

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DAİRESEL YÜZEYLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Zeynep ÇANAKCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Zeynep ÇANAKCI tarafından hazırlanan “**Dairesel Yüzeyler ve Geometrik Uygulamaları**” adlı tez çalışması 20/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK 
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 
Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ 
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI 
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK 
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. O. Zeki OKUYUCU 
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

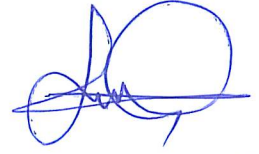
Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

20/12/2018



Zeynep ÇANAKCI

ÖZET

Doktora Tezi

DAİRESEL YÜZEYLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Zeynep ÇANAKCI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölüm, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremleri içermektedir.

Üçüncü bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında dairesel yüzeylerin bazı parametrik gösterimleri ve karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca, dairesel yüzeylerin özel bir çeşidi olan roller coaster yüzeyler, $\{n, c, w\}$ alternatif hareketli çatı ile üretilmiştir. Ek olarak, dairesel yüzeylerin kuaterniyonik ve matris temsilleri verilmiştir. Son olarak, dairesel yüzeylerin bazı özel parametre eğrileri ile ilgili karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, üç boyutlu Minkowski uzayında dairesel yüzeylerin bazı parametrik gösterimleri ve karakterizasyonları verilmiştir. Bu kapsamda, öncelikle zamansı ve uzaysı dairesel yüzeyler ile bu yüzeylerin geometrik uygulamaları araştırılmıştır. Bir uygulama olarak bu yüzeylerin kuaterniyonik ve matris temsilleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş dairesel yüzeyler incelenmiş ve bazı geometrik özellikleri verilmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş dairesel yüzeylerin kuaterniyonik ve matris temsilleri ile bu yüzeylerin bazı özel parametre eğrileri ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir.

Son bölüm ise tartışma ve sonuçlar kısmına ayrılmıştır.

Aralık 2018, 126 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dairesel yüzeyler, kuaterniyonik gösterimler, roller coaster yüzeyler, eğrilikler, temel formlar, parametre eğrileri, özel eğriler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CIRCULAR SURFACES AND THEIR GEOMETRIC APPLICATIONS

Zeynep ÇANAKCI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some basic definitions and theorems which are needed in the thesis.

In the third chapter, some parametric representations and characterizations of circular surfaces have been given in the Euclidean 3- space. Furthermore, roller coaster surfaces which are a special type of circular surfaces, has been derived according to an alternative moving frame $\{n, c, w\}$. In addition, quaternionic and matrix representations of circular surfaces have been given. Finally, characterizations related to some special parameter curves of circular surfaces have been obtained.

In the fourth chapter, some parametric representations and characterizations of circular surfaces have been given in the 3-Minkowski space. Within this framework, firstly, timelike and spacelike circular surfaces have been introduced and geometric applications of these surfaces have been investigated. As an application, quaternionic and matrix representations of circular surfaces have been obtained.

In the fifth chapter, generalized circular surfaces have been examined in 3-Euclidean space and some geometric properties have been given. Then, quaternionic and matrix representations and characterizations concerning some special parameter curves of generalized circular surfaces have been given.

The last chapter is devoted to the discussions and conclusions.

December 2018, 126 pages

Key Words: Circular surfaces, quaternionic representations, roller coaster surfaces, curvatures, fundamental forms, parameter curves, special curves.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışma süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen, tezimin temellerinin atılmasında ciddi katkıları bulunan, hakkını hiç bir zaman ödeyemeyeceğim çok kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK'e (Ankara Üniversitesi Matematik ABD), fikirleriyle beni yönlendiren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik ABD), Sayın Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU'ya (Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik ABD), Sayın Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik ABD), Sayın Prof. Dr. Hasan Hilmi HACISALİHOĞLU'na en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca, tez sürecinde çalışmalarına ciddi katkıları bulunan değerli kardeşim Arş. Gör. Orhan Oğulcan TUNCER'e (Hacettepe Üniversitesi Matematik ABD) en içten teşekkürlerimi sunarım.

Saygıdeğer tez jüri üyesi ve yüksek lisans dönemimde bilgi, hoşgörü ve tecrübelerinden yararlandığım hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e (Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Matematik ABD) harcadığı değerli zamanı için teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Doktora sürecim boyunca manevi olarak her zaman yanımda olan, sonsuz sevgisini benden esirgemeyen sevgili eşim Dr. Mehmet ÇANAKCI'ya, çalışmalarım süresince ihmal ederek zamanından çaldığım biricik kızım İpek ÇANAKCI'ya, bu süreçte bana ve kızıma gösterdiği sonsuz sabır, anlayış ve desteklerinden dolayı canım annem Sema TÜFEKÇİ ve canım kardeşim Şakir TÜFEKÇİ'ye, hayatımın birçok aşamasında benden hiç bir zaman desteğini esirgemeyen canım dayım Doç. Dr. Cemal GÜNDOĞDU'ya ve üzerimde hakkı bulunan, çalışma prensibiyle örnek aldığım çok değerli aile büyüğüm İbrahim Halil ÇANAKCI'ya sevgi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.

Zeynep ÇANAKCI
Ankara, Aralık 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ETİK | i |
| ÖZET | ii |
| ABSTRACT..... | iii |
| TEŞEKKÜR..... | iv |
| SİMGELER DİZİNİ | vii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | viii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR | 6 |
| 2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar | 6 |
| 2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar..... | 18 |
| 2.3 Kuaterniyonlar Teorisinde Temel Tanım ve Kavramlar | 21 |
| 3. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DAİRESEL YÜZEYLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI | 26 |
| 3.1 Dairesel Yüzeyler ve Özellikleri..... | 26 |
| 3.1.1 Dairesel yüzeylerin striksiyon eğrileri | 34 |
| 3.1.2 Dairesel yüzeylerin yerel singülerlikleri | 35 |
| 3.1.3 Roller coaster yüzeyler | 38 |
| 3.2 Alternatif Çatı ile Türetilen Roller Coaster Yüzeyler | 46 |
| 3.3 Dairesel Yüzeylerin Kuaterniyonik Gösterimleri | 55 |
| 3.4 Dairesel Yüzeylerin Parametre Eğrileri İle İlgili Bazı Karakterizasyonlar | 65 |
| 3.4.1 Dairesel yüzey üzerindeki loxodromik eğriler | 73 |
| 4. ÜÇ BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA DAİRESEL YÜZEYLER | 75 |
| 4.1 Spacelike Dairesel Yüzeyler ve Bazı Geometrik Uygulamaları .. | 75 |
| 4.1.1 Spacelike dairese yüzeylerin striksiyon eğrileri..... | 78 |
| 4.1.2 Spacelike dairese yüzeylerin yerel singülerlikleri | 78 |
| 4.1.3 Spacelike roller coaster yüzeyler..... | 79 |
| 4.2 Timelike Dairesel Yüzeyler ve Bazı Geometrik Uygulamaları ... | 86 |
| 4.2.1 Timelike dairese yüzeylerin striksiyon eğrileri | 89 |
| 4.2.2 Timelike dairese yüzeylerin yerel singülerlikleri..... | 89 |
| 4.2.3 Timelike roller coaster yüzeyler | 93 |
| 4.3 Spacelike ve Timelike Dairesel Yüzeylerin Bölünmüş Kuaterniyonik Gösterimi | 100 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ DAİRESEL YÜZEYLER | 108 |
| 5.1 Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeyler ve Bazı Geometrik Uygulamaları | 108 |
| 5.2 Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeylerin Kuarterniyonik Gösterimi .. | 115 |
| 5.3 Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeylerin Parametre Eğrileri İle İlgili Bazı Karakterizasyonlar | 116 |
| 5.3.1 Genelleştirilmiş dairesel yüzey üzerindeki loxodromik eğriler . | 119 |
| 6. TARTIŞMA VE SONUÇ | 121 |
| KAYNAKLAR..... | 122 |
| ÖZGEÇMİŞ | 126 |



SİMGELER DİZİNİ

| | |
|----------------------|-----------------------------------------|
| \times | \mathbb{R}^3 uzayında vektörel çarpım |
| \langle, \rangle_L | Lorentz iç çarpımı |
| $\ \cdot\ _L$ | Minkowski uzayında norm |
| \times_L | Minkowski vektörel çarpımı |
| \mathbb{R}_1^n | n -boyutlu Minkowski uzayı |
| \mathbb{R}^n | n -boyutlu Öklid uzayı |
| \langle, \rangle | Öklid anlamındaki iç çarpım |
| $\ \cdot\ $ | Öklid uzayında norm |
| \mathbb{H} | Reel kuaterniyonlar cümlesi |
| \mathbb{H}_L^0 | Bölünmüş kuaterniyonlar cümlesi |
| $*$ | Kuaterniyon çarpımı |
| $*_L$ | Bölünmüş kuaterniyon çarpımı |
| κ | Eğrilik |
| τ | Burulma |
| K | Gauss eğriliği |
| H | Ortalama eğrilik |
| M_q | Dönme matrisi |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | | |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 3.1 | M taban eğrisine sahip P_1 kanal (tüp) yüzeyi | 28 |
| Şekil 3.2 | M taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi | 28 |
| Şekil 3.3 | M_1 taban eğrisine sahip P_1 dairesel yüzeyi ve singüler noktaları . . | 37 |
| Şekil 3.4 | Regüler M_2 taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi ve singüler noktaları | 37 |
| Şekil 3.5 | M_3 taban eğrisine sahip P_3 dairesel yüzeyi ve striksiyon eğrisi (kırmızı) | 38 |
| Şekil 3.6 | M taban eğrisine sahip P_1 dairesel yüzeyi | 57 |
| Şekil 3.7 | M taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi | 57 |
| Şekil 3.8 | $r = 1$ için $R_{\mathbf{T}}$ roller coaster yüzeyi | 64 |
| Şekil 3.9 | $r = 1$ için $R_{\mathbf{N}}$ roller coaster yüzeyi | 64 |
| Şekil 3.10 | $r = 1$ için $R_{\mathbf{B}}$ roller coaster yüzeyi | 65 |
| Şekil 3.11 | M helisi tarafından üretilen P dairesel yüzeyi ve üzerindeki bir geodezik s -parametre eğrisi (mavi) | 69 |
| Şekil 4.1 | $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$ 'da singülerliğe sahip P_1 timelike dairesel yüzeyi ve bu yüzeyin $s_0 = 0$ 'da singülerliğe sahip M_1 taban eğrisi | 91 |
| Şekil 4.2 | $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$ 'da singülerliğe sahip P_2 timelike dairesel yüzeyi ve bu yüzeyin regüler M_2 taban eğrisi | 92 |
| Şekil 4.3 | δ striksiyon eğrisi (kırmızı) boyunca singülerliğe sahip olan P timelike dairesel yüzeyi ve M taban eğrisi (mavi) | 93 |
| Şekil 4.4 | $P_{(M,n,b,1)}$ spacelike dairesel yüzeyi | 103 |
| Şekil 4.5 | $P_{(M,n,b,u/2)}$ spacelike dairesel yüzeyi | 103 |
| Şekil 4.6 | $r = 3$ için $R(t, \theta)$ spacelike roller coaster yüzeyi | 104 |
| Şekil 4.7 | $r = 1/2$ için $P(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyi | 106 |
| Şekil 4.8 | $r = 2$ için M spacelike taban eğrili R timelike roller coaster yüzeyi | 107 |
| Şekil 5.1 | $r = \theta$ için elde edilen genelleştirilmiş dairesel yüzey | 112 |
| Şekil 5.2 | $r = \sin \theta$ için elde edilen genelleştirilmiş dairesel yüzey | 112 |

1. GİRİŞ

Bugüne kadar Diferensiyel Geometri alanında eğriler ve yüzeyler teorisi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında yüzey teorisinde özellikle açılabilir yüzeyler, regle yüzeyler, minimal yüzeyler, dönel yüzeyler gibi kendine has özelliklere sahip olan yüzeyler, geometri alanının yanı sıra mimari, sanat, kinematik, mekanik ve robotik alanlarının da ilgisini çekmiştir. Bir regle yüzey bir parametrelili doğru ailesi ile üretilen yüzeydir. Doğrular \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında en basit eğriler olduğundan, regle yüzeylerin 20.yüzyılın ortalarına kadar basit yapılı yüzeyler olduğu düşünülüyordu (Izumiya vd. 2007). Ancak mimarlık ve bilgisayar destekli tasarım gibi bazı özel alanlarla etkileyici uygulamaları yapıldı (Pottmann vd. 2001, Marsh 2005). Regle yüzeyler ve dairesel yüzeyler arasında yakın bir ilişki vardır. Tanjant regle yüzey karakteristikleri regresyon eğrisinin köşesine teğet olan düz doğrulardır. Regresyon eğrisinin köşesi açılabilir teğet regle yüzeylerin singüler noktalarını oluşturur. Ting ve arkadaşları uzaysal ve küresel harekette düzlemin durumuna göre regresyon eğrisinin köşesinin özelliklerini geniş bir biçimde inceledi (Soni vd. 1983, Ting vd. 1983).

Bu tez çalışmasında ilk olarak Izumiya ve arkadaşları tarafından tanımlanan sabit yarıçaplı standart çemberlerin bir parametrelili aileleri ele alınacaktır. Bu tür yüzeyler *sabit yarıçaplı dairesel yüzeyler* olarak adlandırılır. Yarıçapın sabit olduğu durumlarda yüzeyler kısaca *dairesel yüzeyleri* ifade edecektir. Bu tezde yarıçap fonksiyonu üreten çemberlerin parametresi seçilerek elde edilen dairesel yüzeylere de yer verilecektir ve bu tip yüzeyler *genelleştirilmiş dairesel yüzeyler* olarak adlandırılacaktır. Regle yüzeyler gibi dairesel yüzeyler de önemli uygulamaları olan ve kendine has özellikleri olan bir konudur. Nobuko Takeuchi bazı çemberleri içeren yüzeyleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir (Ogiue vd. 1984, Takeuchi 1985, Miyaoka vd. 1992, Ogiue vd. 1993, Ogiue vd. 1994, Takeuchi 2000). Bir dairesel yüzey bu tür özellikleriyle kendine özgü bir yüzeydir. Dairesel yüzeylere bir örnek olarak, bir uzay eğrisinin kanal (tüp) yüzeyi verilebilir.

Tüp yüzeylerle ilgili rasyonel parametrezisyon, taban eğrisi rasyonel eğri alınarak verilmiş (Lü vd. 1996) ve daha sonra da kanal yüzeylere genellenmiştir (Peternell vd. 1997). Ayrıca bu tip yüzeylerin Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım ve tıp alanında birçok uygulamasını görmek mümkündür (Srinivas vd. 1994, Pratt 1995, Bizzari ve Lavicka 2012, Bizzari 2014).

Kanal yüzeylerde taban eğrisinin teğet vektör alanı, dairesel yüzeyin üreten çemberlerinin bulunduğu düzleme diktir.

Ancak dairesel yüzeylerde taban eğrisinin teğet vektör alanı, dairesel yüzeyin üreten çemberlerinin bulunduğu düzleme dik olmayabilir. Başka bir deyişle, $P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta)$ dairesel yüzeyinde eğrinin herhangi bir u_0 parametresi için taban eğrisinin teğet vektör alanı a_2, a_3 vektör alanlarından herhangi birine ya da ikisine dik olmayabilir. Bu tip yüzeyler *kanal olmayan dairesel yüzeyler* olarak adlandırılır.

Kanal yüzeyleri (ve özel hali olan tüp yüzeyleri) ve bu yüzeylerin parametre eğrileri ile ilgili hem Öklid uzayında hem de farklı uzaylarda birçok çalışma yapılmıştır (Xu vd. 2006, Karacan vd. 2007, Tunçer vd. 2011, Doğan 2012, Bulca vd. 2017, Ateş vd. 2018). Ancak genel dairesel yüzeyler ve roller coaster yüzeylere ilişkin birkaç tane çalışma vardır (Izumiya vd. 2007, Cui vd. 2009, Gorjanc ve Jurkin 2015).

Kanal yüzeylerin genel singüleriteleri Porteus tarafından incelenmiştir (Porteus 1991). Shyuichi Izumiya ve arkadaşları 2007 yılında yayınladıkları bir çalışmalarında regle yüzeyler ile karşılaştırarak dairesel yüzeylerin singüleriteleri ve geometrik özelliklerini araştırmışlardır (Izumiya vd. 2007). Ayrıca dairesel yüzeyler üzerinde bulunan striksiyon eğrilerini, regle yüzeylere benzer özellikleri göz önüne alarak incelemişlerdir. Genel regle yüzeyler üzerinde bir tek striksiyon eğrisi bulunmaktadır. Regle yüzeylerin tekil noktaları striksiyon çizgisi üzerindedir.

Dairesel yüzeylerin tam olarak iki tane striksiyon eğrisi vardır ve bu striksiyon eğrilerinin her bir üreten çember ile arakesiti birbirinin kutup noktalarıdır.

Dairesel yüzeylerin singüler noktaları açılabilir teğet regle yüzeylerin incelenmesiyle daha iyi anlaşılabilir. Dairesel yüzeylerin tekil noktaları striksiyon eğrisi üzerindedir. Bir yüzeyin Gauss eğriliği sıfır ise o yüzeye *açılabilir yüzey* denir. Açılabilir yüzeyler bir silindirin, koninin ya da uzay eğrisinin açılabilir teğetinin bir parçası olduğu bilinmektedir. Açılabilir yüzeyler her bir doğrultularının umbilik ya da tekil nokta olma dışında eğrilik çizgisi olma özelliğiyle de karakterize edilebilir. Böylece dairesele bir yüzeyin açılabilir olma özelliğini de yüzeyi üreten her bir çemberin umbilik ya da tekil nokta dışında eğrilik çizgisi olma özelliği ile benzer olarak düşünebilir. Böyle dairesele yüzeyler kanal yüzeyi, küre, Roller coaster yüzeyi olarak sınıflandırabilir ya da bu üç yüzeyle düzgün bağlantılı bir yüzey olarak verilebilir (Izumiya vd. 2007).

Üç boyutlu Öklid uzayında bir regle yüzeyin singüler noktalarının sadece cross caps olduğu gösterilmiştir (Izumiya vd. 2001, Izumiya vd. 2003). Shyuichi Izumiya ve arkadaşları, (Izumiya vd. 2007) adlı çalışmalarında dairesele yüzeylerin de singüler noktalarının sadece cross caps olduğunu göstermişlerdir. Açılabilir teğet yüzeylerin singüler noktalarının cusp kenarları, swallow tails ya da cuspidal cross caps olduğu da önceki çalışmalarda ispatlanmıştır (Mond 1982, Shcherbak 1986, Ishikawa 1993). Diğer taraftan genel açılabilir teğet yüzeylerin singüler noktaları cusp kenar ya da cuspidal cross caps noktalarıdır (Cleave 1980). Porteous'a göre genel kanal yüzeylerin singüler noktaları cusp kenarı ya da swallowtails içindedir (Porteus 1991). Ayrıca Shyuichi Izumiya ve arkadaşları (Izumiya vd. 2007) çalışmalarında genel roller coaster yüzeylerin singüler noktalarının cusp kenar, swallowtails ya da cuspidal cross caps içinde olduğunu göstermiştir. Ayrıca yine aynı çalışmada teğet açılabilir yüzeylere benzer şekilde teğet dairesele yüzeyler tanımlanmıştır. Dairesel yüzeylerin geometrik yapıları regle yüzeylerden daha geniştir.

Cui ve Dai (2009) çalışmalarında, sabit yarıçaplı kanonik olmayan dairesele yüzeylerin kinematik geometrisini incelemiştir. Dairesel yüzeylerin özel bir çeşidi olan tanjant dairesele yüzeyler de ele alınmıştır. Dairesel yüzey ve açılabilir tanjant regle yüzeyler arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Bir reel split kuaterniyon üç boyutlu reel vektör uzayında (üç boyutlu Minkowski uzayında) geometrik olarak bir dönme yaptırır. Dolayısıyla üç boyutlu bu vektör uzaylarında Euler açılarının bulunduğu veya dönme hareketinin olduğu teorilerde kuaterniyonların kullanılması mümkündür. Bu gerçekten hareketle, Aslan ve Yaylı çalışmalarında üç boyutlu reel vektör uzayında reel kuaterniyonları ve karşılık gelen matrisleri kullanarak kanal yüzeyler için geometrik gösterimler ve uygulamalar elde etmişlerdir (Aslan ve Yaylı 2016a). Dahası bunu split kuaterniyonlar yardımıyla başka bir çalışmalarında üç boyutlu Minkowski uzayında da vermişlerdir (Aslan ve Yaylı 2016b). Daha sonra Gök (2017) yılında yayımladığı çalışmasında alternatif $\{n, c, w\}$ çatısı yardımıyla taban eğrisi bir uzay eğrisinin küresel gösterge eğrileri olan kanal yüzeylerini tanımlamış ve kuaterniyonlar yardımıyla geometrik uygulamalarını vermiştir (Gök 2017). Bu çalışmanın Minkowski uzayında split kuaterniyonlar yardımıyla verilen teorisi yine 2017 yılında yapılan (Kocakuşaklı vd. 2017) çalışması ile yayımlanmıştır.

Bu kuaterniyonik yaklaşım biçimi en genel olarak (Bastl vd. 2014, Bizzarri 2014) adlı çalışmada verilmiş ve CAD-CAM uygulamaları yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında öncelikle üç boyutlu Öklid uzayında Izumiya ve arkadaşları tarafından verilen yüzeylerin (dairesel yüzeyler ve roller coaster yüzeyler) tanımı, bazı parametrik gösterimleri, karakterizasyonları verilmiştir. Üç boyutlu Öklid uzayında bir uygulama olarak dairesel yüzeylerin özel bir sınıfı olan roller coaster yüzeyler alternatif $\{n, c, w\}$ çatısına göre ele alınmış ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Biraz açmak gerekirse, 3. Bölümün 3.2. kısmında roller coaster yüzeyin taban eğrisi n, c ya da w doğrultu eğrileri seçilerek yüzeyler tanımlanmış ve bu yüzeylerin karakterizasyonları elde edilmiştir. 3.3. kısmında ise, dairesel yüzeylerin kuaterniyonik ve homotetik hareket matrisi yardımıyla verilen uygulamaları örnekleri ile birlikte yer almaktadır. Aynı kısımda, dayanak eğrisi bir uzay eğrisinin küresel göstergesi olan roller coaster yüzeylerin kuaterniyonik ve matris temsilleri örnekleriyle birlikte verilmiştir. Bu bölümün son kısmında, yüzeylerin parametre eğrilerinin bazı özel eğriler olma koşullarına ilişkin karakterizasyonlar verilmiştir.

