

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**KUANTUM DOLANIKLIĞIN ALGILANMASI: POZİTİF GÖNDERİMLER VE
DOLANIKLIK TANIKLARI**

Durgun DURAN

FİZİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2018**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Durgun DURAN tarafından hazırlanan “**Kuantum Dolanıklığın Algılanması: Pozitif Gönderimler ve Dolanıklık Tanıkları**” adlı tez çalışması 27/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafındanoy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri:

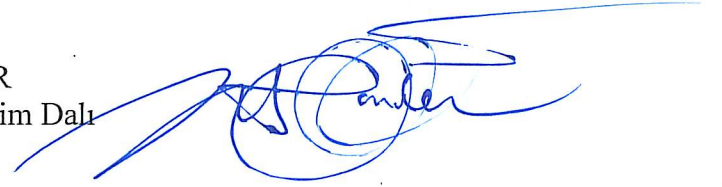
Başkan: Prof. Dr. Sadi TURGUT
ODTÜ Fizik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği
Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Bekir Sıtkı KANDEMİR
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Metin ÖNDER
Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği
Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

27/12/2018



Durgun DURAN

ÖZET

Doktora Tezi

KUANTUM DOLANIKLIĞIN ALGILANMASI: POZİTİF GÖNDERİMLER VE DOLANIKLIK TANIKLARI

Durgun DURAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Kuantum bilişim teorisinin en önemli problemlerinden birisi bileşik kuantum sistemlerin saf-olmayan durumlarının karakterizasyonudur. Özellikle, belirli bir kuantum durumunun kuantum korelasyon içerip içermediği, yani ayrılabilir mi yoksa dolanık mı olduğunu test etmek birincil öneme sahiptir. Kuantum dolanıklığı karakterize etmek için en genel yaklaşımlar, pozitif gönderimler ve dolanıklık tanıkları kavramlarıdır. Bu tezde genel olarak sonlu boyutlu matris cebirlerinde pozitif gönderimler ve dolanıklık tanıkları aracılığıyla dolanıklığın algılanması incelenecektir. Ayrıca sürekli kuantum kanallar kullanılarak kuantum süreçlerin işlenmesi ve dolanıklığın algılanmasının her ikisinin de gerçekleştirilebilmesinin mümkün olduğu gösterilecektir. Son olarak, dolanıklığın nicelendirilmesi kapsamında, gürültülü bir çevrede genlik-sönümleyici ve faz-sönümleyici gibi kuantum kanalların iki kullanımı altında kuantum korelasyonların davranışı incelenecek ve kuantum hafızalı kanallar aracılığıyla korelasyonların azalmasını kontrol etmek için yeni bir yöntem verilecektir.

Aralık 2018, 123 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dolanıklık, ayrılabilirlik, pozitif gönderimler, dolanıklığın algılanması, kuantum kanallar.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DETECTION OF QUANTUM ENTANGLEMENT: POSITIVE MAPS AND ENTANGLEMENT WITNESSES

Durgun DURAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

One of the most important problems of quantum information theory is the characterization of mixed states of composed quantum systems. In particular, it is of primary importance to test whether a given quantum state exhibits quantum correlation, i.e. whether it is separable or entangled. The most general approaches to characterize quantum entanglement are notions of positive maps and entanglement witnesses. In this thesis, the detection of entanglement via positive maps and entanglement witnesses will generally be investigated in finite-dimensional matrix algebras. It is shown that it is possible to accomplish both the state processing and entanglement detection using continuous quantum channels. Finally, in the quantification of entanglement, the behavior of quantum correlations under two-uses of quantum channels such as amplitude-damping and phase-damping in a noisy environment will be examined and a new method will be given to control the reduction of correlations via quantum memory channels.

December 2018, 123 pages

Key Words: Entanglement, separability, positive maps, entanglement detection, quantum channels.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeye katkıda bulunan, bilimsel yaklaşımı kendisinden öğrenmeye çalıştığım, her aşamada pratik çözümleriyle bir arkadaş olarak destek olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi), çalışmalarım süresince maddi manevi desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Erdem AKYÜZ, Adem TÜRKMEN ve Solmaz YILMAZ'a, yine çalışmalarımı sağlıklı ve verimli bir şekilde yürütmem konusunda birçok fedakârlık göstererek, desteğini her zaman hissetmemi sağlayan sevgili eşim Nur ELMAS DURAN'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Bu tez çalışması "TÜBİTAK-BİDEB 2211/C Yurt İçi Öncelikli Alanlar Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Durgun DURAN
Ankara, Aralık 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. POZİTİF GÖNDERİMLER.....	7
2.1 Banach ve Hilbert Uzayları.....	7
2.2 Sonlu Boyutlu Hilbert Uzayında İşlemciler.....	9
2.3 Pozitif ve Tamamen Pozitif Gönderimler.....	10
2.3.1 Hafızalı kuantum kanallar.....	23
2.3.2 Ayrıştırılabilir gönderimler.....	24
2.3.3 Ekstremal gönderimler.....	27
3. DOLANIKLIĞIN ALGILANMASI.....	29
3.1 Schmidt Ayrışımı.....	29
3.2 Peres-Horodecki Kriteri.....	31
3.3 İndirgeme Kriteri.....	34
3.4 Değer Uzayı Kriteri.....	35
3.5 Genişletilemez Çarpım Bazları.....	36
3.6 Diğer Ayrılabilirlik Kriterleri.....	38
4. DOLANIKLIK TANIKLARI.....	39
4.1 Hahn-Banach Teoremi ve Dolanıklık Tanıkları.....	39
4.2 Ayrıştırılabilir Dolanıklık Tanıkları.....	41
4.3 Optimal Dolanıklık Tanıkları.....	43
4.4 Ekstremal Dolanıklık Tanıkları.....	49
4.5 Ekspoze Dolanıklık Tanıkları.....	50
5. DOLANIKLIĞIN SÜREKLİ KUANTUM KANALLARLA ALGILANMASI.....	53

5.1 4-Parametrel Pozitif Gönderimler Ailesi.....	53
5.2 2-parametrel Dolanıklık Tanıkları ve Kuantum Kanal Aileleri	56
5.3 Doğrudan Dolanıklık Algılama Metotları	59
5.4 Kuantum Kanalların Analizi	60
5.5 PPT ve Blok-Fazsızlık Kanal Aileleri.....	61
5.6 Dolanıklık Tanıklarının Analizi.....	62
6. KUANTUM KORELASYONLARIN KAYBININ KONTROLÜ.....	63
6.1 Korelasyon Ölçüleri.....	65
6.2 İki-kullanım Etkileri.....	67
6.2.1 QMI ve EoF'nin başlangıç değerleri.....	67
6.2.2 Hafızasız etkiler	68
6.2.3 Farklı kanalların birleşik etkileri.....	70
6.3 İki-kullanım Etkilerinin Konveks Bileşimleri	72
6.3.1 $\Lambda^A \otimes \Lambda^A$ ve $\Lambda^A \otimes \Lambda^P$ kanallarının karışımı	72
6.3.2 $\Lambda^P \otimes \Lambda^P$ ve $\Lambda^A \otimes \Lambda^P$ kanallarının karışımı	73
6.4 Kuantum Korelasyonların Azalmasının Yumuşatılması	74
7. SONUÇ.....	76
KAYNAKLAR	80
EKLER.....	87
EK 1 Kuantum Kanal Örnekleri Ve Bölüm 2'deki Bazı Teoremlerin İspatları.....	88
EK 2 Diğer Ayrılabilirlik Kriterleri	92
EK 3 Diğer Dolanıklık Tanıkları	107
EK 4 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ Uzayında Köşegen-Tipi Dolanıklık Tanıkları	115
EK 5 $\mathbb{C}^{2N} \otimes \mathbb{C}^{2N}$ 'de Optimal Dolanıklık Tanıkları Sınıfı.....	118
ÖZGEÇMİŞ.....	122

SİMGELER DİZİNİ

$ \psi\rangle$	Durum vektörü, ket
$\langle\psi $	$ \psi\rangle$ 'ye dual vektör, bra
$\langle\psi \phi\rangle$	$ \psi\rangle$ ve $ \phi\rangle$ arasındaki iççarpım
$ \psi\rangle \otimes \phi\rangle$	$ \psi\rangle$ ve $ \phi\rangle$ 'nin tensör çarpımı, $ \psi\rangle \otimes \phi\rangle = \psi\phi\rangle$
$ \psi\rangle \oplus \phi\rangle$	$ \psi\rangle$ ve $ \phi\rangle$ 'nin direkt toplamı
A^*	A matrisinin kompleks eşleniği
A^T	Verilen bir baza göre A matrisinin transpozu
A^\dagger	A matrisinin Hermitsel eşleniği, $A^\dagger = (A^T)^*$
$\langle\psi A \phi\rangle$	$ \psi\rangle$ ile $A \phi\rangle$ veya $ \phi\rangle$ ile $A^\dagger \psi\rangle$ arasındaki iç çarpım
\mathcal{H}	Hilbert uzayı
\mathbb{R}	Gerçel sayılar kümesi (alanı)
\mathbb{C}^d	d –boyutlu kompleks vektör uzayı
$\ A\ $	A matrisinin işlemci normu; $\ A\ = \max_{ \psi\rangle: \ \psi\rangle=1} \ A \psi\rangle\ $
$\ A\ _1$	A matrisinin iz normu; $\ A\ _1 = \text{Tr}\sqrt{A^\dagger A}$
$\ A\ _{HS}$	A matrisinin Hilbert-Schmidt normu; $\ A\ _{HS} = \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A)}$
id	Özdeşlik gönderimi
\mathbb{I}_d	$d \times d$ 'li birim işlemci (matris)
U	Üniter işlemci
W	Çizgisel dolanıklık tanığı (<i>entanglement witness</i>)
\mathcal{F}	Çizgisel-olmayan dolanıklık tanığı (<i>nonlinear entanglement witness</i>)
T	Trampa işlemcisi (<i>flip or swap operator</i>)
ρ	Yoğunluk işlemcisi
$\sigma_i; i = 0,1,2,3$	Pauli matrisleri
Λ, Φ	Pozitif gönderimler

Λ^D	Λ gönderiminin duali
C_Λ	Λ gönderiminin Choi matrisi
Γ	Sağdaki sisteme göre parçalı transpoz işlemi
Tr	İz alma işlemi
\mathbb{T}_d	İz gönderimi (d-boyutta)
Tr_A	A parçasına (bileşenine, altsistemine) göre parçalı iz alma işlemi
Ad	Eşlenik gönderim (<i>adjoint map</i>)
\mathbb{M}	En dolanık duruma karşılık gelen yoğunluk işlemcisi
M	Boylandırılmış en dolanık duruma karşılık gelen yoğunluk işlemcisi
$<$	Çoğullama bağıntısı $x < y$: y vektörü, x 'i çoğullar.
$\Delta^2(X)_\rho$	X işlemcisinin ρ durumundaki varyansı
$F(\rho, X)$	Kuantum Fisher bilişimi
$r = SR(\psi\rangle)$	$ \psi\rangle$ durumunun Schmidt rankı
$SN(\rho)$	ρ durumunun Schmidt sayısı
D_W	W tanığıyla algılanan dolanık durumlar kümesi
\mathbb{W}_k	\mathcal{H} uzayındaki k-blok-pozitif işlemciler kümesi
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayındaki çizgisel işlemciler uzayı
$\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayındaki pozitif çizgisel işlemciler uzayı
$\mathcal{L}_{SEP}(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayındaki ayrılabilir durumlar kümesi
$\mathcal{L}_{PPT}(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayındaki PPT durumlar kümesi
$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayındaki yoğunluk işlemcileri kümesi
$B(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayında tanımlı sınırlı çizgisel işlemciler kümesi
$B^+(\mathcal{H})$	\mathcal{H} uzayında tanımlı sınırlı çizgisel pozitif işlemciler kümesi
$M_d(\mathbb{C})$	Hermitse $d \times d$ 'li matrisler kümesi
$M_d^+(\mathbb{C})$	Kompleks elemanlı pozitif $d \times d$ 'li matrisler kümesi

Kısaltmalar

CHSH	Clauser, Horn, Shimony, Holt
CCNR	Hesaplanabilir Çapraz-Norm (<i>Computable Cross-Norm</i>)
CP	Tamamen Pozitif (<i>Completely Positive</i>)
CPU	Tamamen Pozitif ve Ünitel
HS	Hilbert-Schmidt
LOO	Yerel Dik Gözlenebilir (<i>local orthogonal observable</i>)
LUR	Yerel Belirsizlik Bağıntısı (<i>local uncertainty relation</i>)
MUB	Karşılıklı Yansız Bazlar (<i>mutually unbiased basis</i>)
NPT	Negatif Parçalı Transpoz (<i>negative partial transposition</i>)
POVM	Pozitif İşlemci Değerli Ölçü (<i>positive operator valued measure</i>)
PPT	Pozitif Parçalı Transpoz (<i>positive partial transposition</i>)
PPTES	Parçalı Transpozu Pozitif Dolanık Durum (<i>positive partial transposition entangled state</i>)
SPA	Yapısal Fiziksel Yaklaşıklık (<i>structural physical approximation</i>)
UPB	Genişletilemez Çarpım Bazları (<i>unextendable product basis</i>)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Pozitif gönderimler ailesinin gösterimi.....	28
Şekil 4.1 Hahn-Banach teoreminin şematik gösterimi	39
Şekil 4.2 Dolanıklık tanıkları ve durum uzaylarının şematik gösterimi.....	44
Şekil 5.1 $n = 2$ için dolanıklık tanıkları ve ünital kuantum kanallar ile ilişkili pozitif gönderimlerin parametre bölgeleri.....	58
Şekil 5.2 Doğrudan dolanıklık algılama metotları.....	59
Şekil 6.1 \mathbf{p} ve \mathbf{q} 'ya göre σ_{AB}^{AP} çıkışı için: a. QMI, b. EoF grafiği.....	71
Şekil 6.2 (6.27) denkleminle verilen çıkış durumu için: a. QMI, b. EoF grafikleri.....	73
Şekil 6.3 (6.29) denkleminle verilen çıkış durumu için: (a) QMI, (b) EoF grafikleri....	74

1. GİRİŞ

Dolanıklık bileşik sistemlerin bütünlükçü bir özelliğidir ve bir alt sistemin “eş zamanlı” olarak iki veya daha fazla farklı durumda sıfırdan farklı olasılıkla bulunabilme özelliğini gösterir. Bu özellik, altsistemlerin durumlarının bir çarpımı olarak yazılamayan bileşik sistemlerin global durumlarının varlığını gerektirir. Bu olgu, kuantum dolanıklık olarak bilinir ve kuantum bilişim süreçlerinde önemli bir rol oynar. Dolanık durumlar, klasik kaynaklar aracılığıyla gerçekleştirilemeyen kuantum uzaktarım (*quantum teleportation*), yoğun kodlama (*dense coding*), kuantum hata düzeltme (*quantum error correction*), kuantum kriptografi şemaları (*quantum cryptography schemes*), kuantum anahtar dağıtımı (*quantum key distribution*), dolanıklık trampası (*entanglement swapping*) ve uzaktan durum hazırlama (*remote state preparation*) gibi uygulamaların gerçekleştirilmesinde kullanılabilen fiziksel bir kuantum özkaynaktır (Nielsen ve Chuang 2010). Son yıllarda kuantum dolanıklığın özelliklerini anlamak ve karakterize etmek için önemli çalışmalar yapılmış olmasına rağmen, dolanık durumların yapısı henüz yeterince anlaşılmamıştır.

Kuantum mekaniğinde bir kuantum sistemin durumları; birim izli, Hermitsel ve pozitif ρ yoğunluk işlemcileriyle (yoğunluk matrisleri) betimlenirler. Bu durumlar, saf (*pure*) ve saf-olmayan (*mixed*) durumlar olarak iki sınıfta incelenebilir. Herhangi bir $|\psi_i\rangle$ durum vektörü veya bunların $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$ gibi bir koherent üst üste gelimiyle (*superposition*) betimlenebilen sistemlere saf durumlar denir. Durum vektörünü, istenilen herhangi bir gözlenebilirin öz durumlarının serisine açarak, bu gözlenebilirle ilgili olasılık dağılımları da önsel olarak bulunabilir. Saf bir $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ durumunun karesi kendisine eşittir ($\rho^2 = \rho$). Bu durumun özdeğerlerinden sadece birisi 1, diğerleri sıfırdır ve bir izdüşüm işlemcisidir. Kuantum durumları, bir durum vektörüyle betimlenemeyen fakat sistemin hangi durumda hangi olasılıkla bulunduğu bilgisini veren durumlara saf-olmayan durumlar denir ve bu durumlar, durum vektörlerinin koherent bir üst üste gelimiyle betimlenemezler.

Fiziksel olarak birbirlerinden ayırt edilebilir ve ayrılabilir altsistemlerden (bileşenlerden) oluşan sistemlere bileşik sistemler denir. Bunlar; altsistemlerin sayısına

göre iki-parçalı (*bipartite*), üç-parçalı (*tripartite*) ya da çok-parçalı (*multipartite*) sistemler olarak nitelenirler. Hilbert uzaylarının boyutu sırasıyla $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ olan n -parçalı bir bileşik sistemin \mathcal{H} Hilbert uzayı, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ tensör çarpımıyla belirlenir. \mathcal{H}_i 'lerin tümü sonlu ve d_i boyutlu ise \mathcal{H} de sonlu, $d = d_1 d_2 \dots d_n$ boyutlu ve $\mathcal{H}_i \cong \mathbb{C}^{d_i}$ yazılabilir. İki veya daha fazla farklı sistemden oluşan bir bileşik sistemin sahip olduğu kuantum durumlarında, altsistemlerin durumları arasında korelasyon varsa iki sistemin dolanık olduğu söylenebilir.

Dolanıklığın daha iyi anlaşılabilmesi için Alice ve Bob iki bileşenli bir sistemin Bell durumunu

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (1.1)$$

paylaşımlar. İlk kübit Alice'e ikinci kübit ise Bob'a aittir. Burada $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları sırasıyla $+1$ ve -1 özdeğerli z -ekseni boyunca spin öz durumlarıdır ve

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde matris formunda ifade edilebilirler. Alice kendi kübiti üzerinde ölçüm yapmazsa Bob'un kübitinin $1/2$ olasılıkla $|0\rangle$ durumunda ya da aynı olasılıkla $|1\rangle$ durumunda olduğunu tahmin edebilir. Fakat kübiti üzerinde z -ekseni boyunca bir ölçüm yaparsa, elde ettiği sonuca göre Bob'un kübitinin hangi durumda olduğunu kesin olarak söyleyebilir. Örneğin, ölçümden sonra Alice $+1$ sonucunu okursa, Bob'un kübitinin $|1\rangle$ durumunda olduğunu söyleyebilir. Öte yandan Alice ölçüm sonucunu -1 bulsaydı Bob'un durumu $|0\rangle$ olurdu.

Bir başka örnek olarak

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \quad (1.2)$$

durumu ele alınabilir. Bu durumda Alice, kübiti üzerinde herhangi bir ölçüm yapmadan Bob'un kübitinin $|0\rangle$ durumunda olduğunu söyleyebilir. Yukarıdaki ilk durumda Bob'un kübitinin durumu Alice'in ölçümüyle değişirken, ikincisinde ise değişmez. Bu, denklem (1.1)'deki gibi dolanık durumların denklem (1.2)'de verilen ayrılabilir durumlarla aynı

şekilde korele olmadığını ve bu korelasyonların klasik karşılıklarının olmadığı fikrini verir.

Kuantum bilişim ve kuantum bilgisayırda, kuantum durumların kontrollü olarak gelişimi ve bu durumların içerdikleri dolanıklığın algılanması temel iki yükümlülüktür. Özellikle, belirli bir kuantum durumunun kuantum korelasyon içerip içermediğı, yani ayrılabilir mi yoksa dolanık mı olduğunu test etmek birincil öneme sahiptir. Düşük boyutlu sistemlerde (2×2 veya 2×3), ayrılabilirlik için etkin metotlar (Peres 1996, Horodecki vd. 1996) olmasına rağmen daha yüksek boyutlu ya da çok-parçalı sistemler için evrensel bir ayrılabilirlik koşulu yoktur.

Tüm kuramsal ve pratik amaçlar için bir sistemin zamanla gelişimi, verilen bir kuantum durumu bir başka kuantum duruma dönüştüren kuantum kanallar aracılığıyla gerçekleştirilir (Stinespring 1955, Choi 1975, Kraus 1983). Dolanıklığın algılanmasında ise etkin ve yoğunlukla kullanılan metotlar pozitif gönderimler ve dolanıklık tanıklarıdır. Pozitif gönderimler, pozitif işlemcileri yine pozitif işlemcilere dönüştürerek işlemcilere çizgisel etki ederler. Dolanıklık tanıkları ise en az bir negatif özdeğeri olan ve tüm ayrılabilir durumlar için beklenen değeri pozitif olan Hermitsel gözlenebilirlerdir (Terhal 2000).

Dolanıklık tanıkları ölçülebilir nicelikler olmalarına rağmen bunların temelindeki pozitif gönderimler ölçülebilir fiziksel gelişimler değildirler. Bundan dolayı laboratuvarında doğrudan uygulanabilir değildirler. Verilen bir pozitif gönderim, bileşik sistemin parçalarından birisine etki ettiğinde sistemin durumunun pozitifliği korunurken, tensörel genişlemeler altında pozitiflik korunan bir özellik olmadığından sistemin durumunu betimleyen yoğunluk işlemcisi pozitif kalmayabilir. Fakat tüm dolanık durumların pozitifliğini korumadıklarından dolayı dolanıklık tanıkları olarak kullanılabilirler. Transpoz gönderimi, düşük boyutlarda böyle bir tanıktır. Diğer taraftan, iki-parçalı bir sistemin varlığında, altsistemlerden birisine göre parçalı transpoz alındığında pozitif (PPT) kalan bileşik sistemin dolanık durumları da vardır. Bu durumlar, PPT dolanık durumlar (PPTES) olarak adlandırılırlar.

PPTES'lerin dolanıklık içeriği herhangi bir damıtma ve saflaştırma protokolüyle arttırılamaz. Bundan dolayı bu durumlara bağlı dolanık durumlar (*bound entangled states*) da denir. Ayrıca bu durumlar ayrıştırılabilir pozitif gönderimler sınıfıyla da yakından ilişkilidirler (Woronowicz 1976). Bu sınıf ilk kez Størmer ve Choi tarafından, pozitif gönderimlerin özel bir alt sınıfını izole etmek için incelenmiş (Størmer 1963, Choi 1972, 1975) ve Woronowicz tarafından düşük boyutlarda tüm pozitif gönderimleri karakterize etmek için kullanılmıştır (Woronowicz 1976). Bu, böyle durumlarda transpozisyonu kapsamlı bir tanık haline getirir.

Kuantum bilişim kuramı, işlemcilerin C^* -cebrindeki pozitif çizgisel işlemcilerin karakterizasyonu ile soyut bir şekilde açıklanabilir. Meydana gelen tüm süreçler, Stinespring tarafından karakterize edilen ve 1970'lerde kuantum mekaniğindeki önemi açıklanan tamamen pozitif (CP) gönderimlerle tanımlanmalıdır (Stinespring 1955). CP gönderimler, pozitif gönderimlerden daha etkilidirler: CP gönderimler, bileşik bir sistemin durumları üzerine etki ettiklerinde sistem durumlarının pozitifliğini korurlar.

Daha yüksek boyutlu pozitif gönderimlerin bir alt sınıfı da ayrıştırılabilir gönderimlerdir (Woronowicz 1976, Skowronek vd. 2009). Bu gönderimler, bir CP gönderim ve transpoz ile bileşke başka bir CP gönderiminin toplamı olarak yazılabilirler (bkz. Bölüm 2.3) (Størmer 1963). Ayrıca, ayrıştırılabilir gönderimler PPTES'leri algılayamazlar. Bundan dolayı PPTES'lerin dolanıklığını algılamaları için ayrıştırılamaz dolanıklık tanıkları kurulabilir ve bu tanıklar, dolanıklığın algılanmasında kilit rol oynarlar (Horodecki vd. 2009, Chruściński vd. 2009a, Chruściński ve Kossakowski 2011).

Bu tezde sonlu boyutlu matris cebirlerinde pozitif gönderimler ve dolanıklık tanıklarının önemli sınıflarının karakterizasyonu verilerek bu iki araç aracılığıyla dolanıklığın algılanması kuramsal olarak incelenecektir. Eşdeğer olarak, çizgisel gönderimler ve işlemciler arasındaki bir karşılıklı ilişki olan Choi-Jamiołkowski izomorfizmi (Choi 1972, Jamiołkowski 1972) aracılığıyla dolanıklık tanıklarının karşılık gelen sınıfları karakterize edilecektir. Ayrıca sürekli kuantum kanallar aracılığıyla dolanıklığın etkin bir şekilde algılanabileceği gösterilecektir. Son olarak bilişim süreçlerinde çevrenin,

korelasyonları yıkıcı etkisini kontrol etmek için kuantum hafızalı kanallar kullanılarak sistemin korelasyon içeriği incelenecektir.

Bu tez aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. İkinci bölümde ilerde kullanılacak bazı matematiksel kavramlar hakkında kısa bir bilgi verilecektir. Banach uzayı, Hilbert uzayı, işlemci normu, sonlu boyutlardaki işlemciler ve matris cebri temel düzeyde incelenecektir. Daha sonra fiziksel bir dönüşümü tanımlayan pozitif gönderimler için gerekli olan koşullar araştırılacaktır. Pozitif ve CP gönderimlerin tanımları verilerek Choi-Kraus temsili (Choi 1975, Kraus 1983) yardımıyla CP gönderimlerin yapısı çalışılacaktır. Choi matrisi ve karşılık gelen gönderimin pozitif ya da CP olup olmadığına karar vermek için bu matrisin blok-pozitifliği ve pozitifliği incelenecektir. Ayrıca kuantum durumların tüm fiziksel gelişimlerini tarif eden kuantum kanallar kavramı açıklanacaktır. Pozitif gönderimlerin fiziksel dönüşümleri betimlemek için uygun adaylar olmamalarına rağmen dolanıklığı algılamak için matematiksel araçlar olarak kullanılacakları gösterilecektir. Özel olarak, ayrıştırılabilir gönderimleri tanımlamak için kullanılan transpoz gönderimi ve genel bir pozitif gönderimin, iz gönderimi ve uygun bir CP gönderim cinsinden nasıl yazılabileceği konusunda örnekler verilecektir.

Üçüncü bölümde genel olarak iki-parçalı saf ve saf-olmayan durumların ayrılabilirliğini karakterize etmek için kullanılan bazı dolanıklık algılama yöntemleri verilecektir. Özellikle, iki-parçalı saf durumların dolanıklığını tespit etmede bilinen en iyi yöntem olan Schmidt ayrışımı ve saf-olmayan durumların ayrılabilirliği için etkin bir metot olan Peres-Horodecki kriteri detaylıca incelenecektir (Peres 1996, Horodecki vd. 1996). Bununla birlikte yine saf-olmayan durumlar için indirgeme kriteri, değer uzayı kriteri, çoğullama kriteri, kuantum Fisher bilişimi kriteri gibi ayrılabilirlik kriterleri de gösterilecektir.

Dolanıklık tanıklarının temel tanımları ve özellikleri Bölüm 4'te verilecektir. Ayrıştırılabilir ve ayrıştırılmaz dolanıklık tanıkları kavramlarının yanı sıra k-Schmidt tanıkları, atomik tanıklar ve ayrıştırılmaz dolanıklık tanıklarının bazı genel temsilleri tanıtılacaktır. Dolanıklık teorisi için önemli olan optimal, ekstremal ve ekspoze

dolanıklık tanıkları verilecektir. Optimallik kavramı doğrudan fiziksel kökenlidir: Optimal bir tanık en iyi algılayıcıdır yani bir kuantum durumun dolanıklığını, optimal bir tanıktan daha iyi algılayan başka bir tanık yoktur. Ekstremallik ve ekspozelik kavramları ise ayrılabilir durumların konveks kümelerinin yapısıyla ilişkilidir. Ayrıca $d \times d$ 'li sistemlerin köşegen-tipi dolanıklık tanıkları ile ayrıştırılmaz pozitif gönderimler veya buna eşdeğer olarak dolanıklık tanıklarının önemli bir kaç sınıfı analiz edilecektir. Bunlar genel olarak; $M_4(\mathbb{C})$ 'deki Breuer-Hall gönderimi (Breuer 2006, Hall 2006), Robertson gönderimi (Robertson 1983) ve $M_{2k}(\mathbb{C})$ 'de bu gönderimin genellemeleridir. Bu örnekler optimallik ve ekspozelik özelliklerine açıklık getirmeleri yönünden önemlidirler ve Robertson gönderimleri dolanık durumları algılamak için en güçlü kuramsal araçlardır. Bir k -Schmidt tanığının nasıl kurulacağı ve bu tanığın spektral ayrışımı incelenecektir. Bu inşa, şu ana kadar bilinen en genel dolanıklık tanığı kurma inşasıdır. Son olarak, karşılıklı yansız bazlar kavramı tanıtılarak dolanıklık tanıklarıyla ilişkisi, Bell eşitsizlikleri aracılığıyla bir dolanıklık tanığının inşası ve çizgisel-olmayan dolanıklık tanıkları kavramı tanıtılacaktır.

Bölüm 5 ve 6'da yeni sonuçlara odaklanılacaktır. Sürekli kuantum kanallar aracılığıyla dolanıklığın algılanması ve bu metodun sağladığı avantajlar detaylı olarak Bölüm 5'te incelenecektir. Sürekli kuantum kanallar kullanılarak kuantum süreçlerin işlenmesi ve dolanıklığın algılanması görevlerinin her ikisinin de gerçekleştirilebilmesinin mümkün olduğu gösterilecektir. Son olarak, Bölüm 6'da ise dolanıklığın nicelendirilmesinde ve özellikle bilişim süreçlerinde etkin bir role sahip kuantum korelasyonların gürültülü bir çevrede azalmasını kontrol etmek ve bu korelasyonları bağıl olarak arttırmak için yeni bir yöntem verilecektir.

2. POZİTİF GÖNDERİMLER

Bu bölümde, kuantum durumların dolanıklığının algılanmasında etkin bir yöntem olan pozitif gönderimler ve tamamen pozitif (CP) gönderimler incelenecektir. Ayrıca kuantum durumların fiziksel gelişimlerini tarif eden kuantum kanal kavramı açıklanarak kanalların birbirlerine özdeş temsilleri gösterilecektir.

2.1 Banach ve Hilbert Uzayları

Bu bölümde ileriki bölümlerde sıklıkla kullanılan temel birkaç matematiksel araç hakkında bilgi verilecektir. Vektör uzaylarındaki işlemciler aracılığıyla Banach uzayı ve Hilbert uzayı gibi bazı kavramlar açıklanacaktır.

Tanım 2.1 (Banach Uzayı): Banach uzayı, bir normla ifade edilen ve bu norma göre tam olan gerçel (\mathbb{R}) ya da kompleks (\mathbb{C}) bir alanda tanımlı bir vektör uzayıdır. Biçimsel olarak Banach uzayının tanımını aşağıdaki gibi yapılabilir:

Normlu bir X uzayında, her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ Cauchy dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad x \in X \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir x elemanı varsa X , bir Banach uzayıdır (Megginson 1998). \mathbb{R} ve \mathbb{C} alanlarındaki her sonlu boyutlu normlu uzay, bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2 (Hilbert Uzayı): Bir \mathcal{H} Hilbert uzayı, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ iç çarpımıyla verilen bir norma göre bir Banach uzayıdır. Her $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ için $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$, $|\psi\rangle$ 'nin normunu gösterir.

Burada $\{ |\psi_i\rangle \}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ sayılabilen ortonormal bazları ve bunlara karşılık gelen $\sum_i P_i = \mathbb{I}$ tamlık bağıntısını sağlayan $P_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ izdüşüm işlemcileri kullanılacaktır.

Sonlu boyutlu bir \mathcal{H} Hilbert uzayı ($\dim(\mathcal{H}) = d$) üzerine etkiyen çizgisel işlemcilerin vektör uzayı $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ile gösterilecektir. \mathcal{H} uzayındaki belirli bir baza göre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kümesi, d –boyutlu $M_d(\mathbb{C})$ kompleks elemanlı Hermitsel $d \times d$ matrisler kümesiyle de gösterilebilir. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kümesi, $\langle A|B \rangle_{HS} = Tr(A^\dagger B)$ şeklinde tanımlanan Hilbert-Schmidt (HS) iç çarpımıyla ifade edilir. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^n$, \mathcal{H} uzayındaki ortonormal bir baz ise

$$\langle A|B \rangle_{HS} = \sum_{i=1}^n \langle A e_i | B e_i \rangle = Tr(A^\dagger B) \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\langle i|j \rangle$, \mathcal{H} uzayındaki iç çarpımı göstermektedir. Bu çarpım

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\langle A|A \rangle_{HS}} = \sqrt{Tr(A^\dagger A)} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanan HS normunu verir. $\|A\|_{HS}$ dışında $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ uzayı

$$\|A\| = \max_{|\psi\rangle, \|\psi\|=1} \|A|\psi\rangle\| \quad (2.4)$$

işlemci normuyla da ifade edilebilir ve $\|A\| = \|A^\dagger\|$, $\|A^\dagger A\| = \|A\|^2$ bağıntıları sağlanır. $\|A\| < \infty$ ise A işlemcisi sınırlıdır. \mathcal{H} uzayındaki tüm sınırlı çizgisel işlemciler kümesi $B(\mathcal{H})$ ile gösterilir. Fakat sonlu boyutlu durumlarda, $B(\mathcal{H}) = M_d(\mathbb{C})$ alınabilir. Ayrıca

$$\|A\|_1 = Tr|A| = Tr\sqrt{A^\dagger A} \quad (2.5)$$

iz normu da tanımlanabilir. $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_n^2$, $A^\dagger A$ işlemcisinin özdeğerleri ise bu üç norm

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}, \quad \|A\| = |\lambda_1|, \quad \|A\|_1 = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir.

İki sınırlı işlemcinin çizgisel bileşimi ve çarpımı da sınırlıdır. Ayrıca norma göre tanımlı tüm Cauchy-tipi diziler, bu uzayı tam yapan $B(\mathcal{H})$ 'deki bir elemana yakınsar. Bu, $B(\mathcal{H})$ 'nin bir C^* –cebri olduğunu söyler.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ uzayındaki pozitif işlemciler altuzayı, $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$, vektör uzayı yapısına sahip değildir fakat $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ uzayında konveks bir koni¹ tanımlar. Yoğunluk işlemcileriyle temsil edilen saf-olmayan durumlar (birim izli pozitif işlemciler) kümesi

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}) : \text{Tr}\rho = 1\} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. $A \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ işlemcisinin pozitifliği $\|A\|_1 = \text{Tr}A$ eşitliğinin sağlanmasına eşdeğerdir (Holevo 2012).

Tanım 2.3 (Pozitif İşlemci): \mathcal{H} üzerindeki sınırlı bir $A \in B(\mathcal{H})$ işlemcisi, her $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ için $\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$ eşitsizliğini sağlıyorsa pozitifdir. $B^+(\mathcal{H})$ kümesi, \mathcal{H} Hilbert uzayındaki tüm sınırlı çizgisel pozitif işlemcilerin kümesini gösterir ve $B^+(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$ içerme bağıntısı yazılabilir.

2.2 Sonlu Boyutlu Hilbert Uzayında İşlemciler

d –boyutlu her sonlu \mathcal{H} Hilbert uzayı, d –boyutlu kompleks bir \mathbb{C}^d vektör uzayına izomorftur. Çizgisel işlemciler, $d \times d$ boyutlu matrislerle temsil edilirler. Fiziksel gözlenebilirler, kompleks elemanlı Hermitsel $d \times d$ 'li matrislerdir ve cebirleri $M_d(\mathbb{C})$ ile gösterilir. Herhangi bir $A \in M_d(\mathbb{C})$ işlemcisinin elemanları, bir ortonormal baza göre $A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.1 (Spektral Ayrışım): \mathbb{C}^d uzayındaki herhangi bir normal A işlemcisi, $A^\dagger A = AA^\dagger$, pozitif işlemcilerin özvektörlerinin ortonormal bazına göre köşegenleştirilebilir:

$$A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|, \quad A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle. \quad (2.8)$$

Örnek 2.1 (İz gönderimi): $\mathcal{H} = M_d(\mathbb{C})$ olsun ve burada $\{F_i\}_{i=1}^{d^2}$, $\text{Tr}(F_k^\dagger F_l) = \delta_{kl}$ olacak şekilde HS iç çarpımına göre dik olan $d \times d$ 'li matrislerin kümesi olsun. Bu küme, ortonormal bir baz kümesi formundadır:

¹ \mathbb{R} alanında çizgisel bir X uzayının kapalı bir C altkümesi keyfi $x, y \in C$ ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $ax + by \in C$ konveks bileşimi bu altkümede ise C 'ye konveks bir koni denir.

$$X = \sum_{i=1}^{d^2} Tr(XF_i^\dagger)F_i, \quad \forall X \in M_d(\mathbb{C}). \quad (2.9)$$

$\mathbb{T}_d: M_d(\mathbb{C}) \mapsto M_d(\mathbb{C})$ iz gönderiminin etkisi

$$\mathbb{T}_d(X) := Tr(X) \mathbb{I}_d \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Ortonormal bir $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d$ bazı verildiğinde, HS iç çarpımına göre $M_d(\mathbb{C})$ 'de ortonormal bir baz olan $E_{ij} := |e_i\rangle\langle e_j|$ matrisleri kurulabilir. Bu ortonormal küme kullanılarak iz gönderimi

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_d(X) = Tr(X) \mathbb{I}_d &= \sum_{i=1}^d \langle e_i | X | e_i \rangle \sum_{j=1}^d |e_j\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j=1}^d |e_j\rangle\langle e_i | X | e_i \rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j=1}^d E_{ij}^\dagger X E_{ij} \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

2.3 Pozitif ve Tamamen Pozitif Gönderimler

Kuantum sistemlerin fiziksel dönüşümleri, durumlar uzayında ya da dual olarak gözlenebilirler cebirinde çizgisel gönderimlerle betimlenirler. Konveks durumlar uzayındaki çizgisel gönderimler, yoğunluk matrislerini başka yoğunluk matrislerine dönüştürürler. Bu nedenle pozitifliği ve izi korumalıdır. Fakat gerek koşul olsa da pozitiflik, çizgisel bir gönderimin fiziksel tutarlılığını garanti etmek için yeter koşul değildir.

Tanım 2.4: A ve B sistemleri tarafından paylaşılan herhangi bir ρ kuantum durumu, altsistemlerin çarpım vektörlerinin konveks bir bileşimi

$$\rho = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|; \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (2.12)$$

olarak yazılabiliyorsa ayrılabilir bir durumdur (Werner 1989). (2.12) tanımı çok-parçalı durumlara da genellenebilir. Bu şekilde yazılamayan durumlar ise dolanıktır. Fiziksel

olarak bu tanım ayrılabilir durumların yerel işlemler ve klasik iletişim kullanılarak üretilebileceğini söyler: $|a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|$ durumları p_i olasılıklarıyla yerel olarak hazırlanabilirler. Geometrik olarak ise bu tanım ayrılabilir durumlar kümesinin konveks bir küme olmasını gerektirir: İzleri bir olan, $Tr(\rho) = 1$, tüm pozitif matrisler kümesi konveks bir kümedir. Ayrılabilir durumlar kümesi ise bu kümenin konveks bir altkümesidir. Herhangi bir ayrılabilir durum, çarpım durumlarının konveks bir bileşimi olarak yazılabildiğinden çarpım durumları bu kümenin ekstremal noktalarıdır².

