ olsun. Eğer iki değişkenli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına kuvvetli λ_p −çift toplanabilir ise L sayısına $\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 6.1.14. $1 \le p < \infty$ olsun. Eğer iki değişkenli $h(\tau, \upsilon)$ sınırlı fonksiyonu L sayısına $\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli λ_p-çift toplanabilirdir.

6.2. İki değişkenli Ölçülebilir Fonksiyonların $\lambda\mu-$Çift Asimptotik İstatistiksel Denkliği

Bu bölümde, $\lambda\mu-$çift asimptotik istatistiksel denklik ve kuvvetli $\lambda\mu-$çift asimptotik denklik kavramları $g(\tau, \upsilon)$ ve $h(\tau, \upsilon)$ fonksiyonları göz önüne alınarak tanımlanmıştır. Bu bölüm boyunca, $g(\tau, \upsilon)$ ve $h(\tau, \upsilon)$ fonksiyonları $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki değişkenli reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olarak kabul edilmiştir. Ayrıca, yeni tanımlanan bu iki metot arasındaki ilişki incelenmiş ve fonksiyonlar teorisinde önemli olacak temel sonuçlar elde edilmiştir [62].

Tanım 6.2.1. $g(\tau, \upsilon)$ ve $h(\tau, \upsilon)$ fonksiyonları iki değişkenli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$P-\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right| d\tau d\upsilon = 0$$

ise $g(\tau, \upsilon)$ ve $h(\tau, \upsilon)$ fonksiyonları L sayısına kuvvetli çift asimptotik denk fonksiyonlardır denir ve $g(\tau,\upsilon) \overset{W^L}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ ile gösterilir. Eğer $L=1$ ise $g(\tau, \upsilon)$ ve $h(\tau, \upsilon)$ fonksiyonları kuvvetli asimptotik denktir.

Tanım 6.2.2. $\lambda, \mu \in \Delta$, $g(\tau, \upsilon)$ ve $h(\tau, \upsilon)$ iki değişkenli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$P-\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{m-\lambda_m+1}^{m}\int_{n-\mu_n+1}^{n} \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right| d\tau d\upsilon = 0$$

ise $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları L sayısına kuvvetli $\lambda\mu-$çift asimptotik denk fonksiyonlar denir ve $g(\tau,\upsilon) \overset{W_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ ile gösterilir.

Tanım 6.2.3. $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli fonksiyonlar olsun $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon):\tau\le m,\ \upsilon\le n:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|>\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları L sayısına çift asimptotik istatistiksel denk fonksiyonlar denir ve $g(\tau,\upsilon)\overset{S_L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ ile gösterilir.

Tanım 6.2.4. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli fonksiyonlar olsun. $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|>\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları L sayısına $\lambda\mu-$çift istatistiksel denk fonksiyonlar denir ve $g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ ile gösterilir.

Örnek 6.2.5. İki değişkenli $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları

$$g(\tau,\upsilon)=\begin{cases}\tau\upsilon, & m-\log(\lambda_m)+1\le\tau\le m,\ n-\log(\mu_n)+1\le\upsilon\le n \text{ ise},\\ 2, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

$h(\tau,\upsilon)=2$ olacak şekilde tanımlansın. Her $0<\varepsilon\le 1$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-1\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{(\log(\lambda_m)+1)(\log(\mu_n)+1)}{\lambda_{m,n}}$$

$$=0$$

dır. O halde $g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ olur.

Tanım 6.2.6. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli fonksiyonlar olsun.

$$C_{m,n}=\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

olması durumunda $\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:|C_{m.n}-L|=0\}$ ise $g(\tau,\upsilon)\overset{C_2}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir.

Teorem 6.2.7. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında tanımlı iki değişkenli reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

1) Eğer $g(\tau,\upsilon)\overset{W_{\lambda\mu}^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ ise $g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir ve $W_{\lambda\mu}^L$, $S_{\lambda\mu}^L$ nin uygun (proper) alt kümesidir.
2) $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ sınırlı fonksiyonlar olmak üzere eğer $g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ ise $g(\tau,\upsilon)\overset{W_{\lambda\mu}^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir. Ayrıca, $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları sabit değil ise $g(\tau,\upsilon)\overset{C_2^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir.

İspat. 1) Her $\varepsilon>0$ ve $g(\tau,\upsilon)\overset{W_{\lambda\mu}^L}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{(\tau,\upsilon)\in I_m}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon \geq \int_{\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}\,\&\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$\geq \varepsilon\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

Olur ve $g(\tau,\upsilon)\overset{W_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon) \Rightarrow g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ dir. $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$g(\tau,\upsilon)=\begin{cases}\tau\upsilon, & m-\sqrt[5]{\lambda_m}+1\leq\tau\leq m, n-\sqrt[5]{\mu_n}+1\leq\upsilon\leq n \text{ ise,}\\ 5, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

ve $h(\tau,\upsilon)=5$. Her $0<\varepsilon\leq 1$ için

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-1\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[5]{\lambda_m}\right)\left(\sqrt[5]{\mu_n}\right)}{\lambda_{m,n}}=0$$

dir. Dolayısıyla, $g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$) olur. Fakat

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{m-\lambda_m+1}^{m}\int_{n-\mu_n+1}^{n}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-1\right|d\tau d\upsilon=\infty$$

olduğundan $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları kuvvetli $\lambda\mu-$ çift asimptotik denk fonksiyonlar değildir.

2) $g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ olsun. Ayrıca $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları sınırlı olduğundan her τ,υ için $\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\leq M$ dir. Her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon=\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m.n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|<\varepsilon\right\}}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$\leq\frac{M}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m.n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla, $g(\tau,\upsilon)\overset{W_{\lambda\mu}^{L}}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir. Ayrıca

$$\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon=\frac{1}{mn}\int_1^{m-\lambda_m}\int_1^{n-\mu_n}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$+\frac{1}{mn}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_1^{m-\lambda_m}\int_1^{n-\mu_n}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

$$\leq\frac{2}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|d\tau d\upsilon$$

olur ki $g(\tau,\upsilon)\overset{W_{\lambda\mu}^{L}}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ olduğundan $g(\tau,\upsilon)\overset{C_2^{L}}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir.

Teorem 6.2.8. Eğer $\lambda,\mu\in\Delta$ olmak üzere $P-\liminf_{m,n}\frac{\lambda_{m,n}}{mn}>0$ ise

$$g(\tau,\upsilon)\overset{S^{L}}{\sim}h(\tau,\upsilon)\Rightarrow g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim}h(\tau,\upsilon)$$

dir.

İspat. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{\tau \le m, \upsilon \le n : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\} \supset \left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}$$

dır. Ayrıca

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{\tau \le m, \upsilon \le n : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$
$$\ge \frac{\lambda_{m,n}}{mn}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. $P-\lim_{m,n\to\infty}\inf\frac{\lambda_{m,n}}{mn} > 0$ koşulunu kullanarak $m,n \to \infty$ için limit alınırsa $g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ olur.

Teorem 6.2.9. Eğer $\lambda, \mu \in \Delta$ ve $P-\lim_{m,n}\frac{\lambda_{m,n}}{mn} = 1$ ise

$$g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon) \Rightarrow g(\tau,\upsilon) \overset{S^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$$

dir.

İspat. $\delta > 0$ olsun. $P-\lim_{m,n}\frac{\lambda_{m,n}}{mn} = 1$ olduğundan $\left|\frac{\lambda_{m,n}}{mn} - 1\right| < \frac{\delta}{2}$ ve $m,n \ge p$ olacak şekilde $p \in \mathbb{N}$ reel sayısı verilsin. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $m,n \ge p$ için

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{\tau \le m, \upsilon \le n : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{mn}\left|\left\{\tau \le m-\lambda_m, \upsilon \le n-\mu_n : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$+\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$\le \frac{(n-\mu_n)(m-\lambda_m)}{mn} + \frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$\le 1-\left(1-\frac{\delta}{2}\right)+\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{\delta}{2}+\frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\{\tau \le m, \upsilon \le n : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\} \subset \left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}$$

bağıntısından $g(\tau,\upsilon)\overset{S^L}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ bulunur.

Teorem 6.2.10. $I_m = [m-\lambda_m+1, m]$ ve/veya $J_n = [n-\mu_n+1, n]$ aralığında $\lambda = \lambda_{m,n} = \lambda_m\mu_n$ ve $I_m^* = [m-\xi_m+1, m]$ ve/veya $J_n^* = [n-v_n+1, n]$ aralığında $\xi = \xi_{m,n} = \xi_m v_n$ olsun. Ayrıca, $\lambda, \mu, \xi, v \in \Delta$ ve $m,n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_m \le \xi_m$ ve $\mu_n \le v_n$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır.

1) Eğer $P-\liminf\limits_{m.n}\frac{\lambda_{m,n}}{\xi_{m,n}}>0$ ise $g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\lambda\mu}^L}{\sim} h(\tau,\upsilon) \Rightarrow g(\tau,\upsilon)\overset{S_{\xi v}^L}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ dir.

2) Eğer $P-\liminf_{m.n} \frac{\xi_{m,n}}{\lambda_{m,n}} < 1,$ $\liminf_{m} \frac{\xi_m}{\lambda_m} < 1,$ ve $\liminf_{n} \frac{v_n}{\mu_n} < 1$ ise

$g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\xi v}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon) \Rightarrow g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ dir.

İspat. 1) $m,n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_m \leq \xi_m$, $\mu_n \leq v_n$ ve $P-\liminf_{m,n} \frac{\lambda_{m,n}}{\xi_{m,n}} > 0$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n}^{*} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

elde edilir buradan da

$$\frac{1}{\xi_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n}^{*} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{\lambda_{m,n}}{\xi_{m,n}} \frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

olur. O halde, $g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\lambda\mu}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon) \Rightarrow g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\xi v}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ dir.

2) $g(\tau,\upsilon) \overset{S_{\xi v}^{L}}{\sim} h(\tau,\upsilon)$ olsun. Ayrıca, $P-\liminf_{m,n} \frac{\xi_{m,n}}{\lambda_{m,n}} < 1,$ $\liminf_{m} \frac{\xi_m}{\lambda_m} < 1,$ ve $\liminf_{n} \frac{v_n}{\mu_n} < 1$ koşulları sağlansın. $I_{m,n}^{*} \subset I_{m,n}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $(m,n) \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&=\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I^{*}_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{\begin{matrix} m-\lambda_m+1<\tau\leq m-\xi_m \\ \& \; n-\mu_n+1<\upsilon\leq n-v \end{matrix}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\leq\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I^{*}_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&+\frac{\left[(m-\xi_m)-(m-\lambda_m+1)\right]\cdot\left[(n-v_n)-(n-\mu_n+1)\right]}{\lambda_{m,n}} \\
&\leq\left(\frac{(m-\xi_m-m+\lambda_m-1)}{\lambda_m}\cdot\frac{(n-v_n-n+\mu_n-1)}{\mu_n}\right) \\
&+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I^{*}_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\leq\left(\frac{\lambda_m-\xi_m-1}{\lambda_m}\right)\cdot\left(\frac{\mu_n-v_n-1}{\mu_n}\right) \\
&+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I^{*}_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\leq\frac{1}{\xi_{m,n}}\frac{\xi_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I^{*}_{m,n}:\left|\frac{g(\tau,\upsilon)}{h(\tau,\upsilon)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak $g(\tau,\upsilon)\overset{S^{L}_{\xi v}}{\sim}h(\tau,\upsilon)\Rightarrow g(\tau,\upsilon)\overset{S^{L}_{\lambda\mu}}{\sim}h(\tau,\upsilon)$ dir.

BÖLÜM 7. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İDEAL ÇİFT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

7.1. İki Değişkenli Fonksiyonların $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$Çift İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde, $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ uygun bir ideal olmak üzere, kuvvetli $[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)-$ çift toplanabilme ve $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$ çift istatistiksel yakınsaklık kavramları $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında iki değişkenli ölçülebilir reel değerli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu göze alınarak tanımlanmıştır. Ayrıca bu iki yeni kavram arasındaki ilişki de incelenmiştir [63].

Tanım 7.1.1. $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun ve $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için, eğer

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{mn}\left|\left\{\tau\le m,\upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\ge\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonuna $\mathcal{I}_2-$çift istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_F^2(\mathcal{I}_2)-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ veya $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_F^2(\mathcal{I}_2)\right)$ ile gösterilir.

Tanım 7.1.2. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun ve $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için, eğer

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\ge\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_F^{\lambda,\mu}(\mathcal{I}_2)-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ veya $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L\left(S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\right)$ ile gösterilir.

Tanım 7.1.3. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına kuvvetli $\mathcal{I}_2-$çift toplanabilirdir denir ve $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L[C,1,1](\mathcal{I}_2)$ ile gösterilir.

Tanım 7.1.4. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{m-\lambda_m+1}^{m}\int_{n-\mu_n+1}^{n}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu kuvvetli $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$çift toplanabilirdir denir ve $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)$ ile gösterilir.

Teorem 7.1.5. $\lambda,\mu\in\Delta$ ve $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki değişkenli Lebesgue anlamında ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

1) $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)\Rightarrow h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L\left[S_F^{\lambda\mu}\right](\mathcal{I}_2)$ dır fakat tersi doğru değildir.
2) Eğer $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı ve $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L\left[S_F^{\lambda\mu}\right](\mathcal{I}_2)$ ise $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)$ ve $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L[C,1,1](\mathcal{I}_2)$ dir.