Son olarak, dairesel yüzeylerde yarıçap fonksiyonu üreten çemberlerin açı parametresine bağlanmış ve genelleştirilmiş dairesel yüzey tanımı verilerek örnekleri çizilmiş, geometrik özellikleri, yeni temsilleri ve bazı özel parametre eğrileri ele alınmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanımlar, teoremler ve kavramlardan söz edilecektir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda tez içerisinde Öklid uzayı ile ilgili kısımlarda kullanılacak temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1.1. I , \mathbb{R} reel sayıların bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne, \mathbb{R}^3 reel vektör uzayı içinde bir **eğri** denir. \mathbb{R}^3 3-boyutlu Öklid uzayında dik koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3 olmak üzere bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin verildiğini varsayalım. α dönüşümünün değerler kümesi \mathbb{R}^3 olduğundan, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ile gösterilen 3 tane bileşeni vardır. Daha açık bir anlatımla

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

biçimindedir. Burada $1 \leq j \leq 3$ olacak biçimdeki her j doğal sayısı için

$$x_j \circ \alpha = \alpha_j$$

dir. Her α_j fonksiyonu, I aralığından \mathbb{R} reel sayılara giden bir fonksiyondur. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün düzgün olması demek $1 \leq j \leq 3$ için α_j fonksiyonlarının **düzgün** olması demektir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.2. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında bir t parametresine bağlı olarak verilen

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisi için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

olmak üzere $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{\mathbb{R}^3}(t)$ vektörüne α eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** veya **teğet vektörü** denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.1.3. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine **düzenli(regüler) eğri** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.4. $\alpha : I \subset \mathbb{R}$ da tanımlı bir eğri olsun. Eğer, $h : J \rightarrow I$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\beta = \alpha(h) : J \rightarrow I$$

bileşke fonksiyonu bir diferensiyellenebilir eğridir ve β eğrisine h dönüşümü yardımıyla α eğrisinin **yeniden parametrezasyonu** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5. $\beta, J \subset \mathbb{R}$ de tanımlı \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında tanımlı bir eğri olsun. $\forall s \in J$ için

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

ise β eğrisine **birim hızlı eğri** ve s parametresine de **yay parametresi** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.6. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$e(s) = \alpha'(s) \tag{2.2}$$

eşitliği ile belirli $e(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.7. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|e'(s)\| \tag{2.3}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. Kabaca, κ sayısının büyüklüğü, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinden ne kadar ayrıldığıнын ölçüsüdür (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.8. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için, $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere,

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} e'(s) \quad (2.4)$$

eşitliğiyle belirli $n(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normali** denir. n vektör alanına, α eğrisinin **asli normal vektör alanı** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.9. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$b(s) = e(s) \wedge n(s) \quad (2.5)$$

eşitliğiyle tanımlı $b(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **binormali** denir. b vektör alanına, α eğrisinin **binormal vektör alanı** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.10. $e(s)$, $n(s)$, $b(s)$ vektör alanlarına, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektör alanları** denir. $\{e(s), n(s), b(s)\}$ cümlesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.11. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{e(s), n(s), b(s)\}$ olmak üzere

$$\tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlı τ fonksiyonuna, α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması veya torsiyonu** denir. $|\tau|$ sayısı bir bakıma, eğrinin $\alpha(s)$ noktasının komşuluğunda, bu noktadaki oskületör düzleminden ne kadar ayrıldığıнын bir ölçüsüdür (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.12. I, \mathbb{R} reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde s yay parametresi ile tanımlı $\alpha(s)$ eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu $\kappa(s), \tau(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto H(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, $\alpha(s)$ eğrisinin **harmonik eğrilik fonksiyonu** denir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.1.1. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{e(s), n(s), b(s)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} e'(s) &= \kappa n \\ n'(s) &= -\kappa e + \tau b \\ b'(s) &= -\tau n \end{aligned}$$

denklemleri gerçekleşir. Bu denklemlere **Frenet-Serret denklemleri** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Teorem 2.1.2. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında keyfi parametrelili bir α eğrisinin Frenet vektör alanları

$$\begin{aligned} e &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ b &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ n &= b \times e \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Bu durumda α eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \end{aligned}$$

olur (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.13. I, \mathbb{R} reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. α eğrisinin her noktasındaki teğet vektör alanları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir **genel helis** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1.3 (Lancret Teoremi). \mathbb{R}^3 3-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ ve τ olmak üzere, α eğrisinin bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\kappa} = h = \text{sabit}$$

olmasıdır (Lancret 1806).

Özel olarak;

- (i) α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ , eğri boyunca sıfırdan farklı birer sabitler ise, α bir dairesel helistir.
- (ii) α eğrisinin eğriliği $\kappa = 0$ ise α eğrisi bir dejenere helis örneği olan düzgün bir doğrudur.
- (iii) α eğrisinin torsiyonu $\tau = 0$ ise α eğrisi bir dejenere helis örneği olan çemberdir.

Tanım 2.1.14. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayında, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü ile verilen bir uzay eğrisinin her noktasındaki asli normali sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa bu uzay eğrisi **slant helis** olarak adlandırılır (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Teorem 2.1.4. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında eğrilikleri κ ve τ olan bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır (Izumiya ve Takeuchi 2004).

H harmonik eğrilik fonksiyonu cinsinden bir slant helisin karakterizasyonu Uzunoglu ve arkadaşları tarafından 2016 yılında yapılan bir çalışmada aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\sigma(s) = \frac{g}{f} = \frac{H'}{\kappa(1+H^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit}$$

Burada, $f = \kappa\sqrt{1+H^2}$, $g = \sigma f$ dir.

Tanım 2.1.15. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında eğrilikleri κ ve τ olan bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için, $w(s) = \tau(s)e(s) + \kappa(s)b(s)$ vektör alanına **Darboux vektör alanı (centrode)** denir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.1.5. Üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir α eğrisi ve bu eğrinin $\{e, n, b\}$ Frenet çatısı verilsin. Bu durumda, eğri boyunca $\{n, c, n \times c = w\}$ alternatif çatısı $n, c = \frac{n'}{\|n'\|}, w = \frac{He + b}{\sqrt{1+H^2}}$ vektör alanları, sırasıyla, eğrinin asli birim normal vektörü, asli normal vektörün türevi ve Darboux vektörü olsun. Bu durumda, $\{n, c, n \times c = w\}$, α eğrisi boyunca Frenet çatısından farklı ortonormal bir çatıdır. Bu alternatif çatının türevleri için,

$$\begin{bmatrix} n'(s) \\ c'(s) \\ w'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(s) \\ c(s) \\ w(s) \end{bmatrix}$$

gerçeklenir. Burada, $f = \kappa\sqrt{1+H^2}$ ve $g = \sigma f = \frac{H'}{(1+H^2)^{\frac{3}{2}}}$ eğrinin alternatif çatıya göre eğrilikleridir (Uzunoglu vd. 2016).

Tanım 2.1.16. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{n, c, w\}$ alternatif çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin her noktasındaki c vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) yapıyorsa bu eğri **c -slant helis** olarak adlandırılır. Bu durumda, α eğrisi boyunca,

$$\langle c, u \rangle = \cos \varphi, \quad \varphi = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

sağlanır (Uzunoglu vd. 2016).

Önerme 2.1.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{n, c, w\}$ alternatif çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. O halde, α eğrisinin c -slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\Gamma = \frac{(f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{f^2(\frac{g}{f})'} = \tan \varphi = \text{sabit}$$

olmasıdır (Uzunoglu vd. 2016).

Teorem 2.1.6. Üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir α eğrisi ve $\{e, n, b\}$ Frenet çatısı verilsin. Eğri boyunca $\{c, \xi, d\}$ alternatif çatısı $c = \frac{n'}{\|n'\|}$, $d = gn + fw = \frac{\sigma n + w}{\sqrt{1 + \sigma^2}}$, $c \times \xi = d$ vektör alanları tanımlansın. Bu durumda, $\{c, \xi, d\}$, α eğrisi boyunca yukarıda verilen çatılardan farklı bir çatıdır. Bu alternatif çatının türevleri için,

$$\begin{bmatrix} c'(s) \\ \xi'(s) \\ d'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l(s) & 0 \\ -l(s) & 0 & m(s) \\ 0 & -m(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(s) \\ \xi(s) \\ d(s) \end{bmatrix}$$

yazılır. Burada, $l = f\sqrt{1 + \sigma^2}$, $m = \Gamma l = \frac{\sigma'}{(1 + \sigma^2)}$ eğrinin alternatif çatıya göre eğrilikleridir (Özdoğan 2016).

Tanım 2.1.17. Üç boyutlu Öklid uzayında bir $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ koordinat parçası, \mathbb{R}^2 uzayının bir D açık alt cümlesinden \mathbb{R}^3 uzayının içine birebir ve regüler bir dönüşümdür (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.18. Üç boyutlu Öklid uzayında $M \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall p \in M$ için, M nin içinde görüntüsü p noktasının bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat parçası $(x^{-1} : x(D) \rightarrow D)$ sürekli varsa, M ye bir **yüzey** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.19. $U \subset \mathbb{R}^2$ bir açık cümle ve $M : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. O halde, $M(U) \subset \mathbb{R}^n$ cümlesine bir **lokal yüzey** ya da **yama** denir (Gray 1998).

Tanım 2.1.20. $M \subset \mathbb{R}^n$ bir alt cümle olsun. Eğer $\forall p \in M$ için, M cümlesinin p noktasını içeren bir V komşuluğu var ve bir $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap M \subset \mathbb{R}^n$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir **regüler yüzey** denir:

i. x diferensiyellenebilirdir.

ii. $x : U \rightarrow V \cap M$ bir homeomorfizmdir.

iii. Her $x : U \rightarrow M$ dönüşümü bir regüler lokal yüzeydir (Gray 1998).

Tanım 2.1.21. $U \subset \mathbb{R}^3$ bir açık cümle, $M(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$E = \langle M_u, M_u \rangle$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle$$

biçiminde tanımlansın.

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ifadesine M yüzeyinin **birinci temel formu** denir. Buradaki, E, F ve G , M yüzeyinin birinci temel form katsayılarıdır (Gray 1998).

Tanım 2.1.22. $U \subset \mathbb{R}^3$ bir açık cümle, $M(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir yüzey, N yüzeyin birim normali ve $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$e = \langle N, M_{uu} \rangle$$

$$f = \langle N, M_{uv} \rangle$$

$$g = \langle N, M_{vv} \rangle$$

biçiminde tanımlansın.

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

ifadesine M yüzeyinin **ikinci temel formu** denir. Buradaki, e, f, g , M yüzeyinin ikinci temel form katsayılarıdır (Gray 1998).

Tanım 2.1.23. \mathbb{R}^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir hiperyüzeyi M ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olsun. \mathbb{R}^n Öklid uzayında Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M yüzeyinin **şekil operatörü** ya da **Weingarten dönüşümü** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.24. \mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayının bir hiperyüzeyi M yüzeyinin birinci temel form katsayıları E, F, G , ikinci temel form katsayıları e, f, g olmak üzere, yüzeyin **şekil operatörü matrisi**

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} Ge - Ff & Ef - Fe \\ Gf - Fg & Eg - Ff \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.25. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayında regüler M yüzeyinin **Gauss eğriliği** ve **ortalama eğriliği**, sırasıyla,

$$\begin{aligned} K(P) &= \det S(P) \\ H(P) &= \frac{1}{2} \text{tr}(S(P)) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Gray 1998). Bunun yanı sıra, tanımlanan bu eğrilikler birinci ve ikinci temel form katsayıları cinsinden aşağıdaki eşitliklerle de verilir.

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Tanım 2.1.26. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayında bir M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfırsa bu yüzeye **minimal yüzey** denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.27. \mathbb{R}^n n-boyutlu Öklid uzayının bir hiperyüzeyi M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı e ve M hiperyüzeyinin şekil operatörü S olsun. Eğer, e vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisidir** denir.

Bu tanıma göre, M hiperyüzeyi üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi, $\lambda \neq 0$ bir skalar olmak üzere,

$$S(e) = \lambda e$$

olur (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.28. \mathbb{R}^n n-boyutlu Öklid uzayının bir M hiperyüzeyi verilsin. M hiperyüzeyinin şekil operatörü S olsun. M hiperyüzeyinin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerlerine M hiperyüzeyinin bu noktadaki **asli eğrilikleri** denir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M hiperyüzeyinin bu P noktasındaki **asli eğrilik doğrultuları** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1.7. $X_p \neq 0$ teğet vektörü için $\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$ ise X_p doğrultusuna M hiperyüzeyinin bir P noktasındaki **asimptotik doğrultusu** ve X_p doğrultusunu teğet vektörü kabul eden eğriye de M hiperyüzeyi üzerinde bir **asimptotik çizgi** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Lemma 2.1.1. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayında bir M yüzeyi üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart her noktasındaki ivmesinin M yüzeyine teğet olması, yani α'' vektörünün yüzeyin normaline dik olmasıdır (Gray 1998).

Tanım 2.1.29. \mathbb{R}^n n-boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde bir α eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M hiperyüzeyine dik ise bu eğriye **geodezik eğri** denir. Başka bir ifadeyle α'' ivme vektörü her noktada hiperyüzey normaline paralel ise bu eğriye **geodezik eğri** denir (Gray 1998).

Tanım 2.1.30. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayında **regle yüzey**

$$F(t, u) = F_{(\gamma, \delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$$

şeklinde tanımlı $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümüdür. Burada

$$\delta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

biçimindedir. Ayrıca, γ eğrisi **taban eğri (dayanak eğri)**, δ eğrisi **direktör eğri (doğrultman eğri)**, $u \rightarrow \gamma(t) + u\delta(t)$ düz çizgileri ise **döngüler** adını alır. $F_{(\gamma, \delta)}$ regle yüzeyi için δ sabitse regle yüzey silindirdir. Regle yüzeyin silindirik olmayan yüzey olması için $\delta' \neq 0$ olmalıdır.

- i. $F_{(\gamma, \delta)}$ silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. O halde, $F_{(\gamma, \delta)} = F_{(\sigma, \delta)}$ ve $\langle \sigma'(t), \delta'(t) \rangle = 0$ olacak şekilde bir $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün eğrisi vardır. Bu $\sigma(t)$ eğrisi $F_{(\gamma, \delta)}$ regle yüzeyin **striksiyon eğrisi** olarak adlandırılır.
- ii. $F_{(\gamma, \delta)}$ silindirik olmayan regle yüzeyin striksiyon eğrisi γ taban eğrisinin seçiminde bağımsızdır.
- iii. $F_{(\gamma, \delta)}$ bir silindir olsun. (δ sabit bir vektördür.) O halde, herhangi bir

$$\sigma(t) = \gamma(t) + u\delta(t)$$

eğrisi $F_{(\gamma, \delta)} = F_{(\sigma, \delta)}$ ve $\langle \sigma'(t), \delta'(t) \rangle = 0$ özelliğini sağlar. O halde σ nın striksiyon eğrisi olduğu söylenir (Izumiya vd. 2007).

Tanım 2.1.31. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayında $F_{(\gamma, \delta)}$ taban eğrisi striksiyon eğrisi δ olan ve silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. O halde, singüler cümle

$$S(F_{(\sigma, \delta)}) = \{(t, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \mid \sigma'(t) = 0 \text{ veya } \sigma'(t) \parallel \delta(t)\}$$

şeklinde verilir. Bu ise bir regle yüzeyin striksiyon eğrisinin tekil noktaları içerdiği anlamına gelir (Izumiya vd. 2007).

Tanım 2.1.32. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında 1-parametrelili küre ailesinin zarfına **kanal yüzey** denir. Alternatif olarak kanal yüzeyi, merkezlerinin yörüngesi bir $C(t)$ eğrisi ve yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır (Gray 1998).

Tanım 2.1.33. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında bir kanal yüzeyi için yarıçap fonksiyonu sabit ise, kanal yüzeye **tüp** ya da **boru yüzeyi** denir (Gray 1998).

Tanım 2.1.34. \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında $\{e, n, b\}$ Frenet çatısı ile verilen bir $\gamma(s)$ eğrisi yardımıyla oluşturulan genelleştirilmiş tüp yüzeyinin parametrizasyonu

$$X(s, \theta) = \gamma(s) + r(\theta) (\cos \theta n(s) + \sin \theta b(s)), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

şeklindedir. Burada, $r(\theta) > 0$ iki kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $r(0) = r(2\pi)$ dir (Gross 1994).

Tanım 2.1.35. \mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayında, $n \times n$ tipinde bir A ortogonal matrisi ve bir ötelemeye tekabül eden $n \times 1$ tipinde bir C matrisi verilsin. Bu durumda

$$Y = AX + C$$

denklemleri ile verilen izometrilere her birine \mathbb{R}^n Öklid uzayında bir **genel hareket** denir.

- Özel olarak; \mathbb{R}^3 uzayında $C = 0$ olması durumunda

$$Y = AX$$

ile verilen genel hareket **dönme hareketi** veya **küresel hareket** olarak adlandırılır. Burada A matrisi; dönme hareketini yaptıran,

$$A^T A = AA^T = I_3$$

ve

$$\det A = 1$$

özelliklerine sahip bir matristir ve **dönme matrisi** olarak adlandırılır (Bottema ve Roth 1979).

2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda, tez içerisinde Minkowski uzayı ile ilgili kısımlarda kullanılacak temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.2.1. V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \longrightarrow R$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir **skalar çarpım**, bu durumda V vektör uzayına da bir **skalar çarpım uzayı** denir. Ayrıca,

- i. g dönüşümünün nondejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(v, w) = 0$ ve $\forall w \in V$ için $v = 0$ olmasıdır.
- ii. g dönüşümünün dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(v, w) = 0$ ve $\forall w \in V$ için $v \neq 0$ olmasıdır (O'Neill 1983, Duggai ve Bajancu 1996).

Tanım 2.2.2. V bir skalar çarpım uzayı, W alt cümlesi de üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V uzayının en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda, W alt uzayının boyutuna g skalar çarpımının **indeksi** denir. g skalar çarpımının indeksi v ise, $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca, V skalar çarpım indeksi, üzerindeki tanımlı g **skalar çarpımın indeksi** olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3. V bir skalar çarpım uzayı olsun. V uzayının indeksi v ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına **Lorentz uzayı** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4. \mathbb{R}^3 standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $u_p = (u_1, u_2, u_3)$, $w_p = (w_1, w_2, w_3) \in T_p^3\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle u_p, w_p \rangle_L = -u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3$$

eşitliğiyle verilen 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir ve \mathbb{R}_1^3 ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.5. V bir Minkowski uzayı olsun. $u \in V$ için

$\langle u, u \rangle_L > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne **spacelike** veya **uzaysı** vektör,

$\langle u, u \rangle_L < 0$ ise u vektörüne **timelike** veya **zamansı** vektör,

$\langle u, u \rangle_L = 0$ ve $u \neq 0$ ise u vektörüne **null (lightlike)** vektör ve $\|u\|_L = \sqrt{|\langle u, u \rangle_L|}$ reel sayısına u vektörünün **normu** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6. M bir Lorentz manifoldu ve

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı e olmak üzere

$\langle e, e \rangle_L > 0$ ise α eğrisine **spacelike eğri**,

$\langle e, e \rangle_L < 0$ ise α eğrisine **timelike eğri**,

$\langle e, e \rangle_L = 0$ ve $e \neq 0$ ise α eğrisine **null (lightlike) eğri** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.7. \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında iki vektör u, w olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$u \times_L w = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (u_3w_2 - u_2w_3, u_1w_3 - u_3w_1, u_1w_2 - u_2w_1)$$

vektörüne u ve w vektörlerinin **pseudo-vektörel çarpımı** denir (Akutagawa ve Nishikawa 1990).

Tanım 2.2.8. \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M yüzeyine \mathbb{R}_1^3 uzayında bir **spacelike yüzey** denir (Beem vd. 1996). Diğer yandan denk olarak, M yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzey normalinin timelike bir vektör alanı yani $\langle N, N \rangle < 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.9. \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M yüzeyine \mathbb{R}_1^3 uzayında bir **timelike yüzey** denir (Beem vd. 1996). Buna denk olarak, M yüzeyinin timelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzey normalinin spacelike bir vektör alanı yani $\langle N, N \rangle > 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.10. \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında iki vektör arasındaki açı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

- **Spacelike açı:** u ve w , spacelike alt vektör uzayını geren \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında spacelike vektörler olsun. O halde,

$$\begin{aligned} |\langle u, w \rangle| &= \|u\| \|w\| \\ \langle u, w \rangle &= \|u\| \|w\| \cos \theta \end{aligned}$$

ile tanımlı θ ifadesi u ve w arasındaki spacelike açıdır.

- **Merkez açı:** u ve w , bir timelike alt vektör uzayını geren \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında spacelike vektörler olsun. O halde,

$$\begin{aligned} |\langle u, w \rangle| &= \|u\| \|w\| \\ \langle u, w \rangle &= \|u\| \|w\| \cosh \theta \end{aligned}$$

ile tanımlı θ ifadesi u ve w arasındaki merkez açıdır.

- **Lorentz timelike açığı:** \mathbb{R}_1^3 de u spacelike, w timelike vektör olsun. O halde, bir $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır, öyle ki

$$\langle u, w \rangle = \|u\| \|w\| \sinh \theta$$

sağlanır. Bu sayı, u ve w arasındaki Lorentz timelike açığıdır (Ratcliffe 2005).

2.3 Kuaterniyonlar Teorisinde Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda, dairesel yüzeylerin kuaterniyon ve matris gösterimleri için kullanılacak bazı temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.3.1.

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, i, j, k\}$ reel birimlerinin çarpımı,

- a) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- b) $ij = k, jk = i, ki = j$
- c) $ji = -k, kj = -i, ik = -j$

şekindedir. \mathbb{H} cümlesinin her bir elemanına bir **reel kuaterniyon** adı verilir (Hamilton 1844).

Tanım 2.3.2. Bir q reel kuaterniyonunun **skalar kısmı**,

$$S_q = q_0$$

ve **vektörel kısmı**,

$$V_q = q_1i + q_2j + q_3k$$

olarak tanımlanır. Böylece q kuaterniyonu,

$$q = S_q + V_q$$

biçiminde yazılabilir.

Bir q reel kuaterniyonunun skalar kısmı 0 ise, q kuaterniyonu **pür kuaterniyon** olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.3.3. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ ve $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ iki reel kuaterniyon olsun. Bu kuaterniyonların **kuaterniyon çarpımı**,

$$\begin{aligned} * : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (q, p) &\rightarrow q * p = S_q S_p - \langle V_q, V_p \rangle + S_q V_p + S_p V_q + (V_q \times V_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

$\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, *\}$ sistemi bir cebirdir ve **kuaterniyon cebiri** olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.3.4. Herhangi bir $q = S_q + V_q$ reel kuaterniyonunun **eşleniği**,

$$q^* = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.3.5. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ bir reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} N : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow N(q) = N_q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan N_q pozitif reel sayısına q kuaterniyonunun **normu** denir (Hacısalihoglu 1983).

$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ bir birim kuaterniyon olsun. v , 3-boyutlu Öklid uzayında bir vektör olmak üzere $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\phi(v) = q * v * q^{-1}$, lineer dönüşümünü ele alalım. Bu durumda, q kuaterniyonu için ϕ dönüşümünün matris gösterimi

$$M = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & -2a_3a_0 + 2a_1a_2 & 2a_0a_2 - 2a_1a_3 \\ 2a_1a_2 + 2a_3a_0 & a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & 2a_2a_3 - 2a_1a_0 \\ 2a_1a_3 - 2a_2a_0 & 2a_1a_0 + 2a_2a_3 & a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

biçiminde verilir. Burada $MM^T = I_3$ ve $\det M = 1$ sağlanır, yani M bir ortogonal matristir.

Tanım 2.3.6. $I \subset \mathbb{R}$ sıfırı içeren bir aralık olsun. $t \in I$ için $A(t)$ pozitif ortogonal bir matris ve $C(t)$ de bir sütun matrisi olmak üzere, elemanları

$$\begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilen $\{f_t\}$ cümlesine \mathbb{R}^n Öklid uzayının **1-parametrelili hareketi** denir. Burada $A(t)$ ve $C(t)$ nin elemanları t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır (Düldül 2004).

Tanım 2.3.7. 3-boyutlu Öklid uzayında sabit uzay R' ve hareketli uzay R olsun. R uzayının R' uzayına göre **1-parametrelili homotetik hareketi**

$$x' = hAx + C$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada x' ve x bir $X \in R$ noktasının, sırasıyla, sabit ve hareketli uzaylardaki sütun matrisleri olarak ifade edilen konum vektörleri; h hareketin homotetik oranı, A bir ortogonal matris ve C sütun matrisi de öteleme vektörüdür. Ayrıca h ile A ve C matrislerinin bileşenleri bir " t " reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır (Düldül 2004).

Tanım 2.3.8.

$$\mathbb{H}_L^0 = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, i, j, k\}$ reel birimlerinin çarpımı,

a) $i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1$

b) $ij = k, jk = -i, ki = j$

$$c) \quad ji = -k, \quad kj = i, \quad ik = -j$$

şeklindedir. \mathbb{H}_L^0 cümlesinin her bir elemanına bir **bölünmüş (split) kuaterniyon** adı verilir (Inoguchi 1998).

Tanım 2.3.9. Bir q bölünmüş kuaterniyonu, *skalar* kısmı

$$S_q = q_0$$

ve *vektörel* kısmı

$$V_q = q_1i + q_2j + q_3k$$

olmak üzere

$$q = S_q + V_q$$

biçiminde yazılabilir. $S_q = 0$ ise q bölünmüş kuaterniyonu **pür bölünmüş kuaterniyon** olarak adlandırılır. (Inoguchi 1998).

Ayrıca $p = S_p + V_p$ ve $q = S_q + V_q$ bölünmüş kuaterniyonlarının bölünmüş kuaterniyon çarpımı aşağıdaki gibi verilir:

$$q *_L p = S_q S_p + \langle V_q, V_p \rangle_L + S_q V_p + S_p V_q + V_q \times_L V_p$$

Tanım 2.3.10. Bir $q = S_q + V_q$ bölünmüş kuaterniyonunun **eşleniği**,

$$q^* = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlanır (Kula 2003).

Tanım 2.3.11. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ bir bölünmüş kuaterniyon olmak üzere

$$N \quad : \quad \mathbb{H}_L^0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \rightarrow N(q) = N_q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

şeklinde tanımlanan N_q reel sayısına q **bölünmüş kuaterniyonunun normu** denir. Eğer $N_q = 1$ ise q kuaterniyonuna **birim bölünmüş kuaterniyon** denir (Kula 2003).

Eğer, $N_q \neq 0$ ise $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ kuaterniyonunu tersi vardır ve

$$q^{-1} = \frac{q^*}{(N_q)^{1/2}}$$

şeklindedir.