Kapalı kuantum mekaniksel bir sistemin bir t zamanı boyunca zamanla gelişimi

$$\rho \mapsto e^{itH}\rho e^{-itH} \quad (2.13)$$

ile verilir. Burada H , zamandan bağımsız Hamilton işlemcisidir ve Hermitsel bir matristir. Fakat bu tanım, sadece sistem başka bir sistemle etkileşmiyorsa doğrudur. Bir etkileşmenin varlığında, kuantum durumun zamanla gelişimi yukarıdaki şekilde yazılamaz. Dahası, bilişim işleme süreçleri için giriş sisteminin Hilbert uzayıyla çıkış sisteminin Hilbert uzayının aynı olması gerekmez. Aslında bazı süreçlerde giriş ve çıkış sistemlerinin farklı olması önemlidir. \mathcal{H}_A giriş sistemindeki $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ yoğunluk işlemcilerinden \mathcal{H}_B çıkış sistemindeki $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ yoğunluk işlemcilerine tanımlı bir Λ gönderimi keyfi $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ için

$$\Lambda[\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2] = \lambda\Lambda(\rho_1) + (1 - \lambda)\Lambda(\rho_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.14)$$

özelliğine sahipse afin gönderim olarak adlandırılır. $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ uzayı, çizgisel olmadığından Λ gönderiminin çizgisel olduğu da söylenemez. Fakat bu iki koşul eşdeğerdir. Aslında, Λ gönderimi, $\tilde{\Lambda}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimine aşağıdaki gibi genişletilebilir: Keyfi bir $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ matrisi, $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ uzayının X_1, \dots, X_{d^2} elemanları kullanılarak

$$X = \sum_i a^i X_i, \quad a^i \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\Lambda}$ gönderimi

² C , gerçel bir vektör uzayında konveks bir küme olsun. Bazı $x, y \in C$ elemanları için $z = (1 - \alpha)x + \alpha y$ olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1]$ sayısı yoksa $z \in C$, C konveks kümesinin bir ekstremal noktasıdır. Diğer bir ifadeyle C kümesinin iki noktasını birleştiren herhangi bir açık doğru parçasında yer almayan C 'deki bir noktaya ekstremal nokta denir. Ekstreml bir nokta, C 'nin "tepe noktası (*vertex*)" olarak düşünülebilir.

$$\tilde{\Lambda}(X) = \sum_i a^i \Lambda(X_i) \quad (2.16)$$

olarak tanımlanabilir. Afın özelliği, bu tanımın (2.15) denkleminde bağlı olmadığını garantiler. Bundan sonra $\tilde{\Lambda}$ gönderimi Λ ile tanımlanacaktır. Kompleks sabitlerle çarpılmış $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ uzayındaki elemanların çizgisel bileşimleri, \mathcal{H}_A 'daki $M(\mathcal{H}_A)$ matrisler uzayını verirler. $M(\mathcal{H}_A)$ uzayının herhangi bir elemanı, X ve Y gibi iki Hermitsel matrisin $Z = X + iY$ şeklinde toplamı olarak yazılabildiğinden Λ gönderimi, $M(\mathcal{H}_A)$ uzayından $M(\mathcal{H}_B)$ uzayına bir gönderim olarak genişletilebilir. $\Lambda(X + iY) := \Lambda(X) + i\Lambda(Y)$ olduğundan $\Lambda(Z^*) = \Lambda(Z)^*$ eşitliği sağlanır. Her Hermitsel matris, iki pozitif matrisin farkı olarak yazılabildiğinden afın özellik, çizgisel genişlemeyi mümkün kılar.

Tanım 2.5 (Pozitif Gönderim): Çizgisel bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

- (i) $\forall X \geq 0$ için $\Lambda(X) \geq 0$ ise Λ pozitif bir gönderimdir.
- (ii) $\forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ için $Tr[\Lambda(X)] = TrX$ ise Λ iz-koruyan bir gönderimdir.
- (iii) $\forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ için $[\Lambda(X)]^\dagger = \Lambda(X^\dagger)$ ise Λ Hermitsel veya Hermitselliği-koruyan bir gönderimdir.

Örnek 2.2: İz gönderimi pozitif bir gönderimdir. Herhangi bir pozitif X işlemcisi için

$$X = \sum_i x_i |x_i\rangle\langle x_i|, \quad x_i \geq 0 \quad (2.17)$$

spektral ayrışımı yazılabildiğinden

$$\mathbb{T}_d(X) = Tr(X) \mathbb{I}_d = (\sum_i x_i) \mathbb{I}_d \geq 0, \quad \forall X \in M_d(\mathbb{C}) \quad (2.18)$$

bulunur.

Örnek 2.3: Transpoz gönderimi belirli bir ortonormal baza göre pozitif gönderimlere başka bir örnektir:

$$\Lambda_{\mathbb{T}} : M_d^+(\mathbb{C}) \ni X \mapsto X^T \in M_d^+(\mathbb{C}). \quad (2.19)$$

Verilen bir $X = [X_{ij}]$ matrisinin transpozu $X^T = [X_{ji}]$ şeklindedir. Burada $M_d^+(\mathbb{C})$, kompleks elemanlı pozitif $d \times d$ 'li matrisler kümesini gösterir. Herhangi bir işlemcinin

transpozunu almak, o işlemcinin spektrumunu değiştirmediğinden dolayı pozitifliği korur.

Pozitif bir gönderim Hermitselliği gerektirir. İz-koruyan pozitif bir gönderim, \mathcal{H}_A uzayında tanımlı kuantum durumları \mathcal{H}_B uzayında tanımlı kuantum durumlara dönüştürür.

Λ gönderiminin pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle \psi_B | \Lambda(|\psi_A\rangle\langle\psi_A|) | \psi_B \rangle \geq 0 ; \quad |\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A, |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B \quad (2.20)$$

olacak şekilde her rank-1 izdüşüm işlemcisinin (*projeksiyon*) pozitifliğini korumasıdır (Choi 1972).

Tanım 2.6 (k –pozitiflik): Çizgisel bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için

$$id_k \otimes \Lambda : M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_B), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.21)$$

gönderimi pozitifse Λ gönderimi k –pozitifdir denir. Burada $id_k: M_k(\mathbb{C}) \mapsto M_k(\mathbb{C})$ özdeşlik gönderimidir.

Λ 'nın pozitif bir gönderim olduğu gerçeğinden $id_k \otimes \Lambda$ gönderiminin de pozitif olduğu sonucu çıkarılamaz. Transpoz gönderimi pozitifdir fakat $k \geq 2$ için tensörel genişlemeler altında pozitif değildir. Yani 2-pozitif bile değildir.

Tanım 2.7 (Tamamen pozitif gönderim): Çizgisel bir Λ gönderimi, her $k \in \mathbb{N}$ için k –pozitifse bir CP gönderimdir. Çizgisel bir Λ gönderimi hem CP hem de ünital (birim-koruyan) yani $\Lambda(\mathbb{I}_A) = \mathbb{I}_B$ ise CP ünital (CPU) bir gönderimdir (Choi 1975).

Önerme 2.1: Çizgisel bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderiminin CP olması için gerek ve yeter koşul

$$(id_A \otimes \Lambda)M \geq 0 \quad (2.22)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Choi 1975). Burada M , $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathcal{H}$ 'de keyfi bir $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d$ ortonormal bazı cinsinden

$$M = \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^d E_{ij} \otimes E_{ij}, \quad E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j| \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ uzayındaki birim izli en dolanık durumdur ve $\dim \mathcal{H} = d$ şeklindedir. $C_A = (id_A \otimes \Lambda)M$ işlemcisi, Choi matrisi olarak adlandırılır.

Örnek 2.4: Boylandırılmış $\mathbb{T}_d: B(\mathcal{H}_A) \rightarrow B(\mathcal{H}_B)$ iz gönderimi

$$\mathbb{T}_d(X) = Tr(X)\mathbb{I}_d \quad (2.24)$$

CPU bir gönderimdir: $\mathbb{T}_d(\mathbb{I}_d) = \mathbb{I}_d$. Choi matrisi

$$C_A = \frac{1}{d} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes Tr(E_{ij})\mathbb{I}_d = \frac{1}{d} \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} = \frac{1}{d} \mathbb{I}_{d^2} \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur. Choi matrisinin pozitifliği, iz gönderiminin CP olduğunu gösterir.

Pozitif bir Λ gönderimi için $id_k \otimes \Lambda$ gönderiminin ayrılabilir bir ρ durumuna etkisi

$$\rho' = (id_k \otimes \Lambda)\rho = \sum_{i=1}^n p_i id_k(\rho_i^A) \otimes \Lambda(\rho_i^B) \geq 0 \quad (2.26)$$

şeklindedir. Λ 'nın pozitifliği, $\Lambda(\rho_i^B)$ 'nin de pozitifliğini garanti eder. ρ durumu ayrılabilir değilse (2.26) denklemi yazılamaz fakat genel bir ρ ve k için, Λ gönderimi CP ise $(id_k \otimes \Lambda)\rho$ gönderimi de pozitiftir.

Tanım 2.8 (Dual Gönderim): Herhangi bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için, $\Lambda^D: \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ dual gönderimi HS iç çarpımına göre

$$Tr[\Lambda(X)Y] := Tr[X\Lambda^D(Y)] ; \forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A), \quad \forall Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2: Λ ve Λ^D gönderimleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- Λ gönderiminin pozitifliği, k –pozitifliği ve CP’liği sırasıyla Λ^D gönderiminin pozitifliğine, k –pozitifliğine ve CP’liğine eşdeğerdir. Pozitif $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ ve $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ matrisleri için $Tr[\Lambda(X)Y] = Tr[X\Lambda^D(Y)] \geq 0$ ifadesi sağlanır.
- Λ gönderiminin iz-koruyan olması için gerek ve yeter koşul Λ^D gönderiminin ünital olmasıdır: $\Lambda^D(\mathbb{I}_B) = \mathbb{I}_A$.
- Λ gönderiminin ünital olması için gerek ve yeter koşul Λ^D gönderiminin iz-koruyan bir gönderim olmasıdır.

Yoğunluk işlemcilerinin izi 1 olduğundan bir kuantum sistemin gelişimi iz-koruyan CP (*trace-preserving completely positive - TPCP*) bir gönderimle ifade edilir. Böyle gönderimlere **kuantum kanallar** denir. Kuantum kanallarla ilgili örnekler EK 1’de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Çizgisel gönderimler ve işlemciler arasında Choi-Jamiołkowski izomorfizmi aracılığıyla bire bir karşılıklı ilişki kurulabilir.

Tanım 2.9 (Choi-Jamiołkowski İzomorfizmi): $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$, \mathcal{H}_A uzayında ortonormal bir baz ve $\Lambda: M_k(\mathbb{C}) \mapsto M_l(\mathbb{C})$ çizgisel bir gönderim olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir (Pillai 1967, Arveson 1969, Choi 1972, 1975):

- Λ , k –pozitifdir.
- Choi matrisi

$$C_\Lambda := (id_k \otimes \Lambda)\mathbb{M} = \sum_{i,j=1}^{d_A} E_{ij} \otimes \Lambda(E_{ij})$$

pozitifdir.

- Λ , CP’dir.

Burada $\mathbb{M} = dM$ boylandırılmamış en dolanık durumdur. C_Λ Choi matrisi pozitif olduğundan

$$C_\Lambda = \sum_{i=1}^D p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|; \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (2.28)$$

spektral ayrışımı yazılabilir. Burada $D = d_A d_B$ ve $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ boylandırılmış vektörlerdir.

Λ gönderiminin Choi matrisi

$$C_\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda(|1\rangle\langle 1|) & \Lambda(|1\rangle\langle 2|) & \dots & \Lambda(|1\rangle\langle m|) \\ \Lambda(|2\rangle\langle 1|) & \Lambda(|2\rangle\langle 2|) & \dots & \Lambda(|2\rangle\langle m|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(|m\rangle\langle 1|) & \Lambda(|m\rangle\langle 2|) & \dots & \Lambda(|m\rangle\langle m|) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ ortonormal bazlarına göre $C_{\Lambda(ij,pq)}$ elemanları

$$C_{\Lambda(ij,pq)} = \langle e_i \otimes f_j | C_\Lambda | e_p \otimes f_q \rangle = \langle f_j | \Lambda(|e_i\rangle\langle e_p|) | f_q \rangle \quad (2.30)$$

olduğundan C_Λ Choi matrisi tek bir şekilde tanımlanır. Çizgisel gönderimlerin $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ vektör uzayından $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ üzerine tanımlı bir $J: \Lambda \mapsto J[\Lambda]$ gönderimi terslenebilir bir gönderimdir ve Jamiołkowski izomorfizmi olarak adlandırılır. Herhangi bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi, (2.30) denklemiyle tamamen karakterize edilen $|e_i\rangle\langle e_j|$ matris bazları üzerindeki etkisiyle belirlenir. Bundan dolayı $C_\Lambda \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ verildiğinde

$$\langle f_j | \Lambda(|e_i\rangle\langle e_p|) | f_q \rangle = C_{\Lambda(ij,pq)} \quad (2.31)$$

olacak şekilde $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ çizgisel gönderimi belirlenebilir.

Teorem 2.2: d_A ve d_B sırasıyla \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B uzaylarının boyutları olmak üzere çizgisel bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- i) Λ , bir kuantum kanaldır.
- ii) Λ^D , CP bir gönderimdir ve ünitaldır.
- iii) Λ , iz-koruyan $\min\{d_A, d_B\}$ –pozitif bir gönderimdir.
- iv) C_Λ Choi matrisi pozitifdir ve $Tr_B C_\Lambda = \mathbb{I}_A$ eşitliği sağlanır.
- v) **Stinespring Temsili:** CP her $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için

$$\Lambda(\rho) = Tr_{A,C} [U_\Lambda(\rho \otimes \rho_0)U_\Lambda^\dagger] \quad (2.32)$$

olacak şekilde $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ uzayında \mathcal{H}_B 'ye özdeş bir \mathcal{H}_C uzayı, saf bir $\rho_0 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C)$ durumu ve üniter bir U_Λ matrisi vardır (Stinespring 1955). \mathcal{H}_C 'nin yapısı kanala bağlı olmaksızın sadece \mathcal{H}_B 'ye bağlıdır. Sadece U_Λ kanalın kendisine bağlıdır. Ayrıca burada ρ_0 durumunun saf durum olması gerekli değildir ve \mathcal{H}_C 'nin boyutu keyfidir.

- vi) **Choi-Kraus Temsili:** CP her $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi

$$\Lambda(\cdot) = \sum_i K_i(\cdot)K_i^\dagger \quad (2.33)$$

şeklinde yazılabilir (Choi 1975, Kraus 1983). Λ gönderiminin iz-koruyan ve ünital bir gönderim olması sırasıyla $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}_{\mathcal{H}_A}$ ve $\sum_i K_i K_i^\dagger = \mathbb{I}_{\mathcal{H}_B}$ koşullarına eşdeğerdir. CPU gönderimler, iz-koruyan gönderimlere dualdirler. Burada $K_1, \dots, K_{d_A d_B}$, \mathcal{H}_A uzayından \mathcal{H}_B uzayına tanımlı çizgisel gönderimler kümesidir ve Kraus işlemcileri olarak adlandırılırlar. Choi-Kraus temsili, CP gönderimleri tam olarak karakterize eder.

Choi-Kraus temsili denklem (2.33)'teki gibi olan CP bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için $\{F_j\}_{j=1}^{d^2} \in M_d(\mathbb{C})$ HS ortonormal baz kümesini seçerek K_i Kraus işlemcileri

$$K_i = \sum_{j=1}^{d^2} c_{ij} F_j \quad (2.34)$$

yazılabilir. Λ 'nın Choi-Kraus temsili

$$\Lambda(X) = \sum_i \sum_{j,k=1}^{d^2} c_{ij} c_{ik}^* F_j X F_k^\dagger = \sum_{j,k=1}^{d^2} f_{jk} F_j X F_k^\dagger \quad (2.35)$$

şeklinde bulunur. Burada f_{jk} , pozitif bir $F = [f_{jk}] \in M_{d^2}(\mathbb{C})$ matrisinin elemanlarıdır. CP bir Λ gönderiminin bu temsili, **Kanonik Choi-Kraus Temsili** olarak bilinir. Kraus işlemcileri tek değildirler. Aynı CP gönderime karşılık gelen Kraus işlemcilerinin her iki kümesi, üniter bir matrisle ilişkilendirilebilir. Ayrıca teorem 2.2 (vi)'daki Choi-Kraus formu, bu genel form köşegenleştirilerek elde edilir.

Sonuç 2.1: CP her $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

- Λ bir kuantum kanaldır.
- $\Lambda(\cdot) = \text{Tr}_E[V(\cdot)V^\dagger]$ olacak şekilde bir \mathcal{H}_E Hilbert uzayı ve $V: \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$ işlemcisi vardır (Stinespring 1955). Λ gönderiminin iz-koruyan bir gönderim olması için gerek ve yeter koşul V işlemcisinin bir izometri olmasıdır: $V^\dagger V = \mathbb{I}_A$.

\mathcal{H}_E uzayının boyutunu d^2 'den daha küçük yapmak mümkündür.

Teorem 2.2'deki $(\mathcal{H}_C, \rho_0, U_A)$ üçlüsü, Stinespring temsili olarak bilinir ve i) koşuluna eşdeğerliliği, genel koşullar altında Λ^D dual gönderimi için Stinespring tarafından ispatlanmıştır.

Stinespring temsili matematiksel bir temsil teoremi olmasının yanında fiziksel anlamı bakımından da çok önemlidir. Giriş sistemi çıkış sistemine özdeşken, sistemlerin dış bir \mathcal{H}_E sistemiyle etkileşme altındaki zamanla gelişimi olarak yorumlanabilir. Bundan dolayı \mathcal{H}_E sistemi **çevre** olarak adlandırılır. Sistemin gelişimini tarif eden herhangi bir üniter olmayan kuantum kanala, kuantum gürültü de denir.

Λ gönderimi, bir kuantum haberleşme kanalı ve giriş ile çıkış sistemleri farklıken \mathcal{H}_C uzayı, haberleşme ortamı olarak düşünülebilir. \mathcal{H}_A giriş sistemi ve \mathcal{H}_C haberleşme ortamı, \mathcal{H}_B 'nin çevresinin bir parçası olarak düşünülebileceğinden çevre olarak $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C$ alınabilir ve \mathcal{H}_E olarak gösterilebilir. Bu durumda giriş sistemindeki giriş durumunu, çevredeki çıkış durumuna dönüştüren Λ_E gönderiminin etkisi

$$\Lambda_E(\rho) = Tr_B[U_A(\rho \otimes \rho_0)U_A^\dagger] \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir Stinespring temsilinin çevresindeki çıkış durumu, çevrenin ρ_0 giriş durumu saf bir durum olarak seçildiği sürece bir başka Stinespring temsiliyle üniter olarak eşdeğerdir. Yani, $\Lambda_E(\rho)$ durumu aslında Stinespring temsiline bağlı değildir.

Teorem 2.3: CP her $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir (Hayashi 2017).

a) $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 'de üniter bir U_A matrisi seçerek $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ için $\Lambda(\rho) = Tr_E[U_A(\rho)U_A^\dagger]$ ve $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ olacak şekilde başka bir \mathcal{H}_E uzayı vardır. Bu bağlamda \mathcal{H}_B sistemi \mathcal{H}_A 'nın bir altuzayı olarak düşünülebilir.

b) Herhangi iki $X, Y \in M(\mathcal{H}_B)$ matrisi için $\Lambda^\dagger(X)\Lambda^\dagger(Y) = \Lambda^\dagger(XY)$ eşitliği sağlanır.

Lemma 2.1: $\{K_i\}_{i=1}^d$ işlemcileri Λ 'nın bir Choi-Kraus temsiliyken, çevrenin sistemi \mathbb{C}^d ile betimlenir ve $\Lambda_E(\rho)$ 'nun matris elemanları

$$\Lambda_E(\rho)_{ij} = \text{Tr}(K_j^\dagger K_i \rho) \quad (2.37)$$

olarak verilir. Choi-Kraus temsili kullanılarak kuantum kanalların ekstremal noktaları karakterize edilebilir.

Lemma 2.2: Λ kuantum kanalının $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 'den $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 'ye tanımlı CPTP gönderimlerin ekstremal bir noktası olması için gerek ve yeter koşul $\{K_i^\dagger K_j\}_{ij}$ çizgisel bağımsız bir küme olacak şekilde Λ 'nın $\{K_i\}$ Choi-Kraus temsiline sahip olmasıdır (Choi 1975, Landau ve Streater 1993).

Lemma 2.2'nin ispatı EK 1'de verilmiştir.

Sonuç 2.2: Bir Λ kuantum kanalı ekstremal olduğunda yani yukarıdaki koşullar sağlandığında, Choi-Kraus temsili sadece d_A elemana sahiptir ve herhangi bir görüntü en fazla d_A^2 -boyutlu \mathcal{H}_B uzayında içerilir. Ayrıca, $d_A < d_B$ iken $d_C = 1$ olacak şekilde bir Stinespring temsili kurulabilir.

Stinespring temsili, Λ kanalıyla betimlenen durum gelişiminin aşağıdaki şekilde gerçekleştirilebileceğini garanti eder. İlk olarak, ρ_0 başlangıç durumu $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ uzayında hazırlanır. U_A üniter gelişimi, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ üzerine uygulanır. Keyfi üniter bir matrisle betimlenen durum gelişimleri gerçekleştirilebilir olduklarından bir Λ kanalıyla betimlenen durum gelişimleri de gerçekleştirilebilirler.

Sonuç 2.3: CP bir $\Lambda': \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderiminin bir kuantum kanal olması, $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ kanalı verildiğinde $\Lambda \otimes \Lambda'$ gönderiminin de kuantum kanal olmasına eşdeğerdir.

İspat: Teorem 2.2'nin ii) koşulu $C_{\Lambda \otimes \Lambda'}$ matrisinin pozitif olduğunu söyleyen iv) koşuluna eşdeğerdir. Ayrıca $C_{\Lambda \otimes \Lambda'}$ matrisi $C_\Lambda \otimes C_{\Lambda'}$ çarpımına eşittir. C_Λ pozitif olduğundan $C_{\Lambda'}$ matrisi de pozitifdir. Bu da i) koşuluna eşdeğerdir.

Tanım 2.10 (Blok Pozitif İşlemci): Bir $A \in M_d^2(\mathbb{C})$ matrisi verildiğinde, belirli bir $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d$ ortonormal bazı kullanılarak, A matrisi

$$A = \sum_{i,j=1}^d |e_i\rangle\langle e_j| \otimes A_{ij}; \quad A_{ij} \in M_d(\mathbb{C}) \quad (2.38)$$

blok-formda yazılabilir. Bu matrisin blok-pozitif olması için gerek ve yeter koşul her $|\psi\rangle$ ve $|\Phi\rangle$ için

$$\begin{aligned} \langle \Phi \otimes \psi | A | \Phi \otimes \psi \rangle &= \langle \Phi | \left(\sum_{i,j} \langle \psi | A_{ij} | \psi \rangle |e_i\rangle\langle e_j| \right) | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | \begin{pmatrix} \langle \psi | A_{11} | \psi \rangle & \langle \psi | A_{12} | \psi \rangle & \dots & \langle \psi | A_{1d} | \psi \rangle \\ \langle \psi | A_{12} | \psi \rangle & \langle \psi | A_{22} | \psi \rangle & \dots & \langle \psi | A_{2d} | \psi \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi | A_{d1} | \psi \rangle & \langle \psi | A_{d2} | \psi \rangle & \dots & \langle \psi | A_{dd} | \psi \rangle \end{pmatrix} | \Phi \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır. Diğer bir ifadeyle, A matrisinin blok-pozitifliği her $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ için $\langle \psi | A_{ij} | \psi \rangle$ 'nin pozitifliğine eşdeğerdir.

Teorem 2.4: Çizgisel bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$; ($\dim \mathcal{H}_A = d = \dim \mathcal{H}_B$) gönderiminin pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle \psi \otimes \Phi | (id_d \otimes \Lambda) M | \psi \otimes \Phi \rangle \geq 0, \quad \forall |\psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathbb{C}^d \quad (2.40)$$

şeklinde verilen Choi matrisinin blok-pozitif bir işlemci olmasıdır (Jamiołkowski 1972, Kossakowski 1972).

Teorem 2.5'in ispatı EK 1'de verilmiştir.

Örnek 2.5: $\Lambda_{\mathbb{T}}: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ transpoz gönderimini için Choi matrisi

$$C_{\Lambda_{\mathbb{T}}} = \frac{1}{d} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (2.41)$$

şeklinindedir. Trampa işlemcisi

$$T = \sum_{i,j=1}^d E_{ij} \otimes E_{ji} = d(\mathbb{I}_d \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})M \quad (2.42)$$

transpoz gönderimi cinsinden yazılabilir ve blok-pozitifdir. Trampa işlemcisinin etkisi $T|\psi \otimes \Phi\rangle = |\Phi \otimes \psi\rangle$ şeklinde tanımlanır. $T^2 = \mathbb{I}_d$ olduğundan bir involusyondur ve özdeğerleri ± 1 'dir.

Herhangi $|\psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathbb{C}^d$ vektörleri için,

$$\begin{aligned}
\langle \psi \otimes \Phi | C_{A_T} | \psi \otimes \Phi \rangle &= \langle \psi \otimes \Phi | \left(\sum_{i,j=1}^d E_{ij} \otimes E_{ji} \right) | \psi \otimes \Phi \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \Phi | e_i \rangle \langle e_j | \Phi \rangle \langle \psi | e_j \rangle \langle e_i | \psi \rangle \\
&= \sum_i \langle \Phi | e_i \rangle \langle e_i | \psi \rangle \sum_j \langle \psi | e_j \rangle \langle e_j | \Phi \rangle \\
&= |\langle \psi | \Phi \rangle|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

bulunur. Buradan transpoz gönderiminin blok pozitif olduğu söylenebilir.

Örnek 2.6 (İndirgeme gönderimi): Bölüm 3'te daha detaylı olarak incelenecek olan ve dolanık durumları algılayabilen pozitif gönderimlerden birisi olan $\Lambda_R: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ indirgeme gönderimi

$$\Lambda_R(X) = \text{Tr}(X)\mathbb{I}_d - X \tag{2.44}$$

CP bir gönderim değildir (Horodecki ve Horodecki 1999). Herhangi bir ρ yoğunluk matrisi için iz, özdeğerlerin toplamı olduğundan $\text{Tr}_d(\rho) \geq 0$ bulunur. $|\psi_i\rangle$, λ_i özdeğerlerine sahip olan ρ yoğunluk matrisinin özvektörleri olsun. ρ 'nun spektral ayrışımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Lambda_R(\rho) &= \left(\sum_i \lambda_i \right) \mathbb{I}_d - \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \\
&= \sum_j \left[\left(\sum_i \lambda_i \right) - \lambda_j \right] |\psi_j\rangle \langle \psi_j|
\end{aligned} \tag{2.45}$$

elde edilir. $\sum_i \lambda_i \geq \lambda_j$ olduğundan $\Lambda_R(\rho)$ pozitif bir matristir. Diğer bir ifadeyle, bu gönderimin Choi matrisi

$$C_{\Lambda_R} = (id_d \otimes \Lambda_R)M = \mathbb{I}_{d^2} - dM \tag{2.46}$$

şeklinde ifade edilebilir. C_{Λ_R} matrisinin bir özdeğeri, $1 - d$ olduğundan $d > 1$ için negatiftir. Yani Λ_R indirgeme gönderimi, CP bir gönderim değildir.

Sonuç 2.4: En dolanık M durumu, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$ maksimal Schmidt rankına sahip olacak şekilde keyfi bir $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ durumuyla değiştirilebilir ve yine gönderimlerle $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ 'deki çizgisel işlemciler arasında bire bir karşılıklı elde edilebilir.

Teorem 2.5: Verilen herhangi bir pozitif $\Lambda: M_d(\mathbb{C}) \mapsto M_d(\mathbb{C})$ gönderimi

$$\Lambda = \frac{1}{c}(\mathbb{T}_d - \Lambda_{CP}) \quad (2.47)$$

şeklinde \mathbb{T}_d iz gönderimi ve CP bir gönderimin farkı olarak yazılabilir. Burada $c > 0$ pozitif bir sabittir ve $\Lambda_{CP}: M_d(\mathbb{C}) \mapsto M_d(\mathbb{C})$, CP bir gönderimdir.

İspat: Λ , Hermitsel bir gönderim olsun: $\Lambda[A^\dagger] = (\Lambda[A])^\dagger$. Bu durumda Choi matrisi de Hermitseldir. Bundan dolayı Choi matrisi iki pozitif matrisin farkı olarak yazılabilir:

$$C_\Lambda = C_\Lambda^+ - C_\Lambda^- \quad , \quad C_\Lambda^+ C_\Lambda^- = 0. \quad (2.48)$$

$\mu \geq 0$ sayısı

$$\mu \mathbb{I} \geq C_\Lambda = C_\Lambda^+ - C_\Lambda^- \quad (2.49)$$

olacak şekilde en küçük pozitif sayı olsun. Burada C_Λ^+ ve C_Λ^- , sırasıyla C_Λ matrisinin pozitif ve negatif özdeğerlerine sahip Choi matrisleridir. Yukarıdaki eşitsizlik C_Λ^+ 'nın en büyük özdeğeri olan c seçilirse sağlanır.

Choi matrisi

$$C_\Lambda^\mu = \mathbb{I}_d - \frac{1}{\mu} C_\Lambda \quad (2.50)$$

ile verilen Λ_{CP} gönderimi

$$\Lambda_{CP} = \mathbb{T}_d - \frac{1}{\mu} \Lambda \quad (2.51)$$

bulunur. (2.51) denklemini düzenlenirse

$$\Lambda = \frac{1}{c}(\mathbb{T}_d - \Lambda_{CP}) \quad (2.52)$$

elde edilir.

Buradaki tek varsayım, Λ gönderimini Hermitsel kabul etmektir. Bu nedenle herhangi bir Hermitsel gönderim, denklem (2.52) formunda yazılabilir. Buradan, pozitif gönderimler kümesinin Hermitsel gönderimlerin bir altkümesi olduğu söylenebilir.

2.3.1 Hafızalı kuantum kanallar

N –parçalı sistemlere gürültülü bir çevrenin etkisi Λ_N şeklinde yazılabilen kanallar hafızasız kuantum kanallar olarak adlandırılırlar. Bu durumda kuantum sistemin gelişiminde çevresel durulma zamanı, kanalın ardışık etkileri arasındaki zamandan daha küçüktür. Böyle bir durumda, her kanal etkisinde çevrenin geri etkisi ihmal edilebilir ve Λ kanalı, her parçaya etki eder: $\Lambda_N = \Lambda^{\otimes N} = \Lambda \otimes \Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda$. Fakat böyle olmadığı durumlarda çevre, kanalın önceki etkilerinden ortaya çıkan bazı korelasyonları sonraki durumlara iletebilir. Bu durumlarda kuantum hafıza veya eşdeğer olarak korele gürültülü kanallar kavramlarından bahsedilebilir ve kanalların kullanımı için $\Lambda_N = \Lambda^{\otimes N}$ bağıntısı artık geçerli değildir. Bu tür kanallara hafızalı kuantum kanallar denir (Caruso vd. 2014). Böyle hafıza etkilerinin değerlendirilmesi, bilişim işleme cihazlarının küçülmesi ve gelişen iletişim hızı açısından kaçınılmazdır.

Zaman-sıralı bir bilişim taşıyıcıları dizisine sahip N –parçalı bir sistem için, özdeş ve bağımsız gürültüler (Λ kanalları) her parçaya hafızasız bir şekilde etki eder. Bu kanalların herhangi bir ρ bileşik giriş durumuna etkisi (2.33) denkleminden

$$\Lambda^{\otimes N}(\rho) = \sum_{i_1 \dots i_N} (K_{i_1} \otimes \dots \otimes K_{i_N}) \rho (K_{i_1}^\dagger \otimes \dots \otimes K_{i_N}^\dagger) \quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir.

Hafıza etkisi en basit şekilde, aynı Λ kanalının korele çok kullanımıyla (Λ_N) incelenebilir. Böyle bir durumda, Kraus işlemcileri

$$K_{i_1 \dots i_N} = \sqrt{p_{i_1 \dots i_N}} A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_N} , \quad \sum_{i_1 \dots i_N} p_{i_1 \dots i_N} = 1 \quad (2.54)$$

bağımsız A_{i_1}, \dots, A_{i_N} işlemcileri cinsinden yazılabilir. Burada $p_{i_1 \dots i_N} \geq 0$, kanaldan geçerken bilişim taşıyıcılarına uygulanan rastgele bir işlem sırasının olasılıklarıdır. Hafızasız durumda bu olasılıklar bağımsızdır yani $p_{i_1 \dots i_N} = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_N}$ şeklindedir ve $K_{i_j} = p_{i_j} A_{i_j}$ olarak yazılabilirler. Fakat düzenli Markov kanalları gibi hafızalı bir kanal için bu olasılıklar koreledir ve $p_{i_1 \dots i_N} = p_{i_1} p_{i_2 | i_1} \dots p_{i_N | i_{N-1}}$ olarak yazılabilir. Burada $p_{i_k | i_{k-1}}$, bileşik sistemin k. parçası üzerindeki etkinin koşullu olasılığıdır (Macchiavello ve Palma 2002).

2.3.1.1 Kuantum kanalların iki-kullanım etkileri

İki-parçalı sistemler için parçalı hafızalı bir kanalın iki-kullanımı için Kraus işlemcileri, $p_{ij} = p_i [(1 - \mu)p_j + \mu \delta_{ij}]$ olasılığıyla $K_{ij} = \sqrt{p_{ij}} A_i \otimes A_j$ şeklindedir. Burada $0 \leq \mu \leq 1$ hafıza parametresidir. Bu durumda $\sigma = \Lambda_2(\rho)$ çıkışı, korele ve korele olmayan katkıların konveks bir bileşimi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir (Macchiavello ve Palma 2002, Yeo ve Skeen 2003):

$$\sigma = (1 - \mu) \sum_{i,j} K_{ij}^u \rho K_{ij}^{u\dagger} + \mu \sum_k K_k^c \rho K_k^{c\dagger}. \quad (2.55)$$

Burada $K_{ij}^u = \sqrt{p_i p_j} A_i \otimes A_j$ ve $K_k^c = \sqrt{p_k} A_k \otimes A_k$, sırasıyla korele-olmayan ve korele Kraus işlemcileridir. Kanal, μ olasılığıyla aynı işlemciyle her iki taşıyıcıya etki ederken $1 - \mu$ olasılıkla bağımsız olarak taşıyıcılara etki eder. Fiziksel olarak μ , bir taşıyıcı kanaldan geçerken kanalın durulma zamanıyla belirlenir (Macchiavello vd. 2004).

2.3.2 Ayrıştırılabilir gönderimler

CP gönderimlerin yapısı Choi-Kraus temsili aracılığıyla tamamen anlaşılabilir. Ayrıca Choi teoremi, pozitif gönderimleri açıklığa kavuşturan pratik bir teknik sağlar. Pozitif gönderimlerin tam bir yapısal temsiline olmadığı durumlarda bunu yapmak çok daha zordur. Bu bölümde bu durumlarda, daha anlaşılır ve açık olan kavramlar incelenecektir. Düşük boyutlarda, $d_A \times d_B \leq 6$ iken pozitif gönderimlerin yapısı açıktır ve bu koşul altındaki tüm pozitif gönderimler ayrıştırılabilir (Woronowicz 1976,

Skowronek vd. 2009). Yüksek boyutlarda ise bu gönderimler kısmen anlaşılabilir (Chruściński 2009 ve 2011, Hou 2010).

Örnek 2.7: En dolanık durumlar olan Bell durumlarından $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ durumuna karşılık gelen yoğunluk matrisi

$$\rho = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

şeklindedir. Bu duruma $\mathbb{I}_2 \otimes \Lambda_{\mathbb{T}}$ gönderiminin etkisi, matrisin her bloğunun transpozunu almak olarak ifade edilebilir. Parçalı transpozu alınmış matris

$$(id_2 \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

kolaylıkla yazılabilir. Parçalı transpoza göre durumlar, iki sınıfa ayrılabilirler: Bu gönderim altında pozitif kalan durumlara Pozitif Parçalı Transpoz (PPT) durumlar denir. Parçalı transpoz alındıktan sonra en az bir negatif özdeğere sahip olan durumlara da Negatif Parçalı Transpoz (NPT) durumlar denir. (2.57) denkleminde verilen matris, $-1/2$ negatif özdeğere sahiptir ve bir NPT durumdur.

Pozitif gönderimlerin aşağıdaki sınıfı düşük boyutlu Hilbert uzayında bu durumları sınıflandırmak için kullanılabilir.

Tanım 2.11 (Ayrıştırılabilir Gönderim): Pozitif bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderiminin ayrıştırılabilir olması

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \circ \Lambda_{\mathbb{T}} \quad (2.58)$$

formunda yazılabilmesine eşdeğerdir (Størmer 1963). Burada Λ_1 ve Λ_2 , CP gönderimlerdir. \circ , bileşke işlemini göstermektedir. Bu formda yazılamayan gönderimler ise ayrıştırılamazdır. Ayrıştırılamaz gönderimler PPTES'lerin dolanıklığını algırlar. Bu durumlara bağlı dolanık durumlar (*bound entangled states*) da denir.

Tanım 2.12: Λ gönderimi, k –pozitif bir Λ_1 gönderimi ve $\Lambda_2 \circ \Lambda_{\mathbb{T}}$ gönderiminin bir toplamı olarak yazılabilirse k –ayrıştırılabilir.

Tanım 2.13: Λ gönderimi, 2-ayrıştırılabilir bir gönderim değilse atomik bir gönderim olarak adlandırılır (Ha 1998). Atomik gönderimler “en zayıf” bağlı dolanıklığı algılamak için kullanılan araçlardır.

Teorem 2.6: $\dim \mathcal{H}_A = d_A$, $\dim \mathcal{H}_B = d_B$ ve $d_A \times d_B \leq 6$ olacak şekilde pozitif tüm $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimleri ayrıştırılabilir (Woronowicz 1976, Werner 1989).

Önerme 2.3: Her pozitif gönderim teorem 2.5’e göre

$$\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2 \quad (2.59)$$

şeklinde iki CP gönderimin farkı olarak yazılabildiğinden Choi-Kraus formu da

$$\Lambda(\cdot) = \sum_i A_i(\cdot)A_i^\dagger - \sum_j B_j(\cdot)B_j^\dagger \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 2.8: (2.44) denkleminde verilen $\Lambda_R: M_d(\mathbb{C}) \mapsto M_d(\mathbb{C})$ indirgeme gönderimi, ayrıştırılabilir (Horodecki ve Horodecki 1999).

(2.46) denkleminde, bu gönderimin Choi matrisi

$$C_{\Lambda_R} = (\mathbb{I}_d \otimes \Lambda_R)M = \mathbb{I}_{d^2} - dM \quad (2.61)$$

şeklinde. İkinci altsisteme göre parçalı transpozunu alınırsa

$$\begin{aligned} C_{\Lambda_R}^\Gamma &= (id_d \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})(id_d \otimes \Lambda_R)M \\ &= (id_d \otimes \Lambda_{\mathbb{T}} \circ \Lambda_R)M = \frac{1}{d}(\mathbb{I}_{d^2} - T) \end{aligned} \quad (2.62)$$

eşitliği elde edilir. Trampa işlemcisi, bir involusyon olduğundan özdeğerleri ± 1 olarak bulunur. Bu da, $C_{\Lambda_R}^\Gamma$ matrisinin negatif özdeğere sahip olmamasını gerektirir ve dolayısıyla pozitif bir matristir. Karşılık gelen $\Lambda' = \Lambda_{\mathbb{T}} \circ \Lambda_R$ gönderimi CP’dir. Ayrıca $\Lambda_R = \Lambda_{\mathbb{T}} \circ \Lambda'$ ve Λ' , CP olduğundan ayrıştırılabilir bir gönderimdir.