İspat. 1) Her $\varepsilon>0$ ve $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}|h(\tau,\upsilon)-L|\,d\tau d\upsilon \geq \int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n},|h(\tau,\upsilon)-L|\geq\varepsilon}|h(\tau,\upsilon)-L|\,d\tau d\upsilon$$
$$\geq \varepsilon\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:|h(\tau,\upsilon)-L|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

olur. Böylece her $\delta>0$ için

$$\frac{1}{\lambda_{m.n}}\left|(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right|\geq\delta\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\geq\varepsilon\delta$$

yazılır. Ayrıca

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$
$$\subset\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left\{\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\right\}\geq\varepsilon\delta\right\}$$

olur. Burada, sağ taraftaki küme $\mathcal{I}_2$ idealine ait olduğundan, $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\right)$ olur. Diğer taraftan $\left(S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\right)\subsetneq L[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)$ olduğunu göstermek için $\mathcal{I}_2$ bir ideal ve $A\in\mathcal{I}_2$ sabit olsun. $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu da aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{cases}\tau\upsilon, & m-\left[\sqrt[3]{\lambda_m}\right]+1\leq\tau\leq m, n-\left[\sqrt[3]{\mu_n}\right]+1\leq\upsilon\leq n;(m,n)\notin A \text{ ise},\\ \tau\upsilon, & m-\left[(\lambda_m)^2\right]+1\leq\tau\leq m, n-\left[(\mu_n)^2\right]+1\leq\upsilon\leq n;(m,n)\in A \text{ ise},\\ 0, & \text{diğer durumda.}\end{cases}$$

Bu durumda $0<\varepsilon\leq 1$ olacak şekilde her $\varepsilon>0$ ve $(m,n)\notin A$ için

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=\frac{\sqrt[3]{\lambda_{m,n}}}{\lambda_{m,n}}$$

Pringsheim sıfır dizisi elde edilir. Böylece her $\delta>0$ ve $i_0\in\mathbb{N}$ için

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$
$$\subset\left\{A\cup\left((\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus A)\cap\left((\{1,2,\cdots,i_0-1\}\times\mathbb{N})\cup(\mathbb{N}\times\{1,2,\cdots,i_0-1\})\right)\right)\right\}$$

olur. $\mathcal{I}_2$ ideali kuvvetli ideal olduğu için, kapsama bağıntısının sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}_2$ idealine ait olur. Böylece $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}0\left(S_F^{\lambda\mu}\right)(\mathcal{I}_2)$ elde edilir. Diğer yandan

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=\infty$$

olur ki $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\nrightarrow}0[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)$ dır. Eğer $A\in\mathcal{I}_2$ sonlu ise $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\nrightarrow}0\left(S_F^{\lambda\mu}\right)(\mathcal{I}_2)$ dir. Sonuç olarak, $\mathcal{I}_2-(\lambda,\mu)-$çift istatistiksel yakınsaklığın, $(\lambda,\mu)-$çift istatistiksel yakınsaklıktan daha genel olduğu görülür.

1) $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\to}L\left(S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\right)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Her τ ve υ için $\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\leq M$ dir. Bu durumda $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon&=\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|<\varepsilon}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&\leq\frac{M}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+\varepsilon\end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{M}\right\}=A(\varepsilon)\in\mathcal{I}_2$$

olsun. Eğer $(m,n)\notin\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus A(\varepsilon)$ ise $\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon<2\varepsilon$ olur. Bu durumda,

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\geq 2\varepsilon\right\}\subset A(\varepsilon)$$

ve $h(\tau,\upsilon)\to L\left([L,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)\right)$ elde edilir. Buna ek olarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon&=\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_1^{m-\lambda_m}\int_1^{n-\mu_n}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&\quad+\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&\leq\frac{2}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon,\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{\lambda_{m,n}}{mn}\leq 1$ olduğundan aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\begin{aligned}&\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\geq 4\varepsilon\right\}\\&\subset\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\geq 2\varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

Bu durumda, $h(\tau,\upsilon)\to L[C,1,1](\mathcal{I}_2)$ dir.

Teorem 7.1.6. $S_F^2(\mathcal{I}_2) \subset S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)$ olması için gerek ve yeter koşul $P-\lim\limits_{m,n\to\infty} \inf \dfrac{\lambda_{m,n}}{mn} > 0$ olmasıdır.

İspat. $h(\tau,\upsilon) \in S_F^2(\mathcal{I}_2)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{mn}\left|\left\{\tau \le m, \upsilon \le n : |h(\tau,\upsilon) - L| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \frac{1}{mn}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : |h(\tau,\upsilon) - L| \ge \varepsilon\right\}\right|$$
$$\ge \frac{\lambda_{m,n}}{mn}\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : |h(\tau,\upsilon) - L| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olur. Eğer $\liminf_m \dfrac{\lambda_m}{m} = a$ ve $\liminf_n \dfrac{\mu_n}{n} = b$ ise $\left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \dfrac{\lambda_{m,n}}{mn} < \dfrac{ab}{2}\right\}$ sonludur ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|h(\tau,\upsilon) - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \delta\right\}$$
$$\subset \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{mn}\left|\left\{\tau \le m,\ \upsilon \le n : \left|h(\tau,\upsilon) - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ge \frac{ab}{2}\delta\right\}$$
$$\cup \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{\lambda_{m,n}}{mn} < \frac{ab}{2}\right\}$$

bağıntısı sağlanır. $\mathcal{I}_2$ uygun bir ideal olduğundan $h(\tau,\upsilon) \in S_F^{\lambda,\mu}(\mathcal{I}_2)$ olacaktır. Diğer taraftan, $S_F^2(\mathcal{I}_2)$ ve $P-\lim\limits_{m,n\to\infty} \inf \dfrac{\lambda_{m,n}}{mn} = 0$ olsun. Bu durumda $\dfrac{\lambda_{m_j,n_k}}{m_j n_k} < \dfrac{1}{jk}$ olacak şekilde $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ ve $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ indisleri seçilsin ve $j = k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunu eğer $(\tau,\upsilon) \in I_{m_j,n_k}$ olduğu koşulda fonksiyon değeri 1; diğer durumlarda fonksiyonun değeri 0 olacak şekilde tanımlansın. $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı ve çift istatistiksel yakınsak olduğundan $h(\tau,\upsilon) \in S_F^2(\mathcal{I}_2)$ dir. Fakat $h(\tau,\upsilon)$

fonksiyonu kuvvetli $[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)-$çift toplanabilir olmadığından bu durum $P-\lim\limits_{m,n\to\infty}\inf\dfrac{\lambda_{m,n}}{mn}>0$ olmasını gerektirir.

Teorem 7.1.7. $S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\cap\ell_{f_\infty}^2$ kesişim kümesi $\ell_{f_\infty}^2$ uzayının bir kapalı lineer alt uzayıdır.

İspat. $h_{r,s}=h_{r,s}(\tau,\upsilon)\subset S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\cap\ell_{f_\infty}^2$ yakınsak bir fonksiyon olsun ve $h(\tau,\upsilon)\in\ell_{f_\infty}^2$ fonksiyonuna yakınsasın. $h=h(\tau,\upsilon)\in S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)$ olduğu gösterilmelidir. $h_{r,s}\in S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\cap\ell_{f_\infty}^2$ olduğundan $r=1,2,3,...$ ve $s=1,2,3,...$ olacak şekilde $h_{r,s}(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$istatistiksel yakınsadığı $\mathcal{L}_{r,s}$ reel sayısı vardır. İlk olarak $(\mathcal{L}_{r,s})$ dizisinin $\mathcal{L}$ sayısına yakınsadığını ve $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında ölçülebilir reel değerli $h=h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun $\mathcal{L}$ reel sayısına yakınsak olduğu gösterilecektir. Bu durumda, $r,s=1,2,3,...$ için $(\varepsilon_{r,s})$ Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak olan çift indisli dizisi olsun. Eğer $r,s\geq N_{r,s}$ olacak şekilde pozitif $N_{r,s}$ reel sayısı varsa, $\|h\|=\sup\limits_{\tau,\upsilon}|h(\tau,\upsilon)|<\infty$ olması durumunda $\|h-h_{r,s}\|\leq\dfrac{\varepsilon_{r,s}}{4}$ olur. Genelliği bozmadan $N_{r,s}=rs$ ve $0<\delta<\dfrac{1}{5}$ olsun. Bu durumda A ve B kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h_{r,s}(\tau,\upsilon)-\mathcal{L}_{r,s}\right|\geq\frac{\varepsilon_{r,s}}{4}\right\}\right|<\delta\right\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

ve

$$B=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h_{r+1,s+1}(\tau,\upsilon)-\mathcal{L}_{r+1,s+1}\right|\geq\frac{\varepsilon_{r+1,s+1}}{4}\right\}\right|<\delta\right\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2).$$

$A \cap B \in \mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ ve $\varnothing \notin \mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ olduğundan $(m,n) \in A \cap B$ ve

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|h_{r,s}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r,s}\right| \geq \frac{\varepsilon_{r,s}}{4} \vee \left|h_{r+1,s+1}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r+1,s+1}\right| \geq \frac{\varepsilon_{r+1,s+1}}{4}\right\}\right| \leq 2\delta < 1$$

dir. $P-\lim_{m,n} \lambda_{m,n} = \infty$ ve $A \cap B \in \mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ sonsuz küme olduğundan dolayı $\lambda_{m,n} > 5$ olacak şekilde m,n reel sayıları seçilsin. Bu durumda, $(\tau,\upsilon) \in I_{m,n}$ iken $\left|h_{r,s}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r,s}\right| < \frac{\varepsilon_{r,s}}{4}$ ve $\left|h_{r+1,s+1}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r+1,s+1}\right| < \frac{\varepsilon_{r,s}}{4}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_{r,s} - \mathcal{L}_{r+1,s+1}\right| &\leq \left|\mathcal{L}_{r,s} - h_{r,s}(\tau,\upsilon)\right| + \left|h_{r,s}(\tau,\upsilon) - h_{r+1,s+1}(\tau,\upsilon)\right| + \left|h_{r+1,s+1}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r+1,s+1}\right| \\
&\leq \left|h_{r,s}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r,s}\right| + \left|h_{r+1.s+1}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r+1,s+1}\right| + \left\|h - h_{r,s}\right\| + \left\|h - h_{r+1,s+1}\right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon_{r,s}}{4} + \frac{\varepsilon_{r,s}}{4} + \frac{\varepsilon_{r,s}}{4} + \frac{\varepsilon_{r,s}}{4} = \varepsilon_{r,s}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $\left(\mathcal{L}_{r,s}\right)$ dizisi reel terimli bir Cauchy dizisidir ve $m,n \to \infty$ için Pringsheim anlamında $\mathcal{L}_{r,s}$ dizisi $\mathcal{L}$ ye yakınsaktır. Her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_{r,s} < \frac{\varepsilon}{4}$, $\left\|h - h_{r,s}\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$ ve $\left|\mathcal{L}_{r,s} - \mathcal{L}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ varsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|h(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|h_{r,s}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r,s}\right| + \left\|h - h_{r,s}\right\| + \left|\mathcal{L}_{r,s} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{m,n} : \left|h_{r,s}(\tau,\upsilon) - \mathcal{L}_{r,s}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|
\end{aligned}$$

olur ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h(\tau,\upsilon)-\mathcal{L}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$
$$\subset\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_{m,n}}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}:\left|h_{r,s}(\tau,\upsilon)-\mathcal{L}_{r,s}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

elde edilir ve $h(\tau,\upsilon)\to\mathcal{L}_{r,s}\left(S_F^{\lambda\mu}(\mathcal{I}_2)\right)$ sonucuna varılır.

Örnek 7.1.8. $h_{r,s}(\tau,\upsilon)=\left(\frac{1}{\tau\upsilon}\right)^{1-\frac{1}{rs}}$ fonksiyonu Teorem 7.1.7' yi sağlayan bir fonksiyondur.

7.2. İki Değişkenli Ölçülebilir Fonksiyonlar için $\mathcal{I}_2$-Lacunary Kuvvetli Toplanabilme

$\mathcal{I}_2\subset\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ uygun bir ideal olsun. Bu bölümün ikinci kısmında, $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki değişkenli ölçülebilir reel değerli $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu göz önüne alınarak $\mathcal{I}_2-$çift lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $\mathcal{I}_2-$çift lacunary toplanabilir fonksiyonların uzayı tanımlanmıştır ve bu iki yeni metot arasındaki kapsam bağıntıları incelenmiştir [64].

Tanım 7.2.1. $p(0)=0,\ t\to\infty$ iken $\alpha(t)=p(t)-p(t-1)\to\infty$ ve $q(0)=0,\ s\to\infty$ iken $\beta(s)=q(s)-q(s-1)\to\infty$ olacak şekilde $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ fonksiyonu artan bir çift lacunary fonksiyonu tanımlansın. $r\to\infty$ için $\frac{p(t)}{p(t+1)}\leq 1,\ \frac{q(s)}{q(s+1)}\leq 1$ ve $\frac{p(r)}{q(r)}\leq 1$ olsun. $p(1)\leq q(1)\leq p(2)\leq q(2)\leq\cdots\leq p(r-1)\leq q(r-1)\leq p(r)\leq q(r)$ dir. Ek olarak $p(t,s)=p(t)\cdot q(s)$ ve $\alpha(t,s)=\alpha(t)\cdot\beta(s)$ olarak alınır ve Θ_F lacunary fonksiyonu $I_{t,s}=\{(\tau,\upsilon):p(t-1)<\tau\leq p(t)\ \&\ q(s-1)<\upsilon\leq q(s)\}$

$$\xi(t)=\frac{p(t)}{p(t-1)},\ \varphi(s)=\frac{q(s)}{q(s-1)}\ \text{ ve }\ \xi(t,s)=\xi(t)\cdot\varphi(s)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 7.2.2. $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ bir çift lacunary fonksiyonu, $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon ve $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstermek üzere, eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{t,s\to\infty}\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına lacunary çift istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_{\Theta_F}-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ ile gösterilir. Lacunary çift istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $\left[S_{\Theta_F}\right]$ ile gösterilecektir.

Tanım 7.2.3. $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ bir çift lacunary fonksiyonu ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$P-\lim_{t,s\to\infty}\frac{1}{\alpha(t,s)}\int_{p(t-1)}^{p(t)}\int_{q(s-1)}^{q(s)}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L reel sayısına kuvvetli lacunary çift toplanabilirdir denir ve $\left[N_{\Theta_F}\right]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ şeklinde gösterilir. Kuvvetli lacunary çift toplanabilir fonksiyonların kümesi $\left[N_{\Theta_F}\right]$ ile gösterilecektir.

Örnek 7.2.4. $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ çift lacunary fonksiyonu ve $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli fonksiyonu

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha(t,s)}\operatorname{sgn}\left(\gamma\left(\tau,\upsilon\right)\right), & \left(\tau,\upsilon\right)\in I_{t,s} \text{ ise,}\\ 0 & \text{, diğer durumlarda,}\end{cases}$$

olacak şekilde verilsin. Burada $\gamma(\tau,\upsilon)$, $I_{t,s}$ aralığında sınırlı fonksiyonların koleksiyonu olsun. Bu durumda $h(\tau,\upsilon)\in\left[N_{\Theta_F}\right]$ dir.

Tanım 7.2.5. $\mathcal{I}_2\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)$ ideali bir uygun ideal olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\left\{\left(m,n\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu Pringsheim anlamında L sayısına $\mathcal{I}_2-$çift yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_2-\lim\limits_{\tau,\upsilon\to\infty} h(\tau,\upsilon)=L$ şeklinde gösterilir.

