

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÇARPIŞMA SÜREÇLERİNDE POLARİZASYON
KORELASYONLARININ ANALİZİ**

Cem Murat AYBER

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ANKARA
2018**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Cem Murat Ayber tarafından hazırlanan “**Çarpışma Süreçlerinde Polarizasyon Korelasyonlarının Analizi**” adlı tez çalışması 21/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Müge BOZ
Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. İnanç ŞAHİN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



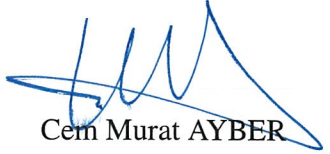
Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

21.05.2018



Cem Murat AYBER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇARPIŞMA SÜREÇLERİNDE POLARİZASYON KORELASYONLARININ ANALİZİ

Cem Murat AYBER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Bu tez çalışmasında spin polarizasyon korelasyonlarının yüksek enerji fiziğindeki öneminden hareketle, bu kuantum mekaniksel olguların çeşitli süreçlerdeki etkileri, farklı yöntemlerle incelenmiştir. Tezde ilk aşamada görelî parçacıkların davranışlarını tasvir eden Dirac denkleminin yapısal özelliklerinin incelenmesinin ardından helisite ve kiralite kavramları irdelendi. Bu özellikler kullanılarak helisite izdüşüm operatörleri türetildi. Kuantum elektrodinamiği (QED) çerçevesinde müon çiftinin oluşum sürecinde spin polarizasyonları helisite spinörleri ve izdüşüm operatörleri kullanılarak incelendi. Yapılan hesaplamalar sonucunda helisitenin spin etkilerini açık bir şekilde gösterdiği ve QED'nin kiraliteyi koruduğu sonucuna varıldı. Bir sonraki aşamada kuantum alanlar kuramı (QFT) çerçevesinde temel süreçler olan, çift yok oluş, Møller saçılması, Bhabha saçılması ve elektrozaıf müon çiftinin oluşum süreci için spin polarizasyon etkileri incelendi. Spin polarizasyon korelasyonları, Bell eşitsizliği aracılığıyla test edildi ve her sürecin eşitsizliği ihlal ettiği sonucuna varıldı. Farklı bir süreç olarak spin polarize elektron-nötrino saçılımında spin polarizasyon etkileri, spin polarizasyon açıları üzerinden tanımlanan asimetriye bakılarak incelendi. Nötrinin Standart Model'deki (SM) sol-elli kiralite ve negatif helisite hali kısıtlamaları kaldırıldığında, bir başka deyişle kütleli nötrinolar için en genel spin yönelimlerinin olduğu durumlarda belli açî değerleri için elektron-elektron nötrinosu saçılma sürecinde sıfırdan farklı tesir kesiti ve sıfır ile bir aralığında spin asimetrisinin olabileceği görüldü.

Mayıs 2018, 118 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuantum Alanlar Kuramı, Kuantum Elektrodinamiği, Nötrino Fiziği, Spin Polarizasyon Korelasyonları, Bell Eşitsizliği, Helisite, Standart Model

ABSTRACT

Master Thesis

ANALYSIS OF THE POLARIZATION CORRELATIONS IN COLLISION PROCESSES

Cem Murat AYBER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

In this thesis, departing from the importance of the spin polarization correlations in high energy physics, the effects of these quantum mechanical phenomena on several processes have been examined with various methods. In the first stage of the thesis, after examining the structural properties of the Dirac equation, which depicts the behaviours of relativistic particles, the concepts of helicity and chirality are examined. Helicity projection operators have been derived by using the properties of helicity. In the framework of quantum electrodynamics (QED) muon pair production process, spin polarizations were studied using helicity spinors and helicity projection operators. The results of the calculations show that helicity reveals the effects of spin clearly and QED preserves chirality. At the next stage, in the framework of quantum field theory (QFT), the effects of spin polarization correlations for fundamental processes such as pair annihilation, Møller scattering, Bhabha scattering and electroweak muon pair production have been investigated. Spin polarization correlations were tested with Bell's inequality and as a result of this, it is seen that each process violated the inequality. As a different process, spin polarization effects on spin-polarized electron-neutrino scattering were investigated by checking the asymmetry defined with the spin polarization angles. In the case when the left-handed chirality and negative helicity constraints of the neutrinos in Standard Model (SM) are abandoned, i.e. where the massive neutrinos might have a general spin orientation, it has been seen that the electron-electron neutrino scattering process has non zero cross section for the transverse polarizations and there could be spin asymmetries within a range of zero to one.

May 2018, 118 pages

Key Words: Quantum Field Theory, Quantum Electrodynamics, Neutrino Physics, Spin Polarization Correlations, Bell Inequality, Helicity, Standard Model

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarımı yönlendiren, araőtırmalarımın her aşamasında bilgi ve öneriyle bana geniş bir perspektif sunan ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beőeri iliőkilerde de engin fikirleriyle gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER'e, yaptığımız fiziksel tartıőmalarla ve tezin yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Müge BOZ'a, tezin her aşamasında manevi desteğini eksik etmeyen dostlarıma ve aileme sonsuz teőekkürlerimi sunuyorum.

Cem Murat Ayber
Ankara, Mayıs 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
GÖSTERİMLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	11
2.1 Schrödinger Denklemi.....	11
2.2 Klein-Gordon Denklemi	12
2.3 Dirac Denklemi	13
2.3.1 Dirac denkleminin çözümü	15
2.4 Helisite.....	17
2.4.1 Kütsüz Dirac parçacığı	19
2.5 Kiralite	20
2.6 Helisite ve Kiralite İzdüşüm Operatörleri.....	21
2.7 Kütsüz ($m \neq 0$) ve Kütleli ($m = 0$) Hâller İçin Helisite ve Kiralite İzdüşüm Operatörleri.....	23
2.7.1 Kütsüz ($m \neq 0$) hâl için izdüşüm operatörleri	23
2.7.2 Kütleli ($m = 0$) hâl için izdüşüm operatörleri	24
2.8 Kuantum Dolanıklık ve Bell Eşitsizliği	25
2.8.1 Einstein'ın yerellik ilkesi ve kuantum mekaniğinin Kopenhag yorumuna eleştirisi	27
2.8.2 Spin korelasyonları	28
2.8.3 Bell eşitsizliği	30
3. SPİN POLARİZASYON ETKİLERİNİN HELİSİTE BAZINDA İNCELENMESİ.....	31
3.1 $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ Süreci İçin Helisite ve Kiralitenin İncelenmesi	31
3.1.1 Polarize olmayan hâl için hesaplamalar	33
3.1.2 Helisite genlikleri kullanılarak yapılan hesaplamalar	33
3.1.3 İzdüşüm operatörleri ve iz tekniği kullanılarak yapılan hesaplamalar.....	37
4. POLARİZASYON KORELASYONLARININ KUANTUM ALANLAR TEORİSİ ANALİZİ	39
4.1 $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ Süreci	39
4.1.1 Polarize hâl için çift yok oluş süreci	40
4.1.2 Polarize olmayan hâl için çift yok oluş süreci	50
4.2 Kuantum Elektrodinamiği Çerçevesinde $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ Elastik Saçılması ...	57
4.2.1 Polarize hâl için Möller saçılması.....	58
4.2.2 Polarize olmayan hâl için Möller saçılması	64
4.3 Kuantum Elektrodinamiği Çerçevesinde $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ Saçılması	66
4.3.1 Polarize hâl için Bhabha saçılması	67
4.4 Elektrozayıf Modelde Müon Çiftinin Oluşumu	71
5. POLARİZE NÖTRİNO-ELEKTRON SAÇILMASI.....	79

5.1 Süreç	79
5.2 Spinörlerin Açık İfadeleri	81
5.3 Genlik Hesaplamaları	82
6. SONUÇ VE YORUM	88
KAYNAKLAR	92
EKLER	95
EK 1 Bell Eşitsizliği	96
EK 2 $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ Sürecinde Genlik Hesaplamaları	98
ÖZGEÇMİŞ	118

GÖSTERİMLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Gösterimler

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Minkowski metriği

$$c = 1 = \hbar$$

Doğal birimler sistemi

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i$$

Einstein toplama kuralı

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$$

Gamma matrisi ile kontraksiyon

Kısaltmalar

CH

Clauser-Horne

EPR

Einstein- Rosen- Podolsky

EW

Elektrozayıf (*Electroweak*)

PMNS

Pontecorvo-Maka-Nakagawa-Sakata

QED

Kuantum Elektrodinamiği

(*Quantum Electrodynamics*)

QFT

Kuantum Alan Teorisi

(*Quantum Field Theory*)

SI

Yeğin etkileşim (*Strong Interaction*)

WI

Zayıf etkileşim (*Weak Interaction*)

SM

Standart Model (*Standard Model*)

WIMP

Zayıf Etkileşen Büyük Kütleli Parçacıklar

(*Weakly Interacting Massive Particles*)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	QED'de $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ saçılma süreci (Romão ve Silva 2016) . . .	32
Şekil 3.2	$E \gg m$ limitinde $\mathcal{M}(\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow)$ şeklinde helisite kombinasyonuna sahip spin-1 sistemin yönelimi ve açılsal bağımlılığı (Romão ve Silva 2016) . .	36
Şekil 3.3	$E \gg m$ limitinde $\mathcal{M}(\downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow)$ şeklinde helisite kombinasyonuna sahip spin-1 sistemin yönelimi ve açılsal bağımlılığı (Romão ve Silva 2016) . .	37
Şekil 3.4	$E \gg m$ limitinde sıfırdan farklı genlikler ve spin yönelimleri (Romão ve Silva 2016)	37
Şekil 4.1	Çift yok oluş sürecinin Feynman diyagramları (Griffiths 2008)	40
Şekil 4.2	$e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ sürecinde polarize hâlin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2004)	40
Şekil 4.3	$e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ sürecinde polarize olmayan hâlin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2003)	50
Şekil 4.4	Møller saçılmasının Feynman diyagramları	58
Şekil 4.5	$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ sürecinde polarize hâlin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2004)	59
Şekil 4.6	Bhabha saçılmasının Feynman diyagramları	66
Şekil 4.7	$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ sürecinin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2013)	67
Şekil 4.8	Elektrozayıf $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ sürecinin Feynman diyagramları	71
Şekil 4.9	$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ sürecinin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2006) . . .	72
Şekil 5.1	$e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ saçılmasının Feynman diyagramları (Giunti ve Kim 2007)	80

1. GİRİŞ

Evrenin oluşumu, yapısı, fiziksel özellikleri ve doğanın işleyiş yasaları fiziğin en temel uğraş alanlarından. Yüzyıllardır bu sorulara bir yandan bilimsel açıklamalar getirilmeye çalışılırken bir yandan da felsefi ve teolojik fikirlerle tartışmalar farklı boyutlara taşınmıştır. Günümüzde fiziksel evrenin büyük ölçekli tasviri Standart Kozmolojik Model, atom altı seviyedeki tasviri ise parçacık fiziğinin Standart Model'i (SM) ile mükemmel şekilde yapılabilmektedir. Deneyler ve gözlemler ile büyük uyum gösteren bu kapsamlı teorilere rağmen, halen cevaplanması gereken pek çok sorunun bulunduğu da bilinmektedir.

1897 yılında J.J. Thomson'un elektronu keşfetmesiyle parçacık fiziğinin ilk tohumları atılmış ve bu keşif sonraki yıllar içerisinde bir bakıma parçacık fiziğinin doğmasına yol açmıştır. 1901 yılında M. Planck'ın siyah cisim ışıması ile enerjinin kesikli, yani kuantumlu olabileceğini öne sürmesinin ardından, 1905 yılında A. Einstein'ın fotoelektrik olay ile ışığın enerjisiyi kuantumlu dalga paketleri aracılığıyla taşıdığını göstermesi, kuantum mekaniğinin doğmasına sebep olmuştur. Elektronun keşfinden sonra Demokritos'un atomu artık yapısız bir birim olmaktan çıkmış, Thomson'un atom modelinin ardından Rutherford'un araştırmaları ile atomun ayrıntılı yapısı anlaşılmıştır. 1913 yılında Niels Bohr ortaya koyduğu atom modeli ile açısal momentumun kuantumlu olduğu postüle edilmiş, 1920'lerde Heisenberg ve Schrödinger'in çabalarıyla kuantum teorisinin matematiksel inşası ve ardından Born'un olasılık yorumuyla artık doğaya bakış açısı tamamıyla değişmiştir. Atomik seviyede, nedensel ve belirleyici klasik fizik yerini dalga fonksiyonlarına ve olasılık yoğunluklarına bırakmıştır.

1922 yılında Stern ve Gerlach yaptıkları deney sonucunda *spin* adı verilen bir iç serbestlik derecesi keşfetmişlerdir. Açısal momentum birimi ile ifade edilebilen bu yeni serbestlik derecesi, parçacıkların karakterini belli eden temel bir özelliktir. Spini Planck sabitinin tam sayı katı olan, $S = n\hbar$, parçacıklara *bozon*, spini buçuklu katı olan, $S = (n + \frac{1}{2})\hbar$,

parçacıklara ise *fermion* denir. 1924 yılında W. Pauli'nin ortaya attığı dışarlama prensibine göre, kuantum sayıları aynı olan bozonlar aynı enerji seviyesinde rahatça bulunabilirler ve fakat aynı enerji seviyesinde ancak ve ancak farklı spin yönelimli fermiyonlar olabilir.

Modern fiziğin gelişmesindeki diğer önemli bir adım da A. Einstein tarafından atılmıştır. Einstein 1905 yılında özel görelilik teorisiyle, uzay ve zamanı birleştirdiği *uzay-zaman* kavramını öne sürmüştü, farklı eylemsiz referans çerçevelerinde fizik yasalarının değişmez kaldığını, elektromanyetik alanın taşıyıcısı fotonun vakumdaki hızının aynı ve değişmez olduğunu postüle etmiştir. Bu kapsamlı teori, fiziğin her alanında çok önemli sonuçlara neden olmuştur. 1915 yılında kütle-çekimini açıklayabilmek için Einstein, özel görelilik teorisini ivmeli referans çerçeveleri için genişleterek genel görelilik teorisini önermiştir. Bu teori ile kütle ve enerjinin uzay-zamanı büküttüğü ortaya konulmuştur. Einstein, Newton'un kütle çekim yasasının açıklayamadığı Merkür'ün perihelyonunun presesyonundaki yüzyılda 43 saniye yıllık kaymayı bu teori çerçevesinde çözmüştür. Genel görelilik kuramı ile gravitasyonel alanın sadece maddeye değil aynı zamanda ışığa da etki yapacağını öne sürmüştü ve yıldızlardan gelen ışığın güneşin yakınından geçerken güneşin gravitasyonel alanı etkisiyle sapacağını öngörmesinin ardından 1919 yılında Eddington'ın astronomik gözlemiyle bu öngörü kanıtlanmıştır. Genel görelilik kuramının bir diğer öngörüsü ise ivmeli gök cisimlerinin yarattığı uzay-zaman tedirgemelerinin *gravitasyonel dalgalar* aracılığıyla uzak mesafelere yayılmasıdır ve aradan bir asır geçtikten sonra 2017 yılında LIGO'da (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) gravitasyonel dalgalar gözlemlenmiş ve bu öngörü doğrulanmıştır (Abbott vd. 2017).

Öte yandan Klein ve Gordon, kuantum mekaniğini görelî rejime taşımak amacıyla Schrödinger'in dalga denklemini ve Einstein'ın özel göreliliğini birleştirmişlerdir. Klein ve Gordon'un buldukları denklem görelî parçacıkları açıklamaktadır ancak bu denklemin de önemli problemleri vardır: Bunlardan ilki, Einstein'ın ünlü kütle-enerji denkleminde pozitif ve negatif enerji ikilemidir. İkincisi ise aynı denklemin negatif olasılık yoğunluğu problemi taşımasıdır, oysa olasılık yoğunluğu her zaman pozitif tanımlı olduğundan

negatif olasılık yoğunluğu fiziksel bir nicelik değildir. İngiliz fizikçi P.A.M. Dirac 1928’de Klein ve Gordon’un ortaya attıkları düşünceyi geliştirerek sonradan kendi ismiyle anılacak olan Dirac denklemini önermiştir. Bu denklemin en önemli özelliği, açık bir şekilde parçacığın spini hakkında bilgi içermesi ve parçacıkların yanı sıra karşıt parçacıkların varlığını da öngörmesidir (Dirac 1927). Klein-Gordon ve Dirac denklemleri sırasıyla spin-0 ve spin-1/2 parçacıkları tasvir ederler. Sonraki yıllarda karşıt parçacıkların keşfi ve spin deneyleri ile Dirac denkleminin şu an için görelî fermiyonları mükemmel tasvir eden bir denklem olduğu anlaşılmıştır. Dirac denkleminde parçacıkları (karşıt parçacıkları) tanımlayan spinörlerin, etkileşime giren parçacıkların tüm spin bilgilerini de içerdiği görülmektedir. Fizikteki önemli kilometre taşlarından bir tanesi olan Dirac denklemi, görelî parçacıkların davranışlarını açıklamasıyla birlikte kuantum alan kuramının (QFT) oluşmasında ve ardından parçacık fiziğinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. QFT, kuantum fiziğini görelî rejime taşımış ve parçacıkların etkileşimlerini açıklamakta mükemmel bir teorik yapı oluşturmuştur.

Doğada elektromanyetik kuvvet, kütle çekim kuvveti, nükleer yeğın kuvvet ve nükleer zayıf kuvvet olarak adlandırılan dört temel kuvvet vardır. Bu kuvvetlerden doğadaki belirli alanlar sorumludur. Elektromanyetik kuvvet, elektrik ve manyetik alanlardan kaynaklanır ve kuvvet taşıyıcı parçacığı fotondur. Menzilinın sonsuz olması nedeniyle elektromanyetik kuvvet hem makro hem de mikro boyutta etkilidir. Nükleer yeğın kuvvet hadronları bir arada tutmayı sağlar ve bu kuvvetin taşıyıcısı gluonlardır. Yeğın etkileşiminin (SI) menzili çok düşüktür, bundan dolayı çekirdek dışında etkisini yitirir. Nükleer zayıf kuvvetler, atom altı parçacıkların radyoaktif bozunma yapmasında rol oynar. Bu kuvvetin de menzili çok düşük olduğundan atomik seviyededir. Zayıf etkileşim (WI), W^{\pm} ve Z^0 bozonları tarafından taşınır. Kütle çekim kuvveti ise maddeler arası kütle çekiminden sorumludur. Bu kuvvetin etkisi çok düşük olduğundan atom altı parçacıkları içeren fiziksel süreçlerde etkileri gözlemlenmez; gök cisimlerinin hareketlerinde ise bu kuvvetin etkileri belirgin olarak gözlemlenir ve bu kuvvetin menzili sonsuzdur. Gravitasyonel alan Einstein’a göre eğri uzay-zamanın bizzat kendisidir ve kuantumlu gravitasyonel kuramlarda gravitasyonel kuvvetin taşıyıcı parçacığına *graviton* adı verilir.

S. Glashow 1961 yılında zayıf kuvvet ile elektromanyetik kuvvetin birleşeceği bir *elektrozayıf kuvvetin* var olabileceğini öne sürmüştür. Elektromanyetik kuvvet ile zayıf kuvvetin şiddetleri arasındaki mertbe ve menzil farkı ancak ve ancak zayıf kuvvetin taşıyıcı vektör bozonlarının kütleli olması ile çözülebilmektedir. Eğer bu iki etkileşim aynı ise; fotonun kütsüz olup, ara vektör bozonlarının neden kütleli olması gerektiğini bu model açıklayamamıştır (Glashow 1961). 1967 yılında S. Weinberg ve A. Salam birbirlerinden bağımsız olarak, yerel ayar simetrisinin Higgs mekanizması aracılığıyla kendiliğinden kırılması ile zayıf etkileşimin aracı parçacığının nasıl kütle kazandıklarını açıklamışlardır (Weinberg 1967, Salam 1968). Bu düşünceye göre; tüm evreni doldurduğu düşünülen Higgs alanının vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı olması durumunda $SU(2)_W \times U(1)_Y$ yerel ayar simetrisi kendiliğinden kırılmakta ve ilk olarak kütsüz olarak teoriye dahil edilen ara vektör bozonları Higgs alanı ile etkileşerek kütle kazanmaktadır (Higgs 1964a, b). 1973 yılında Gargamelle işbirliği ile nötral akımların keşfedilmesinin ardından, 1979 yılında Glashow, Weinberg ve Salam Nobel ödülüne layık görülmüşlerdir. Bu başarının modern fizikte kazanılmış en büyük zaferlerden bir tanesi olarak değerlendirilmesinin nedeni, belirli yüksek enerjilerde gravitasyon dahil bütün temel kuvvetlerin birleşeceği yorumuna yol açmasıdır. Şu ana kadar laboratuvarlarda henüz gözlemlenemeyen ve *büyük birleşme* adıyla doğadaki tüm kuvvetlerin birleşmesini hedefleyen bu olgu bilim insanlarının hem deneysel hem de kuramsal olarak çalıştığı bir araştırma problemidir.

Standart Model (SM) doğadaki temel parçacıkların etkileşimini ve oluşumunu açıklayan bir ayar kuramıdır. SM, Poincaré grubunun ve $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$ iç simetri gruplarının temsilleri üzerine inşa edilmiştir. Burada C renk, I zayıf izospin ve Y zayıf hiperyüktür. Bu modele göre maddeyi oluşturan temel parçacıklar kuarklar, leptonlar ve bozonlar olarak sıralanmaktadır. Temel parçacıkların kütle kazanmaları ise *kendiliğinden simetri kırılması* olarak adlandırılan mekanizma ile açıklanmaktadır. Bu mekanizmaya göre parçacıklar Higgs alanı olarak adlandırılan skaler alan ile etkileşmeye girdiklerinde kütle kazanmaktadır ve bu alanın kuantum parçacığı da Higgs parçacığı olarak adlandırılır (Higgs 1964a, b, Englert ve Brout 1964). 2012 yılında Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi (CERN)'de yer alan Büyük Hadron Çarpıştırıcısı (LHC)'de yapılan deneyler sonucunda Higgs parçacığı 125.09 ± 0.24 GeV'lik bir kütle ile gözlenmiş (Anonymous 2012a, b, c)

ve SM'in öngörülleri böylece tamamlanmıştır. Bu keşfin ardından Higgs, Englert ve Brout 2013 yılında Nobel ödülüne layık görülmüşlerdir. Elektrozayıf modelin büyük zaferiyle birlikte temel parçacıkların SM'i tam olarak inşa edilmiş ve bir teori haline gelmiştir. Ancak bu teorinin de bir takım problemleri vardır ve bu problemlere verilebilecek ilk örnek nötrinolardır. Kendiliğinden simetri kırılması ile nötrino hariç tüm parçacıkların nasıl kütle kazandığı açıklanabilmektedir. Ancak SM'in leptonlara ve kuarklara kütle kazandıran Higgs bozonu nötrinolar için kütle kazandıramaz zira iç simetriler bu tür kütle teriminin yazılmasını baştan imkansız kılmaktadır. Bu bir bakıma bir temel parçacığın SM ötesi ilk davranışdır.

Kuantum mekaniğinin geliştirilmesinin hemen ardından 1930 yılında W. Pauli nükleer beta bozunumundaki enerji eksikliği sorununa farklı ve yaratıcı bir çözüm önermiştir: korunum yasalarını kullanarak bu eksik enerjinin *nötron* adını verdiği görünmez bir parçacık tarafından taşındığını ileri sürmüştür. 1932 yılında J. Chadwick kütlesi proton ile hemen hemen aynı, yüksüz bir parçacık gözlemlemiş ve bu parçacığa da nötron ismini vermiştir. 1935 yılında E. Fermi beta bozunumu teorisini geliştirmiş ve Pauli'nin nötron adını verdiği parçacığı küçük nötron anlamına gelen *nötrino* ile değiştirerek adlandırma karmaşasını ortadan kaldırmıştır. Bu teoriye göre nötrinolar; yüksüz, sadece ve sadece zayıf etkileşim yapan parçacıklardır. 1956 yılında F. Reines ve C.L. Cowan, ABD Güney Kaliforniya'da Savannah River reaktöründen salınan anti-nötrinoları¹ gözlemleyerek Pauli'nin bu teorik öngörüsünü doğrulamışlardır (Cowen vd. 1956). Ardından yine teorik olarak ön görülen müon-nötrinosu (Pontecorvo 1959), 1962 yılında Lederman, Schwartz ve Steinberger'in Brookhaven deneyi ile gözlemlenerek tek tip nötrino olmadığını anlaşılmıştır. İlerleyen yıllarda ise Fermilab DONUT işbirliğinin tau nötrinosu gözlemlenmesinin ardından üç tip leptona eşlik eden üç tip nötrino öngörüsü doğrulanmıştır. Bu üç çeşni lepton ailesi $SU(2)_W$ grubunda,

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

ikilileri (dubletleri) ile temsil edilmektedir.

¹ Anti-nötrino, karşı-nötrino ve karşıt nötrino aynı anlama gelmektedir.

Keşfedildiği yıllarda kütesiz oldukları düşünülen nötrinoların sadece sol-elli kiraliteye sahip olmaları da fizik camiasını şaşırtmıştır. 1957 yılında B. Pontecorvo, $K^0 - \bar{K}^0$ salınımlarından yola çıkarak kuantum mekaniksel bir olgu olan nötrino salınımlarını önermiştir. Bu salınımlar, farklı kütleli nötrinoların kuantum mekaniksel girişimleri sonucunda üretilmektedir (Pontecorvo 1957a, b). Pontecorvo'nun önerisinin ardından bulunan müon nötrinosu ile farkedilmiştir ki; bu salınımlar, farklı nötrino çeşnilerinin ancak ve ancak nötrinoların kütleli olmaları ve karışım halinde bulunmaları durumunda gerçekleşebilmektedir (Pontecorvo 1959). 1962 yılında Maki, Nakagawa ve Sakata ilk defa farklı nötrino çeşnilerinin karışımı için bir model önermişlerdir (Maki vd. 1962). 1967 yılında Pontecorvo güneş nötrinosu probleminin $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ geçişinin bir sonucu olduğunu öngörmüş, aynı yıl gerçekleşen Homestake deneyinde, güneş elektron-nötrinosu akısı ölçümleriyle de Pontecorvo'nun bu önerisi doğrulanmıştır (Bahcall 1964, Davis 1964, Pontecorvo 1967, Bahcall vd. 1969).

Nötrino çeşni durumları; üniter, 3×3 , Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata (PMNS) olarak adlandırılan bir matris aracılığıyla kütleli nötrino durumlarının bir karışımıdır. Güneş nötrinosu, atmosferik nötrino ve reaktör nötrinosu salınım deneylerinden alınan sonuçların birlikte analiz edilmesiyle nötrino salınımları deneysel olarak tamamen kanıtlandı; Sudbury Nötrino Gözlemevi (SNO) ve SuperKamiokande işbirlikleri adına A. McDonald ve T. Kajita 2015 Nobel Fizik ödülüne layık görülmüşlerdir. Nötrino salınımlarının kanıtlanmasıyla nötrinoların kütleli oldukları kesinlik kazanmış ve kütle ölçümü araştırmaları hızlanmıştır. Ancak nötrino salınımları teorisine göre kütle özdeğerlerinin kare farkları belirlenebilmektedir. Mutlak nötrino kütle ölçümleri, örneğin KATRIN işbirliğinde radyoaktif beta bozunumundaki Curie grafiğini incelemesiyle ve diğer uluslararası işbirlikleri tarafından yürütülen çalışmalar aracılığıyla yapılmaktadır.

Nötrino her ne kadar SM zayıf etkileşimlerinde boy gösterse de, bir çok özelliğinden ötürü SM ötesi bir yapısı vardır. Aynı zamanda astrofizik ve kozmoloji alanlarında da rol oynamaktadır. Evrenin yaklaşık % 27'sini oluşturan, sadece kütleçekim kuvveti ile etkileşen

gizemli olguya *karanlık madde* adı verilir. Nötrinolar yapıları itibariyle karanlık madde adaylardan bir tanesi olmasına karşın kozmolojik hesaplamalarla yaklaşık olarak 1 cm^3 'te 150 adet nötrino olduğu düşünüldüğünde bile (Cheng 2005) SM'deki nötrino çeşnilerinin kütlesi bu amaç için yeterli değildir. SM ötesi teorilerde karanlık madde adayı olarak zayıf etkileşen büyük kütleli parçacıklar (WIMP) öngörülmektedir. Steril nötrinolar da bu WIMP sınıfına girmektedir ve karanlık madde adaylarından biridir. Ancak bu teorik parçacık şu ana kadar gözlemlenebilmiş değildir.

Doğadaki lepton ve kuark ailelerinin zayıf izospin grubu $SU(2)$ 'nin ikili (dublet) ve tekli (singlet) temsillerine yerleştirilebileceği SM'in gelişimi sırasında tamamıyla anlaşılmıştır. Elektrozayıf simetri kırılmadan önce ($E > 250 \text{ GeV}$) leptonlar doğada hem sol-elli hem de sağ-elli olarak bulunabilmektedir. Ancak simetri kırılımından sonra leptonlar sol-elli ve sağ-elli özvektörlerinin bir süperpozisyonu olarak bulunabilir. Nötrino salınımları kanıtlanana kadar nötrinoların kütsüz oldukları genel olarak kabul edilmiştir ve bu kabul, kiral bazda çalışma özgürlüğünü kılmıştır ve yapılan tüm deneylerde doğada sadece sol-elli nötrinoların olduğu, sağ-elli nötrinoların varolmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Aynı şekilde doğadaki karşıt nötrinoların ise sağ-elli oldukları, sol-elli karşıt nötrinoların ise bulunmadığı yapılan deney ve gözlemler sonucunda varılmıştır. Ancak öte yandan nötrinoların kütleli olduğunun kanıtlanmasının ardından doğal olarak negatif helisiteli nötrino özvektörü sol-elli ve sağ-elli özvektörlerin bir süperpozisyonu olarak yazılabilir;

$$\left| \nu_{h=-\frac{1}{2}} \right\rangle \cong |\nu_L\rangle + \frac{m_\nu}{E} |\nu_R\rangle$$

Bilindiği üzere SM'deki yüklü leptonlar Dirac tipi parçacıklardır. Ancak nötrinoların hangi tip parçacık olduğu sorusu yani Dirac ya da Majorana tipi hala cevap aranan çok temel bir problemidir. Dirac tipi fermiyonlar halinde, her parçacığın bir de karşıt parçacığı vardır ve bu parçacıklar özdeş değildir (Dirac 1927). Majorana tipi fermiyonlar halinde ise, parçacık ve karşıt parçacıklar özdeştir (Majorana 1937). Bu amaç doğrultusunda sadece Majorana tipi bir nötrinonun varlığında gerçekleşebilecek *nötrinösüz çift beta bozunumu* reaksiyonu önerilmiştir (Furry 1939), ancak bu süreç henüz deneysel olarak gözlemlenebilmiş değildir ve bu yönde çalışmalar sürdürülmektedirler (Anonymous 2017,

Hirch vd. 2018).