2.3.3 Ekstremal gönderimler

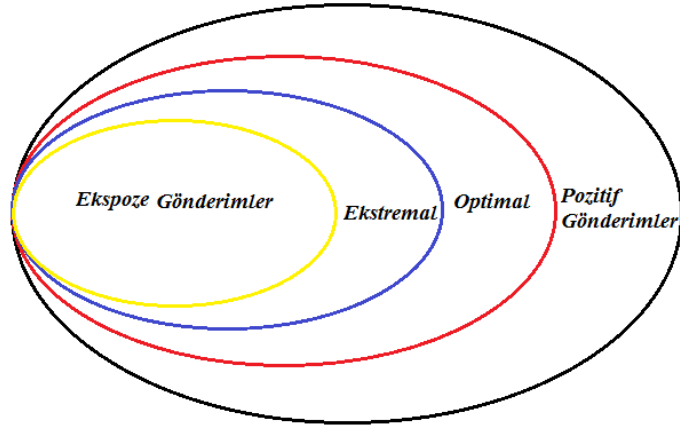
Pozitif gönderimler kümesi kapalı konveks bir küme olduğundan kümenin ekstremal noktaları vardır. Konveks kümelerde, bir gönderim diğer gönderimler cinsinden konveks olarak ayrıştırılamıyorsa ekstremaldir. Yoğunluk matrislerinde ise ekstremal yoğunluk matrisleri rank-1 matrisler yani saf (izdüşüm işlemcileri) durumlardır. Bu bölümde pozitif gönderimlerin özel bir sınıfı olan ekstremal gönderimler ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.14: $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ pozitif bir gönderim olsun. $\Lambda - \Phi$ gönderimi pozitif kalacak şekilde pozitif bir $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\Lambda = \lambda\Phi$ eşitliği sağlanır. Bu durumda Λ gönderimi ekstremaldir ve $0 \leq \Phi \leq \Lambda$ yazılabilir.

Her pozitif gönderim, ekstremal gönderimlerin konveks bir bileşimi olarak yazılabilir. Λ gönderimi ekstremal pozitif bir gönderimse Φ_1 ve Φ_2 gönderimlerinin her ikisi, Λ 'nın pozitif çarpanları olmadığı sürece normları 1'e eşit veya daha az olan pozitif iki Φ_1 ve Φ_2 gönderimin $\lambda\Phi_1 + (1 - \lambda)\Phi_2$ konveks bileşimi olarak yazılamaz (Størmer 2013).

Tanım 2.15: $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderimi $\Lambda(\mathbb{I}_A) = \mathbb{I}_B$ ve $\forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ için $Tr[\Lambda(X)] = Tr(X)$ (ünital ve iz-koruyan) olacak şekilde pozitif bir gönderim ise ikili-stokastik (*bistochastic or doubly stochastic*) olarak adlandırılır.

Son yıllarda ekstremal gönderimler detaylı bir şekilde incelenmiştir (Majewski ve Marciniak 2006, Hansen ve Myrheim 2015, Miller ve Olkiewicz 2016, Marciniak ve Rutkowski 2017). Ekstremal gönderimler ve bunların bir altkümesi olan ekspozite gönderimlerle karşılık gelen dolanıklık tanıkları EK 3'te daha detaylı olarak örneklerle incelenecektir.



Şekil 2.1 Pozitif gönderimler ailesinin gösterimi

Pozitif gönderimler ailesinin gösterimi şekil 2.1’de verilmiştir. Pozitif gönderimlerin yapılarının analizi sonsuz boyutlu durumlara da genişletilebilir (Paulsen 2002, Størmer 2013).

Choi–Jamiołkowski izomorfizminin sonsuz boyutlu genellemeleri Holevo tarafından gösterilmiştir (Holevo 2011).

Pozitif gönderimlerin daha farklı ve detaylı tartışmaları son yıllarda oldukça geniş bir çerçevede incelenmiştir (Bhatia 2006, Chruściński ve Kossakowski 2007, 2008a, 2008b, Kye 2013, Skowronek ve Størmer 2012, Holevo 2011, Skowronek vd. 2009).

3. DOLANIKLIĞIN ALGILANMASI

Kuantum mekaniğinde, bir sistemin fiziksel durumları kompleks bir \mathcal{H} Hilbert uzayında ρ ile gösterilen birim izli pozitif işlemcilerle temsil edilir. Bu uzayın boyutu sonlu veya sonsuz olabilir. Sonlu boyutlu durumlarda $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ alınabilir. Burada d Hilbert uzayının boyutudur. Bir ρ kuantum durumunun rankı 1 ise saf, 1'den büyükse saf-olmayan bir durumdur. İki yoğunluk işlemcisinin konveks bileşimi de yine yoğunluk işlemcisi olduğundan tüm yoğunluk işlemcileri kümesi konvekstir. Diğer yoğunluk matrislerinin konveks bileşimi olarak yazılamayan bu kümenin ekstremal noktaları saf durumlara karşılık gelir.

Bileşik sistemler için, sistemin Hilbert uzayı alt sistemlerin Hilbert uzaylarının tensör çarpımıdır. Bölüm 2'de de gösterildiği gibi sonlu boyutlarda $B(\mathcal{H}) \cong M_d(\mathbb{C})$ alınabilir. İki-parçalı sistemlerde ayrılabilirlik, saf ve saf-olmayan durumlar için ayrı ayrı incelenebilir. n alt sisteme sahip bileşik bir sistemin Hilbert uzayındaki bir $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ saf durumu

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle \quad (3.1)$$

şeklinde alt sistemlerinin durum vektörlerinin bir tensör çarpımı olarak yazılabiliyorsa ayrılabilir durum veya çarpım durumudur denir. Bu şekilde yazılamayan saf durumlara, dolanık saf durumlar denir.

İki-parçalı bir sistemin dolanık ya da ayrılabilir olduğunu belirlemek için kullanışlı kriterler vardır. İki-parçalı saf durumların dolanıklığını belirlemek için bilinen en etkili yöntem Schmidt ayrışımıdır.

3.1 Schmidt Ayrışımı

Saf durumlar için, $\dim(\mathcal{H}_A) = d_A$, $\dim(\mathcal{H}_B) = d_B$ ve $d := \min(d_A, d_B)$ olacak şekilde herhangi bir iki-parçalı $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{AB}$ durumu, aşağıdaki gibi bir üst üste gelim olarak yazılabilir:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{r \leq d} \lambda_i |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle ; \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r \leq d} \lambda_i^2 = 1. \quad (3.2)$$

Burada λ_i katsayıları, Schmidt katsayılarıdır ve altsistemler (A ya da B sistemi) üzerindeki üniter dönüşümler altında değişmezdir. $r = SR(|\psi\rangle)$, $|\psi\rangle$ durumunun Schmidt rankı olarak bilinir. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^r \subset \mathcal{H}_A$ ve $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^r \subset \mathcal{H}_B$ bazları ortonormal Schmidt bazlarıdır ve $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} = \langle f_i | f_j \rangle$ diklik koşulunu sağlarlar. Schmidt rankı, $1 \leq r \leq d$ olacak şekilde altsistemlerin Hilbert uzaylarının en küçüğünün boyutuna eşit ya da daha küçüktür. $r = 1$ ise $|\psi\rangle$ durumu ayrılabilir bir saf durum, $r > 1$ ise $|\psi\rangle$ dolanık bir saf durumdur. Ayrıca $r = d$, tüm λ_k ($k = 1, \dots, d$) Schmidt katsayıları aynı ve $1/\sqrt{d}$ ise $|\psi\rangle$ durumu en dolanık durumdur ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e_k\rangle \otimes |e_k\rangle \in \mathcal{H}_{AB}. \quad (3.3)$$

Schmidt rankı, altsistemlerden birisi üzerinden kısmi iz alınarak kolaylıkla belirlenebilir.

Tanım 3.1: Pozitif bir $X \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisinin $SN(X)$ Schmidt sayısı

$$SN(X) = \min_{\{|\psi_k\rangle\}} \left\{ \max_k SR(|\psi_k\rangle) \right\} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada minimum, X işlemcisinin olası tüm

$$X = \sum_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (3.5)$$

ayrışmaları üzerinden alınır. $|\psi_k\rangle$ vektörleri, \mathcal{H}_{AB} uzayındaki boylandırılmamış durumlardır. Bu tanım ilk olarak $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ uzayındaki yoğunluk işlemcileri için gösterilmiştir (Horodecki ve Terhal 2000). Fakat Schmidt sayısı, $\mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB})$ uzayındaki her pozitif işlemci için de iyi tanımlıdır. $X = |\psi\rangle \langle \psi|$ bir izdüşüm işlemcisi ise $SN(X) = SR(|\psi\rangle)$ eşitliği sağlanır. Böylece yukarıdaki tanım, bir $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ vektörünün Schmidt rankının tanımını verir.

Bir X işlemcisi için

$$\mathcal{L}_k = \{X \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB}): SN(X) \leq k\}$$

konveks koni ailesi tanımlanabilir. Bu durumda aşağıdaki içermeye bağıntısı sağlanır:

$$\mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_d = \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB}).$$

$\mathfrak{S}_k = \mathcal{L}_k \cap \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ tanımı yapılarak

$$\mathfrak{S}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{S}_d = \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$$

içermeye bağıntısı yazılabilir. \mathfrak{S}_1 , ayrılabilir durumlar kümesinin konveks bir altkümesidir ve $\mathfrak{S}_d - \mathfrak{S}_1$ dolanık durumlar kümesini ifade eder.

Saf-olmayan durumların dolanıklığının algılanması kapsamında çok sayıda dolanıklık veya eşdeğer olarak ayrılabilirlik kriteri mevcuttur (Terhal 2002, Horodecki vd. 2009, Gühne ve Tóth 2009). Bunlardan en etkin ve en kullanışlı olan kriterler aşağıdaki bölümlerde verilecektir.

3.2 Peres-Horodecki Kriteri

Saf-olmayan durumların ayrılabilirliğini (veya dolanıklığını) tespit etmek için en etkin kriterlerden birisi, Peres-Horodecki kriteridir. Bu kriter, pozitif parçalı transpoz (PPT) kriteri olarak da bilinir. Parçalı transpoz, iki altsistemin birisi üzerinden alınan transpoz işlemi olarak tanımlanır.

$\Lambda_{\mathbb{T}}: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gönderimi, \mathcal{H} uzayındaki belirli bir baza göre tanımlanmış transpoz gönderimi olsun. Transpoz gönderimi pozitif çizgisel bir gönderimdir: $\Lambda_{\mathbb{T}}(\mathcal{L}_+(\mathcal{H})) \subset \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$. Genel olarak transpoz gönderimi, iz-koruyan bir gönderimdir ve durumları durumlara dönüştürür: $\Lambda_{\mathbb{T}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Herhangi bir $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ işlemcisi için, $id_A: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_A$ gönderimi, etkisi $id_A(X) = X$ şeklinde tanımlanan birim gönderim olsun. $id_A \otimes \Lambda_{\mathbb{T}}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ transpoz gönderimi

$$(id_A \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})(A \otimes B) = A \otimes B^T \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B^T = \Lambda_{\mathbb{T}}(B)$, B işlemcisinin transpozudur ve herhangi bir $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisi için $(id_A \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})Y = Y^\Gamma$ ile gösterilir. Γ , ikinci altsisteme (bileşene) göre parçalı transpoz işlemi gösterir.

Teorem 3.1: Pozitif bir $X \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisinin PPT olması

$$X^\Gamma = (id_A \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})X \geq 0, \quad X^\Gamma \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB}) \quad (3.7)$$

eşitsizliğin sağlanmasına eşdeğerdir (Horodecki vd. 1996).

Bu teorem yoğunluk işlemcileri için de kurulabilir: İki-parçalı bir $\rho_{AB} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ durumu

$$(id_A \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})\rho_{AB} \geq 0 \quad (3.8)$$

koşulu sağlanıyorsa PPT durumdur. $(id_A \otimes \Lambda_{\mathbb{T}})\rho_{AB} < 0$ koşulu sağlanıyorsa ρ_{AB} dolanıktır ve parçalı transpoz negatif (NPT) bir durumdur. ρ_{AB}^Γ durumunun, en az bir tane negatif özdeğeri vardır. Bu önermenin tersi her zaman doğru değildir. PPT dolanık durumlar da vardır.

$d_A \times d_B \leq 6$ olacak şekilde $\rho_{AB} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ durumunun ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\det \rho_{AB}^\Gamma \geq 0$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır (Horodecki vd. 2009).

Bu, iki-kübitli sistemler için en basit ayrılabilirlik koşuludur. Aşağıdaki iki ifadenin doğrudan bir sonucudur: Herhangi bir dolanık iki-parçalı durumun parçalı transpoz, tam ranka (*full rank*) sahiptir ve sadece bir negatif özdeğeri vardır (Sanpera vd. 1998). Diğer gönderimler ve boyutlar için bu koşulun bazı genellemeleri de mümkündür (Augusiak vd. 2006).

Önerme 3.1: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ vektörünün ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul bu duruma karşılık gelen pozitif $|\psi\rangle\langle\psi|$ rank – 1 izdüşüm işlemcisinin bir PPT durum olmasıdır (Chruściński ve Sarbicki 2014).

Sonuç 3.1: $d_A \times d_B \leq 6$ sistemler için Peres-Horodecki kriteri ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşuldur (Størmer 1963, Woronowicz 1976). Bu durumda ayrılabilir durumlar kümesi, PPT durumlar kümesiyle çakışır. Daha yüksek boyutlarda, PPT durumlar kümesi ayrılabilir durumlar kümesini içerdiğinden dolayı bu küme içerisinde PPTES'ler de vardır.

Örnek 3.1: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 'de tanımlı Werner durumu

$$\rho_W = \alpha |\psi^-\rangle\langle\psi^-| + \frac{1-\alpha}{4} \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2, \quad -\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1 \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ Bell durumlarından birisidir.

Werner durumunun parçalı transpozu

$$(id_2 \otimes \Lambda_T)\rho_W = \rho_W^\Gamma = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 0 \\ -2\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Bu matrisin özdeğerlerinden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1+\alpha}{4}, \quad \lambda_4 = \frac{1-3\alpha}{4} \quad (3.11)$$

üçü pozitifdir fakat dördüncü özdeğer $1/3 < \alpha \leq 1$ aralığında negatiftir. Bu durumda Werner durumunun parçalı transpozu alınarak elde edilen yeni durum için

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_W \text{ ayrılabilir,}$$

$$\frac{1}{3} < \alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho_W \text{ dolanıktır,}$$

sonuçları sağlanır.

Dolanıklık teorisinde verilen bir PPT durumun dolanık ya da ayrılabilir olup olmadığını doğrulamak zor bir problemdir. PPT durumlar kümesi konveks olmasına rağmen PPTES'ler kümesi konveks değildir. İki dolanık PPT durumun konveks bileşimi de bir PPT durumdur fakat dolanık olması gerekmez.

3.3 İndirgeme Kriteri

Bölüm 2’de de gösterildiği gibi, Λ gönderimi $B(\mathcal{H}_A)$ veya $B(\mathcal{H}_B)$ ’de pozitif bir gönderim ise $id_A \otimes \Lambda$ veya $\Lambda \otimes id_B$ gönderimleri iki-parçalı her ayrılabilir ρ_{AB} durumu için pozitiftir: $(id_A \otimes \Lambda)\rho_{AB} \geq 0$. Genel bir yoğunluk işlemcisi için $id_A \otimes \Lambda$ veya $\Lambda \otimes id_B$ gönderimlerinin pozitif olmaları gerekmez. Bu yüzden sistemin bir bileşeni üzerinde pozitif fakat CP olmayan her gönderim, bu yolla ayrılabilirlik veya eşdeğer olarak dolanıklık için bir gerek koşul oluşturmak için kullanılabilir. İndirgeme kriteri, bunun özel bir örneğidir.

$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$ ve $\dim \mathcal{H}_A = d = \dim \mathcal{H}_B$ olsun. Pozitif fakat CP olmayan $\Lambda_R: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ indirgeme gönderiminin bir X işlemcisine etkisi

$$\Lambda_R(X) = Tr(X)\mathbb{I}_d - X \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır.

$id_A \otimes \Lambda_R$ ve $\Lambda_R \otimes id_B$ gönderimlerinin iki-parçalı bileşik bir sistemin herhangi bir ρ_{AB} durumuna etkileri

$$\begin{aligned} (id_A \otimes \Lambda_R)\rho_{AB} &= \rho_A \otimes \mathbb{I}_B - \rho_{AB} \\ (\Lambda_R \otimes id_B)\rho_{AB} &= \mathbb{I}_A \otimes \rho_B - \rho_{AB} \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\rho_A = Tr_B \rho_{AB}$ ve $\rho_B = Tr_A \rho_{AB}$ indirgenmiş yoğunluk işlemcileridir. Ayrılabilir bir ρ_{AB} yoğunluk işlemcisi için (3.13) durumlarının özdeğerleri pozitiftir. Dolayısıyla

$$\rho_A \otimes \mathbb{I}_B - \rho_{AB} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{I}_A \otimes \rho_B - \rho_{AB} \geq 0 \quad (3.14)$$

koşulları sağlanır (Cerf vd. 1999, Horodecki ve Horodecki 1999). $(id_A \otimes \Lambda_R)\rho_{AB}$ işlemcisinin en az bir negatif özdeğeri varsa, yani (3.14) koşullarını ihlal eden her ρ_{AB} durumu dolanık olmak zorundadır.

$d_A \times d_B \leq 6$ boyutlu bileşik sistemler için bu kriter ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşuldur. $2 \times n$ bileşik sistemleri için indirgeme kriteri Peres-Horodecki kriterine eşdeğerken yüksek boyutlarda Peres-Horodecki kriterinden daha zayıftır. İndirgeme

kriteri, bölüm 2.3.2'de gösterildiği gibi ayrıştırılabilir bir gönderim olduğundan PPTES'leri algılayamaz.

PPTES'lerin dolanıklığını algılamak için kullanılacak etkin kriterlerden birisi değer uzayı (*range*) kriteridir.

3.4 Değer Uzayı Kriteri

Teorem 3.2: İki-parçalı bir $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ durumu ayrılabilirse, öyle $|\psi_i\rangle$ ve $|\phi_j\rangle$ vektörleri bulunabilir ki ρ_{AB} ve ρ_{AB}^Γ 'nin değer uzayları, sırasıyla $\{|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle\} \in \mathcal{H}_{AB}$ ve $\{|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j^*\rangle\} \in \mathcal{H}_{AB}$ şeklindeki çarpım vektörleri kümesiyle gerilir. Burada $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_A$ ve $|\phi_j\rangle \in \mathcal{H}_B$ şeklindedir. (Horodecki 1997).

Teorem 3.2'deki kompleks eşlenik, ρ_{AB} durumu için PPT işleminin yapıldığı bazlar üzerinden alınır. Bu teorem PPTES'lerin kurulması için güçlü bir yaklaşım verir.

Tanım 3.2: $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ işlemcisinin değer uzayı $\{X|\psi\rangle \mid |\psi\rangle \in \mathcal{H}\}$ kümesiyle tanımlanır. Bu da X 'in görüntü kümesini verir.

Değer uzayı kriteri, PPTES'lerin dolanıklığını algılayabildiğinden PPT kriterinden ne güçlü ne de zayıftır. Bu kriteri ihlal etmeyen NPT durumlar da vardır. Ayrıca bu kriteri ihlal eden bazı durumlar da vardır ve bu durumlar, kenar (*edge*) durumları olarak adlandırılırlar. Kenar durumlar, PPT ve NPT durumlar arasındaki sınırda bulunurlar. Bundan dolayı en dolanık PPT durumlar (PPTES) olarak düşünülebilirler.

Tanım 3.3: Keyfi ayrılabilir bir Y işlemcisi için, $X - Y$ işlemcisi PPT değilse PPTES X , bir kenar işlemcisi (*edge operator*) olarak adlandırılır. $X - Y \not\geq 0$ ya da $(X - Y)^\Gamma \not\geq 0$ eşitsizliklerinden birisi sağlanır.

Teorem 3.3: Herhangi bir PPT dolanık X işlemcisi

$$X = X_{EDGE} + X_{SEP} \quad (3.15)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Burada X_{EDGE} ve X_{SEP} sırasıyla kenar ve ayrılabilir işlemcilerdir (Lewenstein vd. 2000).

Denklem (3.15)'te verilen ayrışım tek değildir. Kenar durumları oluşturmaya olanak tanıyan çeşitli yöntemler vardır (Lewenstein vd. 2001). Fakat bir kenar işlemcisi kurmak için genel bir metot yoktur.

Örnek 3.2: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ 'de kurulan ilk PPT dolanık durumu, kenar durumlara bir örnektir (Horodecki 1997):

$$\sigma = \frac{1}{7\beta + 1} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 + \beta)/2 & 0 & 0 & \sqrt{1 - \beta^2}/2 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \sqrt{1 - \beta^2}/2 & 0 & 0 & (1 + \beta)/2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Burada $0 \leq \beta \leq 1$ aralığındadır.

PPTES'lerin kurulması için değer uzayı kriterinin uygulanabildiği diğer bir güçlü araç genişletilemez çarpım bazlarıdır (*unextendable product basis* -UPB).

3.5 Genişletilemez Çarpım Bazları

$d_A \times d_B \geq 6$ boyutlu bileşik sistemler için, bir altuzayı geren dik çarpım durumları kümesi kurulabilir: Öyle ki bu altuzayın dik tümleyeninde hiçbir çarpım durumu yoktur ve bu kümenin dik tümleyenindeki herhangi bir durum dolanık olmalıdır. Bu durumlar PPT kriteriyle kurulabildiğinden PPT dolanık durumlar da kurulabilirler. Bu PPTES'lere genişletilemez çarpım bazları denir.

Tanım 3.4: m parçadan oluşan çok-parçalı bir $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{d_i}$ kuantum sistemi olsun. \mathcal{H} 'nin bir \mathcal{H}_S altuzayını geren bir S saf dik çarpım durumları kümesine dik çarpım bazı denir. Tümleyen altuzayı \mathcal{H}^\perp olan (\mathcal{H}_S 'deki tüm vektörlere dik olan vektörlerle gerilen

\mathcal{H} 'deki altuzay) bir çarpım bazına tamamlanamaz çarpım bazı (*Uncompletable Product Base-UCPB*) adı verilir. \mathcal{H}^\perp altuzayı, boyutundan daha az karşılıklı dik çarpım durumları içerir. Bir UPB, \mathcal{H}_S 'nin hiçbir çarpım durumu içermediği bir UCPB'dir (Bennett vd. 1999, DiVincenzo vd. 2003).

Örnek 3.3: 3×3 boyutlu sistemler için

$$S_{UPB} = \{|0\rangle(|0\rangle + |1\rangle), \quad (|0\rangle + |1\rangle)|2\rangle, \quad (|1\rangle + |2\rangle)(|1\rangle + |2\rangle)|0\rangle, \\ (|0\rangle - |1\rangle + |2\rangle)(|0\rangle - |1\rangle + |2\rangle)\}$$

kümesi bir UPB oluşturur.

S_{UPB} 'nin elemanlarıyla gerilen \mathcal{H}_{UPB} altuzayına dik hiçbir çarpım durumu olmadığından \mathcal{H}_{UPB}^\perp altuzayındaki herhangi bir vektör dolanık olmalıdır. Sonuç olarak, değer uzayı kriterinden, \mathcal{H}_{UPB}^\perp altuzayındaki bir desteğe (*support*) sahip herhangi bir saf-olmayan durum dolanıktır. Özel olarak, $\Pi_{\mathcal{H}_{UPB}^\perp} = \mathbb{I} - \Pi_{\mathcal{H}_{UPB}}$ izdüşüm işlemcisi ile orantılı özel bir durumlar sınıfı da dolanıktır. Burada $\Pi_{\mathcal{H}_{UPB}}$, \mathcal{H}_{UPB} altuzayına izdüşüren işlemciyi gösterir. $\Pi_{\mathcal{H}_{UPB}}$ işlemcisinin inşasında kullanılan yolla PPT olduğu gösterilebilir. UPB kavramı, PPTES'lerin kurulmasını sağlar (Terhal 2001).

Örnek 3.4: $|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ ($i = 1, \dots, k < d^2$) boylandırılmış dik çarpım vektörleri kümesi olsun. Bu bazların tamamına dik olan hiçbir çarpım vektörü yoktur (DiVincenzo ve Terhal 2000). Bu bazlar yardımıyla

$$\Pi_{UPB} = \sum_{i=1}^k |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \quad (3.17)$$

izdüşüm işlemcisi tanımlanabilir. $\mathcal{H}_{UPB} := \Pi(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ uzayı $|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ çarpım vektörleriyle gerilir. Böylece \mathcal{H}_{UPB}^\perp uzayı üzerinde

$$X = \mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d - \Pi_{UPB} \quad (3.18)$$

izdüşüm işlemcisi tanımlanabilir. (3.18) eşitliğiyle tanımlanan X işlemcisi tanım olarak bir kenar işlemcisidir. Ayrıca X işlemcisi PPT bir durumdur:

$$X^\Gamma = \mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d - \Pi_{UPB}^\Gamma. \quad (3.19)$$

Burada $\Pi_{UPB}^\Gamma = \sum_{i=1}^k |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes |\beta_i^*\rangle\langle\beta_i^*|$ durumu, $|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i^*\rangle$ UPB tarafından gerilen bir altuzay üzerindeki dik bir izdüşüm işlemcisini tanımlar. Bundan dolayı X ve X^Γ durumlarının değer uzayında hiçbir çarpım vektörü yoktur. Değer uzayı kriterinden dolayı X işlemcisi, ayrılabilir olmayabilir.

3.6 Diğer Ayrılabilirlik Kriterleri

Yukarıda verilen kriterlerin başka ayrılabilirlik için pek çok yaklaşım vardır. Bunlardan başlıcaları; belirsizlik bağıntıları aracılığıyla ayrılabilirlik kriteri, çoğullama kriteri, hesaplanabilir çapraz norm veya yeniden sıralama kriteri ve kuantum Fisher bilişimi aralığıyla ayrılabilirlik kriteri olarak verilebilir. Bu kriterler, EK 2’de ayrıntılı olarak incelenecektir.

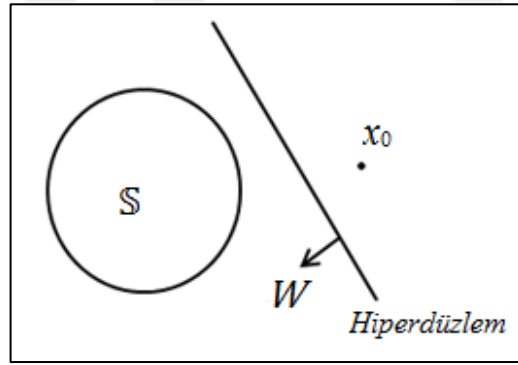
Belirsizlik bağıntıları aracılığıyla kurulan kriterlerden ilki olan yerel belirsizlik bağıntıları aracılığıyla ayrılabilirlik kriteri, yerel gözlenebilirler için varyans tabanlı bir belirsizlik bağıntısı verir. Diğer taraftan entropik belirsizlik bağıntıları aracılığıyla kurulan ayrılabilirlik kriteri, iki-parçalı bileşik bir sistemin von Neumann entropisi ile altsistemlerinin entropileri arasında bir belirsizlik bağıntısıyla ifade edilir. Bir başka ayrılabilirlik kriteri olan çoğullama kriteri, bileşik sistemin yoğunluk işlemcisinin özdeğerleri ile indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin özdeğerleri arasında bir ilişki verir ve bu kriter, belirsizlik bağıntılarıyla kurulan ayrılabilirlik kriterlerinden daha etkindir.

4. DOLANIKLIK TANIKLARI

Yüksek boyutlarda bir ρ yoğunluk işlemcisinin ayrılabilir olup olmadığı sorusu, altsistemlerin bir tensör çarpımı cinsinden yoğunluk işlemcisini yeniden kurmak zor olduğundan dolayı cevaplanması zordur. Fakat böyle bir ayrılabilir durumlar kümesi konveks ve kapalı olduğundan Hahn-Banach ayrılma teoremini uygulamak mümkündür. Bu teorem, dolanıklığı algılamada işlevsel bir araç ve yeni bir yaklaşım verir. Bu yeni araç dolanıklık tanığı olarak adlandırılır.

4.1 Hahn-Banach Teoremi ve Dolanıklık Tanıkları

Teorem 4.1 (Hahn-Banach Teoremi): X sonlu boyutlu bir Banach uzayı ve S bu uzaydaki konveks kompakt bir küme olsun. $x_0 \notin S$ olacak şekilde X uzayında bir nokta olsun. x_0 noktasını S kümesinden ayıran bir hiperdüzlem³ vardır (Bengtsson ve Życzkowski 2006).



Şekil 4.1 Hahn-Banach teoreminin şematik gösterimi

Yukarıdaki teoreme paralel olarak \mathcal{L}_{SEP} ; konveks, kompakt ve kapalı olan ayrılabilir durumlar kümesine karşılık gelen küme olsun. Hahn-Banach teoremine göre bu kümeyi dolanık durumlardan ayıran bir hiperdüzlem olmalıdır. Bu ayırıcı hiperdüzlemin normaline dolanıklık tanığı denir ve Hermitsel bir işlemcidir (Terhal 2000).

³ Boyutu, kendisini çevreleyen uzayın boyutundan bir küçük olan altuzaya hiperdüzlem denir. Uzay, 3-boyutlu ise hiperdüzlemleri 2-boyutlu düzlemlerdir. Benzer şekilde, uzay 2-boyutlu ise hiperdüzlemleri 1-boyutlu doğrulardır.

Tanım 4.1: Hermitsel bir $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisinin blok-pozitif olması için gerek ve yeter koşul tüm ayrılabilir çarpım durumlarındaki beklenen değerinin pozitif olmasıdır:

$$\langle \psi \otimes \Phi | W | \psi \otimes \Phi \rangle \geq 0, \quad \forall |\psi \otimes \Phi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}. \quad (4.1)$$

\mathbb{W}_1 , \mathcal{H}_{AB} uzayındaki blok-pozitif işlemciler kümesi olsun. Bu küme, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ 'de konveks bir koni tanımlar. $W \in \mathbb{W}_1$ olması için gerek ve yeter koşul, her $X \in \mathcal{L}_{SEP}$ için $Tr(XW) \geq 0$ koşulunun sağlanmasıdır. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$, \mathcal{H}_A uzayında ortonormal bir baz olsun. Herhangi bir $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisi

$$W = \sum_{i,j=1}^{d_A} E_{ij} \otimes W_{ij} \quad (4.2)$$

blok-formda yazılabilir. Burada $E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$ standart matris bazı ve $W_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ şeklindedir. Yani, verilen bir $\{|e_k\rangle\}$ bazı için bir W işlemcisi, matris elemanları (bloklar) $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 'den operatörler olan bir $d_A \times d_A$ matris olarak temsil edilebilir. W işlemcisi blok-pozitif ise

$$\langle e_i \otimes \Phi | W | e_i \otimes \Phi \rangle = \langle \Phi | W_{ii} | \Phi \rangle \geq 0 \quad (4.3)$$

köşegen W_{ii} blokları pozitif işlemcilerdir. W pozitif ise blok-pozitif olduğu da açıktır.

Tanım 4.2: Bir $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisinin dolanıklık tanığı olması için gerek ve yeter koşul bu işlemcinin blok-pozitif fakat pozitif olmamasıdır: $W \in \mathbb{W}_1 - \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB})$ (Terhal 2001).

Eşdeğer bir tanım olarak, bir $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ kuantum durumunun dolanık olması için gerek ve yeter koşul $Tr(\rho W) < 0$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ dolanıklık tanığının olmasıdır (Horodecki 1996). Bu durumda W dolanıklık tanığına, ρ durumunun dolanıklığına tanıklık eder denir. Bu tanımın mantıksal değillesmesi alınarak, bir $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ durumunun ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul tüm W dolanıklık tanıkları için $Tr(\sigma W) \geq 0$ koşulunun sağlanmasıdır tanımı da yapılabilir.

Örnek 4.1 (Trampa işlemcisi): Bölüm 2.3'te gösterildiği gibi $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ trampa işlemcisinin etkisi $T|\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle = |\Phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ şeklinde tanımlandığından

$$\langle \psi \otimes \Phi | T | \psi \otimes \Phi \rangle = |\langle \psi | \Phi \rangle|^2 \quad (4.4)$$

yazılabilir ve T 'nin blok-pozitif olduğu görülür. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d$, \mathcal{H} 'de ortonormal bir baz ise trampa işlemcisi

$$T = \sum_{i,j=1}^d E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (4.5)$$

blok-formda yazılabilir ve bazdan bağımsızdır. Trampa işlemcisi için

$$T = \sum_{i=1}^d E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j=1}^d E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (4.6)$$

eşitliği kullanılarak $T(|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle - |e_j\rangle \otimes |e_i\rangle) = -(|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle - |e_j\rangle \otimes |e_i\rangle)$ bağıntısı elde edilebilir. Bu da T 'nin pozitif olmadığını dolayısıyla bir dolanıklık tanığının tanımladığını gösterir.

Örnek 4.2: $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ uzayındaki Werner durumu

$$\rho = \frac{p}{d(d+1)} (\mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d + T) + \frac{1-p}{d(d-1)} (\mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d - T), \quad p \in [0,1] \quad (4.7)$$

T trampa işlemcisi cinsinden yazılabilir. Werner durumunun ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul PPT bir durum olmasıdır. Bu da $p \geq 1/2$ koşuluna karşılık gelir. $TrT = d$ ve $T^2 = \mathbb{I}_d$ bağıntıları aracılığıyla $Tr(\rho T) = 2p - 1$ bulunur. Trampa işlemcisi, tüm dolanık Werner durumlarının dolanıklığını algılar.

4.2 Ayrıştırılabilir Dolanıklık Tanıkları

Tanım 4.3: Pozitif $a, b \geq 0$ sayıları ve pozitif $P, Q \in \mathcal{H}_{AB}$ işlemcileri aracılığıyla

$$W = aP + bQ^\Gamma \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilen W tanığına, ayrıştırılabilir dolanıklık tanığı denir.

Bir W dolanıklık tanığının ayrıştırılabilir olması için gerek ve yeter koşul tüm PPT $\rho \in \mathfrak{S}_{PPT}$ durumları için $Tr(\rho W) \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Dolayısıyla bir W dolanıklık tanığı ve $\rho \in \mathfrak{S}_{PPT}$ için, $Tr(\rho W) < 0$ ise W ayrıştırılamaz bir dolanıklık tanığıdır ve ρ , bir PPT dolanık durumdur (Lewenstein vd. 2000).

Pozitif gönderimler için verilen tanıma paralel olarak W tanığı, k –pozitif ve parçalı transpozu pozitif (kopozitif) bir işlemcinin toplamı olarak yazılabilirse k –ayrıştırılabilir bir tanıktır. Ayrıca W tanığı, 2-ayrıştırılabilir bir tanık değilse atomik bir tanıktır. Atomik tanıklar, bir durumun dolanıklığını algılayan “en zayıf” dolanıklık tanıklarındırlar.

W atomik ise (4.9) denklemiyle temsil edilemeyebilir. W atomik ve bazı PPT ρ durumları için $Tr(\rho W) < 0$ ise ρ dolanıktır. Ayrıca $SN(\rho) = SN(\rho^\Gamma) = 2$ bulunur. Bu da atomik dolanıklık tanıklarının, kuantum dolanıklığın en zayıf şeklini algılayabildiğini gösterir.

$\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ durumunun Schmidt sayısının $SN(\rho) \geq k$ olması için gerek ve yeter koşul $Tr(\rho W) < 0$ olacak şekilde bir W k –Schmidt tanığının olmasıdır (Sanpera vd. 2001). k –Schmidt tanıklarıyla ilgili daha detaylı inceleme EK 3’te verilecektir.

Teorem 4.2: $d_A \times d_B \leq 6$ ise tüm dolanıklık tanıkları ayrıştırılabilir (Woronowicz 1976).

Trampa işlemcisi ayrıştırılabilir bir dolanıklık tanığıdır. Ayrıca (2.42) denklemi kullanılarak en dolanık durum cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$T = \sum_{i,j=1}^d E_{ij} \otimes E_{ji} = \mathbb{M}^\Gamma. \quad (4.9)$$

Ayrıştırılabilir dolanıklık tanıklarının konveks bileşimleri de ayrıştırılabilir bir tanıktır. Fakat ayrıştırılmaz dolanıklık tanıklarının konveks bir bileşimi ayrıştırılabilir veya pozitif bir işlemci olabilir. Bu yüzden ayrıştırılmaz dolanıklık tanıklarının kurulması açık ve kolay değildir. Örnek niteliğinde birkaç ayrıştırılmaz dolanıklık tanığı bilinir ve bunlardan birisi aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 4.3: $|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ bazları cinsinden (3.17) denklemiyle verilen dolanık PPT X işlemcisi için X ’in dolanıklığını algılayan kanonik bir ayrıştırılmaz dolanıklık tanığı

$$W = \Pi_{UPB} - d\epsilon M \quad (4.10)$$

kurulabilir (Bennett 1999, DiVincenzo 2003). ϵ parametresi

$$\epsilon = \inf_{|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle} \sum_{i=1}^K |\langle \alpha_i | \phi_1 \rangle|^2 |\langle \beta_i | \phi_2 \rangle|^2 \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada infimum tüm boylandırılmış $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ çarpım durumları üzerinden alınır. W blok-pozitifdir ve

$$Tr(XW) = -\epsilon Tr(XM) < 0 \quad (4.12)$$

olduğundan ayrıştırılamazdır. Bu inşa süreci, ayrıştırılamaz dolanıklık tanıklarının tam bir karakterizasyonunu yapmak için genelleştirilebilir.

Teorem 4.3: Herhangi bir ayrıştırılamaz W dolanıklık tanığı aşağıdaki gibi temsil edilebilir (Lewenstein vd. 2001):

$$W = P + Q^\Gamma - \epsilon \mathbb{I}_{d_A} \otimes \mathbb{I}_{d_B}; \quad \epsilon = \inf_{|a\rangle \otimes |b\rangle} \langle a \otimes b | P + Q^\Gamma | a \otimes b \rangle. \quad (4.13)$$

Burada infimum tüm boylandırılmış $|a\rangle \otimes |b\rangle$ çarpım durumları üzerinden alınır. Ayrıca bazı X_{EDGE} işlemcileri için P ve Q

$$Tr(PX_{EDGE}) = Tr(Q^\Gamma X_{EDGE}) = 0 \quad (4.14)$$

eşitliğini sağlayan pozitif işlemcilerdir.

Özel olarak, P ve Q , sırasıyla X_{EDGE} ve X_{EDGE}^Γ işlemcilerinin çekirdeği üzerine izdüşüm işlemcileri olabilirler. Bu teorem, bir X_{EDGE} kenar işlemcisi verildiğinde, $Tr(WX_{EDGE}) < 0$ olacak şekilde ayrıştırılamaz bir W dolanıklık tanığının kurulabileceğini söyler.