Tanım 7.2.6. $\Theta_F=\left\{p(t),q(s)\right\}$ bir çift lacunary fonksiyonu, $h(\tau,\upsilon)$ iki değişkenli bir fonksiyon ve $\mathcal{I}_2\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)$ uygun ideal olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{\left(t,s\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{\left(\tau,\upsilon\right)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına $S_F^2(\mathcal{I}_2)-$yakınsaktır denir ve $S_{\Theta_F}^2\left(\mathcal{I}_2\right)-\lim\limits_{\tau,\upsilon\to\infty} h(\tau,\upsilon)=L$ veya $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_{\Theta_F}^2\left(\mathcal{I}_2\right)\right)$ ile gösterilir. $\mathcal{I}_2-$lacunary çift istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $S_{\Theta_F}^2\left(\mathcal{I}_2\right)$ ile gösterilir.

Tanım 7.2.7. $\Theta_F=\left\{p(t),q(s)\right\}$ bir çift lacunary fonksiyonu ve $\mathcal{I}_2\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)$ uygun ideal olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}|h(\tau,\upsilon)-L|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ise $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına $N_{\Theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)-$çift lacunary kuvvetli toplanabilirdir denir $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(N_{\Theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)\right)$ veya $N_{\Theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)-\lim_{\tau,\upsilon\to\infty}h(\tau,\upsilon)=L$ ile gösterilir. Çift $\mathcal{I}_2-$lacunary kuvvetli toplanabilir fonksiyonların kümesi $N_{\theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ ile gösterilir.

Örnek 7.2.8. $\mathbb{N}$ 'nin bazı sonlu R alt kümeleri için

$$\mathcal{I}_2=\left\{K\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}:K=(\mathbb{N}\times R)\cup(R\times\mathbb{N})\right\}$$

ideali ve $\Theta_F=\left\{\left(e^t,3^s\right)\right\}$ çift lacunary fonksiyonu olsun. Özel olarak $A\in\mathcal{I}_2$ olacak şekilde bir A kümesi göz önüne alınsın ve iki değişkenli $h(\tau,\upsilon)$ reel değerli fonksiyonu $I_{t,s}=\left\{(\tau,\upsilon):e^{t-1}<\tau\leq e^t\ \&\ 3^{s-1}<\upsilon\leq 3^s\right\}$ olmak üzere,

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{cases}\sqrt{\tau\upsilon}, & (\tau,\upsilon)\notin A,\ e^{t-1}+1\leq\tau\leq e^t+\sqrt{\alpha(t)}\text{ ve }3^{s-1}+1\leq\upsilon\leq 3^s+\sqrt{\beta(s)}\text{ ise,}\\ \sqrt{\tau\upsilon}, & (\tau,\upsilon)\in A,\ e^{t-1}\leq\tau\leq e^{t-1}+\alpha(t)\text{ ve }3^{s-1}\leq\upsilon\leq 3^{s-1}+\beta(s)\text{ ise,}\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $\varepsilon>0$ ve $(t,s)\notin A$ için,

$$P-\lim_{t,s\to\infty}\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:|h(\tau,\upsilon)-0|\geq\varepsilon\right\}\right|\leq P-\lim_{t,s\to\infty}\frac{\sqrt{\alpha(t)}\sqrt{\beta(s)}}{\alpha(t,s)}=0,$$

elde edilir. $\delta>0$, $(t,s)\notin A$ ve $t,s\geq z_0$ için

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:|h(\tau,\upsilon)|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta$$

olacak şekilde z_0 pozitif sayısı vardır. $B=\{1,2,...,z_0-1\}$ ve

$$E=\left\{(t,s)\notin A:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:|h(\tau,\upsilon)|\geq\varepsilon\}\right|\geq\delta\right\}$$

olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_2$ idealinin tanımından $E\subseteq(\mathbb{N}\times B)\cup(B\times\mathbb{N})$ ve $E\in\mathcal{I}_2$ dir. Yani

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:|h(\tau,\upsilon)|\geq\varepsilon\}\right|\geq\delta\right\}\subset A\cup E$$

elde edilir ve $S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)-\lim\limits_{\tau,\upsilon\to\infty}h(\tau,\upsilon)=0$ dır. Fakat

$$P-\lim_{t,s}\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:|h(\tau,\upsilon)|\geq\varepsilon\right|\nrightarrow 0$$

olur. O halde, iki değişkenli reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar için $S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)-$çift istatistiksel yakınsaklığın $S_{\Theta_F}-$çift istatistiksel yakınsaklığın genellemesi olduğu görülür.

Teorem 7.2.9. $\mathcal{I}_2\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ uygun bir ideal ve $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ çift lacunary fonksiyonu olsun. Bu durumda,

1) $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(N_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)\Rightarrow h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ dir.

2) $N_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)$, $S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)$ 'nin uygun (proper) bir alt kümesidir.

3) Eğer $h(\tau,\upsilon)$ istatistiksel sınırlı ve $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ ise $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(N_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ dir.

İspat. 1) $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(N_{\Theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)\right)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\iint\limits_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}} \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| d\tau d\upsilon \geq \int\limits_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon} \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| d\tau d\upsilon$$
$$\geq \varepsilon\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

olduğundan

$$\frac{1}{\varepsilon\alpha(t,s)}\int\limits_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}} \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| d\tau d\upsilon \geq \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

olur. Bu durumda, her $\delta > 0$ için aşağıdaki kapsama elde edilir.

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$
$$\subseteq\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\iint\limits_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}} \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\delta\right\}.$$

$h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(N_{\Theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)\right)$ olduğundan ikinci kısımdaki küme $\mathcal{I}_2$ idealinin bir elemanıdır ve

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

olur ve $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_{\Theta_F}\left(\mathcal{I}_2\right)\right)$ dir.

2) $h = h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \sqrt[3]{\alpha(t,s)} & 0 & \cdots \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \sqrt[3]{\alpha(t,s)} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt[3]{\alpha(t,s)} & \sqrt[3]{\alpha(t,s)} & \cdots & \cdots & \sqrt[3]{\alpha(t,s)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu iki değişkenli sınırlı olmayan bir fonksiyon olduğu açık olarak görülmektedir. Her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\leq\frac{\sqrt[3]{\alpha(t,s)}}{\alpha(t,s)}$$

olması her $\delta>0$ için

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\subseteq\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{\sqrt[3]{\alpha(t,s)}}{\alpha(t,s)}\geq\delta\right\}$$

bağıntısını gerektirir. $P-\lim\frac{\sqrt[3]{\alpha(t,s)}}{\alpha(t,s)}=0$ olduğundan sağ kısımdaki küme sonlu ve $\mathcal{I}_2$ idealinin elemanıdır. O halde,

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}_2$$

olur. Bu durumda, $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}0\ \left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ dir. Diğer taraftan, $t,s\to\infty$ için

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}\left|h(\tau,\upsilon)\right|d\tau d\upsilon=\frac{\sqrt[3]{\alpha(t,s)}\left(\sqrt[3]{\alpha(t,s)}\left(\sqrt[3]{\alpha(t,s)}+1\right)\right)}{2\alpha(t,s)}\xrightarrow{P}\frac{1}{2}$$

olması $t,s\to\infty$ için $\left(\frac{1}{\alpha(t,s)}\sqrt[3]{\alpha(t,s)}\left(\sqrt[3]{\alpha(t,s)}\left(\sqrt[3]{\alpha(t,s)}+1\right)\right)\right)\xrightarrow{P}1$ olmasını gerektirir. $\varepsilon=\frac{1}{4}$ için

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}\left|h(\tau,\upsilon)\right|d\tau d\upsilon\geq\frac{1}{4}\right\}$$
$$=\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\sqrt[3]{\alpha(t,s)}\left(\sqrt[3]{\alpha(t,s)}\left(\sqrt[3]{\alpha(t,s)}+1\right)\right)\geq\frac{1}{2}\right\}\in\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$$

elde edilir ve buradan da $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}0\ \left(N_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olmadığı görülür.

3) Eğer $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P}L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ ve $h(\tau,\upsilon)\in F\left(\ell\right)_\infty^2$ ise $(\tau,\upsilon)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\leq R$ olacak şekilde $R>0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon&=\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&+\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s},\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\\&\leq\frac{R}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\geq\varepsilon\right\}$$
$$\subseteq\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2R}\right\}$$

elde edilir. $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olduğundan ikinci kısımdaki küme $\mathcal{I}_2$ idealinin bir elemanıdır. Bu durumda

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}_2$$

dir ve $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(N_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olur.

Aşağıdaki teoremde iki değişkenli ölçülebilir fonksiyonlar için $\mathcal{I}_2-$çift istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2-$çift lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 7.2.10. $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ çift lacunary fonksiyonu ve $\mathcal{I}_2\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)$ uygun bir ideal olsun. $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_F^2(\mathcal{I}_2)\right)\Rightarrow h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_t \xi(t)>1$ ve $\limsup_s \varphi(s)>1$ olmasıdır. Eğer $\liminf_t \xi(t)=1$ ve $\liminf_s \varphi(s)=1$ ise $\mathcal{I}_2-$çift istatistiksel yakınsak, fakat $\mathcal{I}_2-$çift lacunary istatistiksel yakınsak olmayan, iki değişkenli sınırlı $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu vardır.

İspat. $\liminf_t \xi(t)>1$ ve $\limsup_s \varphi(s)>1$ olsun. Yeterince büyük t ve s terimleri için $1+\psi\leq\xi(t)$ ve $1+\psi\leq\varphi(s)$ olacak şekilde $\psi>0$ sayısı vardır. Bu durumda $\dfrac{\alpha(t)}{p(t)}\geq\dfrac{\psi}{1+\psi}$ ve $\dfrac{\beta(s)}{q(s)}\geq\dfrac{\psi}{1+\psi}$ dir. Eğer $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_F^2(\mathcal{I}_2)\right)$ ise her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{p(t,s)}\left|\left\{\tau \le p(t) \text{ ve } \upsilon \le q(s) : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$
$$\ge \frac{1}{p(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$
$$= \frac{\alpha(t,s)}{p(t,s)}\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$
$$\ge \left(\frac{\psi}{1+\psi}\right)^2 \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olur ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{(t,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|(\tau,\upsilon) \in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right| \ge \delta\right\}$$
$$\subseteq \left\{(t,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{p(t,s)}\left|\tau \le p(t) \text{ and } \upsilon \le q(s) : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right| \ge \delta\left(\frac{\psi}{1+\psi}\right)^2\right\} \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. Buradan da $h(\tau,\upsilon) \xrightarrow{P} L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ bulunur. Bu sonuç teoremin gerek şartını ispatlar.

Diğer taraftan $\lim_t \xi(t) = 1$ ve $\liminf_s \varphi(s) = 1$ olsun. $\eta_i \ge \eta_{i-1} + 2$ ve $\vartheta_j \ge \vartheta_{j-1} + 2$ için $\frac{p(\eta_i)}{p(\eta_i - 1)} < 1 + \frac{1}{i}$, $\frac{q(\vartheta_j)}{q(\vartheta_j - 1)} < 1 + \frac{1}{j}$, $\frac{p(\eta_i - 1)}{p(\eta_{i-1})} > i$ ve $\frac{q(\vartheta_j - 1)}{q(\vartheta_{j-1})} > j$ olmak üzere Θ_F çift lacunary fonksiyonunun $g(\eta_i, \vartheta_j) = g(\eta_i)\cdot h(\vartheta_j)$ çift fonksiyonu verilsin. $h(x,y)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in I_{\eta_i,\vartheta_j} \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

O halde, her L reel sayısı ve $i, j = 1,2,...$ için

$$\frac{1}{\alpha(\eta_i,\vartheta_j)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{\eta_i,\vartheta_j}}\left|h(x,y)-L\right|dxdy=\left|1-L\right|$$

ve $(t,s)\neq(\eta_i,\vartheta_j)$ için

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\iint_{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}}\left|h(x,y)-L\right|dxdy=\left|L\right|$$

olur. Bu durumda $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun $N_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)$ uzayına ait olmadığı açıktır. $h(\tau,\upsilon)\in\ell^2_{f_\infty}$ ve Teorem 7.2.9' un 3. şıkkından $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\nrightarrow}L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ elde edilir. Ayrıca, m ve n yeterince büyük tamsayılar olmak üzere $p(\eta_i-1)\leq m\leq p(\eta_{i+1}-1)$ ve $q(\vartheta_j-1)\leq n\leq q(\vartheta_{j+1}-1)$ için i ve j tek (unique) sayıları bulunur. Bu durumda, C sayısı yeterince büyük sabit bir sayı olmak üzere,

$$\frac{\varepsilon}{mn}\left|\left\{\tau \le m,\ \upsilon \le n : \left|h(\tau,\upsilon)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \frac{1}{mn}\int_{x=1}^{m}\int_{y=1}^{n}\left|h(x,y)\right|dxdy$$

$$\le \left(\frac{p(\eta_i-1)+\alpha(\eta_i)}{p(\eta_i-1)}\right)\cdot\left(\frac{q(\vartheta_j-1)+\beta(\vartheta_j)}{q(\vartheta_j-1)}\right)$$

$$\le \frac{p(\eta_i-1,\vartheta_j-1)}{p(\eta_i-1,\vartheta_j-1)}+\frac{p(\eta_i-1)\cdot\beta(\vartheta_j)}{p(\eta_i-1)\cdot q(\vartheta_j-1)}$$

$$+\frac{\alpha(\eta_i)\cdot q(\vartheta_j-1)}{p(\eta_i-1)\cdot q(\vartheta_j-1)}+\frac{\alpha(\eta_i)\cdot\beta(\vartheta_j)}{p(\eta_i-1)\cdot q(\vartheta_j-1)}$$

$$\le 1+\frac{\beta(\vartheta_j)}{q(\vartheta_j-1)}+\frac{\alpha(\eta_i)}{p(\eta_i-1)}+\frac{\alpha(\eta_i)\cdot\beta(\vartheta_j)}{p(\eta_i-1)\cdot q(\vartheta_j-1)}$$

$$\le 1+\frac{q(\vartheta_j)-q(\vartheta_j-1)}{q(\vartheta_j-1)}+\frac{p(\eta_i)-p(\eta_i-1)}{p(\eta_i-1)}$$

$$+\frac{\left[p(\eta_i)-p(\eta_i-1)\right]\cdot\left[q(\vartheta_j)-q\left(\vartheta_j-1\right)\right]}{p(\eta_i-1)\cdot q(\vartheta_j-1)}$$

$$\le 1+\frac{q(\vartheta_j)}{q(\vartheta_j-1)}-1+\frac{p(\eta_i)}{p(\eta_i-1)}-1$$

$$+\left(\frac{p(\eta_i)}{p(\eta_i-1)}-1\right)\cdot\left(\frac{q(\vartheta_j)}{q(\vartheta_j-1)}-1\right)$$

$$\le\left(1+\frac{1}{i}\right)+\left(1+\frac{1}{j}\right)+\frac{1}{ij}-1$$

$$\le 1+\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{ij}\le C$$

elde edilir. Buradan da $\mathcal{I}_2$ ideali için $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu $\mathcal{I}_2-$çift istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir sonraki teoremde Θ_F çift lacunary fonksiyonu için $\hat{G}_2\in\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ kümesinin

$$\bigcup_{m,n}\left\{(m,n): p(t-1)<m<p(t) \ \& \ q(s-1)<n<q(s),\ (t,s)\in \hat{G}_2\right\}\in \mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$$

koşulunu sağlandığı kabul edilmiştir.