Lemma 2.3.1. Timelike split kuaterniyonların

$$\mathbb{TH}_L^0 = \left\{ q \in \mathbb{H}_L^0 : q \times q^* = 1 \right\}$$

cümlesi bölünmüş kuaterniyon çarpımı altında bir gruptur (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.3.12. Her $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ bölünmüş kuaterniyonu için,

$$M_q : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$x \rightarrow M_q(x) = q *_L x *_L q^*$$

dönüşümü lineerdir. Bu dönüşüme karşılık gelen dönme matrisi ise

$$M_q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 2q_0q_3 - 2q_1q_2 & -2q_0q_2 - 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 & -2q_2q_3 - 2q_1q_0 \\ 2q_1q_3 - 2q_1q_0 & 2q_1q_0 - 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

olarak elde edilir (Özdemir ve Ergin 2006, Özdemir 2009).

Dolayısıyla, \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir parametrelili **homotetik hareket**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & \mathbf{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

dönüşümü yardımıyla elde edilir. Burada, \mathbf{Y} ve \mathbf{X} bir noktanın sırasıyla sabit R' uzayının ve hareketli R uzayının koordinat çatılarına göre konum vektörleridir. Ayrıca, ϵ köşegen girdileri $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ olan $(\delta_{ij}\epsilon_j)$ biçiminde bir köşegen matrisi olmak üzere $A \in SO_1(3)$, $A^t = \epsilon A^{-1} \epsilon$ sağlanır. h ve \mathbf{C} ise sırasıyla homotetik skalar ve öteleme vektörü olarak adlandırılır (Tosun vd. 2006).

3. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DAİRESEL YÜZEYLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, Izumiya vd. tarafından 2007 yılında bir çalışma ile verilen dairesel yüzeyler teorisi incelenecek ve bir geometrik uygulama olarak bu tip yüzeylerin ilk kez kuaterniyonik modellemesi verilecektir. Ayrıca, Cui vd. tarafından 2009 yılında yapılan bir çalışmada verilen tanım ve teoremlerden faydalanılacaktır.

3.1 Dairesel Yüzeyler ve özellikleri

Tanım 3.1.1. $M : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uzay eğrisi ve $r(u) : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere bir **dairesele yüzey**, merkezleri M eğrisi üzerinde olan ve yarıçapları $r(u)$ fonksiyonunun değerlerine göre değişen çemberlerin bir ailesi olarak tanımlanmaktadır. Bu çemberler, **dairesele yüzeyin üreten çemberleri** olarak adlandırılır. Bu durumda bir dairesel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(u, \theta) = P_{(M, a_2, a_3, r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)(\cos \theta a_2(u) + \sin \theta a_3(u)) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı

$$V : I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dönüşüm ile verilir. Burada $a_2, a_3 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ olup her $u \in I$ için $\langle a_2, a_2 \rangle = \langle a_3, a_3 \rangle = 1, \langle a_2, a_3 \rangle = 0$ gerçekleşir. Dolayısıyla keyfi bir $u \in I$ için $a_1(u) = a_2(u) \times a_3(u)$ biçiminde tanımlanan vektör, o noktaya karşılık gelen üreten çemberi içeren düzlemin normalini vermektedir. Ayrıca, M eğrisi **dairesele yüzeyin taban eğrisi**, $r(u)$ **yarıçap fonksiyonu** ve a_2, a_3 eğri çifti ise **dairesele yüzeyi oluşturan çatı** olarak adlandırılır. Tanımdan da anlaşılabilirdiği üzere,

$$\theta \rightarrow M(u) + r(u)(\cos \theta a_2(u) + \sin \theta a_3(u))$$

standart çemberleri ise dairesel yüzeyi üreten çemberlerdir. $r(u)$ yarıçap fonksiyonu sabit ise dairesel yüzeye **sabit yarıçaplı dairesel yüzey** adı verilir (Izumiya vd. 2007).

Buna bağılı olarak her kanal yüzeyinin açıkça bir dairesel yüzey olduğu görülür. Ancak her dairesel yüzey bir kanal yüzeyi olmak zorunda değildir. Bu durumu Izumiya ve arkadaşları tarafından verilen şu tanımla açıklamaya çalışalım.

Tanım 3.1.2. $M : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uzay eğrisi ve $r(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer bir $u_0 \in I$ için

$$\langle M'(u_0), a_2(u_0) \rangle \neq 0 \quad \text{veya} \quad \langle M'(u_0), a_3(u_0) \rangle \neq 0$$

koşullarından herhangi biri ya da ikisi birden gerçekleşiyorsa $P(u, \theta) = P_{(M, a_2, a_3, r)}(u, \theta)$ dairesel yüzeyine **kanal olmayan dairesel yüzey** adı verilir (Izumiya vd. 2007).

Örnek 3.1.1. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında $M(u) = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \frac{u}{\sqrt{2}} \right)$ eğrisini ele alalım.

İlk olarak

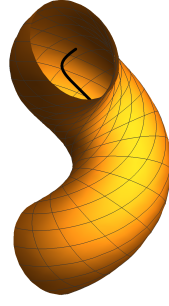
$$\begin{aligned} a_1(u) &= \left(-\frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = M'(u) \\ a_2(u) &= (\cos u, \sin u, 0) \\ a_3(u) &= \left(-\frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

seçelim. Bu durumda

$$P_1(u, \theta) = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}} + r \cos \theta \cos u - r \sin \theta \frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \frac{\sin u}{\sqrt{2}} + r \cos \theta \sin u + r \sin \theta \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - r \sin \theta) \right)$$

dairel yüzeyi elde edilir ki bu yüzey bir kanal (tüp) yüzeyidir.

$r = 1$ için $P_1(u, \theta)$ yüzeyin grafiği şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 M taban eğrisine sahip P_1 kanal (tüp) yüzeyi

Diğer yandan

$$a_1(u) = (0, \cos u, \sin u)$$

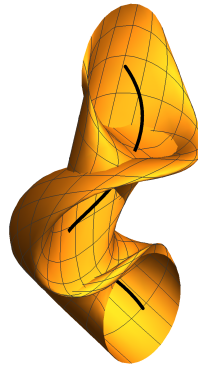
$$a_2(u) = (0, -\sin u, \cos u)$$

$$a_3(u) = (1, 0, 0)$$

seçelim. O halde

$$P_2(u, \theta) = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}} + r \sin \theta, \frac{\sin u}{\sqrt{2}} - r \cos \theta \sin u, \frac{1}{\sqrt{2}} + r \cos \theta \cos u \right)$$

dairesel yüzeyi elde edilir. Açıkça P_2 yüzeyi bir kanal yüzey değildir. $r = 1$ için yüzeyin grafiği şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2 M taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi

Tanım 3.1.3 (Dairesel Yüzeyin Taban Çatısı). Bir $P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta)$ dairesel yüzeyi için $\{a_1 = a_2 \times a_3, a_2, a_3\}$ vektör cümlesi, dairesel yüzeyin M taban eğrisi boyunca **taban çatısı** olarak adlandırılan \mathbb{R}^3 Öklid uzayının bir ortonormal çatısını oluştururlar. Bu durumda a_1, a_2 ve a_3 vektörlerinin diklik şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} c_1(u) &= a_1'(u) \cdot a_2(u) = -a_2'(u) \cdot a_1(u) \\ c_2(u) &= a_1'(u) \cdot a_3(u) = -a_3'(u) \cdot a_1(u) \\ c_3(u) &= a_2'(u) \cdot a_3(u) = -a_3'(u) \cdot a_2(u) \end{aligned} \quad (3.2)$$

seçilebilir. O halde bu genel ortonormal taban çatısı için Serret-Frenet formülleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} a_1'(u) \\ a_2'(u) \\ a_3'(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_1(u) & c_2(u) \\ -c_1(u) & 0 & c_3(u) \\ -c_2(u) & -c_3(u) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(u) \\ a_2(u) \\ a_3(u) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Bu durumda M taban eğrisinin teğet vektörü her $u \in I$ için

$$M'(u) = \alpha(u)a_1(u) + \sigma(u)a_2(u) + \mu(u)a_3(u) \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edilebilir (Izumiya vd. 2007).

Bu bölümde, sabit yarıçaplı bir dairesel yüzeyin geometrik özellikleri incelenecektir. Öncelikle bu tip bir yüzeyin temel form katsayılarını (3.3) ile verilen denklem yardımıyla genel ortonormal çatıya göre hesaplayacağız. Bunun öncesinde, gerekli bazı ifadeleri elde edelim. P dairesel yüzeyinin u ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} P_u &= (\alpha - rc_1 \cos \theta - rc_2 \sin \theta)a_1 + (\sigma - rc_3 \sin \theta)a_2 + (\mu + rc_3 \cos \theta)a_3 \\ P_\theta &= -r \sin \theta a_2 + r \cos \theta a_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

biçiminde elde edilir. P_u ve P_θ ifadelerinin vektörel çarpımı ve elde edilen vektörün normu alınarak, sırasıyla

$$\begin{aligned} P_u \times P_\theta &= r\{(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)a_1 \\ &\quad + (rc_1 \cos \theta + rc_2 \sin \theta - \alpha)(\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3)\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\|P_u \times P_\theta\| &= r\sqrt{(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2 + (rc_1 \cos \theta + rc_2 \sin \theta - \alpha)^2} \\ &= w\end{aligned}\quad (3.7)$$

bulunur. Böylece dairesel yüzeyin birim normali,

$$\begin{aligned}N(u, \theta) &= \frac{P_u \times P_\theta}{\|P_u \times P_\theta\|} = \frac{r}{w}[(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)a_1 \\ &\quad + (rc_1 \cos \theta + rc_2 \sin \theta - \alpha)(\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3)]\end{aligned}\quad (3.8)$$

şeklinde dir. O halde dairesel yüzeyin birinci temel form katsayıları şu şekildedir:

$$\begin{aligned}E &= \langle P_u, P_u \rangle = (\alpha - rc_1 \cos \theta - rc_2 \sin \theta)^2 + (\sigma - rc_3 \sin \theta)^2 + (\mu + rc_3 \cos \theta)^2 \\ F &= \langle P_u, P_\theta \rangle = r(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + rc_3) \\ G &= \langle P_\theta, P_\theta \rangle = r^2\end{aligned}$$

Dairesel yüzeyin ikinci temel form katsayılarını hesaplayabilmek için gerekli olan ikinci mertebeden kısmi türevler

$$\begin{aligned}P_{uu} &= (\alpha' - rc_1' \cos \theta - rc_2' \sin \theta - \sigma c_1 + rc_1 c_3 \sin \theta - \mu c_2 - rc_2 c_3 \cos \theta)a_1 \\ &\quad + (\sigma' - rc_3' \sin \theta + \alpha c_1 - rc_1^2 \cos \theta - rc_1 c_2 \sin \theta - \mu c_3 - rc_3^2 \cos \theta)a_2 \\ &\quad + (\mu' + rc_3' \cos \theta + \alpha c_2 - rc_1 c_2 \cos \theta - rc_2^2 \sin \theta + \sigma c_3 - rc_3^2 \sin \theta)a_3,\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$P_{u\theta} = (rc_1 \sin \theta - rc_2 \cos \theta)a_1 - rc_3 \cos \theta a_2 - rc_3 \sin \theta a_3, \quad (3.10)$$

ve

$$P_{\theta\theta} = -r \cos \theta a_2 - r \sin \theta a_3 \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. O halde (3.8), (3.9)-(3.11) denklemleri kullanılarak, dairesel yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}e = \langle P_{uu}, N \rangle &= \frac{r}{w}[(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\alpha' - rc_1' \cos \theta - rc_2' \sin \theta - \sigma c_1 \\ &\quad + rc_1 c_3 \sin \theta - \mu c_2 - rc_2 c_3 \cos \theta) \\ &\quad + (rc_1 \cos \theta + rc_2 \sin \theta - \alpha)(\alpha c_1 \cos \theta - rc_1^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + \sigma' \cos \theta + \mu' \sin \theta - c_3(\mu \cos \theta - \sigma \sin \theta) \\ &\quad + \alpha c_2 \sin \theta - 2rc_1 c_2 \sin \theta \cos \theta - rc_2^2 \sin^2 \theta - rc_3^2)]\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}f = \langle P_{u\theta}, N \rangle &= \frac{r^2}{w}(\sigma c_1 \sin \theta \cos \theta + \mu c_1 \sin^2 \theta - \sigma c_2 \cos^2 \theta \\ &\quad - \mu c_2 \sin \theta \cos \theta - rc_1 c_3 \cos \theta - c_2 c_3 \sin \theta + \alpha c_3)\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$g = \langle P_{\theta\theta}, N \rangle = -\frac{r^2}{w}(rc_1 \cos \theta + rc_2 \sin \theta - \alpha) \quad (3.14)$$

şeklinde bulunur (Izumiya vd. 2007).

Dairesel yüzeyi üreten her bir çemberin normal vektörü a_1 olmak üzere, M taban eğrisi a_1 vektör alanının Gauss dönüşümü altında görüntüsü ile elde edilen Γ küresel eğrisinin yay parametresine göre tekrar parametrelendirilsin. a_1 , Γ eğrisinin bir doğal gösterimidir ve eğri boyunca kürenin birim normalini verir. Bu durumda açıkça görülür ki (3.3) denklemi ile verilen genel ortonormal çatı bir küresel çatıya dönüşecektir. Dolayısıyla, daireSEL yüzeyin geometrik özelliklerini bu çatıya göre incelemek daha kolay olacaktır. Hatta bu durumda, daireSEL yüzeyi oluşturmak için bir M taban eğrisi ve bir a_1 birim vektör alanının bilinmesi yeterlidir. s , Γ küresel eğrisinin yay uzunluğu parametresi olsun. Bu durumda,

$$a_2 = a_1'(s)$$

ve $a_3 = a_1 \times a_2$ yazılabilir. a_1 eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan, $\|a_2\| = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\{a_1, a_2, a_3\}$ cümlesi hala M boyunca bir ortonormal çatı olup, sadece parametrelendirme farkı görülmektedir. O halde (3.3) ile verilen genel ortonormal çatı Γ eğrisi için oluşturulursa

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0 \quad \text{ve} \quad c_3 = \beta \quad (3.15)$$

olarak seçilmelidir. Bu durumda β , Γ eğrisinin geodezik eğriliği olur. Böylece, s parametresine göre elde edilen bu çatının türev denklemleri

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

biçiminde verilir.

$M(s)$ taban eğrinin teğet vektörünü $M'(s) = \alpha(s)a_1(s) + \sigma(s)a_2(s) + \mu(s)a_3(s)$ ile gösterelim. Bu eşitlikten yararlanılarak, $M(s)$ taban eğrinin Frenet çatısı, eğrilik ve torsiyonu, $\{a_1, a_2, a_3\}$ koordinat çatısı ile α, σ, μ fonksiyonları cinsinden elde

edilebilir. $\alpha(s), \sigma(s), \mu(s)$ ve $\beta(s)$ fonksiyonları dairesel yüzeyin Öklid invaryantlarının bir denklem sistemini oluşturur. Ayrıca, bu Öklid invaryantları

$$M(s) = M_0 + \int_{s_0}^s (\alpha(s)a_1(s) + \sigma(s)a_2(s) + \mu(s)a_3(s))ds \quad (3.17)$$

eşitliği aracılığıyla r yarıçaplı dairesel yüzeyi elde edebilmek için bir yol gösterir. Bu dört Öklid invaryantı ile r yarıçaplı dairesel yüzeyin özellikleri belirlenir.

Bilindiği üzere, bir parametrelili düzlem ailesinin zarfı açılabilir regle yüzeydir. Karakteristikler regresyon köşelerine teğet olan doğrulardır. Regresyon köşeleri açılabilir regle yüzeyin singüler noktalarını oluşturur. Regresyon köşeleri aşağıdaki 3 eşitliği sağlar:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (X - M) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial s}(a_1 \cdot (X - M)) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2}(a_1 \cdot (X - M)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada, s küresel göstergenin yay uzunluğu, a_1 çember düzleminin birim normal vektörü, X regresyon köşesinin sabit bir noktası ve M taban eğrisidir. (3.18) ifadesindeki ikinci ve üçüncü eşitlikler $\alpha(s), \sigma(s), \mu(s)$ ve $\beta(s)$ Öklid invaryantları bakımından sadeleştirilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} a_2 \cdot (X - M) &= \alpha \\ a_3 \cdot (X - M) &= \frac{1}{\beta}(\sigma + \alpha') \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur. Burada, $\beta \neq 0$ dır. Bu açılabilir regle yüzeyin regresyon köşesi

$$X = M + \alpha a_2 + \frac{1}{\beta}(\sigma + \alpha') a_3 \quad (3.20)$$

biçimindedir. (3.20) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{dX}{ds} = (\mu + \beta\alpha + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\beta}(\sigma + \alpha')))a_3 \quad (3.21)$$

elde edilir. Böylece, dairesel düzlemin zarfı

$$t = \frac{1}{\beta}(\sigma + \alpha') + v(\mu + \beta\alpha + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\beta}(\sigma + \alpha')))$$

olmak üzere

$$S(s, t) = M + \alpha a_2 + t a_3 \quad (3.22)$$

olur (Cui vd. 2009).

Şimdi (3.5) denkleminde (3.15) eşitlikleri göz önüne alınırsa öncelikle

$$\begin{aligned} P_s &= (\alpha - r \cos \theta) a_1 + \sigma a_2 + \mu a_3 + \beta P_\theta \\ P_\theta &= r(-\sin \theta a_2 + \cos \theta a_3) \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir ve bu ifadeler yardımıyla da

$$P_s \times P_\theta = r((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) a_1 + \cos \theta (r \cos \theta - \alpha) a_2 + \sin \theta (r \cos \theta - \alpha) a_3) \quad (3.24)$$

bulunur. $P_s \times P_\theta$ vektör alanının normu w , yani $\|P_s \times P_\theta\| = w$ olduğundan dairesel yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned} N(s, \theta) &= \frac{P_s \times P_\theta}{\|P_s \times P_\theta\|} \\ &= \frac{(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) a_1 + \cos \theta (r \cos \theta - \alpha) a_2 + \sin \theta (r \cos \theta - \alpha) a_3}{\sqrt{(r \cos \theta - \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde verilir. O halde, dairesel yüzeyin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle P_s, P_s \rangle = (\alpha - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r \beta \sin \theta)^2 + (\mu + r \beta \cos \theta)^2 \\ F &= \langle P_s, P_\theta \rangle = r(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r \beta) \\ G &= \langle P_\theta, P_\theta \rangle = r^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

eşitlikleri ile verilir. Ayrıca ikinci mertebeden kısmi türevler

$$\begin{aligned} P_{ss} &= (\alpha' - \sigma) a_1 + (\alpha - r \cos \theta + \sigma' - \mu \beta) a_2 + (\sigma \beta + \mu') a_3 + \beta' P_\theta + \beta P_{s\theta} \\ P_{\theta\theta} &= -r(\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3) \\ P_{s\theta} &= r \sin \theta a_1 - r \beta (\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3) \end{aligned} \quad (3.27)$$

biçiminde elde edilir. Böylece, yüzeyin ikinci temel form katsayıları şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} e = \langle P_{ss}, N \rangle &= \frac{r}{w} \left[(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) (\alpha' - \sigma + r \beta \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + (r \cos \theta - \alpha) [\alpha \cos \theta - r \cos^2 \theta + \sigma' \cos \theta + \mu' \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \beta (-\mu \cos \theta + \sigma \sin \theta) - r \beta^2 \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$f = \langle P_{s\theta}, N \rangle = \frac{r^2}{w} [\sin \theta (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) - \beta (r \cos \theta - \alpha)] \quad (3.29)$$

$$g = \langle P_{\theta\theta}, N \rangle = \frac{r^2}{w} (\alpha - r \cos \theta) \quad (3.30)$$

O halde, dairesel yüzeyin K Gauss eğriliği ile H ortalama eğriliği şu şekilde hesaplanır:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r((r \cos \theta - \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2)^2} \times \left\{ \begin{array}{l} -r \sin^2 \theta (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2 \\ +(r \cos \theta - \alpha)(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(-\alpha' + \sigma + \beta r \sin \theta) \\ +(r \cos \theta - \alpha)^2(-\alpha \cos \theta + r \cos^2 \theta) \\ -\sigma' \cos \theta - \mu' \sin \theta + \beta(\mu \cos \theta - \sigma \sin \theta) \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2r((r \cos \theta - \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \times \left\{ \begin{array}{l} r(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\alpha' - \sigma - \beta r \sin \theta) \\ +2 \sin \theta (\sigma \sin \theta - \mu \cos \theta) \\ +(r \cos \theta - \alpha)[(3\alpha r \cos \theta - 2r^2 \cos^2 \theta) \\ +r(\sigma' \cos \theta + \mu' \sin \theta)] \\ -\beta r(\mu \cos \theta - \sigma \sin \theta) - (\alpha^2 + \sigma^2 + \mu^2) \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

3.1.1 Dairesel yüzeylerin striksiyon eğrileri

Bir $P(s, \theta)$ dairesel yüzeyinde

$$\delta(s) = M(s) + r(\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)) \quad (3.33)$$

parametrik denklemi ile ifade edilen eğrinin bir striksiyon eğrisi olabilmesi için aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

$$\langle \delta'(s), (\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)) \rangle = 0, \quad \forall s \in I \quad (3.34)$$

O halde,

$$\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta = 0$$

olmalıdır.

Bir $P(s, \theta)$ dairesel yüzeyi için

$$\langle M'(s), a_2(s) \rangle = \langle M'(s), a_3(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in I$$

şartı sağlanıyorsa üreten çemberler M eğrisinin normal düzleminde bulunur. Bu tür yüzeyler kanal yüzey olarak bilinir. Bu durumda yüzey üzerinde üreten çemberlere çapraz olan her eğri bir striksiyon eğrisidir. Böylece kanal yüzeylerin sınıfı silindirik regle yüzeylerin sınıfına benzerdir (Izumiya vd. 2007).

3.1.2 Dairesel yüzeylerin yerel singülerlikleri

Bu bölümde dairesel yüzeylerin singüler noktalarının teorisi incelenecektir. Bir P dairesel yüzeyinin $P(s_0, \theta_0)$ noktasında singüler noktalarının olması için

$$\|P_s \times P_\theta\| (s_0, \theta_0) = 0$$

olmalıdır. O halde,

$$\|P_s \times P_\theta\| (s_0, \theta_0) = r \sqrt{(r \cos \theta_0 - \alpha(s_0))^2 + (\sigma(s_0) \cos \theta_0 + \mu(s_0) \sin \theta_0)^2} = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} r \cos \theta_0 - \alpha(s_0) &= 0, \\ \sigma(s_0) \cos \theta_0 + \mu(s_0) \sin \theta_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Buradan, $\cos \theta_0 = \frac{\alpha(s_0)}{r}$ bulunur. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1. $\alpha(s_0) = 0$ olsun. O halde, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ olur. (3.35)'deki ikinci eşitlikten, $\mu(s_0) = 0$ elde edilir. Böylece, $M'(s_0) = \sigma(s_0)a_2(s_0)$ olur. Dolayısıyla, P nin singüler noktaları

$$P(s_0, \pi/2) = M(s_0) + ra_3(s_0) \quad \text{ve} \quad P(s_0, 3\pi/2) = M(s_0) - ra_3(s_0)$$

ile verilir. Özel olarak, $\sigma(s_0) = 0$ olursa, M taban eğrisi de s_0 'da bir singüler noktaya sahiptir.

2. $\alpha(s_0) \neq 0$ olsun. (3.35) eşitliğinde, $\cos \theta_0 = \frac{\alpha(s_0)}{r}$ yazılarak, $\frac{\sigma(s_0)\alpha(s_0)}{r} = -\mu(s_0) \sin \theta_0$ elde edilir. O halde iki durum söz konusudur:

(i) $\mu(s_0) = 0$ olsun. O halde, $\sigma(s_0) = 0$ olur. Böylece, P dairesel yüzeyinin singüler noktası $\mu(s_0) = \sigma(s_0) = 0$ ve $\theta_0 = \cos^{-1}(\frac{\alpha(s_0)}{r})$ eşitliklerini sağlayan (s_0, θ_0) 'dadır.