4.3 Optimal Dolanıklık Tanıkları

Bir W dolanıklık tanığı verildiğinde, bu tanık tarafından \mathcal{H}_{AB} uzayında algılanan tüm dolanık durumlar kümesi

$$D_W = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB}) \geq 0 \mid Tr(\rho W) < 0\} \quad (4.15)$$

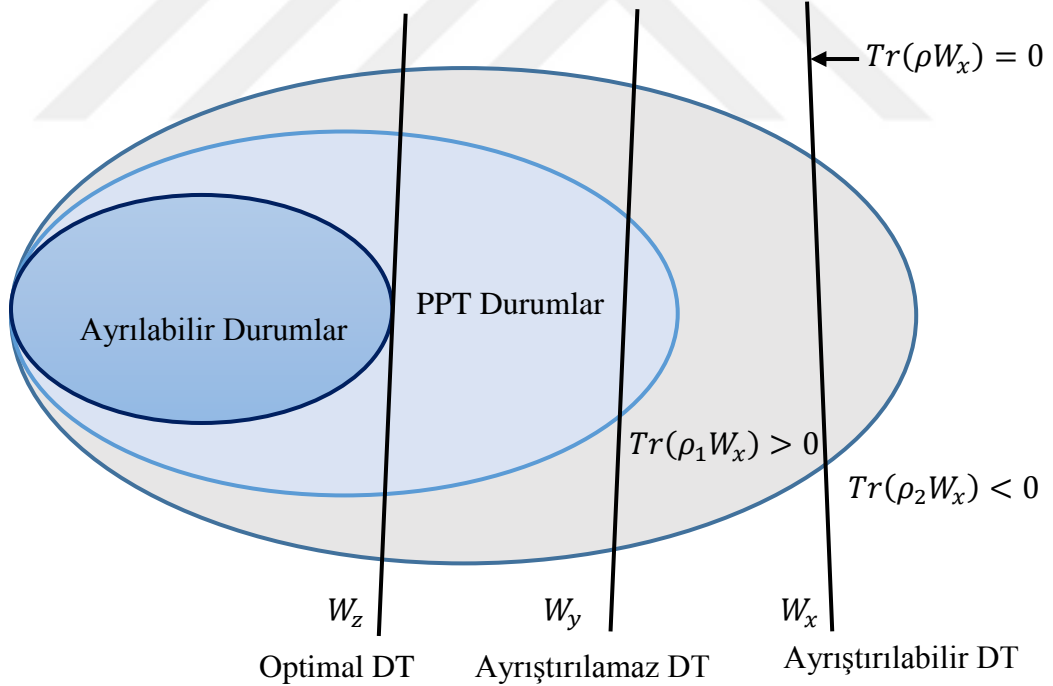
şeklinde tanımlanır. \mathcal{H}_{AB} uzayında W_1 ve W_2 gibi iki dolanıklık tanığı verildiğinde, W_1 tanığının algıladığı tüm dolanık durumlar W_2 tanığıyla da algılanıyorsa W_2 tanığına *daha ince (finer)* tanık denir (Lewenstein vd. 2000). Bu tanıma eşdeğer olarak, W_1 tanığıyla algılanan işlemciler kümesi

$$D_{W_1} = \{ \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB}) \geq 0 \mid \text{Tr}(\rho W_1) < 0 \} \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlansın. Benzer şekilde W_2 tanığıyla algılanan işlemciler kümesi de tanımlanabilir. $D_{W_1} \subseteq D_{W_2}$ içermeye bağıntısı varsa W_2 tanığı, W_1 tanığından dolanıklık algılama anlamında daha incedir. W_1 ve W_2 gibi iki dolanıklık tanığının algıladıkları işlemciler kümesi eşitse iki tanık da aynıdır ve birbirine eşittir:

$$D_{W_1} = D_{W_2} \Leftrightarrow W_1 = W_2. \quad (4.17)$$

Bir W dolanıklık tanığı, kendisinden daha ince bir dolanıklık tanığı yoksa **optimal dolanıklık tanığıdır**.



Şekil 4.2 Dolanıklık tanıkları ve durum uzaylarının şematik gösterimi

Optimal W_z dolanıklık tanığı (DT) ayrılabilir durumlar kümesinin sınırındaki durumları algılar ve diğer tanıklara göre daha ince bir tanıktır. W_y tanığı ayrıştırılmaz olduğundan PPT dolanık durumları algılar. W_x tanığı ise ayrıştırılabilir bir tanıktır.

Lemma 4.1: W_2 tanığının W_1 tanığından daha ince bir tanık olması için gerek ve yeter koşul

$$W_1 = (1 - \alpha)W_2 + \alpha P, \quad 1 > \alpha \geq 0 \quad (4.18)$$

olacak şekilde bir P işlemcisinin ve bir α sayısının olmasıdır (Lewenstein vd. 2000).

Teorem 4.4: W dolanıklık tanığının optimal olması için gerek ve yeter koşul

$$W' = (1 + \alpha)W - \alpha P; \quad \forall P, \quad \alpha > 0 \quad (4.19)$$

işlemcisinin dolanıklık tanığı olmamasıdır. W' blok-pozitiflik özelliğini ihlal eder.

İspat: Yeter koşul için, Lemma 4.1'e göre W 'dan daha ince bir dolanıklık tanığı yoktur. Bundan dolayı W optimaldir. Gerek koşul: W' bir dolanıklık tanığı ise yine Lemma 4.1'e göre W optimal değildir. P_W, \mathcal{H} Hilbert uzayını gererse W tanığı optimaldir.

$P \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisi pozitif ise

$$\lambda \leq \lambda_0 = \inf_{|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle} \langle \alpha \otimes \beta | P | \alpha \otimes \beta \rangle \quad (4.20)$$

olduğunda

$$W_\lambda = P - \lambda \mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B \quad (4.21)$$

işlemcisi blok-pozitifdir. Burada infimum boylandırılmış $|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ vektörleri üzerinden alınır. Bu durumda W_λ pozitif bir işlemci değilse ve $\lambda \leq \lambda_0$ ise W_λ bir dolanıklık tanığıdır. W_{λ_0} tanığı blok-pozitif işlemciler kümesinin sınırında olduğundan genel olarak optimal bir tanık olması gerekmez. Böyle tanıklara *zayıf optimal* tanıklar da denir (Badziąg vd. 2013). Bazı ayrılabilir σ durumları için $Tr(\sigma W) = 0$ ise W tanığı zayıf optimaldir (Sperling ve Vogel 2009).

Bir W dolanıklık tanığı verildiğinde

$$P_W = \{ |\psi \otimes \Phi\rangle \in \mathcal{H} \mid \langle \psi \otimes \Phi | W | \psi \otimes \Phi \rangle = 0 \} \quad (4.22)$$

veya eşdeğer olarak ayrılabilir bir ρ durumu için

$$P_W = \{ \rho \geq 0 \mid Tr(\rho W) = 0 \} \quad (4.23)$$

kümesi tanımlanabilir (Lewenstein vd. 2000). $\text{span } P_W = \mathcal{H}$ özelliği sağlanıyorsa W tanığı, germe özelliğine (*spanning property*) sahiptir denir. P_W kümesi, dolanık durumlarla sınırdaki bulunan ayrılabilir durumların özelliklerini ve bir dolanıklık tanığının optimal olup olmadığını belirlemede önemli bir rol oynar. Verilen bir ρ durumunun dolanıklığını algılayan bir W dolanıklık tanığı varsa bu duruma eklenmiş bir

$$\rho_1 = \sum_i p_i |\psi_i \Phi_i\rangle \langle \psi_i \Phi_i| ; p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad |\psi_i \Phi_i\rangle \in P_W. \quad (4.24)$$

çarpım durumuyla kurulan $\rho' = \rho + \rho_1$ durumunun dolanıklığı da W tanığıyla algılanır. Bu formdaki herhangi bir işlemci, ayrılabilir durumlar ve dolanık durumlar arasındaki sınırdadır. Bu bağlamda, ρ durumunun küçük bir miktarı kendisine eklenirse dolanık bir durum elde edilir. Bundan dolayı P_W kümesinin yapısı, ayrılabilir durumlar ve dolanık durumlar arasındaki sınırı karakterize eder.

Önerme 4.1: Germe özelliğine sahip her dolanıklık tanığı optimaldir.

Örnek 4.4: Trampa işlemcisi germe özelliğine sahiptir. Bu durumda (4.22)'ye göre

$$\langle \psi \otimes \Phi | T | \psi \otimes \Phi \rangle = \langle \psi \otimes \Phi | \Phi \otimes \psi \rangle = |\langle \psi | \Phi \rangle|^2 \quad (4.25)$$

yazılabilir. $e_k \otimes e_l ; k \neq l$ ve $(e_m + ie_n) \otimes (e_m - ie_n) ; m < n$ çarpım vektörleri kümeleri $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ uzayını gererler. Bu yüzden trampa işlemcisi, optimal bir dolanıklık tanığıdır.

P_W kümesi, \mathcal{H}_{AB} uzayını germiyorsa bir $|\phi\rangle \in \text{span } P_W^\perp$ vektörü için

$$W' = W - \lambda |\phi\rangle \langle \phi| \quad (4.26)$$

işlemcisi bir dolanıklık tanığıdır. Burada

$$\lambda = \inf_{|a\rangle \otimes |b\rangle} \frac{\langle a \otimes b | W | a \otimes b \rangle}{|\langle a \otimes b | \phi \rangle|^2} \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlanır. $\lambda > 0$ pozitif ise yukarıdaki infimumu ifade eden $|a\rangle \otimes |b\rangle$ çarpım vektörü $P_{W'}$ kümesine aittir. Bunun sonucu olarak $P_{W'}$ kümesi, P_W kümesinden daha büyük bir uzayı gerer. Bu işlem tekrarlanarak germe özelliğine sahip bir dolanıklık

tanığı kurulabilir. Dolayısıyla bu tanık, optimal olacaktır. Tüm $|\phi\rangle \in \text{span}P_W^\perp$ vektörleri için, $\lambda = 0$ ise dolanıklık tanığından pozitif bir gözlenebilir çıkarılamaz. Dolanıklık tanığı optimaldir fakat germe özelliğine sahip değildir.

Lemma 4.2: $PP_W \neq 0$ ise P işlemcisi, W tanığından çıkarılamaz.

İspat: $\langle \psi \otimes \Phi | P | \psi \otimes \Phi \rangle > 0$ olacak şekilde bazı $|\psi \otimes \Phi\rangle \in P_W$ durumları vardır. Bu çarpım vektörleri herhangi bir $W - \alpha P$ için (4.1) denkleminde yazılırsa eşitsizliğin herhangi bir $\alpha > 0$ için sağlanmadığı görülür. $W - \alpha P$ dolanıklık tanığı değildir. Dolayısıyla P çıkarılamaz. $\ker(P) \supseteq P_W$ içerme bağıntısı yazılabilirse $W - \alpha P$ işlemcisi bulunabilir. Burada $\ker(P)$, P 'nin çekirdeğini gösterir.

Tanım 4.4: Çizgisel bir $S \subset \mathcal{H}_{AB}$ altuzayı, S uzayında hiçbir çarpım vektörü yoksa tamamen dolanık olarak adlandırılır. Optimal ayrıştırılabilir bir W dolanıklık tanığı $W = Q^T$ şeklindedir. Burada Q , \mathcal{H}_{AB} uzayında tamamen dolanık bazı altuzaylar tarafından desteklenmiş pozitif bir işlemcidir.

Önerme 4.2: $d = \min\{d_A, d_B\} = 2$ olacak şekilde \mathcal{H}_{AB} uzayındaki ayrıştırılabilir bir W dolanıklık tanığı için aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir (Augusiak vd. 2011a, 2011b, Kye 2012):

- (i) W germe özelliğine sahiptir,
- (ii) W optimaldir,
- (iii) $W = Q^T, Q \geq 0$.

Ayrıştırılamaz bir W dolanıklık tanığı tarafından algılanan durumlar kümesi

$$D_W^{PPT} = \{\rho \in \mathfrak{S}_{PPT} \mid \text{Tr}(\rho W) < 0\} \quad (4.28)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu küme, W dolanıklık tanığı tarafından algılanan PPT dolanık durumlar kümesidir.

Tanım 4.5: $D_{W_1}^{PPT} \supseteq D_{W_2}^{PPT}$ içerme bağıntısı sağlanıyorsa ayrıştırılamazlık anlamında W_1 tanığı W_2 tanığından daha incedir (*nd-finer*). Herhangi bir W dolanıklık tanığı için,

W 'dan ayrıştırılmazlık anlamda daha ince olan başka bir dolanıklık tanığı yoksa W tanığına ayrıştırılmaz-optimal (*nd-optimal*) tanık denir (Lewenstein vd. 2000).

Önerme 4.3: Bir W tanığının nd-optimal bir tanık olması, her ayrıştırılabilir $D = A + B^T$; $A, B \geq 0$ işlemcisi için, $W - D$ işlemcisinin blok-pozitif bir işlemci olmamasına eşdeğerdir.

Dolanıklığın algılanması kapsamında nd-optimallik, optimallikten daha güçlüdür.

Önerme 4.4: Bir W tanığının nd-optimal bir tanık olması için gerek ve yeter koşul W ve W^T tanıklarının her ikisinin de optimal olmasıdır (Lewenstein vd. 2000).

Sonuç 4.1: W tanığı optimal ve ayrıştırılabilirse $W^T \geq 0$, dolanıklık tanığı değildir. W tanığı optimal ve ayrıştırılmaz ise W^T da ayrıştırılmazdır fakat optimal olması gerekmez. Bu durumda W optimaldir fakat nd-optimal değildir (Ha ve Kye 2012a).

Sonuç 4.2: Pozitif gönderimler dolanıklığın algılanması aşamasında karşılık gelen dolanıklık tanıklarına göre daha güçlüdürler. Fakat CP olmayan pozitif gönderimler ve etkileri fiziksel bir işlem olarak realize edilemediklerinden pozitif bir Λ gönderimi ile bazı CP gönderimler karıştırılarak CP bir gönderim elde edilebilir. CP bir gönderim, laboratuvarında realize edilebilir ve etkileri, Λ tarafından algılanan durumların dolanıklığını karakterize eder. Bu şekilde kurulan işlem yapısal fiziksel yaklaşım (*structural physical approximation - SPA*) olarak adlandırılır ve bir Λ gönderiminin SPA'sı

$$\Lambda_p(A) := p\Lambda(A) + (1 - p)\mathbb{I}_B \text{Tr}A \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlanır. SPA, optimal pozitif gönderimleri dolanıklık-kırıcı kanallara dönüştürür. Dolanıklık tanıkları dilinde bu hipotez aşağıdaki gibi kurulabilir: W sonlu boyutlu bir \mathcal{H}_{AB} Hilbert uzayında ($D = d_A d_B$) etki eden birim izli ($\text{Tr}W = 1$) bir dolanıklık tanığı olsun. En saf-olmayan durum ile W tanığının konveks bileşimi

$$W(p) = pW + (1 - p) \frac{\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B}{d_A d_B} \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda her $p \leq p_*$ için $W(p) \geq 0$ olacak şekilde bir $p_* \in (0, 1)$ vardır. $W(p_*)$, W 'nin SPA'sı olarak adlandırılır. SPA hipotezine göre W optimal bir dolanıklık tanığı ise bu tanığın SPA uygulanmış olan $W(p_*)$ ayrılabilir bir durumdur. $W(p_*)$ ayrılabilir ise her $p \leq p_*$ için $W(p)$ durumu da ayrılabilir. Bu hipotez çeşitli tanık örnekleriyle desteklenmiş ve sürekli değişkenlerde analiz edilmiştir (Chruściński vd. 2009b, Chruściński ve Pytel 2010, 2011, Qi ve Hou 2012, Zwolak ve Chruściński 2013, 2014). EK 4 - 5'te bu örneklerden bir kısmı verilmiştir. Son yıllarda SPA hipotezinin, ayrıştırılmaz dolanıklık tanıkları için ve daha sonra ayrıştırılabilir tanıklar için geçerli olmadığı gösterilmiştir (Ha ve Kye 2012b, Chruściński ve Sarbicki 2014).

Choi-Jamiołkowski izomorfizmi, $\Lambda: M_d(\mathbb{C}) \mapsto M_d(\mathbb{C})$ pozitif gönderimleri ve dolanıklık tanıkları arasında bire bir karşı gelim olduğunu söyler: $\Lambda_W \leftrightarrow W_\Lambda \in M_{d^2}(\mathbb{C})$. Choi-Jamiołkowski izomorfizmin sonucu olarak aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- $W \geq 0 \iff \Lambda_W \in CP$.
- $W \in EW \iff CP \not\exists \Lambda_W \geq 0$.
- W ayrıştırılabilir $\iff \Lambda_W$ ayrıştırılabilir bir gönderimdir.
- W ayrıştırılmaz $\iff \Lambda_W$ ayrıştırılmaz bir gönderimdir.

4.4 Ekstremal Dolanıklık Tanıkları

W_1 ve W_2 gibi iki blok-pozitif işlemci bazı $a > 0$ değerleri için, $W_1 = aW_2$ eşitliğini sağlıyorsa W_1 ve W_2 işlemcilerine eşdeğerdir denir ve $W_1 \sim W_2$ şeklinde gösterilir. Dolayısıyla W_1 ve W_2 dolanıklık tanıklarının algıladıkları dolanık durumlar kümesi için, $D_{W_1} = D_{W_2}$ eşitliği de sağlanır ve her iki dolanıklık tanığının dolanıklık algılama güçleri aynıdır denir.

Tanım 4.6: Blok-pozitif ve birbirlerine eşdeğer olmayan W ve W' işlemcileri için, $W - W'$ farkı blok-pozitif olarak kalmıyorsa W işlemcisi ekstremaldir.

Birim izli blok-pozitif işlemciler, \mathbb{R}^{D^2-1} ($D = d_A d_B$) uzayında kompakt ve konveks bir küme tanımlarlar. W , bu kompakt ve konveks kümenin ekstremal bir noktasıysa ekstremal bir işlemcidir. Krein-Milman teoreminden, kompakt ve konveks bir küme ekstremal noktaları cinsinden tek bir şekilde tanımlanır (Rockafellar 1970). Her ekstremal dolanıklık tanığı optimaldir.

Önerme 4.5: W tanığının ekstremal ayrıştırılabilir bir dolanıklık tanığı olması için gerek ve yeter koşul dolanık bir $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ durumu için $W = |\psi\rangle\langle\psi|^F$ eşitliğinin yazılabilmesidir (Marciniak 2010).

$\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ uzayındaki $T = \mathbb{M}^F$ trampa işlemcisi ekstremal bir dolanıklık tanığıdır.

Önerme 4.6: W , ayrıştırılmaz ekstremal bir dolanıklık tanığı olsun. Bu durumda W^F da ayrıştırılmaz ve ekstremaldir. Herhangi bir ayrıştırılmaz ekstremal dolanıklık tanığı nd-optimaldir. Ekstremal blok-pozitif işlemciler içinde ekspozе işlemciler sınıfı vardır.

Ayrıştırılmaz ekstremal dolanıklık tanıkları için EK 4'te örnekler verilmiştir. Son yıllarda ekstremal dolanık tanıkları için başka örnekler de analiz edilmiştir (Sengupta ve Arvind 2011, 2013, Hansen vd. 2015).

4.5 Ekspozе Dolanıklık Tanıkları

Tanım 4.7: Ekstremal blok-pozitif bir $W_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_{AB})$ işlemcisi, aşağıdaki özelliği sağlıyorsa ekspozеdir denir: $Tr(W_0 X) = 0$ olacak şekilde ayrılabilir bir X işlemcisi vardır ve bazı blok-pozitif W işlemcileri için

$$Tr(WX) = 0 \tag{4.31}$$

eşitliği sağlanıyorsa W_0 ve W eşdeğerdendir: $W_0 \sim W$.

Boylandırılmış işlemcilerin kompakt ve konveks bir kümesi ele alınırsa ekspozе noktalar, ekstremal noktaların bir altuzayını tanımlarlar.

Teorem 4.5: Kompakt-konveks bir kümenin ekspozе noktaları, ekstremal noktalar kümesinde yoğundur (Rockafellar 1970). Bu teorem aşağıdaki önermenin bir ispatını verir.

Önerme 4.7: Tüm ekstremal ayrıştırılabilir dolanıklık tanıkları, ekspozedirler (Marciniak 2013).

Ayrıştırılmaz dolanıklık tanıkları için ekspozelik tartışması çok daha zordur. Ekspozelik için aşağıdaki önerme yardımıyla dolanıklığı algılanması kapsamında kullanışlı koşullar kurulabilir.

Önerme 4.8: W , ekspozе bir dolanıklık tanığı ise germe özelliğine sahiptir. Germe özelliği optimallik için yeter, ekspozelik için gerek koşuldur. İndirgenemez dolanıklık tanıklar sınıfının ekspozeliği için de yeter bir koşul kurulabilir.

Tanım 4.8: Çizgisel bir $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ gönderiminin indirgenebilir olması, her $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ işlemcisi için $[\Lambda(A), X] = 0$ olacak şekilde sadece bir $X = \lambda \mathbb{I}_B$ işlemcisinin olmasıdır.

Lemma 4.3: $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ çizgisel bir gönderim ise

$$\sum_{i,j=1}^{d_A} E_{ij} \otimes \Lambda(E_{ji}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_B} \Lambda^D(F_{\alpha\beta}) \otimes F_{\beta\alpha} \quad (4.32)$$

eşitliği sağlanır (Pillai 1967). Burada $F_{\alpha\beta} = |f_\alpha\rangle\langle f_\beta|$ ve $\{f_1, \dots, f_{d_B}\}$ \mathcal{H}_B 'de keyfi bir ortonormal bazdır. Λ veya Λ^D gönderimlerinden birisi indirgenemez pozitif bir gönderim ise W dolanıklık tanığı da indirgenemezdir.

Λ ve Λ^D gönderimleri indirgenebilirse sırasıyla

$$N_W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{|\psi\rangle \otimes |\psi^*\rangle \otimes |\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B: \langle \psi \otimes \phi | W | \psi \otimes \phi \rangle = 0\}$$

$$N_W^D = \text{span}_{\mathbb{C}}\{|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\phi^*\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B: \langle \psi \otimes \phi | W | \psi \otimes \phi \rangle = 0\}$$

kümeleri tanımlanabilir. Bu durumda

$$\dim N_W = (d_A^2 - 1)d_B, \quad \dim N_W^D = (d_B^2 - 1)d_A \quad (4.33)$$

bağıntılarından birisi sağlanıyorsa W dolanıklık tanığı güçlü germe özelliğine (*strong spanning property*) sahiptir (Chruściński ve Sarbicki 2012a, Sarbicki ve Chruściński 2013).

Önerme 4.9: Güçlü bir germe özelliğine sahip herhangi bir indirgenemez dolanıklık tanığı ekspozedir.

Önerme 4.10: $d = \min\{d_A, d_B\} = 2$ olacak şekilde ayrıştırılabilir indirgenemez bir $W \in \mathcal{H}_{AB}$ dolanıklık tanığı için aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir (Chruściński ve Sarbicki 2012a):

- (i) W güçlü germe özelliğine sahiptir,
- (ii) W ekspozedir,
- (iii) $W = |\psi\rangle\langle\psi|^T$.

Ekspoze ayrıştırılmaz dolanıklık tanıkları son yıllarda ayrıntılı olarak incelenmiştir. (Majewski 2012, Majewski ve Tylec 2013, Marciniak 2013). Bu tanıklardan bir kısmı EK 4 - 5'te incelenmiştir. Ayrıca ekspoze olmayan ekstremal ayrıştırılmaz dolanıklık tanıkları için bazı sınıflar ve örnekler EK 4'te verilmiştir.

5. DOLANIKLIĞIN SÜREKLİ KUANTUM KANALLARLA ALGILANMASI

Bu bölümde, sadece kuantum kanallar kullanılarak sürekli bir şekilde kuantum süreçlerin işlenmesi ve dolanıklığın algılanmasının her ikisinin de gerçekleştirilebilmesinin mümkün olduğu gösterilecektir. Bu çerçevenin tutarlılığı ve geçerliliği için ilk olarak dört gerçel parametreye bağlı pozitif bir gönderim analiz edilecektir. Böyle parametrelili pozitif bir gönderim, uygun parametre ailesinin tümleyen altkümelerinde desteklenen kuantum kanallar ve dolanıklık tanıklarının her ikisini de üretebilir. Kuantum kanallar ve dolanıklık tanıkları ailesi, tüm $N \times N$ -tipi iki-parçalı sistemler için kurulur. Sistemi oluşturan A ve B parçaların her ikisi de çift boyutlu ($N = 2n \geq 2$) \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B Hilbert uzaylarına sahiptirler.

Bölüm 5.3'te gösterileceği gibi herhangi bir dolanıklık tanığı iki uygun kuantum kanalın ağırlıklı farkı cinsinden yazılabilir ve bu da çok sayıda doğrudan dolanıklık algılama metodu sağlar. Sadece kuantum kanallara bağlı olduklarından tüm bu metotlar fiziksel olarak uygulanabilir ve herhangi bir ön bilgi ve dolanıklık tanığına gerek duymaksızın doğrudan laboratuvarında gerçekleştirilebilirler (Duran vd. 2014).

5.1 4-Parametrelili Pozitif Gönderimler Ailesi

$E_{kl} = |e_k\rangle\langle e_l|$, 2 –boyutlu \mathcal{H}_2 Hilbert uzayındaki standart birim vektörlere karşılık gelen matris bazları olsun: $|e_k\rangle; k = 1,2$. Bir $Y \in B(\mathcal{H}_B)$ işlemcisi

$$Y = \sum_{k,l=1}^2 E_{kl} \otimes Y_{kl} \quad (5.1)$$

blok-formunda yazılabilir. Burada $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n$, ($N = 2n$) –boyutlu Hilbert uzayıdır. $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}: B(\mathcal{H}_B) \rightarrow B(\mathcal{H}_B)$ çizgisel gönderiminin Y matrisine etkisi

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n \text{Tr} Y_{11} - \alpha Y_{11} & -\gamma Y_{12} \\ -\gamma^* Y_{21} & \mathbb{I}_n \text{Tr} Y_{22} - \beta Y_{22} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Burada α ve β gerçel, γ ise kompleks bir parametredir. \mathbb{I}_n , $n \times n$ 'li birim matristir.

Lemma 5.1: $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ gönderiminin pozitif olması

$$\alpha \leq 1, \quad \beta \leq 1, \quad |\gamma| \leq \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} \quad (5.3)$$

eşitsizliklerinin sağlanmasına eşdeğerdir.

İspat: Bir Λ gönderiminin pozitif olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir rank-1 izdüşüm işlemcisinin (*projeksiyon*) pozitifliğini korumasıdır. Buna göre, izdüşüm işlemcisi

$$P = |\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{i,j=1}^2 E_{ij} \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_j| \quad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $|\phi\rangle = |e_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle$, $\langle\phi|\phi\rangle = 1 = c_1^2 + c_2^2$ ve $c_i^2 = \langle\phi_i|\phi_i\rangle$ olacak şekilde boylandırılmış vektördür. $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ çizgisel gönderiminin P işlemcisine etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}(P) = \begin{pmatrix} c_1^2 \mathbb{I}_n - \alpha |\phi_1\rangle\langle\phi_1| & -\gamma |\phi_1\rangle\langle\phi_2| \\ -\gamma^* |\phi_2\rangle\langle\phi_1| & c_2^2 \mathbb{I}_n - \beta |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

$d_i^2 = \langle\psi_i|\psi_i\rangle$ olacak şekilde herhangi bir $|\psi\rangle = |e_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ durumu için (5.5) denkleminin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E &= \langle\psi|\Lambda_{\alpha\beta\gamma}(P)|\psi\rangle \\ &= c_1^2 d_1^2 + c_2^2 d_2^2 - \alpha |\langle\psi_1|\phi_1\rangle|^2 - \beta |\langle\psi_2|\phi_2\rangle|^2 - 2\text{Re}(z) \end{aligned} \quad (5.6)$$

bulunur. Burada $\text{Re}(z)$, $z = \gamma \langle\psi_1|\phi_1\rangle \langle\psi_2|\phi_2\rangle$ ifadesinin gerçel kısmıdır. $\text{Re}(z) \leq |z|$ eşitsizliği ve $|\langle\phi|\chi\rangle|^2 \leq \langle\phi|\phi\rangle \langle\chi|\chi\rangle$ Cauchy-Bunyakovski-Schwarz (CBS) eşitsizliği kullanılarak (5.6) denklemini

$$\begin{aligned} E &\geq \left(\sqrt{1-\alpha} |\langle\psi_1|\phi_1\rangle| - \sqrt{1-\beta} |\langle\psi_2|\phi_2\rangle| \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} - |\gamma| \right) |\langle\psi_1|\phi_1\rangle \langle\phi_2|\psi_2\rangle| \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (5.3) eşitsizlikleri sağlanıyorsa her $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ için (5.7) beklenen değeri pozitifdir. Tersine, her $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ için $E \geq 0$ eşitsizliği sağlansın. $|\psi_1\rangle = 0$ ve $|\psi_2\rangle = 0$ iken (5.6) denkleminde sırasıyla $\beta \leq 1$ ve $\alpha \leq 1$ eşitsizlikleri elde edilir. Bu koşullar yine (5.6) denkleminde kullanılırsa

$\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}|\langle\psi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\psi_2\rangle| - \text{Re}(z)$ ifadesinin her $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ için pozitif olması gerektiği görülür. Bu da (5.3) denklemindeki $|\gamma| \leq \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}$ koşulunu gerektirir.

$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ gönderiminin $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ Choi matrisi

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{k,l=1}^{2n} E_{kl} \otimes \Lambda_{\alpha\beta\gamma}(E_{kl}), \quad \mathbb{M} = \sum_{kl} E_{kl} \otimes E_{kl}. \quad (5.8)$$

şeklinde yazılır. Burada E_{kl} , $B(\mathcal{H}_B)$ 'nin standart matris birimleridir. $|\mathcal{E}_j\rangle; j = 1, \dots, n$ vektörleri \mathcal{H}_n uzayının standart vektör bazları ve $\mathcal{E}_{ij} = |\mathcal{E}_i\rangle\langle\mathcal{E}_j|$ karşılık gelen matris bazları olsun. (5.2) ve (5.8) denklemlerinden $k \leq n$ için $E_k = |e_1\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$ ve $k = n + i$ için $E_k = |e_2\rangle \otimes |\mathcal{E}_i\rangle$ şeklinde olduğundan Choi matrisi

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} B_{11} - \alpha\mathbb{M}_{11} & -\gamma\mathbb{M}_{12} \\ -\gamma^*\mathbb{M}_{21} & B_{22} - \beta\mathbb{M}_{22} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$B_{ab} = \mathbb{I}_n \otimes e_{ab} \otimes \mathbb{I}_n, \quad \mathbb{M}_{ab} = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij} \otimes e_{ab} \otimes \mathcal{E}_{ij} \quad (5.10)$$

$2n^2 \times 2n^2$ boyutlu matrislerdir ve

$$B_{ab}B_{cd} = \delta_{bc}B_{ad}, \quad \mathbb{M}_{ab}\mathbb{M}_{cd} = \delta_{bc}n\mathbb{M}_{ad}, \quad \mathbb{M}_{ab}B_{cd} = \delta_{bc}\mathbb{M}_{ad} \quad (5.11)$$

kurallarını sağlarlar.

Bölüm 2.3'te verilen Choi-Jamiołkowski izomorfizmine göre her ayrılabilir durumda $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ Choi matrisinin beklenen değeri, (5.3) denklemindeki eşitsizliklerin sağlanması koşuluyla pozitifdir ve $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ gönderiminin CP olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ matrisinin pozitif olmasıdır. (5.3) denklemindeki koşulların sağlandığı diğer tüm durumlarda $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ bir dolanıklık tanığıdır. $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$, parametrelerin değerlerine bağlı olarak dolanıklık tanıkları ve kuantum kanalların sürekli ailelerinin bir kaynağıdır ve aşağıdaki bölümde bazı özel durumlar için bu özellikleri incelenecektir.

5.2 2-parametrelı Dolanıklık Tanıkları ve Kuantum Kanal Aileleri

Bu bölümde $\alpha = \beta$, ve gerçel $\gamma \in \mathbb{R}$ değerleri için, 2-parametrelı $\mathcal{C}_{\alpha\gamma} = \mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ ailesi incelenecektir. Bu durumda elde edilen gönderim, $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma} = (n - \alpha)^{-1}\Lambda_{\alpha\gamma}$ şeklinde ifade edilir. $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ gönderimi, ünital $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}(\mathbb{I}_{2n}) = \mathbb{I}_{2n}$ ve iz-koruyan $Tr[\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}(X)] = TrX$ bir gönderimdir. (5.3) eşitsizliklerinden

$$\mathcal{R} = \{(\alpha, \gamma) \mid \alpha \leq 1 \text{ ve } |\gamma| \leq 1 - \alpha\} \quad (5.12)$$

bölgesi $\alpha\gamma$ düzleminde tanımlanırsa, \mathcal{R} 'nin her bir noktasına ünital ve iz-koruyan bir $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ pozitif gönderimi karşılık gelir (Ando 1989, Landau ve Streater 1993). Kuantum kanalların ve dolanıklık tanıklarının bölgelerini ayırmak için $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ Choi matrisinin spektrumu belirlenmelidir.

Lemma 5.2: $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ Choi matrisinin spektrumu

$$spec \{\mathcal{C}_{\alpha\gamma}\} = \{\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2^\pm = -\alpha n + 1 \pm n\gamma\} \quad (5.13)$$

kümesinden ibarettir. λ_0 ve λ_1 özdeğerlerinin katlılıkları sırasıyla $2n^2$ ve $2(n^2 - 1)$ iken λ_2^+ ve λ_2^- dejenere değildirler.

İspat: (5.9) denklemini kullanarak Choi matrisi için

$$\mathcal{C}_{\alpha\gamma}^2 - \mathcal{C}_{\alpha\gamma} = x \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{22} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{M}_{12} \\ \mathbb{M}_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada $x = n(\alpha^2 + \gamma^2)$ ve $y = \gamma(2n\alpha - 1)$ şeklindedir. (5.14) denkleminin her iki tarafı iki kez $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ ile çarpılarak

$$\mathcal{C}_{\alpha\gamma}(\mathcal{C}_{\alpha\gamma} - \mathbb{I}_{4n^2}) \left\{ [\mathcal{C}_{\alpha\gamma} + (n\alpha - 1)\mathbb{I}_{4n^2}]^2 - n^2\gamma^2\mathbb{I}_{4n^2} \right\} = 0 \quad (5.15)$$

minimal polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri, (5.13) denkleminle verilen $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ 'nin spektrumudur. Katlılıklar $Tr\mathcal{C}_{\alpha\gamma} = 2n(n - \alpha)$ eşitliğinden çıkarılabilir: $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ 'nin izi, γ 'dan bağımsız olduğundan λ_2^\pm özdeğerlerinin dejenere olmaması α bağımlılığından elde edilir. Benzer şekilde λ_1 'in katlılığı $2(n^2 - 1)$ bulunur ve bu da λ_0 'in katlılığının $2n^2$ olmasını gerektirir.

$n = 1$ durumunda λ_1 özdeğeri ortadan kalkar ve kanalların özel bir sınıfı elde edilir: $n = 1$ için herhangi bir 2×2 boyutlu X matrisine $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ gönderimin etkisi

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}(X) = C \circ X = X \circ C \quad (5.16)$$

Schur (ya da Hadamard) çarpım formundadır. Burada $C = \mathbb{I}_2 - \gamma' \sigma_x$, $\gamma' = \gamma/(1 - \alpha)$; $\alpha < 1$ ve σ_x Pauli matrisidir. \circ işlemi, $(C \circ X)_{ij} = C_{ij}X_{ij}$ Schur çarpımını gösterir. Genellikle Λ_C ile gösterilen böyle gönderimler; Schur çarpım gönderimleri, Schur çarpanları veya köşegen gönderimler olarak bilinirler ve C matrisiyle karakterize edilirler (Paulsen 2002, Haagerup ve Musat 2011). Λ_C gönderiminin pozitif olması için gerek ve yeter koşul $C \geq 0$ matrisinin pozitif olmasıdır. Bu koşul aynı zamanda Λ_C gönderimin CP olması için de gerek ve yeter koşuldur. Özel olarak, bir Schur gönderiminden elde edilebilecek bir dolanıklık tanığı yoktur.

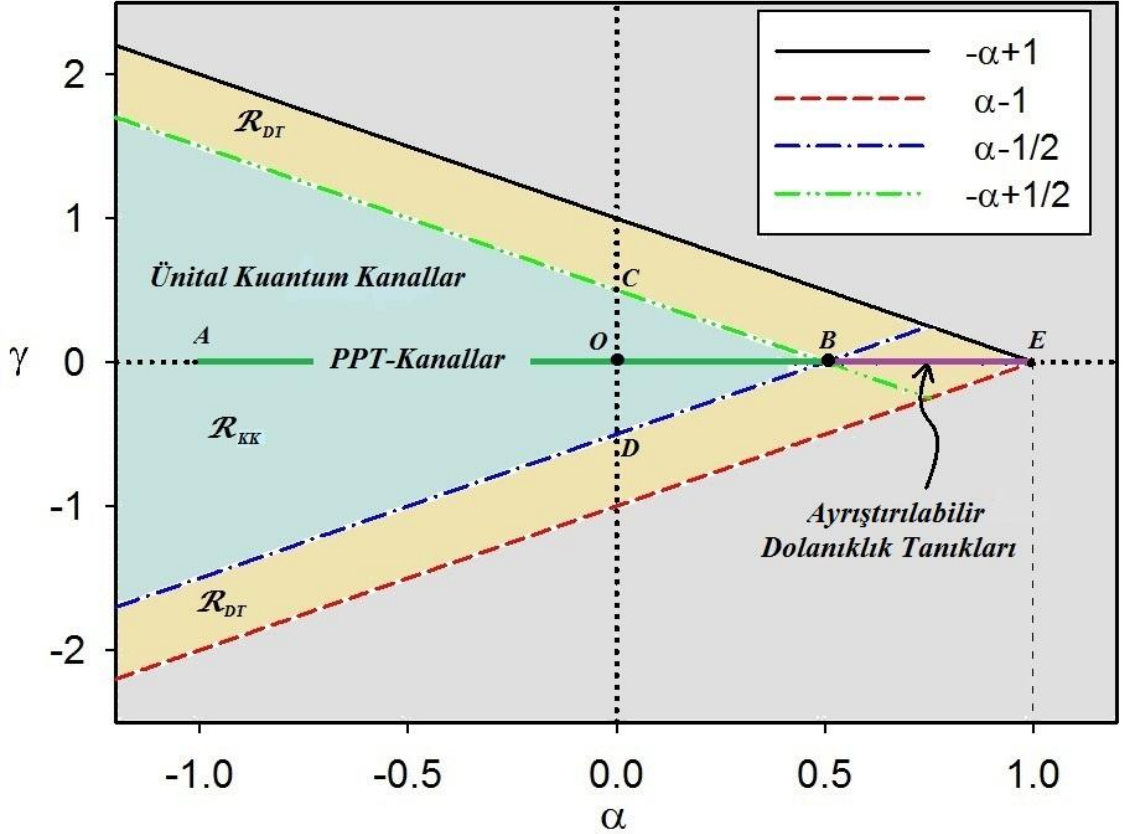
(5.16) denklemindeki C matrisinin pozitifliği, $\gamma' \in [-1,1]$ koşuluna eşdeğerdir. $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ gönderimi $\alpha - 1 \leq \gamma \leq 1 - \alpha$ için ünital bir Schur kanalını temsil eder ve herhangi bir dolanıklık tanığı, bu koşullar altında elde edilemez. $\alpha = 0$ koşulu, $\gamma = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda $\Lambda_{\alpha\gamma}$ bir sıfır gönderimdir ve açıkça CP'dir. Ayrıca herhangi bir X işlemcisine etkisi

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}(X) = \frac{1}{2} [(1 - \gamma') \mathbb{I}_2 X \mathbb{I}_2 + (1 + \gamma') \sigma_z X \sigma_z] \quad (5.17)$$

birim işlemci ve σ_z Pauli işlemcisi cinsinden iki eşlenik etkinin bir bileşimi olarak yazılabilir. Kübit durumlarda bu dönüşümler faz-sönümleyici (*phase-damping*) kanalların üniter eşdeğeri olan faz-çevirici (*phase-flip*) kanalları tanımlarlar.