Kuantum mekaniği, mikro boyutta klasik fiziğin açıklayamadığı fiziksel olguları dalga fonksiyonları ve olasılık kavramları ile başarılı bir şekilde açıklığa kavuşturmuş ancak bununla beraber hem fiziksel hem de felsefi tartışmalara sebep olmuştur. Fizik dünyasında genel kabul gören kuantum mekaniğinin Kopenhag yorumuna göre; bir kuantum sistemini temsil eden bir dalga fonksiyonu herhangi bir gerçekliğe karşılık gelmemektedir, fakat dalga fonksiyonunun mutlak değerinin karesi t anında ve x noktasında parçacığın bulunma olasılık yoğunluğunu verir. Öte yandan yapılan bir ölçüm ile sistemin durumunu bozma pahasına fiziksel gerçekliğe karşılık gelen bir sonuç elde edilebilmektedir. Bu anlatımda sistemin ölçüm sonrasındaki kuantum durumu ölçülmüş olan söz konusu değere karşılık gelen öz durumdur. Dalga fonksiyonu çökmesi olarak adlandırılan bu tasvir kuantum mekaniğinin en fazla itiraz alan yönlerinden bir tanesidir. 1935 yılında Einstein, Podolsky ve Rosen (EPR) kuantum mekaniğinin Kopenhag yorumuna karşı çıkarak gerçekliğin kuantum mekaniksel tasvirini sorgulamış ve kuantum mekaniğinin eksik bir teori olduğunu, klasik fizikteki ayrılabilirlik ve özel görelilikteki yerellik ilkelerini ihlal ettiğini ve teorinin bu ilkeler çerçevesinde genişletilmesi gerektiğini öne sürmüşlerdir. EPR düşünce deneyi, bu ilkelerin gizli değişkenler aracılığı ile korunabileceği ve bu yolla teorinin tamamlanabileceği öngörüsüne dayanır (Einstein vd. 1935). 1964 yılında J. Bell, EPR makalesinden yola çıkarak bulduğu ve kendi adını taşıyan eşitsizlik ile *gizli değişkenler* adı verilen bu teorinin deneysel olarak test edilmesini mümkün kılmıştır (Bell 1964). Farklı yöntemler kullanılarak da bu eşitsizliğe ulaşılabilir. Örneğin, 1974 yılında Clauser ve Horne'un (CH), türettikleri eşitsizlik, en baştaki determinizm varsayımını kaldırmakta ve ayrılabilirlik ilkesini koruyan gizli değişken teorilerinin sınanmalarını daha mümkün kılmaktadır (Clauser ve Horne 1974). Eşitsizliğe göre ölçüm sonuçları daima eşitsizliğin içerisinde kalırsa gizli değişken teorilerinin tutarlılığını işaret eder, tersine halde ölçüm sonuçları eşitsizliği ihlal ederse ve bu ihlal kuantum mekaniğinin öngörülerince açıklanabiliyorsa kuantum mekaniğinin doğruluğuna güçlü bir kanıt oluşturur (Ballentine 1998). Şu ana kadar yapılan tüm deneylerde bu eşitsizlik daima ihlal edilmiştir.

Bu tezin amaçları; çarpışma süreçlerinde spin etkilerinin incelenmesi, spin polarizasyon korelasyonlarının QFT çerçevesinde irdelenmesi ve spin polarizasyonları yardımıyla temel parçacıkların karakteristik özelliklerinin kavranabilmesi olarak sıralanabilir. Bu doğrultuda ikinci bölüm kuantum mekaniğinin temellerine ayrılmıştır. Bölüm 3’de spin polarize çarpışma süreçleri helisite bazında incelenmiştir. Bölüm 4’te spin polarizasyon korelasyonlarının QFT analizine yer verilmiş, beşinci ve son bölümde ise nötrinonun parçacık karakteri spin polarizasyonları kullanılarak çalışılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde kuantum mekaniğinin kuramsal temellerinden;

- Schrödinger denklemi,
- Dirac denklemi,
- Helisite ve kiralite,
- Helisite ve kiralite izdüşüm operatörleri,
- Kuantum dolanıklık ve EPR paradoksu,
- Bell eşitsizliği ve CH eşitsizliği,

özellikleri incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, kuantum elektrodinamiği (QED) kapsamında polarize müon çiftinin oluşum süreci irdelenmiştir. Olası her helisite durumu için;

- Helisite spinörleri,
- Helisite izdüşüm operatörleri,

yöntemleri kullanılarak sürecin genlikleri hesaplanmıştır (Romão ve Silva 2016). Bulunan genlik ifadeleri polarize olmayan süreç ile karşılaştırılmış ve polarize sürecin yüksek enerji limiti incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümde, polarizasyon korelasyonları QFT çerçevesinde;

- Çift yok oluş,
- Møller saçılması,

- Bhabha saçılması,
- Elektrozayıf modelde mion çiftinin oluşumu,

süreçlerine yoğunlaşmıştır (Yongram ve Manoukian 2003, 2004, 2006, 2013). Spinlerinin polarize oldukları durum için irdelenen bu süreçlerin genlik ifadelerinden yola çıkılarak süreçlerdeki dolanıklık Bell eşitsizliği ile sınanmıştır.

Beşinci ve son bölümde polarize elektron- elektron nötrinosu saçılması ele alınmıştır. Bu sürecin genlik hesaplamaları detaylı bir şekilde yapılmış, bulunan genlik ifadesinden yararlanılarak sürecin tesir kesiti hesaplanmış ve spin polarizasyon açıları üzerinden tanımlanan asimetri, farklı polarizasyon açı değerleri için incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Schrödinger Denklemi

Kuantum mekaniğinde fiziksel gözlenebilirlerin hepsi birer hermitik operatörle temsil edilirler ve kuantum mekaniksel bir sistemin zaman evrimi, zamana bağlı Schrödinger denklemi ile tasvir edilir;

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (2.1)$$

Burada $\psi(\mathbf{x}, t)$ belirli bir t zamanında belirli bir \mathbf{x} koordinatında parçacığın bulunma olasılığı genliğine karşılık gelen sistemin dalga fonksiyonudur ve H Hamiltonyeni ise,

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

formundadır. Schrödinger denklemi serbest parçacık için yazıldığında dinamik denklem,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\psi \quad (2.3)$$

şeklinindedir. Momentum operatörü açık bir şekilde yazıldığında Schrödinger denklemi serbest parçacık için,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \quad (2.4)$$

halini alır. Bu denklem zaman türevinde lineer iken uzay türevlerinde ikinci mertebededir. Uzay ve zaman koordinatları denkleme eşit bir şekilde girmediğinden bu denklem farklı Lorentz çerçevelerinde aynı kalmaz. Görelî bir denklemde ise uzay ve zaman denkleme eşit bir şekilde girmelidir ve bunun sonucunda her Lorentz çerçevesinde biçim değişmez kalmalıdır (Das 2008).

2.2 Klein- Gordon Denklemi

Görelî denklemlerin en basit hali olan Klein- Gordon denklemi,

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (2.5)$$

ile verilir. Burada d'Alembert operatörü olarak tanımlanan $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ Lorentz dönüşümleri altında değişmez olduğundan, Klein-Gordon denklemi de aynı şartı sağlar. Klein-Gordon denklemi kütleli durumda (durgun kütle olmadığında) dalga denklemine indirgenir. Bundan dolayı dalga denklemi gibi Klein- Gordon denkleminin de bir düzlem dalga çözümü vardır;

$$\phi \propto e^{\pm i k \cdot x} = e^{\pm i k_\mu x^\mu} = e^{\pm i(k_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.6)$$

Burada $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$ enerji-momentum operatörünün özfonksiyonlarıdır ve $\pm k^\mu$ enerji-momentum operatörünün özdeğerleridir. Bu düzlem dalga çözümünden,

$$k^0 = \pm E = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (2.7)$$

elde edilir ve açık bir şekilde görülür ki Klein-Gordon denklemi pozitif ve negatif enerji çözümlerine izin verir. Bunun bir sonucu olarak olasılık yoğunluğu;

$$\rho = \frac{k^0}{m} = \pm \frac{E}{m} \quad (2.8)$$

şeklinde bulunur. Olasılık yoğunluğu, pozitif tanımlı bir nicelik olduğundan negatif çözüm fiziksel değildir. Klein-Gordon denkleminde sadece pozitif enerji çözümü kullanılarak Hilbert uzayında durumların tam bir seti tanımlanamayacağından negatif enerji çözümü dışlanamaz (Das 2008).

2.3 Dirac Denklemi

Görelî Klein-Gordon denkleminde kuantum mekaniksel olarak, pozitif ve negatif enerjinin varlığını görülmüştür ve bu iki çözümün de fiziksel bir sistemi tanımlaması gerekir. Negatif enerji çözümü, olasılık yoğunluğunun da negatif olmasını getirir ancak olasılık yoğunluğu pozitif tanımlı olduğundan bu terim fiziksel değildir. Einstein'ın enerji-momentum bağıntısının kare kökü alındığında enerji ve momentum değişkenleri arasında lineer bir ilişki görülmemektedir. Ancak bir matrisin kare kökü bu ilişkiyi sağlamaktadır. Dirac'ın önerisi; Klein-Gordon denklemini bir matris denklemine dönüştürerek fiziksel olmayan bu durumu ortadan kaldırmaktır. Bunun için ilk olarak bir matris seti tanımlamıştır. Bu 4×4 'lük matris seti Clifford cebirini sağlar ve pek çok farklı şekilde gösterilebilir (Das 2008);

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Burada σ^i Pauli matrisleridir. Bu dört farklı matris γ^μ olarak kapalı bir şekilde gösterilebilir. Bu matrisler aşağıdaki özellikleri ve cebiri sağlar;

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}, & \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ (\gamma^0)^2 &= \mathbf{1}, & (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 \\ (\gamma^i)^2 &= -\mathbf{1}, \text{ her } i = 1, 2, 3 \text{ için}, & (\gamma^i)^\dagger &= \gamma^0\gamma^i\gamma^0 \\ \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 &= 0, & (\gamma_5)^\dagger &= \gamma_5 \\ \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i &= 0, \quad i \neq j, & \text{Tr}\gamma^\mu &= 0, \text{ her } \mu = 0, 1, 2, 3 \text{ için} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Yukarıda (2.9) bağıntısında yer alan ifadeler gamma matrislerinin *Pauli-Dirac* gösterimidir ve γ_5 ile tanımlanan matrise *kiralite matrisi* denir. Üniter benzerlik dönüşümleri yardımıyla sonsuz sayıda farklı gamma matris seti üretilebilir, ancak Dirac gösterimine ek olarak fiziksel önemi olan iki farklı gamma matris temsili daha vardır. İlk olarak kütle-siz fermiyonları açıklarken *Weyl* temsilindeki gamma matrislerini kullanmak daha kul-

lanışlıdır;

$$\gamma_W^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$$

Bu gösterim bir benzerlik dönüşümü ile Pauli-Dirac temsiline dönüřtürülebilir;

$$\gamma_W^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} + \gamma_5\gamma^0) \quad (2.12)$$

İkinci olarak, Majorana fermiyonları ile çalışılıyorsa *Majorana* temsili ile çalışmak daha kullanışlıdır;

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \end{pmatrix}$$

Bu gösterim bir benzerlik dönüşümü ile Pauli-Dirac temsiline dönüřtürülebilir;

$$\gamma_M^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0(\mathbf{1} + \gamma^2) \quad (2.14)$$

Dörtlü vektörlerin γ matrisleriyle kontraksiyonları, örneğın 4-momentum için,

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır ve Dirac denkleminin momentum temsili,

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ψ dört bileşenli bir sütun matristir ve Dirac spinörü olarak tanımlanır. Dirac denkleminin koordinat temsili, momentum operatörü (2.16) bağı-

tısında yerine yazıldığında,

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (2.17)$$

şeklindedir. Denklem (2.17) açıkça ifade edilirse Dirac Hamiltonyeni,

$$\begin{aligned} H_D &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \\ \boldsymbol{\alpha} &= \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklinde bulunur.

2.3.1 Dirac denkleminin çözümü

Dirac denkleminin düzlem dalga çözümü en genel olarak, A bir sabit olmak üzere,

$$\psi(x) = Ae^{-ip \cdot x} u(p) \quad (2.19)$$

şeklindedir. (2.19) bağıntısı denklem (2.17)'de yerine yazıldığında,

$$(\cancel{\not{p}} - m)u(p) = 0 \quad (2.20)$$

bulunur. Eğer $u(p)$ bu denklemi sağlarsa, $\psi(x)$ de Dirac denklemini sağlar. Burada $u(p)$ dört bileşenli bir sütun matristir. Dirac denkleminin çözümünde pozitif ve negatif enerji değerleri çift dejeneredir. Bu çift dejenerelik, dalga fonksiyonunun spin yapısının bir yansımasıdır (Das 2008). Dirac denkleminin en genel normalize pozitif ve negatif enerji çözümleri,

$$u_+(p) = N \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \tilde{u}(p) \end{pmatrix}, \quad u_-(p) = N \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \tilde{v}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

şeklindedir. Burada \tilde{u} ve \tilde{v} , $u_{\pm}(p)$ 'nin üst ve alt bileşenleridir ve parçacıkların spin bilgilerini içermektedir. N ise normalizasyon sabitidir. Dirac denkleminin birbirinden bağımsız dört farklı çözümü vardır. \tilde{u} ve \tilde{v} 'nin en basit çözümleri² için spinörler aşağıdaki

² $\tilde{u}, \tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\tilde{u}, \tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak verilir.

gibidir (Griffiths 2008);

$$u_1(p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2(p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$v_1(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(p) = -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Burada u ile gösterilen spinörler parçacıkları, v ile gösterilen spinörler ise karşı parçacıkları temsil etmektedir. Bu notasyon dalga fonksiyonlarının spin- $\frac{1}{2}$ parçacıklara karşılık geldiğini göstermektedir. Sırasıyla u_1 spin yukarı bir parçacığa, u_2 spin aşağı bir parçacığa, v_1 spin yukarı bir karşıt parçacığa ve v_2 spin aşağı bir karşıt parçacığa karşılık gelmektedir. Spinörleri aynı spin bileşeni üzerinden normalize edilebilmesi için,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.24)$$

tanımlanır ve bu spinörlere *eşlenik spinör* adı verilir. Normalizasyon sabiti çalışılan baza göre farklılık gösterebilir. Örneğin, *Halzen ve Martin* temsiline göre $\sqrt{E+m}$ şeklindeyken *Bogoliubov ve Shirkov* temsiline göre $\sqrt{\frac{E+m}{2m}}$ şeklindedir. Dirac parçacıkları için spin matrisi,

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \Sigma, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. Hamiltonyen bilindiği üzere hareket sabitlerinin tanımlanmasına yardımcı olur. Eğer bir operatör H ile komütatifse, bu operatör korunan bir nicektir. Parçacığın spini ve açısal mometumu Dirac Hamiltonyeni ile komütatif değilken toplam

açısal momentum, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, Dirac Hamiltonyeni ile komütatiftir;

$$[H_D, \mathbf{J}] = 0 \quad (2.26)$$

Bu sonuç Dirac denkleminin doğal yapısından dolayı toplam açısal momentumun korunduğunu göstermektedir.

2.4 Helisite

Momentum ve toplam açısal momentum Dirac hamiltonyeni ile komütatif olduğundan ikisinin vektörel çarpımı da komütatiftir:

$$[H_D, \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}] = \mathbf{J} [H_D, \mathbf{p}] + [H_D, \mathbf{J}] \mathbf{p} = 0 \quad (2.27)$$

Bu ifadeden hareketle, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}$ operatörü bir hareket sabittir (korunan bir niceliktir). Momentum ile toplam açısal momentumun çarpımını incelendiğinde,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} \\ &= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}$$

elde edilir ve buradan toplam açısal momentumun, parçacığın momentum yönündeki izdüşümü ile spinin momentum yönündeki izdüşümünün eşit olduğu sonucuna varılır (Haber 1994). (2.28) bağıntısı normalize edilip komütasyon bağıntısında tekrardan yazıldığında,

$$\left[H_D, \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}|} \right] = [H_D, \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S}] = 0 \quad (2.29)$$

bulunur. Bu operatöre *helisite* adı verilir ve aşağıdaki gibi gösterilir;

$$h = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}|} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S} \quad (2.30)$$

Dirac parçacıkları için helisite operatörünün özdeğerleri $\pm \frac{1}{2}$ 'dir. Pozitif ve negatif enerji çözümlerini bu iki helisite özdeğeri için $u(p, h)$ ve $v(p, h)$ için yazılabilir. Helisite durumlarının avantajı, \mathbf{J}^2 , J_z , \mathbf{S}^2 ve \mathbf{L}^2 ile aynı öz durumlara sahip olmasıdır (Haber 1994).

Helisite durumlarının özellikleri şu şekildedir;

- Uzaysal dönmeler altında değişmezdir.
- Parçacığın momentumu yönündeki ötelemeler altında değişmezdir.
(Momentumun yönü değişmediği sürece.)
- Kütleli ve kütesiz görelî parçacık saçılmalarını incelemek için uygundur
(Haber 1994).

Ancak helisite Lorentz değişmez değildir. Bunun nedeni ise parite dönüşümü altında değişmez kalmamasıdır. (θ, ϕ) açılarıyla herhangi bir yönde ilerleyen parçacığın helisite spinörler aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix}, u_{\downarrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix}, v_{\downarrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Burada \uparrow pozitif helisiteye, \downarrow ise negatif helisiteye karşılık gelmektedir.

2.4.1 Kütlesiz Dirac parçacığı

Dirac denkleminin momentum temsilinde matris ifadesi açıldığında ve $u(p)$ spinörünün bileşenleri sırasıyla $u_1(p)$ ve $u_2(p)$ şeklinde yazıldığında,

$$\begin{aligned}(p^0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(u_1(p) + u_2(p)) &= m(u_1(p) - u_2(p)) \\ (p^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(u_1(p) - u_2(p)) &= m(u_1(p) + u_2(p))\end{aligned}\tag{2.33}$$

şeklinde bağlı iki denklem bulunur. Yeni iki bileşenli spinörler,

$$\begin{aligned}u_L(p) &= \frac{1}{2}(u_1(p) - u_2(p)) \\ u_R(p) &= \frac{1}{2}(u_1(p) + u_2(p))\end{aligned}\tag{2.34}$$

olarak tanımlanır. Denklem (2.33) kütlesiz limitte yeni tanımlanan spinörler cinsinden yazıldığında,

$$\begin{aligned}p^0 u_R(p) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_R(p) \\ p^0 u_L(p) &= -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_L(p)\end{aligned}\tag{2.35}$$

elde edilir. Bu denklemler Dirac denkleminde olduğu gibi Lorentz dönüşümleri altında değişmezdir.³ Ancak parite dönüşümü altında veya uzay yansıması altında değişmez değildir ve Weyl denklemleri olarak adlandırılır. u_L ve u_R olarak adlandırılan spinörlere de Weyl spinörleri denir. Einstein bağıntısı düşünüldüğünde kütlesiz limitte $p^0 = \pm|\mathbf{p}|$ 'ye eşittir ve pozitif enerji için (2.35) denklemi,

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u_R &= u_R \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u_L &= -u_L\end{aligned}\tag{2.36}$$

formunu alır. Başka bir deyişle Weyl denklemleri zıt helisiteli parçacıkları temsil etmektedir. $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 'nın iki bileşenli spinör için spin operatörü olduğundan, $u_L(p)$ helisitesi $-\frac{1}{2}$ olan parçacığı tanımlar ve bu parçacığa *sol elli* denir. Aynı şekilde $u_R(p)$ helisitesi $+\frac{1}{2}$ olan parçacığı tanımlar ve bu parçacığa *sağ elli* denir. Ellilik aynı zamanda kiralite olarak da

³ Kütle terimi de bir Lorentz skaler olduğundan kütle terimi ihmal edilmediğinde de değişmez kalır.

adlandırılır. Bu spinörler kütleli Dirac sistemleri ile ilişkili kiral simetri sayesinde daha kolay anlaşılacak γ_5 matrisinin özdeğerleri olarak gösterilebilir.

2.5 Kiralite

Kütleli Dirac denklemi,

$$\not{p}u(p) = 0 = \not{p}v(p) \quad (2.37)$$

şeklinindedir. Kütleli Dirac denkleminin yapısından kaynaklı olarak eğer $u(p)$ (veya $v(p)$) bir çözüme, $\gamma_5 u(p)$ (veya $\gamma_5 v(p)$) de bir çözümdür. Bu nedenle kütleli Dirac denkleminin çözümleri, *kiralite* veya *ellilik* olarak bilinen γ_5 'in özdeğerlerine göre sınıflandırılabilir. γ_5 kütleli Dirac hamiltonyeni ile komütatiftir;

$$[H_D, \gamma_5] = 0 \quad (2.38)$$

$(\gamma_5)^2 = 1$ olduğundan γ_5 'in özdeğerleri ± 1 'dir. Özdeğeri $+1$ olan spinörler,

$$\gamma_5 u_R(p) = u_R(p), \quad \gamma_5 v_R(p) = v_R(p) \quad (2.39)$$

ile verilir ve *sağ-elli (pozitif kiralite)*⁴ olarak tanımlanır, özdeğeri -1 olan spinörler ise,

$$\gamma_5 u_L(p) = -u_L(p), \quad \gamma_5 v_L(p) = -v_L(p) \quad (2.40)$$

şeklinindedir ve *sol-elli (negatif kiralite)* olarak tanımlanır. Eğer fermiyon kütleliyse o halde Dirac Hamiltonyeni γ_5 ile komütatif değildir ve bu durumda kiralite o durumu tanımlamak için uygun bir kuantum sayısı değildir. Genel bir spinör izdüşüm operatörleri yardımıyla sol-elli ve sağ-elli bileşenlerine ayrılabilir (Das 2008);

⁴ Buradan itibaren tezde kiralite için ellilik tanımı kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
u_R(p) &= P_R u(p) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)u(p) \\
u_L(p) &= P_L u(p) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)u(p) \\
v_R(p) &= P_R v(p) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)v(p) \\
v_L(p) &= P_L v(p) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)v(p)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
P_R &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\
P_L &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

sırasıyla sağ-elli ve sol-elli izdüşüm operatörleridir ve aşağıdaki koşulları sağlar;

$$\begin{aligned}
(P_R)^2 &= P_R \quad , \quad (P_L)^2 = P_L \\
P_R P_L &= 0 = P_L P_R \quad , \quad P_L + P_R = 1
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Bu izdüşüm operatörleri, herhangi bir dört bileşenli spinörün benzersiz olarak sol-elli ve sağ-elli bileşenlere ayrışabileceğini ima eder.

2.6 Helisite ve Kiralite İzdüşüm Operatörleri

Spin izdüşüm operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$P(s) = \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2} \tag{2.44}$$

Burada s^μ spin 4-vektörünün Lorentz kovaryant gösterimidir, parçacığın durgun çerçevesine gidildiğinde hemen görülebileceği üzere $s^2 = -1$ ve $s \cdot p = 0$ koşullarını sağlar. Spin 4-vektörü helisite için yazıldığında,

$$s^\mu = (\gamma\beta, \gamma\hat{\beta}) = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) \tag{2.45}$$

şeklindedir. Helisite izdüşüm operatörü tamlık bağıntısından yola çıkılarak en genel olarak sırasıyla u ve v spinörleri için,

$$\begin{aligned} P_h^{(u)} &= \frac{1}{2} \left(1 + h \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}}{|\mathbf{p}|} \right) \\ P_h^{(v)} &= \frac{1}{2} \left(1 - h \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}}{|\mathbf{p}|} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

olarak tanımlanır. Bu iki denklem birleştirilmiş kovaryant bir formda yazılabilir. Denklem (2.20) helisite operatörü ile çarpıldığında ve $\Sigma^k = \gamma^0 \gamma^k \gamma_5$ eşitliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}}{|\mathbf{p}|} u^{(h)}(p) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}}{|\mathbf{p}|} \frac{\not{p}}{m} u^{(h)}(p) \\ &= \frac{\gamma_5 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{E \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{m} u^{(h)}(p) \\ &= \gamma_5 \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m} \gamma^0 - \frac{E}{m} \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) u^{(h)}(p) \end{aligned} \quad (2.47)$$

elde edilir ve (2.45) bağıntısı yukarıda yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} h u^{(h)}(p) &= \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu u^{(h)}(p) = \gamma_5 \not{s} u^{(h)}(p) \\ u^{(h)}(p) &= h \gamma_5 \not{s} u^{(h)}(p) \end{aligned} \quad (2.48)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$v^{(h)}(p) = -h \gamma_5 \not{s} v^{(h)}(p) \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Buradan, helisite $h = \pm$ için helisite izdüşüm operatörünün kovaryant formu,

$$P(h, s) = \frac{1}{2} (1 + h \gamma_5 \not{s}) \quad (2.50)$$

şeklinde yazılır (Giunti ve Kim 2007). Bu izdüşüm operatörünün matris ile gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$P(h, s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (1 + h \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}) & -\frac{1}{2} h \gamma \beta \\ \frac{1}{2} \gamma \beta & \frac{1}{2} (1 - h \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Helisite izdüşüm operatörü helisite spinörlerine uygulandığında,

$$P(h, s)u_{\uparrow}(p) = \frac{1}{2}(1 + h)u_{\uparrow}(p) \quad (2.52)$$

$$P(+, s)u_{\uparrow}(p) = u_{\uparrow}(p), \quad P(-, s)u_{\uparrow}(p) = 0$$

$$P(h, s)u_{\downarrow}(p) = \frac{1}{2}(1 - h)u_{\downarrow}(p) \quad (2.53)$$

$$P(-, s)u_{\downarrow}(p) = u_{\downarrow}(p), \quad P(+, s)u_{\downarrow}(p) = 0$$

spinörleri olması gerektiği gibi izdüşürdüğü görülür. v_{\uparrow} ve v_{\downarrow} spinörleri de sırasıyla (2.52) ve (2.53) bağıntılarında olduğu gibi izdüşürür (Giunti ve Kim 2007).

2.7 Kütlesiz ($m \neq 0$) ve Kütleli ($m = 0$) Hâller İçin Helisite ve Kiralite İzdüşüm Operatörleri

2.7.1 Kütlesiz ($m = 0$) hâl için izdüşüm operatörleri

Kütle sıfıra gittiğinde helisite öz durumları aynı zamanda kiralite öz durumları halini alır.

Kütlesiz hal için helisite spinörleri,

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\chi_{\uparrow} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$u_{\downarrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\chi_{\downarrow} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ -\chi_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\chi_{\downarrow} \\ -\chi_{\downarrow} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ -\chi_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$v_{\downarrow} = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (2.54) ve (2.55) ile bulunan spinörlere kiral izdüşüm operatörü uygulandıgında,

$$\begin{aligned} P_R u_\uparrow &= u_\uparrow & ; & & P_L u_\downarrow &= 0 & ; & & P_R u_\downarrow &= 0 & ; & & P_L u_\downarrow &= u_\downarrow \\ P_R v_\uparrow &= 0 & ; & & P_L v_\downarrow &= v_\downarrow & ; & & P_R v_\downarrow &= v_\downarrow & ; & & P_L v_\downarrow &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

ifadeleri bulunur. Parçacıklar için kütesiz limitte kiralite helisiteye eşittir, paralel olarak karşıt parçacıklar için kiralite negatif helisiteye eşittir (Romão ve Silva 2016).

2.7.2 Kütleli ($m \neq 0$) hâl için izdüşüm operatörleri

Helisite izdüşüm operatörü kiral izdüşüm operatörü cinsinden yazılabilir. Helisite izdüşüm operatörü birim operatör ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} P(h, s) &= \frac{1}{2}(1 + h\gamma_5 \not{s}) \mathbf{1} = \frac{1}{2}(1 + h\gamma_5 \not{s})(P_L + P_R) \\ &= P_L \frac{1 - h\not{s}}{2} + P_R \frac{1 + h\not{s}}{2} \end{aligned} \quad (2.57)$$

sonucunu elde edilir. Denklem (2.31) ve (2.32)'de tanımlanan spinörler daha kapalı bir formda yazılabilir ve aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} u_\uparrow &= \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \frac{\gamma\beta}{\gamma+1}\chi_\uparrow \end{pmatrix}, & v_\uparrow &= \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma\beta}{\gamma+1}\chi_\downarrow \\ \chi_\downarrow \end{pmatrix} \\ u_\downarrow &= \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_\downarrow \\ -\frac{\gamma\beta}{\gamma+1}\chi_\downarrow \end{pmatrix}, & v_\downarrow &= \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{\gamma\beta}{\gamma+1}\chi_\uparrow \\ \chi_\uparrow \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.58)$$

(2.58) ile verilen spinörler m/E 'nin ilk mertebesine seriye açılıp denklem (2.57) ile tanımlanan izdüşüm operatörü etki ettirildiğinde sonuçlar aşağıdaki gibidir (Romão ve Silva 2016);

$$\begin{aligned} P(+, s)u_\uparrow &= P_L \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ -\chi_\uparrow \end{pmatrix} + P_R \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \chi_\uparrow \end{pmatrix} \\ P(-, s)u_\uparrow &= P_L \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \chi_\uparrow \end{pmatrix} + P_R \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ -\chi_\uparrow \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$P(+, s)u_{\downarrow} = P_L \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} + P_R \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ -\chi_{\downarrow} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

$$P(-, s)u_{\downarrow} = P_L \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ -\chi_{\downarrow} \end{pmatrix} + P_R \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$P(+, s)v_{\uparrow} = P_L \sqrt{E} \begin{pmatrix} -\chi_{\downarrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} + P_R \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$P(-, s)v_{\uparrow} = P_L \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} + P_R \sqrt{E} \begin{pmatrix} -\chi_{\downarrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} = 0$$

$$P(+, s)v_{\downarrow} = P_L \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix} + P_R \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} -\chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

$$P(-, s)v_{\downarrow} = P_L \frac{m}{2E} \sqrt{E} \begin{pmatrix} -\chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix} + P_R \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix}$$

Bulunan bu sonuçlar u_{\uparrow} için incelendiğinde ilk olarak, pozitif helisite ile izdüşüren operatör iki kiral izdüşüm operatörünün lineer kombinasyonu şeklindedir. Kütlesiz limitte ise P_R 'a eşit olur. Negatif helisite ile izdüşüren operatör ise kütle için her zaman beklediği gibi sıfır sonucunu vermiştir (Romão ve Silva 2016).