Teorem 7.2.11. $\Theta_F=\{p(t),q(s)\}$ çift lacunary fonksiyonu ve $\mathcal{I}_2\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ uygun ideali olsun. $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)\Rightarrow h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_F^2(\mathcal{I}_2)\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_t \xi(t)<\infty$ ve $\limsup_s \varphi(s)<\infty$ olmasıdır.

İspat. $\limsup_t \xi(t)<\infty$ ve $\limsup_s \varphi(s)<\infty$ olsun. Bu durumda $t\geq 1$, $s\geq 1$ için $\xi(t)<R$ ve $\varphi(s)<S$ olacak şekilde $0<R<\infty$ ve $0<S<\infty$ sayıları vardır. $h(\tau,\upsilon)\xrightarrow{P} L\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olsun. $\varepsilon,\delta,\delta^*>0$ için

$$\hat{G}_2=\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}: \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta\right\}$$

ve

$$\hat{E}_2=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{mn}\left|\left\{\tau\leq m,\ \upsilon\leq n: \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta^*\right\}$$

kümeleri tanımlansın. $\hat{G}_2\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olduğundan, açıkca görülmektedir ki süzgeç $\mathcal{I}_2$ ideali ile ilişkilidir. Bu durumda, $(i,j)\in\hat{G}_2$ için

$$\tilde{A}_{i,j}=\frac{1}{\alpha(i,j)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{i,j}: \left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta$$

olur ve $(t,s)\in\hat{G}_2$ için $p(t-1)<m<p(t)$ ve $q(s-1)<n<q(s)$ olacak şekilde $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sayıları vardır. Ayrıca $r\to\infty$ için

$\alpha(t,s)=\alpha(t)\cdot\beta(s)=\left[p(t)-p(t-1)\right],\qquad \left[q(s)-q(s-1)\right]\le p(t,s)-p(t-1,s)$ ve $p(1)\le q(1)\le p(2)\le q(2)\le\cdots\le p(r)\le q(r)$ dir ve

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{mn}\left|\left\{\tau\le m,\ \upsilon\le n:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\\
&=\frac{1}{p(t-1,s-1)}\left|\left\{\tau\le p(t),\ \upsilon\le q(s):\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\\
&=\frac{1}{p(t-1,s-1)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{2,2}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|+\cdots+\\
&+\frac{1}{p(t-1,s-1)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\\
&\le\frac{p(2,2)-p(2,1)}{p(t-1,s-1)}\frac{1}{\alpha(2,2)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{2,2}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\\
&+\frac{p(3,3)-p(2,3)}{p(t-1,s-1)}\frac{1}{\alpha(3,3)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{3,3}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\\
&+\frac{p(t,s)-p(t-1,s)}{p(t-1,s-1)}\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\\
&\le\frac{p(2,2)-p(2,1)}{p(t-1,s-1)}\tilde{A}_{2,2}+\frac{p(3,3)-p(2,3)}{p(t-1,s-1)}\tilde{A}_{3,3}+\cdots+\frac{p(t,s)-p(t-1,s)}{p(t-1,s-1)}\tilde{A}_{t,s}\\
&\le\sup_{(i,j)\in\hat{G}_2}\tilde{A}_{i,j}\,\frac{p(t,s)}{p(t-1,s-1)}<RS\delta
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\delta^*=\dfrac{\delta}{RS}$ olarak seçilirse $\hat{G}_2\in\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ olduğundan

$$\bigcup_{m,n}\left\{(m,n): p(t-1)<m<p(t)\ \&\ q(s-1)<n<q(s),\ \left(t,s\right)\in\hat{G}_2\right\}\subset\hat{E}_2$$

olur. Sonuç olarak, $\hat{E}_2\in\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_2\right)$ dir ve teorem ispatlanmış olur.

Teorem 7.2.12. $\ell^2_{f_\infty}$ tüm sınırlı fonksiyonların supremum normuna sahip bir Banach uzayı olmak üzere $S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\cap\ell^2_{f_\infty}$ kümesi $\ell^2_{f_\infty}$ uzayının bir kapalı lineer alt uzayıdır.

İspat. $h_{m,n} = h_{m,n}(\tau,\upsilon)$ $S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2) \cap \ell^2_{f_\infty}$ kümesi üzerinde yakınsak bir fonksiyon olsun ve $h(\tau,\upsilon) \in \ell^2_{f_\infty}$ fonksiyonuna yakınsasın. $h_{m,n}(\tau,\upsilon) \in S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)$ olduğundan, $m = 1,2,3,...$ ve $n = 1,2,3,...$ için $S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2) - P - \lim h_{m,n}(\tau,\upsilon) = \mu_{m,n}$ olacak şekilde $\mu_{m,n}$ vardır. $h_{m,n}(\upsilon,\tau) \to h(\tau,\upsilon)$ olduğundan $h_{m,n}(\tau,\upsilon)$ bir Cauchy fonksiyonudur. Her $\varepsilon > 0$ için her $\overline{p} \geq m \geq n_0$ ve $\overline{q} \geq n \geq n_0$ olacak şekilde n_0 pozitif tamsayısı vardır ve $\left|h_{\overline{p},\overline{q}} - h_{m,n}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ dir. $h_{m,n}(\tau,\upsilon) \xrightarrow{P} \mu_{m,n}\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $\tilde{\delta} > 0$ için eğer

$$R_1 = \left\{(t,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{t,s} : \left|h_{m,n}(\tau,\upsilon) - \mu_{m,n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| < \frac{\tilde{\delta}}{3}\right\}$$

ve

$$R_2 = \left\{(t,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon) \in I_{t,s} : \left|h_{\overline{p},\overline{q}}(\tau,\upsilon) - \mu_{\overline{p},\overline{q}}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| < \frac{\tilde{\delta}}{3}\right\}$$

kümeleri tanımlanırsa $\varnothing \neq R_1 \cap R_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ dir. $(t,s) \in R_1 \cap R_2$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(m,n) \in I_{t,s} : \left|h_{m,n}(\tau,\upsilon) - \mu_{m,n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| < \frac{\tilde{\delta}}{3}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(m,n) \in I_{t,s} : \left|h_{\overline{p},\overline{q}}(\tau,\upsilon) - \mu_{\overline{p},\overline{q}}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| < \frac{\tilde{\delta}}{3}$$

olması

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(m,n)\in I_{t,s}:\left|h_{m,n}(\tau,\upsilon)-\mu_{m,n}\right|\geq\frac{\varepsilon}{3}\ \vee\left|h_{\bar{p},\bar{q}}(\tau,\upsilon)-\mu_{\bar{p},\bar{q}}\right|\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|<\tilde{\delta}<1$$

olmasını gerektirir. Bunu göstermek için $\left|h_{m,n}(\tau_0,\upsilon_0)-\mu_{m,n}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ ve $\left|h_{\bar{p},\bar{q}}(\tau_0,\upsilon_0)-\mu_{\bar{p},\bar{q}}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $(\tau_0,\upsilon_0)\in I_{t,s}$ ikilisi göz önüne alınsın. Ayrıca $\bar{p}\geq m\geq n_0$ ve $\bar{q}\geq n\geq n_0$ için

$$\begin{aligned}\left|\mu_{m,n}-\mu_{\bar{p},\bar{q}}\right|&=\left|\mu_{m,n}-h_{\bar{p},\bar{q}}(\tau_0,\upsilon_0)\right|+\left|h_{\bar{p},\bar{q}}(\tau_0,\upsilon_0)-h_{m,n}(\tau_0,\upsilon_0)\right|+\left|h_{m,n}(\tau_0,\upsilon_0)-\mu_{m,n}\right|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

dir. Bu durumda, $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$)' de $\left(\mu_{m,n}\right)$ dizisi bir çift indisli Cauchy dizisidir. Sonuç olarak, $m,n\to\infty$ için $\mu_{m,n}\xrightarrow{P}\mu$ olacak şekilde μ sayısı vardır. O halde, iki boyutlu reel değerli ölçülebilir h fonksiyonu için $h=h(\tau,\upsilon)\to\mu\left(S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ olduğunu göstermek gereklidir. $h_{m,n}=h_{m,n}(\tau,\upsilon)\in S_{\Theta_F}(\mathcal{I}_2)\cap\ell^2_{f_\infty}$ fonksiyonu $h(\tau,\upsilon)\in\ell^2_{f_\infty}$ fonksiyonuna $P-$yakınsak olduğundan, $\varepsilon>0$ ve $m,n\geq n_1(\varepsilon)$ iken $\left|h_{m,n}(\tau,\upsilon)-h_{m,n}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $n_1(\varepsilon)$ sayısı vardır. Ayrıca, $\varepsilon>0$ için $\mu_{m,n}\xrightarrow{P}\mu$ olduğundan $\forall m,n\geq n_2(\varepsilon)$ olmak üzere

$$\left|\mu_{m,n}-\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $n_2(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır. Buradan $n_3(\varepsilon)=\max\{n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\}$ ve $m_0,n_0\geq n_3(\varepsilon)$ seçersek, her $(\tau,\upsilon)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\left|h(\tau,\upsilon)-\mu\right| \le \left|h(\tau,\upsilon)-h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)\right| + \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu_{m_0,n_0}\right| + \left|\mu_{m_0,n_0}-\mu\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu_{m_0,n_0}\right| + \frac{\varepsilon}{3}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)-\mu\right| \ge \varepsilon\right\} \subseteq \left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu_{m_0,n_0}\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

olması

$$\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h(\tau,\upsilon)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu_{m_0,n_0}\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olmasını gerektirir. Ayrıca, $\tilde{\delta} > 0$ için

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu_{m_0,n_0}\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| < \tilde{\delta}\right\}$$
$$\subseteq \left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \tilde{\delta}\right\}$$

olur. Ayrıca,

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu_{m_0,n_0}\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| < \tilde{\delta}\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olduğundan

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s} : \left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \tilde{\delta}\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

ve

$$\left\{(t,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{\alpha(t,s)}\left|\left\{(\tau,\upsilon)\in I_{t,s}:\left|h_{m_0,n_0}(\tau,\upsilon)-\mu\right|\geq\varepsilon\right\}\right|<\tilde{\delta}\right\}\in\mathcal{I}_2$$

elde edilir. O halde $h(\tau,\upsilon)\overset{P}{\rightarrow}\mu\left(S_{\theta_F}(\mathcal{I}_2)\right)$ dir.

Sonuç 7.2.13. $\ell^2_{f_\infty}$ tüm sınırlı fonksiyonların supremum normuna sahip bir Banach uzayı olmak üzere, $\left(S^2_F(\mathcal{I}_2)\right)\cap\ell^2_{f_\infty}$ kümesi $\ell^2_{f_\infty}$ uzayının bir kapalı lineer alt uzayıdır.

BÖLÜM 8. GAUGE ANLAMINDA KUVVETLİ TOPLANABİLME

8.1. Ölçülebilir Fonksiyonlar için Gauge Kuvvetli Toplanabilirlik

Bu bölümde, $(1,\infty)$ aralığında ölçülebilir reel değerli $h(\vartheta)$ fonksiyonu göz önüne alınarak Gauge ile ilişkili olarak $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilme kavramı tanımlanmıştır. Buna ek olarak, bu kavram kullanılarak diğer integral teknikleri ile karşılaştırılarak bazı önemli kapsama bağıntıları elde edilmiştir [65].

Tanım 8.1.1. $\delta : J = [c,d] \to (1,\infty)$ pozitif bir fonksiyon olsun ve $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(\omega_i) = (\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i))$ olacak şekilde J aralığı üzerinde bir açık aralık fonksiyonu tanımlansın. Eğer $J_i = [i - \lambda_i + 1, i]$ ise

$$\omega_i - \delta(\omega_i) < i - \lambda_i + 1 \le \omega_i \le i < \omega_i + \delta(\omega_i)$$

ifadesinin yerine $\omega_i \in J_i \subset \overline{\gamma}(\omega_i)$ yazılabilir ve $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(\omega_i) \in \Delta_G$ ve $h(\vartheta)$ fonksiyonu $(1,\infty)$ aralığı üzerinde ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer Gauge anlamında $\int h(\vartheta)$ ve $\int |h(\vartheta)|$ integralleri var ise

$$\xi(\omega_i) = (\omega_i + \delta(\omega_i)) - (\omega_i - \delta(\omega_i)) = 2\delta(\omega_i)$$

olmak üzere,

$$\lim_{\omega_i \to \infty} \frac{1}{\xi(\omega_i)} \int_{\omega_i - \delta(\omega_i)}^{\omega_i + \delta(\omega_i)} \left| h(\upsilon) - L \right| d\upsilon = 0$$

dir. O halde, $h(\vartheta)$ fonksiyonu Gauge ile ilişkili olarak L sayısına $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilirdir denir ve $\left[G, \overline{\gamma}\right] - \lim h(\upsilon) = L$ ile gösterilir.

Not: $h:[c,d] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer h fonksiyonu Lebesgue anlamında toplanabilir ise h fonksiyonu Lebesgue anlamında kuvvetli toplanabilirdir ve

$$\left| \int_c^d h(y)\,dy \right| \leq \int_c^d \left| h(y) \right| dy$$

dir. Bu denklik Gauge anlamında toplanabilirlik kavramı için doğru değildir ve bu kapsamda aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 8.1.2. $h(\vartheta)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$h(\vartheta) = \begin{cases} (-1)^l\, l, & \vartheta \in \left(\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l} \right], \\ 0 \quad , & \vartheta = 0, \end{cases}$$

Bu durumda, $h(\vartheta)$ fonksiyonu Gauge anlamında toplanabilirdir. Fakat h fonksiyonu Gauge anlamında kuvvetli toplanabilir değildir çünkü $|h|$ mutlak fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Gauge integrallenebilir değildir. $|h|$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\int_0^1 |h| = \int_0^{\frac{1}{m}} |h| + \int_{\frac{1}{m}}^1 |h| > \int_{\frac{1}{m}}^1 |h|$$

dir. Fakat, $1 \le l < m$ için $|h|$ fonksiyonu $\left(\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$ aralığının her bir noktası üzerinde sabittir. O halde,

$$\int_{\frac{1}{m}}^{1} |h| = \sum_{l}^{m-1} \int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} |h| = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l+1}$$

olur. Bu durumda $\int_{\frac{1}{m}}^{1} |h|$ integrali sonlu olamaz ve $|h|$ fonksiyonu Gauge anlamında integrallenebilir değildir. Sonuç olarak h fonksiyonu Gauge anlamında kuvvetli toplanabilir değildir.