$n > 1$ için, (5.13) kümesi \mathcal{R}' de en az bir negatif elemana sahip olduğundan $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ bir dolanıklık tanıkları ailesini temsil eder. Diğer durumlarda $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ ünital bir kuantum kanallar ailesidir. Kuantum kanallar ve dolanıklık tanıklarının bölgelerini belirlemek için, \mathcal{R}' 'nin $\gamma \geq \alpha - n^{-1}$ ve $\gamma \leq -\alpha + n^{-1}$ koşullarına karşılık gelen altkümeleri sırasıyla \mathcal{R}_1 ve \mathcal{R}_2 ile gösterilsin. $\mathcal{R}_{KK} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ kuantum kanallar kümesi, bu iki altkümenin arakesitinde bulunurlar. Burada $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ pozitifdir ve $\mathcal{R}_{DT} = \mathcal{R} - \mathcal{R}_{KK}$ tümleyen kümesi, dolanıklık tanıkları bölgesidir (Şekil 5.1).

Teorem 5.1: $n > 1$ için, \mathcal{R}_{KK} ve \mathcal{R}_{DT} 'nin her noktası, sırasıyla tek bir $\tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ ünital kanalını ve gerçel $\alpha = \beta$ ile γ değerleri için, (5.9) denkleminde verilen tek bir dolanıklık tanığını temsil eder. $n = 1$ için sadece Schur kuantum kanalları vardır ve dolanıklık tanığı yoktur.



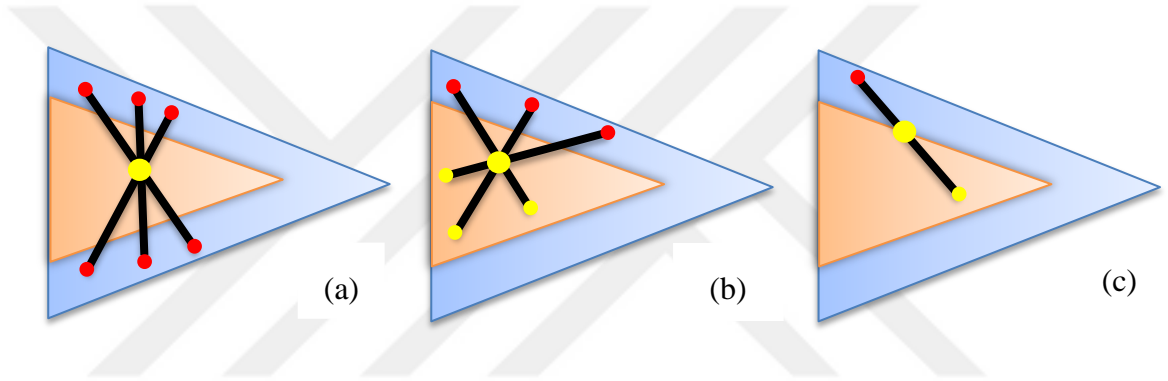
Şekil 5.1 $n = 2$ için dolanıklık tanıkları ve ünital kuantum kanallar ile ilişkili pozitif gönderimlerin parametre bölgeleri

Kuantum kanallar ve dolanıklık tanıkları arasındaki sınır doğruları üzerindeki tüm noktalar, \mathcal{R}_{KK} bölgesine aittir ve sınır kuantum kanalları olarak ifade edilirler. B noktası dışında bir sınır doğrusunun her noktası boyunca sabit bir özdeğer işaret değiştirir. $n = 1$ için kesikli-noktalı mavi doğru ve noktalı yeşil doğru sırasıyla kesikli kırmızı ve siyah doğruyla çakışır: Bu iki doğru arasındaki bölgenin her noktası ünital bir Schur kanalı temsil eder ve dolanıklık tanığı yoktur. Büyük n değerleri için B noktası \mathcal{R} 'nin kısımlarında herhangi bir nitel değişiklik olmadan $\tilde{\Lambda}_{00}$ ile temsil edilen O noktasına yaklaşır.

Şekil 5.1'den açıkça görüldüğü gibi \mathcal{R} ve \mathcal{R}_{KK} iki-boyutlu kompakt olmayan konveks bir küme oluştururlar. $\Lambda_{\alpha\gamma}$, çizgisel olarak parametrelere bağlı olduğundan bu yapılar doğal olarak pozitif ve CP gönderimlerin konvekslik özelliklerinden gelir. Şekil 5.1'deki B, C ve D noktalarına karşılık gelen kuantum kanallar, BCD üçgeni için ekstremaldirler: Bu bölgedeki herhangi bir kanal, bu üç noktayla ilişkili kuantum

kanalların bir karışımı olarak tek bir şekilde yazılabilir. Öyle ki, \mathcal{R}_{KK} 'nin herhangi bir üçgeninin köşeleri, kapalı bölge için aynı rolü oynarlar. Daha da önemlisi, \mathcal{R}_{KK} civarındaki dolanıklık tanıkları bölgesinin varlığı, kuantum kanallar ve dolanıklık tanıklarının yeni bileşim kurallarını ortaya koyar.

Teorem 5.2: (a) Her kuantum kanal, iki pozitif gönderimin bir karışımı olarak sayılamaz sonsuz farklı şekilde yazılabilir. (b) Verilen herhangi bir kuantum kanal, pozitif bir gönderim ve başka bir kuantum kanalın bir karışımı olarak farklı şekillerde yazılabilir. (c) Verilen bir kuantum kanal ve pozitif fakat CP-olmayan bir gönderimin karışımı olan tek bir sınır kuantum kanalı vardır (bkz. Şekil 5. 2).



Şekil 5.2 Doğrudan dolanıklık algılama metotları

a. Her kuantum kanal, iki pozitif gönderimin bir karışımı olarak sayılamaz sonsuz farklı şekilde yazılabilir. b. Verilen herhangi bir kuantum kanal, pozitif bir gönderim ve başka bir kuantum kanalın bir karışımı olarak farklı şekillerde yazılabilir. c. Verilen bir kuantum kanal ve pozitif fakat CP-olmayan bir gönderimin karışımı olan tek bir sınır kuantum kanalı vardır.

5.3 Doğrudan Dolanıklık Algılama Metotları

Yukarıdaki iki teoremin önemli sonuçlarını vardır: İlk olarak, \mathcal{R}_{DT} 'nin bir noktasını O noktasına birleştiren doğrunun, noktanın ait olduğu yere bakılmaksızın tek bir noktada \mathcal{R}_{KK} 'nin bir sınır doğrusuyla kesiştiği gözlenir. Özel olarak $W_{\alpha\gamma}$, şekil 5.1'deki \mathcal{R}_{DT} 'nin üst sol kısmından seçilirse $\gamma > 1$, $\alpha < 0$ ve $\mathcal{C}'_{\alpha'\gamma'} = cW_{\alpha\gamma} + (1 - c)\mathcal{C}_{00}$ yazılabilir. Burada $0 < c < 1$ ve (α', γ') , $\gamma' \leq -\alpha' + 1/n$ sınır doğrusu üzerindedir. Buradan

$$W_{\alpha\gamma} = \frac{1}{c}\mathcal{C}'_{\alpha'\gamma'} - \left(\frac{1}{c} - 1\right)\mathcal{C}_{00}, \quad (\alpha, \gamma) = \frac{1}{c}(\alpha', \gamma') \in \mathcal{R}_{DT} \quad (5.18)$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca her dolanıklık tanığı, sınır çizgilerine herhangi bir işlem yapmadan iki kuantum kanalın ağırlıklı bir farkı olarak yazılabilir. $(\alpha, \gamma) = c^{-1}(\alpha', \gamma')$ koşulu da ilgili bir dolanıklık tanığı bulmayı sağlar. Böylelikle dolanıklık tanıklarına başvurmadan bir sınır çizgisi kullanıldığında, yalnızca α' parametresini değiştirerek bir $(\alpha', \gamma') \in \mathcal{R}_{KK}$ için

$$\text{Tr}(\mathcal{C}'_{\alpha'\gamma'}\rho) < (1 - c)\text{Tr}(\mathcal{C}_{00}\rho), \quad c \in (0, 1) \quad (5.19)$$

eşitsizliğinin mümkün olup olmadığını kontrol etmek için $\text{Tr}(\mathcal{C}'_{\alpha'\gamma'}\rho)$ ve $\text{Tr}(\mathcal{C}_{00}\rho)$ beklenen değerleri kullanılabilir. Böyle bir eşitsizlik elde edilirse, ρ durumunun dolanıklığı kesin olarak belirlenebilir ve istenilirse ilgili bir dolanıklık tanığı, iki kuantum kanalın ağırlıklı bir farkı olarak $(\alpha, \gamma) = c^{-1}(\alpha', \gamma')$ koşulundan elde edilebilir. $\mathcal{C}'_{\alpha'\gamma'}$ iki pozitif Choi matrisinin bir karışımı olarak yazılırsa, (5.19) denklemindeki gibi herhangi bir eşitsizlik mümkün değildir. Özetlemek gerekirse, $n > 1$ seçilsin ve dolanıklığı \mathcal{R}_{DT} 'deki bir dolanıklık tanığıyla algılanabilen tüm dolanık durumlar kümesi \mathcal{D}_n ile gösterilsin. $\rho \in \mathcal{D}_n$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{Tr}(W_{\alpha\gamma}\rho) < 0$ olacak şekilde bir $(\alpha, \gamma) \in \mathcal{R}_{DT}$ noktasının olmasıdır. Böyle bir yükümlülük eşdeğer olarak sadece kuantum kanallar aracılığıyla başarılabilir.

Teorem 5.3: $\rho \in \mathcal{D}_n$ olması için gerek ve yeter koşul (5.19) denklemi sağlanacak şekilde en az bir $(\alpha', \gamma') \in \mathcal{R}_{KK}$ noktasının olmasıdır.

Sonraki bölümlerde yukarıda elde edilen kuantum kanallar ve dolanıklık tanıklarının bazı ayırt edici özellikleri incelenecektir.

5.4 Kuantum Kanalların Analizi

Kuantum kanalın ayırt edici özellikleri, doğrudan etkisiyle veya tensörel genişlemesinin ilgili durumlar üzerine etkisi ve $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ Choi matrisi aracılığıyla belirlenebilir. İkinci durumda, $\mathbb{M}/2n$ giriş durumuyken $id \otimes \tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ etkisiyle elde edilen $\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\gamma} = [2n(n - \alpha)]^{-1}\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ çıkış durumu bir yoğunluk matrisidir. Bu bağlamda Choi-Jamiołkowski

izomorfizmi birebir bir kanal-durum karşılığını sağlar. (5.9) denkleminde $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ Choi matrisinin \mathcal{H}_B uzayının standart bazlarına göre parçalı transpozunu

$$\mathcal{C}_{\alpha\gamma}^\Gamma = \begin{pmatrix} B_{11} - \alpha T_{11} & -\gamma T_{12} \\ -\gamma^* T_{21} & B_{22} - \beta T_{22} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

şeklinde elde edilir. Burada $T_{ab} = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij} \otimes e_{ab} \otimes \varepsilon_{ji}$ trampa işlemcisidir ve $T_{ab}T_{cd} = \delta_{bc}B_{ad}$, $T_{ab}B_{cd} = \delta_{bc}T_{ad}$ bağıntılarını sağlar. $\mathcal{C}_{\alpha\gamma}^\Gamma$ matrisinin spektrumu, $\{1 \pm \alpha, \pm\gamma\}$ olarak bulunur. Sonuç olarak, $\gamma \neq 0$ için $id \otimes \tilde{\Lambda}_{\alpha\gamma}$ gönderimi Peres-Horodecki kriteriyle algılanabilen $\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\gamma}$ matrisinde kodlanan diğer formlara $\mathbb{M}/2n$ durumunun dolanıklığını iletir.

5.5 PPT ve Blok-Fazsızlık Kanal Aileleri

Dolanıklık-kırıcı kanallar (Horodecki vd. 2003, Clarisse 2006) herhangi bir durumu tensörel genişleme aracılığıyla ayrılabilir bir duruma dönüştürürler (bkz. EK 1). Bu kanallar, şekil 5.1'de sadece $-1 \leq \alpha \leq 1/n$ ve $\gamma = 0$ ile tanımlanan AB doğru parçası üzerindedirler. Aslında bu doğru parçası üzerindeki tüm $\tilde{\Lambda}_{\alpha 0}$ kuantum kanalları PPT kanallardır: Tensörel genişlemeleri herhangi bir durumu PPT duruma dönüştürürler (Holevo 2012). Çıkış durumu ayrılabilir olmayan bir PPT kanal, bağlayıcı (*binding*) kuantum kanal olarak adlandırılır (Horodecki vd. 2000). Özel olarak $\tilde{\Lambda}_{00}$ kanalı, $\rho = \sum_{ij} e_{ij} \otimes \rho_{ij}$ durumunu

$$\tilde{\Lambda}_{00}(\rho) = \frac{1}{n} [x e_{11} + (1-x) e_{22}] \otimes \mathbb{I}_n, \quad x = \text{Tr} \rho_{11} \quad (5.21)$$

şeklinde dönüştürür ve $x = 1/2$ değerine sahip her ρ için tamamen kutupsuzlaştırıcı (*completely depolarizing*) olarak etki eder: $\tilde{\Lambda}_{00}(\rho) = \mathbb{I}_{2n}/2n$. $\rho_i = n^{-1} e_{ii} \otimes \mathbb{I}_n$ seçilirse Choi matrisi

$$\tilde{\mathcal{C}}_{00} = \frac{1}{2} (\rho_1^A \otimes \rho_1^B + \rho_2^A \otimes \rho_2^B) \quad (5.22)$$

ayrılabilir olduğundan $\tilde{\Lambda}_{00}$ dolanıklık-kırıcı bir kanaldır. α 'nın mümkün tüm değerleri için $\tilde{\Lambda}_{\alpha 0}$, durumların $n \times n$ 'li köşegen-dışı bloklarını silen tamamen blok-fazsızlaştırıcı

kuantum kanalların bir ailesini temsil eder. $\gamma = 0$ 'ın uygun komşulukları blok-fazsızlaştırıcı kuantum kanallar olarak da kullanılabilirler.

5.6 Dolanıklık Tanıklarının Analizi

İlk olarak, gösterilen tüm dolanıklık tanıkları zayıf optimaldirler (Wang ve Long 2013, Badziąg vd. 2013). Dolanıklık tanıklarının çekirdeği de doğrudan bu analizlerle ilişkili olmasına rağmen, tamlik ve belki bazı kontroller için diğer özvektörler de bulunabilir.

$K_\alpha = e_{11} \otimes (B_{11} - \alpha M_{11}) + e_{22} \otimes (B_{22} - \alpha M_{22})$ ve $S = e_{12} \otimes M_{12} + e_{21} \otimes M_{21}$ cinsinden, $W_{\alpha\gamma} = K_\alpha - \gamma S$, $[K_\alpha, S] = 0$ tanığı yazılabilir. K_α ve S 'nin spektrumları sırasıyla $\{0, 1, 1 - n\alpha\}$ ve $\{0, \pm n\alpha\}$ şeklindedir. $|abj\rangle = |a\rangle \otimes |i\rangle \otimes |b\rangle \otimes |j\rangle$ kısaltması yapılarak kardinalitesi $2n^2$ olan $\{|1i2j\rangle, |2i1j\rangle\}$ çarpım durumları kümesinin K_α , S ve dolayısıyla $W_{\alpha\gamma}$ 'nin 0 özdeğerine karşılık gelen ortak özvektörler kümesi olduğu gösterilebilir. $\{|1i2j\rangle, |2i1j\rangle\}$ özvektörlerine karşılık gelen 0 özdeğerinin olması, incelenen tüm dolanıklık tanıklarının zayıf optimal olduğunu gösterir. Bunların $2n^2$ -boyutlu çekirdeği, $2n^2$ -boyutlu "düzlem" aracılığıyla ayrılabilir durumlar kümesine dokunduğunda, dolanıklık tanıkları bu düzlemin yakın komşuluklarında dolanıklığı algılayabilirler. Özel olarak, ρ (ρ , PPT bir durum olabilir; $\rho^\Gamma \geq 0$.) durumunun dolanıklığı, parametrelerin bazı değerleri için $W_{\alpha\gamma}$ tanığıyla algılanabilir olsun; $Tr(W_{\alpha\gamma}\rho) < 0$. Tüm dolanık durumlar, ρ 'da tepe noktasına sahip açık bir koniyle örtülürler ve dolanıklık tanıklarının çekirdeğinin yakınındaki açık baz da algılanabilecektir.

Son olarak, şekil 5.1'deki BE doğru parçasına karşılık gelen tüm dolanıklık tanıkları ayrıştırılabilirlerdir, yani iki pozitif W_1 ve W_2 işlemcisi için, $W = W_1 + W_2^\Gamma$ şeklinde yazılabilir. Diğer durumlarda ayrıştırılamazdır. Bölüm 4'te de gösterildiği gibi bir dolanıklık tanığının ayrıştırılamaz olması için gerek ve yeter koşul ise PPT durumların dolanıklığının varlığını algılayabilmesidir (Størmer 1982). (5.20) denkleminde görüldüğü gibi $W_2 = W_{\alpha 0}^\Gamma$ tüm $\alpha \in (n^{-1}, 1]$ değerleri için pozitifdir ve bundan dolayı şekil 5.1'deki BE doğrusuna karşılık gelen $W_{\alpha 0}$ tanığı ayrıştırılabilir.

6. KUANTUM KORELASYONLARIN KAYBININ KONTROLÜ

Kuantum korelasyonlar, çeşitli kuantum bilişim ve bilgisayarım yükümlülüklerinin başarılmasında önemli özkaynaklardır. Yeterince uzun süreler için, korelasyonların korunması büyük öneme sahiptir. Fakat gürültülü bir çevrede gerçekleştirilmeye çalışılan herhangi bir bilişim sürecinde korelasyonlar azalır. Bu yüzden korelasyonların azalmasını kontrol etme yolları aramak büyük ilgi çekmektedir. Bu bölümde, genlik-sönümleyici (*amplitude-damping*) ve faz-sönümleyici gibi kuantum kanalların iki kullanımını altında kuantum korelasyonların davranışı incelenecek ve kuantum hafızalı kanallar aracılığıyla korelasyonların azalmasını kontrol etmenin mümkün olabileceği gösterilecektir. Elde edilen çıkış durumunun dolanıklık içeriğini tespit etmek için bazı korelasyon ölçüleri kullanılacaktır.

Genel olarak bir $E(\cdot)$ korelasyon (eşdeğer olarak dolanıklık) ölçüsü, tüm kuantum durumlar kümesinde tanımlı gerçel-değerli pozitif bir fonksiyondur. İyi bir dolanıklık ölçüsü birkaç koşulu sağlamalıdır. Fakat tüm bu koşulların gerçekten gerekli olup olmadığı sorusu hala açık bir problemdir. Aslında aşağıda incelenecek olan dolanıklık ölçülerinden bazıları bu koşullardan bazılarını sağlamazlar.

- (1) $E(\rho) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul ρ 'nun ayrılabilir olmasıdır. Bu özellik faydalı olmasına rağmen genel olarak çok katıdır.
- (2) Boylandırma: İki d –boyutlu sistemin en dolanık durumlarının dolanıklığı

$$E(M) = \log_2 d$$

ile verilir.

- (3) a) Yerel işlemler ve klasik iletişim (LOCC) altında artmama: Yerel işlemler, verilen bir ρ durumunun dolanıklığını arttırmaz:

$$E[A_{LOCC}(\rho)] = E(\rho).$$

b) Yerel üniter işlemler, verilen bir ρ durumunun dolanıklığını değiştirmez:

$$E[(U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^\dagger \otimes U_2^\dagger)] = E(\rho).$$

- (4) Süreklilik: $\{\rho_N\}$ ve $\{\sigma_N\}$, \mathcal{H} Hilbert uzayında yaşayan iki-parçalı durumlar dizisi olsun. Tüm diziler için $\|\rho_N - \sigma_N\|_1 \rightarrow 0$ sağlanır. Burada $\|\cdot\|_1$ iz normudur ve Bölüm 2’de gösterildiği gibi $\|A\|_1 = \text{Tr}(\sqrt{A^\dagger A})$ olarak tanımlanır. Bu durumda

$$E(\rho_N) - E(\sigma_N) \rightarrow 0$$

limiti geçerli olmalıdır.

- (5) a) Toplanabilirlik: ρ durumunun n özdeş kopyası, bir kopyanın dolanıklığının n katı olarak yazılabilir. Yani her ρ durumu ve $n \geq 1$ için

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$$

eşitliği yazılabilir.

- b) Tüm iki-parçalı ρ durumları için

$$E^\infty(\rho) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\rho^{\otimes n})}{n}$$

limiti vardır. E^∞ , doğrudan toplanabilirliği sağlayan bir ölçüdür.

- (6) Alttoplanabilirlik: ρ ve σ durumlarının tensör çarpımının dolanıklığı, durumların her birinin dolanıklığının toplamından daha büyük olamaz:

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma).$$

- (7) Konvekslik: Dolanıklık ölçüsü konveks bir fonksiyon olmalıdır:

$$E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma); \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

İlk üç özelliği sağlayan herhangi bir E fonksiyonu dolanıklık monotonu olarak adlandırılır.

Dolanık bir durum saf ise indirgenmiş yoğunluk işlemcileriyle yerel olarak betimlenen altsistemlerin durumları saf-olmayan bir durumdur. Saf bir durumun “karışma” miktarı kuantum korelasyonların tek kaynağıdır ve iyi bir dolanıklık ölçüsüdür. Bir ρ durumun ne kadar karışmış olduğu von Neumann entropisiyle verilir ve

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) \tag{6.1}$$

olarak tanımlanır. Entropi değeri ρ durumunun λ_i özdeğerleri aracılığıyla

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \tag{6.2}$$

şeklinde hesaplanabilir. von Neumann entropisi, bir kuantum durumun belirsizliğini betimler. Saf durumlar için sıfırdır ve en saf-olmayan durumlar için $\log_2 d$ 'ye eşittir. Burada $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$, küçük olan Hilbert uzayının boyutudur.

İki-parçalı saf durumların dolanıklığının nicelendirilmesinde kullanılan ölçülerden birisi, von Neumann entropisiyle tanımlanan

$$E_E(|\psi\rangle) = S(\rho_A) \quad (6.3)$$

dolanıklık entropisidir (Bennett vd. 1996). Burada ρ_A , A alt sisteminin indirgenmiş yoğunluk işlemcisidir ve $\rho_A = Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$ şeklinde tanımlanır. İki-parçalı saf bir durumun her iki indirgenmiş yoğunluk işlemcisinin sıfırdan farklı özdeğerleri aynıdır. Dolayısıyla indirgenmiş von Neumann entropisi her iki yoğunluk matrisi için eşittir. Dolanıklık entropisi aşağıdaki özelliklere sahiptir: (i) Çarpım durumları için sıfırdır. (ii) İndirgenmiş yoğunluk matrisleri en saf-olmayan bir durum ise dolanıklık entropisi maksimumdur. (iii) Yerel üniter dönüşümler altında değişmezdir.

6.1 Korelasyon Ölçüleri

Bu bölümde başlangıçta parametrelendirilmiş dolanık durumda hazırlanmış bir iki-kübit sistemin korelasyonlarının ölçüsü olarak kuantum karşılıklı bilişim (*quantum mutual information-QMI*) ve oluşum dolanıklığı (*entanglement of formation-EoF*) kullanılacaktır.

QMI, iki-parçalı bir sistemde yaşayan toplam korelasyonları ifade eder. Bir alt sistemin aralarındaki gizli korelasyonlara bakmadan diğeri hakkındaki toplam bilgi miktarı olarak yorumlanabilir (Groisman vd. 2005). QMI, pozitifdir ve sıfır olması için gerek ve yeter koşul, yoğunluk işlemcisinin çarpım durumu olmasıdır. Ayrıca herhangi bir kuantum kanal etkisi altında artmaz.

İki-parçalı bir ρ_{AB} durumu için QMI

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (6.4)$$

şeklinde tanımlanır. İki-kübitler için QMI, $0 \leq I(\rho_{AB}) \leq 2$ aralığındadır.

Diğer bir korelasyon ölçüsü oluşum dolanıklığıdır. EoF, EPR çiftleri cinsinden belirli bir kuantum durumu hazırlamak için ihtiyaç duyulan asgari maliyet olarak düşünülebilir ve dolanıklık entropisinin saf-olmayan durumlara bir genellemesidir. Herhangi bir ρ_{AB} durumu, birim ranklı saf durum izdüşüm işlemcilerinin $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, $\sum_i p_i = 1$ konveks bir bileşimi olarak yazılabildiğinden EoF, bu tür tüm olası ayrışımalar üzerinden

minimize edilmiş saf $|\psi_i\rangle$ durumlarının indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin ortalama von Neumann entropisi olarak tanımlanır:

$$E_F(\rho_{AB}) = \inf_{|\psi_i\rangle} \sum_i p_i E_E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|). \quad (6.5)$$

Burada E_E , (6.3) denklemiyle tanımlanan saf durumlar için dolanıklık entropisidir. Bu ölçünün ciddi bir dezavantajı, genel olarak bilinmeyen tüm ayrışmalar üzerinden analitik olarak nasıl minimize edileceğidir. Bu da hesaplamayı ve dolayısıyla bu ölçünün kullanımını sorunlu hale getirir. Genel durumlar için sayısal tekniklere başvurulmalı, yüksek simetriye sahip durumlar dikkate alınmalı ya da sadece düşük boyutta olan durumlar incelenmelidir. İki-parçalı durumlar için kapalı bir çözüm bilinmektedir (Wootters 1998). EoF, herhangi bir iki-parçalı ρ_{AB} durumu için

$$C(\rho_{AB}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (6.6)$$

şeklinde tanımlanan “*concurrence*” niceliğinin monoton artan bir fonksiyonudur. Burada λ_i 'ler, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ azalan sırada Hermitsel-olmayan $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$ matrisinin özdeğerlerinin karekökleridir. $\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, ρ_{AB} durumuna karşılık gelen spin-çevrilmiş (*spin-flip*) ya da zaman-terslenmiş durumdur. σ_y , Pauli y -matrisidir ve $*$, iki-kübit standart bazlardaki kompleks eşlenik işlemi gösterir. Özel olarak, herhangi bir saf $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ durumu için $C(\rho_{AB}) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|$ bulunur ve $|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\psi\rangle$ şeklindedir. Eşdeğer bir ifadeyle $C(\rho_{AB}) = 2\sqrt{\det(\rho_A)}$ yazılabilir. Matris formunda sadece köşegeninde, ters köşegeninde veya her ikisinde de sıfırdan farklı elemanları bulunan ve diğer elemanları sıfır olan durumlara, X-tipi (*X-type*) durumlar denir. Werner-tipi durumlar, izotropik durumlar ve Bell durumları gibi X-tipi durumlar için C

$$C(\rho_{AB}) = 2 \max\{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\} \quad (6.7)$$

eşitliğine indirgenir. Burada ρ_{ij} , ρ_{AB} 'nin matris elemanlarıdır.

Genel bir iki-kübit ρ_{AB} durumu için EoF

$$E_F(\rho_{AB}) = h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - C^2(\rho_{AB})}}{2}\right) \quad (6.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ ikili (*binary*) entropidir. $C(\rho_{AB}) = 0$, ayrılabilir bir duruma ve $C(\rho_{AB}) = 1$, en dolanık duruma karşılık gelir.

6.2 İki-kullanım Etkileri

Bu bölümde iki-kübit giriş durumuna sırasıyla Λ^A ve Λ^P ile gösterilen genlik-sönümleyici ve faz-sönümleyici kanalların etkisi incelenerek çıkış durumunun QMI ve EoF değerleri hesaplanacaktır. Aşağıda (6.14) ve (6.19) denklemlerinde gösterildiği gibi her iki kanal, iki Kraus işlemcisine sahiptir ve sırasıyla Λ^A için $p \in [0,1]$ ve Λ^P için $q \in [0,1]$ ile gösterilen bir parametreye bağlıdır. Parametrelerin sıfır değerleri için, her iki kanal özdeşlik kanalına indirgenir. İlk olarak, giriş durumu olarak saf bir durum seçilerek bu durumun başlangıç korelasyon içeriği incelenecektir. Daha sonra giriş durumuna Λ^A ve Λ^P kanallarının her birisinin ardışık iki kullanımı sonucu elde edilen çıkış durumunun QMI ve EoF nicelikleri incelenecektir. Son olarak bu iki kanalın giriş durumuna birleşik etkisi değerlendirilecektir.

6.2.1 QMI ve EoF'nin başlangıç değerleri

Standart $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ hesaplama bazlarında iki-kübit saf giriş durumu

$$|\Psi_{AB}\rangle = \alpha|00\rangle + \delta|11\rangle \quad (6.9)$$

olarak seçilebilir. Burada $\alpha, \delta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\delta|^2 = 1$ boylandırma koşulunu sağlar. $|\Psi_{AB}\rangle$ durumunun dolanıklığı $\alpha\delta \neq 0$ koşuluna eşdeğerdir. $\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$ giriş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{AB} = |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + \alpha\delta^*|00\rangle\langle 11| + \delta\alpha^*|11\rangle\langle 00| + |\delta|^2|11\rangle\langle 11| \quad (6.10)$$

saf olduğundan entropisi sıfırdır ve $C(\rho_{AB}) = 2|\alpha\delta|$ olarak elde edilir. Başlangıç QMI değerine katkılar sadece indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin spektrumundan gelir. ρ_{AB} durumunun indirgenmiş yoğunluk işlemcileri

$$\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)}\rho_{AB} = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\delta|^2|1\rangle\langle 1|$$

şeklinde aynı forma sahiptirler. Her iki durumun da özdeğerleri $|\alpha|^2 = 1 - |\delta|^2$ ve $|\delta|^2$ olarak bulunur ve her birisi için QMI, $h(|\delta|^2)$ değerine sahiptir. Bu durumda (6.4) ve (6.8) denklemlerinden QMI ve EoF için başlangıç değerleri

$$I(\rho_{AB}) = 2h(|\delta|^2) \quad (6.11)$$

$$E_F(\rho_{AB}) = h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|\alpha\delta|^2}}{2}\right) \quad (6.12)$$

şeklinde bulunur. $\delta = 0$ ve gerçel θ değerleri için $\delta = e^{i\theta}$ değerlerinde giriş durumu çarpım durumuna karşılık geldiğinden QMI ve EoF sıfırdır. Başlangıç değerleri $\delta = e^{i\theta}/\sqrt{2}$ için maksimumdur ve bu da en dolanık saf giriş durumuna yani bir Bell durumuna karşılık gelir.

6.2.2 Hafızasız etkiler

$\Lambda^X \otimes \Lambda^Y$ kanalının etkisi altında çıkış durumu

$$\sigma_{AB}^{XY} = (\Lambda^X \otimes \Lambda^Y)\rho_{AB}, \quad X, Y = A, P \quad (6.13)$$

şeklinde ifade edilir. Burada σ_{AB}^{AA} ve σ_{AB}^{PP} çıkışları sırasıyla $\Lambda^A \otimes \Lambda^A$ ve $\Lambda^P \otimes \Lambda^P$ kanallarının hafızasız etkilerine karşılık gelir.

(i) $\Lambda^A \otimes \Lambda^A$ kanalının etkisi

Λ^A kanalının $K_i^{(A)}$ Kraus işlemcileri

$$K_0^{(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

yazılabilir. Burada $p \in [0,1]$ dekoherens parametresi olarak adlandırılır. $p = 1$ için her iki Kraus matrisinin rankı birdir. (2.53) denkleminde kanalın iki-kullanımı sonucu çıkış durumu

$$\sigma_{AB}^{AA} = \sum_{i,j=0,1} (K_i^{(A)} \otimes K_j^{(A)})\rho_{AB}(K_i^{(A)} \otimes K_j^{(A)})^\dagger \quad (6.15)$$

olarak ifade edilir ve standart iki-kübit hesaplama bazlarında açıkça

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}^{AA} = & (|\alpha|^2 + p^2|\delta|^2)|00\rangle\langle 00| + p(1-p)|\delta|^2(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \\ & + (1-p)(\alpha\delta^*|00\rangle\langle 11| + \delta\alpha^*|11\rangle\langle 00|) + (1-p)^2|\delta|^2|11\rangle\langle 11| \end{aligned} \quad (6.16)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumun ve indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin spektrumları sırasıyla

$$\begin{aligned} \text{spec}(\sigma_{AB}^{AA}) &= \left\{ v, v, \frac{1}{2}(1 - 2v \pm \sqrt{1 - 4v}) \right\} \\ \text{spec}(\sigma_A^{AA}) &= \text{spec}(\sigma_B^{AA}) = \left\{ 1 - \frac{v}{p}, \frac{v}{p} \right\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $v = p(1-p)|\delta|^2$ şeklindedir. Bu durumda, QMI

$$\begin{aligned} I(\sigma_{AB}^{AA}) = & 2v \log v + 2h\left(\frac{v}{p}\right) + \frac{1 - 2v + \sqrt{1 - 4v}}{2} \log \frac{1 - 2v + \sqrt{1 - 4v}}{2} \\ & + \frac{1 - 2v - \sqrt{1 - 4v}}{2} \log \frac{1 - 2v - \sqrt{1 - 4v}}{2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $C(\sigma_{AB}^{AA}) = 2(1-p)|\alpha\delta|$ olduğundan EoF

$$E_F(\sigma_{AB}^{AA}) = h\left(\frac{1+y}{2}\right) \quad (6.18)$$

bir ikili entropi olarak yazılabilir. Burada $y = \sqrt{1 - 4(1-p)^2|\alpha\delta|^2}$ şeklindedir.

(ii) $\Lambda^P \otimes \Lambda^P$ kanalının etkisi

Λ^P 'nin Kraus işlemcileri

$$K_0^{(P)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-q} \end{pmatrix}, \quad K_1^{(P)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

şeklindedir ve $q \in [0,1]$, Λ^P kanalının dekoherens parametresidir. Kraus matrisleri Hermitsel olduğundan bu kanal ünitaldir. $\Lambda^P \otimes \Lambda^P$ kanalının etkisi için çıkış durumu

$$\sigma_{AB}^{PP} = |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + (1-q)(\alpha\delta^*|00\rangle\langle 11| + \delta\alpha^*|11\rangle\langle 00|) + |\delta|^2|11\rangle\langle 11| \quad (6.20)$$

olarak bulunur. Bu durumun ve indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin spektrumları

$$\text{spec}(\sigma_{AB}^{PP}) = \left\{0, 0, \frac{1 \pm z}{2}\right\}$$

$$\text{spec}(\sigma_A^{PP}) = \text{spec}(\sigma_B^{PP}) = \{1 - |\delta|^2, |\delta|^2\}$$

şeklinde elde edilir. Burada $z = 1 - 4q(2 - q)|\alpha\delta|^2$ ve QMI

$$I(\sigma_{AB}^{PP}) = 2h(|\delta|^2) - h\left(\frac{1 - \sqrt{z}}{2}\right) \quad (6.21)$$

ikili entropiler cinsinden yazılabilir. Önceki duruma benzer olarak $C(\sigma_{AB}^{PP}) = 2(1 - q)|\alpha\delta|$ olduğundan

$$E_F(\sigma_{AB}^{AA}) = h\left(\frac{1 + w}{2}\right) \quad (6.23)$$

bulunur. Burada $w = \sqrt{1 - 4(1 - q)^2|\alpha\delta|^2}$ şeklindedir.

Yukarıda incelenen her iki durum için QMI ve EoF, dekoherens parametrelerinin artan değerleriyle monoton olarak azalır. En büyük değerlerini, doğal olarak $\delta = e^{i\theta}/\sqrt{2}$ değerine karşılık gelen en dolanık durumlarda alırlar. Diğer taraftan ρ_{AB} durumu $\delta = 0$ ve $\delta = e^{i\theta}$ için bir çarpım durumu olduğundan QMI ve EoF sıfırdır ve δ 'nin bu değerleri için hiçbir kuantum korelasyon yoktur.

6.2.3 Farklı kanalların birleşik etkileri

(iii) $\Lambda^A \otimes \Lambda^P$ ve $\Lambda^P \otimes \Lambda^A$ kanallarının etkisi

Λ^A ve Λ^P kanalları birlikte kullanıldığından $\sigma_{AB}^{AP} = (\Lambda^A \otimes \Lambda^P)\rho_{AB}$ çıkış durumu

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}^{AP} &= \sum_{i,j=0,1} \left(K_i^{(A)} \otimes K_j^{(P)}\right)\rho_{AB}\left(K_i^{(A)} \otimes K_j^{(P)}\right)^\dagger \\ &= |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + t(\alpha\delta^*|00\rangle\langle 11| + \delta\alpha^*|11\rangle\langle 00|) \\ &\quad + |\delta|^2[p|01\rangle\langle 01| + (1-p)|11\rangle\langle 11|] \end{aligned} \quad (6.24)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $t = \sqrt{(1-p)(1-q)}$ kısaltması kullanılmıştır ve σ_{AB}^{AP} durumunun spektrumu, $u = 1 - 2[p + 2(1-p)q]|\delta|^2 + 2[p^2 + 4(1-p)q]|\delta|^4$

kısaltması kullanılarak $\{0, p|\delta|^2, (1 - p|\delta|^2 \pm \sqrt{u})/2\}$ ile verilir. İndirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin spektrumları

$$\text{spec}(\sigma_A^{AP}) = \{1 - (1 - p)|\delta|^2, (1 - p)|\delta|^2\}$$

$$\text{spec}(\sigma_B^{AP}) = \{1 - |\delta|^2, |\delta|^2\}$$

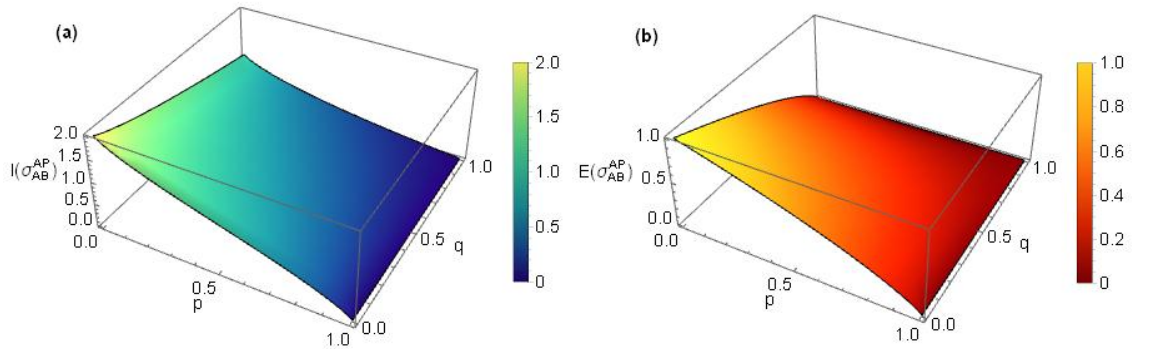
olduğundan bu durum için QMI

$$\begin{aligned} I(\sigma_{AB}^{AP}) = & h[(1 - p)|\delta|^2] + h(|\delta|^2) + \frac{1 - p|\delta|^2 + \sqrt{u}}{2} \log \frac{1 - p|\delta|^2 + \sqrt{u}}{2} \\ & + p|\delta|^2 \log(p|\delta|^2) + \frac{1 - p|\delta|^2 - \sqrt{u}}{2} \log \frac{1 - p|\delta|^2 - \sqrt{u}}{2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

olarak bulunur. (6.8) denkleminde EoF

$$E_F(\sigma_{AB}^{AP}) = h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2|\alpha\delta|^2}}{2}\right) \quad (6.26)$$

şeklinde elde edilir. $\Lambda^P \otimes \Lambda^A$ kanalının etkisi sonucu elde edilen σ_{AB}^{PA} çıkış durumu, σ_{AB}^{AP} durumundan farklı olmasına rağmen, spektrumu ve indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin spektrumları aynıdır. Bu durumlar için elde edilen QMI ve EoF, $\delta = 1/\sqrt{2}$ değeri için p ve q 'nin fonksiyonları olarak şekil 6.1'de gösterilmiştir. QMI ve EoF'nin her ikisi de p ve q 'nin artan değerleri için hızla azalmaktadır.