2.8 Kuantum Dolanıklık ve Bell Eşitsizliği

Schrödinger denkleminin lineer olmasının bir sonucu olan süperpozisyon ilkesi kuantum mekaniğinin önemli özelliklerinden biridir. Bu sonuca göre iki veya daha fazla çözümün lineer kombinasyonu da bir çözümdür. Bu ilkeye göre, bir parçacığın aynı anda farklı konumlarda ve farklı spin yönelimlerinde bulunma olasılıkları sıfırdan farklı olabilir.

Bir kuantum sistemine ait alt-sistemlerin durum vektörlerinin tensör çarpımı olarak yazılamayan durumlar *dolanık durum* olarak adlandırılır:

$$|a\rangle \neq |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \otimes \cdots |a_i\rangle \quad (2.63)$$

Burada $|a_i\rangle$, i . bileşenin durum vektörüdür. Spini $\frac{1}{2}$ olan iki parçacıklı bir sistem dolanık durum için verilebilecek en basit örnektir. Bu sistemin üçlü (triplet), $s = 1$, durumları,

$$\begin{aligned} |1 \ 1\rangle &= |+\rangle \otimes |+\rangle \\ |1 \ 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle] \\ |1 \ -1\rangle &= |-\rangle \otimes |-\rangle \end{aligned} \quad (2.64)$$

ve tekli (singlet), $s = 0$, durumu,

$$|0 \ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle] \quad (2.65)$$

şeklinindedir. Bu ifadede $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ sırasıyla spin-yukarı ve spin-aşağı durumlar olarak adlandırılır. Açıkça görülür ki $|1 \ 0\rangle$ ve $|0 \ 0\rangle$ durumları dolanık durumlardır. Tek başına $|1 \ 1\rangle$ ve $|1 \ -1\rangle$ durumları dolanık değildir ancak bu iki durumun lineer kombinasyonu alınarak dolanık durumlar oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} |\varphi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \otimes |1\rangle \pm |0\rangle \otimes |0\rangle] \\ |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \otimes |0\rangle \pm |0\rangle \otimes |1\rangle] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Bu durumlar Bell durumları ya da EPR durumları olarak adlandırılır. 1935'te yayınlanan EPR makalesinden sonra yine aynı yıl içerisinde yayınlanan makale ile dolanıklık terimini kullanan ilk kişi Schrödinger'dir (Schrödinger 1935). Eğer iki farklı sistemden oluşan bir bileşik sistemin kuantum durumları alt bileşenler için bir korelasyon içeriyorsa, o iki sistemin dolanık olduğu söylenebilir. Dolanık durumlar elektronlar, fotonlar, atomlar ve çekirdekler için de elde edilebilir. Örneğin aynı yörüngedeki iki elektron dolanıktır, zira bu elektronların spinlerinin zıt yönlü olması Pauli dışarlama ilkesince bilinmektedir. Ancak kuantum mekaniğinin, Kopenhag yorumuna göre eğer bir ölçüm yapılmamışsa her bir parçacığın durumu spin yukarı ve spin aşağı durumlarının bir süperpozisyonudur.

2.8.1 Einstein'ın yerellik ilkesi ve kuantum mekaniğinin Kopenhag yorumuna eleştirisi

A. Einstein et.al ünlü EPR (1935) makalelerinde “Gerçekliğin kuantum mekaniksel tasviri tam olarak kabul edilebilir mi?” sorusunu sorarak hem felsefi hem de bilimsel anlamda kuantum fiziğinin genel kavramsal yapısını temelden sorgulamışlardır. Buradaki tam ifadesi söz konusu makalede şu şekilde belirtilmiştir: “Fiziksel gerçekliğin her unsurunun fiziksel bir teoride karşılığının olması gerekir” (Einstein vd. 1935). Bu ise tam bir fiziksel teorinin sağlaması beklenen gerekli koşulu ifade etmektedir.

Kopenhag yorumuna göre; bir kuantum sistemini temsil eden bir dalga fonksiyonu herhangi bir gerçekliğe karşılık gelmemektedir, fakat dalga fonksiyonunun mutlak değerinin karesi t anında ve x noktasında parçacığın bulunma olasılık yoğunluğunu verir. Öte yandan yapılan bir ölçüm ile sistemin durumunu bozma pahasına fiziksel gerçekliğe karşılık gelen bir sonuç elde edilebilmektedir. Bu anlatımda sistemin ölçüm sonrasındaki kuantum durumu ölçülmüş olan söz konusu değere karşılık gelen öz durumdur. Dalga fonksiyonu çökmesi olarak adlandırılan bu tasvir kuantum mekaniğinin en fazla itiraz alan yönlerinden bir tanesidir. Ancak bu yoruma karşılık EPR makalesinde, “bir sistemi rahatsız etmeden, fiziksel bir niceliğin değeri kesin olarak tahmin edilebiliyorsa bu durumda bu fiziksel niceliğe karşılık gelen bir fiziksel gerçeklik unsurunun varlığından bahsedilebilir” (Einstein vd. 1935).

EPR makalesinde önerilen düşünce deneyinde iki parçacıklı bir sistemin kuantum durumu göz önüne alınmıştır. Bağlı konumları $x_1 - x_2$ ve toplam momentumları $p_1 + p_2$ olarak hazırlanan iki parçacıklı bu sistemin hazırlama işlemi tamamlandıktan sonra, iki parçacık arasında herhangi bir etkileşim olmamaktadır zira bu iki parçacık uzaysal ayrık tırlar. İlk parçacığın konumu ölçüldüğünde ikinci parçacığın konumu kesin olarak belirlenebilir ve tersine ilk parçacığın momentumu ölçüldüğünde ikinci parçacığında momentumu kesin olarak belirlenmektedir. İkinci parçacık birinci parçacıktan uzaksal ayrık olduğu için birinci parçacık üzerinden yapılan ilk konum ve momentum ölçümleri ikinci parçacığın konum ve momentum ölçüm değerlerini etkilememektedir. Bu demektir ki EPR makalesinde belirtilen kritere göre, ikinci parçacığın gerek konumu gerek de

momentumu bir gerçeklik unsurlarıdır. Gerçekliğin unsurlarına karşılık gelen konum ve momentum operatörlerine belirli değerler tanımlayabilecek ortak özvektörler bulunmadığından (zira konum ve momentum operatörleri komütatif değildir); gerçekliğin kuantum mekaniksel tasvirinin tam olmadığı sonucuna varılmıştır.

EPR makalesinin büyük bir önemi, kuantum mekaniğinin yerellik olmama özelliği ile karşı karşıya gelmesidir. Yerellik ilkesi, fiziksel olayların önce yakın çevresini etkilemesinden ötürü etkinin sonlu hızlarla ilerlemesi gerektiğini ifade eder. Bu ilke motivasyonunu özel görelilikten alır ve uzak bir mesafeden anlık bir etkileşmelere izin vermemektedir. Parçacıklar uzaysal olarak ayrık olduğu ve etkileşimde bulunmadıkları düşünüldüğünde, birinci parçacık üzerinde yapılan herhangi bir ölçümün ikinci parçacığın durumunu etkilemeyeceği EPR argümanını dolaylı olarak ima eder. Ancak yukarıdaki paragrafta açıklandığı üzere ikinci parçacığı rahatsız etmeksizin konum ve momentumunun belirlenebiliyor olması Einstein'ın bu yerellik ilkesinin ihlali anlamına gelir. Gerçekliğin kuantum mekaniksel tasvirinin tam olmadığı önermesi eğer yanlış ise bu durumda komütatif olmayan işlemciler karşılık gelen fiziksel niceliklerin aynı anda gerçek olamayacakları önermesi de yanlıştır. Bu ise kuantum mekaniksel tasvirin tam olmadığını ima eder.

Einstein'a göre kuantum mekaniğinin ön gördüğü ve parçacıklar arasında yerel olmayan etkileşimleri açıklayabilmek amacıyla *yerel gizli değişkenleri* teoriye katma fikri ortaya atılmıştır. J. Bell'in bu alanda yapmış olduğu katkılar ve özellikle geliştirilen Bell eşitsizlikleri o zamana kadar yapılan düşünce deneylerinin yerini laboratuvarlarda gerçek deneyler almaya başlamıştır. Bell eşitsizliklerine göre gizli değişkenler kuramının öngörülleri ile kuantum mekaniğinin öngörülleri farklılıklar taşımaktadır ve doğru olanı saptamanın biricik yolu da kuşkusuz ki deney sonuçlarına başvurmaktır.

2.8.2 Spin korelasyonları

EPR düşünce deneyi teoride mümkün gözüktüğü de gerçek bir deney modeli olarak pek uygun değildir. İlk durumları hazırlamak hiç kolay değildir (göreceli konum ve momentum

özdurumları), öyle olsaydı bile bu durumlar sadece geçici olarak elde edilecektir. Öyle ki görelî konum öz durumu hiç bir şekilde sabit bir öz durum olamaz. Daha gerçekçi bir deney 1957 yılında David Bohm tarafından önerilmiştir. Bu deneye göre, her birinin spini $\frac{1}{2}$ olan ve toplam spini sıfır olan bir durumda hazırlanmış çift atomlu bir sistem incelenmiştir (Bohm ve Aharonov 1957). Belirli çift atomlu moleküllerde kararsız uyarılmış durumlarda bu özellikler gözlenmektedir. Bu sistem tekli (singlet) bir spin durum vektörü, $|\psi\rangle$, ile verilir (denklem 2.65). Yörünge durumu sabit olmasa bile etkileşimler spini içermeyeceğinden spin durumu değişmeyecektir ve bu durum hazırlanılan sistemde çalışmak için uygun bir zemin hazırlamaktadır. Parçacıklar etkileşemeyecekleri kadar ayrıldıktan sonra birinci parçacığın spininin z-bileşeni ölçüldüğünde toplam spin sıfır olduğundan, ikinci parçacık rahatsız edilmeden spini kesin olarak söylenebilir. O halde EPR'ye göre, $\sigma_z^{(2)}$ bir gerçeklik unsurudur. Tekli durum uzaysal dönmeler altında değişmez kalacağından $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_y^{(2)}$ veya herhangi bir spin bileşeni de gerçeklik unsurlarıdır. Bundan kaynaklı olarak EPR'ye göre kuantum durum tanımı, tam bir fiziksel gerçeklik tanımı değildir. EPR argümanının Bohm'un uygulanabilir deneyi ile tekrardan ifade edilmesinin ardından John Bell, sadece aynı yönelimdeki spin bileşenleri arasındaki korelasyonları değil, aynı zamanda herhangi bir spin yönelimdeki bileşenler arasındaki korelasyonları incelemiştir (Bell 1964).

Pauli spin operatörünün \hat{a} birim vektörü yönündeki bileşeni $\sigma_a = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{a}$ ve \hat{b} birim vektörü yönündeki bileşeni $\sigma_b = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{b}$ olmak üzere, birinci parçacığın spini \hat{a} birim vektörü yönünde ve ikinci parçacığın spini \hat{b} birim vektörü yönünde ölçüldüğünde elde edilen sonuç korelasyon içerecektir. Tekli durum korelasyonu için (Ballentine 1998),⁵

$$\langle \Psi_0 | \sigma_a \otimes \sigma_b | \Psi_0 \rangle = -\cos(\theta_{ab}) \quad (2.67)$$

sonucu bulunur. Burada θ_{ab} , \hat{a} ve \hat{b} birim vektörleri arasındaki açıdır. Bu sonuç Pauli spin matrislerinin özelliklerini kullanılarak açık bir şekilde elde edilebilir ya da daha basit bir şekilde tekli durumun uzaysal dönmeler altında değişmez kaldığı durumdan faydalanılarak \hat{a} birim vektörü z-yönünde seçilebilir. Bu durumda denklem 2.65'in iki terimi

⁵ Burada tekli durum vektörü kısaltma için $|0 \ 0\rangle = |\Psi_0\rangle$ olarak yazılmıştır.

de σ_a 'nın özvektörleri olacaktır. O halde,

$$\langle \Psi_0 | \sigma_a \otimes \sigma_b | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{2} [\langle - | \sigma_b | - \rangle - \langle + | \sigma_b | + \rangle] = -\cos(\theta_{ab}) \quad (2.68)$$

sonucu elde edilir. Bell'in spin korelasyonlarının bu ifadesi Einstein'ın yerellik prensibi ile uyumsuzluğa düşer (Ballentine 1998).

2.8.3 Bell eşitsizliği

Bell eşitsizliği,

$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2 \quad (2.69)$$

şeklinde verilir (EK-1). Burada C , korelasyon fonksiyonudur ve ölçme parametrelerine bağlıdır. Bell eşitsizliğinin farklı bir çok türetilimi mevcuttur; bu türetimlerden bazıları farklı varsayımlar yapılarak bulunmuştur. Örnek olarak, Clauser ve Horne (CH) tarafından 1974 yılında yayınlanmış ve Bell'in bulduğu eşitsizliğe göre iki açıdan üstündür; teorik olarak, en baştaki determinizm varsayımını bir kenara bırakmakta ancak ayrılabilirlik ilkesini koruyan gizli değişken teorilerinin sınanmalarını daha mümkün kılmaktadır. Diğer taraftan ise, sadece tespit edilen sonuçlara değinen bir eşitsizliğe yol açtığı ve algılanmamış parçacıkların sayısını içermemesi, deneysel testleri daha mümkün kılmaktadır (Ballentine 1998). *CH* eşitsizliği olarak adlandırılan bu ifade,

$$-1 \leq P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P_{12}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P_{12}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - P_1(\mathbf{a}') - P_2(\mathbf{b}) \leq 0 \quad (2.70)$$

şeklindedir (Clauser ve Horne 1974). Burada tanımlanan $P_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ her iki parametrenin de aynı anda ölçülmesi olasılığıdır. $P_1(\mathbf{a})$ ve $P_2(\mathbf{b})$ ise sadece bir parametrenin ölçüldüğü durumda elde edilen değerlerdir.

3. SPİN POLARİZASYON ETKİLERİNİN HELİSİTE BAZINDA İNCELENMESİ

Parçacık hızlandırıcılarında incelenecek çarpışma süreci, en genel olarak parçacık demetleri polarize edilmeden gerçekleştirilir ve bu süreçlere spinin getireceği katkılar etkileşime giren ve çıkan parçacıkların spinleri üzerinden ortalama alınmasından dolayı açık olarak elde edilemez. Bir çarpışma sürecinin polarize incelenmesiyle, etkileşime giren parçacıkların iç yapısı ve etkileşime olan etkisi açık bir şekilde irdelenebilir ve bu süreç; spinörlerin açık bir şekilde spin bilgilerinin yazılmasıyla veya helisite bazında çalışılmasıyla incelenebilir.

3.1 $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ Süreci İçin Helisite ve Kiralitenin İncelenmesi

Kütle merkezi çerçevesinde $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ süreci üç farklı metod ile incelenmiştir (Romão ve Silva 2016). Kütle merkezi çerçevesinde bu süreçte giren ve çıkan parçacıkların 4-momentumları

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, |\mathbf{p}_1|) = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta_1) \\ p_2 &= (E, 0, 0, -|\mathbf{p}_1|) = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -\beta_1) \\ p_3 &= (E, |\mathbf{p}_3| \sin \theta, 0, |\mathbf{p}_3| \cos \theta) = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta_3 \sin \theta, 0, \beta_3 \cos \theta) \\ p_4 &= (E, -|\mathbf{p}_3| \sin \theta, 0, -|\mathbf{p}_3| \cos \theta) = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta_3 \sin \theta, 0, -\beta_3 \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada p_1 ve p_2 sırasıyla e^- ve e^+ 'un, p_3 ve p_4 ise sırasıyla μ^- ve μ^+ 'un 4-momentumlarıdır. s parametresi ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

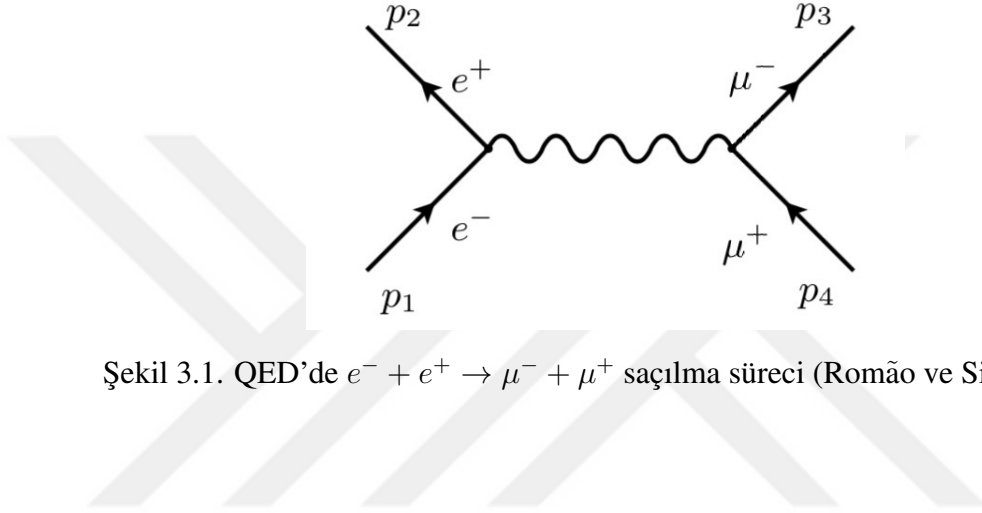
$$\sqrt{s} \equiv 2\gamma_1 m_e = 2\gamma_3 m_\mu \quad (3.2)$$

Denklem (3.2) ile tanımlanan s parametresi *Mandelstam değişkenleri* olarak adlandırılır ve bu değişkenler Lorentz invarianttır. Literatürde bu saçılma sürecine *s-kanalı süreci* de

denir. Gelen ve çıkan parçacıkların hızı ise,

$$\begin{aligned}\beta_1 &\equiv \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \\ \beta_3 &\equiv \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}\end{aligned}\quad (3.3)$$

şeklindedir. Bu saçılma süreci için Feynman diyagramı şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1. QED'de $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ saçılma süreci (Romão ve Silva 2016)

Feynman diyagramından yola çıkarak bu sürecin genliği,

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p_2)(ie\gamma^\mu)u(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 + i\varepsilon}\bar{u}(p_3)(ie\gamma^\nu)v(p_4)\quad (3.4)$$

veya

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{s}\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)\quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Kütle merkezi çerçevesinde diferansiyel tesir kesiti,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle\quad (3.6)$$

olarak tanımlanır.

3.1.1 Polarize olmayan hâl için hesaplamalar

Literatürde iyi bir şekilde bilinen, giren ve çıkan parçacıkların spini üzerinden ortalama alınarak hesaplanan genliklerin karesi

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^4}{s} \text{Tr} [(p_2 - m_e) \gamma^\mu (p_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr} [(p_3 + m_\mu) \gamma_\mu (p_4 - m_\mu) \gamma_\nu] \quad (3.7)$$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = (4\pi\alpha)^2 (3 - \beta_1^2 - \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \cos^2 \theta) \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Kütlesiz limitte ise,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \sim (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (3.9)$$

şeklindedir. Diferansiyel tesir kesiti kütleli ve kütlesiz haller için sırasıyla,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} \frac{\beta_3}{\beta_1} (3 - \beta_1^2 - \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \cos^2 \theta) \quad (3.10)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (3.11)$$

olarak bulunur.

3.1.2 Helisite genlikleri kullanılarak yapılan hesaplamalar

İz tekniği ile hesaplamalar yapıldığında spinler üzerinden ortalama alınır ve süreçte çeşitli helisitelerden gelen katkılar kaybolur. Ancak kütleli durum için 16 farklı helisite kombinasyonunu açık bir şekilde hesaplandığında, kaybedilen helisite katkısını açık bir şekilde görülür (Romão ve Silva 2016). $p_1 : \theta = 0, \phi = 0$; $p_2 : \theta = \pi, \phi = \pi$ değerleri için spinörleri aşağıdaki gibidir;

$$u_\uparrow(p_1) = N \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 e^{i0} \\ \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \cos 0 \\ \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \sin 0 e^{i0} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow}(p_1) = N \begin{pmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 e^{i0} \\ \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \sin 0 \\ -\frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \cos 0 e^{i0} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$v_{\uparrow}(p_2) = N \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \sin 0 \\ -\frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \cos 0 e^{i\pi} \\ -\sin 0 \\ \cos 0 e^{i\pi} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$v_{\downarrow}(p_2) = N \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \cos 0 \\ \frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \sin 0 e^{i\pi} \\ \cos 0 \\ \sin 0 e^{i\pi} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma_1 \beta_1}{\gamma_1 + 1} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bu ifadelerde $N = \sqrt{E + m}$ 'dir. $p_3 : \theta, \phi = 0$; $p_4 : \theta = \pi - \theta, \phi = \pi$ değerleri için spinörler tekrardan düzenlendiğinde;⁶

$$u_{\uparrow}(p_3) = N \begin{pmatrix} c \\ s \\ \frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} c \\ \frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} s \end{pmatrix}, \quad v_{\uparrow}(p_4) = N \begin{pmatrix} \frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} c \\ \frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$u_{\downarrow}(p_3) = N \begin{pmatrix} -s \\ c \\ \frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} s \\ -\frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} c \end{pmatrix}, \quad v_{\downarrow}(p_4) = N \begin{pmatrix} \frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} s \\ -\frac{\gamma_3 \beta_3}{\gamma_3 + 1} c \\ s \\ -c \end{pmatrix}$$

Helisite genliklerini, spinörlerin ve Dirac γ matrislerinin açık ifadesini kullanarak elde edilebilir. Helisite genliği,

$$\mathcal{M}(h_1, h_2; h_3, h_4) = \frac{4\pi\alpha}{s} \bar{v}(p_2, h_2) \gamma^\mu u(p_1, h_1) \bar{u}(p_3, h_3) \gamma_\mu v(p_4, h_4) \quad (3.15)$$

⁶ $c = \cos \frac{\theta}{2}$ ve $s = \sin \frac{\theta}{2}$ kısaltmaları kullanılmıştır.

şeklindedir. Her parçacık için, $h_i = \uparrow\downarrow$ şeklindedir. 16 farklı durum için genlik değerleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) &= -\frac{4\pi\alpha}{s}(4m_e m_\mu) \cos \theta, & \mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) &= -\frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_e) \sin \theta \\
\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \uparrow) &= -\frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_\mu) \sin \theta, & \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) &= 4\pi\alpha(1 - \cos \theta) \\
\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) &= \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_e) \sin \theta, & \mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) &= -4\pi\alpha(1 + \cos \theta) \\
\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) &= 4\pi\alpha(1 - \cos \theta), & \mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \downarrow, \downarrow) &= \frac{4\pi\alpha}{s}(4m_e m_\mu) \cos \theta \\
\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) &= \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_e) \sin \theta, & \mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) &= \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_\mu) \sin \theta \\
\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) &= -\frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_\mu) \sin \theta, & \mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) &= -\frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_e) \sin \theta \\
\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \uparrow, \uparrow) &= \frac{4\pi\alpha}{s}4m_e m_\mu \cos \theta, & \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \downarrow) &= \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{s}}(2m_\mu) \sin \theta \\
\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) &= -4\pi\alpha(1 + \cos \theta), & \mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) &= -\frac{4\pi\alpha}{s}(4m_e m_\mu) \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Genliğin spin ortalamasının karesinden hareketle,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{h_i} |\mathcal{M}(h_1, h_2, h_3, h_4)|^2 \tag{3.17}$$

(3.16) ile belirlenen genlik ifadeleri (3.17) bağıntısında yerine yazıldığında,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = (4\pi\alpha)^2 [3 - \beta_1^2 - \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \cos^2 \theta] \tag{3.18}$$

sonucu elde edilir. $E \gg m$ limitinde, genliklerin tüm değerlerine bakıldığında sadece,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) &= \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) = (4\pi\alpha)(1 - \cos \theta) \\
\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) &= \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = -(4\pi\alpha)(1 + \cos \theta)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

terimlerinin kaldığı diğer tüm terimlerin sıfır olduğu sonucuna varılmıştır (Romão ve Silva 2016). Buradan hem etkileşime giren hem de etkileşimden çıkan parçacıkların sadece iki durumu olduğu görülür. $E \gg m$ limit için genliğin karesinin spin ortalaması,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = (4\pi\alpha)^2(1 + \cos^2 \theta) \tag{3.20}$$

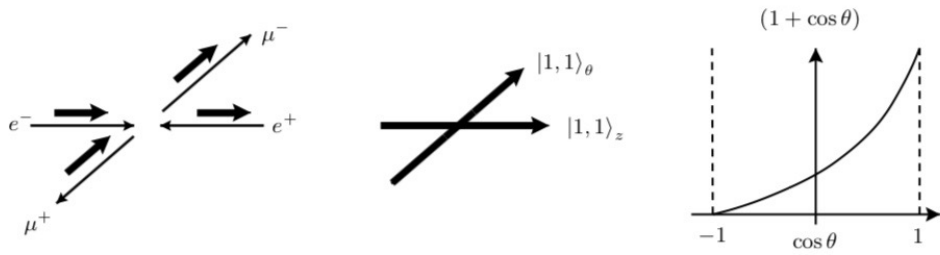
olarak bulunur. Bulunan bu ifadeler iz ile yapılan hesaplamalar ile tutatlıdır (Romão ve Silva 2016). $\uparrow\downarrow$ helisite kombinasyonu için spin durumu $|S, S_z\rangle = |1, +1\rangle$, aynı şekilde $\downarrow\uparrow$ helisite kombinasyonu için spin durumu $|1, -1\rangle$ olarak tanımlanır. Müonun yöneliminde ölçülen, $\mu^- \mu^+$ sistemine karşılık gelen helisite kombinasyonlarının spin durumları $|1, \pm 1\rangle_\theta$ şeklinde tanımlanabilir (Thomson 2013). Spin operatörünün özellikleri kullanılarak $\mu^- \mu^+$ sisteminin spin durumları, S_z 'nin öz durumları cinsinden yazılabilir. $\uparrow\downarrow$ helisite kombinasyonuna sahip $\mu^- \mu^+$ sisteminin spin dalga fonksiyonu,

$$|1, +1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)|1, -1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta |1, 0\rangle_z + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)|1, +1\rangle_z \quad (3.21)$$

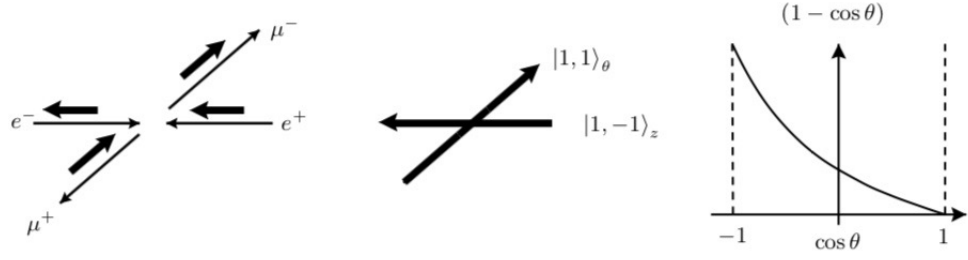
şeklindedir. İlk ve son spin durumların iç çarpımı ile helisite kombinasyonlarının açılal bağımlılığı aşağıdaki gibidir ve sırasıyla şekil 3.2 ve şekil 3.3'te gösterilmiştir;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) &\propto_\theta \langle 1, +1 | 1, +1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \\ \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) &\propto_\theta \langle 1, +1 | 1, -1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.22)$$

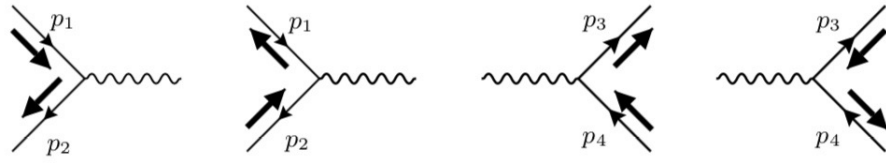
Sıfırdan farklı genliklerin spin yönelimini değıştirmediği görülmüştür (Şekil 3.4). Buradan QED etkileşimlerinin kiraliteyi koruduğu ve kütsesiz limitte, $m \rightarrow 0$, kiralitenin helisiteye denk olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 3.2. $E \gg m$ limitinde $\mathcal{M}(\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow)$ şeklinde helisite kombinasyonuna sahip spin-1 sistemin yönelimi ve açılal bağımlılığı (Romão ve Silva 2016)



Şekil 3.3. $E \gg m$ limitinde $\mathcal{M}(\downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow)$ şeklinde helisite kombinasyonuna sahip spin-1 sistemin yönelimi ve açısal bağımlılığı (Romão ve Silva 2016)



Şekil 3.4. $E \gg m$ limitinde sıfırdan farklı genlikler ve spin yönelimleri (Romão ve Silva 2016)

3.1.3 İzdüşüm operatörleri ve iz tekniği kullanılarak yapılan hesaplamalar

Helisite izdüşüm operatörleri,

$$\begin{aligned} u(p) &= P(h, s)u(p), & v(p) &= P(h, s)v(p) \\ \bar{u}(p) &= \bar{u}(p)P(h, s), & \bar{v}(p) &= \bar{v}(p)P(h, s) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ile verilir ve genlik ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(h_1, h_2, h_3, h_4) &= \frac{4\pi\alpha}{s} [\bar{v}(p_2)P(h_2, s_2)\gamma^\mu P(h_1, s_1)u(p_1)] \\ &\quad \times [\bar{u}(p_3)P(h_3, s_3)\gamma_\mu P(h_4, s_4)v(p_4)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklini alır. Genliğin karesi yapılan detaylı işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(h_1, h_2, h_3, h_4)|^2 &= \\ &\quad \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)P(h_2, s_2)\gamma^\mu P(h_1, s_1)(\not{p}_1 + m_e)P(h_1, s_1)\gamma^\nu P(h_2, s_2)] \\ &\quad \times \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_\mu)P(h_3, s_3)\gamma_\mu P(h_4, s_4)(\not{p}_4 - m_\mu)P(h_4, s_4)\gamma_\nu P(h_3, s_3)] \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi el yordamı ile çözmek çok uzun iz işlemleri yapmayı gerektirir. Bu aşamada *Maple* gibi matematiksel hesaplama tekniklerinin kullanımı kolaylık sağlamaktadır. 16 farklı helisite kombinasyonu için genliklerin mutlak karesi aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{16m_e^2 m_\mu^2}{s^2} \cos^2 \theta & |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_\mu^2}{s} \sin^2 \theta \\
|\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{16m_e^2 m_\mu^2}{s^2} \cos^2 \theta & |\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_\mu^2}{s} \sin^2 \theta \\
|\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_e^2}{s} \sin^2 \theta & |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos \theta)^2 \\
|\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 (1 - \cos \theta)^2 & |\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_e^2}{s} \sin^2 \theta \\
|\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_e^2}{s} \sin^2 \theta & |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 (1 - \cos \theta)^2 \\
|\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos \theta)^2 & |\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_e^2}{s} \sin^2 \theta \\
|\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{16m_e^2 m_\mu^2}{s^2} \cos^2 \theta & |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_\mu^2}{s} \sin^2 \theta \\
|\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{16m_e^2 m_\mu^2}{s^2} \cos^2 \theta & |\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow)|^2 &= (4\pi\alpha)^2 \frac{4m_\mu^2}{s} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.26)'da bulunan eşitlikler ile (3.16)'da bulunan eşitliklerin uyum içinde olduğu görülmüştür (Romão ve Silva 2016).