Örnek 8.1.3. $h(\vartheta)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$h(\vartheta) = \begin{cases} 0 \quad , \quad \vartheta = 0 \text{ ise}, \\ 2\vartheta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{\vartheta^2}\right) + \frac{2\pi}{\vartheta} \sin\left(\frac{\pi}{\vartheta^2}\right), \; 0 < \vartheta \le 1 \text{ ise}, \end{cases}$$

Bu durumda, h fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Gauge integrallenebilirdir ve $\int_0^1 h = -1$ dir. Ancak, $|h|$ mutlak fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Gauge anlamında integrallenebilir değildir. Bunu göstermek için, $\tau_z = \sqrt{\frac{2}{4z+1}}$ ve $\phi_z = \frac{1}{\sqrt{2z}}$ olsun. $\{[\tau_z, \phi_z]\}$, ikili grup oluşturmuş ayrık bir aralık ve Gauge integralinin özelliklerinden, $|h|$ fonksiyonu $[\tau_z, \phi_z]$ aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenebilirdir. Bu durumda,

$$\int_{\tau_z}^{\phi_z} |h| \geq \left| \int_{\tau_z}^{\phi_z} h \right| = \frac{1}{2z}$$

olur. Eğer $|h|$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında integrallenebilir ise, integralin sonlu toplamsallığından, her m için

$$\int_0^1 |h| \geq \sum_{z=1}^{m} \int_{\tau_z}^{\phi_z} |h| \geq \sum_{z=1}^{m} \frac{1}{2z}$$

olması imkansızdır.

Sonuç olarak, eğer $h : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir ve $|h|$ fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenebilir ise h fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilirdir. Ancak, eğer h fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenebilir fakat $|h|$ mutlak fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenemez ise h fonsiyonu Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$toplanabilirdir denir.

Teorem 8.1.4. $J_i = \left(\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)\right)$, $-\infty < c < d < \infty$ için $[c,d] = \bigcup J_i$ ve $h : J_i \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J_i aralığında ölçülebilir ve Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$toplanabilir olsun. Ayrıca, $\omega_i - \delta(\omega_i) < \omega_i + \delta(\omega_i)$ için

$$F(x) = \int_{\omega_i - \delta(\omega_i)}^{\omega} h(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$h(\vartheta)$ fonksiyonunun belirsiz integrali olsun. Bu durumda, $h(\vartheta)$ fonksiyonunun J_i aralığın üzerinde Gauge anlamında kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul F 'nin J_i aralığında sınırlı salınımlı olmasıdır.

İspat. $h(\vartheta)$, $J_i=(\omega_i-\delta(\omega_i),\omega_i+\delta(\omega_i))$ aralığında bir fonksiyon ve $Q=\{[i-\lambda_i+1,i]\}$, J_i aralığının bir bölüntüsü olsun. Q bölüntüsüne göre F 'nin total salınımı

$$V(F,Q)=\sum_i |F(i)-F(i-\lambda_i+1)|\le \sum_i \int_{i-\lambda_i+1}^{i}|h|=\int_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)}|h|$$

dir. Bu durumda, $V_c^d F\le \int_c^d |h|<\infty$ elde edilir.

Tersine, F , J_i aralığında sınırlı salınımlı ve her $\varepsilon>0$ için

$$V_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)}F-\frac{\varepsilon}{2}<V(h,Q)\le V_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)}F$$

olacak şekilde $P_0=\{[i-\lambda_i,i-1]\}$ bölüntüsü vardır. Bu durumda, $-\lambda_i=\omega_i-\delta(\omega_i)-1,\ i=\omega_i+\delta(\omega_i)+1$ olsun ve $\bar{\gamma}_0(\omega_i)$, $[\omega_i-\delta(\omega_i),\omega_i+\delta(\omega_i)]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\bar{\gamma}_0(\omega_i)=\begin{cases}(i-\lambda_i,i-1),\ \omega_i\in(i-\lambda_i,i-1)\ \text{ise,}\\ (i-\lambda_i,i)\ ,\ \omega_i=i-1\ \text{ise,}\end{cases}$$

Bu durumda, $\bar{\gamma}-$ *fine* tagged Q bölüntüsü tag'ların arasında $\{i-\lambda_i,i-1\}$ aralığını içerir. Buna ek olarak, P_0, Q bölüntüsünün düzeltilmesi (refinement) olsun, Teorem 2.5.14. göz önüne alınırsa,

$$V_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)}F-\frac{\varepsilon}{2}<V(h,P_0)\le V(h,Q)<V_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)}F$$

olur. Bu durumda, h fonksiyonu toplanabilir olduğundan, h fonksiyonu integrallenebilirdir. O halde, $\overline{\gamma}_1 - fine$ tagged $P_2 = \{(\omega_i, [i-\lambda_i-2, i-3])\}$ bölüntüsü olmak üzere Gauge $\overline{\gamma}_1$ bulunabilir ve

$$\left| S(h, P_2) - \int_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} h(\vartheta)\, d\vartheta \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

sağlanır. Lemma 2.5.12.' den

$$\left| S(|h|, P_2) - V(F, P_2) \right| = \left| S(|h|, P_2) - \sum_i \left| \int_{i-\lambda_i}^{i-1} h(\vartheta)\, d\vartheta \right| \le \frac{\varepsilon}{2} \right|$$

elde edilir. $\overline{\gamma}_2(\omega) = \overline{\gamma}_0(\omega) \cap \overline{\gamma}_1(\omega)$ olsun ve P_3, $[\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)]$ aralığının $\overline{\gamma} - fine$ bölüntüsü olsun. Bu durumda

$$\left| S_R(|h|, P_3) - V_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} F \right| \le \left| S_R(|h|, P_3) - V(F, P_3) \right| + \left| V(F, P_3) - V_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} F \right| < \varepsilon$$

dır. Dolayısıyla, $|h|$ mutlak fonksiyonu integrallenebilirdir. $|h|$ mutlak fonksiyonu Gauge anlamında integrallenebilir ve $\omega_i - \delta(\omega_i) < i - \lambda_i + 1 \le \omega_i + \delta(\omega_i)$ olduğundan $\xi(\omega_i) = (\omega_i + \delta(\omega_i)) - (\omega_i - \delta(\omega_i)) = 2\delta(\omega_i)$ için

$$\lim_{\omega_i \to \infty} \frac{1}{\xi(\omega_i)} \int_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} |h(\vartheta) - L|\, d\vartheta = 0$$

dir. Sonuç olarak, $h(\vartheta)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}_1 -$ kuvvetli toplanabilirdir.

Teorem 8.1.5. $J_i = \left[\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)\right]$ ve $-\infty < c < d < \infty$ için $[c,d] = \bigcup J_i$ olsun. Eğer $h(\vartheta)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilir ise $h(\vartheta)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$toplanabilirdir.

İspat. $h(\vartheta)$, $J_i = \left[\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)\right]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve J_i aralığının bir bölüntüsü $Q = \left\{\left[i - \lambda_i + 1, i\right]\right\}$ olsun. $h(\vartheta)$ fonksiyonu J_i aralığında mutlak integrallenebilir olduğundan Gauge integralinin özelliklerinden $\left|\int_J h\right| \le \int_J |h|$ dir. $h(\vartheta)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilir olduğundan

$$\left|\int_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} \left(h(\vartheta) - L\right) d\vartheta\right| \le \int_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} \left|h(\vartheta) - L\right| d\vartheta$$

elde edilir. Ayrıca, $\|\Delta T\| = \left\|\omega_i - \xi(\omega_i)\right\|$ için

$$\lim_{\omega_i \to \xi(\omega_i) \text{ ve } \|\Delta T\| \to 0} \sum_i \frac{1}{\xi(\omega_i)} \int_{\omega_i-\delta(\omega_i)}^{\omega_i+\delta(\omega_i)} \left|h(\vartheta) - L\right| d\vartheta = 0$$

olur. Bu durumda $h(\vartheta)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$toplanabilirdir.

Teorem 8.1.6. $\lambda = (\lambda_u) \in \Delta$, $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(\omega_i) \in \Delta_G$, $J_i = \left[\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)\right]$ ve $-\infty < c < d < \infty$ için $[c,d] = \bigcup J_i$ ve $h(\vartheta)$ fonksiyonu $(1,\infty)$ aralığında tanımlı Gauge anlamında reel değerli bir fonksiyon olsun. O halde,

1) $[W,\lambda] \subset \left[G,\overline{\gamma}\right]$ dir.

2) Eğer $h(\vartheta)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ve $E \subset \left[\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)\right]$ için $\left[\omega_i - \delta(\omega_i), \omega_i + \delta(\omega_i)\right]$ aralığının her ölçülebilir alt kümesi üzerinde Gauge anlamında L sayısına $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilir ise $[W]-\lim h(\vartheta) = L$ dir.

İspat. 1) Lebesgue anlamında integrallenebilen tüm fonksiyonlar aynı zamanda Gauge anlamında da integrallenebilir olduğundan eğer

$$\frac{1}{\lambda_u} \int_{\vartheta \in J_u} \left|h(\vartheta) - L\right| d\vartheta$$

integralinin varlığı mevcut ise

$$\frac{1}{2\delta(\omega_i)} \int_{\vartheta \in \overline{\gamma}(\omega_i)} \left|h(\vartheta) - L\right| d\vartheta$$

integralinin varlığı da mevcuttur. Bu durumda

$$[W,\lambda]-\lim h(\vartheta) = L \Rightarrow \left[G, \overline{\gamma}\right]-\lim h(\vartheta) = L$$

dir. Tersi durum için $h(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}\sin\frac{1}{\vartheta^3}$ fonksiyonu Gauge anlamında integrallenebilir bir fonksiyondur fakat $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{\vartheta}\sin\frac{1}{\vartheta^3}\, d\vartheta = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta$ olduğundan Lebesgue anlamında integrallenebilir bir fonksiyon değildir. Sonuç olarak $h(\vartheta) \notin [W,\lambda]$ dir.

2) Eğer $h(\vartheta)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise $h(\vartheta)$ fonksiyonun sınırlı olduğu açıktır. Bu durumda her u için $\frac{4\delta(\omega_i)}{u} \le 1$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{u}\int_{1}^{u}\left(h(\vartheta)-L\right)d\vartheta\right|=\left|\frac{1}{u}\int_{1}^{u-\lambda_u}\left(h(\vartheta)-L\right)d\vartheta+\frac{1}{u}\int_{\vartheta\in J_u}\left(h(\vartheta)-L\right)d\vartheta\right|$$
$$\leq\frac{1}{u}\int_{1}^{u-\lambda_u}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta+\frac{1}{u}\int_{\vartheta\in J_u}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta$$
$$\leq\frac{2}{u}\int_{\vartheta\in J_u}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta$$
$$\leq\frac{2}{4\delta(\omega_i)}\int_{\vartheta\in\bar{\gamma}(\omega_i)}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta=\frac{1}{2\delta(\omega_i)}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta$$

olur. Bu durumda, $\left[G,\bar{\gamma}\right]-\lim h(\vartheta)=L$ olduğundan $[W]-\lim h(\vartheta)=L$ dir.

8.2. İstatistiksel Yakınsaklık Kavramının Genelleştirilmesi

Bu bölümde $(1,\infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli, ölçülebilir, Gauge anlamında integrallenebilir $h(\vartheta)$ fonksiyonu göz önüne alınarak genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, açık gerektirmeler ve varyasyonlar sunulmuştur [66].

Tanım 8.2.1. $\lambda\in\Delta$ ve $h(\vartheta)$, $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun ve $|\cdot|$ ifadesi Lebesgue ölçümünü göstersin. Her $\varepsilon>0$ için, $A=\left\{\vartheta\in I_n:\left|h(\vartheta)-L\right|\geq\varepsilon\right\}$, $\left\{A_i:i\in\mathbb{N}\right\}$, A nın sayılabilir bölüntüsü ve $\alpha_i=\sup\left\{\vartheta\in A_i\right\}$ olmak üzere eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left|\left\{\vartheta\leq\alpha_i:\left|h(\tau)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $h(\vartheta)$ fonksiyonu kardinalite yoluyla L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $S_f^* - \lim h(\vartheta) = L$ veya $h(\vartheta) \to L\left[S_f^*\right]$ ile gösterilir. Kardinalite yoluyla tanımlanan L sayısına istatistiksel yakınsak fonksiyonların uzayı $\left[S_f^*\right]$ dir.

Aşağıdaki örnekler sırasıyla ölçülebilir ve ölçülemeyen fonksiyonlar için Tanım 8.2.1. in şartlarını sağlar.

Örnek 8.2.2. $h(\vartheta)$, $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli ölçülebilir fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$h(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta \text{ bir tam karedir } / \ \{1\} \text{ ise,} \\ \dfrac{1}{\vartheta}, & \vartheta \in (1,\infty) / \vartheta \text{ bir tam kare değil ise,} \end{cases}$$

$h(\vartheta)$ fonksiyonu kardinalite yoluyla istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 8.2.3. S, $(1,\infty)$ aralığının ölçülemeyen bir alt kümesi olsun ve $h(\vartheta)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$h(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & \vartheta \in S \cup (\vartheta \text{ çift tam karedir}) \text{ ise,} \\ -\vartheta, & \vartheta \in S \cup (\vartheta \text{ tek tam karedir}) \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

$h(\vartheta)$ fonksiyonu kardinalite yoluyla istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 8.2.4. Eğer $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\alpha_n} > 0$ ve $\dfrac{\lambda_n}{\alpha_n} = O(1)$ ise $[S_\lambda] \subseteq \left[S_f^{\,*}\right]$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $[S_\lambda] - \lim h(\vartheta) = L$ olsun. Bu durumda

$$\left\{\vartheta \leq \alpha_i : \left|h(\vartheta) - L\right| \geq \varepsilon\right\} \supset \left\{\vartheta \in I_n : \left|h(\vartheta) - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n}\left|\left\{\vartheta \leq \alpha_i : \left|h(\vartheta) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| &\geq \frac{1}{\alpha_n}\left|\left\{\vartheta \in I_n : \left|h(\vartheta) - L\right|\right\}\right| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{\alpha_n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{\vartheta \in I_n : \left|h(\vartheta) - L\right|\right\}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty}\inf \frac{\lambda_n}{\alpha_n} > 0$ koşulu göz önüne alındığında, $n \to \infty$ için

$$h(\vartheta) \to L\left[S_\lambda\right] \Rightarrow h(\vartheta) \to L\left[S_f^*\right]$$

dir.