(ii) $\mu(s_0) \neq 0$ olsun. O halde, $\sigma(s_0) \neq 0$ olur. Böylece, (3.35) eşitliğinden, $\theta_0 = -\sin^{-1}(\frac{\sigma(s_0)\alpha(s_0)}{\mu(s_0)r})$ olduğu görülür. Ayrıca $\theta_0 = \cos^{-1}(\frac{\alpha(s_0)}{r})$ olduğunu biliyoruz. $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$ olduğundan dolayı $\alpha^2(s_0)(\sigma^2(s_0) + \mu^2(s_0)) = r^2\mu^2(s_0)$ elde edilir. O halde P dairesel yüzeyi $\theta_0 = -\sin^{-1}(\frac{\sigma(s_0)\alpha(s_0)}{\mu(s_0)r}) = \cos^{-1}(\frac{\alpha(s_0)}{r})$ ve $\alpha^2(s_0)(\sigma^2(s_0) + \mu^2(s_0)) = r^2\mu^2(s_0)$ şartlarını sağlayan (s_0, θ_0) 'da bir singüler noktaya sahiptir (Cui vd. 2009).

Örnek 3.1.2. $\alpha(s) = s$, $\sigma(s) = 0$ ve $\mu(s) = 0$ seçelim. Bu durumda, $M'_1(s) = sa_1(s)$ elde edilir. $a_1(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ olsun. O halde,

$$a_2(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$$a_3(s) = (0, 0, 1)$$

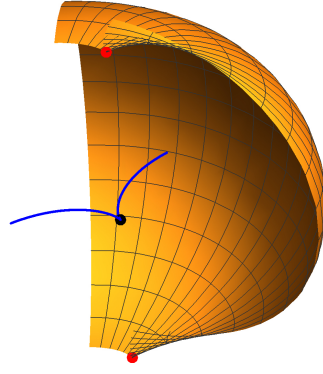
olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla $M'_1(s) = (s \cos s, s \sin s, 0)$ olarak bulunur. Buradan da integral alınıp integrasyon sabitleri 0 seçilirse

$$M_1(s) = (s \sin s + \cos s, -s \cos s + \sin s, 0)$$

şeklinde elde edilir. M_1 eğrisinin $s = 0$ 'da bir singüler noktası olduğu açıktır. O halde M_1 taban eğrisine sahip P_1 dairesel yüzeyi

$$P_1(s, \theta) = (s \sin s + \cos s - r \sin s \cos \theta, -s \cos s + \sin s + r \cos s \cos \theta, r \sin \theta)$$

denklemleri ile verilir. Durum 1 gereği P_1 dairesel yüzeyinin $(s_0, \theta_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ için ve $(s_1, \theta_1) = (0, \frac{3\pi}{2})$ için iki adet singüler noktasının olduğu söylenebilir. $r = 2$ için M_1 taban eğrisine sahip P_1 dairesel yüzeyi ve üzerindeki singüler noktalar şekil 3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3 M_1 taban eğrisine sahip P_1 dairesel yüzeyi ve singüler noktaları

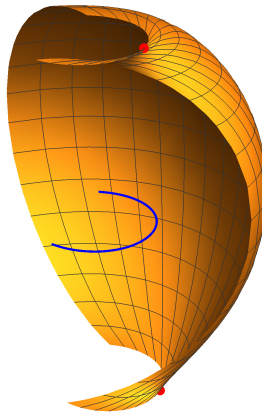
Diğer yandan, $\alpha(s) = s$, $\sigma(s) = 1$ ve $\mu(s) = 0$ seçelim. Bu durumda $M_2'(s) = sa_1(s) + a_2(s)$ eşitliğinde integral alınır ve integrasyon sabitleri 0 seçilirse

$$M_2(s) = (s \sin s, -s \cos s, 0)$$

elde edilir. Bu durumda M_2 taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi

$$P_2(s, \theta) = (s \sin s - r \sin s \cos \theta, -s \cos s + r \cos s \cos \theta, r \sin \theta)$$

biçiminde bulunur. Bu durumda yine Durum 1 gereği P_2 dairesel yüzeyinin $P_2(0, \pi/2)$ ve $P_2(0, 3\pi/2)$ singüler noktalarına sahip olduğu kolayca görülebilir. Ancak bu durumda M_2 taban eğrisi regülerdir. $r = 2$ için M_2 taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi şekil 3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Regüler M_2 taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi ve singüler noktaları

Örnek 3.1.3. $\alpha(s) = \sqrt{2}$, $\sigma(s) = 1$ ve $\mu(s) = -1$ seçelim. Bu durumda $M'_3(s) = \sqrt{2}a_1(s) + a_2(s) - a_3(s)$ bulunur. a_1, a_2 ve a_3 vektör alanları Örnek 3.1.2'deki gibi seçilirse,

$$M'_3(s) = (\sqrt{2} \cos s - \sin s, \sqrt{2} \sin s + \cos s, -1)$$

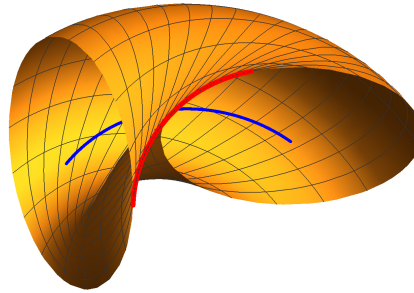
olur. O halde integral alınır ve integrasyon sabitleri 0 seçilirse

$$M_3(s) = (\sqrt{2} \sin s + \cos s, -\sqrt{2} \cos s + \sin s, -s)$$

elde edilir. $r = 2$ seçilerek, M_3 taban eğrisine sahip P_3 dairesel yüzeyinin denklemi

$$P_3(s, \theta) = (\sqrt{2} \sin s + \cos s - 2 \cos \theta \sin s, -\sqrt{2} \cos s + \sin s + 2 \cos \theta \cos s, -s + 2 \sin \theta)$$

biçiminde bulunur. Açıkça görülebilir ki $\theta = \pi/4$ ve $\forall s \in I$ için Durum 2 (ii) sağlanır. Bu durumda P_3 dairesel yüzeyi $\delta(s) = P(s, \theta_0) = (\cos s, \sin s, -s + \sqrt{2})$ striksiyon eğrisi boyunca singülerliğe sahiptir. Şekil 3.5'de P_3 dairesel yüzeyi ve bu yüzeyin δ striksiyon eğrisinin grafiği verilmiştir.



Şekil 3.5 M_3 taban eğrisine sahip P_3 dairesel yüzeyi ve δ striksiyon eğrisi (kırmızı)

3.1.3 Roller coaster yüzeyler

Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart regül noktalarında K Gauss eğriliğinin sıfır olmasıdır. Bu şart, regle yüzeyin tüm ana doğrularının umbilik ve singüler noktalar dışında eğrilik çizgisi olmasıyla denktir. Benzer biçimde, üreten çemberleri eğrilik çizgisi olan dairesel yüzeyler de çalışılmıştır (Izumiya vd. 2007). Bu bölümde, bu tip dairesel yüzeylerin sınıflandırılması küresel çatı kullanılarak daha basit bir şekilde yapılacaktır. Daha sonra bu yüzeylerin geometrik özellikleri

incelenecektir (Cui vd. 2009).

Bir $P(s, \theta)$ dairesel yüzeyinin tüm üreten çemberlerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $N_\theta(s, \theta) \parallel P_\theta(s, \theta)$ olmasıdır. Bu şart kullanılarak,

$$\begin{aligned} (r \cos \theta - \alpha)(\alpha \sigma \sin \theta - \alpha \mu \cos \theta + r \mu) &= 0 \\ \alpha \sigma \beta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \sin 2\theta - \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 \sin 2\theta - r \sigma \mu \cos \theta - r \mu^2 \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. O halde üç durum söz konusudur.

(i) $\alpha = \sigma = \mu = 0$ olsun. Bu durumda, $M' = 0$ olup, taban eğrisi sabit bir noktadır. O halde dairesel yüzey r yarıçaplı bir küredir.

(ii) $\sigma = \mu = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda, $M' = \alpha a_1$ elde edilir. Yani, M' teğet vektörü çember düzlemine diktir. O halde, dairesel yüzey bir kanal yüzeyi olur.

(iii) $\alpha = \mu = 0$ ve $\sigma \neq 0$ olsun. Bu durumda, $M' = \sigma a_2$ elde edilir. Eğer, σ bir sabit ise, bu durumda, M_0 bir sabit vektör olmak üzere

$$M = M_0 + \sigma a_1$$

yazılabilir. O halde, dairesel yüzeyin parametrik denklemi kullanılarak

$$\langle P - M_0, P - M_0 \rangle = \sigma^2 + r^2$$

bulunur. Dolayısıyla, çember üzerindeki tüm noktalar M_0 merkezli $\sqrt{\sigma^2 + r^2}$ yarıçaplı küre üzerindedir.

Diğer yandan, σ bir sabit olmasın. Bu durumda dairesel yüzey **roller coaster yüzey** olarak adlandırılır. Şimdi roller coaster yüzeylerin parametrik denklemini ve geometrik özelliklerini elde edelim. t , M taban eğrisinin yay parametresi ve $\{e, n, b\}$ de M eğrisi boyunca Frenet çatısı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = a_2 \\ n(t) &= \frac{\frac{de}{dt}}{\left\| \frac{de}{dt} \right\|} = \frac{-a_1 + \beta a_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} \\ b(t) &= e(t) \times n(t) = \frac{\beta a_1 + a_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Böylece, (3.37) eşitliklerinden önce

$$a_1 = \frac{-n + \beta b}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (3.38)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\cos \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}$ alınarak,

$$a_1 = -\sin \varphi n + \cos \varphi b \quad (3.39)$$

bulunur. Son eşitlik ile $a_2 = e$ olduğu göz önüne alınarak

$$a_3 = a_1 \times a_2 = \cos \varphi n + \sin \varphi b \quad (3.40)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, Frenet formülleri kullanılarak M taban eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sigma}, \quad \tau(t) = \frac{d\beta/ds}{\sigma(1 + \beta^2)} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

biçimindedir. Bu durumda,

$$P(s, \theta) = M(s) + r(\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3)$$

parametrik dairesel yüzey denkleminde, $a_2 = e$ eşitliği ve (3.40) denklemi yerine yazılırsa, dairesel yüzeyin t yay parametrelili denklemi,

$$R(t, \theta) = M(t) + r(\cos \theta e + \sin \theta (\cos \varphi n + \sin \varphi b)) \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir. Bu yüzeye bir **roller coaster yüzey** adı verilir (Izumiya vd 2007, Cui vd. 2009). Yukarıda incelenen durumlar göz önüne alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. P , üreten çemberleri umbilik ya da singüler noktalar dışında eğrilik çizgileri olan bir yüzey olsun. O halde, P yüzeyi bir küre, bir kanal yüzeyi ya da (3.41) ile gösterilen roller coaster yüzey parçasıdır. Burada $\varphi(t)$, M uzay eğrisinin ya da bu üç yüzeyle düzgün bağlantılı bir yüzeyin $\tau(t)$ torsiyonunun basit bir fonksiyonudur. t ile M eğrisinin yay uzunluğu parametresi gösterilmektedir. Roller coaster yüzeylerin tekil noktaları striksiyon eğrilerle çakışır (Izumiya vd 2007).

Şimdi bir roller coaster yüzeyin geometrik özelliklerini inceleyelim. (3.41) denkleminin, t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak

$$\begin{aligned} R_t &= (1 - r\kappa \sin \theta \cos \varphi)e + r\kappa \cos \theta n \\ R_\theta &= -r \sin \theta e + r \cos \theta \cos \varphi n + r \cos \theta \sin \varphi b \end{aligned} \quad (3.42)$$

Buradan, (3.41) denklemini ile verilen bir roller coaster yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle R_t, R_t \rangle = r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta + (1 - r\kappa \sin \theta \cos \varphi)^2 \\ F &= \langle R_t, R_\theta \rangle = -r \sin \theta + r^2 \kappa \cos \varphi \\ G &= \langle R_\theta, R_\theta \rangle = r^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

biçiminde hesaplanır. Diğer yandan, (3.42) eşitlikleri ile elde edilen vektörlerin vektörel çarpımıyla

$$\begin{aligned} (R_t \times R_\theta)(t, \theta) &= (r^2 \kappa \cos^2 \theta \sin \varphi)e + (r \cos \theta \sin \varphi)(-1 + r\kappa \sin \theta \cos \varphi)n \\ &\quad + r \cos \theta (\cos \varphi + r\kappa \sin \theta \sin^2 \varphi)b \end{aligned}$$

ve

$$\|(R_t \times R_\theta)(t, \theta)\| = r \cos \theta \sqrt{(r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi + 1)} \quad (3.44)$$

bulunur. O halde roller coaster yüzeyin birim normal vektörü

$$\begin{aligned} v(t, \theta) &= \frac{R_t \times R_\theta}{\|R_t \times R_\theta\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi}} (r\kappa \cos \theta \sin \varphi e + (-1 + r\kappa \sin \theta \cos \varphi) \sin \varphi n \\ &\quad + (\cos \varphi + r\kappa \sin \theta \sin^2 \varphi) b) \end{aligned} \quad (3.45)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, yüzeyin ikinci mertebeden türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} R_{tt} &= (-r\kappa' \sin \theta \cos \varphi - \tau r\kappa \sin \theta \sin \varphi - r\kappa^2 \cos \theta) e \\ &\quad + (\kappa - r\kappa^2 \sin \theta \cos \varphi + r\kappa' \cos \theta) n + (r\tau \kappa \cos \theta) b \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$R_{t\theta} = -r\kappa \cos \theta \cos \varphi e - r\kappa \sin \theta n \quad (3.47)$$

$$R_{\theta\theta} = -r \cos \theta e - r \sin \theta \cos \varphi n - r \sin \theta \sin \varphi b \quad (3.48)$$

ifadelerine ulaşılır. Bu ifadeler yardımıyla, bir roller coaster yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
e &= \langle R_{tt}, v \rangle = -[\kappa \sin \varphi - r(\kappa(\kappa \sin \theta \sin 2\varphi + \cos \theta \cos \varphi \tau) + \kappa' \cos \theta \sin \varphi \\
&\quad + r^2 \kappa^3 \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi))] (1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \\
f &= \langle R_{t\theta}, v \rangle = [r\kappa \sin \varphi (-r\kappa \cos \varphi + \sin \theta)] (1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \\
g &= \langle R_{\theta\theta}, v \rangle = -r^2 \kappa \sin \varphi (1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 3.1.4 (Roller coaster yüzeyin striksiyon eğrisi). Bir $R(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi üzerindeki

$$\delta(t) = M(t) + r(\cos \theta(t) e + \sin \theta(t) (\cos \varphi n + \sin \varphi b))$$

eğrisi

$$\langle \delta'(t), \cos \theta(t) e + \sin \theta(t) (\cos \varphi n + \sin \varphi b) \rangle = 0 \tag{3.50}$$

şartını sağlıyorsa bu eğriye bir **striksiyon eğrisi** denir.

Bu durumda $\delta(t)$ eğrisinin t parametresine göre türevi alınarak

$$\begin{aligned}
\delta'(t) &= (1 - r\theta' \sin \theta - r\kappa \sin \theta \cos \varphi) e \\
&\quad + (r\kappa \cos \theta + r\theta' \cos \theta \cos \varphi - r\varphi' \sin \theta \sin \varphi - r\tau \sin \theta \sin \varphi) n \\
&\quad + (r\theta' \cos \theta \sin \varphi + r\tau \sin \theta \cos \varphi + r\varphi' \sin \theta \cos \varphi) b
\end{aligned}$$

ve burada da $\varphi' = -\tau$ yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
\delta'(t) &= (1 - r\theta' \sin \theta - r\kappa \sin \theta \cos \varphi) e + (r\kappa \cos \theta + r\theta' \cos \theta \cos \varphi) n \\
&\quad + (r\theta' \cos \theta \sin \varphi) b
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (3.50) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= 0 \\
\theta &= \pm \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

şartı elde edilir. O halde roller coaster yüzeyin striksiyon eğrileri

$\delta_1(t) = M(t) + r(\cos \varphi n + \sin \varphi b)$ ve $\delta_2(t) = M(t) - r(\cos \varphi n + \sin \varphi b)$ biçimindedir.

Teorem 3.1.2. Bir $R(t, \theta)$ roller coaster yüzeyinin (t_0, θ_0) 'da singüler noktasının olması için gerek ve yeter şart

$$\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

olmasıdır.

İspat. R roller coaster yüzeyinin (t_0, θ_0) 'da singüler noktasının olması için gerek ve yeter şartın $\|R_t \times R_\theta\|(t_0, \theta_0) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda (3.44) denkleminde kolayca görülebildiği üzere

$$\|R_t \times R_\theta\|(t_0, \theta_0) = r \cos \theta_0 (r^2 \kappa^2(t_0) \sin^2 \varphi(t_0) + 1)^{\frac{1}{2}} = 0$$

olmalıdır. Bu ifadenin gerçekleşmesi için de

$$\cos \theta_0 = 0$$

sağlanmalıdır. Bu ise

$$\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

olmasını gerektirir. Yani, roller coaster yüzeyin singüler noktalarının geometrik yeri $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ değerlerine karşılık gelen t -parametre eğrileridir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.1.1. Bir roller coaster yüzeyin singüler noktalarının geometrik yeri yüzeyin striksiyon eğrileridir.

Teorem 3.1.3. Bir $R(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi için aşağıdakiler gerçekleşir (Izumiya vd. 2007).

1. λ_1 ve λ_2 asli eğrilikleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\kappa \sin \varphi}{(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda_2 &= \frac{-r^2 \kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + r\kappa' \sin \varphi}{(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.51)$$

2. K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki gibi verilir:

$$K = \frac{\kappa \sin \varphi (r^2 \kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + \kappa (\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + r\kappa' \sin \varphi)}{(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \theta} \quad (3.52)$$

$$H = -\frac{2r^2 \kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + \kappa (\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + r\kappa' \sin \varphi}{2(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \quad (3.53)$$

3. Flat roller coaster yüzeyler düzlemlerin alt cümlesidir.

4. Minimal roller coaster yüzeyler düzlemlerin alt cümlesidir.

5. $(\theta = -\pi/2)$ ve $(\theta = \pi/2)$ değerlerine karşılık gelen striksiyon eğrilerinin, sırasıyla eğrilikleri k_1, k_2 ve torsiyonları τ_1, τ_2 aşağıdaki gibi verilir:

$$k_1 = \frac{\kappa}{|1 + r\kappa \cos \varphi|}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{|1 + r\kappa \cos \varphi|}$$

$$k_2 = \frac{\kappa}{|1 - r\kappa \cos \varphi|}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{|1 - r\kappa \cos \varphi|}$$

Burada, κ ile τ sırasıyla, M eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

İspat. Bir yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanabilir, (Sabuncuoğlu 2004). O halde (3.43) ve (3.49) denklemlerinden aşağıdaki hesaplamalar kolayca yapılır:

$$EG - F^2 = r^2 \cos^2 \theta (r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi + 1)$$

$$eg - f^2 = [r^2 \kappa \cos \theta \sin \varphi (\kappa \sin \varphi \cos \theta - r\tau \kappa \cos \varphi + r^2 \kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + r\kappa' \sin \varphi)]$$

$$[1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}}$$

Böylece, yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{\kappa \sin \varphi (r^2 \kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + \kappa (\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + r\kappa' \sin \varphi)}{(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \theta}$$

biçiminde hesaplanır. Diğer yandan, tekrar (3.43) ve (3.49) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
eG &= -r^2\kappa \sin \varphi + 2r^3\kappa^2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - r^4\kappa^3 \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \\
&\quad - r^3\kappa' \sin \varphi \cos \theta + r^3\tau\kappa \cos \theta \cos \varphi \\
fF &= -r^2\kappa \sin \theta \sin \varphi + 2r^3\kappa^2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - r^4\kappa^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \\
Eg &= -r^4\kappa^3 \sin \varphi \cos^2 \theta - r^2\kappa \sin \varphi - r^4\kappa^3 \sin \varphi \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 2r^3\kappa^2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}
eG - 2fF + Eg &= [-r^2 \cos \theta (2\kappa \sin \varphi \cos \theta + 2r^2\kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta - r\tau\kappa \cos \varphi \\
&\quad + r\kappa' \sin \varphi)] \times [1 + r^2\kappa^2 \sin^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece yüzeyin H ortalama eğriliği

$$H = -\frac{2r^2\kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + r\kappa' \sin \varphi}{2(1 + r^2\kappa^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}$$

biçiminde hesaplanır. Dolayısıyla (2) ispatlanmış olur.

Roller coaster yüzeyin üreten çemberleri eğrilik çizgisi olduğundan eğriliklerden biri,

$$\lambda_1 = \frac{g}{G} = \frac{[-r^2\kappa \sin \varphi][1 + r^2\kappa^2 \sin^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}}}{r^2} = \frac{-\kappa \sin \varphi}{(1 + r^2\kappa^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

olup, aynı zamanda

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

gerçeği kullanılarak

$$\lambda_2 = \frac{-r^2\kappa^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + r\kappa' \sin \varphi}{(1 + r^2\kappa^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}$$

elde edilir. O halde (1) ispatlanmış olur.

(3) şikkını ispatlamak için, R yüzeyinin flat yüzey olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\tilde{K}(t, \theta) = r^2k^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + k(\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + rk' \sin \varphi \equiv 0$$

yazılabilir. O halde $\tilde{K}(t, \theta) + \tilde{K}_{\theta\theta}(t, \theta) = 0$ şartı kullanılarak, $k\tau \cos \varphi - k' \sin \varphi = 0$ elde edilir. Bu ise, $k' \equiv \tau \equiv 0$ olması demektir. O halde (3.52) denkleminde

$\sin \varphi = 0$ elde edilir. O halde, bu şartları sağlayan bir roller coaster yüzeyin bir düzlem parçası olduğu kolayca görülebilir.

(4) şıkkı (3) şıkkına benzer yöntemle ispatlanabilir.

Şimdi (5) şıkkını ispatlayalım. $\theta = \pm\pi/2$ değerlerine karşılık gelen striksiyon eğrilerinin $\delta(t) = M(t) \pm r(\cos \varphi n + \sin \varphi b)$ olduğunu göstermiştik. Bu durumda basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}\delta'(t) &= (1 \pm r\kappa \cos \varphi)e \\ \delta''(t) &= (\pm r\kappa' \cos \varphi \pm r\tau\kappa \sin \varphi)e + (\kappa \pm r\kappa^2 \cos \varphi)n \\ \delta'(s) \times \delta''(s) &= \kappa(1 \pm r\kappa \cos \varphi)^2 b\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|\delta'(t) \times \delta''(t)\|}{\|\delta'(t)\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \delta'(t) \times \delta''(t), \delta'''(t) \rangle}{\|\delta'(t) \times \delta''(t)\|^2}\end{aligned}$$

formülleri kullanılarak eğrilikler ve burulmalar kolayca hesaplanabilir. \square

3.2 Alternatif Çatı ile Türetilen Roller Coaster Yüzeyler

Bu bölümde, taban eğrisi bir uzay eğrisinin doğrultu eğrileri olan roller coaster yüzeyler incelenecektir. Bu tür roller coaster yüzeyler oluşturulurken özellikle Uzunoğlu vd. tarafından 2016 yılında bir çalışmada tanımlanan $\{n, c, w\}$ alternatif çatısı kullanılacaktır. Elde edilen yüzeylerin bazı geometrik özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 3.2.1 (Frenet Eğrisi). Birim hızlı bir γ eğrisi için, aşağıdaki şartı sağlayan bir V vektör alanı varsa, bu eğriye bir **Frenet eğrisi** denir.

$$V(t) = u(t)e(t) + v(t)n(t) + w(t)b(t), \quad u^2(t) + v^2(t) + w^2(t) = 1$$

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun. Böylece, I aralığında yukarıdaki şekilde tanımlı V vektör alanına teğet olan eğri birim hızlı bir eğridir. Bu eğriye **V -doğrultu eğrisi** denir (Choi vd 2012).

Tanım 3.2.2 (Asli doğrultu eğrisi). Birim hızlı bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ verilsin. γ eğrisinin normal vektör alanına teğet olan bir $\bar{\gamma}(t)$ eğrisine, $\gamma(t)$ eğrisinin **asli doğrultu eğrisi** denir. Bu durumda $\bar{\gamma}(t) = \int n(t)dt$ yazılır (Choi vd. 2012).

Tanım 3.2.3 (c -doğrultu eğrisi). Birim hızlı bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ verilsin ve $\{n, c, w\}$ da bu eğri boyunca alternatif çatı olsun. c vektör alanına teğet olan bir $\hat{\gamma}(t)$ eğrisine $\gamma(t)$ eğrisinin **c -doğrultu eğrisi** denir. Bu durumda $\hat{\gamma}(t) = \int c(t)dt$ yazılabilir (Özdoğan vd. 2018).

Tanım 3.2.4 (w -doğrultu eğrisi). Birim hızlı bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ve bu eğri boyunca $\{n, c, w\}$ çatısı verilsin. γ eğrisinin Darboux vektör alanına teğet olan bir eğri $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisine, $\gamma(t)$ eğrisinin **w -doğrultu eğrisi** denir. O halde $\tilde{\gamma}(t) = \int w(t)dt$ yazılabilir (Macit ve Döldül 2014).