4. POLARİZASYON KORELASYONLARININ KUANTUM ALANLAR TEORİSİ ANALİZİ

Polarizasyon korelasyonları uzun yıllardır hem parçacıklar üzerinde hem de yüksek enerji fiziğinde Bell eşitsizliği ışığında deneysel ve kuramsal olarak çalışılmaktadır. Kuantum alanlar teorisi, kuantum fiziğini mükemmel bir şekilde görelî rejime genişletir. Bu rejim içerisinde etkileşime giren parçacıkların sayısı korunmaksızın yaratılıp yok olur. Bundan dolayı bu olguyu kuantum alanlar teorisi çerçevesinde incelemek teorik bir laboratuvar görevi görecektir (Yongram ve Manoukian 2013). İlgili bir uygulamayla polarizasyon korelasyon olasılıkları, Bell eşitsizliğini test etmek için S niceliği çözümlenmiştir (Clauser ve Horne 1974);

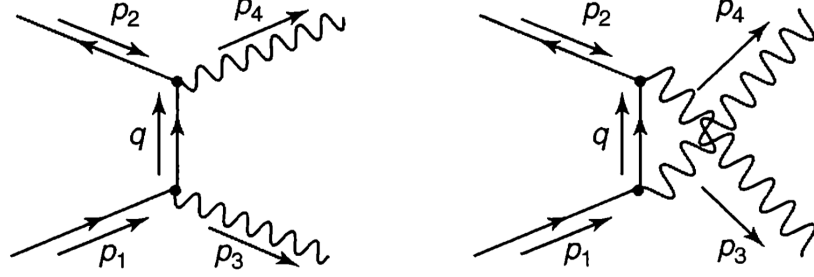
$$S = \frac{P_{12}(a_1, a_2)}{P_{12}(\infty, \infty)} - \frac{P_{12}(a_1, a'_2)}{P_{12}(\infty, \infty)} + \frac{P_{12}(a'_1, a_2)}{P_{12}(\infty, \infty)} + \frac{P_{12}(a'_1, a'_2)}{P_{12}(\infty, \infty)} - \frac{P_{12}(a'_1, \infty)}{P_{12}(\infty, \infty)} - \frac{P_{12}(\infty, a_2)}{P_{12}(\infty, \infty)} \quad (4.1)$$

Burada a_1, a_2, a'_1, a'_2 , süreçte etkileşen iki parçacığın ölçülen spin yönelimleridir ve belirli açılar ile tanımlanır. Burada $P_{12}(a_1, a_2)/P_{12}(\infty, \infty)$ her iki parçacığın spin ölçümlerinin ortak olasılığıdır. $P_{12}(a_1, \infty)/P_{12}(\infty, \infty)$ ve $P_{12}(\infty, a_2)/P_{12}(\infty, \infty)$ ise sadece tek bir parçacığın polarizasyonunun ölçüldüğü olasılıklardır. $P_{12}(\infty, \infty)$ ise normalizasyon sabitidir. Bell eşitsizliğinin ihlali, bu olasılıklarda ki değişkenlerin en az bir değeri için S'in $[-1, 0]$ aralığının dışına çıkması demektir. Ve bu gerçekleşirse, bu tür bir ihlal, sözde yerel gizli değişken teorilerine karşı, kuantum teorisini desteklemek için argümanlar sağlar.

4.1 $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ - Süreci

Elektron pozitron çifti yok oluşu, kısaca *çift yok oluş* QED'nin en temel sürecidir. Bir lepton ve bir karşıt lepton etkileşir, yok olur ve iki tane foton oluşur. Yaşadığımız evrende maddenin baskın olmasının temel sebepleri CP asimetrisi ve çift yok oluş süreci olarak düşünülmektedir. Karşıt madde, madde ile etkileşim yaparak yok olmuş sonucunda da evren, madde baskın bir hal almıştır. Gizemini koruyan bu fiziksel olguya *baryon asimetrisi* denir.

Bu çarpışma süreci kütle merkezi çerçevesinde incelenecektir. Sürecin Feynman diyagramları şekil 4.1'deki gibidir.



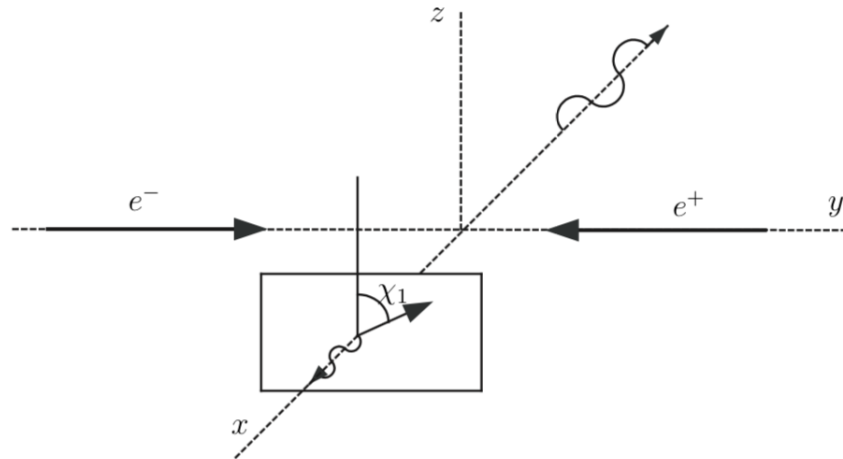
Şekil 4.1. Çift yok oluş sürecinin Feynman diyagramları (Griffiths 2008)

4.1.1 Polarize hâl için çift yok oluş süreci

Elektronun ve pozitronun sırasıyla z-ekseni yönünde spin-yukarı ve spin-aşağı olduğu polarize durumu incelendiğinde, elektron ve pozitronun momentumları,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(e^-) = \gamma m \beta (0, 1, 0) = -\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}(e^+), \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.2)$$

ile verilmiştir. Sürecin kinematiği şekil 4.2'de gösterilmektedir.



Şekil 4.2. $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ sürecinde polarize hâlin kinematiği (Yongram ve Manoukian 2004)

Elektron ve pozitron için spinörler,

$$u = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ i\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\rho = \frac{\gamma\beta}{\gamma + 1} = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.4)$$

şeklindedir. Çıkan fotonların xz -düzleminde hareket ediyor olsun, şekil 4.2. Fotonların momentumları,

$$\mathbf{k}_1 = \gamma\beta(\sin\theta, 0, \cos\theta) = -\mathbf{k}_2 \quad (4.5)$$

olarak yazılabilir. 4-momentum korunumundan,

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \gamma m \quad (4.6)$$

ve

$$k_{1,2}^2 = (k_{1,2}^0)^2 - |\mathbf{k}_{1,2}|^2 = 0, \quad k_{1,2}^0 = |\mathbf{k}_{1,2}| \quad (4.7)$$

bulunur. Çift yok oluş süreci t ve u kanallarında gözlenir ve birbiriyle etkileşmeyen iki Feynman diyagramı vardır. Bu diyagramlar için genlik ifadeleri rahatlıkla bulunabilir. Genlik ifadeleri Feynman diyagramlarının etkileşmemesinden kaynaklı toplam şeklindedir, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-e^2}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}(k_2) (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1) \quad (4.8)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{-e^2}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}(k_2) u(p_1) \quad (4.9)$$

Sürecin kinematığından faydalanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

$$\begin{aligned}
(p_1 - k_1)^2 - m^2 &= p_1^2 + k_1^2 - 2(p_1 \cdot k_1) - m^2 = -2(p_1 \cdot k_1) \\
(p_1 - k_2)^2 - m^2 &= p_1^2 + k_2^2 - 2(p_1 \cdot k_2) - m^2 = -2(p_1 \cdot k_2) \\
p_1 \cdot k_1 &= (\gamma m)^2 = p_1 \cdot k_2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Yukarıdaki ifadeden genliklerin katsayılarının aynı olduğu görülür. Toplam genlik ifadesinde 4-vektör içermeyen kütle terimleri yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(m) &= \frac{e^2 m}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2) [\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} u(p_1) \\
&= \frac{e^2 m}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2) 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} u(p_1) \\
&= \frac{e^2 m}{2(p_1 \cdot k_1)} (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \bar{v}(p_2) u(p_1) = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. Genlik ifadesinde kütle terimi sıfırdır. Toplam genlik ifadesi o halde;

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2) [\not{\epsilon}(k_2)(\not{p}_1 - \not{k}_1)\not{\epsilon}(k_1) + \not{\epsilon}(k_1)(\not{p}_1 - \not{k}_2)\not{\epsilon}(k_2)] u(p_1) \tag{4.12}$$

Genliğin bu ifadesinin hesaplanabilmesi için gerekli matris elemanları aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\bar{v}\gamma^i\gamma^0\gamma^j u &= 2i\rho \frac{p^0 + m}{2m} \epsilon^{ij2} \\
\bar{v}\gamma^i u &= \frac{p^0 + m}{2m} (1 - \rho^2) \delta^{i3} \\
\bar{v}\gamma^i\gamma^n\gamma^j &= \frac{p^0 + m}{2m} (1 - \rho^2) (\delta^{ij} \delta^{n3} - \delta^{i3} \delta^{jn} - \delta^{j3} \delta^{in}) - i \frac{p^0 + m}{2m} (1 + \rho^2) \epsilon_{inj}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Bu işlemler yapılırken gamma matrislerinin ve Pauli matrislerinin yapısal özellikleri kullanılmıştır. Genlikteki foton polarizasyon vektörlerinin sadece uzay bileşeni olduğundan $\mu, \nu = 0$ terimleri sıfır olacaktır, o halde bu μ, ν toplamları sadece uzay koordinatlarını

içerecektir. Genlikteki p_1 4-momentum terimleri açık bir şekilde incelendiğinde,

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu\gamma^0\gamma^\nu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu + \bar{v}(p_2)\gamma^\nu\gamma^0\gamma^\mu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu] \\
&= \frac{-e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} v^\dagger(p_2)(\gamma^0)^2(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu \\
&= -\frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} 2g^{\mu\nu}v^\dagger(p_2)u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

sonucuna ulaşılır ve aynı işlemler p_1 yerine k_1 ve k_2 yazarak tekrarlandığında da aynı sonuç elde edilir. Bunun sonucu olarak genlik sadece uzay koordinatları üzerinden toplanacaktır. O halde genlik ifadesinde (4.13) ile bulunan sonuçları kullanarak genliği hesaplanabilir;

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2)\cancel{\epsilon}(k_2)(\cancel{p_1} - \cancel{k_1})\cancel{\epsilon}(k_1)u(p_1) + \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \bar{v}(p_2)\cancel{\epsilon}(k_1)(\cancel{p_1} - \cancel{k_2})\cancel{\epsilon}(k_2)u(p_1) \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu p_{1,\sigma} \equiv \mathbf{T}_1 \\
&\quad - \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu k_{1,\sigma} \equiv \mathbf{T}_2 \\
&\quad + \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \bar{v}(p_2)\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu p_{1,\sigma} \equiv \mathbf{T}_3 \\
&\quad - \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \bar{v}(p_2)\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu k_{2,\sigma} \equiv \mathbf{T}_4
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, polarizasyon vektörleri tüm terimlerde aynı toplam üzerindedir; genlikte sırasıyla birinci ve üçüncü, ikinci ve dördüncü terimler çaprazdır. Dört terimi de sırayla incelediğimizde;

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu u(p_1)\epsilon(k_2)_\mu\epsilon(k_1)_\nu p_{1,\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} [(-\delta^{\sigma\nu}\delta^{\mu 3} - \delta^{\sigma\mu}\delta^{\nu 3} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\sigma 3})(1 - \rho^2) - i(1 + \rho^2)\epsilon_{\mu\sigma\nu}] \\
&\quad \times \epsilon_{2,\mu}\epsilon_{1,\nu}p_{1,\sigma}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\nu)} p_1^{(\nu)} - \epsilon_2^{(\mu)} \epsilon_1^{(3)} p_1^{(\mu)} + \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu p_1^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. - i(1 + \rho^2) \varepsilon_{\nu\mu\sigma} \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} p_{1,\sigma} \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

p_1 terimindeki toplam sadece $\mu, \nu = 2$ olduğunda sağlanır. Çünkü 0 terimi için polari-
zasyon terimi sıfırdır, 1 ve 3 terimi için de parçacığın momentum terimi sıfırdır. Bundan
dolayı $p_1^{(3)} = 0$ dir. $p_1^{(2)} = \gamma m \beta$ ifadesi yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{2(\gamma m)^2} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_3^{(2)} - \epsilon_3^{(2)} \epsilon_2^{(3)})(\gamma m \beta)(1 - \rho^2) - i(1 + \rho^2)(\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{k}_1 \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_3 &= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu u(p_1) \epsilon(k_2)_\mu \epsilon(k_1)_\nu p_{1,\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\delta^{\sigma\mu} \delta^{\nu 3} - \delta^{\sigma\nu} \delta^{\mu 3} - \delta^{\nu\mu} \delta^{\sigma 3})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. - i(1 + \rho^2) \varepsilon_{\nu\sigma\mu} \right] \epsilon_{2,\mu} \epsilon_{1,\nu} p_{1,\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\mu)} p_1^{(\mu)} - \epsilon_2^{(\nu)} \epsilon_1^{(3)} p_1^{(\nu)} + \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu p_1^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. - i(1 + \rho^2) \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} p_{1,\sigma} \right] \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_3^{(2)} p_1^{(2)} - \epsilon_3^{(2)} \epsilon_2^{(3)} p_1^{(2)})(1 - \rho^2) - i(1 + \rho^2)(\epsilon_2 \times \epsilon_1) \cdot \mathbf{k}_1 \right] \\
&= \frac{e^2}{2(\gamma m)^2} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_3^{(2)} - \epsilon_3^{(2)} \epsilon_2^{(3)})(\gamma m \beta)(1 - \rho^2) + i(1 + \rho^2)(\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{k}_1 \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3 = -\frac{e^2}{\gamma m} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(\epsilon_2^{(3)} \epsilon_3^{(2)} + \epsilon_3^{(2)} \epsilon_2^{(3)}) \beta (1 - \rho^2) \right] \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_2 &= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu u(p_1) \epsilon(k_2)_\mu \epsilon(k_1)_\nu k_{1,\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\delta^{\sigma\nu} \delta^{\mu 3} - \delta^{\sigma\mu} \delta^{\nu 3} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\sigma 3})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. - i(1 + \rho^2) \varepsilon_{\mu\sigma\nu} \right] \epsilon_{2,\mu} \epsilon_{1,\nu} k_{1,\sigma}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\nu)} k_1^{(\nu)} - \epsilon_2^{(\mu)} \epsilon_1^{(3)} k_1^{(\mu)} + \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu k_1^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. -i(1 + \rho^2) \epsilon_{\nu\mu\sigma} \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} k_{1,\sigma} \right] \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\nu)} k_1^{(\nu)} - \epsilon_2^{(\mu)} \epsilon_1^{(3)} k_1^{(\mu)} + \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu k_1^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. -i(1 + \rho^2) (\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{k}_1 \right]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_4 &= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu u(p_1) \epsilon(k_2)_\mu \epsilon(k_1)_\nu k_{2,\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\delta^{\sigma\mu} \delta^{\nu 3} - \delta^{\sigma\nu} \delta^{\mu 3} - \delta^{\nu\mu} \delta^{\sigma 3})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. -i(1 + \rho^2) \epsilon_{\nu\sigma\mu} \right] \epsilon_{2,\mu} \epsilon_{1,\nu} k_{2,\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_2)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(-\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\mu)} k_2^{(\mu)} - \epsilon_2^{(\nu)} \epsilon_1^{(3)} k_2^{(\nu)} + \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu k_2^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. -i(1 + \rho^2) \epsilon_{\mu\nu\sigma} \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} k_{2,\sigma} \right]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Burada yukarıda olduğu gibi μ, ν toplamları uzay koordinatları üzerinden olacaktır. Kütle merkezi çerçevesinde çalışıldığından dördüncü terimde k_2 yerine $-k_1$ yazılabilir;

$$\begin{aligned}
&\frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\mu)} k_1^{(\mu)} + \epsilon_2^{(\nu)} \epsilon_1^{(3)} k_1^{(\nu)} - \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu k_1^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. +i(1 + \rho^2) \epsilon_{\mu\nu\sigma} \epsilon_{1,\nu} \epsilon_{2,\mu} k_{1,\sigma} \right] \\
&\frac{e^2}{2(p_1 \cdot k_1)} \frac{p^0 + m}{2m} \left[(\epsilon_2^{(3)} \epsilon_1^{(\mu)} k_1^{(\mu)} + \epsilon_2^{(\nu)} \epsilon_1^{(3)} k_1^{(\nu)} - \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\mu k_1^{(3)})(1 - \rho^2) \right. \\
&\quad \left. -i(1 + \rho^2) (\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{k}_1 \right]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_4 = \frac{e^2}{2(\gamma m)^2} \frac{p^0 + m}{2m} (-2i(1 + \rho^2) (\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{k}_1) \tag{4.26}$$

elde ederiz. $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_1}{|\mathbf{k}_1|}$ birim vektörü tanımlanarak (4.26) denklemi daha sade yazılabilir;

$$-\frac{e^2}{\gamma m} \frac{p^0 + m}{2m} (i(1 + \rho^2) \mathbf{n} \cdot (\epsilon_1 \times \epsilon_2)) \tag{4.27}$$

(4.21) teriminden (4.27) çıkartıldığında genlik ifadesi,

$$\mathcal{M} = \frac{-e^2}{\gamma m} \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) \left[-i(1 + \rho^2) \mathbf{n} \cdot (\epsilon_1 \times \epsilon_2) + \beta(1 - \rho^2) (\epsilon_1^{(2)} \epsilon_2^{(3)} + \epsilon_1^{(3)} \epsilon_2^{(2)}) \right] \tag{4.28}$$

şeklinde bulunur. Burada ϵ_1 ve ϵ_2 'yi belirlemek mümkündür. Polarizasyon vektörünün zaman bileşeni olmamasından ve $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ eşitliğinden faydalanarak,

$$\boldsymbol{\epsilon}_j = (-\cos \theta \cos \chi_j, \sin \chi_j, \sin \theta \cos \chi_j) \equiv (\epsilon_j^{(1)}, \epsilon_j^{(2)}, \epsilon_j^{(3)}) \quad (4.29)$$

tanımlanır. Burada χ_1 ve χ_2 fotonların z -ekseniyle yaptığı spin polarizasyon açılarıdır. Genlik ifadesinde ki $\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2)$ ifadesi,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\sin \theta, 0, \cos \theta) \\ \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos \theta \cos \chi_1 & \sin \chi_1 & \sin \theta \cos \chi_1 \\ -\cos \theta \cos \chi_2 & \sin \chi_2 & \sin \theta \cos \chi_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{i} \sin \theta (\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) \\ &\quad - \mathbf{j} \cos \theta \sin \theta (-\cos \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \cos \chi_2) \\ &\quad + \mathbf{k} \cos \theta (\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) \\ &= (\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) (\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k}) \\ \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2) &= (\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= (\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

olarak bulunur. $\theta = \frac{\pi}{2}$ için genlik açık olarak şu şekilde yazılabilir;⁷

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{-e^2}{\gamma m} \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) [-i(1 + \rho^2)(\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) \\ &\quad + \beta(1 - \rho^2)(\sin \chi_1 \cos \chi_2 + \cos \chi_1 \sin \chi_2)] \\ \mathcal{M} &\propto \left[\beta(1 - \rho^2) \sin \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) - i(1 + \rho^2) \sin \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Bu makalede genlik ifadesi, spin polarizasyon açılarını içeren terimler 3×1 'lik satır matrisleriyle ve ilgili terimleri skaler yapacak şekilde 1×3 'lük sütun matrisleriyle tanımlanmıştır (Yongram ve Manoukian 2004):

⁷ Buradan itibaren işlemler $\theta = \pi/2$ durumu için incelenecektir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\propto -(0, \sin \chi_1, \cos \chi_1)_1 (0, \sin \chi_2, \cos \chi_2)_2 \\
&\times \left\{ i(1 + \rho^2) \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_2 - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_2 \end{array} \right] \right. \\
&\left. - \beta(1 - \rho^2) \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_2 + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_2 \end{array} \right] \right\} \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Matrisler altındaki indisler hangi satır-sütun matrislerin eş olduğunu göstermek için yazılmıştır. Bu şekilde satır matrisler dolanık bir duruma benzemektedir. O halde dolanık bir durum fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
|\phi\rangle &= \frac{1}{N} \left\{ i \frac{(1 + \rho^2)}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_2 - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_2 \end{array} \right] \right. \\
&\left. - \beta \frac{(1 - \rho^2)}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_2 + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_1 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_2 \end{array} \right] \right\} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir. Normalizasyon katsayısı, $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ ile bulunabilir. Bu işlemi aynı etikete sahip matrisler arasında yapıldığında çapraz terimlerden katkı gelmez ve kolaylıkla,

$$N = [(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

bulunabilir. Dolanık durum bulunduğu göre foton polarizasyon korelasyonları için ortak olasılık aşağıdaki gibidir;

$$P[\chi_1, \chi_2] = ||(0, \sin \chi_1, \cos \chi_1)_1 (0, \sin \chi_2, \cos \chi_2)_2 |\phi\rangle||^2 \quad (4.35)$$

$(0, \sin \chi_1, \cos \chi_1)_1 (0, \sin \chi_2, \cos \chi_2)_2 |\phi\rangle$ işlemi (4.31) denklemindeki gibi açık bir şekilde

yazıldığında;

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} \left[i(1 + \rho^2)(\sin \chi_1 \cos \chi_2 - \cos \chi_1 \sin \chi_2) \right. \\
&\quad \left. - \beta(1 - \rho^2)(\sin \chi_1 \cos \chi_2 + \cos \chi_1 \sin \chi_2) \right] \quad (4.36) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} \left[i(1 + \rho^2) \sin(\chi_1 - \chi_2) - \beta(1 - \rho^2) \sin(\chi_1 + \chi_2) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $0 \leq \beta < 1$ değeri için fotonların polarizasyon korelasyonlarının ortak olasılığı,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2N^2} \left[i(1 + \rho^2) \sin(\chi_1 - \chi_2) - \beta(1 - \rho^2) \sin(\chi_1 + \chi_2) \right] \\
&\quad \times \left[-i(1 + \rho^2) \sin(\chi_1 - \chi_2) - \beta(1 - \rho^2) \sin(\chi_1 + \chi_2) \right] \quad (4.37) \\
P[\chi_1, \chi_2] &= \frac{\left[(1 + \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 - \chi_2) + \beta^2(1 - \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 + \chi_2) \right]}{2 \left[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2 \right]}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Fotonların açısal polarizasyon yönleri dört olası açıyla aşağıdaki gibi belirtilmiştir;

$$(\chi_1, \chi_2), \quad (\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2), \quad (\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2}), \quad (\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2 + \frac{\pi}{2}) \quad (4.38)$$

Fotonların polarizasyon korelasyonlarının ortak olasılıkları bu dört açı üzerinden toplandığında sonuç 1 vermelidir;⁸

$$P[\chi_1, \chi_2] + P\left[\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2\right] + P\left[\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2}\right] + P\left[\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2 + \frac{\pi}{2}\right] = 1 \quad (4.39)$$

Eğer fotonlardan birinin, örneğin χ_1 açısıyla ilişkili fotonun, polarizasyonu ölçülürse, o zaman $\chi_2, \chi_2 + \frac{\pi}{2}$ açıları üzerinden toplanması gerekir. Bu durumda,⁹

$$P[\chi_1, -] = P[\chi_1, \chi_2] + P\left[\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.40)$$

⁸ Çünkü dört açı değerinden oluşan olasılık değerleri tüm uzayı kapsar ve toplamlarında normalizedir.

⁹ Bir fotonun polarizasyonu ölçüldüğüne göre diğer fotonun polarizasyon olasılıklarının bulunması gerekir.

$$\begin{aligned}
P[\chi_1, -] &= \|(0, \sin \chi_1, \cos \chi_1)_1 | \phi\rangle\|^2 \\
&= \frac{[(1 + \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 - \chi_2) + \beta^2(1 - \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 + \chi_2)]}{2[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]} \\
&+ \frac{[(1 + \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 - \chi_2 - \frac{\pi}{2}) + \beta^2(1 - \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 + \chi_2 + \frac{\pi}{2})]}{2[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]} \quad (4.41) \\
&= \frac{[(1 + \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 - \chi_2) + \beta^2(1 - \rho^2)^2 \sin^2(\chi_1 + \chi_2)]}{2[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]} \\
&+ \frac{[(1 + \rho^2)^2 \cos^2(\chi_1 - \chi_2) + \beta^2(1 - \rho^2)^2 \cos^2(\chi_1 + \chi_2)]}{2[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]}
\end{aligned}$$

$$P[\chi_1, -] = \frac{[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]}{2[(1 + \rho^2)^2 + \beta^2(1 - \rho^2)^2]} = \frac{1}{2} \quad (4.42)$$

olur. Aynı şekilde bunun tam tersi durumu düşündüğümüzde (χ_2 'nin ölçüldüğü durum) sonuç yine aynı gelecektir;

$$P[-, \chi_2] = \|(0, \sin \chi_2, \cos \chi_2)_2 | \phi\rangle\|^2 = \frac{1}{2} \quad (4.43)$$

Fotonların polarizasyon korelasyonlarının ortak olasılıkları, tek tek ölçülen polarizasyon olasılıkları cinsinden yazılamaz:

$$P[\chi_1, \chi_2] \neq P[\chi_1, -] P[-, \chi_2] \quad (4.44)$$

Bu bağıntı foton durumları arasındaki dolanıklığı ifade eder. Bulunan olasılık değerleri açık bir şekilde hız bağımlıdır ve $\beta \rightarrow 0$ limitinde $P[\chi_1, \chi_2] \rightarrow \sin^2(\chi_1 - \chi_2)/2$ 'ye indirgenir, bu sonuç da yıllardır bilinen olasılık değerlerine karşılık gelir (Yongram ve Manoukian 2004). Standart notasyonla,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{P_{12}(a_1, a_2)}{P_{12}(\infty, \infty)}, \quad P[\chi_1, -] = \frac{P_{12}(a_1, \infty)}{P_{12}(\infty, \infty)}, \quad P[-, \chi_2] = \frac{P_{12}(\infty, a_2)}{P_{12}(\infty, \infty)} \quad (4.45)$$

yazılabilir. (4.1) bağıntısı ile tanımlanan eşitsizliği $\chi_1, \chi_2, \chi'_1, \chi'_2$ açıları için tekrardan düzenlendiğinde

$$S = P[\chi_1, \chi_2] - P[\chi_1, \chi'_2] + P[\chi'_1, \chi_2] + P[\chi'_1, \chi'_2] - P[\chi'_1, -] - P[-, \chi_2] \quad (4.46)$$

elde edilir. Bell eşitsizliği, $-1 \leq S \leq 0$ ile tanımlanır. Sadece bir deneysel sonucun bu

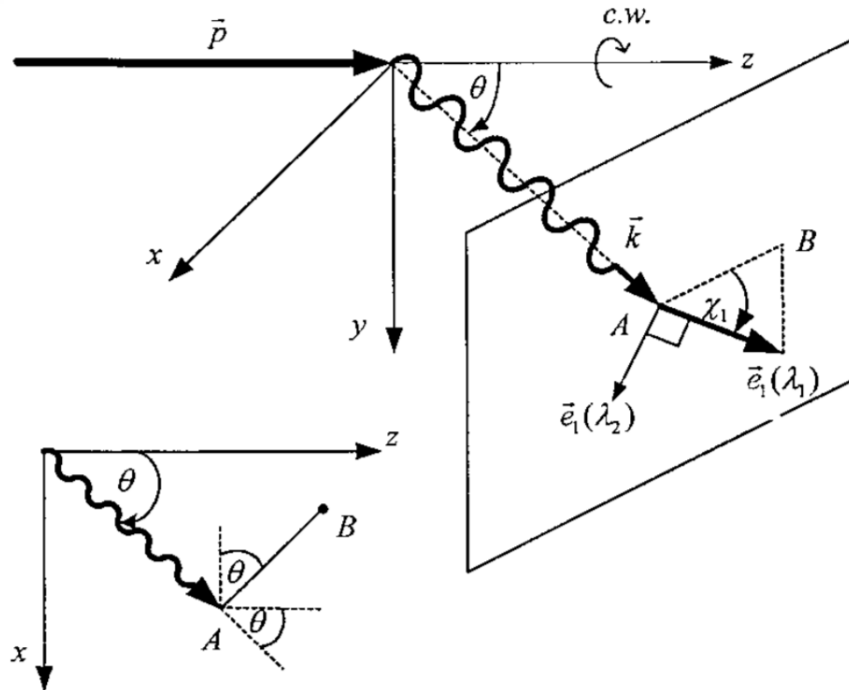
eşitsizliğini ihlal ettiğini göstermek Bell eşitsizliğini test etmek için yeterlidir. $\beta = 0.2$ değeri için $\chi_1 = 0^\circ, \chi_2 = 23^\circ, \chi'_1 = 45^\circ, \chi'_2 = 67^\circ$ polarizasyon açıları denklem (4.46)'da yerine yazıldığında, $S = -1.187$ sonucunu elde edilir ve bu sonuç Bell eşitsizliğini ihlal eder (Yongram ve Manoukian 2004).

4.1.2 Polarize olmayan hâl için çift yok oluş süreci

Çift yok oluş süreci, kütle merkezi çerçevesinde polarize olmayan ve z -ekseninde ilerleyen e^- ve e^+ için ele alındığında sürecin kinematiği şekil 4.3'te verilmiştir. Giren ve çıkan parçacıkların momentumlarının uzay ve zaman bileşenleri (Yongram ve Manoukian 2003),

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2, \quad p^0 = p_1^0 = p_2^0 = k_1^0 = k_2^0 \quad (4.47)$$

şeklindedir.