Teorem 8.2.5. $\left[W,\lambda\right] \subset \left[S_f^*\right]$ kapsaması sağlanır ve bu kapsama $\lim_{n\to\infty}\inf \frac{\alpha_n}{\lambda_n} > 1$ için uygundur (proper).

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $\left[W,\lambda\right] - \lim h(\vartheta) = L$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta \in I_n} \left|h(\vartheta) - L\right| d\vartheta &= \int_{\{\vartheta : \vartheta \leq \alpha_i\}} \left|h(\vartheta) - L\right| d\vartheta \\ &\geq \varepsilon\left\{\vartheta \leq \alpha_i : \left|h(\vartheta) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\end{aligned}$$

dir. Buradan $\left[W,\lambda\right] - \lim h(\vartheta) = L \Rightarrow S_f^* - \lim h(\vartheta) = L$ dir.

$$h(\vartheta) = \begin{cases}\vartheta, & n - \ln(\lambda_n) + 1 \leq \vartheta \leq n \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için $h(\vartheta)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olmadığından

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left|\left\{\vartheta \le \alpha_i : \left|h(\vartheta)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| &\ge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\frac{\alpha_n}{\lambda_n}\left|\left\{\vartheta \le \alpha_i : \left|h(\vartheta)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $S_f^* - \lim h(\vartheta) = 0$ dir. Ancak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_{n-\lambda_n+1}^{n}\left|h(\vartheta)-0\right|d\vartheta = \infty$$

olacağından $h(\vartheta) \nrightarrow L[W,\lambda]$ elde edilir. Dolayısıyla kapsam uygundur (proper).

Teorem 8.2.6. $\left[G,\overline{\gamma}\right] \subsetneq \left[S_f^*\right]$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $\left[G,\overline{\gamma}\right] - \lim h(\vartheta) = L$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta\in\overline{\gamma}(\omega_i)}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta &\ge \int_{\left\{\vartheta\in\overline{\gamma}(\omega_i):\left|h(\vartheta)-L\right|\ge\varepsilon\right\}}\left|h(\vartheta)-L\right|d\vartheta \\ &\ge \varepsilon\left|\left\{\vartheta\in\overline{\gamma}(\omega_i):\left|h(\vartheta)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right| \\ &\ngeq \varepsilon\left|\left\{\vartheta\le\alpha_i:\left|h(\vartheta)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\end{aligned}$$

elde edilir ve $h(\vartheta) \nrightarrow L\left[S_f^*\right]$ dir.

Teorem 8.2.7. Eğer $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{\overline{\gamma}(\omega_i)}{\alpha_n} > 0$ ve $h(\vartheta)$ sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise $\left[S_f^*\right] \subseteq [G,\overline{\gamma}]$ dir.

İspat. $\left[S_f^*\right] - \lim h(\vartheta) = L$ ve $h(\vartheta)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı olduğundan $h(\vartheta)$ fonksiyonu sınırlıdır; yani her $R \geq 0$ için $|h(\vartheta) - L| \leq R$ dir. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{\gamma}(\omega_i)} \int_{\vartheta\in\overline{\gamma}(\omega_i)} |h(\vartheta) - L| \, d\vartheta &= \frac{1}{\overline{\gamma}(\omega_i)} \int_{\{\vartheta\in\overline{\gamma}(\omega_i)\,:\,|h(\vartheta)-L|\geq\varepsilon\}} |h(\vartheta) - L| \, d\vartheta \\
&+ \frac{1}{\overline{\gamma}(\omega_i)} \int_{\{\vartheta\in\overline{\gamma}(\omega_i)\,:\,|h(\vartheta)-L|<\varepsilon\}} |h(\vartheta) - L| \, d\vartheta \\
&\leq \frac{M}{\overline{\gamma}(\omega_i)} \left| \left\{ \vartheta \in \overline{\gamma}(\omega_i) : |h(\vartheta) - 0| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon \\
&\leq \frac{M}{\overline{\gamma}(\omega_i)} \left| \left\{ \vartheta \leq \alpha_i : |h(\vartheta) - L| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon \\
&\leq \frac{\overline{\gamma}(\omega_i)}{\alpha_n} \frac{M}{\overline{\gamma}(\omega_i)} \left| \left\{ \vartheta \leq \alpha_i : |h(\vartheta) - L| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $h(\vartheta) \to L\left[G, \overline{\gamma}\right]$ elde edilir.

BÖLÜM 9. TOPLANABİLME METODU İLE İKİ DEĞİŞKENLİ GAUGE TEORİSİ

$(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında tanımlı iki değişkenli reel değerli ölçülebilir $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu ve Pringsheim limiti göz önüne alınarak, Gauge anlamında çift kuvvetli Cesáro tipi toplanabilme kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, diğer iki boyutlu toplanabilme teknikleri ile arasındaki ilişki incelenmiştir [67].

Tanım 9.1. $I_2=[a,b]\times[c,d]$ aralığının etiketlenmiş (tagged) bölüntüsü sonlu ya da sıralısı

$$D_{m,n}=\left\{\left(t_{i,j},I_{i,j}\right):1\le i\le m \text{ ve } 1\le j\le n\right\}$$

olarak verilsin ve $\left\{I_{i,j}:1\le i\le m \text{ ve } 1\le j\le n\right\}$, I_2 aralığının kapalı birbiri ile çakışmayan alt aralığının bölüntüsü ve $t_{i,j}$, I_2 aralığında bir nokta olsun. $t_{i,j}$, $I_{i,j}$ bölüntüsünün etiketi (tag) olarak isimlendirilsin. $h:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ fonkiyonu için $D_{m,n}$ ile ilişkili olarak h fonksiyonunun Riemann toplamı $r\left(t_{i,j}\right)=r\left(t_i\right)\cdot r\left(z_j\right)$ ve $\ell(I_{i,j})=\ell\left(I_i\cdot J_j\right)=\ell\left(I_i\right)\cdot\ell\left(J_j\right)$, $I_{i,j}$ alt aralığının uzunlukları olmak üzere

$$S\left(h,D_{m,n}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r\left(t_{i,j}\right)\ell\left(I_{i,j}\right)$$

olarak tanımlansın. Eğer $\delta_2:[a,b]\times[c,d]\to(1,\infty)$ iki değişkenli pozitif bir fonksiyon ise $\gamma(t,z)=\gamma(t)\cdot\gamma(z)=\left(t-\delta_2(t),t+\delta_2(t)\right)\times\left(z-\delta_2(t),z+\delta(t)\right)$ göz önüne alınarak I_2 aralığı üzerinde tanımlı açık aralık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $I_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ ise $t_i-\delta_2<x_i\le t_i\le x_{i+1}<t_i+\delta_2$ ve $z_j-\delta_2<y_i\le z_j\le z_{j+1}<z_j+\delta_2$ yerine sırasıyla $t_i\in I_i\subset\gamma(t_i)$ ve $z_j\in J_j\subset\gamma(z_j)$ yazılabilir. I_2 aralığı üzerinde tanımlı herhangi bir γ aralığı için $\gamma(t,z)$, $(t,z)\in[a,b]\times[c,d]$ noktası için t ve z noktalarını içeren açık bir aralıktır ve I_2 aralığı üzerinde bir Gauge'dır denir. Bütün bu aralıkların kümesi Δ_{G_2} ile gösterilir. Eğer $t_i\in I_i\subset\gamma(t_i)$ ve $z_j\in J_j\subset\gamma(z_j)$ sağlanıyorsa, $D_{m,n}$ ye γ_2- *fine* (ince) denir.

Örnek 9.2. $[0,1]\times[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlanan aralık fonksiyonu $\gamma(x,y)=\dfrac{1}{36}$ ile tanımlansın. Bu durumda $[0,1]\times[0,1]$ aralığında tanımlı bir γ_2- *fine* tagged bölüntüsü bulalım.

$$\gamma(x,y)=\gamma(x)\cdot\gamma(y)=\frac{1}{36}$$

fonksiyonu iki değişkenli sabit bir fonksiyon olsun. Tag seçimini göz ardı edersek, $\gamma(c_k,d_l)=\dfrac{1}{36}$ olur. O halde, $x_{i+1}-x_i<\dfrac{1}{6}$ ve $y_{j+1}-y_j<\dfrac{1}{6}$ olacak şekilde seçilen $(t_{i,j},I_{i,j})$ tagged bölüntüsü γ_2- *fine* tagged bölüntüdür. Her aralığın bir aralıkta sayı olacağı aşağıdaki bölüntüyü seçelim,

$$m\left(\left[0,\frac{1}{7}\right]\times\left[0,\frac{1}{7}\right]\right)<\frac{1}{36},\ m\left(\left[\frac{1}{7},\frac{2}{7}\right]\times\left[\frac{1}{7},\frac{2}{7}\right]\right)<\frac{1}{36},\ m\left(\left[\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right]\times\left[\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right]\right)<\frac{1}{36},$$
$$m\left(\left[\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right]\times\left[\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right]\right)<\frac{1}{36},\ m\left(\left[\frac{4}{7},\frac{5}{7}\right]\times\left[\frac{4}{7},\frac{5}{7}\right]\right)<\frac{1}{36},\ m\left(\left[\frac{5}{7},\frac{6}{7}\right]\times\left[\frac{5}{7},\frac{6}{7}\right]\right)<\frac{1}{36},$$
$$m\left(\left[\frac{6}{7},1\right]\times\left[\frac{6}{7},1\right]\right)<\frac{1}{36}.$$

Bu durumda $\gamma(x,y)-$ *fine* tagged bölüntüsüdür.

İki değişkenli fonksiyonlar için Gauge integrali tanımı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 9.3. $h: I_2 = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\left|S(h, D_{m,n}) - A\right| < \varepsilon$ olacak şekilde I_2 aralığı üzerinde $A \in \mathbb{R}$ varsa ve γ_2 Gauge için $D_{m,n}$, I_2 aralığının $\gamma_2 - fine$ tagged bölüntüsü ise h fonksiyonu I_2 aralığı üzerinde iki değişkenli Gauge integrallenebilirdir ve A sayısına h fonksiyonunun I_2 aralığı üzerinde Gauge integrali denir ve $\int_a^b\int_c^d h$ veya $\int_{[a,b]\times[c,d]} h$ olarak gösterilir. İntegrali parametreye bağlı olarak tanımlamak gerekirse $\int_a^b\int_c^d h(\tau,\upsilon)d\tau d\upsilon$ veya $\int_{[a,b]\times[c,d]} h(\tau,\upsilon)d\tau d\upsilon$ olarak yazılır.

Örnek 9.4. $d:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \text{ ve } y \text{ rasyonel sayılar ise,} \\ 0, & x \text{ ve } y \text{ irrasyonel sayılar ise,} \end{cases}$$

d fonksiyonu iki değişkenli Dirichlet fonksiyonudur. $\varepsilon > 0$ olsun sırasıyla $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralığında rasyonel sayıların $\{r_k\}$ ve $\{s_l\}$ sayıları olsun. $[a,b]\times[c,d]$ aralığı üzerindeki Gauge γ fonksiyonu

$$\gamma(t,z) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{3^{k+l+1}}, & t = r_k,\ z = s_l \text{ ise,} \\ 1 & ,\ (t,z) \notin \mathbb{Q} \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Eğer Q, $[a,b]\times[c,d]$ aralığının bir $\gamma_2 - fine$ tagged bölüntüsü ise, Q bölüntüsünü rasyonel sayıların tag aralıkları için $Q_{r,s}$, irrasyonel sayıların tag aralıkları için $Q_{i,j}$ olarak bölünürse, bu durumda

$$\begin{aligned}
|S(h,Q)| &= \sum_Q\sum d(t_k,z_l)\Delta x_k \Delta y_l \\
&= \sum_Q\sum d(t_k)\cdot d(z_l)\Delta x_k \Delta y_l \\
&= \sum_Q d(t_k)\Delta x_k \cdot \sum_Q d(z_l)\Delta y_l \\
&= \sum_{Q_{r,s}}\sum 1\Delta x_k \cdot 1\Delta y_l + \sum_{Q_{i,j}}\sum 0\Delta x_k \cdot 0\Delta y_l \\
&< \sum_k\sum_l \frac{\varepsilon}{3^{k+l+1}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla iki değişkenli Dirichlet fonksiyonu Gauge integrallenebilirdir.

Örnek 9.5. $h(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$h(x,y) = \begin{cases} (-1)^{k+l} kl, \; x \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right] \text{ ve } y \in \left(\dfrac{1}{l+1}, \dfrac{1}{l}\right], \\ \quad 0 \qquad , x = 0 \text{ ve } y = 0, \end{cases}$$

$h(x,y)$ fonksiyonu $[0,1]\times[0,1]$ aralığında Gauge integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1\int_0^1 h(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)} = (\ln 2 - 1)^2$$

olur. h fonksiyonu $\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\times\left(\frac{1}{l+1},\frac{1}{l}\right]$ aralığında sabit bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} h(x,y)\,dxdy = (-1)^{k+l}\,kl\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}\right)=\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}$$

dir.