Şimdi, taban eğrisi bir eğrinin doğrultu eğrisi olan roller coaster yüzeyleri tanımlayalım. Bir roller coaster yüzeyin parametrik denklemi taban eğrisinin teğet, normal ve binormal vektörleri ile yazıldığından dolayı, oluşturacağımız yeni yüzeyler de taban eğrilerinin Frenet vektörleri cinsinden yazılmalıdır. Kolayca görülebilir ki bir eğrinin asli doğrultu ve w -doğrultu eğrilerinin Frenet vektörleri asıl eğrinin $\{n, c, w\}$ çatısı ile kolayca ifade edilebilmektedir. Ayrıca c -doğrultu eğrisinin Frenet elemanları da $\{c, \xi = \frac{c'}{\|c'\|}, c \times \xi = d, l, m\}$ biçiminde bulunur. O halde taban eğrisi, sırasıyla, asli doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$, c -doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ ve w -doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olan roller coaster yüzeyler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{R}(t, \theta) = \bar{\gamma}(t) + r(\cos \theta n(t) + \sin \theta(\cos \bar{\varphi}(t)c(t) + \sin \bar{\varphi}(t)w(t))), \quad (3.54)$$

$$\hat{R}(t, \theta) = \hat{\gamma}(t) + r(\cos \theta c(t) + \sin \theta(\cos \hat{\varphi}(t)\xi(t) + \sin \hat{\varphi}(t)d(t))) \quad (3.55)$$

$$\tilde{R}(t, \theta) = \tilde{\gamma}(t) + r(\cos \theta w(t) + \sin \theta(\cos \tilde{\varphi}(t)n(t) + \sin \tilde{\varphi}(t)c(t))) \quad (3.56)$$

burada, $\bar{\varphi}' = -g$, $\hat{\varphi}' = -m$ ve $\tilde{\varphi}' = -f$ eşitlikleri sağlanır.

Bu yüzeylerin bazı geometrik özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.1. (3.54) denklemi ile verilen $\bar{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi için aşağıdakiler sağlanır:

1. λ_1 ve λ_2 asli eğrilikleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-f \sin \varphi}{(1 + r^2 f^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda_2 &= \frac{-r^2 f^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + f(\sin \varphi \cos \theta - r g \cos \varphi) + r f' \sin \varphi}{(1 + r^2 f^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}\end{aligned}\quad (3.57)$$

2. K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki gibi verilir.

$$K = \frac{f \sin \varphi (r^2 f^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + f(\sin \varphi \cos \theta - r g \cos \varphi) + r f' \sin \varphi)}{(1 + r^2 f^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \theta} \quad (3.58)$$

$$H = -\frac{2r^2 f^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + f(\sin \varphi \cos \theta - r g \cos \varphi) + r f' \sin \varphi}{2(1 + r^2 f^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \quad (3.59)$$

3. $\bar{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir dik dairesel helis olmasıdır.
4. $\bar{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir dik dairesel helis olmasıdır.

İspat. (3.54) denklemi ile verilen $\bar{R}(t, \theta)$ yüzeyinin t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak

$$\begin{aligned}\bar{R}_t &= (1 - r f \sin \theta \cos \bar{\varphi})n + (r f \cos \theta)c \\ \bar{R}_\theta &= -r \sin \theta n + r \cos \theta \cos \bar{\varphi}c + r \cos \theta \sin \bar{\varphi}w\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}(\bar{R}_t \times \bar{R}_\theta)(t, \theta) &= r \cos \theta (r f \cos \theta \sin \bar{\varphi} n + (-1 + r f \sin \theta \cos \bar{\varphi}) \sin \bar{\varphi} c \\ &\quad + (\cos \bar{\varphi} + r f \sin \theta \sin^2 \bar{\varphi}) w)\end{aligned}\quad (3.60)$$

elde edilir. Böylece,

$$\|\bar{R}_t \times \bar{R}_\theta\| = r \cos \theta (r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi} + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.61)$$

olur. Bu durumda, yüzeyin birim normali

$$v(t, \theta) = \frac{\bar{R}_t \times \bar{R}_\theta}{\|\bar{R}_t \times \bar{R}_\theta\|} \quad (3.62)$$

$$= (rf \cos \theta \sin \bar{\varphi} n + (-1 + rf \sin \theta \cos \bar{\varphi}) \sin \bar{\varphi} c + (\cos \bar{\varphi} + rf \sin \theta \sin^2 \bar{\varphi}) w)(1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

biçiminde bulunur. Böylece, yüzeyin birinci temel form katsayıları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} E &= \langle \bar{R}_t, \bar{R}_t \rangle = r^2 f^2 \cos^2 \theta + (1 - rf \sin \theta \cos \bar{\varphi})^2 \\ F &= \langle \bar{R}_t, \bar{R}_\theta \rangle = -r \sin \theta + r^2 f \cos \bar{\varphi} \\ G &= \langle \bar{R}_\theta, \bar{R}_\theta \rangle = r^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Diğer yandan, ikinci mertebeden kısmi türevler hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}_{tt} &= (-rf' \sin \theta \cos \bar{\varphi} - grf \sin \theta \sin \bar{\varphi} - rf^2 \cos \theta) n \\ &\quad + (f - rf^2 \sin \theta \cos \bar{\varphi} + rf' \cos \theta) c + (rfg \cos \theta) w \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\bar{R}_{t\theta} = -rf \cos \theta \cos \bar{\varphi} n - rf \sin \theta c \quad (3.66)$$

$$\bar{R}_{\theta\theta} = -r \cos \theta n - r \sin \theta \cos \bar{\varphi} c - r \sin \theta \sin \bar{\varphi} w \quad (3.67)$$

eşitlikleri ve bunların yardımıyla yüzeyin ikinci temel form katsayıları ise şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} e &= \langle \bar{R}_{tt}, v \rangle = -[f \sin \bar{\varphi} - r(f(f \sin \theta \sin 2\bar{\varphi} + \cos \theta \cos \bar{\varphi}g) + f' \cos \theta \sin \bar{\varphi} \\ &\quad + r^2 f^3 \sin \bar{\varphi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \bar{\varphi})][1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi}]^{-\frac{1}{2}} \\ f &= \langle \bar{R}_{t\theta}, v \rangle = [rf \sin \bar{\varphi} (-rf \cos \bar{\varphi} + \sin \theta)][1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi}]^{-\frac{1}{2}} \\ g &= \langle \bar{R}_{\theta\theta}, v \rangle = [-r^2 f \sin \bar{\varphi}][1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi}]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dahası, birinci ve ikinci temel form katsayıları kullanılarak \bar{P} yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{f \sin \bar{\varphi} (r^2 f^3 \sin^3 \bar{\varphi} \cos \theta + f(\sin \bar{\varphi} \cos \theta - rg \cos \bar{\varphi}) + rf' \sin \bar{\varphi})}{(1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi})^2 \cos \theta} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\ &= - \frac{2r^2 f^3 \sin^3 \bar{\varphi} \cos \theta + f(\sin \bar{\varphi} \cos \theta - rg \cos \bar{\varphi}) + r f' \sin \bar{\varphi}}{2(1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Dolayısıyla, (2) ispatlanmış olur.

Roller coaster yüzeyde üreten çemberler eğrilik çizgisi olduğundan asli eğriliklerden biri,

$$\lambda_1 = \frac{g}{G} = \frac{[-r^2 f \sin \bar{\varphi}][1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi}]^{-\frac{1}{2}}}{r^2} = \frac{-f \sin \bar{\varphi}}{(1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{\frac{1}{2}}}$$

olup,

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

ifadesi kullanılarak,

$$\lambda_2 = \frac{-r^2 f^3 \sin^3 \bar{\varphi} \cos \theta + f(\sin \bar{\varphi} \cos \theta - rg \cos \bar{\varphi}) + r f' \sin \bar{\varphi}}{(1 + r^2 f^2 \sin^2 \bar{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta}$$

bulunur. O halde (1) ispatlanmış olur.

\bar{R} yüzeyinin flat yüzey olması için gerek ve yeter şart Gauss eğriliklerinin sıfıra eşit olması, yani

$$\tilde{K}(t, \theta) = r^2 f^3 \sin^3 \bar{\varphi} \cos \theta + f(\sin \bar{\varphi} \cos \theta - rg \cos \bar{\varphi}) + r f' \sin \bar{\varphi} \equiv 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Diğer yandan $\tilde{K}(t, \theta) + (\partial^2 / \partial \theta^2) \tilde{K}(t, \theta) = 0$ olduğundan, $f g \cos \bar{\varphi} - f' \sin \bar{\varphi} = 0$ elde edilir. Bu ise, $f' \equiv g \equiv 0$ olmasını gerektirir. Bu iki özdeşliğin sağlanması için κ ve τ eğriliklerinin sabit olması gerekmektedir. Bu da γ eğrisinin dik dairesel helis olması anlamına gelir. Dolayısıyla (3) ispatlanmış olur.

(4) benzer yöntemle ispatlanır. □

Şimdi, $\bar{\gamma}(t)$ asli doğrultu eğrisi tarafından üretilen roller coaster yüzeyi üzerindeki bir eğrinin striksiyon eğri olma şartını inceleyelim. $\bar{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi üzerinde alınan

$$\delta(t) = \bar{\gamma}(t) + r(\cos \theta(t)n + \sin \theta(t)(\cos \bar{\varphi}(t)c + \sin \bar{\varphi}(t)w))$$

eğrisinin bir striksiyon eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\langle \delta'(t), \cos \theta(t)n + \sin \theta(t)(\cos \bar{\varphi}(t)c + \sin \bar{\varphi}(t)w) \rangle = 0$$

olmasıdır. $\bar{\varphi}' = -g$ ifadesi kullanılarak kolayca görülebilir ki

$$\begin{aligned} \delta'(t) = & (1 - r\theta' \sin \theta - rf \sin \theta \cos \bar{\varphi})n + (rf \cos \theta + r\theta' \cos \theta \cos \bar{\varphi})c \\ & + (r\theta' \cos \theta \sin \bar{\varphi})w \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu ifade bir önceki denklemde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında \bar{R} roller coaster yüzeyinin striksiyon eğrilerinin

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

değerlerindeki $\delta_1(t) = \bar{\gamma}(t) + r(\cos \bar{\varphi}(t)c + \sin \bar{\varphi}(t)w)$ ve $\delta_2(t) = \bar{\gamma}(t) - r(\cos \bar{\varphi}(t)c + \sin \bar{\varphi}(t)w)$ t -parametre eğrileri olduğu görülmektedir.

Teorem 3.2.2. (3.55) denklemi ile verilen $\hat{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi için aşağıdakiler sağlanır:

1. λ_1 ve λ_2 asli eğrilikleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-l \sin \hat{\varphi}}{(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda_2 &= \frac{-r^2 l^3 \sin^3 \hat{\varphi} \cos \theta + l(\sin \hat{\varphi} \cos \theta - rg \cos \hat{\varphi}) + r l' \sin \hat{\varphi}}{(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.69)$$

2. K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki gibi verilir:

$$K = \frac{l \sin \hat{\varphi}(r^2 l^3 \sin^3 \hat{\varphi} \cos \theta + l(\sin \hat{\varphi} \cos \theta - rm \cos \hat{\varphi}) + r l' \sin \hat{\varphi})}{(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^2 \cos \theta} \quad (3.70)$$

$$H = -\frac{2r^2 l^3 \sin^3 \hat{\varphi} \cos \theta + l(\sin \hat{\varphi} \cos \theta - rm \cos \hat{\varphi}) + r l' \sin \hat{\varphi}}{2(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \quad (3.71)$$

3. $\hat{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin f ve g sabit olacak şekilde bir slant helis olmasıdır.
4. $\hat{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin f ve g sabit olacak şekilde bir slant helis olmasıdır.

İspat. γ eğrisinin c -doğrultu eğrisi tarafından üretilen \hat{R} roller coaster yüzeyinin t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\hat{R}_t &= (1 - rl \sin \theta \cos \hat{\varphi})c + (rl \cos \theta)\xi \\ \hat{R}_\theta &= -r \sin \theta c + r \cos \theta \cos \hat{\varphi} \xi + r \cos \theta \sin \hat{\varphi} d\end{aligned}$$

olup, bu ifadelerin vektörel çarpımıyla

$$\begin{aligned}\hat{R}_t \times \hat{R}_\theta(t, \theta) &= r \cos \theta (rl \cos \theta \sin \hat{\varphi} c + (-1 + rl \sin \theta \cos \hat{\varphi}) \sin \hat{\varphi} \xi \\ &\quad + (\cos \hat{\varphi} + rl \sin \theta \sin^2 \hat{\varphi}) d)\end{aligned}\tag{3.72}$$

elde edilir. O halde, norm alınarak

$$\|\hat{R}_t \times \hat{R}_\theta\| = r \cos \theta (r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi} + 1)^{\frac{1}{2}}\tag{3.73}$$

bulunur. Bu durumda, yüzeyin birim normali şu şekilde hesaplanır:

$$v(t, \theta) = \frac{\hat{R}_t \times \hat{R}_\theta}{\|\hat{R}_t \times \hat{R}_\theta\|}\tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}&= (rl \cos \theta \sin \hat{\varphi} c + (-1 + rl \sin \theta \cos \hat{\varphi}) \sin \hat{\varphi} \xi \\ &\quad + (\cos \hat{\varphi} + rl \sin \theta \sin^2 \hat{\varphi}) d)(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{3.75}$$

Ayrıca, \hat{R} roller coaster yüzeyinin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\hat{R}_{tt} &= (-rl' \sin \theta \cos \hat{\varphi} - mrl \sin \theta \sin \hat{\varphi} - rl^2 \cos \theta)c \\ &\quad + (l - rl^2 \sin \theta \cos \hat{\varphi} + rl' \cos \theta)\xi + (rlm \cos \theta)d\end{aligned}\tag{3.76}$$

$$\hat{R}_{t\theta} = -rl \cos \theta \cos \hat{\varphi} c - rl \sin \theta \xi\tag{3.77}$$

$$\hat{R}_{\theta\theta} = -r \cos \theta c - r \sin \theta \cos \hat{\varphi} \xi - r \sin \theta \sin \hat{\varphi} d\tag{3.78}$$

biçiminde hesaplanır. O halde, birinci mertebeden kısmi türevler kullanılarak yüzeyin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle \hat{R}_t, \hat{R}_t \rangle = r^2 l^2 \cos^2 \theta + (1 - r l \sin \theta \cos \hat{\varphi})^2 \\ F &= \langle \hat{R}_t, \hat{R}_\theta \rangle = -r \sin \theta + r^2 l \cos \hat{\varphi} \\ G &= \langle \hat{R}_\theta, \hat{R}_\theta \rangle = r^2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan, birim normal vektör ve ikinci mertebeden kısmi türevler kullanılarak ikinci temel form katsayıları ise şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} e &= \langle \hat{R}_{tt}, v \rangle = -[l \sin \hat{\varphi} - r(l(l \sin \theta \sin 2\hat{\varphi} + \cos \theta \cos \hat{\varphi} m) + l' \cos \theta \sin \hat{\varphi} \\ &\quad + r^2 l^3 \sin \hat{\varphi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \hat{\varphi})][1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi}]^{-\frac{1}{2}} \\ f &= \langle \hat{R}_{t\theta}, v \rangle = [r l \sin \hat{\varphi} (-r l \cos \hat{\varphi} + \sin \theta)][1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi}]^{-\frac{1}{2}} \\ g &= \langle \hat{R}_{\theta\theta}, v \rangle = [-r^2 l \sin \hat{\varphi}][1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi}]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

O halde, yukarıda elde edilen birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{l \sin \hat{\varphi} (r^2 l^3 \sin^3 \hat{\varphi} \cos \theta + l(\sin \hat{\varphi} \cos \theta - r m \cos \hat{\varphi}) + r l' \sin \hat{\varphi})}{(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^2 \cos \theta} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\ &= -\frac{2r^2 l^3 \sin^3 \hat{\varphi} \cos \theta + l(\sin \hat{\varphi} \cos \theta - r m \cos \hat{\varphi}) + r l' \sin \hat{\varphi}}{2(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde (2) ispatlanmış olur.

Roller coaster yüzeyin üreten çemberleri eğrilik çizgisi olduğundan asli eğriliklerden biri

$$\lambda_1 = \frac{g}{G} = \frac{[-r^2 l \sin \hat{\varphi}][1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi}]^{-\frac{1}{2}}}{r^2} = \frac{-l \sin \hat{\varphi}}{(1 + r^2 l^2 \sin^2 \hat{\varphi})^{\frac{1}{2}}}$$

olup,

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

ifadesi kullanılarak

$$\lambda_2 = \frac{-r^2 l^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + l(\sin \varphi \cos \theta - rm \cos \varphi) + rl' \sin \varphi}{(1 + r^2 l^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}$$

elde edilir ki bu da (1) seçeneğini ispatlar.

\hat{R} roller coaster yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart

$$\tilde{K}(t, \theta) = r^2 l^3 \sin^3 \hat{\varphi} \cos \theta + l(\sin \hat{\varphi} \cos \theta - rm \cos \hat{\varphi}) + rl' \sin \hat{\varphi} \equiv 0$$

olmasıdır. Ayrıca $\tilde{K}(t, \theta) + (\partial^2 / \partial \theta^2) \tilde{K}(t, \theta) = 0$ sağlandığından, $lm \cos \hat{\varphi} - l' \sin \hat{\varphi} = 0$ elde edilir. Bu ise, $l' \equiv m \equiv 0$ olması anlamına gelir. Böylece, $\Gamma = \frac{\sigma'}{f(1 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ olup, γ eğrisi f ve g sabit olacak şekilde bir slant helistir.

(4) benzer yöntemle ispatlanır. □

Şimdi, $\hat{\gamma}$ c -doğrultu eğrisi tarafından üretilen roller coaster yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrilerini karakterize edelim. \hat{R} roller coaster yüzeyi üzerindeki bir

$$\delta(t) = \hat{\gamma}(t) + r(\cos \theta(t) c + \sin \theta(t)(\cos \hat{\varphi}(t) \xi + \sin \hat{\varphi}(t) d))$$

eğrisinin striksiyon eğrisi olabilmesi için δ aşağıdaki şartı sağlamalıdır:

$$\langle \delta'(t), \cos \theta(t) c + \sin \theta(t)(\cos \hat{\varphi}(t) \xi + \sin \hat{\varphi}(t) d) \rangle = 0$$

O halde, δ eğrisinin bir striksiyon eğrisi olması için

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

olmalıdır. Bu durumda yüzeyin striksiyon eğrileri

$$\delta_1(t) = \hat{\gamma}(t) + r(\cos \hat{\varphi}(t) \xi + \sin \hat{\varphi}(t) d)$$

ve

$$\delta_2(t) = \hat{\gamma}(t) - r(\cos \hat{\varphi}(t) \xi + \sin \hat{\varphi}(t) d)$$

t -parametre eğrileridir.

Teorem 3.2.3. (3.56) denklemi ile verilen $\tilde{R}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi için aşağıdakiler sağlanır:

1. λ_1 ve λ_2 asli eğrilikleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-g \cos \tilde{\varphi}}{(1 + r^2 g^2 \cos^2 \tilde{\varphi})^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda_2 &= \frac{-r^2 g^3 \cos^3 \tilde{\varphi} \cos \theta + g(\cos \tilde{\varphi} \cos \theta - r f \sin \tilde{\varphi}) + r g' \cos \tilde{\varphi}}{(1 + r^2 g^2 \cos^2 \tilde{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta}\end{aligned}\quad (3.81)$$

2. K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki gibi verilir:

$$K = \frac{g \cos \tilde{\varphi} (r^2 g^3 \cos^3 \tilde{\varphi} \cos \theta + g(\cos \tilde{\varphi} \cos \theta + r f \sin \tilde{\varphi}) + r g' \cos \tilde{\varphi})}{(1 + r^2 g^2 \cos^2 \tilde{\varphi})^2 \cos \theta}\quad (3.82)$$

$$H = -\frac{2r^2 g^3 \cos^3 \tilde{\varphi} \cos \theta + g(\cos \tilde{\varphi} \cos \theta - r f \sin \tilde{\varphi}) + r g' \cos \tilde{\varphi}}{2(1 + r^2 g^2 \cos^2 \tilde{\varphi})^{\frac{3}{2}} \cos \theta}\quad (3.83)$$

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2'ye benzer olarak kolayca yapılabilir. □

Yukarıda \bar{R} ve \hat{R} roller coaster yüzeylerine benzer olarak kolayca görülebilir ki, \tilde{R} yüzeyi üzerindeki striksiyon eğrileri $\theta = \pm\pi/2$ değerlerine karşılık gelen parametre eğrileridir.

3.3 Dairesel Yüzeylerin Kuaterniyonik Gösterimleri

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında dairesel yüzeylerin ve roller coaster yüzeylerin parametrik denklemleri kuaterniyon çarpımı ya da homotetik hareketler cinsinden yeniden verilecektir.

Teorem 3.3.1. 3-boyutlu Öklid uzayında bir $M(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisi ve bu eğri boyunca bir $\{a_1, a_2, a_3 = a_1 \times a_2\}$ çatısı verilsin. $P_{(M, a_2, a_3, r)}(s, \theta)$, M taban eğrisine sahip dairesel yüzey olsun. O halde $P_{(M, a_2, a_3, r)}(s, \theta)$ dairesel yüzeyi

(i) reel birim kuaterniyonlar yardımıyla

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta) = M(s) + r(s)q_{a_1} * a_2 \quad (3.84)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta) = M(s) + r(s)\mathbf{M}_{a_1}(s, \theta)a_2 \quad (3.85)$$

şeklinde verilir. Burada, $q_{a_1}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta a_1$ ve \mathbf{M}_{a_1} , $q_{a_1}(s, \theta)$ birim kuaterniyonu için ϕ dönüşümünün (2.7) denklemi ile verilen matris gösterimidir.

İspat. $P_{(M,a_2,a_3,r)}$, M taban eğrisi ile verilen bir dairesel yüzey olsun. O halde, dairesel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(s, \theta) = P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta) = M(s) + r(s)(\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)) \quad (3.86)$$

ile verilir. $q_{a_1}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta a_1$ birim kuaterniyonu ve $a_2(s)$ pür kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımı uygulanarak, $q_{a_1}(s, \theta) * a_2(s) = \cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)$ elde edilir. Son eşitlik, (3.86) denkleminde yerine yazılırsa (3.84) denklemi elde edilir. Diğer yandan $M(s)$, $r(s)$ ve M_{a_1} sırasıyla öteleme vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, (3.85) eşitliği homotetik hareket olarak bulunur. \square

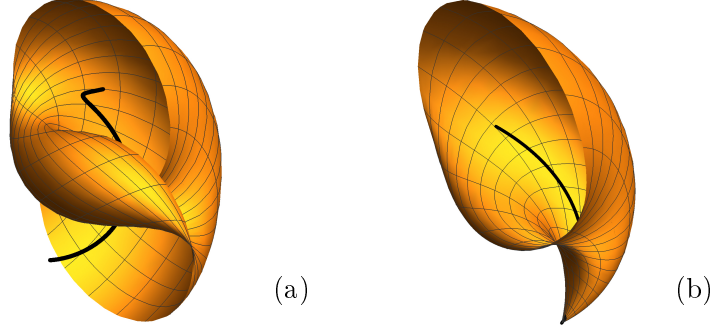
Örnek 3.3.1.

$$M(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} s \right)$$

helis eğrisini ele alalım. $u(s) = (0, \cos s, \sin s)$ olmak üzere $q_u(s, \theta) = \cos \theta + u(s) \sin \theta$ birim kuaterniyonu alınsın. Ayrıca $u(s)$ vektörüne dik olan bir $v(s) = (1, 0, 0)$ birim vektörü seçilsin. O halde, (3.84) eşitliği kullanılarak M taban eğrisine sahip bir dairesel yüzey aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} P_1(s, \theta) &= M(s) + r(s)q_u(s, \theta) * v \\ &= M(s) + r(s)(\cos \theta v + (u \times v) \sin \theta) \\ &= \left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}} + r(s) \cos \theta, \frac{\sin s}{\sqrt{2}} + r(s) \sin \theta \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}} - r(s) \sin \theta \cos s \right) \end{aligned}$$

Bu denklemde, $r(s) = 2$ ve $r(s) = \frac{s}{2}$ için elde edilen dairesel yüzeyler şekil 3.6'da verilmiştir.