Şekil 6.1 p ve q 'ya göre σ_{AB}^{AP} çıkışı için: a. QMI, b. EoF grafiği

6.3 İki-kullanım Etkilerinin Konveks Bileşimleri

Bu bölümde hafızalı ve hafızasız kuantum kanalların konveks bileşimlerinin etkisi altında çıkış durumlarının korelasyon özellikleri incelenecektir. İlk olarak (iii) durumunda incelenen kanalın, (i) durumunda incelenen kanalla daha sonra (ii) durumunda incelenen kanalla konveks bileşimleri alınacaktır. Karşılık gelen çıkış durumları sırasıyla $\sigma_{AB}^{(1)}$ ve $\sigma_{AB}^{(2)}$ ile gösterilecektir.

6.3.1 $\Lambda^A \otimes \Lambda^A$ ve $\Lambda^A \otimes \Lambda^P$ kanallarının karışımı

(2.55) denkleminde yararlanılarak $\Lambda^A \otimes \Lambda^A$ ve $\Lambda^A \otimes \Lambda^P$ kanallarının ρ_{AB} giriş durumuna etkisi

$$\sigma_{AB}^{(1)} = [(1 - \mu)(\Lambda^A \otimes \Lambda^A) + \mu(\Lambda^A \otimes \Lambda^P)]\rho_{AB} \quad (6.27)$$

şeklinde hafızaya bağlı olarak yazılabilir. Burada $0 \leq \mu \leq 1$ hafıza parametresidir. Bu kanal basitçe ilk kübite sadece Λ^A kanalı fakat ikinci kübite $1 - \mu$ olasılıkla Λ^A , μ olasılıkla da Λ^P kanalı etki ediyormuş gibi yorumlanabilir. Çıkıştaki $\Delta = \sigma_{AB}^{AA} - \sigma_{AB}^{(1)}$ değişimi, $\Delta = \mu(\Lambda^A \otimes f)\rho_{AB}$ olarak yazılabilir. Burada $f = \Lambda^A - \Lambda^P$ izsiz çizgisel bir etkiyi temsil eder. $\sigma_{AB}^{(1)}$ çıkışının açık formu

$$\sigma_{AB}^{(1)} = a|00\rangle\langle 00| + b|01\rangle\langle 01| + c|10\rangle\langle 10| + d|11\rangle\langle 11| + e|00\rangle\langle 11| + e^*|11\rangle\langle 00|$$

şeklindedir. Burada

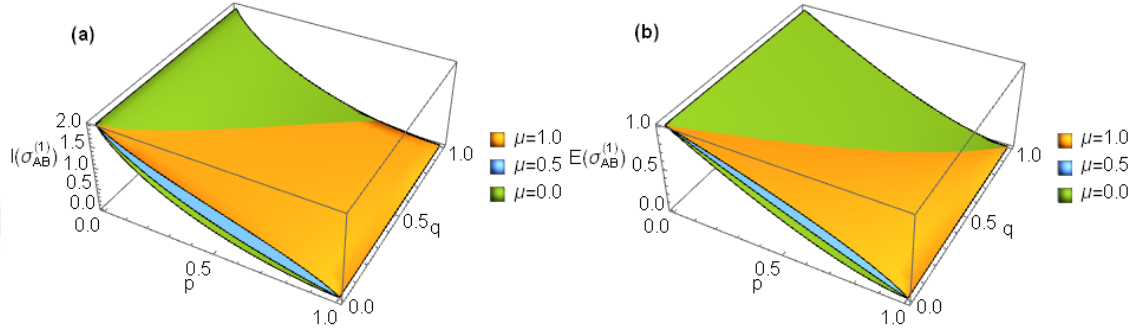
$$\begin{aligned} a &= 1 - [1 - p^2(1 - \mu)]|\delta|^2, & b &= p[1 - p(1 - \mu)]|\delta|^2 \\ c &= p(1 - p)(1 - \mu)|\delta|^2, & d &= (1 - p)[1 - p(1 - \mu)]|\delta|^2 \\ e &= [(1 - p)(1 - \mu) + \mu t]\alpha\delta^* \end{aligned}$$

kısaltmaları kullanılmıştır. Bu çıkışın spektrumları önceki durumlardaki gibi hesaplanabilir.

QMI'nın açık formu karmaşık olduğu için burada verilmemiştir fakat μ parametresinin bazı değerleri için p ve q 'nin bir fonksiyonu olarak şekil 6.2'de EoF ile birlikte çizilmiştir. (6.8) denkleminde EoF

$$E_F(\sigma_{AB}^{(1)}) = h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|e|^2}}{2}\right) \quad (6.28)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 6.2 (6.27) denkleminde verilen çıkış durumu için: a. QMI, b. EoF grafikleri

6.3.2 $\Lambda^P \otimes \Lambda^P$ ve $\Lambda^A \otimes \Lambda^P$ kanallarının karışımı

(6.3.1) bölümüne paralel olarak çıkış durumu

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}^{(2)} &= [(1 - \mu)(\Lambda^P \otimes \Lambda^P) + \mu(\Lambda^A \otimes \Lambda^P)]\rho_{AB} \\ &= (1 - |\delta|^2)|00\rangle\langle 00| + (1 - \mu p)|\delta|^2|11\rangle\langle 11| \\ &\quad + \mu p|\delta|^2|01\rangle\langle 01| + s|00\rangle\langle 11| + s^*|11\rangle\langle 00| \end{aligned} \quad (6.29)$$

şeklinde elde edilir. Burada $s = [(1 - q)(1 - \mu) + \mu t]\alpha\delta^*$ ile verilir. QMI ve EoF

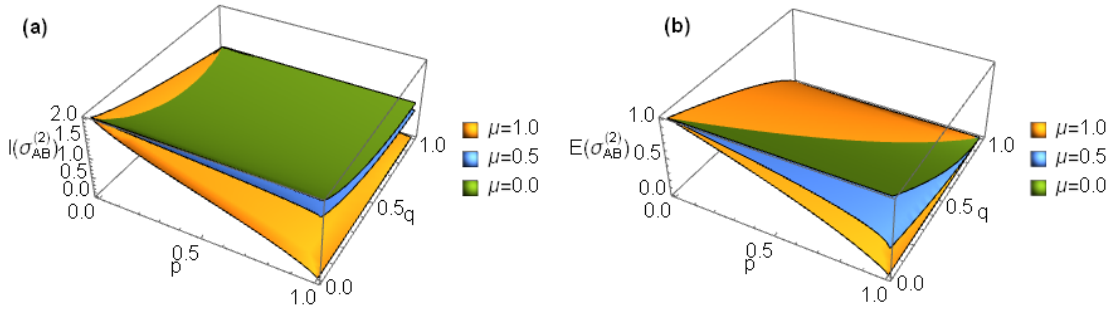
$$\begin{aligned} I(\sigma_{AB}^{(2)}) &= h[(1 - \mu p)|\delta|^2] + h(|\delta|^2) + \frac{1 - \mu p|\delta|^2 + \sqrt{r}}{2} \log \frac{1 - \mu p|\delta|^2 + \sqrt{r}}{2} \\ &\quad + \mu p|\delta|^2 \log(\mu p|\delta|^2) + \frac{1 - \mu p|\delta|^2 - \sqrt{r}}{2} \log \frac{1 - \mu p|\delta|^2 - \sqrt{r}}{2}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$E_F(\sigma_{AB}^{(2)}) = h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|s|^2}}{2}\right) \quad (6.31)$$

bulunur. Burada $r = [1 - (2 - \mu p)|\delta|^2]^2 + 4|s|^2$ şeklindedir. Şekil 6.3, (6.29) denkleminin verilen çıkış durumu için QMI ve EoF'nin p ve q parametrelerine göre değişimini göstermektedir.

6.4 Kuantum Korelasyonların Azalmasının Yumuşatılması

Her iki kanal $p = 0 = q$ için özdeşlik kanalına indirildiğinden tüm korelasyon ölçüleri μ 'nün tüm değerleri için bu noktada başlangıç değerlerini alırlar. Şekil 6.2, QMI ve EoF'nin her μ değeri için p 'nin artan değerleriyle daima azaldığını ve q 'dan bağımsız olarak $p = 1$ için sıfır olduklarını gösterir. $p = 1$ için Λ^A kanalının Kraus işlemcileri rank-1 matrislerdir. Bundan dolayı Λ^A dolanıklık-kırıcı bir kanaldır (Holevo 2012, Horodecki vd. 2003). Öte yandan QMI ve EoF'nin en büyük değerlerine, q 'nın tüm değerleri için $p = 0$ değerinde ulaşılır. Tüm bu gözlemler, korelasyonların kaçınılmaz bir kaybı olduğunu gösterir ve bundan dolayı çevreye bir bilişim akışı olur.



Şekil 6.3 (6.29) denkleminin verilen çıkış durumu için: (a) QMI, (b) EoF grafikleri

Şekil 6.2 a, b'den p 'nin ara değerlerinde (6.27) denkleminin verilen kanal, hafızasız ($\mu = 0$) durumdan uzun-sürelili (*longtime*) hafızalı ($\mu = 1$) bir kanala değiştiğinde, QMI ve EoF için $p > q$ parametre bölgesinde nispeten bazı iyileştirmeler meydana gelir. Bu bölgede her iki ölçü, μ 'nün diğer değerlerine göre $\mu = 1$ 'de en büyük değerlerini alırlar. Bu da korelasyonların monoton azalışının, hafıza parametresi ayarlanarak yumuşatılabileceğini gösterir.

Benzer davranışlar şekil 6.3'te de gözlemlenebilir. Her iki bilişim niceliği, $\mu = 1$ durumunda p ve q 'nun küçük değerleri için en yüksek değerlerini alırlar ve p ve q 'nun

artan değerleriyle monoton bir şekilde azalırlar. şekil 6.2'nin aksine burada denklem (6.29)'la verilen çıkış durumu için korelasyonların iyileşmesi, özellikle EOF için, $p < q$ bölgesinde mümkündür.



7. SONUÇ

Bu tezde, genel olarak sonlu boyutlu matris cebirlerinde iki-parçalı saf ve saf-olmayan durumların dolanıklığının algılanması kapsamında çok sayıda metot verilerek, özellikle etkin ve yoğunlukla çalışılan iki kavram olan pozitif gönderimler ve dolanıklık tanıkları kuramsal olarak detaylı olarak incelenmiştir. Bölüm 2’de pozitif ve tamamen pozitif gönderim kavramları incelenerek çizgisel gönderimler ve işlemciler arasındaki bir karşılıklı ilişki olan Choi-Jamiołkowski izomorfizmi verilmiştir. Ayrıca kuantum durumların tüm fiziksel gelişimlerini tarif eden kuantum kanallar tanıtılarak farklı temsilleri arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Ayrıca dolanıklığın nicelendirilmesinin yanı sıra özellikle kuantum bilgisayar süreçlerinde büyük öneme sahip olan hafızalı kuantum kanallar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde ilk olarak iki-parçalı saf durumların dolanıklığının algılanmasında bilinen en etkin yöntem olan Schmidt ayrışımı verilmiştir. Diğer yandan, iki-parçalı saf-olmayan durumların dolanıklığın algılanması için de çok sayıda kriter incelenmiştir.

Bölüm 4’te, dolanıklık tanıkları tanıtılarak dolanıklığın algılanmasında büyük öneme sahip optimallik, ekstremallik ve ekspozelik kavramları incelenmiştir. Ayrıca PPTES’lerin dolanıklığının algılanmasını sağlayan ayrıştırılmaz pozitif gönderimlerin bazı özel sınıfları verilerek karşılık gelen dolanıklık tanıkları gösterilmiştir.

Dolanıklık tanıkları ölçülebilir nicelikler olmalarına rağmen bunların temelindeki pozitif gönderimler ölçülebilir fiziksel gelişimler değildirler. Bundan dolayı laboratuvarında doğrudan uygulanabilir değildirler. Dolanıklık tanıklarının en önemli avantajlarından birisi kuantum durum hakkındaki tüm bilgiye ihtiyaç duymayan bir algılama metodu vermesidir. Böyle bir bilişim, genellikle tüm durum tomografisiyle, yani durumun tüm matris elemanlarının belirlenmesiyle elde edilir. Herhangi bir dolanık durum, bazı dolanıklık tanıklarıyla algılanabilir ve böylece tanıkların bilgisi, bileşik kuantum sistemlerin durumlarının tam bir karakterizasyonunu yapmaya olanak verir.

Diğer taraftan, iki-parçalı bir sistemin varlığında altsistemlerden birisine göre pozitif parçalı transpoz altında pozitif kalan bileşik sistemin dolanık durumlarının (PPTES'lerin) dolanıklık içeriği herhangi bir damıtma ve saflaştırma protokolüyle arttırılamaz. Bu durumların dolanıklığı, ayrıştırılmaz pozitif gönderimler veya ayrıştırılmaz dolanıklık tanıklarıyla algılanır. Fakat ayrıştırılmaz dolanıklık tanığı kurmak için hala genel bir yöntem yoktur.

Bölüm 5'te, sadece kuantum kanallar kullanılarak sürekli bir şekilde kuantum süreçlerin işlenmesi ve dolanıklığın algılanmasının her ikisinin de gerçekleştirilebilmesinin mümkün olduğu gösterilmiştir. Uygun bir şekilde parametrelenmiş bir pozitif gönderim, hem dolanıklık tanıklarını hem de kuantum kanalları bulmaya olanak verir. Bilişim-işleme ve dolanıklığın algılanması yükümlülüklerini yerine getirmek için deneysel olarak uygulanabilecek birleşik bir çerçeve, 2-parametrelü ünital blok-fazsızlaştırıcı kuantum kanallar ve zayıf optimal dolanıklık tanıklarının sürekli aileleri çift $N > 2$ değerlerine sahip herhangi $N \times N$ -tipi iki-parçalı bir sistem için kurulabilir. Kuantum kanalların ve dolanıklık tanıklarının parametre bölgeleri, bir konveks kümenin tümleyen alt kümeleridir ve bu gerçek, dolanıklık tanıklarına başvurmadan ve herhangi bir önsel durum bilgisi olmaksızın kullanılacak birçok alternatif doğrudan dolanıklık algılama yöntemi geliştirmeyi sağlar. En dolanık durumu paylaşan iki gözlemci örneği bir uygulama olarak verilebilir. Bu, gözlemcilerin sürekli olarak başka dolanıklık formlarını üretebilmeleri ya da sadece sürekli kuantum kanalları kullanarak dolanıklığın algılanması için aynı ayarları kullanabilmeleri anlamına gelir. Bir bütünün bir parçasına etki eden parametrelendirilmiş herhangi bir pozitif gönderim veya belki bir Hamiltonyen, dış alanlarla kontrol edilebilen parametre aralıklarının izin verdiği ölçüde aynı amaç için kullanılabilir.

Son bölümde, dolanıklığın nicelendirilmesi kapsamında çevrenin, korelasyonları yıkıcı etkisini kontrol etmek için kuantum hafızalı kanallar kullanılarak sistemin korelasyonlarını bağıl olarak arttırılabilmeye yönelik yeni bir yöntem verilmiştir. Dolanıklığının algılanmasının yanı sıra dolanıklık içeriklerinin nicelendirilmesi de bilişim işleme süreçlerinde büyük öneme sahiptir. Kuantum sistemin fiziksel gelişimleri sırasında, çevresiyle olan etkileşimleri engellemek mümkün değildir. Dolayısıyla

korelasyonların kısmen veya tam kaybı kuantum bilişim ve bilgisayarına (*computation*) dayalı uygulamalarda büyük bir engel oluşturur. Gürültülü bir çevrede meydana gelen herhangi bir kuantum süreç esnasında kuantum korelasyonlar, artmayan bir davranış gösterirler. Korelasyonlarda nispeten geliştirmeler sağlayan bu düşüşlerin azaltılması, korele çevresel kuantum gürültüleri modelleyen kuantum hafızalı kanallar aracılığıyla mümkündür.

Bu tezde kuramsal olarak incelenen ve bunun dışında kalan diğer dolanıklık algılama metotlarının her birisinin avantajları ve dezavantajları vardır. Laboratuvar uygulamalarında, bir kuantum durumun dolanıklığının algılanmasında bun kriterlerden hangisinin tercih edileceği sorusu, deneysel uygulamaya bağlıdır. Dolanık durum oluşturma kapasitesi, bir kuantum bilgisayar yapmak için temel gereksinimlerden biridir ve genellikle bir kuantum sistemindeki kontrol ve koherenslik miktarı için bir kıyas testi olarak kullanılır. NMR deneylerinde 7 kübitli $|0^{\otimes 7}\rangle + |1^{\otimes 7}\rangle$ kedi (*cat*) durumlarını üretmek bir örnek olarak verilebilir.

İleriki süreçlerde, deneysel tekniklerdeki ilerlemeye bağlı olarak, daha fazla sayıda kübitin dolanıklaştırılabileceği ve dolanıklığının algılanabilmesi yönünde yeni metotların geliştirilebileceği öngörülebilir. Özellikle iyon tuzaklarında ve hiperdolanıklık kullanılan fotonik deneylerinde önemli gelişmeler beklenebilir. Bu deneylerde, çok-parçalı dolanıklığın oluşturulması muhtemelen ana hedef olarak kalmaya devam edecektir. Çünkü bu, deneyin öncekilere kıyasla niteliksel olarak yeni bir şey sunmasını sağlar. Bununla birlikte, deneyler daha zorlu hale geldikçe, daha az deneysel çaba gerektiren dolanıklık algılama ve doğrulama (*verification*) şemaları tasarlamak çok daha önemli hale gelecektir. Bilişim süreçlerinde, dolanıklığın doğrulanmasının, minimum sayıda ölçüm ve işleme gerçekleşmesi istenilir.

Diğer yandan, bu tür sistemler büyüdükçe, bu deneylerin çoğunda, kübitlerin artık tek tek erişilebilir olmayacağı beklenebilir. Bu durumda, sadece kolektif ölçümlere dayanan dolanıklık algılama şemalarına ihtiyaç duyulacaktır. Bu tür deneylerde, sistemin durumunun çok-parçalı dolanıklığının algılanması her durumda gerçekçi değildir.

Ancak, tezde de incelendiği üzere, kaç kübitin dolanık olduğu ya da durumdaki dolanıklığı nicelendirmeyi araştırmak hedeflenebilir.

Bu şekilde kuantum bilişim bilimi ve özellikle dolanıklık teorisi, kuantum kontrolünün ve kuantum mühendisliğinin teknolojik gelişiminde önemli bir rol oynayabilir. Son olarak, çok daha büyük sistemler üzerindeki kuantum kontrol, kuantum mikro-dünyaya dayalı klasik bir makro-dünyanın ortaya çıkışı gibi temel bir soruyu cevaplamaya da yardımcı olabilir.



KAYNAKLAR

- Ando, T. 1989. Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues. *Linear Algebra Appl*, 118; 163-248.
- Arveson, W. 1969. Subalgebras of C^* -algebras. *Acta Math*, 123; 141-224.
- Augusiak, R., Horodecki, P. and Demianowicz, M. 2006. General construction of noiseless networks detecting entanglement with the help of linear maps. *Phys. Rev. A*, 74(5); 052323.
- Augusiak, R., Tura, J. and Lewenstein, M. 2011a. A note on the optimality of decomposable entanglement witnesses and completely entangled subspaces. *J. Phys. A: Math. Theor*, 44(21); 212001.
- Augusiak, R., Sarbicki, G. and Lewenstein, M. 2011b. Optimal decomposable witnesses without the spanning property. *Phys. Rev. A*, 84(5); 052323.
- Badziąg, P., Horodecki, P., Horodecki, R. and Augusiak, R. 2013. Separability in terms of a single entanglement witness. *Phys. Rev. A*, 88(1); 010301(R).
- Bell, J. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1; 195.
- Bengtsson, I. and Życzkowski, K. 2006. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 466 s., Cambridge.
- Bennett, C.H., DiVincenzo, D.P., Smolin, J.A. and Wootters, W.K. 1996. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54; 3824.
- Bennett, C.H., DiVincenzo, D.P., Mor, T., Shor, P.W., Smolin, J.A. and Terhal, B.M. 1999. Unextendible product basis and bound entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 82(26); 5385.
- Bhatia, R. 1997. *Matrix Analysis*. 349 s., Springer-Verlag, New York.
- Bhatia, R. 2006. *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, 265 s., Princeton.
- Breuer, H.P. 2006. Optimal entanglement criterion for mixed quantum states. *Phys. Rev. Lett*, 97(8); 0805001.
- Brunner, N., Cavalcanti, D., Pironio, S., Scarani, V. and Wehner, S. 2014. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86; 419.
- Caruso, F., Giovannetti, V., Lupo, C. and Mancini, S. 2014. Quantum channels and memory effects. *Rev. Mod. Phys.*, 86; 1203.
- Cerf, N. J., Adami, C. and Gingrich R. M. 1999. Reduction criterion for separability. *Phys. Rev. A*, 60(2); 898-909.
- Choi, M-D. 1972. Positive linear maps on C^* -algebras. *Canad. J. Math*, 24; 520-529.
- Choi, M-D. 1975. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra. Appl*, 10(3); 285-290.

- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2007. On the structure of entanglement witnesses and new class of positive indecomposable maps. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 14(3); 275-294.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2008a. A class of positive atomic maps. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(21); 215201.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2008b. How to construct indecomposable entanglement witnesses. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(14); 145301.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2009. Spectral conditions for positive maps. *Comm. Math. Phys.*, 290(3); 1051-1064.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. and Sarbicki, G. 2009a. Spectral conditions for entanglement witnesses versus bound entanglement. *Phys. Rev. A*, 80(4); 042314.
- Chruściński, D., Pytel, J. and Sarbicki, G. 2009b. Constructing optimal entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 80(6); 062314.
- Chruściński, D. and Pytel, J. 2010. Constructing optimal entanglement witnesses: II. Witnessing entanglement in $4N \times 4N$ systems. *Phys. Rev. A*, 82(5); 052310.
- Chruściński, D. and Pytel, J. 2011. Optimal entanglement witnesses from generalized reduction and Robertson maps. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44(16); 165304.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2011. Spectral conditions for positive maps and entanglement witnesses. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 284(1); 012017.
- Chruściński, D. and Sarbicki, G. 2012a. Exposed positive maps: a sufficient condition. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 45(11); 115304.
- Chruściński, D. and Sarbicki, G. 2012b. Exposed positive maps in $M_4(\mathbb{C})$. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 19(3); 1250017.
- Chruściński, D. and Sarbicki, G. 2014. Entanglement witnesses: construction, analysis and classification. *J. Phys. A: Math. Theor.* 47; 483001.
- Clarisse, L. 2006. Entanglement Distillation; A Discourse on Bound Entanglement in Quantum Information Theory. Ph.D. thesis, University of York, Department of Mathematics, UK, 192, arXiv:quantph/0612072.
- Clauser, J.F., Horne, M.A., Shimony, A. and Holt, R.A. 1969. Proposed experiment to test local hidden variables theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23; 880.
- DiVincenzo, D.P. and Terhal, B.M. 2000. Product Bases in Quantum Information Theory, arXiv: quant-ph/0008055v1.
- DiVincenzo, D.P., Mor, T., Shor, P.W., Smolin, J.A. and Terhal, B.M. 2003. Unextendible product basis, uncompletable product basis and bound entanglement. *Commun. Math. Phys.*, 238; 379-410.
- Duran, D., Verçin, A. and Yılmaz, S. 2014. Entanglement detection via continuous quantum channels. *Phys. Rev. A*, 90(4); 042320.
- Duran, D. and Verçin, A. 2018. Controlling the loss of quantum correlations via quantum memory channels. *Quantum Inf. Process.*, 17(7); 164.

- Giovanetti, V. 2004. Separability conditions from entropic uncertainty relations. *Phys. Rev. A*, 70(1); 012102.
- Groisman, B., Popescu, S. and Winter, A. 2005. Quantum, classical, and total amount of correlations in a quantum state. *Phys. Rev. A*, 72; 032317.
- Gühne, O., Hyllus, P., Bruß, D., Ekert, A., Lewenstein, M., Macchiavello, C. and Sanpera, A. 2002. Detection of entanglement with few local measurements. *Phys. Rev. A*, 66; 062305.
- Gühne, O. 2004. Characterizing Entanglement via Uncertainty Relations. *Phys. Rev. Lett*, 92(11); 117903.
- Gühne, O. and Lewenstein, M. 2004. Entropic uncertainty relations and entanglement. *Phys. Rev. A*, 70; 022316.
- Gühne, O. and Lütkenhaus, N. 2006. Nonlinear entanglement witnesses, covariance matrices and the geometry of separable states. *Phys. Rev. Lett*, 96(17); 170502.
- Gühne, O., Mechler, M., Tóth, G. and Adam, P. 2006. Entanglement criteria based on local uncertainty relations are strictly stronger than the computable cross norm criterion. *Phys. Rev. A*, 74(1); 010301.
- Gühne, O. and Tóth, G. 2009. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474; 1-75.
- Ha, K-C. 1998. Atomic positive linear maps in matrix algebras. *Publ. RIMS. Kyoto Univ*, 34; 591-599.
- Ha, K-C. 2002. Positive projections onto spin factors. *Linear Algebra Appl*, 348(1-3); 105-113.
- Ha, K-C. 2003. A class of atomic positive linear maps in matrix algebras. *Linear Algebra Appl*, 359(1-3); 277-290.
- Ha, K-C. and Kye, S-H. 2012a. Optimality for indecomposable entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 86(3); 034301.
- Ha, K-C. and Kye, S-H. 2012b. The structural physical approximations and optimal entanglement witnesses. *J. Math. Phys*, 53; 102204.
- Haagerup, U. and Musat, M. 2011. Factorization and dilation problems for completely positive maps on von Neumann algebras. *Commun. Math. Phys*, 303; 555-594.
- Hall, W. 2006. A new criterion for indecomposability of positive maps. *J. Phys. A: Math. Gen*, 39; 14119.
- Hansen, L.O., Hauge, A., Myrheim, J. and Sollid, P.Ø. 2015. Extremal entanglement witnesses. *Int. J. Quantum Inform*, 13; 1550060.
- Hansen, L.O. and Myrheim, J. 2015. Visualizing extremal positive maps in unital and trace-preserving form. *Phys. Rev. A*, 92(4); 042306.
- Hofmann, H.F. and Takeuchi, S. 2003. Violation of local uncertainty relations as a signature of entanglement. *Phys. Rev. A*, 68(3); 032103.
- Holevo, A.S. 2011. On the Choi–Jamiołkowski correspondence in infinite dimensions. *J. Math. Phys*, 52; 042202.

- Holevo, A.S. 2012. Quantum Systems, Channels, Information: A Mathematical Introduction. de Gruyter, 349 s., Berlin/Boston.
- Horodecki, R. and Horodecki, P. 1994. Quantum redundancies and local realism. *Phys. Lett. A*, 194(3); 147-152.
- Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. 1996. Separability of mixed states: necessary and sufficient condition. *Phys. Lett. A*, 223; 1-8.
- Horodecki, P. 1997. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Phys. Lett. A*, 232; 333-339.
- Horodecki, M. and Horodecki, P. 1999. Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols. *Phys. Rev. A*, 59(6); 4206-4216.
- Horodecki, P., Horodecki, M. and Horodecki, R. 2000. Binding entanglement channels. *J. Mod. Opt.*, 47(2-3); 347-354.
- Horodecki, P. and Terhal, B.M. 2000. A Schmidt number for density matrices. *Phys. Rev. A*, 61; 040301(R).
- Horodecki, M., Shor, P.W. and Ruskai, M.B. 2003. Entanglement Breaking Channels. *Rev. Math. Phys.*, 15; 629.
- Horodecki, R., Horodecki, P. Horodecki, M. and Horodecki, K. 2009. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81; 865.
- Hou, J. 2010. A characterization of positive linear maps and criteria of entanglement for quantum states. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43; 385201.
- Hyllus, P., Gühne, O., Bruss, D. and Lewenstein, M. 2005. Relations between entanglement witnesses and Bell inequalities. *Phys. Rev. A*, 72; 012321.
- Jamiołkowski, A. 1972. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Rep. Math. Phys.*, 3; 275-278.
- Kossakowski, A. 1972. *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. Astr. Phys.* Necessary and sufficient conditions for a generator of a quantum dynamical semigroup, 20; 1021.
- Kraus, K. 1983. *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Lec. Notes Phys. Springer, 190 s., Berlin.
- Kye, S-H. 2012. Necessary conditions for optimality of decomposable entanglement witnesses. *Rep. Math. Phys.*, 69(3); 419-426.
- Kye, S-H. 2013. Facial structures for various notions of positivity and applications to the theory of entanglement. *Rev. Math. Phys.*, 25; 1330002.
- Landau, L.J. and Streater, R.F. 1993. On Birkhoff's theorem for doubly stochastic completely positive maps of matrix algebras. *Linear Algebra Appl.*, 193; 107-127.
- Lewenstein, M., Kraus, B., Cirac, J.I. and Horodecki, P. 2000. Optimization of entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 62; 052310.
- Lewenstein, M., Kraus, B., Horodecki, P. and Cirac, J.I. 2001. Characterization of separable states and entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 63; 044304.

- Li, N. and Luo, S. 2013. Entanglement detection via quantum Fisher information. *Phys. Rev. A*, 88; 014301.
- Macchiavello, C. and Palma, G.M. 2002. Entanglement-enhanced information transmission over a quantum channel with correlated noise. *Phys. Rev. A*, 65; 050301(R).
- Macchiavello, C., Palma, G.M. and Virmani, S. 2004. Transition behavior in the channel capacity of two-qubit channels with memory. *Phys. Rev. A*, 69; 010303(R).
- Majewski, W.A. and Marciniak, M. 2006. Decomposability of extremal positive unital maps on $M_2(\mathbb{C})$. *Banach Center Publications*, 73; 347-356.
- Majewski, W.A. 2012. On the structure of positive maps; finite dimensional case. *J. Math. Phys.*, 53; 023515.
- Majewski, W.A. and Tylec, T. 2013. On the structure of positive maps: II. low dimensional matrix algebras. *J. Math. Phys.*, 54; 073508.
- Marciniak, M. 2010. On extremal positive maps acting between type I factors, In: *Noncommutative Harmonic Analysis with Application to Probability II* (Polish Academy of Sciences Mathematics vol 89). Banach Center Publication, 201-221, Warsaw.
- Marciniak, M. 2013. Rank properties of exposed positive maps. *Linear Multilinear Algebra*, 61; 970-975.
- Marciniak, M. and Rutkowski, A. 2017. Merging of positive maps: A construction of various classes of positive maps on matrix algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 529; 215-257.
- Meggison, R.E. 1998. *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics 183, Springer-Verlag, 596 p., New York.
- Miller, M. and Olkiewicz, R. 2016. Extremal Positive Maps on $M_3(\mathbb{C})$ and Idempotent Matrices. *Open Syst. Inf. Dyn*, 23; 1650001.
- Nielsen, M.A. and Kempe J. 2001. Separable states are more disordered globally than locally. *Phys. Rev. Lett*, 86(22); 5184-5187.
- Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. 2010. *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, 710 p., Cambridge.
- Osaka, H. 1991. Indecomposable positive maps in low dimensional matrix algebras. *Linear Algebr. Appl*, 153; 73-83.
- Osaka, H. 1992. A class of extremal positive maps in 3×3 matrix algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci*, 28(5); 747-756.
- Paulsen, V. 2002. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge University Press, 314 s., Cambridge.
- Peres, A. 1996. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett*, 77(8); 1413-1415.
- Petz, D. 1996. Monotone Metrics on Matrix Spaces. *Linear Algebra Appl*, 244; 81-96.

- Pillis, J. 1967. Linear transformations which preserve hermitian and positive semidefinite operators. *Pac. J. Math*, 23(1); 129-137.
- Qi, X. and Hou, J. 2012. Characterization of optimal entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 85; 022334.
- Robertson, A.G. 1983. Automorphisms of spin factors and the decomposition of positive maps. *Q. J. Math. Oxford (2)*, 34(1); 87-96.
- Rockafellar, R.T. 1970. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 472 s., Princeton.
- Rudolph, O. 2000. A separability criterion for density operators. *J. Phys. A: Math. Gen.* 33(21); 3951.
- Sanpera, A., Tarrach, R. and Vidal, G. 1998. Local description of quantum inseparability. *Phys. Rev. A*, 58(2); 826.
- Sanpera, A., Bruss, D. and Lewenstein, M. 2001. Schmidt number witnesses and bound entanglement. *Phys. Rev. A*, 63; 050301.
- Sarbicki, G. and Chruściński, D. 2013. A class of exposed indecomposable positive maps. *J. Phys. A: Math. Theor.* 46; 015306.
- Sengupta, R. and Arvind. 2011. Extremal extensions of entanglement witnesses: finding new bound entangled states. *Phys. Rev. A*, 84; 032328.
- Sengupta, R. and Arvind. 2013. Extremal extensions of entanglement witnesses and their connection with unextendable product bases. *Phys. Rev. A*, 87; 012318.
- Skowronek, Ł., Størmer, E. and Życzkowski, K. 2009. Cones of positive maps and their duality relations *J. Math. Phys.* 50; 062106.
- Skowronek, Ł. and Størmer, E. 2012. Choi matrices, norms and entanglement associated with positive maps on matrix algebras. *J. Funct. Anal.* 262(2); 639-647.
- Spengler, C., Huber, M., Brierley, S., Adaktylos, T. and Hiesmayr, B.C. 2012. Entanglement detection via mutually unbiased bases. *Phys. Rev. A*, 86; 022311.
- Sperling, J. and Vogel, W. 2009. Necessary and sufficient conditions for bipartite entanglement. *Phys. Rev. A*, 79; 022318.
- Stinespring, W.F. 1955. Positive Functions on C^* – algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* 6; 211-216.
- Størmer, E. 1963. Positive linear maps of operator algebras. *Acta Math.* 110; 233-278.
- Størmer, E. Proc. 1982. Decomposable positive maps on C^* – algebras. *Amer. Math. Soc.* 86; 402-404.
- Størmer, E. 2013. *Positive Linear Maps of Operator Algebras*. Springer, 134 s., Berlin.
- Terhal, B.M. 2000. Bell inequalities and separability criterion. *Phys. Lett. A*, 271; 319-326.
- Terhal, B.M. 2001. A family of indecomposable positive linear maps based on entangled quantum states. *Linear Algebra Appl.* 323; 61-73.
- Terhal, B.M. 2002. Detecting quantum entanglement. *Theoretical Computer Science*, 287; 313-335.

- Wang, B-H. and Long, D-Y. 2013. Structural physical approximations and entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 87; 062324.
- Werner, R.F. 1989. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40; 4277-4281.
- Wootters, W.K. and Fields, B.D. 1989. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements. *Ann. Phys*, 191(2); 363-381.
- Wootters, W.K. 1998. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.* 80; 2245.
- Woronowicz, S.L. 1976. Positive maps of low dimensional matrix algebras. *Rep. Math. Phys*, 10; 165-183.
- Yeo, Y. and Skeen, A. 2003. Time-correlated quantum amplitude-damping channel. *Phys. Rev. A*, 67; 064301.
- Zwolak, J.P. and Chruściński, D. 2013. New tools for investigating positive maps in matrix algebras. *Rep. Math. Phys*, 71(2); 163-175.
- Zwolak, J.P. and Chruściński, D. 2014. Recurrent construction of optimal entanglement witnesses for $2N$ qubit systems. *Phys. Rev. A*, 89; 052314.

EKLER

EK 1 Kuantum Kanal Örnekleri ve Bölüm 2'deki Bazı Teoremlerin İspatları

EK 2 Diğer Ayrılabilirlik Kriterleri

EK 3 Diğer Dolanıklık Tanıkları

EK 4 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ Uzayında Köşegen-Tipi Dolanıklık Tanıkları

EK 5 $\mathbb{C}^{2N} \otimes \mathbb{C}^{2N}$ 'de Optimal Dolanıklık Tanıkları Sınıfı

EK 1 Kuantum Kanal Örnekleri Ve Bölüm 2'deki Bazı Teoremlerin İspatları

1.1 Kuantum Kanal Örnekleri

(i) **Üniter Gelişim:** U, \mathcal{H} uzayında üniter bir matris olsun. $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ uzayından kendisine tanımlı

$$\Lambda_U \equiv ad_U: \rho \mapsto \Lambda_U(\rho) = U\rho U^\dagger \quad (1.1)$$

durum gelişimi bir kuantum kanaldır. Bu, Choi-Kraus temsilinden kolaylıkla doğrulanabilir. Burada ad_U eşlenik etkiyi ifade eder. Keyfi bir U üniter matrisi $U = Ve^{i\theta}$ formunda olduğundan $U\rho U^\dagger = V\rho V^\dagger$ yazılabilir. Burada V determinantı 1 olan üniter bir matristir. Böyle matrisler, özel üniter matrisler olarak adlandırılırlar. Üniter kanallar terslenebilir ve tersi de kanal olan yegane kanallardır. Bunlar, yalıtılmış kuantum sistemlerinin Schrödinger dinamiğini betimlerler ve bunun dışındaki kanallar tersinmez süreçleri betimlerler. Fakat \mathcal{H}_A uzayının boyutu \mathcal{H}_B uzayının boyutundan küçükken böyle üniter durum gelişimleri yoktur. Böyle bir durumda, $U^\dagger U = \mathbb{I}$ koşulunu sağlayan izometrik matrisler kullanılır. $\Lambda_U(\rho) = U\rho U^\dagger$ kanalı izometrik durum gelişimi olarak adlandırılır.

(ii) **Kısmi iz:** $Tr_{\mathcal{H}'}: \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \mapsto \mathcal{H}'$ kısmi iz gönderimi bir durum gelişimi olarak düşünülebilir. Stinespring teoreminin özel bir hali olduğundan CP bir gönderimdir.

(iii) **Kutupsuzlaştırıcı (depolarizing) Kanal:** Keyfi bir $0 \leq \lambda \leq 1$ için, kutupsuzlaştırıcı kanalın herhangi bir ρ durumuna etkisi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\Lambda(\rho) = \lambda\rho + (1 - \lambda)(Tr\rho)\frac{\mathbb{I}_d}{d} \quad (1.2)$$

Özel olarak $d = 2$ seçilirse

$$\Lambda(\rho) = \frac{3\lambda + 1}{4}\rho + \frac{1 - \lambda}{4}\sum_{i=1}^3 \sigma_i \rho \sigma_i^\dagger \quad (1.3)$$

yazılabilir. Burada σ_i 'ler Pauli matrisleridir. Kutupsuzlaştırıcı kanal üniter dönüşümler altında değişmezdir: $\Lambda(U\rho U^\dagger) = U\Lambda(\rho)U^\dagger$. Tersine bu özelliği sağlayan bir kanal, kutupsuzlaştırıcı kanaldır.

(iv) Dolanıklık-kırıcı (*Entanglement-breaking*) Kanal: Dolanıklık-kırıcı kanallar, aşağıdaki anlamda klasik bir kanalla ifade edilebilen kuantum kanalların özel bir sınıfıdır: Gönderici bir ρ durumu üzerinde bir ölçüm yapar ve klasik bir kanal aracılığıyla k ölçüm çıktılarını alıcıya gönderir. Alıcı, σ_k durumunu hazırlar. Böyle kanallar aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$\Lambda(\rho) = \sum_k (\text{Tr} \rho M_k) \sigma_k. \quad (1.4)$$

Burada her σ_k bir yoğunluk işlemcisidir ve $M = \{M_k\}_{k \in \Omega}$, \mathcal{H}_A uzayındaki keyfi **pozitif operatör değerli ölçüdür** (POVM) ve $M_k \geq 0$, $\sum_{k \in \Omega} M_k = \mathbb{I}$ koşullarını sağlar. Ω ölçüm çıktıları kümesidir ve olasılık uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1: Herhangi bir ρ durumu için $(id_A \otimes \Lambda)\rho$ çıkış durumu her zaman ayrılabilirse $\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ kanalı, dolanıklık-kırıcıdır (Horodecki vd. 2003).