$\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\times\left(\frac{1}{l+1},\frac{1}{l}\right]$ aralığına yaklaşan $\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\times\left(\frac{1}{l+1},\frac{1}{l}\right]$ aralığında bir tag ile aralıkların birleşimi olan bir Gauge bulunmalıdır ve $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)(l+1)}$ toplamına yaklaşan $\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\times\left(\frac{1}{l+1},\frac{1}{l}\right]$ aralıklarının uygun sayıları seçilmelidir. Bu amaç ile, $\varepsilon>0$ için Gauge fonksiyonu $\gamma(t,z)$ aşağıdağıdaki gibi tanımlansın

$$\gamma(t,z)=\begin{cases}\left(\frac{1}{(k+1)(l+1)},\left(\frac{1}{kl}+\frac{\varepsilon}{2kl\cdot 2^{l}}+\frac{\varepsilon}{2kl\cdot 2^{k}}+\frac{\varepsilon^{2}}{4kl\cdot 2^{k+l}}\right)\right)\\ \qquad\qquad \& \ t\in\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right] \text{ ve } z\in\left(\frac{1}{l+1},\frac{1}{l}\right];\\ \left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4}\right) \quad , t=z=0.\end{cases}$$

Ayrıca, $Q=\left\{\left(t_k,[x_{k-1},x_k]\right) \text{ ve } \left(z_l,[y_{k-1},y_k]\right)\right\}_{k,l=1,1}^{m,n}$, $[0,1]\times[0,1]$ aralığının γ_2- *fine* bölüntüsü olsun.

$$\frac{1}{r+1}<x_1<\frac{1}{r} \text{ ve } \frac{1}{s+1}<y_1<\frac{1}{s}$$

sağlanacak şekilde r ve s doğal sayıları verilsin. $[0, x_1]$ ve $[0, y_1]$ aralığı için etiket $t_1 = 0$ ve $z_1 = 0$ olmalıdır. Çünkü başka hiçbir değer, sıfırın bir sol uç noktası olan bir aralığı etiketleyemez. Eğer $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \times \left(\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$ aralığında tanımlı tag ile Q bölüntüsünden aralıkların birleşimi $[\omega_{k+1}, \omega_k] \times [u_{l+1}, u_l]$ olarak ifade edilirse,

$$S(h, Q) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} (-1)^{k+l} kl(\omega_k - \omega_{k+1})(u_l - u_{l+1})$$

olur. $\omega_1 = 1$ ve $u_1 = 1$ olduğundan $\frac{1}{k+1} < \omega_{k+1}$ ve $\frac{1}{l+1} < u_{l+1}$ dır. $1 \le k \le r$ ve $1 \le l \le s$ için

$$\frac{1}{k} \le \omega_k < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2k \cdot 2^k}$$

ve $1 \le k \le r+1$, $1 \le l \le s+1$ için

$$\frac{1}{l} \le u_l < \frac{1}{l} + \frac{\varepsilon}{2l \cdot 2^l}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $1 \le k \le r$ ve $1 \le l \le s$ için

$$kl\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right)\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) = \frac{1}{(k+1)(l+1)}$$

eşitliği kullanılarak

$$\left(\frac{1}{(k+1)}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^{k+l}}\right)\left(\frac{1}{l+1}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^{l+l}}\right)$$
$$<\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{k}{(k+1)2^{k+1}}\right)\left(\frac{1}{l+1}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{k}{(l+1)2^{l+1}}\right)$$
$$=\left(k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-k\frac{\varepsilon}{2(k+1)2^{k+1}}\right)\left(l\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}\right)-l\frac{\varepsilon}{2(l+1)2^{l+1}}\right)$$
$$=\left(k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{\varepsilon}{2(k+1)\cdot 2^{k+1}}\right)\right)\left(l\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}-\frac{\varepsilon}{2(l+1)2^{l+1}}\right)\right)$$
$$=k\left(\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{\varepsilon}{2(k+1)\cdot 2^{k+1}}\right)\right)l\left(\frac{1}{l}-\left(\frac{1}{l+1}+\frac{\varepsilon}{2(l+1)\cdot 2^{l+1}}\right)\right)$$
$$<k(\omega_k-\omega_{k+1})\,l(u_l-u_{l+1})$$
$$<k\left(\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2k\cdot 2^k}-\frac{1}{k+1}\right)l\left(\frac{1}{l}+\frac{\varepsilon}{2l\cdot 2^l}-\frac{1}{l+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{1}{l+1}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^l}\right)$$

bulunur. Böylece, $\frac{1}{r+1}<x_1<\frac{\varepsilon}{2}$ ve $\frac{1}{s+1}<y_1<\frac{\varepsilon}{2}$ için

$$\left|S(h,Q)-\sum_{k,l=1,1}^{r,s}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}\right|\le\sum_{k,l=1,1}^{r,s}\left(k(\omega_k-\omega_{k+1})-\frac{1}{k+1}\right)\left(\left(l(u_l-u_{l+1})-\frac{1}{l+1}\right)\right)$$
$$<\sum_{k=1}^{r}\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^k}\sum_{l=1}^{s}\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^l}<\frac{1}{4}\varepsilon$$

ve

$$\left|\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}-\sum_{k,l=1,1}^{r,s}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir. O halde

$$\left|S(h,Q)-(\ln 2-1)^2\right| \le \left|S(h,Q)-\sum_{k,l=1,1}^{r,s}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}\right|$$

$$+\left|\sum_{k,l=1,1}^{r,s}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}-\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}\right|$$

$$<\varepsilon$$

dir. Sonuç olarak, h fonksiyonu $[0,1]\times[0,1]$ aralığında Gauge integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1\int_0^1 h=\sum_{k,l=1,1}^{\infty,\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(k+1)(l+1)}=(\ln 2-1)^2$$

dir.

Tanım 9.6. $\delta : I_2=[a,b]\times[c,d]\to(0,\infty)$ pozitif bir fonksiyon olsun ve $\gamma(t,z)=\gamma(t)\cdot\gamma(z)=(t-\delta(t),t+\delta(t))\times(z-\delta(z),z+\delta(z))$ olacak şekilde I_2 aralığı üzerinde bir açık aralık fonksiyonu tanımlansın. $I_i=[i-\lambda_i+1,i]$ ve $J_j=[j-\mu_j+1,j]$ olmak üzere $I_{i,j}=I_i\cdot J_j$ ise $t_i-\delta<i-\lambda_i+1\le t_i\le i<t_i+\delta$ ve $z_j-\delta<j-\mu_j+1\le z_j\le j<z_j+\delta$ ifadeleri yerine sırasıyla $t_i\in I_i\subset\gamma(t_i)$ ve $z_j\in J_j\subset\gamma(z_j)$ yazılsın ve $\overline{\gamma}=\overline{\gamma}(t_{i,j})=\overline{\gamma}(t_i)\cdot\overline{\gamma}(z_j)\in\Delta_{G_2}$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ölçülebilir reel değerli iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Gauge anlamında $\int h(\tau,\upsilon)$ ve $\int\left|h(\tau,\upsilon)\right|$ integralleri var ise

$$\xi\left(t_{i,j}\right)=\xi\left(t_i\right)\cdot\xi\left(z_j\right)$$

$$=\left[\left(t_i+\delta\left(t_i\right)\right)-\left(t_i-\delta\left(t_i\right)\right)\right]\cdot\left[\left(z_j+\delta\left(z_j\right)\right)-\left(z_j-\delta\left(z_j\right)\right)\right]$$

$$=2\xi\left(t_i\right)\cdot 2\delta\left(z_j\right)=4\delta\left(t_{i,j}\right)$$

olması durumunda

$$\lim_{t_i,z_j\to\infty}\frac{1}{\xi\left(t_{i,j}\right)}\int_{t_i-\delta(t_i)}^{t_i+\delta(t_i)}\int_{z_j-\delta(z_j)}^{z_j+\delta(z_j)}\left|h\left(\tau,\upsilon\right)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

olur. Bu durumda, $h\left(\tau,\upsilon\right)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}_2-$kuvvetli toplanabilirdir denir ve $\left[G,\overline{\gamma}_2\right]-\lim h\left(\tau,\upsilon\right)=L$ ile gösterilir.

Teorem 9.7. $I_{i,j}=\left[t_i-\delta(t_i),t+\delta\left(t_i\right)\right]\times\left[z_j-\delta(z_j),z_j+\delta\left(z_j\right)\right]$ ve $-\infty<a<b<\infty$ ve $-\infty<c<d<\infty$ için $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]=\cup I_{i,j}$ olsun. $h\left(\tau,\upsilon\right)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}_2-$kuvvetli toplanabilir ise $h\left(\tau,\upsilon\right)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}_2-$toplanabilirdir denir.

İspat. $h\left(\tau,\upsilon\right)$ fonksiyonu

$$I_{i,j}=\left[t_i-\delta(t_i),t+\delta\left(t_i\right)\right]\times\left[z_j-\delta(z_j),z_j+\delta\left(z_j\right)\right]$$

aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $I_{i,j}$ aralığının bir bölüntüsü $P=\left\{\left[i-\lambda_i+1,i\right]\times\left[j-\mu_j+1,j\right]\right\}$ olsun. h fonksiyonu $I_{i,j}$ aralığında mutlak integrallenebilir olduğundan dolayı Gauge integralinin özelliğinden $\left|\int_I h\right|\le\int_I\left|h\right|$ dir.

$h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}_2-$kuvvetli toplanabilir olduğundan

$$\left|\int_{t_i-\delta(t_i)}^{t+\delta(t_i)}\int_{z_j-\delta(z_j)}^{z_j+\delta(z_j)}\left(h(\tau,\upsilon)-L\right)d\tau d\upsilon\right|\leq\int_{t_i-\delta(t_i)}^{t+\delta(t_i)}\int_{z_j-\delta(z_j)}^{z_j+\delta(z_j)}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon$$

olur. Ayrıca, $\|\Delta T_1\|=\|t_i-\xi(t_i)\|$ ve $\|\Delta T_2\|=\|z_j-\xi(z_j)\|$ için

$$\lim_{t_i\to\xi(t_i),\, z_j\to\xi(z_j) \text{ and } \|\Delta T_1\|\to 0,\, \|\Delta T_2\|\to 0}\sum_i\sum_j\frac{1}{\xi(t_{i,j})}\int_{t_i-\delta(t_i)}^{t+\delta(t_i)}\int_{z_j-\delta(z_j)}^{z_j+\delta(z_j)}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon=0$$

olur. Böylece, $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu L sayısına Gauge anlamında $\overline{\gamma}_2-$toplanabilirdir denir.

Aşağıdaki teoremde Lebesgue ve Gauge anlamında çift kuvvetli toplanabilirlik arasında ilişki verilmiştir.

Teorem 9.8. $\lambda=(\lambda_n)\in\Delta,\ \mu=(\mu_m)\in\Delta,\ \overline{\gamma}(t_i)\in\Delta_G,$ $\overline{\gamma}(z_j)\in\Delta_G,$ $I_{i,j}=\left[t_i-\delta(t_i),t_i+\delta(t_i)\times z_j-\delta(z_j),z_j+\delta(z_j)\right]$ ve $-\infty<a<b<\infty$ ve $-\infty<c<d<\infty$ için $[a,b]\times[c,d]=\bigcup I_{i,j}$ olsun. $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu $(1,\infty)\times(1,\infty)$, aralığında tanımlı Gauge anlamında reel değerli iki değişkenli bir fonksiyon olarak tanımlansın.

1) $[V,\lambda,\mu]\subset[G,\overline{\gamma}_2]$
2) $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ve $\left[\left(t_i-\delta(t_i),t+\delta(t_i)\right)\times\left(z_j-\delta(z_j),z_j+\delta(z_j)\right)\right]$

aralığının her ölçülebilir alt kümesi üzerinde Gauge anlamında L sayısına $\overline{\gamma}_2-$ kuvvetli toplanabilir ise $[V]_2-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ dir.

İspat. 1) Lebesgue anlamında integrallenebilen tüm fonksiyonlar aynı zamanda Gauge anlamında da integrallenebilir olduğundan, eğer

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon$$

integrali var ise

$$\frac{1}{4\delta\left(t_{i,j}\right)}\int_{(\tau,\upsilon)\in\gamma\left(t_{i,j}\right)}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon$$

integrali de vardır. Böylece $[V,\lambda,\mu]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ olması $[G,\overline{\gamma}_2]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ olmasını gerektirir. Diğer yandan,

$$h(\tau,\upsilon)=\begin{cases}2\tau\upsilon,\ \cos\left(\dfrac{\pi^2}{\tau^2\upsilon^2}\right)+\left(\dfrac{2\pi^2}{\tau\upsilon}\right)\sin\left(\dfrac{\pi^2}{\tau^2\upsilon^2}\right), & 0<\tau\leq 1 \text{ ve } 0<\upsilon\leq 1 \text{ ise},\\ 0, \quad \tau=0 \text{ ve } \upsilon=0 \text{ ise}, & \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu ne Rieman integrallenebilir ne de Lebesgue integrallenebilirdir. Bu durumda $h(\tau,\upsilon)\notin[V,\lambda,\mu]$ dir

2) Eğer $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ise, her (m,n) için $\dfrac{8\delta\left(t_{i,j}\right)}{mn}\leq 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{mn}\int_1^m\int_1^n \big(h(\tau,\upsilon)-L\big)d\tau d\upsilon\right| \\
&=\left|\frac{1}{mn}\int_1^{m-\lambda_m}\int_1^{n-\mu_n}\big(h(\tau,\upsilon)-L\big)d\tau d\upsilon+\frac{1}{mn}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\big(h(\tau,\upsilon)-L\big)d\tau d\upsilon\right| \\
&\le \frac{1}{mn}\int_1^{n-\lambda_n}\int_1^{n-\mu_n}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon+\frac{1}{mn}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon \\
&\le \frac{2}{mn}\int_{(\tau,\upsilon)\in I_{m,n}}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon \\
&\le \frac{2}{8\delta\left(t_{i,j}\right)}\int_{(\tau,\upsilon)\in\gamma\left(t_{i,j}\right)}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon \\
&=\frac{1}{4\delta\left(t_{i,j}\right)}\int_{(\tau,\upsilon)\in\gamma\left(t_{i,j}\right)}\left|h(\tau,\upsilon)-L\right|d\tau d\upsilon
\end{aligned}
$$

olur. $\left[G,\overline{\gamma}_2\right]-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ olduğundan $[V]_2-\lim h(\tau,\upsilon)=L$ elde edilir.

BÖLÜM 10. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında, ilk olarak çift diziler için çift istatistiksel sınırlılık ve çift lacunary istatistiksel sınırlılık kavramları tanımlanmıştır ve bu kavramlar arasındaki ilişki incelendiğinde çift lacunary istatistiksel sınırlı olan fakat çift istatistiksel sınırlı olmayan çift dizi örneği verilmiştir. Ayrıca, her çift lacunary istatistiksel yakınsak dizinin, çift lacunary istatistiksel sınırlı olduğu sonucu da elde edilmiştir.

Buna ek olarak, negatif olmayan $(1,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir iki fonksiyon göz önüne alınarak, α dereceden asimptotik $\mathcal{I}_{\lambda}-$istatistiksel denk ve α dereceden kuvvetli $\mathcal{I}_{\lambda}-$asimptotik denk fonksiyonlar tanımlanmış ve bu iki yeni kavram arasındaki kapsam bağıntı sonuçları elde edilmiştir.