Şekil 4.3. $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ sürecinde polarize olmayan hâlin kinematiği (Yongram ve Manoukian 2003)

Momentum ve polarizasyon vektörünün en genel halini yazıldığında,

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= |\mathbf{k}|(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \quad \epsilon_j(\lambda_2) = \epsilon_j(\lambda_1) \\ \epsilon_j(\lambda_1) &= \\ &(-\cos \theta \cos \chi_j \cos \phi - \sin \chi_j \sin \phi, \sin \chi_j \cos \phi - \cos \theta \cos \chi_j \sin \phi, \sin \theta \cos \chi_j)\end{aligned}\quad (4.48)$$

elde edilir, burada χ_j açıları polarizasyon vektörünün x - z düzlemi ile yaptığı açıdır.¹⁰ Kütle merkezi çerçevesinde e^-e^+ çiftinin ilk spin durumları üzerinden ortalama alarak bu süreç için genliğin karesi,

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{1}{4} \frac{(k_1 \cdot k_2)^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} - \left(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \frac{\epsilon_1 \cdot \mathbf{p} \epsilon_2 \cdot \mathbf{p} (k_1 \cdot k_2)}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \right)^2 \quad (4.49)$$

şeklindedir (Itzykson ve Zuber 1980). Genlik kare ifadesindeki terimler aşağıdaki gibi bulunabilir;

$$\begin{aligned}\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 &= \\ &(-\cos \theta \cos \chi_1 \cos \phi - \sin \chi_1 \sin \phi, \sin \chi_1 \cos \phi - \cos \theta \cos \chi_1 \sin \phi, \sin \theta \cos \chi_1) \\ &\times (-\cos \theta \cos \chi_2 \cos \phi - \sin \chi_2 \sin \phi, \sin \chi_2 \cos \phi - \cos \theta \cos \chi_2 \sin \phi, \sin \theta \cos \chi_2) \\ &= \cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 = \cos(\chi_1 - \chi_2)\end{aligned}\quad (4.50)$$

$$\epsilon_1 \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \chi_1, \quad \epsilon_2 \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \chi_2, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1 = |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2 \quad (4.51)$$

¹⁰ Burada bulunan polarizasyon vektörü tek değildir. Bunu nedeni ise $\mathbf{k} \cdot \epsilon_j = 0$ olduğundan sonsuz farklı polarizasyon vektörü bulunabilir.

Sürecin kinematığından,

$$\begin{aligned}
(k_1 \cdot k_2) &= (k^0, \mathbf{k}) \cdot (k^0, -\mathbf{k}) = (k_1^0)^2 + |\mathbf{k}|^2 = 2|\mathbf{k}|^2 \\
(p_1 \cdot k_1) &= (p^0, \mathbf{p}) \cdot (k^0, \mathbf{k}) = (p^0)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = (p^0)^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos \theta \\
(p_1 \cdot k_2) &= (p^0, \mathbf{p}) \cdot (k^0, -\mathbf{k}) = (p^0)^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = (p^0)^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos \theta \\
|\mathbf{k}|^2 &= (\gamma m)^2, \quad |\mathbf{p}|^2 = (\gamma m \beta)^2
\end{aligned} \tag{4.52}$$

sonuçları elde edilir. Bulunan tüm terimler (4.49) bağıntısında yerine yazıldığında:

İlk terim:

$$\frac{1}{4} \frac{4|\mathbf{k}|^4}{(|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos \theta)(|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos \theta)} = \frac{|\mathbf{k}|^4}{|\mathbf{k}|^2(|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \theta)} = \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \tag{4.53}$$

İkinci terim:

$$\begin{aligned}
&\left(\cos(\chi_1 - \chi_2) + \frac{|\mathbf{p}| \sin \theta \cos \chi_1 |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \chi_2 2|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|^2(|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \theta)} \right)^2 \\
&= \left(\cos(\chi_1 - \chi_2) + \frac{2\beta^2 \sin^2 \theta \cos \chi_1 \cos \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right)^2 \\
&= \cos^2(\chi_1 - \chi_2) + \frac{4\beta^4 \sin^4 \theta \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{4\beta^2 \sin^2 \theta \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

İlk terimden ikinci terimi çıkarıldığında;

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
&- \left[\cos^2(\chi_1 - \chi_2) + \frac{4\beta^4 \sin^4 \theta \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{4\beta^2 \sin^2 \theta \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \right]
\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. Ortak paydalı terimleri bir araya getirildiğinde;

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} [1 - 4\beta^2 \sin^2 \theta \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2] \\
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} [1 - 4\beta^2(1 - \cos^2 \theta) \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2] \\
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} [1 - 4\beta^2 \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 \\
&\quad + 4\beta^2 \cos^2 \theta \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2]
\end{aligned} \tag{4.56}$$

(4.56) denkleminde $\pm \frac{4 \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}$ eklendiğinde,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} [1 - 4(1 - \beta^2) \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 \\
&\quad - (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2] \\
&= \frac{1 - 4(1 - \beta^2) \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} - 4 \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2
\end{aligned} \tag{4.57}$$

bulunur. Diğer terimi düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\frac{4\beta^4 \sin^4 \theta \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} &= \frac{4\beta^4(1 - \cos^2 \theta)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \\
\frac{4\beta^4(1 + \cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} &= \\
\frac{4\beta^4(1 + \cos^4 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} - 2 \frac{4\beta^4(\cos^2 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

elde edilir ve (4.58) denkleminde $\pm 2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}$ eklendiğinde,

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta^4(1 + \cos^4 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} - 2 \frac{4\beta^2(1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \\
&\quad - 2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

bulunur. (4.59) denkleminde $\pm 2 \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}$ eklendiğinde

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta^4(1 + \cos^4 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} - 2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \\
&\quad - 2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \pm 2 \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta^4(1 + \cos^4 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} - 2 \frac{4(1 - \beta^2) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \\
&- 2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + 2 \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

ifadesi elde edilir ve seçilen terim (4.57) bağıntısında yerine yazıldığında,

$$\frac{1 - 4(1 - \beta^2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 [\cos(\chi_1 - \chi_2) - \cos \chi_1 \cos \chi_2]}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} - 4 \cos(\chi_1 - \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta^4(1 + \cos^4 \theta) \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} - 2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + 2 \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
&\pm \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta^4 \cos^4 \theta \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{4(1 - \beta^2)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \\
&+ 2 \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} - \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \\
&= \frac{4(1 - \beta^2)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[\beta^4 \cos^4 \theta + 2 - \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\
&= \frac{4(1 - \beta^2)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} + 4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2
\end{aligned} \tag{4.64}$$

elde edilir. (4.57) bağıntısından sonraki işlemlerde bulunan tüm terimlerin önüne $-$ işareti gelecektir. İşlemler derlendiğinde,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - 4(1 - \beta^2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 [\cos(\chi_1 - \chi_2) - \cos \chi_1 \cos \chi_2]}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
&- \frac{4(1 - \beta^2)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$+ 4 \cos(\chi_1 \chi_2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 - 4 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2 - \cos^2(\chi_1 - \chi_2)$$

$$\begin{aligned}
P_r \propto &\frac{1 - 4(1 - \beta^2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 [\cos(\chi_1 - \chi_2) - \cos \chi_1 \cos \chi_2]}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
&- \frac{4(1 - \beta^2)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} - (\cos(\chi_1 - \chi_2) - 2 \cos \chi_1 \cos \chi_2)^2
\end{aligned} \tag{4.66}$$

sonucuna ulaşılır. θ sürekli bir değişken olduğundan denklem (4.66) katı açı $d\Omega$ üzerinden integrale edebilir. Katı açı içerisindeki ϕ -integrali azimutal simetriden kaynaklı bir katkı getirmeyeceğinden ve denklem (4.66)'da bulunan olasılığı normalize ederken elimine olacağından $d\Omega$ integralini direk olarak $\sin \theta d\theta$ integrali olarak değiştirebilir ve θ açısı $\frac{\pi}{2} - \delta$ ile $\frac{\pi}{2} + \delta$ aralığında integrale edilip, normalize olasılık hesaplanırken $\lim \delta \rightarrow 0$ 'a götürüldüğünde istenilen sonuca ulaşılır;

$$F_\delta(\chi_1, \chi_2) = \int P_r d\Omega = \int P_r \sin \theta d\theta d\phi \approx \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} P_r \sin \theta d\theta \quad (4.67)$$

Literatürdeki belirsiz integraller tablolarından yararlanarak 4.67 denklemindeki integraler bulunabilir (Gradshteyn ve Ryzhik 2007).

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} &= \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) \\ \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}^2 &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta \sin \delta}{1 - \beta^2 \sin^2 \delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

(4.67) bağıntısı χ_1 ve χ_2 açısı için,

$$\begin{aligned} &[1 - 4(1 - \beta^2) \cos \chi_1 \cos \chi_2 (\cos(\chi_1 - \chi_2) - 2 \cos \chi_1 \cos \chi_2)] \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) \\ &- 4(1 - \beta^2)^2 \cos^2 \chi_1 \cos^2 \chi_2 \left(\frac{\sin \delta}{1 - \beta^2 \sin^2 \delta} + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) \right) \\ &- 2 \sin \delta [\cos(\chi_1 - \chi_2) - 2 \cos \chi_1 \cos \chi_2]^2 = F_\delta(\chi_1, \chi_2) \end{aligned} \quad (4.69)$$

şeklinde bulunur. χ_1 ve χ_2 açıları ile tanımlanan polarizasyonların her ikisinde ölçüldüğü durum için bileşke normalize olasılığı,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_\delta(\chi_1, \chi_2)}{N_\delta} \quad (4.70)$$

ile verilir ve N_δ girilebilen durumların toplamıdır. Fotonlar 4 farklı açı durumu alabilir;

$$N_\delta = P(\chi_1, \chi_2) + P(\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2}) + P(\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2) + P(\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2 + \frac{\pi}{2}) \quad (4.71)$$

$$N_\delta = (4 + 4(1 - \beta^2) - 2(1 - \beta^2)^2) \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) - 4(1 - \beta^2)^2 \frac{\sin \delta}{1 - \beta^2 \sin^2 \delta} - 4 \sin \delta \quad (4.72)$$

olur. Her $0 \leq \beta \leq 1$ değeri için limit,¹¹

$$\frac{1}{\beta} \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) \approx 2\delta \quad (4.73)$$

$P[\chi_1, \chi_2]$, (4.69) ve (4.72) bağıntıları normalize olasılıkta yerine yazıldığında ve $\delta \rightarrow 0$ limitinde sonuç,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{1 - [\cos(\chi_1 - \chi_2) - 2\beta^2 \cos \chi_1 \cos \chi_2]^2}{2[1 + 2\beta^2(1 - \beta^2)]} \quad (4.74)$$

şeklinde bulunur (Yongram ve Manoukian 2003). Polarizasyon açılarından sadece biri ölçüldüğünde normalize olasılık,

$$P[\chi_1, -] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_\delta(\chi_1, \chi_2) + F_\delta(\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2})}{N_\delta} \quad (4.75)$$

ve

$$P[-, \chi_2] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_\delta(\chi_1, \chi_2) + F_\delta(\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2)}{N_\delta} \quad (4.76)$$

sonuçlarına ulaşılır. Paydaki terimleri bulmak için (4.69) denkleminde (χ_1, χ_2) açıları sırasıyla $(\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2})$ ve $(\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2)$ açıları için hesaplanıp yerine yazıldığında,

$$F(\chi_1, \chi_2) + F(\chi_1, \chi_2 + \frac{\pi}{2}) = (2 + 2(1 - \beta^4) \cos^2 \chi_1) \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) - 4(1 - \beta^2)^2 \frac{\sin \delta}{1 - \beta^2 \sin^2 \delta} - 2 \sin \delta \quad (4.77)$$

¹¹ δ 'nin infinitesimal bir değer olduğu için küçük açı yaklaşımı, $\sin \delta \approx \delta$ yapılmıştır.

ve

$$F(\chi_1, \chi_2) + F(\chi_1 + \frac{\pi}{2}, \chi_2) = (2 + 2(1 - \beta^4) \cos^2 \chi_2) \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta \sin \delta}{1 - \beta \sin \delta} \right) - 4(1 - \beta^2)^2 \frac{\sin \delta}{1 - \beta^2 \sin^2 \delta} - 2 \sin \delta \quad (4.78)$$

sonuçları elde edilir ve polarizasyon açılarından sadece birinin ölçüldüğü olasılıklar gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$P[\chi_1, -] = \frac{1 + 4\beta^2(1 - \beta^2) \cos^2 \chi_1}{2[1 + 2\beta^2(1 - \beta^2)]} \quad (4.79)$$

$$P[-, \chi_2] = \frac{1 + 4\beta^2(1 - \beta^2) \cos^2 \chi_2}{2[1 + 2\beta^2(1 - \beta^2)]} \quad (4.80)$$

olarak bulunur. Bulunan üç farklı olasılığın da β 'nin her $0 \leq \beta \leq 1$ değeri için χ_1 ve χ_2 'ye açık bir şekilde bağımlı olduğu görülür. Fotonların polarizasyon korelasyonlarının ortak olasılıkları, tek tek ölçülen polarizasyon olasılıkları cinsinden yazılamaz:

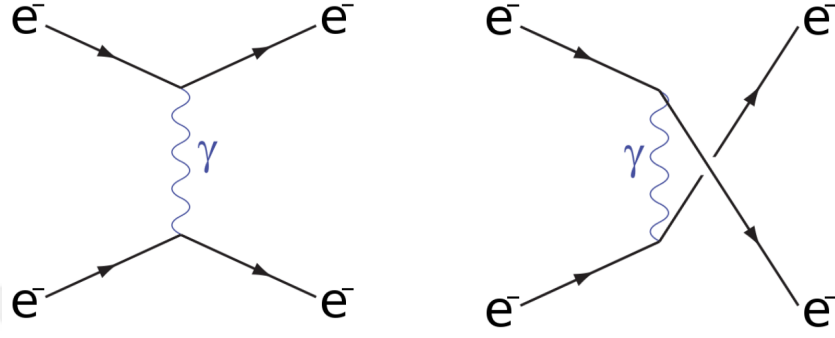
$$P[\chi_1, \chi_2] \neq P[\chi_1, -] P[-, \chi_2] \quad (4.81)$$

Bu bağıntı foton durumları arasındaki dolanıklığı ifade eder. Bulunan olasılık değerleri açık bir şekilde hız bağımlıdır ve $\beta \rightarrow 0$ limitinde; $P[\chi_1, \chi_2] \rightarrow \sin^2(\chi_1 - \chi_2)/2$, $P[\chi_1, -] \rightarrow 1/2$ ve $P[-, \chi_2] \rightarrow 1/2$ sonuçlarına ulaşılır ve bu sonuçlar yıllardır bilinen olasılık değerlerine karşılık gelmektedir. (Yongram ve Manoukian 2003). Standart notasyonla belirtilen eşitsizlik (4.1), (4.45) bağıntısı ile yapılan tanımlamalarla (4.46) formunu alır. $\beta = 0$ değeri için $\chi_1 = 0^\circ$, $\chi_2 = 67^\circ$, $\chi'_1 = 135^\circ$, $\chi'_2 = 23^\circ$ polarizasyon açıları (4.46) bağıntısında yerine yazıldığında $S = 0.207$ sonucu bulunur ve eşitsizlik ihlal edilir.

4.2 Kuantum Elektrodinamiği Çerçevesinde $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ Elastik Saçılması

Elektron-elektron saçılması, bir diğer adıyla Møller saçılması, iki farklı bozon aracılığıyla etkileşimde bulunabilir: İlk olarak QED çerçevesinde foton aracılığıyla etkileşebilir. Bir başka deyişle elektrik ve manyetizma teorisinden de bildiğimiz Coulomb etkileşimi yapabilir. Bir diğer olarak da zayıf etkileşim yaparak Z^0 bozonu aracılığıyla etkileşebilir.

Bu saçılma problemi düşük enerji limitinde incelenmiştir ve düşük enerjilerde zayıf etkileşimin etkisi çok düşük olduğundan bu terimin katkısı ihmal edilebilir. Bundan dolayı bu saçılma problemi QED çerçevesinde incelenmiştir. Bu sürecin Feynman diyagramı şekil 4.4'te verilmiştir.



Şekil 4.4. Møller saçılmasının Feynman diyagramları

4.2.1 Polarize hâl için Møller saçılması

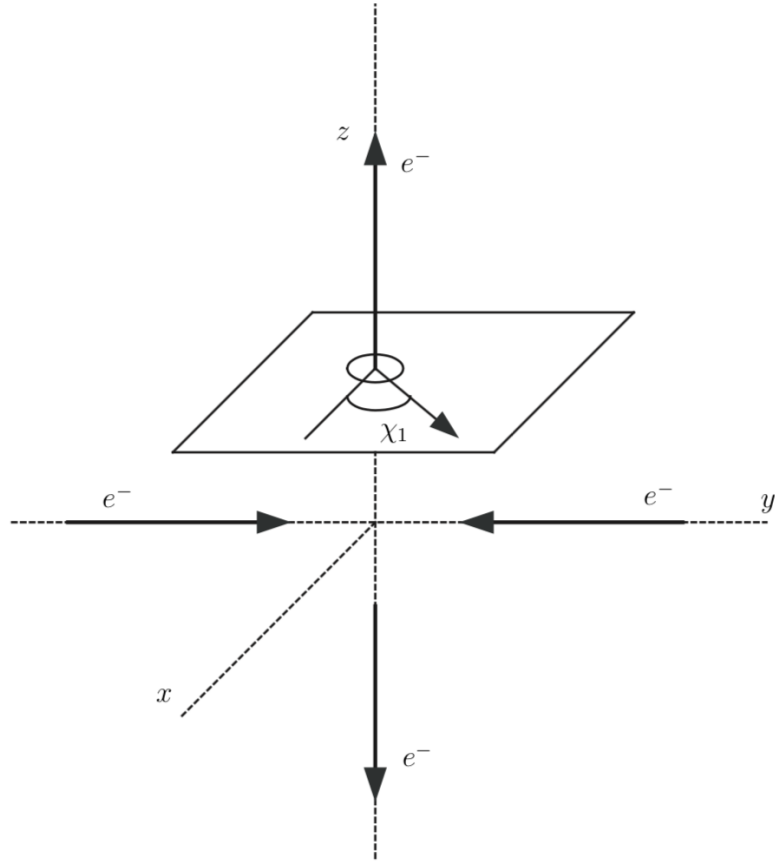
Kütle merkezi çerçevesinde elektronların biri z-ekseninde spin-yukarı değerinin ise spin-aşağı polarize olduğu düşünölsün (Yongram ve Manoukian 2004). Gelen parçacıkların momentumları,

$$\mathbf{p}_1 = \gamma m \beta (0, 1, 0) = -\mathbf{p}_2 \quad (4.82)$$

olarak verilmiş olsun ve çıkan elektronların,

$$\mathbf{p}'_1 = \gamma m \beta (\sin \theta, 0, \cos \theta) = -\mathbf{p}'_2 \quad (4.83)$$

momentumlarına sahip olduğu sürecin kinematiği şekil 4.5'te gösterilmiştir.



Şekil 4.5. $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ sürecinde polarize hâlin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2004)

Giren ve çıkan parçacıkların 4-spinörleri aşağıdaki gibidir;

$$u_1 = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ i\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ i\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

$$u'_1 = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}'_1}{p^0 + m} \xi_1 \end{pmatrix}, \quad u'_2 = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}'_1}{p^0 + m} \xi_2 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ξ_1 ve ξ_2 spinörleri sonradan tanımlanacaktır. Gerekli eşlenik spinörler aşağıdaki gibidir;

$$\bar{u}'_1 = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \left(\begin{pmatrix} a^\dagger & b^\dagger \end{pmatrix} - \rho(\sigma^1 \sin \theta + \sigma^3 \cos \theta) \begin{pmatrix} a^\dagger & b^\dagger \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{u}'_2 = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \left(\begin{pmatrix} c^\dagger & d^\dagger \end{pmatrix} \rho(\sigma^1 \sin \theta + \sigma^3 \cos \theta) \begin{pmatrix} c^\dagger & d^\dagger \end{pmatrix} \right)$$

Bu sürece ait genlik ifadesi, ¹²

$$\mathcal{M} \propto \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2)}{(p'_1 - p_1)^2} - \frac{\bar{u}(p'_2)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p'_1)\gamma_\mu u(p_2)}{(p'_2 - p_1)^2} \quad (4.86)$$

tanımlanır ve sürece ait kinematik özellikler,

$$\begin{aligned} (p'_1 - p_1)^2 &= (p'_1)^2 + p_1^2 + 2(p'_1 \cdot p_1) = 2m^2 + 2m^2\gamma^2 \\ (p'_2 - p_1)^2 &= (p'_2)^2 + p_1^2 + 2(p'_2 \cdot p_1) = 2m^2 + 2m^2\gamma^2 \\ (p'_1 - p_1)^2 &= (p'_2 - p_1)^2 \end{aligned} \quad (4.87)$$

şeklindedir. Genlik ifadesini bulmak için gerekli olan bazı matris elemanları aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1\gamma^0 u_1 &= \frac{p^0 + m}{2m} \xi_1^\dagger \begin{pmatrix} 1 + i\rho^2 \sin \theta \\ -i\rho^2 \cos \theta \end{pmatrix}, & \bar{u}'_1\gamma^0 u_2 &= \frac{p^0 + m}{2m} \xi_1^\dagger \begin{pmatrix} i\rho^2 \cos \theta \\ 1 + i\rho^2 \sin \theta \end{pmatrix} \\ \bar{u}'_2\gamma^0 u_2 &= \frac{p^0 + m}{2m} \xi_2^\dagger \begin{pmatrix} -i\rho^2 \cos \theta \\ 1 - i\rho^2 \sin \theta \end{pmatrix}, & \bar{u}'_2\gamma^0 u_1 &= \frac{p^0 + m}{2m} \xi_2^\dagger \begin{pmatrix} 1 - i\rho^2 \sin \theta \\ i\rho^2 \cos \theta \end{pmatrix} \\ \bar{u}'_1\gamma^i u_1 &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) \rho \xi_1^\dagger \left[\begin{pmatrix} i + \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \delta^{i1} + i \begin{pmatrix} -i + \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \delta^{i2} \right. \\ & & & \left. + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -i + \sin \theta \end{pmatrix} \delta^{i3} \right] \\ \bar{u}'_2\gamma^i u_2 &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) \rho \xi_2^\dagger \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta \\ i - \sin \theta \end{pmatrix} \delta^{i1} + i \begin{pmatrix} \cos \theta \\ i + \sin \theta \end{pmatrix} \delta^{i2} \right. \\ & & & \left. + \begin{pmatrix} i + \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \delta^{i3} \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

¹² Genliğin önündeki sabitler yapılan işlemler açısından önemli değildir. Normalize olasılık ile çalışıldığından sabitler birbirini götürür.

$$\begin{aligned}\bar{u}'_1 \gamma^i u_2 &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) \rho \xi_1^\dagger \left[\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c} \cos \theta \\ i + \sin \theta \end{array} \right) \delta^{i1} + i \left(\begin{array}{c} \cos \theta \\ i - \sin \theta \end{array} \right) \delta^{i2} \\ &+ \left(\begin{array}{c} i + \sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right) \delta^{i3} \end{aligned} \right] \\ \bar{u}'_2 \gamma^i u_1 &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) \rho \xi_2^\dagger \left[\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c} i - \sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right) \delta^{i1} - i \left(\begin{array}{c} 1 + \sin \theta \\ -\cos \theta \end{array} \right) \\ &- \left(\begin{array}{c} \cos \theta \\ i + \sin \theta \end{array} \right) \delta^{i3} \end{aligned} \right]\end{aligned}$$

Genlik $\theta = 0$ için hesaplandığında,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{1}{(p'_1 - p_1)^2} [\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1 \bar{u}'_2 \gamma^0 u_2 - \bar{u}'_2 \gamma^0 u_1 \bar{u}'_1 \gamma^0 u_2] \\ &\quad - \frac{1}{(p'_1 - p_1)^2} [\bar{u}'_1 \gamma^i u_1 \bar{u}'_2 \gamma^i u_2 - \bar{u}'_2 \gamma^i u_1 \bar{u}'_1 \gamma^i u_2] \\ &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^2 \frac{1}{(p'_1 - p_1)^2} \{ [a^\dagger - i\rho^2 b^\dagger](-i\rho^2 c^\dagger + d^\dagger) - (i\rho^2 a^\dagger + b^\dagger)(c^\dagger + i\rho^2 d^\dagger) \\ &\quad - \rho^2 [(ia^\dagger - b^\dagger)(-c^\dagger + id^\dagger) - (-ia^\dagger - b^\dagger)(c^\dagger + id^\dagger) + (a^\dagger - ib^\dagger)(ic^\dagger - d^\dagger)] \\ &\quad + \rho^2 [(a^\dagger + ib^\dagger)(ic^\dagger + d^\dagger) + (-a^\dagger + ib^\dagger)(ic^\dagger - d^\dagger) - (ia^\dagger + b^\dagger)(c^\dagger + id^\dagger)] \} \\ &\hspace{15em} (4.89)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\propto \{ [-i\rho^2 a^\dagger c^\dagger + a^\dagger d^\dagger - \rho^4 b^\dagger c^\dagger - i\rho^2 b^\dagger d^\dagger - i\rho^2 a^\dagger c^\dagger + \rho^4 a^\dagger d^\dagger - b^\dagger c^\dagger - i\rho^2 b^\dagger d^\dagger] \\ &\quad - \rho^2 [-ia^\dagger c^\dagger - a^\dagger d^\dagger + b^\dagger c^\dagger - ib^\dagger d^\dagger + 2ia^\dagger c^\dagger - 2a^\dagger d^\dagger + 2b^\dagger c^\dagger + 2ib^\dagger d^\dagger + 2ia^\dagger c^\dagger \\ &\quad - 2a^\dagger d^\dagger + 2b^\dagger c^\dagger + 2ib^\dagger d^\dagger - ia^\dagger c^\dagger - a^\dagger d^\dagger + b^\dagger c^\dagger - ib^\dagger d^\dagger] \} \\ &\hspace{15em} (4.90) \\ &\propto \{ [-2i\rho^2(a^\dagger c^\dagger + b^\dagger d^\dagger) + (1 + \rho^4)(a^\dagger d^\dagger - b^\dagger c^\dagger)] \\ &\quad - \rho^2 [2i(a^\dagger c^\dagger + b^\dagger d^\dagger) - 6(a^\dagger d^\dagger - b^\dagger c^\dagger)] \} \\ &\propto [(1 + 6\rho^2 + \rho^4)(a^\dagger d^\dagger - b^\dagger c^\dagger) - 4i\rho^2(a^\dagger c^\dagger + b^\dagger d^\dagger)]\end{aligned}$$

Aynı çift yok oluş sürecinde yapıldığı gibi bu skaler sonucu bir satır-sütun matris çarpımı şeklinde yazıldığında,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \propto & \xi_1^\dagger \xi_2^\dagger \left\{ (1 + 6\rho^2 + \rho^4) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \right] \right. \\ & \left. + 4i\rho^2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

bulunur (Yongram ve Manoukian 2004). Çıkan elektronlar için bulunan bu genlik ifadesinden hız bağımlı, normalize dolanık bir durum fonksiyonu bulunabilir;

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & \frac{1}{N} \left\{ \frac{(1 + 6\rho^2 + \rho^4)}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{4i\rho^2}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Normalizasyon katsayısı, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ işlemi yapılarak,

$$N = [(1 + 6\rho^2 + \rho^4)^2 + 16\rho^4]^{1/2} \quad (4.93)$$

bulunur. Çıkan elektronların polarizasyon korelasyonlarının bileşik olasılığını bulunabilmesi için ξ_1, ξ_2 spinörlerinin tanımlanması gerekir;

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_j/2} \\ e^{+i\chi_j/2} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (4.94)$$

Burada χ_j çıkan paracıkların spin polarizasyon açılarıdır. O halde polarizasyon korelasyonlarının bileşik olasılığı,

$$\begin{aligned} P[\chi_1, \chi_2] &= \|\xi_1^\dagger \xi_2^\dagger |\psi\rangle\|^2 = \frac{1}{2N} [(1 + 6\rho^2 + \rho^4)(a^\dagger d^\dagger - b^\dagger c^\dagger) + 4i\rho^2(a^\dagger c^\dagger + b^\dagger d^\dagger)]^2 \\ &= \frac{1}{2N} \left[(1 + 6\rho^2 + \rho^4)(-i \sin(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}) + 4i\rho^2 \cos(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})) \right]^2 \\ &= \frac{[(1 + 6\rho^2 + \rho^4) \sin(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}) - 4\rho^2 \cos(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})]^2}{2[(1 + 6\rho^2 + \rho^4) + 16\rho^4]} \end{aligned}$$

(4.95)

şeklindedir. Bu bileşik olasılık normalizasyon şartını sağlar;

$$P[\chi_1, \chi_2] + P[\chi_1 + \pi, \chi_2] + P[\chi_1, \chi_2 + \pi] + P[\chi_1 + \pi, \chi_2 + \pi] = 1 \quad (4.96)$$

Tek bir spin polarizasyonu ölçüldüğünde, örneğin χ_1 , bu durumda,

$$\begin{aligned} P[\chi_1, -] &= ||\xi_1^\dagger|\psi\rangle||^2 \equiv P[\chi_1, \chi_2] + P[\chi_1, \chi_2 + \pi] \\ &= \frac{[(1 + 6\rho^2 + \rho^4) \sin(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}) - 4\rho^2 \cos(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})]^2}{2[(1 + 6\rho^2 + \rho^4) + 16\rho^4]} \\ &\quad + \frac{[(1 + 6\rho^2 + \rho^4) \sin(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} - \frac{\pi}{2}) - 4\rho^2 \cos(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} + \frac{\pi}{2})]^2}{2[(1 + 6\rho^2 + \rho^4) + 16\rho^4]} \\ &= \frac{(1 + 6\rho^2 + \rho^4)^2 + 16\rho^4}{2[(1 + 6\rho^2 + \rho^4)^2 + 16\rho^4]} \\ &\quad - \frac{4\rho^2(1 + 6\rho^2 + \rho^4)}{[(1 + 6\rho^2 + \rho^4)^2 + 16\rho^4]} \\ &\quad \times \left(\sin(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}) \cos(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}) + \cos(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}) \sin(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4\rho^2(1 + 6\rho^2 + \rho^4)}{(1 + 6\rho^2 + \rho^4)^2 + 16\rho^4} \sin \chi_1 \end{aligned} \quad (4.97)$$

sonucuna ulaşılır. Aynı işlemler χ_2 açısının ölçüldüğü durum için incelendiğinde benzer olarak,

$$P[-, \chi_2] = \frac{1}{2} + \frac{4\rho^2(1 + 6\rho^2 + \rho^4)}{(1 + 6\rho^2 + \rho^4) + 16\rho^4} \sin \chi_2 \quad (4.98)$$

elde edilir. Polarizasyon korelasyonlarının ortak olasılıkları, tek tek ölçülen polarizasyon olasılıkları cinsinden yazılamaz:

$$P[\chi_1, \chi_2] \neq P[\chi_1, -] P[-, \chi_2] \quad (4.99)$$

Bu bağıntı sürecin dolanık olduğunu ifade eder. Bulunan bu olasılıklar, $\beta = 0.3$ değeri için $\chi_1 = 0^\circ, \chi_2 = 137^\circ, \chi'_1 = 12^\circ, \chi'_2 = 45^\circ$ polarizasyon açıları için denklem (4.46) ile verilen eşitsizlikte yerine yazıldığında, $S = -1.79$ sonucunu bulunur ve Bell eşitsizliği ihlal edilir (Yongram ve Manoukian 2004). $\theta = 0$ açısı çıkan elektronların z-

ekseninde çıktığına karşılık gelmektedir ve normalize olasılıklarda açık bir hız bağımlılığı söz konusudur. Ancak $\theta = \frac{\pi}{2}$ açısında çıkan elektronlar x-ekseninde ilerler ve normalize olasılıklar hız bağımlı değildir. Bunun nedeni ile ilgili şu yorum yapılabilir; etkileşen elektronların spini z-eksenine polarize olduğundan, polarizasyon yönünde ilerleyen parçacıklar açıkça hız bağımlıdır. Ancak parçacıklar polarizasyon yönüne dik ilerlediğinde o zaman hız bağımlılığı ortadan kalkmaktadır.