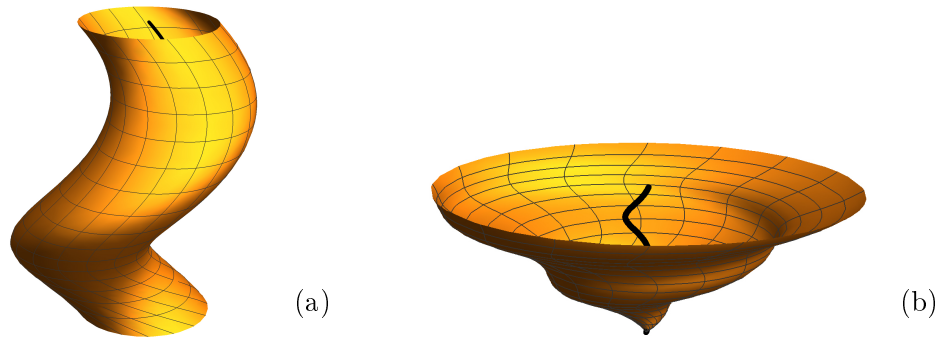
Şekil 3.6 M taban eğrisine sahip P_1 dairesel yüzeyi

a. $r = 2$, b. $r = s/2$

Şimdi, $k(s) = (0, 0, 1)$ olmak üzere $q_k(s, \theta) = \cos \theta + k(s) \sin \theta$ birim kuarterniyonu alınsın. Ayrıca $k(s)$ vektörüne dik olan bir $m(s) = (\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, 0)$ birim vektörü seçilsin. O halde, M taban eğrisine sahip başka bir dairesel yüzey aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} P_2(s, \theta) &= M(s) + r(s)q_k(s, \theta) * m \\ &= M(s) + r(s)(\cos \theta m + (k \times m) \sin \theta) \\ &= (\frac{\cos s}{\sqrt{2}} + r(s)(\frac{s \cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{1+s^2}}), \frac{\sin s}{\sqrt{2}} + r(s)(\frac{\cos \theta + s \sin \theta}{\sqrt{1+s^2}}), \frac{s}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

Bu denklemde, $r(s) = 1$ ve $r(s) = s$ için elde edilen dairesel yüzeyler şekil 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.7 M taban eğrisine sahip P_2 dairesel yüzeyi

a. $r = 1$, b. $r = s$

Şimdi, Frenet çatısı $\{e, n, b\}$ olan bir eğrinin küresel göstergeleri tarafından üretilen roller coaster yüzeylerin parametrik denklemlerini vereceğiz. Bunun için öncelikle bir eğrinin küresel gösterge eğrilerini tanımlayalım.

Birim hızlı bir $M(t)$ eğrisinin birim teğet vektör alanının birim küre üzerinde çizdiği eğriye, eğrinin **teğetler göstergesi** adı verilir. Bu durumda $M(t)$ eğrisinin teğetler göstergesi $\mathbf{T} : I_{\mathbf{T}} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{T}(\psi_{\mathbf{T}}(t)) = e(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|}$ biçiminde tanımlanır. Burada $\psi_{\mathbf{T}} : I \rightarrow I_{\mathbf{T}}$, $\psi_{\mathbf{T}}(t) = \int \kappa(s)ds$ şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde, asli normal göstergesi, $\mathbf{N} : I_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{N}(\psi_{\mathbf{N}}(t)) = n(t) = b(t) \wedge e(t)$ biçiminde tanımlanır. Burada $\psi_{\mathbf{N}} : I \rightarrow I_{\mathbf{N}}$, $\psi_{\mathbf{N}}(t) = \int f(s)ds$ şeklinde ifade edilir.

Binormal göstergesi ise, $\mathbf{B} : I_{\mathbf{B}} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{B}(\psi_{\mathbf{B}}(t)) = b(t) = \frac{M'(t) \times M''(t)}{\|M'(t) \times M''(t)\|}$. Burada $\psi_{\mathbf{B}} : I \rightarrow I_{\mathbf{B}}$, $\psi_{\mathbf{B}}(t) = \int \tau(s)ds$ şeklinde ifade edilir.

Şimdi bir eğrinin asli göstergeleri tarafından üretilen roller coaster yüzeylerin parametrik denklemlerini verelim. $M(t)$ eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergeleri sırasıyla $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ olsun. O halde, \mathbf{T}, \mathbf{N} ve \mathbf{B} tarafından üretilen roller coaster yüzeyler $\{n, c, w, f, g\}$ alternatif çatısı kullanılarak, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R_{\mathbf{T}}(t, \theta) = \mathbf{T}(\psi_{\mathbf{T}}(t)) + r(\cos \theta n(t) + \sin \theta(\cos \varphi(t)c(t) + \sin \varphi(t)w(t)) \quad (3.87)$$

$$R_{\mathbf{N}}(t, \theta) = \mathbf{N}(\psi_{\mathbf{N}}(t)) + r(\cos \theta c(t) + \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sigma^2}}(\cos \mu(t)(\sigma w(t) - n(t)) + \sin \mu(t)(w(t) + \sigma n(t))) \quad (3.88)$$

$$R_{\mathbf{B}}(t, \theta) = \mathbf{B}(\psi_{\mathbf{B}}(t)) - r(\cos \theta n(t) + \sin \theta(\cos \eta(t)c(t) - \sin \eta(t)w(t)) \quad (3.89)$$

Burada, $-\varphi(t), -\mu(t), -\eta(t)$ sırasıyla $g(t), \frac{\sigma'}{(1 + \sigma^2)}, -g(t)$ 'nin ilkel bir fonksiyonudur. Ayrıca, r sabittir. Bu yüzeylerin bazı geometrik özellikleri roller coaster yüzeylerine benzer biçimde incelenebilir.

Şimdi öncelikle roller coaster yüzeylerin katerniyonik gösterimlerini verelim. Son-

rasında, (3.87) (3.88) ve (3.89) eşitlikleri ile tanımlı, küresel göstergeler ile verilen roller coaster yüzeylerin kuaterniyonik gösterimlerini elde edelim.

Teorem 3.3.2. 3 boyutlu Öklid uzayında bir $M(t)$ birim hızlı uzay eğrisi ve bu eğri boyunca $\{e, n, b\}$ Frenet çatası verilsin. $R_M(t, \theta)$, $M(t)$ taban eğrisine sahip bir roller coaster yüzey olsun.

$$q_x(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta x(t)$$

birim kuaterniyonu kullamlarak, $R_M(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi

(i) $q_x(t, \theta) \times e$ kuaterniyon çarpımı ile

$$R_M(t, \theta) = M(t) + r q_x(t, \theta) * e \quad (3.90)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R_M(t, \theta) = M(t) + r \mathbf{M}_x e(t) \quad (3.91)$$

şeklinde verilir. Burada, $x(t) = \sin(\int \tau(s) ds) n(t) + \cos(\int \tau(s) ds) b(t)$ ve \mathbf{M}_x ise, $q_x(t, \theta)$ birim kuaterniyonu için ϕ dönüşümünün matris gösterimidir.

İspat. $R_M(t, \theta)$, M taban eğrisi ile verilen bir roller coaster yüzey olsun. O halde, roller coaster yüzeyin parametrik denklemi

$$R_M(t, \theta) = M(t) + r(\cos \theta e(t) + \sin \theta(\cos \varphi(t)n(t) + \sin \varphi(t)b(t))) \quad (3.92)$$

ile verilir.

$$x(t) = -\sin \varphi(t)n(t) + \cos \varphi(t)b(t)$$

alınırsa,

$$q_x(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta x(t)$$

birim kuaterniyonu ve $e(t)$ pür kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımı uygulanarak,

$$q_x(t, \theta) * e(t) = \cos \theta e(t) + \sin \theta(\cos \varphi(t)n(t) + \sin \varphi(t)b(t))$$

elde edilir. Son eşitlik, (3.92) ifadesinde yerine yazılırsa (3.90) eşitliği elde edilir. Diğer yandan $M(t), r$ ve \mathbf{M}_x sırasıyla dönüşüm vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, (3.91) eşitliği homotetik hareket olarak bulunur. \square

Teorem 3.3.3. 3 boyutlu Öklid uzayında bir $M(t)$ birim hızlı uzay eğrisi ve bu eğri boyunca $\{n, c, w\}$ alternatif çatısı verilsin. $R_{\mathbf{T}}(t, \theta)$ ise (3.87) ile verilen, $M(t)$ taban eğrisinin \mathbf{T} teğetler göstergesi ile oluşturulan roller coaster yüzeyi gösterebilir.

$$q_y(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta y(t)$$

birim kuaterniyonu kullanılarak, $R_{\mathbf{T}}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi

(i) $q_y(t, \theta) \times n$ kuaterniyon çarpımı ile

$$R_{\mathbf{T}}(t, \theta) = \mathbf{T}(\psi_{\mathbf{T}}(t)) + r q_y(t, \theta) * n \quad (3.93)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R_{\mathbf{T}}(t, \theta) = \mathbf{T}(\psi_{\mathbf{T}}(t)) + r \mathbf{M}_y n(t) \quad (3.94)$$

şeklinde verilir. Burada, $y(t) = \cos(\int g(s) ds) w(t) + \sin(\int g(s) ds) c(t)$ ve \mathbf{M}_y ise, $q_y(t, \theta)$ birim kuaterniyonu için ϕ dönüşümünün matris gösterimidir.

İspat. $R_{\mathbf{T}}(t, \theta)$, $M(t)$ eğrisinin \mathbf{T} teğetler göstergesi ile oluşturulan bir roller coaster yüzeyi olsun.

$$y(t) = \cos\left(\int g(s) ds\right) w(t) + \sin\left(\int g(s) ds\right) c(t)$$

alınırsa,

$$q_y(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta y(t)$$

birim kuaterniyonu ve $n(t)$ pür kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımı uygulanarak,

$$q_y(t, \theta) \times n(t) = \cos \theta n(t) + \sin \theta (\cos \varphi(t) c(t) + \sin \varphi(t) w(t))$$

elde edilir. Son eşitlik, 3.87 de yerine yazılırsa (3.93) elde edilir. Diğer taraftan $M(t), r$ ve \mathbf{M}_y sırasıyla dönüşüm vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin

ortogonal matrisi olsun. O halde, (3.94) eşitliği homotetik hareket olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.3.4. 3 boyutlu Öklid uzayında bir $M(t)$ birim hızlı uzay eğrisi ve bu eğri boyunca $\{n, c, w\}$ alternatif çatısı verilsin. $R_{\mathbf{N}}(t, \theta)$ ile (3.88) denklemyşe verilen, $M(t)$ taban eğrisinin asli normaller göstergesinden oluşturulan roller coaster yüzey tanımlansın.

$$q_z(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta z(t)$$

birim kuaterniyonu kullanılarak, $R_{\mathbf{N}}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi

(i) $q_z(t, \theta) \times c$ kuaterniyon çarpımı ile

$$R_{\mathbf{N}}(t, \theta) = \mathbf{N}(\psi_{\mathbf{N}}(t)) + r q_z(t, \theta) * c \quad (3.95)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R_{\mathbf{N}}(t, \theta) = \mathbf{N}(\psi_{\mathbf{N}}(t)) + r \mathbf{M}_z c(t) \quad (3.96)$$

şeklinde verilir. Burada,

$$z(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \right) [(\cos \mu(t))(w(t) + \sigma(t)n(t)) - \sin(\mu(t))(\sigma(t)w(t) - n(t))]$$

ve M_z ise, $q_z(t, \theta)$ birim kuaterniyonu için ϕ dönüşümünün matris gösterimidir.

İspat. $R_{\mathbf{N}}(t, \theta)$, $M(t)$ taban eğrisinin asli normaller göstergesi ile oluşturulan bir roller coaster yüzey olsun.

$$z(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \right) [\cos \mu(t)(w(t) + \sigma(t)n(t)) - \sin \mu(t)(\sigma(t)w(t) - n(t))]$$

alınırsa,

$$q_z(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta z(t)$$

birim kuaterniyonu ve $c(t)$ pür kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} q_z(t, \theta) * c(t) &= \cos \theta c(t) + \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sigma^2}} (\cos \mu(t)) (\sigma w(t) - n(t)) \\ &\quad + \sin \mu(t) (w(t) + \sigma n(t)) \end{aligned}$$

olur. Son eşitlik, (3.88)'de yerine yazılırsa (3.95) elde edilir. Diğer yandan, $M(t)$, r ve \mathbf{M}_z , sırasıyla, dönüşüm vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, (3.96) eşitliği homotetik hareket olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.3.5. 3 boyutlu Öklid uzayında bir $M(t)$ birim hızlı uzay eğrisi ve bu eğri boyunca $\{n, c, w\}$ alternatif çatısı verilsin. $R_{\mathbf{B}}(t, \theta)$ ise (3.89) ile verilen, $M(t)$ taban eğrisinin binormaller göstergesi ile oluşturulan bir roller coaster yüzeyi olsun.

$$q_{\omega}(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \omega(t)$$

birim kuaterniyonu kullanılarak, $R_{\mathbf{B}}(t, \theta)$ roller coaster yüzeyi

(i) $q_{\omega}(t, \theta) \times n$ kuaterniyon çarpımı ile

$$R_{\mathbf{B}}(t, \theta) = \mathbf{B}(\psi_{\mathbf{B}}(t)) - r q_{\omega}(t, \theta) * n \quad (3.97)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R_{\mathbf{B}}(t, \theta) = \mathbf{B}(\psi_{\mathbf{B}}(t)) + r \mathbf{M}_{\omega} n \quad (3.98)$$

şeklinde verilir. Burada, $\omega(t) = \cos(\int g(s) ds) w(t) + \sin(\int g(s) ds) c(t)$ ve \mathbf{M}_{ω} ise, $q_{\omega}(t, \theta)$ birim kuaterniyonu için ϕ dönüşümünün matris gösterimidir.

İspat. $R_{\mathbf{B}}(t, \theta)$, $M(t)$ taban eğrisinin binormaller göstergesi ile oluşturulan bir roller coaster yüzeyi olsun.

$$\omega(t) = \cos\left(\int g(s) ds\right) \omega(t) + \sin\left(\int g(s) ds\right) c(t)$$

alınırsa,

$$q_{\omega}(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \omega(t)$$

birim kuaterniyonu ve $n(t)$ pür kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımını uygulayarak,

$$q_{\omega}(t, \theta) * n(t) = \cos \theta n(t) + \sin \theta (\cos \eta(t) c(t) - \sin \eta(t) w(t))$$

elde edilir. Son eşitlik, 3.89'de yerine yazılırsa (3.97) elde edilir. Diğer yandan $M(t), r$ ve \mathbf{M}_ω , sırasıyla, dönüşüm vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, (3.98) eşitliği homotetik hareket olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar. \square

Örnek 3.3.2.

$$M(t) = \left(-\frac{1}{12} \cos 4t - \frac{1}{3} \cos 2t, -\frac{1}{12} \sin 4t - \frac{1}{3} \sin 2t, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos t \right)$$

biçiminde tanımlı birim hızlı bir slant helis verilsin. O halde, M slant helisinin alternatif çatısı şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} n(t) &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3t, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3t, \frac{1}{3} \right) \\ c(t) &= (-\sin 3t, \cos 3t, 0) \\ w(t) &= \left(\frac{1}{3} \cos 3t, \frac{1}{3} \sin 3t, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ f(t) &= 2\sqrt{2}, g(t) = -1 \end{aligned}$$

Ayrıca, M eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

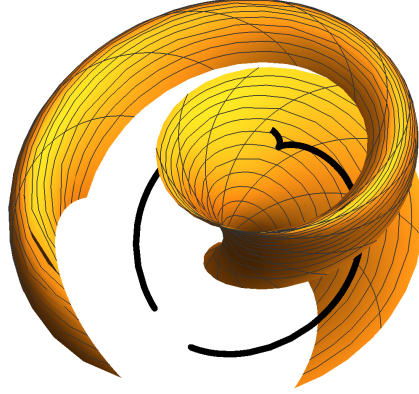
$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\psi_{\mathbf{T}}(t)) &= \left(\frac{1}{3} \sin 4t + \frac{2}{3} \sin 2t, -\frac{1}{3} \cos 4t - \frac{2}{3} \cos 2t, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin t \right) \\ \mathbf{N}(\psi_{\mathbf{N}}(t)) &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos t, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin t, \frac{1}{3} \right) \\ \mathbf{B}(\psi_{\mathbf{B}}(t)) &= \left(\frac{1}{3}(-2 \cos 2t + \cos 4t), -\frac{8}{3} \cos t \sin^3 t, \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos t \right) \end{aligned}$$

O halde, eğer $\varphi(t) = -\eta(t) = -t$, $\mu(t) = \frac{\pi}{3}$ olarak seçilirse

- $q_y(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta y(t)$ birim kuaterniyonu kullanılarak, M eğrisinin teğetler göstergesi ile oluşturulan roller coaster yüzey,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{T}}(t, \theta) &= \mathbf{T}(\psi_{\mathbf{T}}(t)) + r q_y(t, \theta) * n \\ &= \left(\frac{\sin 4t + 2 \sin 2t + 2\sqrt{2}r \cos \theta \cos 3t}{3} - r \sin \theta (\cos t \sin 3t + \frac{1}{3} \sin t \cos 3t), \right. \\ &\quad \left. \frac{-\cos 4t - 2 \cos 2t + 2\sqrt{2}r \cos \theta \sin 3t}{3} + r \sin \theta (\cos t \cos 3t - \frac{1}{3} \sin t \sin 3t), \right. \\ &\quad \left. \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin t (1 + r \sin \theta) + \frac{r}{3} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Özel olarak $r = 1$ alınırsa, şekil 3.8 elde edilir.

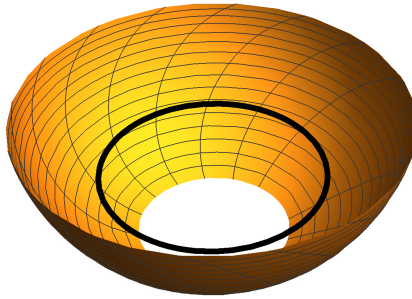


Şekil 3.8 $r = 1$ için R_T roller coaster yüzeyi

- $q_z(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta z(t)$ birim kuarterniyonu için, M eğrisinin asli normaller göstergesi ile oluşturulan roller coaster yüzey,

$$\begin{aligned}
 R_N(t, \theta) &= \mathbf{N}(\psi_N(t)) + r q_z(t, \theta) * c \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3t - r \cos \theta \sin 3t + r \sin \theta \left(\frac{1}{6} \cos 3t + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos 3t \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3t - r \cos \theta \cos 3t + r \sin \theta \left(\frac{1}{6} \sin 3t + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin 3t \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{3} + r \cos \theta \left(\frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6} \right) \right).
 \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $r = 1$ için, şekil 3.9 elde edilir.

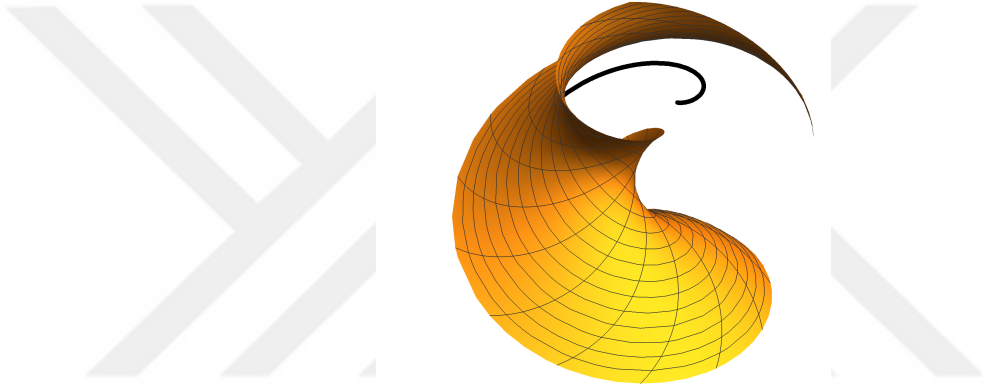


Şekil 3.9 $r = 1$ için R_N roller coaster yüzeyi

- $q_\omega(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \omega(t)$ birim kuaterniyonu için, M eğrisinin binormaller göstergesi ile oluşturulan roller coaster yüzey,

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{B}}(t, \theta) &= \mathbf{B}(\psi_{\mathbf{B}}(t)) - r q_\omega(t, \theta) * n \\
&= \left(\frac{\cos 4t - 2 \cos 2t + 2\sqrt{2}r \cos \theta \cos 3t}{3} - r \sin \theta (\cos t \sin 3t + \frac{1}{3} \sin t \cos 3t), \right. \\
&\quad \left. \frac{-8 \cos t \sin^3 t + 2\sqrt{2}r \cos \theta \sin 3t}{3} + r \sin \theta (\cos t \cos 3t - \frac{1}{3} \sin t \sin 3t), \right. \\
&\quad \left. \frac{2\sqrt{2}}{3} (\cos t + r \sin \theta \sin t) + \frac{r}{3} \cos \theta \right).
\end{aligned}$$

şeklindedir. Özel olarak $r = 1$ alınır, şekil 3.10 elde edilir.



Şekil 3.10 $r = 1$ için $R_{\mathbf{B}}$ roller coaster yüzeyi

3.4 Dairesel Yüzeylerin Parametre Eğrileri ile İlgili Bazı Karakterizasyonlar

Tüp yüzeylerinin parametre eğrilerinin bazı özel eğriler olma durumları ile ilgili Ök- lid uzayında bazı çalışmalar yapılmıştır (Doğan 2012, Ateş vd. 2018). Tezin bu bölümünde, dairesel yüzey üzerindeki parametre eğrilerinin geodezik veya asimptotik olma şartları incelenecektir. Özel olarak θ -parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan dairesel yüzeyler aslında roller coaster yüzeyler olup bu duruma tezin önceki bölümlerinde detaylı olarak yer verilmiştir. Dahası, roller coaster yüzeyler üzerindeki parametre eğrilerinin geodezik veya asimptotik olması ile ilgili karakterizasyonlar

verilecektir. Son olarak, dairesel yüzey üzerindeki loxodromik eğriler araştırılacaktır.

Teorem 3.4.1. $P(s, \theta)$ regüler bir dairesel yüzey olsun. O halde, aşağıdaki durumlar söz konusudur.

(i) Dairesel yüzeyin s -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & (\alpha'\mu - \alpha\mu' - \alpha\sigma\beta - \sigma\mu) \sin \theta + (\alpha'\sigma - \sigma'\alpha - r^2\beta^2 - \sigma^2 - \alpha^2 + \alpha\mu\beta) \cos \theta \\ & + (\sigma r\beta + \frac{1}{2}\mu'r) \sin 2\theta - r\mu\beta \cos 2\theta + (2\alpha r + \sigma'r) \cos^2 \theta + \alpha r\beta^2 - r^2 \cos^3 \theta \\ & = 0. \end{aligned} \tag{3.99}$$

olmasıdır.

(ii) Dairesel yüzeyin θ -parametre eğrileri asimptotik olamaz.

İspat. Yüzey üzerinde bir α eğrisinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart α'' ivme vektörünün yüzeye teğet olmasıdır. Yani, yüzeyin normali N olmak üzere, $\langle N, \alpha'' \rangle = 0$ olmalıdır.

(i) Dairesel yüzey üzerindeki s -parametre eğrileri asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart (3.25) ve (3.27) kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle N, P_{ss} \rangle &= \frac{r}{w} \left[\begin{aligned} & (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta) \\ & + (r \cos^2 \theta - \alpha \cos \theta)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta) \\ & + (r \sin \theta \cos \theta - \alpha \sin \theta)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta \cos \theta) \end{aligned} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olması biçiminde elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $\langle N, P_{ss} \rangle = 0$ olması

için

$$\begin{aligned}
& (\alpha'\mu - \alpha\mu' - \alpha\sigma\beta - \sigma\mu) \sin \theta + (\alpha'\sigma - \sigma'\alpha - r^2\beta^2 \\
& - \sigma^2 - \alpha^2 + \alpha\mu\beta) \cos \theta + (\sigma r\beta + \frac{1}{2}\mu'r) \sin 2\theta \\
& - r\mu\beta \cos 2\theta + (2\alpha r + \sigma'r) \cos^2 \theta + \alpha r\beta^2 - r^2 \cos^3 \theta \\
& = 0.
\end{aligned}$$

olması gerekmektedir.

(ii) Dairesel yüzey üzerindeki θ -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart (3.25) ve (3.27) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\langle N, P_{\theta\theta} \rangle &= \frac{r}{w} [(-r^2 \cos^3 \theta + \alpha r \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \alpha r \sin^2 \theta)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olması biçiminde elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $\langle N, P_{\theta\theta} \rangle = 0$ olması için

$$\cos \theta = \frac{\alpha}{r}$$

sağlanmalıdır. Ancak bu ifade θ parametresinin tüm değerleri için gerçekleşmez. O halde ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.4.2. $P(s, \theta)$ regüler bir dairesel yüzey olsun. O halde, aşağıdaki durumlar söz konusudur:

(i) Dairesel yüzeyin s -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \sigma' - \mu\beta) \sin \theta - (\sigma\beta + \mu') \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta - r\beta' = 0 \\
& (\sin \theta(r \cos \theta - \alpha)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)) \\
& - ((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta)) = 0 \\
& - (\cos \theta(r \cos \theta - \alpha)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)) \\
& + ((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta)) = 0
\end{aligned}$$

eşitliklerinin gerçekleşmesidir.