Bunun yanı sıra, Borwein`in [5] sonuçları çift Cesáro toplanabilir fonksiyon uzaylarına genişletilerek, çift fonksiyon uzayları için bazı önemli sonuçlar ortaya konmuştur. İstatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirmek için $(1,\infty)\times(1,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında iki değişkenli ölçülebilir reel değerli $g(\tau,\upsilon)$ ve $h(\tau,\upsilon)$ fonksiyonları göz önüne alınarak, kuvvetli $\lambda\mu-$çift asimptotik denk ve $\lambda\mu-$çift istatistiksel denk fonksiyonlar tanımlanmıştır ve $g(\tau,\upsilon)$ fonksiyonun değerinin 1 olması sonucunda bu fonksiyonların bu tez kapsamında altıncı bölümün birinci kısmında tanımlanan $\lambda\mu-$çift toplanabilir ve $\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsaklık fonksiyonlara indirgendiği sonucu elde edilmiştir.

Ayrıca, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı uygun ideal kavramı kullanılarak istatistiksel yakınsak fonksiyonlardan daha genel bir kavram olan kuvvetli $[V,\lambda,\mu](\mathcal{I}_2)-$çift toplanabilme kavramı tanımlanmış ve $\mathcal{I}_2-\lambda\mu-$çift istatistiksel yakınsak fonksiyonların ailesi tanımlanmıştır. Buna ek olarak, dizilerden farklı olarak, lacunary çift fonksiyonların tanımlanması ile $\mathcal{I}_2-$çift lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $\mathcal{I}_2-$çift lacunary toplanabilir fonksiyonlar uzayı tanımlanmış ve bu uzaylar arasındaki ilişkisinin incelenmesinde, fonksiyonların supremum ve infumum koşullarına bağlı olarak kapsama bağıntılarının değiştiği sonucu elde edilmiştir.

Bu tez kapsamında, $(1,\infty)$ aralığında ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar göz önüne alınarak Gauge ile ilişkili olarak $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilme kavramı ve genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, Lebesgue anlamında toplanabilir, ölçülebilir reel değerli bir fonksiyonun, Lebesgue anlamında kuvvetli toplanabilirdir olduğu sonucunun Gauge anlamında doğru olmadığını; yani Gauge anlamında bir fonksiyonun toplanabilir olabileceği fakat kuvvetli toplanabilir olamayacağını gösteren örnekler verilmiştir. Eğer $h:J\to\mathbb{R}$ fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge integrallenebilir ve $|h|$ fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenebilir ise h fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilir, ancak, eğer h fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenebilir fakat $|h|$ mutlak fonksiyonu J aralığı üzerinde Gauge anlamında integrallenemez ise h fonsiyonu Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$toplanabilir olduğu sonucu elde edilmiştir. Buna ilaveten, Gauge anlamında $h(\vartheta)$ fonksiyonu $\overline{\gamma}-$toplanabilir ve $F(x)=\int_{\omega_1-\delta(\omega_1)}^{\omega} h(\vartheta)\,d\vartheta$ olacak şekilde bir belirsiz integral var ise, $h(\vartheta)$ fonksiyonunun Gauge anlamında kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşulun F'nin sınırlı salınımlı olması sonucu ve $\overline{\gamma}-$kuvvetli toplanabilir fonksiyonların Gauge anlamında $\overline{\gamma}-$toplanabilir olduğu sonucu ortaya atılmıştır.

Buna ek olarak, sayılabilir kümeler dikkate alınarak ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar için genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır ve bu yeni tanımlanan kavramın Gauge ve Lebesgue anlamında kuvvetli toplanabilirlik kavramları ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, iki değişkenli fonksiyonlar için Gauge anlamında integrallenebilen ölçülebilir reel değerli iki değişkenli fonksiyonlar ve Pringsheim limiti göz önüne alınarak, Gauge anlamında çift kuvvetli Cesáro tipi toplanabilme kavramı tanımlanmış ve bu kavramın iki değişkenli fonksiyonlar için Lebesgue anlamında tanımlanan kuvvetli toplanabilirlik tanımdan daha genel olduğunu gösterilmiş ve aksine bir örnekte verilmiştir.

Son olarak, bu tezde elde edilen sonuçlar toplanabilme alanında çalışma yapan matematikçiler için farklı bir düşünce metodu oluşturacağına inanarak, bu teorinin toplanabilirlik alanındaki farklı kavramlarına genelleştirilmesi öneri olarak sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Altay, B., Bazı yeni çift dizi uzayları. İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 2002.

[2] Balcı, M., Analiz 1. 8. Baskı, Balcı Yayınları, 2010.

[3] Belen, C., Yıldırım, M., On generalized statistical convergence of double sequences via ideals. Ann Univ Ferrara., 58, 11–20, 2012.

[4] Bernstein, A. I., A new kind of compactness for topological spaces. Fund. Math., 66, 185–193, 1970.

[5] Borwein, D., Linear functionals connected with strong Cesáro summability. J. Lond. Math. Soc., 40, 628–634, 1965.

[6] Chalmers, B. L., Shekhtman, B., A two-dimensional hahn-banach theorem. Prec. Amer. Math. Soc., 129(3): 719–724, 2002.

[7] Connor, J., The statistical and strong $p-$Cesàro convergence of sequences. Analysis, 8(1–2): 47-63, 1988.

[8] Connor, J., Savas, E., Lacunary statistical and sliding window convergence for measurable functions. Acta Math. Hungar., 145, 416–432, 2015.

[9] Çolak, R., Statistical convergence of order α, Modern methods in Anal. App. New Delhi, India Anamaya Pub., 2010, 121–129, 2010.

[10] Çolak, R., Bektaş, Ç. A., On statistical convergence of order α. Acta Math. Sci., 31(3): 953–959, 2011.

[11] Das, P., Ghosal, S., Sam, S., Statistical convergence of order α in probability. Arab. J. Math. Sci., 21, 253–265, 2015.

[12] Duman, O., Orhan C., $\mu-$statistically convergent function sequences. Czech. Math. J., 54(2): 413–422, 2004.

[13] Erdös, P., Tenenbaum, G., Sur les densités de certaines suites d'entiers. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(3): 417–438, 1989.

[14] Et, M., Nuray, F., m-statistical convergence. Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6): 961–969, 2001.

[15] Fast, H., Sur la convergence statistique. Colloquium Math., 2(3-4): 241–244, 1951.

[16] Finner, H., A generalization of hölder's inequality and some probability inequalities. Ann. Prob., 20(4): 1893–1901, 1992.

[17] Freedman, A. R., Sember, J. J., Raphel, M., Some cesàro-type summability spaces. Proc. Lond. Math. Soc. 37, 508–520, 1978.

[18] Fridy, J. A., Orhan, C., Lacunary statistical convergence. Pacific J. Math., 160, 43–51, 1993.

[19] Fridy, J. A., Minimal rates of summability. Can. J. Math., 30(4): 808–816, 1978.

[20] Fridy, J. A., On statistical convergence. Analysis, 5, 301–313, 1985.

[21] Fridy, J. A., Orhan C., Statistical limit superior and limit inferior. Proc. American Math. Soc., 125(12): 3625–3631, 1997.

[22] Gadjiev, A. D., Orhan, C., Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. Math., 32(1): 129–138, 2002.

[23] Ghorpade, S R., Limaye, B. V., A course in multivariable calculus and analysis. Springer, 2006.

[24] Hardy, G., Littlewood, J. E., Pòlya, G., Inequalities. Cambridge University Press, 1991.

[25] Henstock, R., Definitions of riemann type of the variational integrals. Proc. London. Math. Soc., 11(3): 402–418, 1961.

[26] Kumar, V., Mursaleen M., On (λ; μ)–statistical convergence of double sequences on intuitionistic fuzzy normed spaces. Filomat, 25(2): 109–120, 2011.

[27] Kumar V., Sharma A., On asymptotically generalized statistical equivalent sequences via ideals. Tamkang J. Math., 43 (3): 469–478, 2012.

[28] Kumar, V., On I and I*-convergence of double sequences. Math Commun., 12, 171–181, 2007.

[29] Kurzweil, J., Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. Czec. Math. J., 7, 79–106, 1957.

[30] Kolk, E., The statistical convergence in Banach space. Acta Comment. Univ. Tartu Math., 928, 41–52, 1991.

[31] Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczynki, W., I-convergence. Real Anal. Exchange, 26(2): 669–685, 2000.

[32] Li, J., Asymptotic equivalence of sequences and summability. Internat. J. Math. & Math. Sci., 20 (4): 749–758, 1997.

[33] Liendler, L., Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16(3-4): 375–387, 1965.

[34] Marouf, M. S., Asymptotic equivalence and summability. Internat. J. Math. & Math. Sci., 16(4): 755–762, 1993.

[35] Miller, H. I., A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. Trans. American Math. Soc., 347(5): 1811–1819, 1995.

[36] Mursaleen, M., Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences. J. Math. Anal. Appl., 293, 523–531, 2004.

[37] Mursaleen, M., Mohiuddine, S. A., Statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces. Chaos Solitons Fractals, 41, 2414–2421, 2009.

[38] Mursaleen, M., $\lambda-$statistical convergence. Math. Slovaca, 50(1): 111–115, 2000.

[39] Mursaleen, M., Alotaibi, A., Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. Ann. Univ. Ferrara., 57, 373–381, 2011.

[40] Mursaleen, M., Edely, O. H. H., Statistical convergence of double sequences. J. Math. Anal. Appl., 288(1): 223–231, 2003.

[41] Mursaleen, M., Çakan, C., Mohiuddine, S. A., Savaş E., Generalized statistical convergence and statistical core of double sequences. Acta Math. Sin. Engl. Ser., 26 (11): 2131–2144, 2010.

[42] Mursaleen, M., Mohiuddine, S. A., Convergence methods for double sequences and applications. Springer, 2014.

[43] Nuray, F., $\lambda-$Strongly summable and $\lambda-$Statistically convergent functions. Iranian Journal of Sci. and Tech., 34(4): 335–338, 2010.

[44] Patterson, R. F., Savas, R., Savas, E., Multidimensional linear functional connected with double strongly cesàro summability. Indian J. Pure, App. Math, (accepted-preprint).

[45] Patterson, R. F., Çakalli, H., Quasi cauchy double sequences. Tbilisi Math. J., 8, 211–219, 2015.

[46] Patterson, R. F., On asymptotically statistical equivalent sequences. Demonst. Math., 36(1): 149–153, 2003.

[47] Patterson, R. F., Rates of Convergence for Double Sequences. South. Asian Bull. Math, 26, 469–478, 2002.

[48] Patterson, R. F., Some theorems in the theory of divergent double sequences. Kent State University, Ph.D Thesis, 1997.

[49] Patterson, R. F., Analogues of some tauberian theorems for bounded variation. Acta. Math. Hungar., 122(3): 255–271, 2009.

[50] Pringsheim, A., Zur theorie der zweifach unendlichen zahlen folgen. Mathematische Annalen, 53, 289–321, 1900.

[51] Pobyvanets, I. P., Asymptotic equivalence of some linear transformation defined by a non-negative matrix and reduced to generalized equivalence in the sense of Cesaro and Abel. Mat. Fiz., 28, 83–87, 1980.

[52] Rath, D., Tripathy, B. C., On statistically convergent and statistically cauchy sequences. Indian J. Pure Appl. Math., 25(4): 381–386, 1994.

[53] Rosentrater, C. R., Varieties of Integration. Dolciani Mathematical Expositions, 2015.

[54] Šalát, T., On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca, 30, 139–150, 1980.

[55] Savas, E., Lacunary statistical convergence of double sequences in topological groups. J. Inequal. Appl., 2014(480): 1–10, 2014.

[56] Savaş, E., Gumus, H., A generalization on I-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. J. Inequal. Appl., 2013(270): 1–9, 2013.

[57] Savaş, E., Das, P., A generalized statistical convergence via ideals. Appl. Math. Lett., 24, 826–830, 2011.

[58] Savaş, E., Patterson, R. F., Lacunary statistical convergence of multiple sequences. App. Math. Letter, 19(6): 527–534, 2006.

[59] Savaş, R., Ozturk, M., Double lacunary statistical boundedness of order α. submitted.

[60] Savaş, R., Ozturk M., On generalized ideal asymptotically statistical equivalent of order α for functions. Ukranian Math. J., 70(12): 1901–1912, 2019.

[61] Savas, R., $\lambda -$Double statistical convergence of functions. Filomat, 33(2): 519–524, 2019.

[62] Savas, R., Patterson, R. F., Double $\lambda -$asymptotically statistical equivalent of functions. submitted

[63] Savas, R., Patterson, R. F., Multidimensional statistical convergence of functions via ideal. submitted.

[64] Savas, R., Patterson, R. F., I2-Lacunary strongly summability for multidimensional measurable functions. submitted.

[65] Savas, R., Patterson, R. F., Gauge strongly summability for measurable functions. submitted.

[66] Savas, R., Patterson, R. F., Generalization of statistical convergence. submitted.

[67] Savas, R., Patterson, R. F., Multidimensional gauge theory via summability methods. submitted.

[68] Shi, Z., Gu, W., Li, X., Guan, Y., Ye, S., Zhang, Jie., Wei, H., The Gauge Integral Theory in HOL4. J. App. Math., Article ID: 160875, 7 pages, 2013.

[69] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2(1): 73–74, 1951.

[70] Swartz, C., Introduction to gauge integrals, World Scientific Publishing Co., 1938.

[71] Volkov, I. I., Cesàro summation methods, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001.

[72] Zygmund, A., Trigonometric series. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Rabia Savaş, 23.09.1990'da Elazığ'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Van'da tamamladı. 2008 yılında Çınar Koleji'nden mezun oldu. 2008 yılında başladığı İstanbul Ticaret Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2012 yılında okul birinci olarak tamamladı. Aynı zamanda 2010 yılında başlamış olduğu Endüstri Mühendisliği çift anadal programını 2013 yılında tamamladı. 2012 yılında İstanbul Ticaret Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başlamış olduğu yüksek lisans eğitimini 2015 yılında okul birinciliği ile tamamladı ve 2016 yılında Sakarya'da başlamış olduğu doktora eğitimine devam ederken 2017-2019 yılları arasında TUBITAK 2214-A yurtdışı araştırma burs programı kapsamında Amerika'nın Florida eyaletinde bulunan Kuzey Florida Üniversitesinde (University of North Florida) doktora araştırma çalışmalarını eş danışmanı ile tamamladı. Halen Sakarya üniversitesinde doktora tezinin son aşamasında olup doktorasını tamamlamaktadır.