4.2.2 Polarize olmayan hâl için Møller saçılması

Kütle merkezi çerçevesinde, $\mathbf{p}_1 = \gamma m \beta (0, 1, 0) = -\mathbf{p}_2$ momentumuna sahip, polarize olmayan iki elektronun esnek saçılmasını incelendiğinde, çıkan parçacıkların momentumları,

$$\mathbf{p}'_1 = \gamma m \beta (1, 0, 0) = -\mathbf{p}'_2 \quad (4.100)$$

şeklinde verilmiş olsun (Yongram ve Manoukian 2004). Çıkan parçacıklar için 4-spinörler,

$$\begin{aligned} u(p'_1) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1}{p^0 + m} \xi_1 \end{pmatrix}, & \xi_1 &= \begin{pmatrix} -i \cos \frac{\chi_1}{2} \\ \sin \frac{\chi_1}{2} \end{pmatrix} \\ u(p'_2) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1}{p^0 + m} \xi_2 \end{pmatrix}, & \xi_2 &= \begin{pmatrix} -i \cos \frac{\chi_2}{2} \\ \sin \frac{\chi_2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.101)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada χ_1 ve χ_2 çıkan elektronların spin polarizasyon açılarıdır. (4.86) ile verilmiş olan genlik ifadesinin mutlak karesini polarize olmayan süreç için yazıldığında,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &\propto [\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu u(p'_1)] [\bar{u}(p'_2) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu u(p'_2)] \\ &\quad - [\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu u(p'_2)] [\bar{u}(p'_2) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu u(p'_1)] \\ &\quad - [\bar{u}(p'_2) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu u(p'_1)] [\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu u(p'_2)] \\ &\quad + [\bar{u}(p'_2) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu u(p'_2)] [\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu u(p'_1)] \end{aligned} \quad (4.102)$$

elde edilir. Bu denklem μ, ν ve 4-momentumlar üzerinden toplam halindedir ve açıldığında el yordamıyla yapmak çok zaman alacaktır. Bundan kaynaklı olarak bir matematiksel hesaplama programı olan *Maple* ile bu işlemler yapılmıştır. Bu işlemin sonucunda ise genliğin karesi,

$$|\mathcal{M}|^2 \propto (1 + 3\beta^2)(1 - \beta^2) \sin^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) + \beta^4 \cos^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) + 4\beta^4 \equiv F[\chi_1, \chi_2] \quad (4.103)$$

olarak bulunur. Spinleri z -ekseniyle χ_1 ve χ_2 açısı yapan elektronlar için normalize olasılık,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{F[\chi_1, \chi_2]}{N(\beta)} \quad (4.104)$$

şeklinindedir. Burada $N(\beta)$ normalizasyon faktörü olup çıkan parçacıkların alabileceği tüm polarizasyon yönelimleri üzerinden bir toplamdır. Bu da $F[\chi_1, \chi_2]$ 'nin 4 olası polarizasyon yöneliminin toplamına karşılık gelir;

$$\begin{aligned} N(\beta) &= F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1, \chi_2 + \pi] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2 + \pi] \\ &= 2(1 + 3\beta^2)(1 - \beta^2) + 2\beta^4 + 16\beta^4 \\ &= 2(1 + 2\beta^2 + 6\beta^4) \end{aligned} \quad (4.105)$$

(4.103) ve (4.105) bağıntıları normalize olasılık teriminde yerine yazıldığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{(1 + 3\beta^2)(1 - \beta^2) \sin^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) + \beta^4 \cos^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) + 4\beta^4}{2(1 + 2\beta^2 + 6\beta^4)} \quad (4.106)$$

bulunur. Çıkan parçacıklardan sadece birinin polarizasyon yönelimi ölçüldüğünde, örneğin χ_1 , diğer parçacığın alabileceği tüm spin yönelimleri üzerinden toplam alınmalıdır. O halde normalize olasılık,

$$P[\chi_1, -] = \frac{F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1, \chi_2 + \pi]}{N(\beta)} \quad (4.107)$$

formunu alır. Buradan sadece χ_1 ve χ_2 açılarının ölçüldüğü durumlar için normalize olasılıklar,

$$P[\chi_1, -] = \frac{1}{2} \quad (4.108)$$

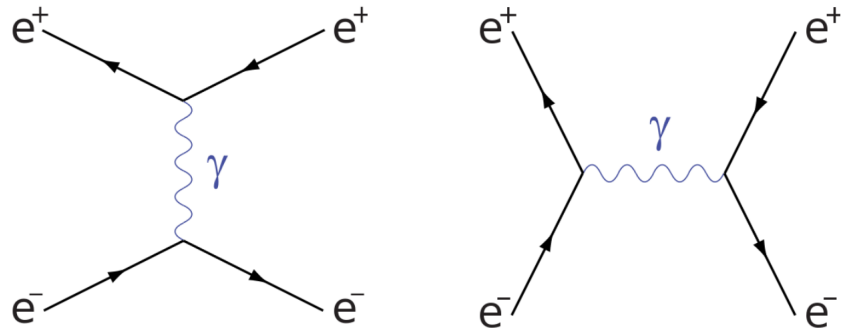
ve

$$P[-, \chi_2] = \frac{1}{2} \quad (4.109)$$

olarak bulunur. Bulunan bu olasılıklar $\beta = 0.3$ değeri için $\chi_1 = 0^\circ, \chi_2 = 45^\circ, \chi'_1 = 90^\circ, \chi'_2 = 135^\circ$ polarizasyon açıları denklem 4.46'da yerine yazıldığında, $S = -1.165$ sonucu bulunur ve Bell eşitsizliği ihlal edilir (Yongram ve Manoukian 2004).

4.3 Kuantum Elektrodinamiği Çerçevesinde $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ Saçılması

Elektron pozitron saçılması, bir diğer adıyla Bhabha saçılması iki farklı bozon aracılığıyla etkileşimde bulunabilir: İlk olarak QED çerçevesinde foton aracılığıyla etkileşim yapılabilir. İkinci olarak ise zayıf etkileşim yaparak Z^0 bozonu aracılığıyla etkileşebilir. Bu süreç düşük enerji limitinde zayıf etkileşimin katkısı ihmal edilerek QED çerçevesinde incelenmiştir. Sürecin Feynman diyagramları şekil 4.6'da verilmiştir.



Şekil 4.6. Bhabha saçılmasının Feynman diyagramları

4.3.1 Polarize hâl için Bhabha saçılması

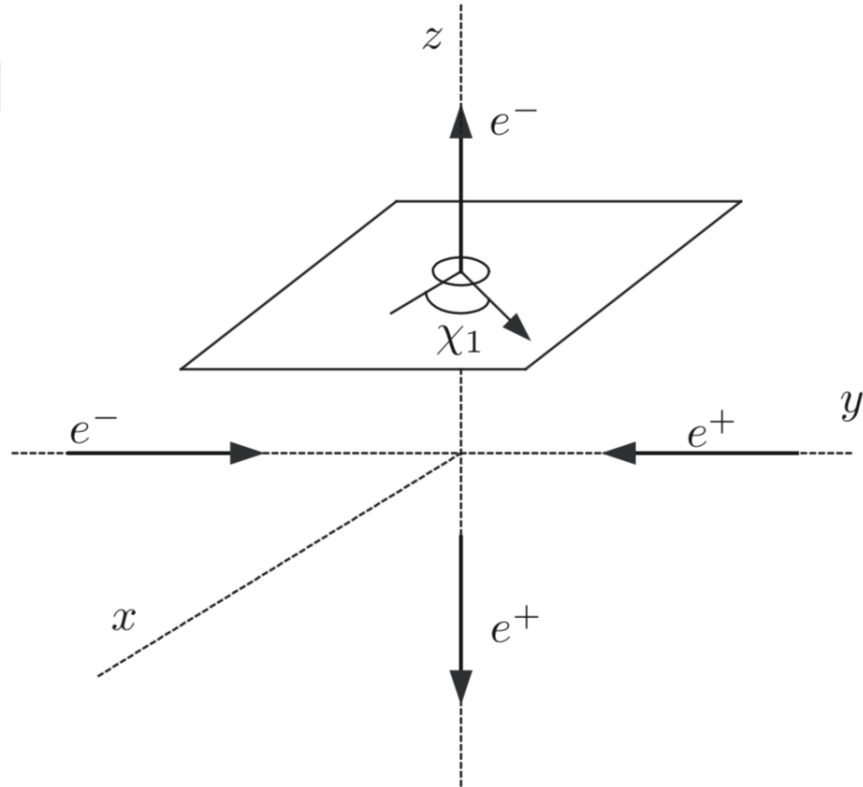
Kütle merkezi çerçevesinde elektron z -ekseninde spin-yukarı, pozitron ise z -ekseninde spin-aşağı şeklinde polarize olduğu durum incelendiğinde, etkileşime giren ve çıkan parçacıkların momentumları,

$$\mathbf{p}_1 = \gamma m \beta (0, 1, 0) = -\mathbf{p}_2 \quad (4.110)$$

ve

$$\mathbf{k}_1 = \gamma m \beta (0, 0, 1) = -\mathbf{k}_2 \quad (4.111)$$

şeklinde verildiğinde sürecin kinematığı şekil 4.7'de gösterilmektedir (Yongram ve Manoukian 2013).



Şekil 4.7. $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ sürecinin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2013)

Etkileşime giren ve çıkan parçacıkların 4-spinörleri aşağıdaki gibidir;

$$u(p_1) = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ i\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v(p_2) = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} i\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$u(k_1) = \left(\frac{k^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}_1}{k^0 + m} \xi_1 \end{pmatrix}, \quad v(k_2) = \left(\frac{k^0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \cdot \mathbf{k}_1}{k^0 + m} \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

(4.112)

ξ_1 ve ξ_2 spinörleri sonradan tanımlanacaktır. Sürecin genlik ifadesi,

$$\mathcal{M} = \frac{-e^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) - \frac{-e^2}{(p_1 - k_1)^2} \bar{u}(k_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(k_1)$$

(4.113)

olarak hesaplanabilir. Sürecin kinematüğinden,

$$(p_1 + p_2)^2 = 4\gamma^2 m^2, \quad (p_1 - k_1)^2 = -2\gamma^2 m^2 \beta^2$$

(4.114)

elde edilir. Genlik ifadesini bulmak için gerekli olan bazı matris elemanları aşağıda verilmiştir;

$$\bar{v}(p_2) \gamma^0 u(p_1) = 0, \quad \bar{u}(k_1) \gamma^0 u(p_1) = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) (a^\dagger - i\rho^2 b^\dagger)$$

$$\bar{u}(k_1) \gamma_0 v(k_2) = \text{aşikâr}, \quad \bar{v}(p_2) \gamma_0 v(k_2) = \left(\frac{p^0 + m}{2m} \right) (i\rho^2 c + d)$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}(p_2)\gamma^j u(p_1) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m}\right) ((1 + \rho^2)\delta^{j1} - i(\rho^2 - 1)\delta^{j2}) \\
\bar{u}(k_1)\gamma_j v(k_2) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m}\right) (-(1 + \rho^2)(a^\dagger d + b^\dagger c)\delta^{j1} + i(\rho^2 + 1)(a^\dagger d - b^\dagger c)\delta^{j2}) \\
\bar{u}(k_1)\gamma^j u(p_1) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m}\right) (\rho(ia^\dagger - b^\dagger)\delta^{j1} + \rho(a^\dagger - ib^\dagger)\delta^{j2} + \rho(a^\dagger - ib^\dagger)\delta^{j3}) \\
\bar{v}(p_2)\gamma_j v(k_2) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m}\right) (\rho(c + id)\delta^{j1} + \rho(ic + d)\delta^{j2} + \rho(ic + d)\delta^{j3})
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Genlik ifadesi yukarıda verilen matris elemanları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \left(\frac{p^0 + m}{2m}\right)^2 [(1 + \rho^2)^2(a^\dagger d + b^\dagger c) + (1 - \rho^4)(a^\dagger d - b^\dagger c)] \\
&\quad - \frac{e^2}{(p_1 - k_1)^2} \left(\frac{p^0 + m}{2m}\right) [a^\dagger d + \rho^4 b^\dagger c + \rho^2(a^\dagger d + b^\dagger c) + 4i\rho^2(a^\dagger c - b^\dagger d)]
\end{aligned} \tag{4.116}$$

şeklinde bulunur. Elektron ve pozitronun spin polarizasyonları χ_1 ve χ_2 açıları,

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} \\ e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} \\ e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

olarak tanımlanmış olsun ve genlik ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\propto (1 - \beta^2)(1 + \rho^2)^2 \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + 8\rho^2 \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
&\quad + i(1 - \rho^4)(1 - \beta^2) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.118}$$

sonucunu bulunur. Buradan genliğin karesi,

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \left[A \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right]^2 + [C \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)]^2 \equiv F[\chi_1, \chi_2] \tag{4.119}$$

şeklindedir. Burada

$$A = (1 - \beta^2)(1 + \rho^2)^2, \quad B = 8\rho^2, \quad C = (1 - \rho^4)(1 - \beta^2) \tag{4.120}$$

kısaltmaları kullanılmıştır. χ_1 ve χ_2 açıları ile tanımlanan spin polarizasyon ölçümleri için normalize ortak olasılık aşağıdaki gibidir;

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{F[\chi_1, \chi_2]}{N(\beta)} \quad (4.121)$$

$N(\beta)$ normalizasyon faktörü olup çıkan parçacıkların alabileceği tüm polarizasyon yönelimleri üzerinden bir toplamdır. Bu da $F[\chi_1, \chi_2]$ 'nin 4 olası polarizasyon yöneliminin toplamına karşılık gelir;

$$\begin{aligned} N(\beta) &= F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1, \chi_2 + \pi] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2 + \pi] \\ &= 2[A^2 + B^2 + C^2] \end{aligned} \quad (4.122)$$

Normalize olasılık gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \frac{[A \cos(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}) + B \sin(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})]^2 + [C \sin(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})]^2}{2[A^2 + B^2 + C^2]} \quad (4.123)$$

şeklindedir. Çıkan parçacıklardan sadece birinin polarizasyon yönelimi ölçüldüğünde, örneğin χ_1 , diğer parçacığın alabileceği tüm spin yönelimleri üzerinden toplam almak gerekir. O halde normalize olasılık,

$$P[\chi_1, -] = \frac{F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1, \chi_2 + \pi]}{N(\beta)} \quad (4.124)$$

formunu alır. Buradan sadece χ_1 açısının ölçüldüğü durum için normalize olasılık,

$$P[\chi_1, -] = \frac{1}{2} + \frac{AB}{A^2 + B^2 + C^2} \sin \chi_1 \quad (4.125)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, eğer χ_2 polarizasyon açısı ölçülürse normalize olasılık,

$$\begin{aligned} P[-, \chi_2] &= \frac{F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2]}{N(\beta)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{AB}{A^2 + B^2 + C^2} \sin \chi_2 \end{aligned} \quad (4.126)$$

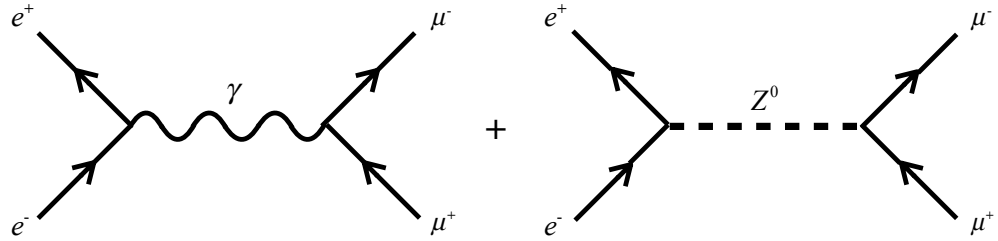
bulunur. Bulunan bu olasılıkları $\beta = 0.9, \chi_1 = 0^\circ, \chi_2 = 45^\circ, \chi'_1 = 69^\circ, \chi'_2 = 200^\circ$ değerleri için 4.46 de yazıldığında $S = -1.24$ sonucunu bulunur ve Bell eşitsizliği ihlal

edilir.

4.4 Elektrozayıf Modelde Müon Çiftinin Oluşumu

Önceki bölümlerde incelenen tüm süreçler zayıf etkileşimin katkısı ihmal edilerek QED çerçevesinde incelenmiştir. Bhabha ve Møller saçılmalarında etkileşimin düşük enerji limitinde olduğu belirtilmiş, bundan kaynaklı olarak da zayıf etkileşimin katkısı ihmal edilmiştir. Müon çiftinin oluşumu sürecinde, $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, ise gelen parçacıkların yüksek enerjili olduğu varsayıldığından zayıf etkileşim genliğinin katkısı ihmal edilemeyecektir. EW model, yaklaşık 100 MeV gibi bir enerjide elektromanyetik kuvvet ve zayıf nükleer kuvvetin birleşmesini öngörmektedir. EW etkileşimde parçacık QED etkileşimi yaparken aynı zamanda zayıf etkileşim de yapmaktadır.

Sürecin Feynman diyagramları şekil 4.8'de verilmiştir. Müon çiftinin oluşumu kütle



Şekil 4.8. Elektrozayıf $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ sürecinin Feynman diyagramları

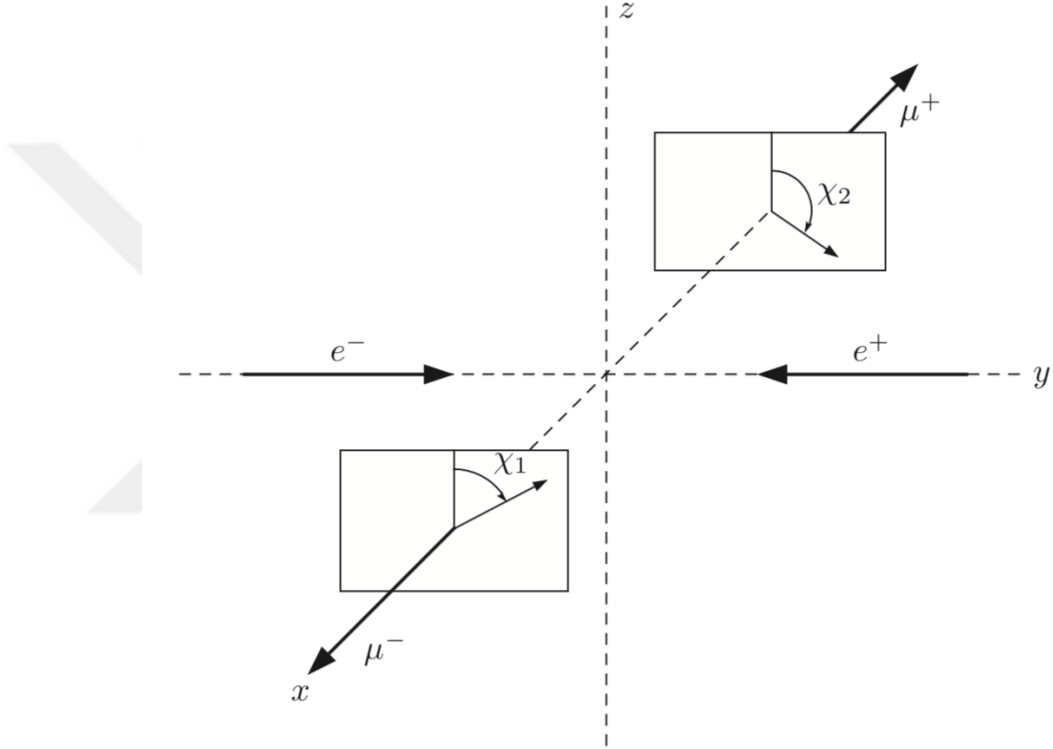
merkezi çerçevesinde incelenmiştir (Yongram ve Manoukian 2006). Sürecin kinematiği şekil 4.9'da gösterilmiştir. Elektron z -ekseninde spin yukarı, pozitron z -ekseninde spin aşağı olarak polarize olduğu durumda giren ve çıkan parçacıkların momentumları sırasıyla,

$$\mathbf{p} = \gamma m_e \beta (0, 1, 0) = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}' = \gamma' m_\mu \beta' (1, 0, 0) = -\mathbf{k}' \quad (4.127)$$

ile verilmiştir. Etkileşime giren parçacıkların spinörleri,

$$u(p) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} \uparrow \\ \frac{i\gamma\beta}{\gamma+1} \downarrow \end{pmatrix}, \quad v(k) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\gamma\beta}{\gamma+1} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix} \quad (4.128)$$

burada $\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak tanımlanmıştır.



Şekil 4.9. $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ sürecinin kinematığı (Yongram ve Manoukian 2006)

Çıkan parçacıkların spinörleri ise,

$$u(p') = \sqrt{\frac{\gamma'+1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{p'^0 + m_\mu} \phi_1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\gamma'+1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \frac{\gamma'\beta'}{\gamma'+1} \sigma_1 \phi_1 \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

$$v(k') = \sqrt{\frac{\gamma'+1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}'}{k'^0 + m_\mu} \phi_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\gamma'+1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma'\beta'}{\gamma'+1} \sigma_1 \phi_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

burada $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} \\ e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix}$ ve $\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} \\ e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix}$ olarak tanımlanmıştır. Burada χ_1 ve χ_2 çıkan parçacıkların spin polarizasyon açılarıdır. İlk olarak QED sürecini

incelendiğinde genlik ifadesi,

$$\mathcal{M}_{QED} = \frac{g_e^2}{(p+k)^2} \bar{v}(k) \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p') \gamma_\mu v(k') \quad (4.130)$$

olarak verilir. (4.130) ile verilen genlik ifadesi için gerekli olan matris elemanları, yapılan işlemler sonucu,

$$\begin{aligned} \bar{v}(k) \gamma^0 u(p) &= 0, & \bar{u}(p') \gamma_0 v(k') &= 0 \\ \bar{v}(k) \gamma^1 u(p) &= \gamma, & \bar{u}(p') \gamma_1 v(k') &= -\cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\ \bar{v}(k) \gamma^2 u(p) &= i, & \bar{u}(p') \gamma_2 v(k') &= -\gamma' \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\ \bar{v}(k) \gamma^3 u(p) &= 0, & \bar{u}(p') \gamma_3 v(k') &= 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

olarak verilmektedir. $(p+k)^2 = 4\gamma^2 m_e^2 = 4E^2$ olarak bulunur. Bulunan bu sonuçlar ile sürecin QED genliği,

$$\mathcal{M}_{QED} = -\frac{g_e^2}{4E^2} \left[\gamma \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + i\gamma' \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right] \quad (4.132)$$

şeklinde bulunur. Zayıf etkileşim genliği,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{WI} &= \frac{-g_z^2}{4((p+k)^2 - M_z^2)} \left\{ \left[\bar{v}(k) \gamma^\mu (c_V^{e^-} - c_A^{e^-} \gamma_5) u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu (c_V^{\mu^-} - c_A^{\mu^-} \gamma_5) v(k') \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{M_z^2} \left[\bar{v}(k) (\not{p} + \not{k}) (c_V^{\mu^-} - c_A^{\mu^-} \gamma_5) u(p) \right] \left[\bar{u}(p') (\not{p} + \not{k}) (c_V^{\mu^-} - c_A^{\mu^-} \gamma_5) v(k') \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.133)$$

şeklinde tanımlanır. Genlik ifadesinden de anlaşılacağı üzere propagatör üzerinde düşük enerji limiti yapılmamıştır. Zayıf yük düzeltmeleri olan c_V ve c_A katsayıları fermiyonlar için (e^- , μ^- , τ^-) için aynıdır. Bundan dolayı katsayılar üzerindeki indisleri kaldırılabilir.

Bu katsayılar,

$$c_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad c_A = -\frac{1}{2} \quad (4.134)$$

olarak verilir (Griffiths 2008). Burada θ_W Weinberg açısı olarak tanımlanır. Denklem (4.133) ile verilen genlik ifadesi için gerekli olan matris elemanları, gerekli işlemler

sonucu aşağıdaki gibi verilir;

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p) &= 0, & \bar{v}(k)\gamma^1(c_V - c_A\gamma_5)u(p) &= \gamma c_V \\
\bar{v}(k)\gamma^2(c_V - c_A\gamma_5)u(p) &= ic_V, & \bar{v}(k)\gamma^3(c_V - c_A\gamma_5)u(p) &= i\gamma\beta c_V \\
\bar{u}(p')\gamma_1(c_V - c_A\gamma_5)v(k') &= -c_V \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
\bar{u}(p')\gamma_2(c_V - c_A\gamma_5)v(k') &= -\gamma'c_V \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - \gamma'\beta'c_A \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
\bar{u}(p')\gamma_3(c_V - c_A\gamma_5)v(k') &= -i\gamma'c_V \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) - i\gamma'\beta'c_A \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.135}$$

Genliği iki bölüme ayrılarak incelendiğinde genliğin ilk kısmı,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{WI}^{(1)} &= \frac{-g_z^2}{4((p+k)^2 - M_z^2)} [\bar{v}(k)\gamma^\mu(c_V - c_A\gamma_5)u(p)] [\bar{u}(p')\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma_5)v(k')] \\
&= \frac{g_z^2}{4((p+k)^2 - M_z^2)} \left[c_V\gamma \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - c_Vc_A\gamma\gamma'\beta \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - c_A^2\gamma\gamma'\beta\beta' \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + i \left(c_Vc_A\gamma'\beta' \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) + c_V^2\gamma' \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.136}$$

olarak bulunur. Genliğin ikinci kısmı ise,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{WI}^{(2)} &= \frac{g_z^2}{4((p+k)^2 - M_z^2)} \frac{1}{M_z^2} [\bar{v}(k)(\not{p} + \not{k})(c_v - c_A\gamma_5)u(p)] \\
&\quad \times [\bar{u}(p')(\not{p} + \not{k}')(c_v - c_A\gamma_5)v(k')] \\
&\propto \bar{v}(k)\not{p}(c_v - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\not{p}(c_v - c_A\gamma_5)v(k') \\
&\quad + \bar{v}(k)\not{p}(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\not{K}(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&\quad + \bar{v}(k)\not{K}(c_v - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\not{p}(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&\quad + \bar{v}(k)\not{K}(c_v - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\not{K}(c_V - c_A\gamma_5)v(k')
\end{aligned} \tag{4.137}$$

şeklindedir. Burada \not{p} ve \not{k} terimleri 4-momentum terimleri üzerinden toplam şekilde olduğundan her terim için zaman ve uzay bileşenlerini ayrı olarak yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{WI}^{(2)} &\propto (p_0)(p_0)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_0)(p_i)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_i)(p_0)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_i)(p_j)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^j(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_0)(k_0)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_0)(k_i)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_i)(k_0)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (p_i)(k_j)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^j(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_0)(p_0)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_0)(p_i)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_i)(p_0)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_i)(p_j)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^j(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_0)(k_0)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_0)(k_i)\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_i)(k_0)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \\
&+ (k_i)(k_j)\bar{v}(k)\gamma^i(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^j(c_V - c_A\gamma_5)v(k')
\end{aligned} \tag{4.138}$$

bulunur. 4-momentumlar zaman koordinatlarında simetrik, uzay koordinatlarında ise asimetric olduğundan yukarıdaki ifadede sadece,

$$\mathcal{M}_{WI}^{(2)} \propto 4(p^0)^2\bar{v}(k)\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)u(p)\bar{u}(p')\gamma^0(c_V - c_A\gamma_5)v(k') \tag{4.139}$$

terimi kalır. (4.135)'te bulunan eşitliklerden $\mu = \nu = 0$ bileşeninin sonucu sıfır olduğundan genliğin ikinci kısmı,

$$\mathcal{M}_{WI}^{(2)} = 0 \quad (4.140)$$

şeklinde bulunur. Burada şöyle bir yorum yapılabilir; incelenen sürece düşük enerji limiti, $q^2 \ll M_z^2$, uygulanmasa bile zayıf etkileşim genliğindeki ikinci terimden katkı gelmeyecektir. O halde zayıf etkileşim için genlik,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{WI} = \frac{g_z^2}{16E^2(1 - \frac{M_z^2}{4E^2})} & \left[c_V \gamma \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - c_V c_A \gamma \gamma' \beta \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right. \\ & \left. - c_A^2 \gamma \gamma' \beta \beta' \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + i \left(c_V c_A \gamma' \beta' \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) + c_V^2 \gamma' \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.141)$$

olarak elde edilir. EW genliğin toplam ifadesi gerekli sadeleştirmeleri yaparak,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{EW} &= \mathcal{M}_{QED} + \mathcal{M}_{WI} \\ &= A(E) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + B(E) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + C(E) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\ &+ i \left[D(E) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + E(E) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.142)$$

sonucuna ulaşılır. Burada,¹³

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= ab^2 - 1 + \frac{M_z^2}{4\varepsilon^2} \\ B(\varepsilon) &= -\frac{a\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2}\sqrt{\varepsilon^2 - m_\mu^2}}{m_\mu \varepsilon} \\ C(\varepsilon) &= -\frac{ab\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2}}{m_\mu} \\ D(\varepsilon) &= \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \left(ab^2 - 1 + \frac{M_z^2}{4\varepsilon^2}\right) \\ E(\varepsilon) &= \frac{M_z^2}{4\varepsilon^2} - 1 \end{aligned} \quad (4.143)$$

¹³ Enerji ile E sabitinin karıştırılmaması için bundan sonraki işlemlerde enerji ε sembolü ile gösterilecektir.

$$a = \frac{g_z^2}{16g_e^2} \cong 0.353$$

$$b = 1 - 4 \sin^2 \theta_W \cong 0.08$$

kısaltmaları kullanılmıştır. g_z , zayıf etkileşim sabiti, g_e , elektriksel etkileşim sabiti, bir diğer adıyla elektrik yükü, θ_W , Weinberg açısıdır. (4.142)'de bulunan sonucu diğerlerinden ayıran en büyük fark, genliğin sadece enerjiye değil aynı zamanda etkileşim sabitlerine de bağlı olmasıdır. Sürecin genliğinin karesi hesabından,

$$|\mathcal{M}_{EW}|^2 \propto \left[A(\varepsilon) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + B(\varepsilon) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + C(\varepsilon) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right]^2 \\ \left[D(\varepsilon) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + E(\varepsilon) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right]^2 \equiv F[\chi_1, \chi_2] \quad (4.144)$$

bulunur. Spinleri, z-ekseniyle χ_1 ve χ_2 açısı yapan müon ve anti müon için normalize olasılık aşağıdaki gibidir;

$$P[\chi_1, \chi_2] \equiv \frac{F[\chi_1, \chi_2]}{N(\varepsilon)} \quad (4.145)$$

Burada $N(\varepsilon)$ çıkan parçacıkların alabileceği tüm polarizasyon yönelimlerinin toplamıdır;

$$N(\beta) = F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1, \chi_2 + \pi] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2 + \pi] \\ = 2[A(\varepsilon)^2 + B(\varepsilon)^2 + C(\varepsilon)^2 + D(\varepsilon)^2 + E(\varepsilon)^2] \quad (4.146)$$

Her iki açının ölçüldüğü durum için normalize olasılık,

$$P[\chi_1, \chi_2] = \left\{ \left[A(\varepsilon) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + B(\varepsilon) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + C(\varepsilon) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right]^2 \right. \\ \left. \left[D(\varepsilon) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + E(\varepsilon) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right]^2 \right\} \frac{1}{N(\varepsilon)} \quad (4.147)$$

şeklindedir. Sadece bir spin polarizasyonunun ölçüldüğü durumlar gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$P[\chi_1, -] = \frac{F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1, \chi_2 + \pi]}{N(\varepsilon)} \quad (4.148)$$

$$P[\chi_1, -] = \frac{1}{2} + \frac{A(\varepsilon)C(\varepsilon) \sin \chi_1 - B(\varepsilon)C(\varepsilon) \cos \chi_1}{A(\varepsilon)^2 + B(\varepsilon)^2 + C(\varepsilon)^2 + D(\varepsilon)^2 + E(\varepsilon)^2}$$

ve

$$P[-, \chi_2] = \frac{F[\chi_1, \chi_2] + F[\chi_1 + \pi, \chi_2]}{N(\varepsilon)} \quad (4.149)$$

$$P[-, \chi_2] = \frac{1}{2} - \frac{A(\varepsilon)C(\varepsilon) \sin \chi_2 - B(\varepsilon)C(\varepsilon) \cos \chi_2}{A(\varepsilon)^2 + B(\varepsilon)^2 + C(\varepsilon)^2 + D(\varepsilon)^2 + E(\varepsilon)^2}$$

sonuçları elde edilir. Bulunan bu olasılıklar, elektrozayıf etkileşim için eşit enerjisi civarında, $\varepsilon \approx 107$ MeV, $\chi_1 = 0^\circ$, $\chi_2 = 153^\circ$, $\chi'_1 = 30^\circ$ ve $\chi_2 = 100^\circ$ spin polarizasyon yönelimleri için denklem 4.46'dan, $S = -1,089$ sonucunu bulunur ve Bell eşitsizliği ihlal edilir.