(ii) Dairesel yüzeyin θ -parametre eğrileri geodezik eğriler olamaz.

İspat. Yüzey üzerinde bir α eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart α'' ivme vektörünün yüzeyin normaline paralel olmasıdır. Yani, yüzeyin normali N olmak üzere, $N \times \alpha'' = 0$ olmalıdır.

(i) Dairesel yüzey üzerindeki s -parametre eğrileri geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N \times P_{ss} = 0$ olmasıdır. O halde (3.25) ve (3.27) kullanılarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} & -(\sin \theta(r \cos \theta - \alpha)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta)) \\ & \quad + (\cos \theta(r \cos \theta - \alpha)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta)) = 0 \\ & (\sin \theta(r \cos \theta - \alpha)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)) \\ & \quad - ((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta)) = 0 \\ & -(\cos \theta(r \cos \theta - \alpha)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)) \\ & \quad + ((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta)) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin ilkinin düzenlenmesi ile

$$(\alpha + \sigma' - \mu\beta) \sin \theta - (\sigma\beta + \mu') \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta - r\beta' = 0$$

elde edilir. O halde ispat tamamlanır.

(ii) Dairesel yüzey üzerindeki θ -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N \times P_{\theta\theta} = 0$ olmasıdır. O halde (3.25) ve (3.27) kullanılarak

$$N \times P_{\theta\theta} = \frac{r}{w} \left[\begin{array}{l} (-r \sin \theta \cos \theta(r \cos \theta - \alpha)) + (r \sin \theta \cos \theta(r \cos \theta - \alpha))e_1 \\ \quad + (-r \sin \theta(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta))e_2 \\ \quad + (r \cos \theta(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta))e_3 \end{array} \right] = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında $N \times P_{\theta\theta} = 0$ olması için,

$$(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) = 0$$

$$(r \cos \theta - \alpha) = 0$$

olmalıdır. Bu ise, $\|P_s \times P_\theta\| = 0$ olması demektir. Dairesel yüzey regüler olduğundan eşitlik gerçekleşmez. O halde θ -parametre eğrileri geodezik eğriler olamaz.

Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 3.4.1.

$$M(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} s \right)$$

dairessel helisi verilsin. Ayrıca

$$a_1(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

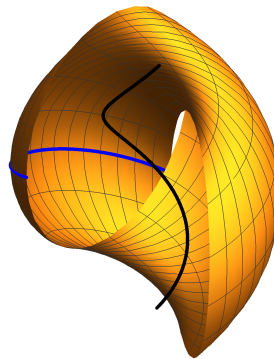
$$a_2(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$$a_3(s) = (0, 0, 1)$$

seçelim. Bu durumda $\beta = 0$ olur. O halde M taban eğrisine sahip dairessel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(s, \theta) = \left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}} - r \cos \theta \sin s, \frac{\sin s}{\sqrt{2}} + r \cos \theta \cos s, \frac{s}{\sqrt{2}} + r \sin \theta \right)$$

biçimindedir. Teorem 3.4.2'den kolayca görülebilir ki, $r = 1$ olmak üzere, elde edilen dairessel yüzey üzerinde $\theta = 0$ değerine karşılık gelen s -parametre eğrisi bir geodezik eğridir (bkz. şekil 3.11).



Şekil 3.11 M helisi tarafından üretilen P dairessel yüzeyi ve üzerindeki bir geodezik s -parametre eğrisi (mavi)

Şimdi ise roller coaster yüzeyler üzerindeki özel eğrileri inceleyelim.

Teorem 3.4.3. $R(t, \theta)$ bir regüler roller coaster yüzey olsun. O halde, aşağıdaki durumlar gerçekleşir:

- (i) Roller coaster yüzeyin t -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & \kappa \sin \varphi - r(\kappa(\kappa \sin \theta \sin 2\varphi + \cos \theta \cos \varphi \tau) + \kappa' \cos \theta \sin \varphi) \quad (3.100) \\ & + r^2 \kappa^3 \sin \varphi (\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) = 0 \end{aligned}$$

olmasıdır.

- (ii) Roller coaster yüzeyin θ -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart taban eğrisinin bir doğru olması ya da $\varphi = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmasıdır.

İspat. (i) Roller coaster yüzeyin t -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normali v olmak üzere, $\langle R_{tt}, v \rangle = 0$ olmasıdır. O halde,

$$\begin{aligned} \langle R_{tt}, v \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi}} [\kappa \sin \varphi - r(\kappa(\kappa \sin \theta \sin 2\varphi + \cos \theta \cos \varphi \tau) \\ & \quad + \kappa' \cos \theta \sin \varphi) + r^2 \kappa^3 \sin \varphi (\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Buradan, istenen sonuç elde edilir.

(ii) Roller coaster yüzeyin θ -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normali v olmak üzere, $\langle R_{\theta\theta}, v \rangle = 0$ olmasıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} \langle R_{\theta\theta}, v \rangle &= [-r^2 \kappa \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)] [1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}} \\ &= -r^2 \kappa \sin \varphi (1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\langle R_{\theta\theta}, v \rangle = 0$ olması için,

$$-r^2\kappa \sin \varphi = 0.$$

sağlanmalıdır. Bu durumda ya $\kappa \equiv 0$ ya da $\varphi = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.4.4. $R(t, \theta)$ bir regüler roller coaster yüzey olsun. O halde, aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- (i) Roller coaster yüzeyin t -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &(\kappa - r\kappa^2 \sin \theta \cos \varphi + r\kappa' \cos \theta)(\cos \varphi + r\kappa \sin \theta \sin^2 \varphi) \\ &+ (r\tau\kappa \cos \theta)(-\sin \varphi + r\kappa \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi) = 0 \\ &(-r\kappa' \sin \theta \cos \varphi - r\kappa^2 \cos \theta - r\tau\kappa \sin \theta \sin \varphi)(\cos \varphi + r\kappa \sin \theta \sin^2 \varphi) \\ &- (r\tau\kappa \cos \theta)(r\kappa \cos \theta \sin \varphi) = 0 \\ &((-r\kappa' \sin \theta \cos \varphi - r\kappa^2 \cos \theta - r\tau\kappa \sin \theta)(r\kappa \cos \theta \sin \varphi) \sin \varphi) \\ &\times (-\sin \varphi + r\kappa \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi) \\ &- (r\kappa \cos \theta \sin \varphi)(\kappa - r\kappa^2 \sin \theta \cos \varphi + r\kappa' \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

eşitliklerinin gerçekleşmesidir.

- (ii) Roller coaster yüzeyin θ -parametre eğrileri geodezik eğriler olamaz.

İspat. (i). Roller coaster yüzeyin t -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart, eğriler boyunca yüzeyin normalinin eğrinin ivme vektörüne paralel olmasıdır. Bu şart, yüzeyin birim normali v olmak üzere, $R_{tt} \times v = 0$ olmasına denktir.

O halde, (3.45) ve (3.46) denklemlerinden kolayca gösterilebilir ki

$$\begin{aligned}
R_{tt} \times v &= -\frac{1}{\sqrt{1+r^2\kappa^2\sin^2\varphi}} \cdot \\
&\left[\begin{aligned}
&(\kappa - r\kappa^2 \sin\theta \cos\varphi + r\kappa' \cos\theta)(\cos\varphi + r\kappa \sin\theta \sin^2\varphi) \\
&\quad + (r\tau\kappa \cos\theta)(-\sin\varphi + r\kappa \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi) e \\
&(-r\kappa' \sin\theta \cos\varphi - r\kappa^2 \cos\theta - r\tau\kappa \sin\theta \sin\varphi)(\cos\varphi + r\kappa \sin\theta \sin^2\varphi) \\
&\quad - (r\tau\kappa \cos\theta)(r\kappa \cos\theta \sin\varphi) n \\
&+((-r\kappa' \sin\theta \cos\varphi - r\kappa^2 \cos\theta - r\tau\kappa \sin\theta \sin\varphi)(r\kappa \cos\theta \sin\varphi) \sin\varphi) \\
&\quad \times (-\sin\varphi + r\kappa \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi) \\
&- (r\kappa \cos\theta \sin\varphi)(\kappa - r\kappa^2 \sin\theta \cos\varphi + r\kappa' \cos\theta) b
\end{aligned} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olmalıdır. $\{e, n, b\}$ Frenet çatısı lineer bağımsız vektörlerden oluştuğundan dolayı, $R_{tt} \times v = 0$ denkleminde e , n ve b vektörlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek ispat tamamlanır.

(ii) Roller coaster yüzeyin θ -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için, v yüzey normali olmak üzere, $R_{\theta\theta} \times v = 0$ olmalıdır. Kolayca görülebilir ki,

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} \times v &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2\kappa^2\sin^2\varphi}} \\
&[(-r \sin\theta \cos\varphi(\cos\varphi + r\kappa \sin\theta \sin^2\varphi) \\
&\quad + r \sin\theta \sin^2\varphi(-1 + r\kappa \sin\theta \cos\varphi)) e \\
&\quad + (r \cos\theta(\cos\varphi + r\kappa \sin\theta \sin^2\varphi) - r \sin\theta \sin\varphi(r\kappa \cos\theta \sin\varphi)) n \\
&\quad + (-r \cos\theta \sin\varphi(-1 + r\kappa \sin\theta \cos\varphi) + r^2\kappa \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi) b]
\end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşir. O halde $R_{\theta\theta} \times v = 0$ olması için,

$$(-r \sin\theta \cos\varphi(\cos\varphi + r\kappa \sin\theta \sin^2\varphi) + r \sin\theta \sin^2\varphi(-1 + r\kappa \sin\theta \cos\varphi)) = 0$$

sağlanmalıdır. Yukarıdaki ifade düzenlendiğinde, $r \sin\theta = 0$ sonucu bulunur. Bu durum tüm θ değerleri için gerçekleşmeyeceği için yüzey üzerinde θ -parametre eğrileri geodezik eğriler olamaz. \square

3.4.1 Dairesel yüzey üzerindeki loxodromik eğriler

Tanım 3.4.1. 3-boyutlu Öklid uzayında bir dairesel yüzey üzerinde bir eğri tüm meridyenleri ya da paralelleri sabit bir açıyla kesiyorsa eğriye bir loxodromik eğri adı verilir (Babaarslan ve Yaylı 2015).

Loxodromik eğri ve meridyenler (θ -parametre eğrileri) arasındaki açı aşağıdaki eşitlik ile verilir (Babaarslan ve Yaylı 2015):

$$\cos \gamma = \frac{Eds + Fd\theta}{\sqrt{E^2ds^2 + 2EFdsd\theta + EGd\theta^2}} \quad (3.101)$$

Ayrıca, loxodromik eğri ve paraleller (s -parametre eğrileri) arasındaki açı aşağıdaki eşitlik ile verilir (Babaarslan ve Yaylı 2015):

$$\cos \vartheta = \frac{Fds + Gd\theta}{\sqrt{EGds^2 + 2FGdsd\theta + G^2d\theta^2}} \quad (3.102)$$

Bir dairesel yüzeyin birinci temel form katsayıları (3.26) eşitlikleri ile verilmişti. Birinci temel form katsayıları (3.102) eşitliğinde yerine yazılırsa, loxodromik eğri ve paraleller arasındaki açı

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{Fds + Gd\theta}{\sqrt{EGds^2 + 2FGdsd\theta + G^2d\theta^2}} \\ &= \frac{r(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)ds + r^2d\theta}{\sqrt{((\alpha - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2)r^2ds^2 + 2r(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)r^2dsd\theta + r^4d\theta^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, dairesel yüzey üzerindeki tüm paralelleri sabit ϑ açısı ile kesen loxodromik eğri

$$\begin{aligned} &[r^2(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)^2 - [r^2(\sigma^2 + \mu^2 \\ &+ r^2\beta^2 - 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta + (\alpha - r \cos \theta)^2)] \cos^2 \vartheta ds^2 \\ &+ r^4 \sin^2 \vartheta d\theta^2 + [2r^3(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta) \sin^2 \vartheta] dsd\theta = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

Şimdi loxodromik eğri ve meridyenler arasındaki açıyı elde edelim.

Benzer şekilde, (3.26) ile verilen birinci temel form katsayıları (3.101) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\cos \gamma = \frac{Eds + Fd\theta}{\sqrt{E^2 ds^2 + 2EF dsd\theta + EGd\theta^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{[(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2] ds + (r(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)) d\theta}{\sqrt{(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2 ds^2 + 2(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2 dsd\theta + (a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2 r^2 d\theta^2}}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, dairesel yüzey üzerindeki tüm meridyenleri sabit γ açısı ile kesen loxodromik eğri

$$\begin{aligned} & [\sigma^2 + \mu^2 + r^2\beta^2 - 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta \\ & + (\alpha - r \cos \theta)^2]^2 \sin^2 \gamma ds^2 + [2r(\sigma^2 + \mu^2 + r^2\beta^2 - 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta \\ & + (\alpha - r \cos \theta)^2)(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)] \sin^2 \gamma dsd\theta \\ & + [r^2((-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)^2 - (\sigma^2 + \mu^2 + r^2\beta^2 - 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta \\ & + (\alpha - r \cos \theta)^2)) \cos^2 \gamma] d\theta^2 = 0 \end{aligned}$$

ifadesini sağlar.

4. ÜÇ BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA DAİRESEL YÜZEYLER

Tezin bu bölümünde, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında dairesel yüzeyler incelenecektir. Ayrıca bu yüzeylerin parametrik denklemleri, kuaterniyon çarpımı ve homotetik hareket yardımıyla yeniden verilecektir. Spacelike dairesel yüzeyler ve spacelike roller coaster yüzeyler Abdel-Baky ve Ünlütürk (2016) çalışmasında tanımlanmış ve bazı karakterizasyonları verilmiştir. Bu çalışmada yer alan tüm önermeler genişletilerek farklı yaklaşımlarla yeniden ele alınacak ve örnekler verilecektir. Diğer yandan timelike dairesel yüzeyler ve timelike roller coaster yüzeylerin geometrik özellikleri kapsamlı bir biçimde ele alınacaktır.

4.1 Spacelike Dairesel Yüzeyler ve Bazı Geometrik Uygulamaları

Bu kısımda, \mathbb{R}_1^3 Lorentz uzayında spacelike dairesel yüzeyler ve spacelike dairesel yüzeylerin özel hali olan spacelike roller coaster yüzeylerin parametrik denklemleri verilip bazı geometrik özellikleri incelenecektir.

Spacelike dairesel yüzey, spacelike çemberlerin null olmayan bir merkez eğrisi boyunca bir parametrelili hareketi ile oluşmaktadır. Herbir çember spacelike dairesel yüzey için bir üreten çember olarak adlandırılır. Regüler bir $M : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ merkez eğrisi alalım. a_1 çember düzleminin timelike birim normali olsun. Bu durumda spacelike dairesel yüzey M merkez eğrisi ve a_1 normal vektörü ile belirlenebilir.

a_1 vektörünün Gauss dönüşümü altındaki görüntüsü olan küresel eğrinin yay parametresi u olsun. Bu durumda $a_1(u) \in H_+^2$ eğrisinin birim teğet vektörü $a_2(u) = a_1'(u)$ biçiminde tanımlıdır. O halde $a_3(u) = a_1(u) \times a_2(u)$ vektörü tanımlanarak M merkez eğrisi boyunca $\{a_1, a_2, a_3\}$ çatısı elde edilir. Böylece

$$-\langle a_1, a_1 \rangle = \langle a_2, a_2 \rangle = \langle a_3, a_3 \rangle = 1$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_3 \rangle = \langle a_3, a_1 \rangle = 0$$

$$a_1 \times a_2 = a_3, \quad a_3 \times a_1 = a_2, \quad a_2 \times a_3 = -a_1$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. O halde, aşağıdaki Frenet formülleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Burada β , $a_1(u)$ eğrisinin geodezik eğriliğidir. Dahası, spacelike dairesel yüzeyin taban eğrisinin teğet vektörü

$$M'(u) = \alpha(u)a_1(u) + \sigma(u)a_2(u) + \mu(u)a_3(u) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca, $\{a_2, a_3\}$ ikilisi de her noktadaki çember düzlemi için bir taban oluşturduğu kolayca görülebilir. O halde, M taban eğrisi tarafından üretilen spacelike dairesel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(u, \theta) = M(u) + r(u)(\cos \theta a_2(u) + \sin \theta a_3(u)), 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.3)$$

biçiminde verilir (Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016). Dolayısıyla

$$\theta \rightarrow M(u) + r(\cos \theta a_2(u) + \sin \theta a_3(u))$$

standart çemberleri spacelike dairesel yüzeyi üreten çemberlerdir.

Şimdi, sabit yarıçaplı bir spacelike dairesel yüzeyin geometrik özelliklerini inceleyelim. Bunun için öncelikle birinci mertebeden kısmi türevleri ve birinci temel form katsayılarını hesaplayalım.

$$P_\theta = r(-\sin \theta a_2 + \cos \theta a_3) \quad (4.4)$$

$$P_u = (r \cos \theta + \alpha)a_1 + \sigma a_2 + \mu a_3 + \beta P_\theta$$

olduğu basit bir şekilde elde edilebilir. Böylece yüzeyin birinci temel form katsayıları

$$E = -(r \cos \theta + \alpha)^2 + r^2\beta^2 + \sigma^2 + \mu^2 + 2r\beta(\mu \cos \theta - \sigma \sin \theta) \quad (4.5)$$

$$F = r(r\beta - \sigma \sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$G = r^2$$

olur. Diğer yandan, yüzeyin timelike birim normal vektörü regüler noktalar için şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} N(u, \theta) &= \frac{P_u \times_L P_\theta}{\|P_u \times_L P_\theta\|_L} \\ &= \frac{-(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)a_1 - (r \cos \theta + \alpha)(\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3)}{\sqrt{(r \cos \theta + \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Şimdi yüzeyin ikinci temel form katsayılarını hesaplayalım. Bunun için öncelikle P dairesel yüzeyinin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$P_{\theta\theta} = -r(\cos \theta a_2 + \sin \theta a_3) \quad (4.7)$$

$$P_{u\theta} = -r(\sin \theta a_1 + \beta \cos \theta a_2 + \beta \sin \theta a_3)$$

$$P_{uu} = (\alpha' + \sigma)a_1 + (\sigma' + r \cos \theta + \alpha - \mu\beta)a_2 \\ + (\mu' + \sigma\beta)a_3 + \beta'P_\theta + \beta P_{\theta u} \quad (4.8)$$

biçiminde hesaplanır. O halde ikinci temel form katsayıları şu şekilde verilir:

$$e = \langle P_u, P_u \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{(r \cos \theta + \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2}} \\ \left[(\alpha' + \sigma - \beta r \sin \theta)(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) + (r \cos \theta + \alpha) \right. \\ \left. \times (-\alpha \cos \theta - r \cos^2 \theta - \sigma' \cos \theta - \mu' \sin \theta + \beta(\mu \cos \theta - \sigma \sin \theta) + \beta^2 r) \right] \\ f = \langle P_u, P_\theta \rangle_L = \frac{-r \sin \theta (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) + \beta r (r \cos \theta + \alpha)}{\sqrt{(r \cos \theta + \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2}} \quad (4.9) \\ g = \langle P_\theta, P_\theta \rangle_L = \frac{r(r \cos \theta + \alpha)}{\sqrt{(r \cos \theta + \alpha)^2 + (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2}}$$

Bu durumda birinci ve ikinci temel form katsayıları kullanılarak, spacelike dairesel yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir

(Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016):

$$K = \left(\frac{1}{r((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2 + (\alpha + r \cos \theta)^2)^2} \right) \\ \times \left[-r \sin \theta (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) [-\sin \theta (\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) + \beta(\alpha + r \cos \theta)] \right. \\ \left. - (\alpha + r \cos \theta) [(\alpha' + \sigma)(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) + (\alpha + r \cos \theta)(-\alpha \cos \theta - r \cos^2 \theta \right. \\ \left. - \alpha' \cos \theta - \mu' \sin \theta + \beta(-\mu \cos \theta - \sigma \sin \theta))] \right] \quad (4.10)$$

$$H = \left(\frac{1}{2r((\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)^2 + (\alpha + r \cos \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ \times \left[r(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta)[\alpha' + \sigma - \beta r(-\sin \theta + \cos \theta) - 2 \sin \theta(\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta) \right. \\ \left. - \beta \alpha] - (\alpha + r \cos \theta)[(\alpha + r \cos \theta)(\alpha + 2r \cos \theta) - r(-\sigma' \cos \theta - \mu' \sin \theta) \right. \\ \left. + r(-\sigma^2 + \mu^2)] \right] \quad (4.11)$$

4.1.1 Spacelike dairesel yüzeylerin striksiyon eğrileri

Bir $P(u, \theta)$ spacelike dairesel yüzeyindeki

$$\delta(u) = M(u) + r(\cos \theta(u)a_2(u) + \sin \theta(u)a_3(u)) \quad (4.12)$$

eğrisi eğer aşağıdaki şartı sağlıyorsa bir striksiyon eğrisi olarak adlandırılır:

$$\langle \delta'(u), (\cos \theta(u)a_2(u) + \sin \theta(u)a_3(u)) \rangle_L = 0. \quad (4.13)$$

Gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$-\sigma \cos \theta - \mu \sin \theta = 0$$

Eğer bir spacelike dairesel yüzey için

$$\langle a_2, M' \rangle_L = \langle a_3, M' \rangle_L = 0 \quad (4.14)$$

gerçeklenirse, $\sigma = \mu = 0$ bulunur. Bu durumda, striksiyon eğriler bir spacelike tüp yüzeyi oluştururlar. Böylece, spacelike tüp yüzeylerinin sınıfının silindirik regle yüzeylerin sınıfına benzer olduğu söylenebilir.

O halde, bir spacelike dairesel yüzey için $\langle a_2, M' \rangle \neq 0$ veya $\langle a_3, M' \rangle \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, bu yüzey bir spacelike tüp yüzeyi olamaz (Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016).

4.1.2 Spacelike dairesel yüzeylerin yerel singülerlikleri

Bu bölümde, spacelike dairesel yüzeylerin singülerlikleri incelenecektir. (4.6) denkleminde kolayca görülebilir ki bir P spacelike dairesel yüzeyinin (u_0, θ_0) noktasında bir singüler noktasının olması için gerek ve yeter şart

$$\|P_u \times_L P_\theta\|_L(u_0, \theta_0) = r\sqrt{(r \cos \theta_0 + \alpha(u_0))^2 + (\sigma(u_0) \cos \theta_0 + \mu(u_0) \sin \theta_0)^2} = 0$$

elde edilir. Böylece, (u_0, θ_0) noktasında bir singülerliğin olması için aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır.

$$r \cos \theta_0 + \alpha(u_0) = 0, \quad (4.15)$$

$$\sigma(u_0) \cos \theta_0 + \mu(u_0) \sin \theta_0 = 0 \quad (4.16)$$

O halde aşağıdaki durumlar söz konusudur:

(1) $\alpha(u_0) = 0$ olsun. O halde, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ya da $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ olur. (4.16) eşitliğinden, $\mu(u_0) = 0$ elde edilir. Böylece, $M'(u_0) = \sigma(u_0)a_2(u_0)$ olur. Dolayısıyla, P spacelike dairesel yüzeyinin singüler noktaları

$$P(u_0, \pm\pi/2) = M(u_0) \pm ra_3(u_0)$$

ile verilir. Özel olarak, $\sigma(u_0) = 0$ olursa, M spin eğrisi de u_0 noktasında singüler noktaya sahiptir.

(2) $\alpha(u_0) \neq 0$ olsun. (4.16) eşitliğinde, $\cos \theta_0 = -\frac{\alpha(u_0)}{r}$ olduğu göz önüne alınarak $\frac{\sigma(u_0)\alpha(u_0)}{r} = \mu(u_0) \sin \theta_0$ elde edilir. Bu durumda, iki alt durum söz konusudur:

(i) $\mu(u_0) = 0$ olsun. O halde, $\sigma(u_0) = 0$ olur. Böylece, P dairesel yüzeyinin $\mu(u_0) = \sigma(u_0) = 0$ ve $\theta_0 = \cos^{-1}(-\frac{\alpha(u_0)}{r})$ şartlarını sağlayan (u_0, θ_0) noktasında singüler noktaları vardır.