Eşdeğer bir dolanıklık-kırıcı kanal tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir (Horodecki vd. 2003): Λ kanalı $\Lambda(X) = \sum_{i=1}^k K_i X K_i^\dagger$ Choi-Kraus temsiliinde yazılabilir. Burada K_i işlemcileri rank-1 matrislerdir. Choi-Kraus temsili tek olmadığından, böyle bir yazım için gereken minimum k olarak Λ kanalının dolanıklık-kırma rankı tanımlanır ve $\text{ebr}(\Lambda)$ ile gösterilir. Λ kanalının dolanıklık-kırma rankı, asla Choi rankından daha küçük olamaz.

Son olarak bir Λ gönderiminin dolanıklık-kırıcı bir kanal olması için $C_A := [\Lambda(E_{ij})]$ Choi matrisinin ayrılabilir olması gerekir tanımı da yapılabilir.

Sonuç 1: $\Lambda_{\mathbb{T}}$ transpoz gönderimi olsun. Λ , kübitlere etkiyen bit kanalsa aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir.

- i) $\Lambda_{\mathbb{T}} \circ \Lambda$ CP bir gönderimdir.
- ii) Λ dolanıklık-kırıcı bir kanaldır.

(v) **Transpoz Kutupsuzlaştırıcı Kanal:** Pozitif bir α sayısı için, $\Lambda_{\mathbb{T}}^d$ gönderiminin

$$\Lambda_{\mathbb{T}}^d(\rho) = \alpha \rho^T + (1 - \alpha) \frac{\mathbb{I}}{d} \quad (1.5)$$

bir kuantum kanal olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in \left[-\frac{1}{d-1}, \frac{1}{d+1}\right]$ olmasıdır ve transpoz kutupsuzlaştırıcı olarak adlandırılır. Burada d sistemin boyutudur. Özel olarak $\alpha = -1/(d-1)$ iken $\Lambda_{\mathbb{T}}^d$ kanalı, antisimetrik kanal veya Werner-Holevo kanalı olarak adlandırılır. Bu kanal

$$\Lambda_{\mathbb{T}}^d(U\rho U^\dagger) = U^* \Lambda_{\mathbb{T}}^d(\rho) U^T \quad (1.6)$$

antikovaryanslık eşitliğini sağlar.

Bölüm 2'deki Bazı Teoremlerin İspatları

Lemma 1: Λ kuantum kanalının \mathcal{H}_A 'dan \mathcal{H}_B 'ye tanımlı CP iz-koruyan gönderimlerin ekstremal bir noktası olması için gerek ve yeter koşul $\{K_j^\dagger K_i\}_{ij}$ çizgisel bağımsız olacak şekilde Λ 'nın $\{K_i\}$ Choi-Kraus temsiline sahip olmasıdır.

İspat: Λ bir ekstremal nokta ve K_i işlemcileri çizgisel bağımsız olacak şekilde $\{K_i\}$, Λ 'nın bir Choi-Kraus temsili olsun. $\sum_{i,j} \lambda_{ij} K_i^\dagger K_j = 0$ ve matris normu $\|(\lambda_{ij})\| < 1$ seçilsin. Buradan

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm}(\rho) &= \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \pm \sum_{i,j} \lambda_{ij} K_i \rho K_j^\dagger \\ &= \sum_{i,j} K_{ij} \rho K_{ij}^\dagger (\mathbb{I} \pm \lambda_{ij}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

şeklinde $\Lambda_{\pm}(\rho)$ tanımlansın. $\mathbb{I} \pm (\lambda_{ij}) \geq 0$ olduğundan Λ_{\pm} bir kuantum kanaldır. Ayrıca $\Lambda = (\Lambda_+ + \Lambda_-)/2$ şeklinde yazılabilir. Λ ekstremal olduğundan $\Lambda_+ = \Lambda$ eşitliği sağlanır. Yani $\lambda_{ij} = 0$ bulunur ve $\{K_j^\dagger K_i\}_{ij}$ çizgisel bağımsız bir kümedir (Hayashi 2017).

Tersine, $\{K_j^\dagger K_i\}_{ij}$ kümesi çizgisel bağımsız olsun. $\Lambda = \lambda \Lambda_1 + (1 - \lambda) \Lambda_2$; $0 < \lambda < 1$ olacak şekilde gerçel bir λ ile Λ_1 ve Λ_2 kanalları olsun. Bu durumda Λ 'nın Kraus

işlemcileri $\{\sqrt{\lambda}K_i^1\} \cup \{\sqrt{1-\lambda}K_i^2\}$ şeklindedir. Böylece K_i^1 işlemcisi $\sum_j \lambda_{ij}K_j$ olarak yazılabilir. $\sum_i (K_i^1)^\dagger K_i^1 = \sum_j K_j^\dagger K_j$ eşitliğinden ve $\sum_i (\lambda_{ij'})^* \lambda_{ij} = \delta_{j'j}$ özdeşliğinden $A_1 = A$ bulunur.

Teorem 1.1: Çizgisel bir $\Lambda: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ gönderiminin pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle \psi \otimes \Phi | (id_d \otimes \Lambda) M | \psi \otimes \Phi \rangle \geq 0, \quad \forall |\psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathbb{C}^d \quad (1.10)$$

şeklinde verilen Choi matrisinin blok-pozitif bir işlemci olmasıdır (Jamiołkowski 1972, Kossakowski 1972).

İspat: Verilen bir $\Lambda: M_d(\mathbb{C}) \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ pozitif gönderimi tanımdan dolayı $M_d(\mathbb{C})$ 'deki matrislerin pozitifliğini korur:

$$\langle \Phi | \Lambda[|\psi\rangle\langle\psi|] | \Phi \rangle \geq 0, \quad \forall |\psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathbb{C}^d. \quad (1.11)$$

Herhangi bir $\{|i\rangle\}_{i=1}^d \in \mathbb{C}^d$ ortonormal bazı verildiğinde, herhangi bir $|\psi\rangle$ vektörü bu baz cinsinden

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \psi_i |i\rangle, \quad \psi_i = \langle i | \psi \rangle \quad (1.12)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (1.11) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Lambda[|\psi\rangle\langle\psi|] | \Phi \rangle &= \sum_{i,j=1}^d \psi_i \psi_j^* \langle \Phi | \Lambda(|i\rangle\langle j|) | \Phi \rangle \\ &= \langle \psi^* \otimes \Phi | \sum_{i,j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes \Lambda(|i\rangle\langle j|) | \psi^* \otimes \Phi \rangle \\ &= \langle \psi^* \otimes \Phi | (id_d \otimes \Lambda) M | \psi^* \otimes \Phi \rangle \\ &= \langle \psi^* \otimes \Phi | C_\Lambda | \psi^* \otimes \Phi \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

doğrulanabilir. Λ 'nın pozitifliği, C_Λ Choi matrisinin pozitifliğine eşdeğerdir ve bunun tersi de doğrudur.

EK 2 Diğer Ayrılabilirlik Kriterleri

Bu bölümde, Bölüm 3'te verilen kriterlere ek olarak belirsizlik bağıntıları aracılığıyla ayrılabilirlik, çoğullama, hesaplanabilir çapraz-norm ve kuantum Fisher bilişimi aracılığıyla dolanıklığın algılanması kriterleri verilecektir.

2.1 Belirsizlik Bağıntıları Aracılığıyla Ayrılabilirlik Kriteri

Son yıllarda dolanıklığın algılanması için belirsizlik bağıntıları kullanılarak yeni kriterler geliştirilmiştir. Bu doğrultuda, yerel belirsizlik bağıntıları (*local uncertainty relations-LURs*) ve entropik belirsizlik bağıntıları (*entropic uncertainty relations*) olmak üzere iki ayrılabilirlik kriteri vardır.

2.1.1 Yerel belirsizlik bağıntıları kriteri

Bu kriter, yerel gözlenebilirler için varyans tabanlı bir belirsizlik bağıntısı verir (Hofmann ve Takeuchi 2003). Ayrıca yerel-olmayan gözlenebilirler için de bu kriter genellenebilir (Gühne 2004).

Bir M gözlenebilirinin varyansı

$$\Delta^2(M)_\rho = \langle (M - \langle M \rangle_\rho)^2 \rangle = \langle M^2 \rangle_\rho - \langle M \rangle_\rho^2 \quad (2.1)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Burada $\langle M \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho M)$ şeklindedir. İyi bilinen bir belirsizlik bağıntısı, sıra değişmeyen p ve x gözlenebilirleri için $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$ belirsizlik bağıntısıdır. Sıra değişmeyen M_i gözlenebilirleri için belirsizlik bağıntısının genel bir formu

$$\sum_i \Delta^2(M_i)_\rho \geq C > 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada C pozitif keyfi bir sabittir. Dolanıklık algılama metodu; $\{M_i\}$ gözlenebilirlerini seçmek, tüm çarpım durumları için bir C altını belirlemek ve varyansın konkavlık özelliklerini kullanmaya dayanır.

Varyans, $\rho = \sum_k p_k \rho_k$ ayrışımına göre konkavdır:

$$\begin{aligned}
\Delta^2(M_i)_\rho &= \sum_k p_k \langle (M_i - \langle M_i \rangle_\rho)^2 \rangle_{\rho_k} \\
&= \sum_k p_k [\langle M_i^2 \rangle_{\rho_k} - \langle M_i \rangle_{\rho_k}^2 + \langle M_i \rangle_{\rho_k}^2 - 2\langle M_i \rangle_{\rho_k} \langle M_i \rangle_\rho + \langle M_i \rangle_\rho^2] \\
&= \sum_k p_k [\Delta^2(M_i)_{\rho_k} - (\langle M_i \rangle_{\rho_k} - \langle M_i \rangle_\rho)^2] \\
&\geq \sum_k p_k \Delta^2(M_i)_{\rho_k}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Buradan

$$\sum_i \Delta^2(M_i)_\rho \geq \sum_k p_k \sum_i \Delta^2(M_i)_{\rho_k} \tag{2.4}$$

eşitsizliği yazılabilir. Varyansın konkavlığı, saf-olmayan durumlarla belirsizliğin azaltılamayacağı anlamına gelir. Başka bir ifadeyle, bazı durumlar karıştırılarak bir gözlenebilirin belirsizliği azaltılamaz. Çarpım durumları için

$$\sum_i \Delta^2(M_i)_\rho < C \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ρ durumu dolanıktır.

Genel olarak iki-parçalı sistemler için

$$M_i = A_i \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes B_i ; \quad i = 1, \dots, n \tag{2.6}$$

gözlenebilirleri seçilebilir. Bu durumda yerel gözlenebilirler

$$\sum_{i=1}^n \Delta^2(A_i)_{\rho_A} \geq C_A \quad , \quad \sum_{i=1}^n \Delta^2(B_i)_{\rho_B} \geq C_B \tag{2.7}$$

altınırlarına sahiptir. Buradan ρ durumu ayrılabilir ise

$$\sum_i \Delta^2(M_i)_\rho \geq C_A + C_B \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Çok-parçalı dolanıklığın algılanması için henüz bir yerel belirsizlik bağıntısı bilinmemektedir.

Bu kriter **yerel-olmayan gözlenebilirler** için de incelenmiştir (Gühne 2004). Herhangi bir iki-parçalı dolanık $|\psi\rangle$ saf durumu için, bir $\{M_i\}$ gözlenebilirler kümesi vardır ve $|\psi\rangle$ durumu, bir belirsizlik bağıntısını ihlal eder. $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$ ve $a \geq b$ olsun. $M_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, $i = 1, \dots, 4$ gözlenebilirler kümesi seçilebilir:

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle\} = \{|\psi\rangle, |\psi\rangle^\perp, |\psi_3\rangle = a|01\rangle + b|10\rangle, |\psi_3\rangle^\perp\}. \quad (2.9)$$

Burada $|\psi\rangle^\perp$, $|\psi\rangle$ durumuna dik durumu göstermektedir. Ayrılabilir durumlar için

$$\sum_{i=1}^4 \Delta^2(M_i) \geq 2a^2b^2 \quad (2.10)$$

eşitsizliği gösterilebilir. Fakat $|\psi\rangle$ durumu için $\sum_i \Delta^2(M_i) = 0$ bulunur. Buradan $a = 0$ ya da $b = 0$ olmadıkça $|\psi\rangle$ durumu dolanık bir durumdur.

Yerel belirsizlik bağıntılarından elde edilen dolanıklık kriteri, PPTES'lerin dolanıklığını algılayabildiğinden dolayı güçlü bir kriterdir. Ayrıca (2.3) bölümünde gösterilecek olan CCNR kriterinden daha güçlüdür (Gühne vd. 2006).

Bağlı dolanık durumların dolanıklığı için $\sum_i \Delta^2(M_i) = 0$ olacak şekilde yerel-olmayan ölçüm bazları bulunabilir.

2.1.2 Entropik belirsizlik bağıntıları

Sıra değişmeyen M_i gözlenebilirleri için entropik belirsizlik bağıntısı

$$\sum_i S(M_i)_\rho \geq C > 0 \quad (2.11)$$

şeklinde verilir (Horodecki ve Horodecki 1994, Gühne ve Lewenstein 2004, Giovanetti 2004). Entropik belirsizlik bağıntıları aracılığıyla dolanıklık algılanması düşüncesi yerel belirsizlik bağıntılarına benzerdir. Burada da bir $\{M_i\}$ gözlenebilirler kümesi bulunur ve tüm çarpım durumları için bir C altınıırı elde edilir. Son olarak entropinin konkavlığı kullanılarak kuantum durumların ayrılabilirliği için kriter kurulabilir. $\sum_i S(M_i)_\rho < C$ ise ρ durumu dolanıktır.

A ve B gibi iki parça tarafından paylaşılan bir dolanık durumun entropisi, altsistemlerin entropisinden daha küçüktür: $S(A) > S(AB)$. Burada $S(\cdot)$ von Neumann entropisini göstermektedir. Bu eşitsizliğin sağlanması, durumun dolanık olmasını gerektirir.

Klasik olarak, X ve Y gibi iki rastgele değişkenin $H(X)$ ve $H(Y)$ Shannon entropileri⁴, bu rastgele değişkenlerin birleşik $H(XY)$ entropisinden asla daha büyük olamaz: $H(X), H(Y) \leq H(XY)$. Benzer şekilde A ve B gibi iki kuantum sistemin von Neumann entropisi için ayrılabilir durumlarda aynı bağıntı yazılabilir (Horodecki ve Horodecki 1994):

$$S(A), S(B) \leq S(AB). \quad (2.12)$$

Bu, $S(AB) - S(A) \geq 0$ eşitsizliğinin konkavlığının bir sonucudur.

2.2 Çoğullama Kriteri

Ayrılabilir durumlar için, AB sisteminin yoğunluk matrisinin özdeğerler vektörü sadece A ya da sadece B sisteminin yoğunluk matrisinin özdeğerler vektörü tarafından çoğullandığını (*majorization*) söyleyen ve entropi kriterinden daha güçlü bir kriter vardır (Nielsen ve Kempe 2001). Bu kriter keyfi boyutlarda iki-parçalı durumların ayrılabilirliği için bir gerek koşul verir.

d –boyutlu bir vektör uzayında azalan katsayılı bir vektör, yani $i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ için $x_i \geq x_{i+1}$, x^\downarrow ile gösterilsin. $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, d –boyutlu iki gerçel vektör olsun. $x < y$ bağıntısı, y vektörünün x vektörünü çoğulladığını ifade eder. Başka bir ifadeyle, x vektörü y vektöründen daha “karışık”tır (bozulmuştur). $x^\downarrow = x_1^\downarrow, \dots, x_d^\downarrow$ şeklinde verilsin. Burada $x_1^\downarrow \geq x_2^\downarrow \geq \dots \geq x_d^\downarrow$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.1: y vektörünün x vektörünü çoğullaması için, $x < y$,

⁴ p_i olasılıklarıyla x_i değerlerini alan rastgele bir X değişkeninin Shannon entropisi $H(X) = H(\{p_i\}) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$ ile verilir.

$$\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow \quad ; \quad k = 1, \dots, d-1$$

$$\sum_{i=1}^d x_i^\downarrow = \sum_{i=1}^d y_i^\downarrow \quad ; \quad k = d \quad (2.13)$$

bağıntıları sağlanmalıdır.

Tanım 2.2: $A = (a_{ij})$, $d \times d$ 'li pozitif bir matris olsun. $a_{ij} \geq 0$ ve her i ve j için $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$ koşulları sağlanıyorsa A matrisi ikili stokastik bir matristir. Başka bir ifadeyle matrisin kendisi ve transpozu stokastiktir. Yani matrisin elemanları $[0,1]$ kapalı aralığında pozitif sayılar olmalıdırlar. Stokastik matrisler, olasılık matrisi ve geçiş matrisi olarak da adlandırılırlar.

Teorem 2.1: $x, y \in \mathbb{R}^d$ vektörleri verildiğinde, $x < y$ bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$x = Dy \quad (2.14)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada D ikili stokastik bir matristir (Bhatia 1997). $x < y$ ise, y vektörü ikili stokastik D matrisiyle tanımlanan gürültülü klasik bir kanal için giriş olasılık dağılımı olarak düşünülebilir.

Von Neumann entropisi ve ayrılabilirlik gibi iki kavram arasındaki ilişki verildiğinde ρ_{AB} ve karşılık gelen indirgenmiş yoğunluk işlemcileri için $\lambda(\rho_{AB}), \lambda(\rho_A), \lambda(\rho_B)$ özdeğer vektörleri ile ayrılabilirlik arasında da benzer bir ilişki kurulabilir.

Teorem 2.2: ρ_{AB} ayrılabilir bir durum ise

$$\lambda(\rho_{AB}) < \lambda(\rho_A) \quad \text{ve} \quad \lambda(\rho_{AB}) < \lambda(\rho_B) \quad (2.15)$$

bağıntıları yazılabilir. Herhangi iki ρ ve σ durumu için $\lambda(\rho) < \lambda(\sigma)$ bağıntısı $S(\rho) \geq S(\sigma)$ eşitsizliğini gerektirdiğinden bu kriter (2.12) denklemiyle verilen entropi kriterinden daha güçlüdür.

Örnek 2.1: d boyutta Werner durumu

$$\rho_p = p|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-p)\frac{\mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d}{d^2} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}(|00\rangle + |11\rangle + \dots + |(d-1)(d-1)\rangle) \quad (2.17)$$

şeklindedir. Bu durumda çoğullama kriteri

$$\frac{1}{d^2}[1 + (d^2 - 1)p, 1 - p, \dots, 1 - p] < \frac{1}{d}(1, 1, \dots, 1) \quad (2.18)$$

olarak bulunur ve ρ_p durumunun ayrılabilir olması, $p \leq 1/(d+1)$ koşuluna eşdeğerdir (Dür 2000).

Örnek 2.2: $\rho_{AB}(p) \equiv p|00\rangle\langle 00| + (1-p)|\Phi\rangle\langle\Phi|$, $|\Phi\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ olsun. PPT kriteri $p \neq 1$ için bu durumun dolanık olmasını gerektirir. Fakat $p \geq 1/3$ için

$$\lambda[\rho_{AB}(p)] = (p, 1-p) < \lambda[\rho_{A(B)}(p)] = \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1-p}{2}\right] \quad (2.19)$$

bulunur. (2.15) denklemleri, bu dolanık durum için sağlanır.

Teorem 2.3: $\lambda(\rho_{AB}) < \lambda(\rho_A)$ olacak şekilde bir ρ_{AB} yoğunluk matrisi varsa $\lambda(\sigma_{AB}) = \lambda(\rho_{AB})$ ve $\lambda(\sigma_A) = \lambda(\rho_A)$ olacak şekilde ayrılabilir bir σ_{AB} yoğunluk matrisi vardır.

İspat: $(r_j) = \lambda(\rho_{AB})$ ve $(s_k) = \lambda(\rho_A)$ olsun. $s_j = \sum_k |u_{jk}|^2 r_k$ olacak şekilde üniter bir u_{jk} matrisi vardır ve $|u_{jk}|^2$ ikili-stokastik bir matristir. $|j\rangle$ ve $|k\rangle$ sırasıyla B ve A sisteminin ortonormal bazları olmak üzere, sıfırdan farklı her r_j için

$$|\psi_j\rangle \equiv \frac{\sum_k u_{jk} \sqrt{s_k} |k\rangle}{\sqrt{r_j}} \quad (2.20)$$

tanımı yapılabilir. $\sigma_{AB} \equiv \sum_j r_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \otimes |j\rangle\langle j|$ olsun. σ_{AB} durumu, spektrumu $\lambda(\rho_{AB})$ olan ayrılabilir bir durumdur. $Tr_B(\sigma_{AB}) = \sum_k s_k |k\rangle\langle k|$ ve $\lambda(\sigma_A) = \lambda(\rho_A)$ bulunur.

2.3 Hesaplanabilir Çapraz-Norm veya Yeniden Sıralama Kriteri

Çarpım durumları üzerinde çizgisel kısıtlamalara dayalı başka bir kriter sınıfı vardır. Bu kriter işlevsel ve PPT testinden bağımsız olan hesaplanabilir çapraz-norm kriteri (*Computable Cross-Norm - CCNR*) olarak bilinir (Rudolph 2000).

İki-parçalı ρ_{AB} durumu ayrılabilirse $R(\rho)_{ij,kl} \equiv \rho_{ik,jl}$ olan yeniden sıralama matrisinin iz normu 1'den daha büyük olamaz:

$$\|R(\rho)\|_1 \leq 1. \quad (2.21)$$

Burada $\|\cdot\|_1$, bölüm 2.1'de tanımlanan iz normunu göstermektedir ve $R(A \otimes B) = |A\rangle\langle B^*|$ yeniden sıralama (*realignment*) işlemidir. CCNR kriteri farklı yollarla da ifade edilebilir. Burada $*$, kompleks eşlenik alma işlemini gösterir.

İki-parçalı ayrılabilir bir ρ durumu için \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B uzaylarının her ikisi de d –boyutlu olsun. $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ iki Hilbert uzayının bir tensör çarpımı olduğundan $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ uzayındaki herhangi bir iki-parçalı yoğunluk işlemcisine Schmidt ayrışımı uygulanabilir. Özel olarak $\rho \in \mathcal{H}_{AB}$ bir yoğunluk işlemcisi ise

$$\rho = \sum_k \lambda_k G_k^A \otimes G_k^B, \quad \lambda_k \geq 0 \quad (2.22)$$

şeklinde yazılabilir. Burada G_k^A ve G_k^B , $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ ve $\mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ sınırlı işlemci uzaylarının dik (*orthogonal*) bazlarıdır ve Hermitseldirler. Böyle bir baz

$$\text{Tr}(G_k^A G_l^A) = \text{Tr}(G_k^B G_l^B) = \delta_{kl} \quad (2.23)$$

HS iç çarpımını sağlayan d^2 tane gözlenebilir içerir ve bu gözlenebilirler yerel dik gözlenebilirler (*local orthogonal observables - LOOs*) denir. Örneğin, birim matrisle birlikte boylandırılmış Pauli matrisleri böyle gözlenebilirler kümesidir. G_k^A LOOs kümesi verildiğinde, diğer bir \tilde{G}_l^A LOOs kümesi

$$\tilde{G}_l^A = \sum_k O_{lk} G_k^A \quad (2.24)$$

şeklinde bulunabilir. Burada O_{lk} , $d \times d$ elemanlı gerçel dik matrisin elemanlarıdır. Schmidt ayrışımında olduğu gibi λ_k sayıları (bir permütasyon kadar) tektir. λ_k sayıları Schmidt ayrışımındaki gibi hesaplanabilirler: İlk olarak ρ yoğunluk işlemcisi

$$\rho = \sum_{kl} \mu_{kl} \tilde{G}_k^A \otimes \tilde{G}_l^B \quad (2.25)$$

keyfi \tilde{G}_k^A ve \tilde{G}_l^B gözlenebilirleri cinsinden yazılabilir. μ_{kl} 'nin tekil değer ayrışımı yapılırsa (2.22) denklemi elde edilir. λ_k sayıları, $\mu\mu^\dagger$ matrisinin özdeğerlerinin karekökleridir.

Teorem 2.4: Bir ρ kuantum durumu ayrılabilirse tüm λ_k sayılarının toplamının 1'den küçüktür:

$$\sum_k \lambda_k \leq 1. \quad (2.26)$$

Buradan $\sum_k \lambda_k > 1$ ise ρ durumu dolanık olmalıdır. CCNR kriterini ihlal eden herhangi bir durumun dolanıklığı, yerel bir belirsizlik bağıntısıyla algılanabilir. Fakat bunun tersi doğru değildir. CCNR kriterinden yararlanarak daha güçlü dolanıklık algılama etkinliğine sahip bir ayrılabilirlik koşulu söylenebilir (Gühne vd. 2006).

2.4 Kuantum Fisher Bilişimi Aracılığıyla Dolanıklığın Algılanması

Bu bölümde kuantum Fisher bilişimi kullanılarak varyansa dayalı algılama kriterlerinden daha etkin bir dolanıklık algılama kriteri gösterilecektir. Buradaki temel düşünce, ayrılabilir ve dolanık durumlar için bileşik sistemlerin yerel ve global bilişim içeriği arasındaki bağıntının farklı görünüşlerinden yararlanmaktır (Li ve Luo 2013).

Bir ρ kuantum durumu ve \mathcal{H} Hilbert uzayındaki bir X işlemcisi için kuantum Fisher bilişimi

$$F(\rho, X) = \frac{1}{4} \text{Tr} \rho L^2 \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilir. Burada L

$$i[\rho, X] = \frac{1}{2}(\rho L + L\rho) \quad (2.28)$$

eşitliğiyle belirlenen simetrik logaritmik türevdir.

Kuantum Fisher bilişimi saf durumlar için varyansa eşittir. Genel olarak ρ yoğunluk işlemcisi saf-olmayan bir durumsa

$$0 \leq F(\rho, X) \leq \Delta^2(X)_\rho \quad (2.29)$$

ilişkisi sağlanır. Ayrıca varyans ve kuantum Fisher bilişimi

$$\Delta^2(X)_{|\phi_j\rangle\langle\phi_j|} = F(|\phi_j\rangle\langle\phi_j|, X) \quad (2.30)$$

birbirlerinin dualidirler ve

$$\Delta^2(X)_\rho = \max_{\{p_j, |\phi_j\rangle\}} \sum_j p_j \Delta^2(X)_{|\phi_j\rangle\langle\phi_j|} \quad (2.31)$$

$$F(\rho, X) = \min_{\{p_j, |\phi_j\rangle\}} \sum_j p_j F(|\phi_j\rangle\langle\phi_j|, X) \quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilirler. Burada max ve min, ρ durumunun tüm saf durum topluluk dağılımları üzerinden alınır:

$$\rho = \sum_j p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \quad ; \quad p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1. \quad (2.33)$$

Kuantum Fisher bilişimi kuantum dolanıklığın algılanmasında etkin bir niceliktir ve aşağıdaki özellikleri sağlar (Petz 1996):

(i) Toplanabilirlik:

$$F(\rho_A \otimes \rho_B, X \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y) = F(\rho_A, X) + F(\rho_B, Y). \quad (2.34)$$

Burada sırasıyla A ve B alt sistemleri için ρ_A ve ρ_B kuantum durumlar, X ve Y gözlenebilirler, \mathbb{I}_A ve \mathbb{I}_B birim işlemcilerdir. Korele-olmayan iki alt sistemden oluşan bileşik bir sistemin bilişim içeriği alt sistemlerin bilişim içeriğinin toplamıdır.

(ii) Konvekslik:

$$F\left(\sum_j \lambda_j \rho_j, X\right) \leq \sum_j \lambda_j F(\rho_j, X); \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_j \lambda_j = 1. \quad (2.35)$$

Bazı farklı kuantum sistemler karıştırılırsa elde edilen sistemin bilişim içeriği, bileşen sistemlerin ortalama bilişim içeriğinden daha azdır.

$\{|k\rangle\}_{k=1}^d$, d boyutlu \mathcal{H} uzayındaki ortonormal bir baz olmak üzere, bir ρ kuantum durumunun $\rho = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ spektral ayrışımı biliniyorsa kuantum Fisher bilişimi

$$F(\rho, X) = 2 \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{(\lambda_k + \lambda_l)} |\langle k|X|l \rangle|^2 \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada m , \mathcal{H} Hilbert uzayının boyutudur. Ayrıca $\{X_\mu\}$ gözlenebilirleri HS iç çarpımına göre ortonormal bir tam küme, $Tr(X_\mu X_\nu) = \delta_{\mu\nu}$, ve $\{X_\mu\}$ tüm gözlenebilirlerin gerçel Hilbert uzayı için bir baz seçilirse

$$\sum_{\mu} F(\rho, X_\mu) = d - \sum_{k,l} \frac{2\lambda_k \lambda_l}{\lambda_k + \lambda_l} \quad (2.37)$$

ifadesi $\{X_\mu\}$ ortonormal gözlenebilir bazından bağımsızdır. Özel olarak

$$\sum_{\mu} F(\rho, X_\mu) \leq d - 1 \quad (2.38)$$

alınabilir. Başka bir $\{X'_r\}$ ortonormal gözlenebilir bazı varsa

$$\sum_{\mu} F(\rho, X_\mu) = \sum_r F(\rho, X'_r) \quad (2.39)$$

eşitliği yazılabilir. $\{X_\mu\}$ ve $\{X'_r\}$ bazlarının her ikisi de ortonormal gözlenebilir bazıları olduğundan

$$X'_r = \sum_{\mu=1}^{d^2} a_{r\mu} X_\mu \quad ; \quad r = 1, \dots, d^2 \quad (2.40)$$

ilişkisi yazılabilir. Burada $\{a_{r\mu}\}$

$$\sum_{r=1}^{d^2} a_{r\mu} a_{r\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad ; \quad \mu, \nu = 1, \dots, d^2 \quad (2.41)$$

gerçel bir ortogonal matristir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \sum_r F(\rho, X'_r) &= \sum_r \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)} \left| \langle k| \sum_{\mu=1}^{d^2} a_{r\mu} X_\mu |l \rangle \right|^2 \\ &= \sum_r \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)} \langle k| \sum_{\mu=1}^{d^2} a_{r\mu} X_\mu |l \rangle \langle l| \sum_{\nu=1}^{d^2} a_{r\nu} X_\nu |k \rangle \\ &= \sum_r \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{d^2} a_{r\mu} a_{r\nu} \right) \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)} \langle k|X_\mu|l \rangle \langle l|X_\nu|k \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu, \nu=1}^{d^2} \left(\sum_r a_{r\mu} a_{r\nu} \right) \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)} \langle k|X_\mu|l \rangle \langle l|X_\nu|k \rangle \\
&= \sum_{\mu=1}^{d^2} \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)} |\langle k|X_\mu|l \rangle|^2 \\
&= \sum_{\mu} F(\rho, X_\mu) \tag{2.42}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\sum_{\mu} F(\rho, X_\mu)$ niceliğinin ortonormal $\{X_\mu\}$ gözlemci bazının seçiminden bağımsız olduğu görülür. Herhangi bir ortonormal gözlemci bazı cinsinden de bu ifade elde edilebilir. Özel olarak $\{X_\mu\} = \{E_k, E_{k,l}^+, E_{k,l}^-\}$ olsun. Burada

$$\begin{aligned}
E_k &= |k\rangle\langle k| \quad ; \quad k = 1, \dots, d, \\
E_{k,l}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|k\rangle\langle l| + |l\rangle\langle k|) \quad ; \quad k < l, \quad k, l = 1, \dots, d, \\
E_{k,l}^- &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|k\rangle\langle l| - |l\rangle\langle k|) \quad ; \quad k < l, \quad k, l = 1, \dots, d \tag{2.43}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı matris bazlarıdır. Buradan

$$F(\rho, E_k) = 0, \quad F(\rho, E_{k,l}^+) = \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)}, \quad F(\rho, E_{k,l}^-) = \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2(\lambda_k + \lambda_l)} \tag{2.44}$$

bulunur. (2.37) ve (2.38) denklemlerinden

$$\sum_{k,l} \frac{2\lambda_k\lambda_l}{\lambda_k + \lambda_l} = 1 + \sum_{k \neq l} \frac{2\lambda_k\lambda_l}{\lambda_k + \lambda_l} \geq 1 \tag{2.45}$$

sonucu elde edilir.

2.4.1 Dolanıklık kriteri

İki-parçalı bir $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ kuantum durumu için, $\{X_\mu\}$ ve $\{Y_\mu\}$ sırasıyla \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B uzaylarındaki herhangi iki yerel gözlenebilir olsunlar ve bu gözlenebilirler ortonormal olmasınlar. Yerel belirsizlik bağıntılarına (LURs) dayalı dolanıklık kriteri, sırasıyla A ve B alt sistemlerine ait olan her yerel ρ_A ve ρ_B kuantum durumları için

$$\sum_{\mu} \Delta^2(X_\mu)_{\rho_A} \geq V_A \quad , \quad \sum_{\mu} \Delta^2(Y_\mu)_{\rho_B} \geq V_B \tag{E2.46}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa iki-parçalı herhangi bir ayrılabilir ρ_{AB} durumu için

$$\sum_{\mu} \Delta^2(X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu})_{\rho_{AB}} \geq V_A + V_B \quad (2.47)$$

eşitsizliğinin de sağlandığını söyler. Bölüm 2.1.1’de de gösterildiği gibi bir kuantum durum (2.47) eşitsizliği ihlal ediyorsa dolanık olmalıdır (Hofmann ve Takeuchi 2003). Bu kriter yerel altsistemlerin belirsizlik bağıntılarını kullanan global ayrılabilir bir durumun varlığını söyler. Bu kriterin gücü, $\{X_{\mu}\}$ ve $\{Y_{\mu}\}$ gözlenebilirlerinin seçimindeki esnekliğe dayanır ve CCNR kriterinden daha güçlüdür (Gühne vd. 2006).

Kuantum Fisher bilişimi varyanstan daha bilişim-kuramsal bir nicelik olduğundan bazı dolanıklık kriterleri kurmak için varyans yerine kullanılabilir (Tóth 2013). (2.46) eşitsizliğine zıt olarak, sırasıyla A ve B altsistemlerine ait olan her yerel ρ_A ve ρ_B kuantum durumları için

$$\sum_{\mu} F(\rho_A, X_{\mu}) \leq F_A \quad , \quad \sum_{\mu} F(\rho_B, Y_{\mu}) \leq F_B \quad (2.48)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa herhangi bir ayrılabilir ρ_{AB} durumu için (2.47) eşitsizliğinin tersine

$$\sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu}) \leq F_A + F_B \quad (2.49)$$

eşitsizliği de sağlanır. ρ_{AB} durumu bu eşitsizliği ihlal ediyorsa dolanık olmalıdır.

Kuantum Fisher bilişiminin toplanabilirlik ve konvekslik özellikleri aracılığıyla

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu}) &\leq \sum_{\mu} \sum_j \lambda_j F(\rho_A^j \otimes \rho_B^j, X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu}) \\ &= \sum_j \lambda_j \sum_{\mu} [F(\rho_A^j, X_{\mu}) + F(\rho_B^j, Y_{\mu})] \\ &\leq \sum_j \lambda_j (F_A + F_B) \\ &\leq F_A + F_B \end{aligned} \quad (2.50)$$

bulunur. Bileşik sistemin ayrılabilir bir durumunun bilişim içeriği kuantum Fisher bilişimi aracılığıyla nicelendirildiğinde yerel bilişim içeriğinin toplamıyla sınırlıdır.

$\dim\mathcal{H}_A = d = \dim\mathcal{H}_B$ olduğu durumda $\{X_\mu\}$ ve $\{Y_\mu\}$ gözlenebilirleri A ve B alt sistemleri için ortonormal gözlenebilirlerin tam kümeleri olarak alınırsa (2.38) denkleminde sırasıyla A ve B alt sistemlerinin ρ_A ve ρ_B durumları için

$$\sum_{\mu} F(\rho_A, X_\mu) \leq d - 1 \quad , \quad \sum_{\mu} F(\rho_B, Y_\mu) \leq d - 1 \quad (2.51)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda (2.49) eşitsizliği

$$\sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_\mu \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_\mu) \leq 2d - 2 \quad (2.52)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Sonuç olarak bu eşitsizliği ihlal eden her durum dolanık olmalıdır. Bunun tersine, geleneksel varyans için

$$\sum_{\mu} \Delta^2(X_\mu)_{\rho_A} = d - \text{Tr}(\rho_a)^2 \geq d - 1 \quad (2.53)$$

$$\sum_{\mu} \Delta^2(Y_\mu)_{\rho_B} = d - \text{Tr}(\rho_b)^2 \geq d - 1 \quad (2.54)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca her ayrılabilir ρ_{AB} durumu için

$$\sum_{\mu} \Delta^2(X_\mu \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_\mu)_{\rho_{AB}} \geq 2d - 2 \quad (2.55)$$

eşitsizliği de sağlanır. Sonuç olarak bu eşitsizliği ihlal eden her durum dolanıktır.

Varyans ve kuantum Fisher bilişimin ekstremal özelliklerinden (2.52) ve (2.55) eşitsizlikleri karşılaştırılabilir: Varyans kuantum Fisher bilişim ile değiştirildiğinde eşitsizlik yön değiştirir. Biçimsel olarak birbirlerinin dualidirler ve bunlardan herhangi birisi kullanıldığında bulunan dolanıklık kriterinden daha güçlü bir kriter elde etmek için birlikte düşünülebilirler. Daha açık olarak $d \times d$ boyutlu herhangi bir iki-parçalı ρ_{AB} durumu ve herhangi $\{X_\mu\}$ ve $\{Y_\mu\}$ yerel ortonormal gözlenebilir bazları için

$$F = \sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_\mu \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_\mu) \quad (2.56)$$

$$V = \sum_{\mu} \Delta^2(X_\mu \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_\mu)_{\rho_{AB}} \quad (2.57)$$

denklemleri yazılabilir ve $[0, \infty)$ aralığı

$$[0, \infty) = [0, F) \cup [F, V] \cup (V, \infty) \quad (2.58)$$

şeklinde üç ayrı altaralığa ayrılabilir. Burada $F \leq V$ ve F niceliğinin sıfırdan farklı olduğu varsayılmıştır. Bu durumda aşağıdaki karşılıklı dışlayıcı senaryolar söylenebilir:

- (i) $2d - 2 \in [0, F)$ aralığında ise dolanıklık kuantum Fisher bilişimi kriteriyle algılanır.
- (ii) $2d - 2 \in [F, V]$ aralığında ise algılama yetersizdir. Durumun dolanık olup olmadığı hakkında bir şey söylenemez.
- (iii) $2d - 2 \in (V, \infty)$ aralığında ise dolanıklık varyansa dayalı yerel belirsizlik bağıntıları kriteriyle algılanır.

Özel olarak, $d \times d$ boyutlu her $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ saf bir durumu için kuantum Fisher bilişimi varyansla çakışır. Bu durumda (2.52) ve (2.55) eşitsizliklerinden

$$\sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu}) = 2d - 2 \quad (2.59)$$

$$\sum_{\mu} \Delta^2(X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu})_{\rho_{AB}} = 2d - 2 \quad (2.60)$$

bulunur. Bu eşitlikleri ihlal eden her saf durum dolanık olmalıdır. Sonuç olarak, her saf durum dolanıklığı her zaman LURs ve kuantum Fisher bilişimi kriterlerinin bir bileşimiyle belirlenebilir.

Örnek 2.3: $\dim\mathcal{H}_A = 2 = \dim\mathcal{H}_B$ olsun. $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$; $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ iki-kübit saf durumu için yerel ortonormal bazlar

$$\{X_{\mu}\} = \{Y_{\mu}\} = \left\{ \frac{\mathbb{I}}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \right\} \quad (2.61)$$

şeklinde seçilebilir. Burada σ_i Pauli matrisleridir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu}) &= \sum_{\mu} \Delta^2(X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu})_{\rho_{AB}} \\ &= 4 > 2d - 2 = 2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

bulunur. ρ_{AB} durumunun dolanıklığı kuantum Fisher bilişimi ve varyans kriterleriyle algılanabilir.