5. POLARİZE NÖTRİNO-ELEKTRON SAÇILMASI

Nötrino salınımlarının kanıtlanmasıyla birlikte nötrinoların kütleli olduğu ve çeşnileri arasında salınım yapabildiği anlaşılmıştır. SM'deki en sıradışı parçacıklardan biri olan nötrino sadece çeşnileri arasındaki salınım ve kütle tayini yanı sıra parçacık karakteriyle de bilim insanları için zorlu bir problem olmuştur. İki farklı parçacık karakteri Dirac ve Majorana tarafından önerilmiştir. Dirac tipi fermiyonlar halinde, her parçacığın bir de karşıt parçacığı vardır ve bu parçacıklar özdeş değildir (Dirac 1927). Majorana tipi fermiyonlar halinde ise, parçacık ve karşıt parçacıklar özdeştir (Majorana 1937). SM'de nötrino hariç tüm kuark ve leptonlar Dirac parçacığıdır. Nötrino için bunu kesin olarak söylemek şu ana kadar yapılan deneyler ile mümkün değildir. Nötrinonun parçacık karakterini belirlemenin bir yolu, sadece Majorana tipi bir nötrinonun gerçekleştirebileceği nötrinonun çift beta bozunumu sürecidir (Furry 1939), ancak şu ana kadar bu süreç gözlenememiştir. Bir diğer düşünce de polarize nötrino etkileşmelerini inceleyerek, giren ve çıkan parçacıkların spin yönelimlerinden ve kinematik özelliklerinden faydalanarak incelenen süreçteki nötrinoların Dirac tipi mi yoksa Majorana tipi mi olduğunu belirlemektir.

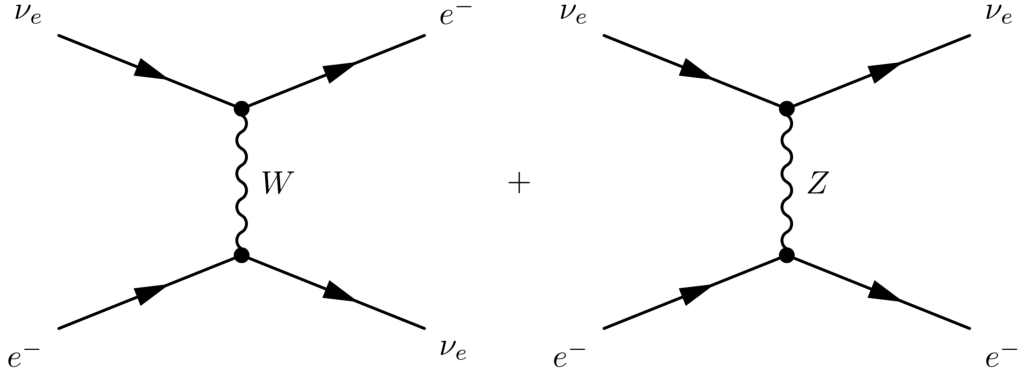
5.1 Süreç

Elektron ve elektron-nötrinusu, yüklü W^- bozonu ve yüksüz Z^0 bozonu aracılığıyla zayıf etkileşim yapar. Sürecin genliği,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{yüklü}} + \mathcal{M}_{\text{yüksüz}} \quad (5.1)$$

olarak verilir ve bu sürecin Feynman diyagramları şekil 5.1'deki gibidir; Yüklü akım için ve yüksüz akımın genlikleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\mathcal{M}_{\text{yüklü}} = \frac{g_w^2}{8(q^2 - M_w^2)} \bar{e}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu(k) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_w^2} \right) \bar{\nu}(k') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) e(p) \quad (5.2)$$



Şekil 5.1. $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ saçılmasının Feynman diyagramları (Giunti ve Kim 2007)

Düşük enerji limitinde, $q \ll M_w^2$;

$$\mathcal{M}_{\text{yükü}} = \frac{g_w^2}{8M_w^2} \bar{e}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu(k) \bar{\nu}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(p) \quad (5.3)$$

ve

$$\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} = \frac{g_z^2}{4(q^2 - M_z^2)} \bar{\nu}(k') \gamma^\mu (c_V^\nu - c_A^\nu \gamma_5) \nu(k) (g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_z^2}) \bar{e}(p') \gamma^\nu (c_V^e - c_A^e \gamma_5) e(p) \quad (5.4)$$

Düşük enerji limitinde, $q^2 \ll M_z^2$;

$$\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} = \frac{g_z^2}{4M_z^2} \bar{\nu}(k') \gamma^\mu (c_V^\nu - c_A^\nu \gamma_5) \nu(k) \bar{e}(p') \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma_5) e(p) \quad (5.5)$$

Elektron ve nötrino için zayıf yük düzeltmeleri,

$$\begin{aligned} c_V^e &= -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, & c_A^e &= -\frac{1}{2} \\ c_V^\nu &= c_A^\nu = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklindedir (Griffiths 2008). Sürecin kütle merkezi çerçevesinde kinematiği incelendiğinde;

$$\begin{aligned} p + k &= p' + k', & E_1 + E_2 &= E_3 + E_4 \\ (p + k)^2 &= (p' + k')^2 \\ (p \cdot k) &= (p' \cdot k') \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
E_1 E_2 + |\mathbf{p}|^2 &= E_3 E_4 + |\mathbf{p}'|^2 \\
E_1 E_2 + E_1^2 - m_e^2 &= E_3 E_4 + E_3^2 - m_e^2 \\
E_1 = E_3 = E, \quad E_2 = E_4 = E', \quad |\mathbf{p}| &= |\mathbf{p}'|
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Buradan giren ve çıkan elektronların enerjisi ile giren ve çıkan nötrinoların enerjisi eşit olduğu ve giren ve çıkan parçacıkların momentumlarının büyüklüklerin de eşit olduğu anlaşılabilir.

5.2 Spinörlerin Açık İfadeleri

Nötrinoların Dirac parçacığı olduğu kabul edilerek, etkileşime giren elektronun z -ekseninde spin yukarı, nötrininin ise z -ekseninde spin aşağı polarize olduğu ve parçacıkların y -ekseninde ilerlediği, $\mathbf{p} = (0, |\mathbf{p}|, 0) = -\mathbf{k}$ varsayalım. O halde etkileşime giren parçacıkların spinörleri,

$$\begin{aligned}
e(p) &= N_e \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = N_e \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
\nu(k) &= N_\nu \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = N_\nu \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

şeklinde tanımlanır. Etkileşimden x -ekseninde, $\mathbf{p}' = (|\mathbf{p}'|, 0, 0) = -\mathbf{k}'$, çıkan elektron ve nötrino spinörleri,

$$\begin{aligned}
e(p') &= N_e \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{(p')^0 + m_e} \varphi_1 \end{pmatrix} = N_e \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \sigma_1 \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} \\ e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \\
\nu(k') &= N_\nu \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}'}{(k')^0 + m_\nu} \varphi_2 \end{pmatrix} = N_\nu \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \sigma_1 \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} \\ e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

olarak tanımlanır, χ_1 ve χ_2 çıkan elektron ve nötrinin spin polarizasyon açılarıdır. Burada normalizasyon katsayıları,

$$\begin{aligned} N_e &= \sqrt{E + m_e} = \sqrt{p^0 + m_e} \\ N_\nu &= \sqrt{E' + m_\nu} = \sqrt{k^0 + m_\nu} \end{aligned} \quad (5.11)$$

şeklindedir.

5.3 Genlik Hesaplamaları

Genlik hesaplamalarının açık hali EK-2'de verilmiştir. Yüklü ve yüksüz akımlar için genlikler sırasıyla,

$$\mathcal{M}_{\text{yüklü}} = -i \frac{g_w^2}{4M_w^2} \left[2|\mathbf{p}|\sqrt{s} \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right] \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{yüksüz}} &= -\frac{g_z^2}{8M_z^2} \times \\ &\left[-\sin^2 \theta_W ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right. \\ &+ \frac{(m_e - m_\nu)}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\ &+ |\mathbf{p}| [m_\nu(1 - 2\sin^2 \theta_W) - 2m_e \sin^2 \theta_W] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\ &- 2|\mathbf{p}| \sin^2 \theta_W \sqrt{s} \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\ &+ i [\cos^2 \theta_W ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) - 4\sin^2 \theta_W |\mathbf{p}|^2] \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\ &+ 2i|\mathbf{p}| \left[\sqrt{s}(1 - 2\sin^2 \theta_W) + \frac{m_e^2 - m_\nu^2}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W \right] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\ &- i \frac{(m_e - m_\nu)}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\ &\left. + i|\mathbf{p}| [(1 - 2\sin^2 \theta_W)m_\nu + 2\sin^2 \theta_W m_e] \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

olarak bulunur.

Genlik ifadelerini Lorentz invariant Mandelstam parametreleri cinsinden yazmak süreçteki parametreleri kontrol edebilme açısından daha verimlidir. Mandelstam parametrelerinin özellikleri EK-2’de verilmiştir. Bundan dolayı enerjiler ve 4-momentum terimleri bu parametreler cinsinden yazılmıştır. Toplam genlik ifadesi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathcal{M}_{\text{yükü}} + \mathcal{M}_{\text{yüksüz}} \\
&= -\frac{g_z^2}{8M_z^2} \times \\
&\quad \left[-\sin^2 \theta_W ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right. \\
&\quad + \frac{(m_e - m_\nu)}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
&\quad + |\mathbf{p}| [m_\nu(1 - 2\sin^2 \theta_W) - 2\sin^2 \theta_W m_e] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
&\quad - 2|\mathbf{p}| \sin^2 \theta_W \sqrt{s} \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
&\quad + i [(2 + \cos^2 \theta_W) ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) - 4\sin^2 \theta_W |\mathbf{p}|^2] \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2i|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} [(2 + \cos^2 \theta_W)s - \sin^2 \theta_W (s - (m_e^2 - m_\nu^2))] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
&\quad - i \frac{(m_e - m_\nu)}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
&\quad \left. + i|\mathbf{p}| [(1 - 2\sin^2 \theta_W)m_\nu + 2\sin^2 \theta_W m_e] \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right] \tag{5.14}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve $m_\nu^2 \ll m_e^2$ yaklaşımı yapıldığında ve momentum büyüklüğünü, enerji ve kütle cinsinden yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = & -\frac{g_z^2}{8M_z^2\sqrt{s}} \times \\
& \left[-\sqrt{s} \sin^2 \theta_W [m_e(m_e + 2m_\nu) - (u + t)] \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right. \\
& + (m_e - m_\nu) \sin^2 \theta_W [u + t - m_e(m_e - 2m_\nu)] \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + \sqrt{s} \sqrt{E^2 - m_e^2} [m_\nu(1 - 2\sin^2 \theta_W) - 2\sin^2 \theta_W m_e] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& - 2s \sqrt{E^2 - m_e^2} \sin^2 \theta_W \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& + i\sqrt{s} [(2 + \cos^2 \theta_W) (m_e(m_e + 2m_\nu) - (u + t)) - 4\sin^2 \theta_W (E^2 - m_e^2)] \\
& \times \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + 2i\sqrt{E^2 - m_e^2} [(2 + \cos^2 \theta_W)s - \sin^2 \theta_W (s - m_e^2)] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& - i(m_e - m_\nu) \sin^2 \theta_W [u + t - m_e(m_e - 2m_\nu)] \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& \left. + i\sqrt{s} \sqrt{E^2 - m_e^2} [(1 - 2\sin^2 \theta_W)m_\nu + 2\sin^2 \theta_W m_e] \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right] \tag{5.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Genlik ifadesinin katsayısı normalize olasılık değerleri ile çalışıldığından önemsizdir. Bundan dolayı genlik ifadesi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \propto & A(s, t, u) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + B(s, t, u) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& + C(s, t, u) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) + D(s, t, u) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + i \left[E(s, t, u) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + F(s, t, u) \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \right. \\
& \left. + G(s, t, u) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) + H(s, t, u) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right] \tag{5.16}
\end{aligned}$$

şeklindedir ve katsayılar,

$$\begin{aligned}
A(s, t, u) &= \sqrt{s} \sqrt{E^2 - m_e^2} [m_\nu(1 - 2 \sin^2 \theta_W) - 2 \sin^2 \theta_W m_e] \\
B(s, t, u) &= -2s \sqrt{E^2 - m_e^2} \sin^2 \theta_W \\
C(s, t, u) &= (m_e - m_\nu) \sin^2 \theta_W [u + t - m_e(m_e - 2m_\nu)] \\
D(s, t, u) &= -\sqrt{s} \sin^2 \theta_W [m_e(m_e + 2m_\nu) - (u + t)] \\
E(s, t, u) &= 2\sqrt{E^2 - m_e^2} [(2 + \cos^2 \theta_W)s - \sin^2 \theta_W (s - m_e^2)] \\
F(s, t, u) &= \sqrt{s} \sqrt{E^2 - m_e^2} [(1 - 2 \sin^2 \theta_W)m_\nu + 2 \sin^2 \theta_W m_e] \\
G(s, t, u) &= \sqrt{s} [(2 + \cos^2 \theta_W) (m_e(m_e + 2m_\nu) - (u + t)) - 4 \sin^2 \theta_W (E^2 - m_e^2)] \\
H(s, t, u) &= -(m_e - m_\nu) \sin^2 \theta_W [u + t - m_e(m_e - 2m_\nu)]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

olarak tanımlanmıştır. Kütle merkezi çerçevesinde diferansiyel tesir kesiti,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_f|}{s |\mathbf{p}_i|} \tag{5.18}$$

ile verilir. $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$ ve genlik ifadesi θ 'dan bağımsız olduğundan tesir kesiti ifadesi,

$$\sigma = \frac{1}{16\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{s} \tag{5.19}$$

şeklindedir. Literatürde tanımlanan asimetri (Halzen ve Martin 1984), incelenen süreç için polarizasyon açıları üzerinden tanımlanmıştır;

$$A_{sym} \equiv \frac{\sigma(\chi_1, \chi_2) - \sigma(\chi_1, -\chi_2)}{\sigma(\chi_1, \chi_2) + \sigma(\chi_1, -\chi_2)} \tag{5.20}$$

(5.20) ile tanımlanan eşitlik $0 \leq A_{sym} \leq 1$ aralığındadır. Buradan şu yorumlar yapılabilir; asimetri sonucu sıfır olduğunda çarpışma sonucunda zıt yönelimli iki dedektör de aynı sonucu okuyacaktır, yani spin yönelimler arasında bir asimetri yoktur da denilebilir. Asimetri sonucu bir olduğunda ise dedektörlerden sadece birinden sinyal alınır. Bu du-

rumda asimetri *maksimaldir*. Bu sürecin tesir kesiti aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\sigma \propto & (A^2 + E^2) \sin^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) + (B^2 + F^2) \cos^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \\
& + (C^2 + G^2) \sin^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) + (D^2 + H^2) \cos^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \\
& + 2(AB + EF) \sin \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \\
& + 2(AC + EF) \sin \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \\
& + 2(AD + EH) \sin \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \\
& + 2(BC + FG) \cos \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \\
& + 2(BD + FH) \cos \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \\
& + 2(CD + GH) \sin \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Asimetri;

$$\begin{aligned}
& (A^2 + E^2 - C^2 - G^2) \left[\sin^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \right] \\
& + (B^2 + F^2 - D^2 - H^2) \left[\cos^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \right] \\
& + 2(AD + EH - BC - FG) \sin \chi_2 \\
A_{sym}(\chi_1, \chi_2) = & \frac{+(AB + EF - CD - GH) [\sin(\chi_1 + \chi_2) - \sin(\chi_1 - \chi_2)]}{(A^2 + E^2 + C^2 + G^2) \left[\sin^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \right]} \\
& + (B^2 + F^2 + D^2 + H^2) \left[\cos^2 \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right) \right] \\
& + 2(AD + EH + BC + FG) \sin \chi_1 \\
& + (AB + EF + CD + GH) [\sin(\chi_1 + \chi_2) + \sin(\chi_1 - \chi_2)]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

(5.22) bağıntısı ile bulunan asimetride spin polarizasyon açılarının $\chi_1 = 0, \chi_2 = \pi$ değerleri için,

$$A_{sym}(0, \pi) = 0 \tag{5.23}$$

sonucu bulunur ve asimetrinin olmadığı görülür. Spin polarizasyon açılarının

$\chi_1 = \pi/2, \chi_2 = -\pi/2$ değerleri için,

$$A_{sym}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2[(A+D)^2 + (E+H)^2]}{(A+D)^2 + (B+C)^2 + (E+H)^2 + (F+G)^2} \quad (5.24)$$

elde edilir. Bu sonuca göre asimetri $0 \leq A \leq 1$ olacaktır. Son olarak $\chi_1 = 0$ ve $\chi_2 = \pi/2$ açıları için asimetri,

$$A_{sym}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(A-C)(B+D) + (E-G)(F+H)}{A^2 + C^2 + E^2 + G^2} \quad (5.25)$$

şeklindedir ve bu sonuca göre de asimetri $0 \leq A_{sym} \leq 1$ aralığındadır. Buradan şu yorumu yapılabilir. Nötrinin *sol-elli* olduğunu varsayıldığında asimetri sonucunun bir olması gerekir. Ancak nötrino kütleli olduğundan spin yönelimi sadece momentum ile zıt yönde değil herhangi bir yönelimde de olabilir, bundan dolayı nötrinoların helisite durumları sadece sol-elli özvektör ile değil, sol-elli ve sağ-elli özvektörlerin bir süperpozisyonu şeklinde olmasını gerektirir. Nötrinoların genel bir spin yönelimine sahip olması polarizasyon açıları üzerinden tanımlanan asimetri ile test edilmiş ve elde edilen sonuçlar doğal olarak $A_{sym} = 1$ değerinden farklı asimetri değerlerini vermiştir.

6. SONUÇ VE YORUM

Dolanıklık, bileşik sistemlerin sergilediği kuantum mekaniksel bir özelliktir. Son yıllarda sadece kuantum mekaniğinin temellerini ilgilendiren bir olgu olmaktan çıkıp, yüksek enerji fiziği, yoğun madde fiziği, karadelik fiziği, lazer fiziği, kuantum enformasyon vb. gibi alanlarda da yoğun bir şekilde araştırılan bir çalışma konusudur.

Parçacık fiziğinde etkileşime girecek olan parçacıkların spinleri polarize edildiğinde ve çıkan parçacıkların spinlerinin yönelimleri ölçülebildiğinde,

- helisitenin çarpışma süreçlerindeki rolünün incelenmesiyle spinin çarpışma süreçlerine olan etkisi,
- çarpışma süreçlerindeki polarizasyon korelasyonlarının analizi ile dolanıklık etkilerinin tespiti,
- süreçlerdeki spin polarizasyon etkilerinin incelenmesi ile parçacıkları karakterinin, nötrinonun sol-elliliği, sınanması,

olarak gruplandırılabilen üç farklı amaç bu tezin çalışma konularını oluşturmaktadır.

Spin polarize süreçlerin helisite bazında açık bir şekilde araştırılmasını kapsayan ve ilk amaç doğrultusunda yapılan çalışmalar Bölüm 3’de sunulmuştur. QED çerçevesinde spin polarize müon çiftinin oluşum sürecinin helisite spinörleri ve helisite izdüşüm operatörleri kullanılarak incelendiği bu konuda, yapılan çalışmalar helisite bazının süreçte ele alınan parçacıkların spin bilgilerini açık bir şekilde gözler önüne serdiğini göstermektedir (Romão ve Silva 2016). İncelenen bu sürecin yüksek enerji, $E \gg m$, limitinde ise helisite kombinasyonlarının açısal bağımlılığı kuantum mekaniksel olarak incelendiğinde, bu helisite kombinasyonlarının spin yönelimlerini değiştirmedeği görülmüş ve bu sonuçlar doğrultusunda ise QED’nin doğasından ötürü kiralitenin korunduğu, kütsüz limitte helisitenin kiraliteye karşılık geldiği sonucuna varılmıştır (Romão ve Silva 2016).

Bu amaç doğrultusunda yapılan çalışmalar helisite bazıyla polarize süreçlerin analizinde spinin açık etkileri ve spin polarizasyon korelasyonlarının incelenbildiğini göstermektedir.

İkinci aşama parçacık etkileşmelerindeki spin polarizasyon korelasyonlarının Bell eşitsizliği aracılığıyla irdelenmesidir (Bölüm 4). SM'in temel etkileşmelerinden çift yok oluş, Møller saçılması, Bhabha saçılması ve elektrozayıf müon çiftinin oluşumu süreçleri spin polarize olarak incelenmiş, her süreçte dolanıklık etkileri açıkça görülmüştür. Seçilen spin yönelimleri ve momentum yönelimlerine bağlı olarak QED çerçevesinde incelenen süreçlerin genliklerinin hız bağımlı, elektrozayıf sürecin genliğinin ise hem hız bağımlı hem de etkileşim sabitlerine bağlı olduğu anlaşılmıştır. Belirli hız ve enerji değerlerinde seçilen polarizasyon açıları için polarizasyon korelasyonları Bell eşitsizliği aracılığıyla test edilmiş ve her süreç için bu eşitsizlik ihlal edilmiştir. Sonuç olarak QFT kapsamındaki hesapmalaların kuantum mekaniğini ile tutarlı, gizli değişkenler teorisi ile uyumlu olmadığı sonucuna varılmıştır (Yongram ve Manoukian 2003, 2004, 2006, 2013).

Nötrinoların çeşnileri arasında yaptığı salınımlar kanıtlanmadan önce nötrinolar kütle-siz ve dolayısıyla sol-elli parçacıklar olarak tasvir edilirdi. Kiralitenin kütle-siz limite helisiteye karşılık gelmesinden dolayı da nötrininonun negatif helisiteli bir parçacık olduğu sonucuna varılırdı. Ancak nötrino salınımlarının kanıtıyla birlikte, nötrinoların kütleli parçacıklar olduğu anlaşılmış, bundan kaynaklı olarak doğadaki nötrinoların helisite durumları sol-elli ve sağ-elli özvektörlerinin bir süperpozisyonu olması gerektiği öngörülmüştür.

Üçüncü aşama motivasyonunu buradan almaktadır ve nötrininonun sol-elliliği spin polarizasyon korelasyonları aracılığıyla sınanmıştır. Bu amaç doğrultusunda yapılan çalışmalar Bölüm 5'de sunulmuştur. Polarize $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ saçılması için sürecin tesir kesiti hesaplanmış, spin polarizasyon açıları üzerinden bir asimetri tanımlanmıştır. Çeşitli spin yönelimleri için bu asimetri sonuçları şu şekildedir;

1. $\chi_1 = 0$ ve $\chi_2 = \pi$ için; $A_{sym} = 0$
2. $\chi_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\chi_2 = \frac{\pi}{2}$ için; $0 \leq A_{sym} \leq 1$
3. $\chi_1 = 0$ ve $\chi_2 = \frac{\pi}{2}$ için; $0 \leq A_{sym} \leq 1$

Nötrinoların kütesiz olduğu durumda negatif helisiteli (sol-elli) yapısından ötürü beklenti, dedektörün ölçümünün sadece momentum yöneliminde bir ölçüm alabilmesi ve asimetri sonucunun bir olması doğrultusundadır. Ancak elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak nötrinoların kütleli olduğu ve genel bir spin yönelimine sahip olması gerektiği düşünüldüğünde nötrinoların helisite durumlarının kiral durumların bir süperpozisyonu olarak ifade edilmesi gerektiği anlaşılmıştır.

Temel parçacıkların kategorize edilmesinde kütle ve yük ile birlikte spin, parçacıkların karakteristiğini temsil eden en önemli özelliklerden biridir. Çarpışma süreçlerinde demetlerin spinlerinin polarize edilebilmesinden kaynaklı olarak spinin rolü gün geçtikçe artmaktadır. Yeni teknolojik gelişmelerle, günümüzde pek çok parçacığın kimlik tespiti artık yapılabilmektedir. Tek üst kuark üretiminin LHC'de gözlenmesi buna verilebilecek ilk örnek olabilir. Bunun nedeni oluşan tek üst kuarkın gelen parçacıkların polarize olmasından bağımsız olarak spin bağımlı oluşmasıdır. Bu doğrultuda yapılacak deneyler ile temel parçacıkların daha iyi anlaşılabilmesi, kuantum mekaniksel helisite ve kiralite olgularının daha iyi kavranabilmesinin önünü açacaktır.

QFT yerel bir ayar teorisidir. Bu teori çerçevesinde simetri sisteme dikte edilerek etkileşimler elde edilebilir. Bir anlamda teorisyenin elle koyduğu simetriler, etkileşimleri dikte eder. İncelenen süreçlerde çıkan parçacıkların spin yönelimleri χ_1 ve χ_2 açıları ile parametrize edilmiştir. Bu süreçlerin analizinde bakılan spin korelasyonları ve bunların Bell eşitsizliklerini ihlal etmeleri yerel olmayan etkileri ima eder. QFT çerçevesinde incelenen bu süreçlerin yerel olmayan etkilere sahip olması bu tez çalışmasındaki ana motivasyon kaynaklarından biridir ve bu durum,

- yerel ayar teorisi felsefesinde başlangıçta hiç yeri olmayan (söz edilmeyen) kuantum dolanıklığın hangi adımda (aşamada) daha sonra sisteme gireceği,
- ağaç seviyesindeki Feynman diyagramlarında köşe faktörlerinin belirlenmesinde a-yar ilkesinin yanısıra dolanıklığın ayrı bir rolü olabilir mi,

sorularını gündeme getirmektedir.

Bu tez çalışmasının diğer bir motivasyon kaynağı ise nötrinolar ve onun parçacık yapısıdır. Nötrino etkileşmelerinde asimetri, nötrinin sol-elli yapısını incelemenin bir yoludur. $A_{sym} \neq 1$ sonucu nötrinin genel bir spin yönelimi olduğunu ifade etmektedir. Aynı zamanda asimetri, SM fiziği ile SM ötesi fiziğin getireceği ek katkıları irdelemenin bir aracıdır. Başka bir deyişle SM parametreleri ile SM ötesi parametreleri arasındaki "teorik" bir interferometre görevi görür. Yapılan teorik hesaplamalar ile deneysel sonuçların karşılaştırılmaları yapıldığında, incelenen etkileşmelerin hangi çerçevede gerçekleştiğini değerlendirmek mümkündür. Bu durum nötrinin SM ötesi davranışını incelemek için bir çerçeve sunmaktadır.

Bu çalışmanın devamında dolanıklığın QFT süreçlerindeki rolünün anlaşılabilmesi ve spin korelasyonlarının analizi için yeni bir deney önerilebilmesi doğrultusunda genişletilmesi planlanmaktadır. Nötrinin parçacık karakterinin daha iyi anlaşılabilmesi için çeşitli nötrino süreçlerinin analizi, nötrino salınımlarının QFT süreçlerine etkilerinin incelenmesi ve bu doğrultuda yeni bir deney önerilmesi beklentiler dahilindedir. Aynı zamanda incelenen her süreç için parametre uzayının iyi bir şekilde belirlenebilmesi, önerilecek deneyleri destekleyici nitelikte olacaktır. Dolanıklığın parçacık süreçlerindeki rolünü farklı ölçütler (konkürans, dolanıklık sadakati, geometrik uyumsuzluk vb.) yardımıyla irdelenmesi de gelecek için araştırma alanlarından birisi olabilir.

KAYNAKLAR

- Abbott, B.P., vd. 2017. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev.* 119, 161101.
- Anonymous. 2012. Observation of a New Particle in the Search for the Standard Model Higgs Boson With the ATLAS Detector at the LHC *Phys. Lett. B*, 716, 1-29
- Anonymous. 2012a. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV With the CMS Experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716, 30-61
- Anonymous. 2012b. Observation of a New Boson With Mass Near 125 GeV in pp Collisions at $\sqrt{s}=7$ and 8 TeV. *J. High Energy Phys.* 06, 081
- Anonymous 2017. Background-free search for neutrinoless double- β decay of ^{76}Ge with GERDA. *Nature* 544, 47-52.
- Barger, V.D. and Phillips, R.J.N. 1996. *Collider Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, USA
- Bahcall, J.N. 1964. Solar Neutrinos I. Theoretical. *Phys. Rev. Lett.* 12, 300
- Bahcall, J.N., Bahcall, N.A. and Ulrich, R.K. 1969. Sensitivity of the Solar-Neutrino Fluxes. *Astrophysical Journal*, Vol. 156, p.559
- Ballentine, L.E. 1998. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific Publishing, USA
- Bell, J.S. 1964. On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Physics*, Vol. 1, pp. 195-200.
- Bohm, D and Aharonov Y. 1957. Discussion of Experimental Proof of the Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky. *Phys. Rev.*, Vol. 08, N. 4, pp. 1070-1076
- Cervera-Lierta A., Latorre, J.I., Rojo, J. and Rottoli, L. 2017. Maximal Entanglement In High Energy Physics. *SciPost*, Vol. 03, 036
- Cheng, T.P. 2005. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Oxford University Press, Oxford
- Clauser, J.F. and Horne, M.A. 1974. Experimental Consequences of Objective Local Theories. *Phys. Rev. D* 10, 526
- Cowan, C.L., Reines, F., Harrison, F.B., Kruse, H.W. and McGuire, A.D. 1956. Detection of the Free Neutrino: a Confirmation. *Science* Vol. 124, Issue 3212, pp. 103-104
- Das, A. 2008. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing, USA
- Davis, J. 1964. Solar Neutrinos II. Experimental. *Phys. Rev. Lett.* 12, 303

- Dirac, P.A.M. 1927. Quantum Theory of Electron. Proc. Soc. 117A, 610
- Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?. Phys. Rev., Vol. 47, pp. 777-780.
- Elliot, L. 2001. Spin in Particle Physics. Cambridge University Press, Cambridge
- Englert, F. and Brout, R. 1964. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. Phys. Rev. Lett. 13, 321-323
- Furry, W.H. 1939. On Transition Probabilities in Double Beta Disintegration. Phys. Rev. 54, 1184
- Giunti, C. and Kim, C.W. 2007. Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics. Oxford University Press, Oxford
- Glashow, S.L. 1961. Partial Symmetries of Weak Interactions. Nuclear Physics. 22, 579
- Griffiths, J. 2008. Introduction to Elementary Particle Physics, 2nd Edition. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. 2007. Table of Integrals, Series and Products 7th Edition. Elsevier, London
- Haber H.E. 1993. Spin Formalism and Applications to New Physics Searches. SLAC, Stanford, CA
- Halzen F. and Martin A.D. 1984. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley & Sons, Inc., Canada
- Higgs, P.W. 1964a. Broken Symmetries and the Mass of Gauge Bosons. Phys. Rev. Lett. 13, 508- 509
- Higgs, P.W. 1964b. Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields. Phys. Lett. 12, 132-133
- Itzykson, C. and Zuber, J.B. 1980. Quantum Field Theory. McGraw- Hill, New York
- Hirsch, M., Srivastava, R. and Valle, J.W.F. 2018. Can one ever prove that neutrinos are Dirac particles?. Phys. Lett. B., Vol. 781,p. 302-305.
- Joshi, D.C. 2006. Introduction to Quantum Electrodynamics and Particle Physics. International Publishing House, New Delhi
- Majorana, E. 1937. Theory of the Symmetry of Electrons and Positrons. Nuovo Cim. 14, 171- 184
- Maki, Z., Nakagawa, M. and Sakata, S. 1962. Remarks on the Unified Model of Elementary Particles. Prog. Theor. Phys. 28, 870- 880

- Pal, P.B. 2011. Dirac, Majorana and Weyl Fermions. American Journal of Physics 79, p. 485
- Pontecorvo B. 1957. Mesonium and Anti-Mesonium. Sov. Phys. JETP. 6, 429, Zh. Eksp. Theor. Fiz. 33, 549- 551
- Pontecorvo B. 1959. Electron and Muon Neutrinos. Zh. Eksp. Theor. Fiz. 37, 1751-1757
- Pontecorvo B. 1967. Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. Zh. Eksp. Theor. Fiz. 53, 1717- 1725
- Romão J. and Silva J.P. 2016. Helicity and Chirality. Departamento de Fisica and CFTP, Lisbon
- Salam, A. 1968. Elementary Particle Theory. Almquist and Wiksell, Stockholm
- Schrödinger, E. 1935. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 31, pp. 555-563
- Thomson, M. 2013. Modern Particle Physics. Cambridge University Press, Cambridge
- Yongram, N. and Manoukian, E.B. 2003. Joint Probabilities of Photon Polarization Correlations in e^+e^- Annihilation, Int. J. Theor. Phys. 42, pp. 1755-1764.
- Yongram, N. and Manoukian, E.B. 2004. Speed dependent polarization correlations in QED and entanglement. European Physical Journal D, Vol. 31, No. 1, pp. 137–143.
- Yongram, N. and Manoukian, E.B. 2006. Polarization Correlations in Muon Pair Production in Electroweak Model, Modern Physics Letters A, Vol. 21, No. 12, pp. 979–984
- Yongram, N. and Manoukian, E.B. 2013. Quantum Field Theory Analysis of Polarizations Correlations, Entanglement and Bell's Inequality: Explicit Processes, Fortschr. Phys. 61, No. 6, pp. 668 – 684
- Weinberg, S. 1967. A Model of Leptons. Phys. Rev. Lett. 19, 1284

EKLER

EK 1 Bell Eşitsizliği

EK 2 $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ Genlik Hesaplamaları

EK 1 Bell Eşitsizliği

İki bileşenli bir sistemi ve bileşenlerin her birinde iki değerli bir değişkeni ölçebilen bir çift ölçüm aletini düşünölsün. Bileşenleri parçacık olarak adlandırabilir ancak bu parçacıklar hakkında herhangi bir kısıtlama getirmedeği varsayılabilir. Olası sonuçların ölçümü ± 1 olabilir. Her iki ölçüm aletinin de olası spin yönelimlerini ölçebileceğini varsayılan sırasıyla **a** ve **b** gibi ayarı olsun. Bir ölçümün sonucu kontrol edilebilir parametreler olan **a** ve **b**'ye ve ek olarak λ ile gösterilen kontrol edilmeyen parametrelere bağı olsun. İlk parçacığın ölçüm sonucu $A (= \pm 1)$, **a**'ya ve kontrol edilmeyen parametre λ 'ya bağıdır. O halde birinci parçacığın ölçümünün sonucunu belirleyen $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$ şeklinde bir fonksiyon vardır. Aynı şekilde ikinci parçacığın ölçümünün sonucunu belirleyen $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$ şeklinde bir fonksiyon vardır. Einstein'ın yerellik prensibi gereği birinci parçacığın ölçüm sonucunun **b**'ye ikinci parçacığın ölçüm sonucunun ise **a**'ya bağı olmadığını varsayılabilir. Ek olarak λ parametresi için herhangi bir varsayım yapılmasına gerek yoktur. Bu parametre parçacıklar, ölçüm aletleri, çevre ya da hepsi ile ilişkili olabilir, bu durum yapılan yapılan tartışmayı etkilemeyecektir. Bu parçacıkları ve ölçüm aletleri uzay-zamanda ayrı noktalara yerleştirildiğinde parçacıklar etkileşmeyecek ve ölçümler birbirlerini etkilemeyecektir (özel göreliliğin bir sonucu olarak). Bell bu varsayım ile gizli değişkenler teorisinin sadece test edilebilir olduğunu göstermekle kalmayıp aynı zamanda kuantum mekaniğinin öngöröleriyle de çeliştiğini göstermektedir (Ballentine 1998).

İki parçacığın ölçümleri üzerindeki korelasyonları incelemek istediğimizde, kontrol edilmeyen parametre λ bir olasılık dağılımına tabidir. Ölçüm aletlerinin sabit değerleri için bu korelasyon fonksiyonu,

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \quad (1)$$

formunda olsun. $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$ şeklindedir. $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$ ve $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$ sınırlamaları yerine daha zayıf olan,

$$|A(\mathbf{a}, \lambda)| \leq 1, \quad |B(\mathbf{b}, \lambda)| \leq 1 \quad (2)$$

sınırlamaları kullanılabilir. Bu zayıf sınırlama, sonucun önemli bir şekilde genelleştirilmesine izin verecektir. Her iki ölçüm aletininde sırasıyla \mathbf{a} , \mathbf{a}' ve \mathbf{b} , \mathbf{b}' şeklinde alternatif iki ayarı olsun;

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \quad (3)$$

İntegralin içine $\pm A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)$ ve $\pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)$ eklendiğinde,

$$\begin{aligned} &= \int A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) [1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &- \int A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) [1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (4)$$

elde ederiz. (2) koşulunu kullanıldığında,

$$\begin{aligned} |C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq \int [1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &+ \int [1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\leq 2 \pm [C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b})] \end{aligned} \quad (5)$$

eşitsizliğine ulaşılır ve bu eşitsizlik ,

$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2 \quad (6)$$

şeklinde de yazılabilir. (6) bağıntısı *Bell eşitsizliği* olarak bilinir.

EK 2 $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ Sürecinde Genlik Hesaplamaları

Mandelstam Parametreleri

Yüksek enerji fiziğinde teorik ve deneysel çalışmalarda karşılaşılan problemlerden biri, baz değişikliği yapıldığında parametrelerin de değiştirilen baz cinsinden yazılması olarak söylenebilir. Bu problem, kullanılan parametrelerin Lorentz değişmez bir biçimde yazıldığı takdirde ortadan kalkar. Enerji ve momentum, laboratuvar çerçevesi ve kütle merkezi çerçevesinde farklılık gösterdiğinden *Mandelstam parametreleri* adı verilen Lorentz invariant nicelikleri kullanmak daha doğrudur. Bu parametreler Bölüm 4'te incelenen elektron-nötrino saçılması için,

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 \\ t &= (p - p')^2 = (k - k')^2 \\ u &= (p - k')^2 - (k - p')^2 \\ s + t + u &= 2m_e^2 + 2m_\nu^2 \end{aligned} \tag{1}$$

şeklindedir. (1)'den da görüleceği üzere bu parametreler Lorentz değişmezdir. Bölüm 4'te bulunan genlik ifadesinde yer alan ifadeler bu parametreler cinsinden yazıldığında,

$$\begin{aligned} p^0 + k^0 &= (E + E') = \sqrt{s} \\ p^0 - k^0 &= \frac{m_e^2 - m_\nu^2}{\sqrt{s}} \\ p^0 &= \frac{3m_e^2 + m_\nu^2 - (u + t)}{2\sqrt{s}} \\ k^0 &= \frac{3m_\nu^2 + m_e^2 - (u + t)}{2\sqrt{s}} \\ p^0 k^0 + m_e m_\nu &= \frac{1}{2} ((m_e + m_\nu)^2 - 2|\mathbf{p}|^2 - (u + t)) \\ m_\nu p^0 - m_e k^0 &= \frac{m_e - m_\nu}{2\sqrt{s}} (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \end{aligned} \tag{2}$$

bağıntıları bulunur.

Yüklü Akım İçin Genlik Hesaplamaları

Elektron-nötrino saçılmasının yüklü genliği,

$$\mathcal{M}_{\text{yüklü}} = \frac{g_w^2}{8M_w^2} \bar{e}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu(k) \bar{\nu}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(p) \quad (3)$$

olarak verilir, burada μ üzerinden 0'dan 3'e toplam vardır;

$\mu=0$

$$\begin{aligned} \bar{e}(p') \gamma^0 (1 - \gamma_5) \nu(k) &= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\chi_1/2} & e^{-i\chi_1/2} & -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\chi_1/2} & e^{-i\chi_1/2} & -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\chi_1/2} - i \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i\chi_1/2} + i \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(k') \gamma_0 (1 - \gamma_5) e(p) &= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\chi_2/2} & e^{-i\chi_2/2} & \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi_2/2} - i \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i\chi_2/2} - i \frac{|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)(p^0 + m_e)} e^{i\chi_2/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i\chi_2/2} \right] \quad (7)$$

(5) ve (7) terimleri çarpıldığında;

$$= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right. \\ - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\ - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\ + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\ \left. + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right] \quad (8)$$

$$= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left\{ e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right. \\ + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\ + e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \\ \left. + e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[-\frac{2|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right\} \quad (9)$$

$$= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[2 \frac{p^0 k^0 + m_e m_\nu}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + 2 \frac{|\mathbf{p}|(p^0 - i m_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right. \\ \left. - 2 \frac{|\mathbf{p}|(k^0 + i m_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - 2 \frac{|\mathbf{p}|^2 - i(m_\nu p^0 - m_e k^0)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right] \quad (10)$$

sonucu elde edilir. $\mu = 0$ bileşeni,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{yükü}}^{\mu=0} = & (p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - (|\mathbf{p}|^2 - i(m_\nu p^0 - m_e k^0)) e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ & + |\mathbf{p}|(p^0 - i m_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(k^0 + i m_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \end{aligned} \quad (11)$$

şeklindedir.

$\mu = 1$

$$\begin{aligned} \bar{e}(p') \gamma^1 (1 - \gamma_5) \nu(k) = & \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} \quad -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_1 \\ -\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ = & \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} \quad -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[-e^{i\chi_1/2} + \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i\chi_1/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(k') \gamma_1 (1 - \gamma_5) e(p) = & -\frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \quad \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

$$= -\frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{i\chi_2/2} - e^{-i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i\chi_2/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i\chi_2/2} \right] \quad (15)$$

(13) ve (15) terimleri çarpıldığında;

$$\begin{aligned} &= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\ &\quad + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ &\quad - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ &\quad + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \quad (16) \\ &\quad + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ &\quad + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ &\quad \left. + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left\{ e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right. \\ &\quad e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\ &\quad + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \\ &\quad \left. + e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{2|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} \right] \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[2 \frac{|\mathbf{p}|(p^0 - im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + 2 \frac{p^0 k^0 + m_e m_\nu}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{|\mathbf{p}|(k^0 + im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - 2 \frac{[|\mathbf{p}|^2 - i(m_\nu p^0 - m_e k^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

sonucu bulunur ve $\mu = 1$ bileşeni,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{yükü}}^{\mu=1} = & [|\mathbf{p}|^2 - i(m_\nu p^0 - m_e k^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - (p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\ & + |\mathbf{p}|(k^0 + i m_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(p^0 - i m_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \end{aligned} \quad (19)$$

şeklindedir.

$\mu = 2$

$$\begin{aligned} \bar{e}(p') \gamma^2 (1 - \gamma_5) \nu(k) = & \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} \quad -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_2 \\ -\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ = & \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} \quad -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -i \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

$$= i \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi_1/2} + \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(k') \gamma_2 (1 - \gamma_5) e(p) = & -\frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \quad \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -i \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

$$= -i \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{i\chi_2/2} + e^{-i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i\chi_2/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i\chi_2/2} \right]$$

(23)

(21) ve (23) terimleri çarpıldığında;

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
&\quad + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \quad (24) \\
&\quad - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad \left. + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left\{ e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right. \\
&\quad e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\
&\quad + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \\
&\quad \left. + e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[-\frac{2|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} \right] \right\} \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[2 \frac{|\mathbf{p}|(p^0 + im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + 2 \frac{(p^0 k^0 + m_e m_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{[|\mathbf{p}|^2 - i(m_e k^0 - m_\nu p^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - 2 \frac{|\mathbf{p}|(k^0 - im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (26)
\end{aligned}$$

sonucu bulunur ve $\mu = 2$ bileşeni,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{yükü}}^{\mu=2} = & -|\mathbf{p}|(p^0 + im_\nu)e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - (p^0k^0 + m_em_\nu)e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \\ & + [|\mathbf{p}|^2 - i(m_ek^0 - m_\nu p^0)]e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + |\mathbf{p}|(k^0 - im_e)e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \end{aligned} \quad (27)$$

şeklindedir.

$\mu=3$

$$\begin{aligned} \bar{e}(p')\gamma^3(1 - \gamma_5)\nu(k) = & \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} \quad -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_3 \\ -\boldsymbol{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ = & \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} \quad -\frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i\chi_1/2} + e^{-i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(k')\gamma_2(1 - \gamma_5)e(p) = & -\frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \quad \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\ & \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

$$= \frac{N_e N_\nu}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i\chi_2/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i\chi_2/2} \right]$$

(31)

(29) ve (31) terimleri çarpıldığında;

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
&\quad + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad + \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad \left. - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left\{ e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right. \\
&\quad + e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \\
&\quad + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\
&\quad \left. + e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[-\frac{2|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} \right] \right\} \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[-2 \frac{|\mathbf{p}|(k^0 - im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - 2 \frac{[|\mathbf{p}|^2 - i(m_e k^0 - m_\nu p^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{(p^0 k^0 + m_e m_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + 2 \frac{|\mathbf{p}|(p^0 + im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (34)
\end{aligned}$$

bulunur ve $\mu = 3$ bileşeni,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yükü}}^{\mu=3} &= -|\mathbf{p}|(k^0 - im_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + |\mathbf{p}|(p^0 + im_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
&\quad (p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - [|\mathbf{p}|^2 - i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \quad (35)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Sırasıyla (11), (19), (27) ve (35) ile bulunan bileşenler toplandığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yükü}} = & \frac{g_w^2}{8M_w^2} \times \\
& \left[(p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - (|\mathbf{p}|^2 - i(m_\nu p^0 - m_e k^0)) e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
& + |\mathbf{p}|(p^0 - im_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(k^0 + im_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& [|\mathbf{p}|^2 - i(m_\nu p^0 - m_e k^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - (p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& + |\mathbf{p}|(k^0 + im_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(p^0 - im_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& - |\mathbf{p}|(p^0 + im_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - (p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& + [|\mathbf{p}|^2 - i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + |\mathbf{p}|(k^0 - im_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& - |\mathbf{p}|(k^0 - im_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + |\mathbf{p}|(p^0 + im_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& \left. (p^0 k^0 + m_e m_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - [|\mathbf{p}|^2 - i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

bulunur. Üstel terimler bir araya getirildiğinde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yükü}} = & \frac{g_w^2}{8M_w^2} \left[-2|\mathbf{p}|(p^0 + k^0) (e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})}) \right. \\
& \left. - 2(|\mathbf{p}|^2 + p^0 k^0 + m_e m_\nu) (e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})}) \right]
\end{aligned} \tag{37}$$

elde edilir. Euler formülüne göre üstel terimler açıldığında,

$$\mathcal{M}_{\text{yükü}} = -i \frac{g_w^2}{2M_w^2} \left[|\mathbf{p}|(p^0 + k^0) \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + (|\mathbf{p}|^2 + p^0 k^0 + m_e m_\nu) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right] \tag{38}$$

sonucu bulunur. Denklem (2)'de verilen eşitliklerden yararlanarak Mandelstam parametreleri cinsinden yükü genlik ifadesi,

$$\mathcal{M}_{\text{yükü}} = -i \frac{g_w^2}{4M_w^2} \left[2|\mathbf{p}|\sqrt{s} \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) + ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \right] \tag{39}$$

şeklinde bulunur.

Yüksüz Akım İçin Genlik Hesaplamaları

Yüksüz akım için genlik,

$$\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} = \frac{g_z^2}{4M_z^2} \bar{\nu}(k') \gamma^\mu (c_V^\nu - c_A^\nu \gamma_5) \nu(k) \bar{e}(p') \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma_5) e(p) \quad (40)$$

$$\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} = -\frac{g_z^2}{16M_z^2} \bar{\nu}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu(k) \bar{e}(p') \gamma_\mu (a - \gamma_5) e(p) \quad (41)$$

ile verilir, burada $a \equiv 1 - 4 \sin^2 \theta_W$ kısaltması yapılmıştır. Burada μ üzerinden 0'dan 3'e toplam vardır:

$\mu = 0$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(k') \gamma^0 (1 - \gamma_5) \nu(k) &= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\chi_2/2} & e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\chi_2/2} & e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (43) \end{aligned}$$

$$= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i\chi_2/2} + e^{-i\chi_2/2} - \frac{i|\mathbf{p}|}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i\chi_2/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{i\chi_2/2} \right] \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}(p') \gamma_0 (a - \gamma_5) e(p) &= \frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\chi_1/2} & e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a1 & -1 \\ -1 & a1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (46)
\end{aligned}$$

$$= \frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left[ae^{i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i\chi_1/2} + \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (47)$$

(44) ve (47) terimleri çarpıldığında;

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[-\frac{ia|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + ae^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \right. \\
&\quad + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(k^0+m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \\
&\quad + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{a|\mathbf{p}|^4}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \\
&\quad + \frac{a|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \\
&\quad \left. - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \right] \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left\{ e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \left[-\frac{2|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} \right] \right. \\
&\quad e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \left[-\frac{ia|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} + \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} + \frac{a|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} + \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} \right] \\
&\quad e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \left[a + \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} - \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(k^0+m_\nu)^2} + \frac{a|\mathbf{p}|^4}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)^2} \right] \\
&\quad \left. e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \left[-\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} - \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} \right] \right\} \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[2 \frac{a|\mathbf{p}|(p^0 - im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - 2 \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{a[p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_\nu p^0 - m_e k^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - 2 \frac{|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (50)
\end{aligned}$$

sonucu bulunur ve $\mu = 0$ bileşeni,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}}^{\mu=0} &= a|\mathbf{p}|(p^0 - im_e)e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + a[p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_\nu p^0 - m_e k^0)]e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
&\quad - |\mathbf{p}|^2 e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu)e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \quad (51)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\mu = 1$

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}(k')\gamma^1(1 - \gamma_5)\nu(k) &= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_1 \\ -\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (53)
\end{aligned}$$

$$= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left[-e^{i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i\chi_2/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} e^{-i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{i\chi_2/2} \right] \quad (54)$$

$$\bar{e}(p')\gamma_1(a - \gamma_5)e(p) = -\frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_1 \\ -\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & a\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$= -\frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & 1 \\ -a & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$= -\frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i\chi_1/2} - e^{-i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{-i\chi_1/2} + \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (57)$$

(54) ve (57) terimleri çarpıldığında;

$$= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[-\frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} - \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0+m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \right] \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[-\frac{2a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} \right] \right. \\
&+ e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[-\frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} + \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\
&+ e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\
&\left. + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} - \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \right] \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[-2\frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - 2\frac{a|\mathbf{p}|(k^0 + im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right. \\
&\left. + 2\frac{[p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_\nu p^0 - m_e k^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + 2\frac{|\mathbf{p}|(p^0 - im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (60)
\end{aligned}$$

bulunur ve $\mu = 1$ bileşeni,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}}^{\mu=1} &= a|\mathbf{p}|^2 e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + a|\mathbf{p}|(k^0 + im_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
&- [p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_\nu p^0 - m_e k^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(p^0 - im_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \quad (61)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\mu = 2$

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}(k') \gamma^2 (1 - \gamma_5) \nu(k) &= \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \left(e^{-i\chi_2/2} \quad e^{i\chi_2/2} \right) \right) \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_2 \\ -\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (63)
\end{aligned}$$

$$= i \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i\chi_2/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0+m_\nu)^2} e^{i\chi_2/2} \right] \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}(p')\gamma_2(a-\gamma_5)e(p) &= -\frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_2 \\ -\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & a\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -a \\ -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \\ -a & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (66)
\end{aligned}$$

$$= i \frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left[\frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i\chi_1/2} + e^{-i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (67)$$

(64) ve (67) terimleri çarpıldığında;

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[\frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \right. \\
&\quad - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \\
&\quad + \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \\
&\quad \left. - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& - \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& \left[\frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \\
& = - \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[- \frac{2a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} \right] \right. \\
& \quad \left. + e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} \right] \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \right] \\
& = - \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[-2 \frac{a|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - 2 \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{[p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_e k^0 - m_\nu p^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} + 2 \frac{|\mathbf{p}|(p^0 + im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \\
& \tag{69}
\end{aligned}$$

bulunur ve $\mu = 2$ bileşeni,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}}^{\mu=2} & = a|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + a|\mathbf{p}|^2 e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& - [p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(p^0 + im_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& \tag{70}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\mu = 3$

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}(k') \gamma^3 (1 - \gamma_5) \nu(k) & = \frac{N_e^2 N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\
& \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_3 \\ -\boldsymbol{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
& \tag{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_2/2} \quad e^{-i\chi_2/2} \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_2/2} & e^{i\chi_2/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (72)
\end{aligned}$$

$$= i \frac{N_\nu^2}{\sqrt{2}} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i\chi_2/2} + e^{-i\chi_2/2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0+m_\nu)^2} e^{-i\chi_2/2} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i\chi_2/2} \right] \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}(p')\gamma_3(a-\gamma_5)e(p) &= -\frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_3 \\ -\boldsymbol{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & a\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left(e^{i\chi_1/2} \quad e^{-i\chi_1/2} - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} e^{-i\chi_1/2} & e^{i\chi_1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ -a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{i|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (75)
\end{aligned}$$

$$= \frac{N_e^2}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi_1/2} + \frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i\chi_1/2} - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i\chi_1/2} - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{i\chi_1/2} \right] \quad (76)$$

(73) ve (76) terimleri çarpıldığında;

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \right. \\
&\quad - \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \\
&\quad + \frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0+m_e} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \\
&\quad - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0+m_e)^2} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0+m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0+m_\nu} e^{i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} \\
&\quad \left. - \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0+m_e)(k^0+m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1+\chi_2}{2})} + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0+m_e)^2(k^0+m_\nu)^2} e^{i(\frac{\chi_1-\chi_2}{2})} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ia|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& - \left[\frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left\{ e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[-\frac{2a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} \right] \right. \\
& + e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{i|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} + \frac{|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} + \frac{|\mathbf{p}|}{k^0 + m_\nu} - \frac{i|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)} \right] \\
& + e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \left[1 - \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)^2} + \frac{i|\mathbf{p}|^2}{(k^0 + m_\nu)^2} + \frac{|\mathbf{p}|^4}{(p^0 + m_e)^2(k^0 + m_\nu)^2} \right] \\
& \left. + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \left[\frac{ia|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{a|\mathbf{p}|}{p^0 + m_e} - \frac{a|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} - \frac{ia|\mathbf{p}|^3}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)^2} \right] \right\} \quad (78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{N_e^2 N_\nu^2}{2} \left[2 \frac{|\mathbf{p}|(p^0 + im_e)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} - 2 \frac{a|\mathbf{p}|^2}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
& \left. + 2 \frac{[p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_e k^0 - m_\nu p^0)]}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - 2 \frac{a|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu)}{(p^0 + m_e)(k^0 + m_\nu)} e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \right] \quad (79)
\end{aligned}$$

bulunur ve $\mu = 3$ bileşeni,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}}^{\mu=3} & = |\mathbf{p}|(p^0 + im_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + [p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& - a|\mathbf{p}|^2 e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - a|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \quad (80)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Sırasıyla (51), (61), (70) ve (80) ile bulunan bileşenler toplandığında;

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} & = -\frac{g_z^2}{16M_z^2} \times \\
& \left[a|\mathbf{p}|(p^0 - im_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + a[p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_\nu p^0 - m_e k^0)] e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right. \\
& - |\mathbf{p}|^2 e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& + a|\mathbf{p}|(k^0 + im_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + a|\mathbf{p}|^2 e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& - [p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_\nu p^0 - m_e k^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}|(p^0 - im_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& \left. a|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + a|\mathbf{p}|^2 e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - |\mathbf{p}(p^0 + im_e) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} \\
& |\mathbf{p}(p^0 + im_e) e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} + [p^0 k^0 + m_e m_\nu + i(m_e k^0 - m_\nu p^0)] e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} \\
& - a|\mathbf{p}|^2 e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} - a|\mathbf{p}(k^0 - im_\nu) e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})}]
\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} &= -\frac{g_z^2}{16M_z^2} \times \\
& e^{i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} [a|\mathbf{p}|(p^0 - im_e) + 2a|\mathbf{p}|k^0 + |\mathbf{p}|(p^0 + im_e)] \\
& + e^{-i(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2})} [-|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu) - 2|\mathbf{p}|p^0 - a|\mathbf{p}|(k^0 - im_\nu)] \\
& + e^{i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} [2a|\mathbf{p}|^2 + (1+a)[p^0 k^0 + m_e m_\nu] + i(1-a)(m_e k^0 - m_\nu p^0)] \\
& - e^{-i(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2})} [|\mathbf{p}|^2 + a|\mathbf{p}|^2 + 2[p^0 k^0 + m_e m_\nu]]
\end{aligned} \tag{82}$$

bulunur. Denklem (2)'de verilen eşitliklerden yararlanarak Mandelstam parametreleri cinsinden yüksüz genlik ifadesi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{yüksüz}} &= -\frac{g_z^2}{8M_z^2} \times \\
& - \sin^2 \theta_W ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + \frac{(m_e - m_\nu)}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + |\mathbf{p}| [m_\nu(1 - 2\sin^2 \theta_W) - 2m_e \sin^2 \theta_W] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& - 2|\mathbf{p}| \sin^2 \theta_W \sqrt{s} \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& + i [\cos^2 \theta_W ((m_e + m_\nu)^2 - (u + t)) - 4\sin^2 \theta_W |\mathbf{p}|^2] \sin\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + 2i|\mathbf{p}| \left[\sqrt{s}(1 - 2\sin^2 \theta_W) + \frac{m_e^2 - m_\nu^2}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W \right] \sin\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \\
& - i \frac{(m_e - m_\nu)}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta_W (u + t - (m_e - m_\nu)^2) \cos\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right) \\
& + i|\mathbf{p}| [(1 - 2\sin^2 \theta_W)m_\nu + 2\sin^2 \theta_W m_e] \cos\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{83}$$

şeklindedir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cem Murat AYBER

Doğum yeri : Çankaya

Doğum Tarihi : 01. 01.1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Büyük Kolej (2010)

Lisans : Hacettepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü (2015)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı (Eylül 2015 - Haziran 2018)

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Araştırma Görevlisi- Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümü

Genel Fizik Anabilim Dalı (Ekim 2017- Devam ediyor)