Aşağıdaki örnek kuantum Fisher bilişimi kriterinin bazı durumlar için varyans kriterinden daha güçlü olduğunu gösterir.

Örnek 2.4: $\dim \mathcal{H}_A = 3 = \dim \mathcal{H}_B$, $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ bazları \mathcal{H}_A uzayının (aynı zamanda \mathcal{H}_B) ortonormal bir baz kümesi ve

$$\rho_{AB}(p) = (1-p) \frac{\mathbb{I}}{9} + p |\phi\rangle\langle\phi| \quad ; \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle) \quad (2.63)$$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ uzayındaki 3×3 boyutlu bir durum olsun. A alt sisteminin $\{X_\mu\}$ yerel ortonormal bazları

$$\begin{aligned} X_1 &= |0\rangle\langle 0| \quad , \quad X_2 = |1\rangle\langle 1| \quad , \quad X_3 = |2\rangle\langle 2| \\ X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \quad , \quad X_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 0|) \\ X_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad , \quad X_7 = \frac{i}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|) \\ X_8 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 0|) \quad , \quad X_9 = \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|) \end{aligned} \quad (2.64)$$

şeklinde alınabilir. Benzer şekilde B alt sistemi için de $\{Y_\mu\}$ yerel ortonormal bazları tanımlanabilir. $p = 0,7$ değeri için

$$\sum_{\mu} F(\rho_{AB}, X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu}) = 4,2609 > 2d - 2 = 4 \quad (2.65)$$

$$\sum_{\mu} \Delta^2(X_{\mu} \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Y_{\mu})_{\rho_{AB}(p)} = 6,2667 > 2m - 2 = 4 \quad (2.66)$$

elde edilir. Böylece $p = 0.7$ için saf-olmayan $\rho_{AB}(p)$ durumundaki dolanıklık kuantum Fisher bilişimi kriteriyle algılanabilirken varyans kriteriyle algılanamaz. Alternatif olarak (2.52) eşitsizliğinden dolayı bu durumun dolanık olduğu söylenebilir. Fakat (2.55) eşitsizliğinden dolayı durumun dolanık olup olmadığı hakkında bir şey söylenemez.

EK 3 Diğer Dolanıklık Tanımları

3.1 k –Schmidt Tanımları

Blok-pozitif işlemciler, pozitif işlemcilerin aksine spektrumlarıyla karakterize edilemezler. Bu bölümde özdeğerlerinin ve karşılık gelen özvektörlerinin özellikleriyle tamamen karakterize edilen dolanıklık tanımları sınıfları incelenecektir.

Her Hermitsel işlemci, $W_+W_- = 0$ olmak üzere

$$W = W_+ - W_- ; \quad W_+ \geq 0, \quad W_- \geq 0 \quad (3.1)$$

şeklinde iki pozitif işlemcinin farkı olarak yazılabilir. W işlemcisinin özvektörleri $P_\alpha = |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ izdüşüm işlemcileri cinsinden yazılabilir ve $|\psi_\alpha\rangle$ vektörleri ($\alpha = 1, \dots, d$ ve $d = d_A d_B$), \mathcal{H}_{AB} uzayında ortonormal bir baz oluştururlar. Birim işlemci

$$\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B = \sum_{\alpha=1}^d P_\alpha \quad (3.2)$$

P_α işlemcileri cinsinden yazılabilir. Ayrıca keyfi bir L ; $0 < L < d$ tamsayısı için

$$W_- = \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha P_\alpha , \quad W_+ = \sum_{\alpha=L+1}^d \lambda_\alpha P_\alpha ; \quad \lambda_\alpha \geq 0 \quad (3.3)$$

işlemcileri tanımlanabilir. (3.3) denkleminde verilen ilk bağıntıdaki P işlemcileri, W işlemcisinin negatif özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini, ikincisi ise pozitif özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri betimlerler. Bu yazım, $W_+ > 0$ olduğunu ve W tanığının negatif özdeğerlerinin W_- 'ye katıldığını garanti eder. $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ boylandırılmış bir vektör olsun ve bu vektörün Schmidt katsayıları

$$s_1(|\psi\rangle) \geq \dots \geq s_d(|\psi\rangle) ; \quad d = \min\{d_A, d_B\} \quad (3.4)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $|\psi\rangle$ vektörünün k –normu

$$\| |\psi\rangle \|_k^2 = \sum_{j=1}^k s_j^2(|\psi\rangle) ; \quad \forall k \in [1, d] \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\| |\psi\rangle \|_1 \leq \| |\psi\rangle \|_2 \leq \dots \leq \| |\psi\rangle \|_d \quad (3.6)$$

sıralama bağıntısı yazılabilir. $\|\psi\|_1$ normu, $|\psi\rangle$ vektörünün maksimal Schmidt katsayısını verir ve boylandırmadan dolayı $\|\psi\|_d^2 = \|\psi\|^2$ bulunur. Özel olarak $|\psi\rangle$ en dolanık durum ise $s_1(|\psi\rangle) = \dots = s_d(|\psi\rangle) = 1/d$ ve $\|\psi\|_k^2 = k/d$ bulunur. Bu tanıma eşdeğer olarak $|\psi\rangle$ vektörünün k -normu

$$\|\psi\|_k^2 = \max_{|\phi\rangle} |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \quad (3.7)$$

olarak da tanımlanabilir. Burada maksimum $SR(|\phi\rangle) \leq k$ olacak şekilde tüm boylandırılmış $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ vektörleri üzerinden alınır.

Her $l \geq 1$ tamsayısı için

$$1 - \sum_{\alpha=1}^L \|\psi_\alpha\|_l^2 > 0 \quad (3.8)$$

olsun. Bu durumda

$$\mu_l = \frac{\sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha \|\psi_\alpha\|_l^2}{1 - \sum_{\alpha=1}^L \|\psi_\alpha\|_l^2} ; \quad \mu_{l-1} \leq \mu_l \quad (3.9)$$

tanımlanabilir.

Teorem 3.1: $\sum_{\alpha=1}^L \|\psi_\alpha\|_k^2 < 1$ olsun. $\alpha = L + 1, \dots, d$ için $\lambda_\alpha \geq \mu_k$ eşitsizliği sağlanıyorsa $W \in \mathcal{L}_k$ yazılabilir. Ayrıca $\sum_{\alpha=1}^L \|\psi_\alpha\|_{k+1}^2 < 1$ ve $\alpha = L + 1, \dots, d$ için $\mu_{k+1} > \lambda_\alpha$ ise $W \notin \mathcal{L}_{k+1}$ bir $(k + 1)$ -Schmidt tanığıdır (Chruściński vd. 2009a, Chruściński ve Kossakowski 2009).

3.2 Karşılıklı Yansız Bazlar ve Dolanıklık Tanıkları

$\{|e_i\rangle\}, \{|f_j\rangle\} \in \mathbb{C}^d$ şeklinde verilen iki ortonormal bazın karşılıklı yansız bazlar (*Mutually Unbiased Basis* - MUB) olması için gerek ve yeter koşul

$$|\langle e_i | f_j \rangle|^2 = \frac{1}{d} \quad ; \quad \forall i, j = 1, \dots, d \quad (3.10)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. $\{\mathcal{B}_i, \dots, \mathcal{B}_m\}$ baz kümesindeki \mathcal{B}_i ve \mathcal{B}_j bazlarından herhangi ikisi karşılıklı yansız bazlarsa $\{\mathcal{B}_i, \dots, \mathcal{B}_m\}$ bazlarına, karşılıklı yansız ortonormal bir baz

kümesi denir. \mathbb{C}^d 'de en fazla $d + 1$ tane karşılıklı yansız baz vardır ve d bir asal sayı ise (3.10) denklemi elde edilir (Wootters ve Fields 1989). $d = 2$ için

$$\mathcal{B}_1 = \{e_0, e_1\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \frac{e_0 + e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_0 - e_1}{\sqrt{2}} \right\}, \mathcal{B}_3 = \left\{ \frac{e_0 + ie_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_0 - ie_1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (3.11)$$

şeklinde üç tane MUB bulunabilir. Bu bazlar sırasıyla σ_3, σ_1 ve σ_2 Pauli matrislerinin özbazlarıdır. \mathbb{C}^d 'de tanımlı herhangi iki $\{\mathcal{B}_i, \dots, \mathcal{B}_m\}$ ve $\{\tilde{\mathcal{B}}_i, \dots, \tilde{\mathcal{B}}_m\}$ MUB kümesi için

$$J_m(\rho) := \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^d \left\langle e_i^{(\alpha)} \otimes f_i^{(\alpha)} \middle| \rho \middle| e_i^{(\alpha)} \otimes f_i^{(\alpha)} \right\rangle ; e_i^{(\alpha)} \in \mathcal{B}_\alpha, f_j^{(\alpha)} \in \tilde{\mathcal{B}}_\alpha \quad (3.12)$$

tanımlanabilir.

Önerme 3.1: ρ durumu ayrılabilirse

$$J_m(\rho) \leq 1 + \frac{m-1}{d} ; m \leq d+1 \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanır (Spengler 2012).

Bu durumda iki-parçalı

$$W_m := \lambda_m \mathbb{I}_d \otimes \mathbb{I}_d - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^d |e_i^{(\alpha)}\rangle \langle e_i^{(\alpha)}| \otimes |f_i^{(\alpha)}\rangle \langle f_i^{(\alpha)}|, \lambda_m = 1 + \frac{m-1}{d} \quad (3.14)$$

işlemcisi blok-pozitifdir. Buradan W pozitif değilse bir dolanıklık tanığıdır sonucuna ulaşılabilir.

Örnek 3.1: $d = 2$ için $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ bazları (4.86) denklemde tanımlanan bazlar ve $\tilde{\mathcal{B}}_i = B_i^*$ olsun. $m = 3$ için

$$W_3 = \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 - 2M \quad (3.15)$$

bulunur. Bu durumda W_3 tanığı, tüm dolanık iki-kübit izotropik durumları algılar. Ayrıca $m = 2$ için, tüm saf dolanık durumlar algılanır ve $m = d + 1$ ise $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 'deki tüm izotropik durumlar da W tanığıyla algılanır.

3.3 Bell Eşitsizlikleri ve Dolanıklık Tanıkları

Dolanıklık tanıkları, kuantum dolanıklık kavramının merkezinde bulunan ünlü Bell eşitsizlikleriyle doğrudan ilişkilidir (Brunner vd. 2014). Bell, kuantum teorisinin öngörülerinin yerellik kavramıyla uyumlu olmadığını göstermiştir (Bell 1964). İki-parçalı bir sistem için bir Bell deneyinde, herhangi bir x ve y yerel ölçüm çiftleriyle a ve b çıktıklarına bir $p(a, b|x, y)$ koşullu olasılığı karşılık gelir. Yerellikten dolayı

$$p(a, b|x, y) = \int_{\Omega} p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) q(\lambda) d\lambda \quad (3.16)$$

olacak şekilde bir Ω olasılık uzayı, $p(a|x, \lambda)$ ile $p(b|y, \lambda)$ ölçülebilir fonksiyonlar ve Ω uzayında bir $q(\lambda)d\lambda$ olasılık ölçüsü vardır. Böyle $p(a, b|x, y)$ olasılıkları, yerel gizli değişkenler (*local hidden variables - LHV*) teorisine izin verir (Brunner vd. 2014). Bell eşitsizlikleri

$$\sum_{a,b} \sum_{x,y} s_{xy}^{ab} p(a, b|x, y) \leq c \quad (3.17)$$

formundaki eşitsizliklerdir ve (3.16) denklemini sağlayan herhangi $p(a, b|x, y)$ yerel korelasyonları tarafından sağlanır. (3.17) eşitsizliğinin ihlali $p(a, b|x, y)$ korelasyonlarının yerel olmadığına tanıklık eder. Bu tanıklık, \mathcal{H}_A 'da $\sum_a M_{a|x} = \mathbb{I}_A$ olacak şekilde pozitif operatörlerden oluşan bir $\{M_{a|x}\}$ ailesi tanımlanarak, bir x POVM ölçümüyle ilişkilendirilebilir. (3.17)'deki koşullu olasılıklar

$$p(a, b|x, y) = \text{Tr}(\rho M_{a|x} \otimes M_{b|y}) \quad (3.18)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu durumda denklem (3.17)'deki Bell eşitsizliği

$$\sum_{a,b} \sum_{x,y} s_{xy}^{ab} \mathbb{E}(M_{a|x} \otimes M_{b|y}) \leq c \quad (3.19)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada \mathbb{E} , beklenen değeri ifade etmektedir. Karşılık gelen dolanıklık tanığı aşağıdaki gibidir:

$$W = c\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B - \sum_{a,b} \sum_{x,y} s_{xy}^{ab} M_{a|x} \otimes M_{b|y}. \quad (3.20)$$

İkiye ayrılmış (*dichotomous*) gözlenebilirler için, herhangi bir Bell eşitsizliği korelasyonlar cinsinden

$$\mathbb{E}(A_x B_y) = \sum_{a,b} ab p(a, b|x, y) \quad (3.21)$$

eşdeğer olarak gösterilebilir. Burada $A_x = \sum_a a M_{a|x}$ ve $B_y = \sum_a b M_{b|y}$ şeklindedir. Bu durumda karşılık gelen dolanıklık tanığı da

$$W = c \mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B - \sum_{x,y} \lambda_{xy} A_x \otimes B_y \quad (3.22)$$

olarak kurulabilir. Bell eşitsizlikleri, her birisi iki sonuç veren iki ölçüm düzeneğinin seçimine sahip iki gözlenebilir için daha genel bir eşitsizliğe Clauser, Horn, Shimony ve Holt (CHSH) tarafından genişletilmiştir.

CHSH eşitsizliğinin düzeneği aşağıdaki gibi ifade edilebilir: Kaynak iki parçacık yayar (iki alıcının her birine bir parçacık) ve her alıcı sırasıyla, A_i ve B_i ($i = 1, 2$) olmak üzere iki ölçümden birisini yapabilir. Fiziksel süreç LHV modeliyle tanımlanabilirse CHSH tarafından türetilen

$$|\mathbb{E}(A_1 B_1) + \mathbb{E}(A_1 B_2) + \mathbb{E}(A_2 B_1) + \mathbb{E}(A_2 B_2)| \leq 2 \quad (3.23)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır (Clauser vd. 1969). İki-kübit durumu için CHSH işlemcisi

$$B_{CHSH} = \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, \mathbb{R}^3 'te boylandırılmış vektörler ve $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Pauli matrisleri vektörüdür. CHSH eşitsizliği, LHV modelini kabul eden tüm iki-kübit ρ_{LHV} durumları için

$$Tr(\rho_{LHV} B_{CHSH}) \leq 2 \quad (3.25)$$

eşitsizliğinin sağlanmasını gerektirir. Tüm yerel durumlar için pozitif olan ve aşağıdaki gibi kurulabilen bir tanık, bir CHSH tanığı olarak tanımlanır:

$$W_{CHSH} = 2\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 - B_{CHSH}. \quad (3.26)$$

W_{CHSH} , bir “yerel-olmama tanığı” tanığıdır. Yani $Tr(\rho W_{CHSH}) < 0$ ise ρ durumu bir LHV modelini kabul etmez. Böyle bir durumun dolanık olması gerekir ve bundan dolayı W_{CHSH} bir dolanıklık tanığıdır. Bell eşitsizlikleri ve dolanıklık tanıkları

arasındaki ilişkinin analizi üzerine birçok çalışma bulunmaktadır (Terhal 2000, Hyllus vd. 2005).

3.4 Çizgisel-Olmayan Dolanıklık Tanıkları

Bölüm 3.1’de gösterilen Peres-Horodecki kriterinden de bilindiği gibi iki-parçalı herhangi bir ρ_{AB} durumu ayrılabilirse parçalı transpozu pozitif olmalıdır. Bu koşulu sağlamayan herhangi bir σ_{AB} durumu dolanıktır ve en az bir negatif özdeğeri vardır. Herhangi bir dolanıklık tanığı bu negatif özdeğere karşılık gelen $|\phi\rangle$ özvektörü aracılığıyla

$$W = |\phi\rangle\langle\phi|^T \quad (3.27)$$

şeklinde kurulabilir.

Düşük boyutlarda PPT kriteri ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşul olduğundan bu şekilde kurulan dolanıklık tanıkları, bu durumdaki tüm durumların dolanıklığını algılamak için yeterlidir. Ayrıca böyle tanıklar, ayrıştırılabilir optimal tanıklardır (Gühne vd. 2002). Fakat tüm dolanık durumların dolanıklığını algılayabilen evrensel bir dolanıklık tanığı yoktur. Bunun için çizgisel bir dolanıklık tanığının algıladığı tüm durumların dolanıklığını algılayan ve bu tanığın çizgisel-olmayan geliştirmeleriyle kurulan çizgisel-olmayan dolanıklık tanıkları da kurulabilir. Herhangi bir W işlemcisinin çizgisel-olmayan bir geliştirmesi, $X_k = X_k^H + iX_k^{AH}$ işlemciler kümesi ve bunların $\langle X_k \rangle_\rho$ beklenen değerlerini içerir. Burada X_k^H ve X_k^{AH} , X_k işlemcilerinin Hermitsel ve anti-Hermitsel kısımlarını gösterir ve $\langle X_k \rangle_\rho \langle X_k \rangle_\rho^\dagger = \langle X_k^H \rangle_\rho^2 \langle X_k^{AH} \rangle_\rho^2$ eşitliği sağlanır. $\langle X \rangle_\rho = Tr(X\rho)$ şeklinde ifade edilir.

Bölüm 4’te de gösterildiği gibi, genel olarak çizgisel bir dolanıklık tanığının ρ durumundaki beklenen değeri $f = Tr(\rho W)$ şeklinde çizgisel bir fonksiyonel ile verilebilir ve $f < 0$ olduğunda yani ρ durumunun en az bir negatif özdeğeri varsa W tanığı, ρ durumunun dolanıklığını algılar. Fakat tüm ayrılabilir durumlarda hâlâ pozitif kalan

$$\mathcal{F}(\rho) = \text{Tr}(W\rho) - \sum_i \alpha_i \langle X_i^\Gamma \rangle_\rho \langle (X_i^\Gamma)^\dagger \rangle_\rho \geq 0 \quad (3.28)$$

çizgisel-olmayan fonksiyoneller de kurulabilir (Gühne ve Lütkenhaus 2006). Burada α_i , gerçel parametrelerdir ve X_i işlemcileri, ayrılabilir bir ρ_{AB} durumu için $\mathcal{F}(\rho_{AB}) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilirler. (3.28) denklemindeki ikinci terim W tanığının çizgisel-olmayan kuadratik bir geliştirmesidir. Daha yüksek mertebe geliştirmeler de mümkündür ve bunlar, daha güçlü bir koşulun varlığını garanti etmezler.

$W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma$ formundaki bir tanıklar için, çizgisel-olmayan iki türlü geliştirme mümkündür.

Teorem 3.2: (a) $W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma$ bir dolanıklık tanığı olsun. Keyfi bir $|\psi\rangle$ için $X = |\phi\rangle\langle\psi|$ ve $s(\psi)$, $|\psi\rangle$ 'nin en büyük Schmidt katsayısının karesi olarak seçilsin. Bu durumda

$$\mathcal{F}^{(1)}(\rho) = \langle |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma \rangle_\rho - \frac{1}{s(\psi)} \langle X^\Gamma \rangle_\rho \langle (X^\Gamma)^\dagger \rangle_\rho \quad (3.29)$$

W tanığının çizgisel-olmayan bir geliştirmesidir.

(b) $W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma$ bir dolanıklık tanığı olsun. $X_i = |\phi\rangle\langle\psi_i|$ ve \mathcal{H}_{AB} uzayındaki ortonormal $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^k$ baz kümesi için

$$\mathcal{F}^{(2)}(\rho) = \langle |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma \rangle_\rho - \sum_{i=1}^k \langle X_i^\Gamma \rangle_\rho \langle (X_i^\Gamma)^\dagger \rangle_\rho \quad (3.30)$$

tanığı da W tanığının çizgisel-olmayan bir geliştirmesidir. Burada tüm parametreler için $\alpha_i = 1$ seçimi (3.28) denkleminde verilen tanığın pozitifliğini garanti eder.

Teorem 2 (a)'da $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$, boylandırılmış durumlardır ve (3.28) denklemindeki $\alpha_i = \alpha$ sayısı tektir ve $1/\alpha = s(\psi)$ şeklindedir.

Örnek 3.2: $W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma$ ve $|\phi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ olsun. Çizgisel dolanıklık tanığı

$$W = \frac{1}{4} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z) \quad (3.31)$$

şeklinde Pauli matrisleri cinsinden yazılabilir. W tanığı $\sigma_x \otimes \sigma_x$, $\sigma_y \otimes \sigma_y$ ve $\sigma_z \otimes \sigma_z$ ölçülerek değerlendirilebilir. Bu üç ölçüm optimal ölçümlerdir. Bu tanığın geliştirmesini kurmak için $|\psi\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ şeklinde Bell durumlarından birisi seçilsin.

Teorem 3.2 (a) kullanılarak çizgisel-olmayan dolanıklık tanığı

$$\mathcal{F}^{(1)}(\rho) = \langle W \rangle_\rho - \frac{1}{8} \langle \sigma_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_x \rangle^2 - \frac{1}{8} \langle \sigma_y \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \sigma_y \rangle^2 \quad (3.32)$$

kurulabilir. Teorem 3.2 (b) ve $|\psi_i\rangle$ olarak dört Bell durumu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)}(\rho) = \langle W \rangle_\rho - \frac{1}{16} (\langle \sigma_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \sigma_y \rangle^2) \\ - \frac{1}{16} (\langle \sigma_y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_x \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \sigma_x \rangle^2) \\ - \frac{1}{16} (\langle \sigma_z \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_z \rangle^2 + \langle \sigma_x \otimes \sigma_y - \sigma_y \otimes \sigma_x \rangle^2 + \langle W \rangle_\rho^2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

çizgisel-olmayan dolanıklık tanığı bulunur.

Bu yaklaşım PPT kriteriyle ilişkili olmayan dolanıklık tanıkları için pozitif gönderimler aracılığıyla genellenebilir.

Verilen bir iz-koruyan pozitif Λ gönderimi için, herhangi bir ρ durumunun dolanıklığını algılayan W tanığı için $Tr(W\rho) = \lambda_- < 0$ olduğundan

$$W = (id_A \otimes \Lambda^D) |\phi\rangle\langle\phi| \quad (3.34)$$

şeklinde kurulabilir. Burada $|\phi\rangle$, $(id_A \otimes \Lambda)\rho$ gönderiminin λ_- negatif özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Parçalı transpoz, $id_A \otimes \Lambda^D$ ile değiştirilerek (3.34) denklemindeki tanık, teorem 3.2'deki gibi geliştirilebilir.

EK 4 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ Uzayında Köşegen-Tipi Dolanıklık Tanımları

$\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ uzayındaki Hermitsel bir işlemci sınıfı

$$W(A) = \sum_{i,j=1}^d E_{ij} \otimes W_{ij} \quad (4.1)$$

blok formda tanımlanabilir. Burada $i \neq j$ için $W_{ij} = -E_{ij}$ şeklindedir ve köşegen bloklar

$$W_{ii} = \sum_{k=1}^d a_{ik} E_{kk} ; a_{ik} \geq 0 \quad (4.2)$$

$d \times d$ 'li bir A matrisinin matris elemanlarıyla kurulur. Köşegen-dışı W_{ij} blok matrisleri sabittir ve tüm W_{ii} köşegen bloklar a_{ij} elemanlı köşegen $d \times d$ 'li matrislerle temsil edilirler: $(W_{ii})_{jj} = a_{ij}$. Bunun bir sonucu olarak $W(A)$ matrisine köşegen-tipi bir işlemci denir. Köşegen-tipi bir işlemci

$$(U \otimes U)W(A)(U \otimes U)^\dagger = W(A) \quad (4.3)$$

yerel simetrikler altında değişmezdir. Burada U , gerçel λ_k değerleri için

$$U = \sum_{k=1}^d e^{i\lambda_k} E_{kk} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanan üniter bir işlemcidir.

Teorem 4.1: Köşegen-tipi bir $W(A)$ işlemcisi

$$\sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^2}{B_i(x)} \leq 1 , \quad \forall x \in \mathbb{C}^d \quad (4.5)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa blok-pozitifdir. Burada

$$B_i(x) = |x_i|^2 + \sum_{j=1}^d a_{ij} |x_j|^2 \quad (4.6)$$

şeklindedir. Ayrıca $W(A)$ işlemcisinin pozitif olması için gerek ve yeter koşul $i \neq j$ için $D_{ij} = -1$ ve $D_{ii} = a_{ii}$ olacak şekilde D matrisinin pozitif olmasıdır (Chruściński 2007).

Örnek 4.1: $d = 2$ için

$$W(A) = E_{11} \otimes W_{11} + E_{12} \otimes W_{12} + E_{21} \otimes W_{21} + E_{22} \otimes W_{22} \quad (4.7)$$

bulunabilir. Burada

$$W_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}, W_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, W_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, W_{22} = \begin{pmatrix} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. A ve D matrisleri ise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & -1 \\ -1 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

bulunur. Bu durumda (4.5) eşitsizliği

$$\frac{|x_1|^2}{(a_{11} + 1)|x_1|^2 + a_{12}|x_2|^2} + \frac{|x_2|^2}{(a_{22} + 1)|x_2|^2 + a_{21}|x_1|^2} \leq 1 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. $|x_1| = |x_2|$ alınrsa

$$a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \geq 1 - a_{11}a_{21} - a_{22}a_{12} \quad (4.10)$$

elde edilir. $a_{11}a_{22} = p^2$ ve $a_{12}a_{21} = q^2$ dönüşümleri yapılarak ve

$$a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq, \quad (4.11)$$

$$2pq = 2\sqrt{a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}} \leq a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12} \quad (4.12)$$

denklemleri kullanılırsa (4.10) eşitsizliği

$$a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \geq (p + q)^2 - a_{11}a_{21} - a_{22}a_{12} \quad (4.13)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Tüm blok-pozitif işlemciler ayrıştırılabilir olduğundan bu koşul $W(A)$ 'nın blok-pozitifliğine eşdeğerdir. Ayrıca $a_{11}a_{22} = p^2 \leq 1$ iken $W(A)$ ayrıştırılabilir bir dolanıklık tanığıdır ve D pozitif bir matris değildir.

$d \geq 3$ için (4.5) denkleminin çözümü daha zordur. A matrisi

$$a_{ii} = a, \quad a_{ij} = \delta_{i-1,j}c_j, \quad i \neq j \quad (4.14)$$

elemanlarıyla tanımlansın. $d = 3, 4, 5$ için A matrisi sırasıyla

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c_3 \\ c_1 & a & 0 \\ 0 & c_2 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c_5 \\ c_1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

bulunur. Bu durumda köşegen bloklar

$$W_{ii} = aE_{ii} + c_{i-1}E_{i-1,i-1} \quad ; \quad i = 1, \dots, d \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.2: $a, c_1, \dots, c_d > 0$ olsun. $W(a; c_1, \dots, c_d)$ işlemcisinin bir dolanıklık tanığı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır (Ha 2003):

- (i) $d - 1 > a \geq d - 2$,
- (ii) $(c_1 \cdot \dots \cdot c_d)^{1/d} \geq d - 1 - a$.

Ayrıca $W(a; c_1, \dots, c_d)$ işlemcisi atomik bir dolanıklık tanığıdır.

Önerme 4.1: $W(1; c_1, c_2, c_3)$ işlemcisi $c_1 c_2 c_3 = 1$ ise ekstremal bir dolanıklık tanığıdır (Osaka 1991, 1992).

EK 5 $\mathbb{C}^{2N} \otimes \mathbb{C}^{2N}$ 'de Optimal Dolanıklık Tanıkları Sınıfı

Bu bölümde $\mathbb{C}^{2N} \otimes \mathbb{C}^{2N}$ 'de köşegen formda olmayan optimal dolanıklık tanıkları incelenecektir.

5.1 $M_4(\mathbb{C})$ 'de Robertson gönderimi

Herhangi bir $X \in M_4(\mathbb{C})$ işlemcisi

$$X = \sum_{i,j=1}^2 E_{ij} \otimes X_{ij} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}; \quad X_{ij} \in M_2(\mathbb{C}), \quad i, j = 1, 2. \quad (5.1)$$

şeklinde blok formda yazılabilir. Bu durumda $\Lambda_4: M_4(\mathbb{C}) \rightarrow M_4(\mathbb{C})$ Robertson gönderiminin X işlemcisine etkisi

$$\Lambda_4(X) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 \text{Tr} X_{22} & -[X_{12} + R_2(X_{12}^T)] \\ -[X_{21} + R_2(X_{21}^T)] & \mathbb{I}_2 \text{Tr} X_{11} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

blok-formunda yazılabilir (Robertson 1983). Burada R_2 , $M_2(\mathbb{C})$ 'deki indirgeme gönderimini göstermektedir:

$$R_2 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Boylandırma çarpanı Λ_4 gönderiminin ünital ve iz-koruyan bir gönderim olmasını garanti eder. Λ_4 gönderiminin $M_4(\mathbb{C})$ 'deki E_{ij} matris bazları üzerindeki etkisi

$$\begin{aligned} \Lambda_4(E_{11}) &= \Lambda_4(E_{22}) = \frac{1}{2}(E_{33} + E_{44}), & \Lambda_4(E_{13}) &= -\frac{1}{2}(E_{13} + E_{24}), \\ \Lambda_4(E_{33}) &= \Lambda_4(E_{44}) = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), & \Lambda_4(E_{24}) &= -\frac{1}{2}(E_{24} + E_{31}), \\ \Lambda_4(E_{14}) &= -\frac{1}{2}(E_{14} - E_{32}), & \Lambda_4(E_{23}) &= -\frac{1}{2}(E_{23} + E_{41}), \end{aligned}$$

ve $\Lambda_4(E_{12}) = \Lambda_4(E_{34}) = 0$ şeklinde yazılabilir.

Önerme 5.1: Λ_4 Robertson gönderimi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) Pozitif ekstremal bir gönderimdir. Dolayısıyla optimaldir (Robertson 1983).
- (ii) Atomiktir ve dolayısıyla ayrıştırılmazdır (Chruściński ve Kossakowski 2008a).

- (iii) Ekspozedir (Chruściński ve Sarbicki 2012b).
- (iv) SPA hipotezini sağlar (Chruściński vd. 2009b).

Bu gönderime karşılık gelen dolanıklık tanığı

$$W_4 = 2 \sum_{i,j=1}^4 E_{ij} \otimes \Lambda_4(E_{ij}) \quad (5.4)$$

açıkça köşegen formda değildir.

5.2 Breuer-Hall gönderimi

$\Lambda_U: M_{2N}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2N}(\mathbb{C})$ çizgisel Breuer-Hall gönderimler sınıfı

$$\Lambda_U(X) = \frac{1}{2(N-1)} [\mathbb{I}_{2N} \text{Tr} X - X - UX^T U^\dagger] \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanır (Breuer 2006, Hall 2006). Burada U, \mathbb{C}^{2N} 'de antisimetrik üniter bir matristir: $U = -U^T$. Boylandırma çarpanı Λ_U gönderiminin ünital ve iz-koruyan bir gönderim olmasını garanti eder. Breuer-Hall gönderiminin herhangi bir rank-1 P izdüşüm işlemcisine etkisi

$$\Lambda_U(P) = \frac{1}{2(N-1)} [\mathbb{I}_{2N} - P - Q] \quad (5.6)$$

şeklinde bulunur. Burada $Q, PQ = 0$ özelliğini sağlayan rank-1 bir izdüşüm işlemcisidir. Yani $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ ise $Q = |\phi\rangle\langle\phi|$ şeklindedir ve $|\phi\rangle = U|\psi\rangle$ ile verilir. U matrisinin antisimetrikliği $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|U|\psi\rangle = 0$ olmasını garanti eder. Bundan dolayı $\mathbb{I}_{2N} - P - Q$ bir izdüşüm işlemcisidir.

Önerme 5.2: Λ_U Breuer-Hall gönderimi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) Atomiktir ve dolayısıyla ayrıştırılmazdır.
- (ii) nd-optimaldir (Breuer 2006).
- (iii) $N = 2$ için ekspozedir (Chruściński ve Sarbicki 2012a).

Sonuç 5.1: $N = 2$ ve

$$U = U_0 = i\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

ise Λ_{U_0} gönderimi, Λ_4 Robertson gönderimini üretir. $U_0 = i\mathbb{I}_N \otimes \sigma_2$ alınırsa $M_4(\mathbb{C})$ 'den $M_{2N}(\mathbb{C})$ 'ye Robertson gönderiminin doğal bir genellemesi elde edilir (Chruściński ve Pytel 2010, 2011). 2×2 blok X_{ij} matrislerine sahip $N \times N$ boyutlu bir matris olarak $X \in M_{2N}(\mathbb{C})$ matrisi alınırsa

$$\Lambda_{U_0} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kk} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(k-1)} \begin{pmatrix} A_1 & -B_{12} & \cdots & -B_{1k} \\ -B_{21} & A_2 & \cdots & -B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_{k1} & -B_{k2} & \cdots & A_k \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

bulunur. Burada $A_k = \mathbb{I}_2(TrX - TrX_{kk})$ ve $B_{kl} = X_{kl} + R_2(X_{kl}^T)$ şeklindedir.

5.3 Robertson gönderiminin genellemeleri

Bu bölümde Robertson gönderiminin birkaç genellemesi verilecektir. (5.2) denkleminde verilen gönderim aşağıdaki gibi genellenebilir: Blokları $N \times N$ boyutlu X_{ij} matrislerine sahip 2×2 boyutlu bir $X \in M_{2N}(\mathbb{C})$ matrisi için, $\Lambda_{2N}: M_{2N}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2N}(\mathbb{C})$ çizgisel gönderimi

$$\Lambda_{2N} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N TrX_{22} & -[X_{12} + \Lambda_R(X_{12}^T)] \\ -[X_{21} + \Lambda_R(X_{21}^T)] & \mathbb{I}_N TrX_{11} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlanır (Chruściński vd. 2009b). Burada $\Lambda_R(X) = \mathbb{I}_N TrX - X$, $M_N(\mathbb{C})$ 'de tanımlı indirgeme gönderimidir.

Önerme 5.3: Λ_{2N} gönderimi pozitif, ayrıştırılmaz ve optimaldir (Chruściński vd. 2009b). Ayrıca bu gönderim ekspoze dolayısıyla ekstremaldir (Sarbicki ve Chruściński 2013).

İkinci bir genelleme olarak, $N = 2$ için CP bir $\Lambda_R \circ \Lambda_{\mathbb{T}}$ gönderiminin Choi-Kraus temsilini sağlayan

$$\Lambda_R(X) = \sigma_2 X^T \sigma_2 \quad (5.10)$$

gösterim yazılabilir. σ_2 Pauli matrisi üniter ve antisimetriktir. Λ_R yerine UXU^\dagger alınırsa (U, \mathbb{C}^{2N} 'de üniter antisimetrik bir matris) $\Lambda_{4N}^U: M_{4N}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{4N}(\mathbb{C})$ çizgisel gönderimi

$$\Lambda_{4N}^U \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2N} \text{Tr} X_{22} & -[X_{12} + UX_{12}U^\dagger] \\ -[X_{21} + UX_{21}U^\dagger] & \mathbb{I}_{2N} \text{Tr} X_{11} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 5.4: Λ_{4N}^U gönderimi pozitif, ayrıştırılmaz ve optimaldir.

Son olarak (5.8) denklemindeki gönderim aşağıdaki gibi genellenebilir: $i \neq j$ için, $z_{ij} = z_{ji}^*$ olacak şekilde bir $z_{ij} \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı olsun. Bu durumda

$$\Lambda_{2N}^{(z)} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{NN} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(N-1)} \begin{pmatrix} A_1 & z_{12}B_{12} & \cdots & z_{1N}B_{1N} \\ z_{21}B_{21} & A_2 & \cdots & z_{2N}B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1}B_{N1} & z_{N2}B_{N2} & \cdots & A_N \end{pmatrix}$$

tanımlanabilir.

Önerme 5.5: $\Lambda_{2N}^{(z)}$ gönderimi aşağıdaki özellikleri sağlar (Sarbicki ve Chruściński 2013):

(i) $\Lambda_{2N}^{(z)}$ gönderiminin pozitif olması için gerek ve yeter koşul $|z_{ij}| \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(ii) Ayrıştırılmaz ve optimal olması için gerek ve yeter koşul $|z_{ij}| = 1$ olmasıdır.

Robertson gönderiminin diğer genellemeleri de kurulabilir (Zwolak ve Chruściński 2014).

Ayrıştırılmaz pozitif gönderimlerin bir başka inşası, bir spin çarpanına pozitif bir izdüşüm işlemi uygulanarak elde edilir (Ha 2002, Størmer 2013).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Durgun DURAN

Doğum Yeri : POSOF/ARDAHAN

Doğum Tarihi : 22.03.1985

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : G.O.P. Merkez Lisesi – İSTANBUL (Haziran 2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Şubat 2008)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik A.B D. (Eylül 2008 - Eylül 2011)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik A.B D. (Şubat 2012 - Aralık 2018)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü (Aralık 2008-...)

SCI Yayınlar

Durgun Duran, Abdullah Verçin. 2018. Controlling the loss of quantum correlations via quantum memory channels. *Quantum Inf. Process.*,17; 164.

Ali Filiz, Abdullah Sonmezoglu, Mehmet Ekici and **Durgun Duran**. 2015. A New Approach for Soliton Solutions of RLW Equation and (1+2)-dimensionless Nonlinear Schrödinger Equation, *Mathematical Reports*, 17(67); 1, 43-56.

D. Duran, A. Verçin and S. Yılmaz. 2014. Entanglement detection via continuous quantum channels, *Phys. Rev. A*, 90; 042320.

Hakemli Dergiler

Mehmet Ekici, **Durgun Duran** and Abdullah Sonmezoglu. 2014. Constructing of Exact Solutions to the (2+1)- Dimensional Breaking Soliton Equations by the Multiple (G'/G)-Expansion Method. *J. Adv. Math. Stud.*, 7(1); 27-44.

E. M. E. Zayed, Ali Filiz, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, **Durgun Duran**. 2014. Exact solutions of the ZKMEW equation and the Davey-Stewartson equation. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3(2); 122-132.

Mehmet Ekici, **Durgun Duran** and Abdullah Sonmezoglu. 2013. Soliton Solutions of the Klein-Gordon-Zakharov Equation with Power Law Nonlinearity, *ISRN Computational Mathematics*, Volume 2013, Article ID 716279 <http://dx.doi.org/10.1155/2013/716279>

Uluslararası Kongrelerde Sunum

D. Duran. 2016. Quantum Fisher Information Dynamics for LMG Model Under Decoherence. 1st International Underground Resources and Energy Conference. 6-8 October 2016; Yozgat/TURKEY.

D. Duran, A. Verçin, S. Yılmaz. 2016. Entanglement Detection via Continuous Quantum Channels. Turkish Physical Society 32nd International Physics Conference. 6-9 September 2016; Bodrum/TURKEY.

D. Duran. 2016. Optimal Quantum Estimation of the Coupling Constant of Tavis-Cummings Interaction, Turkish Physical Society 32nd International Physics Conference. 6-9 September 2016; Bodrum/TURKEY.

D. Duran. 2012. A Brief Introduction to Quantum Information and Quantum Computation. Turkish Physical Society 29th International Physics Conference. 5-8 September 2012; Bodrum/TURKEY.

D. Duran, A. Verçin, “Bell Inequalities and Their Violation for Mixed States” Turkish Physical Society 27th International Physics Congress. 14-17 September 2010; İstanbul/TURKEY.