(ii) $\mu(u_0) \neq 0$ olsun. O halde, $\sigma(u_0) \neq 0$ olur. Böylece, (4.16) eşitliğinden $\theta_0 = \sin^{-1}(\frac{\sigma(u_0)\alpha(u_0)}{\mu(u_0)r})$ olduğu görülür. Ayrıca $\theta_0 = \cos^{-1}(-\frac{\alpha(u_0)}{r})$ olduğunu biliyoruz. $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$ olduğundan $\alpha^2(u_0)(\sigma^2(u_0) + \mu^2(u_0)) = r^2\mu^2(u_0)$ elde edilir. O halde P dairesel yüzeyi $\theta_0 = \sin^{-1}(\frac{\sigma(u_0)\alpha(u_0)}{\mu(u_0)r}) = -\cos^{-1}(\frac{\alpha(u_0)}{r})$ ve $\alpha^2(u_0)(\sigma^2(u_0) + \mu^2(u_0)) = r^2\mu^2(u_0)$ şartlarını sağlayan (u_0, θ_0) noktasında bir singüler noktaya sahiptir (Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016).

4.1.3 Spacelike roller coaster yüzeyler

Bu bölümde Öklid uzayındaki duruma benzer olarak, bir spacelike dairesel yüzey üzerindeki üreten çemberlerin eğrilik çizgisi olma şartı araştırılacaktır. Ardından, elde edilen bu tip yüzeylerin önemli bir sınıfı olan spacelike roller coaster yüzeylerin parametrik denklemleri verilecek ve geometrik özellikleri ayrıntılı olarak incelenecektir (Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016).

Bir $P(u, \theta)$ regüler spacelike dairesel yüzeyinde üreten çemberlerin eğrilik çizgisi olması için

$$N_\theta = \lambda(\theta)P_\theta$$

olmalıdır. Burada, $\lambda(\theta)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu duruma denk olarak, θ -parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için

$$N_\theta \times_L P_\theta = 0 \quad (4.17)$$

şartı sağlanmalıdır. Dolayısıyla, gerekli işlemler yapıldığında

$$2r \|P_u \times_L P_\theta\|_L^2 (r\mu + a\mu \cos \theta - a\sigma \sin \theta) = 0$$

ifadesi elde edilir. P yüzeyi bir regüler yüzey olduğundan

$$r\mu + a\mu \cos \theta - a\sigma \sin \theta = 0 \quad (4.18)$$

olur.

Burada, üç durum söz konusudur.

(i) $\alpha = \sigma = \mu = 0$ olsun. Bu durumda, $M' = 0$ olup, taban eğrisi sabit bir noktadır. Bu durumda ise spacelike dairesel yüzey r yarıçaplı hiperbolik küredir.

(ii) $\sigma = \mu = 0$ olsun. Bu durumda, $M' = \alpha a_1$ olur yani M' teğet vektörü a_1 vektörüne paraleldir. O halde, M' teğet vektörü daima dairesel düzleme diktir. Bu ise dairesel yüzeyin bir spacelike tüp yüzey olduğu anlamına gelir.

(iii) $\alpha = \mu = 0$ olsun. Bu durumda, $M' = \sigma a_2$ elde edilir. Eğer σ sabit ise, M_0 sabit bir vektör olmak üzere

$$M = \sigma a_1 + M_0$$

elde edilir. Spacelike dairesel yüzeyin denklemi ile son denklem kullanılarak

$$\|P - M_0\|_L^2 = \sigma^2 + r^2$$

olduğu görülür. Bu ise tüm çember noktalarının $\sqrt{\sigma^2 + r^2}$ yarıçaplı bir hiperbolik küre üzerinde yattığını gösterir.

Diğer yandan $\mu = \alpha = 0$ olup, σ 'nın sabit olmadığı durumu ele alalım. Bu durumda P spacelike dairesel yüzeyinin taban eğrisi bir spacelike eğridir. Bu tip bir yüzey spacelike roller coaster yüzey olarak adlandırılır. Şimdi, bu yüzeylerin parametrik denklemini verip, geometrik özelliklerini ayrıntılı olarak inceleyelim.

M spacelike taban eğrisinin yay uzunluğu parametresini t ile gösterelim. M eğrisinin birim teğet vektörü spacelike olduğundan, asli normal ve binormal vektörlerinin birisi spacelike birisi timelike olur. Aşağıda, M taban eğrisinin asli normal vektörü spacelike, binormal vektörü ise timelike olduğu durum için geometrik özellikler incelenmiştir. Diğer durum benzer şekilde kolayca elde edilebilir. $M' = \sigma a_2$ ifadesi göz önüne alınarak, M spacelike taban eğrisinin Frenet çatısı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|_L} = a_2, & n(t) &= \frac{de/dt}{\|de/dt\|_L} = \frac{a_1 + \beta a_3}{\sqrt{-1 + \beta^2}} \\ b(t) &= \frac{\beta a_1 + a_3}{\sqrt{-1 + \beta^2}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Böylece, (4.19) eşitliğinden

$$a_1 = \frac{-n + \beta b}{\sqrt{-1 + \beta^2}} \quad (4.20)$$

olup, $\cosh \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{-1 + \beta^2}}$, $\sinh \varphi = \frac{-1}{\sqrt{-1 + \beta^2}}$ alınırsa,

$$a_1 = \sinh \varphi n + \cosh \varphi b \quad (4.21)$$

elde edilir. O halde

$$a_3 = a_1 \times_L a_2 = \cosh \varphi n - \sinh \varphi b \quad (4.22)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca M eğrisinin eğrilikleri için de aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{-1 + \beta^2}}{\sigma}, \quad \tau(t) - \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\beta/du}{\sigma(-1 + \beta^2)}.$$

Bu durumda, (4.19) ve (4.22) eşitliklerindeki a_2 ve a_3 ifadeleri spacelike dairesel yüzeyin denkleminde yerine yazılırsa, taban eğrisi asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri tarafından üretilen spacelike roller coaster yüzeylerin parametrik denklemi

$$R(t, \theta) = M(t) + r(\cos \theta e + \sin \theta (\cosh \varphi n - \sinh \varphi b)) \quad (4.23)$$

biçiminde elde edilir (Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016).

Şimdi, asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri tarafından üretilen spacelike roller coaster yüzeylerin bazı geometrik özelliklerine değinelim.

Tanım 4.1.1. (Spacelike roller coaster yüzeyin striksiyon eğrisi) (4.23) ile tanımlı bir $R(t, \theta)$ spacelike roller coaster yüzeyi üzerindeki

$$\delta(t) = M(t) + r(\cos \theta(t) e(t) + \sin \theta(t)(\cosh \varphi(t) n(t) - \sinh \varphi(t) b(t)))$$

aşağıdaki şartı sağlıyorsa bir striksiyon eğrisi olarak adlandırılır:

$$\langle \delta'(t), \cos \theta(t) e(t) + \sin \theta(t)(\cosh \varphi(t) n(t) - \sinh \varphi(t) b(t)) \rangle_L = 0$$

Böylece, eğrinin striksiyon eğrisi olabilmesi için

$$\cos \theta_0 = 0$$

olmalıdır.

Teorem 4.1.1. (4.23) ile tanımlı R spacelike roller coaster yüzeyinin $R(t_0, \theta_0)$ noktasında singüler olması için gerek ve yeter şart

$$\theta_0 = \pm\pi/2 \quad \text{veya} \quad \varphi = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + r^2 \kappa^2}}{r^2 \kappa^2} \right)$$

olmasıdır.

İspat. R spacelike roller coaster yüzeyinin (t_0, θ_0) noktasında singüler noktasının olması için

$$\|R_t \times_L R_\theta\|_L(t_0, \theta_0) = 0$$

olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned} \|R_t \times_L R_\theta\|_L(t_0, \theta_0) &= r \cos \theta_0 (r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi(t_0) - 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

sağlanmalıdır. Bu ise ispatı tamamlar. □

O halde aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 4.1.1. Spacelike roller coaster yüzeyin singüler noktaları ile $R(t, \pm\theta/2)$ striksiyon eğrileri çakışır.

Teorem 4.1.2. (4.23) ile tanımlı spacelike roller coaster yüzey için aşağıdakiler gerçekleşir.

1. λ_1 ve λ_2 asli eğrilikleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-\kappa \sinh \varphi}{(-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda_2 &= -\frac{r^2 \kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi}{(-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}\end{aligned}\quad (4.24)$$

2. K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki gibi verilir:

$$K = -\frac{\kappa \sinh \varphi (r^2 \kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi)}{(-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi)^2 \cos \theta}\quad (4.25)$$

$$H = \frac{2r^2 \kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi}{2(-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}\quad (4.26)$$

3. Flat spacelike roller coaster yüzeyler düzlemlerin alt kümesidir.

4. Minimal spacelike roller coaster yüzeyler düzlemlerin alt kümesidir.

Burada $-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi > 0$ şeklindedir (Abdel-Baky ve Ünlütürk 2016).

İspat. (4.23) ile tanımlı spacelike roller coaster yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamak için öncelikle temel form katsayılarını elde edelim. Yüzeyin, t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak ve $\varphi' = \tau$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}R_t &= (1 - r\kappa \sin \theta \cosh \varphi)e + (r\kappa \cos \theta)n \\ R_\theta &= -r \sin \theta e + r \cos \theta \cosh \varphi n - r \cos \theta \sinh \varphi b\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin birinci temel form katsayıları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} E &= \langle R_t, R_t \rangle_L = r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta + (1 - r\kappa \sin \theta \cosh \varphi)^2 \\ F &= \langle R_t, R_\theta \rangle_L = -r \sin \theta + r^2 \kappa \cosh \varphi \\ G &= \langle R_\theta, R_\theta \rangle_L = r^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Diğer yandan, birinci mertebeden kısmi türevler kullanılarak

$$\begin{aligned} R_t \times_L R_\theta &= r \cos \theta (r\kappa \cos \theta \sinh \varphi e - (1 - r\kappa \sin \theta \cosh \varphi) \sinh \varphi n \\ &\quad + (\cosh \varphi - r\kappa \sin \theta \sinh^2 \varphi) b) \end{aligned} \quad (4.28)$$

ve

$$\|R_t \times_L R_\theta\|_L = r \cos \theta (r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

bulunur. Bu durumda, yüzeyin birim normali $v(t, \theta)$ şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} v(t, \theta) &= \frac{R_t \times_L R_\theta}{\|R_t \times_L R_\theta\|_L} \\ &= (-r\kappa \cos \theta \sinh \varphi e + (1 - r\kappa \sin \theta \cosh \varphi) \sinh \varphi n \\ &\quad + (\cosh \varphi + r\kappa \sin \theta \sinh^2 \varphi) b) (-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ayrıca, $R_{tt}, R_{t\theta}, R_{\theta\theta}$ kısmi türevleri şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= (-r\kappa' \sin \theta \cosh \varphi + \tau r\kappa \sin \theta \sinh \varphi - r\kappa^2 \cos \theta) e \\ &\quad + (\kappa - r\kappa^2 \sin \theta \cosh \varphi + r\kappa' \cos \theta) n + (r\tau \kappa \cos \theta) b \\ R_{t\theta} &= -r\kappa \cos \theta \cosh \varphi e - r\kappa \sin \theta n \\ R_{\theta\theta} &= -r \cos \theta e - r \sin \theta \cosh \varphi n + r \sin \theta \sinh \varphi b \end{aligned} \quad (4.31)$$

Bu durumda, yüzeyin ikinci temel form katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} e &= [-\kappa \sinh \varphi + r(\kappa(\kappa \sin \theta \sinh 2\varphi - \cos \theta \cosh \varphi \tau) - \kappa' \cos \theta \sinh \varphi \\ &\quad - r^2 \kappa^3 \sinh \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cosh^2 \varphi)] [-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}} \\ f &= [r\kappa \sinh \varphi (r\kappa \cosh \varphi - \sin \theta)] [-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}} \\ g &= [-r^2 \kappa \sinh \varphi] [-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Böylece yukarıdaki hesaplamalar kullanılarak, K Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -\frac{\kappa \sinh \varphi (r^2 \kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa (\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi)}{(-1 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \varphi)^2 \cos \theta} \end{aligned}$$

biçiminde, H ortalama eğriliği de

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\ &= \frac{2r^2\kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi}{2(-1 + r^2\kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Dolayısıyla (2) ispatlanmış olur.

Roller coaster yüzeyde üreten çemberler eğrilik çizgisi olduğundan asli eğriliklerden biri,

$$\lambda_1 = \frac{g}{G} = \frac{[-r^2\kappa \sinh \varphi] [-1 + r^2\kappa^2 \sinh^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}}}{r^2} = \frac{-\kappa \sinh \varphi}{(-1 + r^2\kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

olup,

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

eşitliği kullanılarak,

$$\lambda_2 = -\frac{r^2\kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi}{(-1 + r^2\kappa^2 \sinh^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \theta}$$

bulunur. O halde (1) ispatlanmış olur.

Şimdi (3)'ü ispatlayalım. R spacelike roller coaster yüzeyinin bir flat yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$\tilde{K}(s, \theta) = \kappa \sinh \varphi (r^2\kappa^3 \sinh^3 \varphi \cos \theta + \kappa(\sinh \varphi \cos \theta + r\tau \cosh \varphi) + r\kappa' \sinh \varphi) \equiv 0$$

olmasıdır. $\tilde{K}(s, \theta) + (\partial^2/\partial\theta^2)\tilde{K}(s, \theta) = 0$ eşitliğiyle, $k\tau \cosh \varphi + k' \sinh \varphi = 0$ elde edilir. Bu ise, $\kappa' \equiv \tau \equiv 0$ olması demektir. Böylece $\tau \equiv 0$ olup ispat tamamlanır. Yani bir flat spacelike roller coaster yüzeyler düzlemin bir parçasıdır.

(4) de benzer yöntemle ispatlanır. □

(4.23) ifadesine benzer olarak, timelike asli normal vektöre sahip olan bir spacelike eğri tarafından üretilen spacelike roller coaster yüzeyin parametrik denklemi

$$R(t, \theta) = M(t) + r \cos \theta e(t) + r \sin \theta (-\sinh \varphi n(t) + \cosh \varphi b(t)) \quad (4.33)$$

biçimindedir. Yukarıda elde edilen tüm sonuçlar, bu tip yüzeyler için de kolayca bulunabilir.

4.2 Timelike Dairesel Yüzeyler ve Bazı Geometrik Uygulamaları

Bu kısımda, \mathbb{R}_1^3 Lorentz-Minkowski uzayında timelike dairesel yüzeyler ve timelike roller coaster yüzeylerin parametrik denklemleri verilecek ve bazı geometrik özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.2.1. Sabit yarıçaplı bir timelike dairesel yüzey, timelike çemberlerin düzgün, bir parametrelili ailesi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle, timelike dairesel yüzey regüler bir eğri boyunca timelike çemberlerin hareketiyle oluşturduğu yüzeydir.

Bu eğriyi M ile eğrinin teğet vektörünü de $e = M'$ ile gösterelim. a_1 vektörü, timelike çember düzleminin spacelike birim normal vektörü olsun. M eğrisi boyunca a_1 vektörünü göz önüne alarak, bir timelike dairesel yüzeyi bu eğri ve vektörü kullanarak oluşturabiliriz. u , $a_1(u) \in \mathbb{S}_1^2$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi ve $a_2(u)$ vektörü de $a_1(u)$ eğrisinin birim teğet vektörü olsun. O halde, iki durum söz konusudur:

1. durum. $a_2(u)$ timelike bir vektör olsun. O halde, $a_3 = a_1 \times_L a_2$ spacelike vektörünü tanımlayabiliriz. Böylece, a_1, a_2, a_3 aşağıdaki şartları sağlayan ortonormal bir çatı oluşturur.

$$a_1 \times_L a_2 = a_3, \quad a_2 \times_L a_3 = a_1, \quad a_1 \times_L a_3 = a_2 \quad (4.34)$$

O halde, ortonormal çatının türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Burada $\beta, a_1(u)$ eğrisinin geodezik eğriliği olarak adlandırılır. Elde edilen bu çatı kullanılarak, $M'(u)$ teğet vektörü,

$$M' = \alpha(u)a_1(u) + \sigma(u)a_2(u) + \mu(u)a_3(u) \quad (4.36)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $\alpha = \alpha(u)$, $\sigma = \sigma(u)$, $\mu = \mu(u)$ fonksiyonları, M' teğet vektörünün koordinat fonksiyonlarıdır. $\{a_2, a_3\}$ vektör cümlesi, M taban eğrisinin her noktasına karşılık gelen çember düzlemi için bir pseudo-ortonormal baz oluşturur. O halde, timelike dairesel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(u, \theta) = M(u) + r(\sinh \theta a_2(u) + \cosh \theta a_3(u)), \quad (4.37)$$

ile verilir.

$$\theta \mapsto M(u) + r(\sinh \theta a_2(u) + \cosh \theta a_3(u))$$

standart çemberleri, dairesel yüzeyin üreten çemberleri olarak adlandırılır.

Şimdi (4.37) ile tanımlı timelike dairesel yüzeylerin geometrik özelliklerini inceleyelim. u ve θ parametrelerine göre kısmi türev alınarak

$$P_\theta = r(\cosh \theta a_2 + \sinh \theta a_3) \quad (4.38)$$

$$P_u = (r \sinh \theta + \alpha)a_1 + \sigma a_2 + \mu a_3 + \beta P_\theta$$

elde edilir. O halde, yüzeyin birinci temel form katsayıları şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} E &= ((r \sinh \theta + \alpha)^2 - r^2 \beta^2 - \sigma^2 + \mu^2 + 2r\beta(\mu \sinh \theta - \sigma \cosh \theta)) \\ F &= r(-r\beta - \sigma \cosh \theta + \mu \sinh \theta) \\ G &= -r^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Böylece, yüzeyin spacelike birim normal vektörü regüler noktalar için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} N(u, \theta) &= \frac{P_u \times_L P_\theta}{\|P_u \times_L P_\theta\|_L} \\ &= \frac{(\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)a_1 - (r \sinh \theta + \alpha)(\sinh \theta a_2 + \cosh \theta a_3)}{\sqrt{(r \sinh \theta + \alpha)^2 + (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)^2}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Diğer yandan, timelike dairesel yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} P_{\theta\theta} &= r(\sinh \theta a_2 + \cosh \theta a_3) \\ P_{u\theta} &= r(\cosh \theta a_1 + \beta \sinh \theta a_2 + \beta \cosh \theta a_3) \\ P_{uu} &= (\alpha' + \sigma)a_1 + (\sigma' + r \sinh \theta + \alpha + \mu\beta)a_2 \\ &\quad + (\mu' + \sigma\beta)a_3 + \beta' P_\theta + \beta P_{\theta u} \end{aligned} \quad (4.41)$$

biçiminde olup, (4.40) denklemi kullanılarak yüzeyin ikinci temel form katsayıları şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{\sqrt{(r \sinh \theta + \alpha)^2 + (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)^2}} \\
&\quad \times \left[(\alpha' + \sigma + \beta r \cosh \theta)(\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta) \right. \\
&\quad \left. + (r \sinh \theta + \alpha)(-\alpha \sinh \theta - r \sinh^2 \theta - \sigma' \sinh \theta + \mu' \cosh \theta \right. \\
&\quad \left. + \beta(-\mu \sinh \theta + \sigma \cosh \theta) + \beta^2 r) \right] \\
f &= \frac{r \cosh \theta (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta) + \beta r (r \sinh \theta + \alpha)}{\sqrt{(r \sinh \theta + \alpha)^2 + (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)^2}} \\
g &= \frac{r (r \sinh \theta + \alpha)}{\sqrt{(r \sinh \theta + \alpha)^2 + (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)^2}}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

O halde, K ve H Gauss eğriliği ile ortalama eğriliği sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{r((\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)^2 + (\alpha + r \sinh \theta)^2)^2} \left\{ r \cosh \theta (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta) \right. \\
&\quad \times [\cosh \theta (\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta) + \beta(\alpha + r \sinh \theta)] - (\alpha + r \sinh \theta) \\
&\quad \times \left[(\alpha' + \sigma)(\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta) + (\alpha + r \sinh \theta)(-\alpha \sinh \theta - r \sinh^2 \theta \right. \\
&\quad \left. - \alpha' \sinh \theta + \mu' \cosh \theta + \beta(-\mu \sinh \theta + \sigma \cosh \theta)) \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2r((\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta)^2 + (\alpha + r \sinh \theta)^2)^{3/2}} \left\{ r(\sigma \sinh \theta - \mu \cosh \theta) \right. \\
&\quad \times \left[\alpha' + \sigma - \beta r(\cosh \theta + \sinh \theta) + 2 \cosh \theta(-\sigma \cosh \theta + \mu \sinh \theta) - \beta \alpha \right] \\
&\quad - (\alpha + r \sinh \theta) \left[(\alpha + r \sinh \theta)(\alpha + 2r \sinh \theta) - r(-\sigma' \sinh \theta + \mu' \cosh \theta) \right. \\
&\quad \left. \left. + r(-\sigma^2 + \mu^2) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

4.2.1 Timelike dairesel yüzeylerin striksiyon eğrileri

Bir $P(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyi üzerinde

$$\delta(u) = M(u) + r(\sinh \theta a_2(s) + \cosh \theta a_3(s)) \quad (4.43)$$

eğrisi için aşağıdaki şart sağlanıyorsa bu eğriye bir striksiyon eğrisi adı verilir:

$$\langle \delta'(u), (\sinh \theta a_2(u) + \cosh \theta a_3(u)) \rangle_L = 0 \quad (4.44)$$

Böylece, gerekli işlemlerden sonra kolayca görülebilir ki timelike dairesel yüzey üzerindeki δ eğrisinin striksiyon eğrisi olması için

$$-\sigma \sinh \theta + \mu \cosh \theta = 0 \quad (4.45)$$

sağlanmalıdır. Eğer bir timelike dairesel yüzey için

$$\langle a_2, M' \rangle_L = \langle a_3, M' \rangle_L = 0 \quad (4.46)$$

ifadesi sağlanıyorsa bu durumda $\sigma = \mu = 0$ elde edilir. O halde $e(u) = a_1(u)$ olur. Buradan da, $a_2(u) = n(u)$, $a_3(u) = b(u)$ ve $\alpha(u) = \frac{1}{\kappa(u)}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, striksiyon eğrileri spacelike taban eğrisine sahip bir timelike tüp yüzeyi oluşturur.

Bu durumda bir timelike dairesel yüzey için $\langle a_2, M' \rangle \neq 0$ veya $\langle a_3, M' \rangle \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, bu yüzey bir timelike tüp yüzeyi olamaz.

4.2.2 Timelike dairesel yüzeylerin yerel singülerlikleri

Şimdi, timelike dairesel yüzeylerin singülerliklerini inceleyeceğiz. (4.40) denklemin-den kolayca görülebilir ki bir P timelike dairesel yüzeyinin (u_0, θ_0) 'da bir singüler noktasının olması için gerek ve yeter şart

$$\|P_u \times_L P_\theta\|_L(u_0, \theta_0) = \sqrt{(r \sinh \theta_0 + \alpha(u_0))^2 + (\sigma(u_0) \sinh \theta_0 - \mu(u_0) \cosh \theta_0)^2} = 0$$

olmasıdır. Buradan, P timelike dairesel yüzeyinin (u_0, θ_0) 'da singüler olması için

$$r \sinh \theta_0 + \alpha(u_0) = 0, \quad (4.47)$$

$$\sigma(u_0) \sinh \theta_0 - \mu(u_0) \cosh \theta_0 = 0 \quad (4.48)$$

ifadeleri sağlanmalıdır. Bu durumda, $\sinh \theta_0 = \frac{-\alpha(u_0)}{r}$ elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki durumlar söz konusudur:

(1) $\alpha(u_0) = 0$ olsun. O halde, $\theta_0 = 0$ olup (4.48) eşitliğinden $\mu(u_0) = 0$ elde edilir. Böylece, $M'(u_0) = \sigma(u_0)a_2(u_0)$ bulunur. Dolayısıyla, P timelike dairesel yüzeyinin singüler noktası $P(u_0, 0) = M(u_0) + ra_2(u_0)$ ile verilir. Özel olarak $\sigma(u_0) = 0$ olursa, M taban eğrisi de u_0 noktasında singüler noktaya sahiptir.

(2) $\alpha(u_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.48) eşitliğinde, $\sinh \theta_0 = \frac{-\alpha(u_0)}{r}$ yazılarak, $\frac{-\sigma(u_0)\alpha(u_0)}{r} = \mu(u_0) \cosh \theta_0$ elde edilir. O halde, iki alt durum söz konusudur:

(i) $\mu(u_0) = 0$ olsun. O halde, $\sigma(u_0) = 0$ olur. Böylece, P timelike dairesel yüzeyi $\mu(u_0) = \sigma(u_0) = 0$ ve $\theta_0 = \sinh^{-1}\left(\frac{-\alpha(u_0)}{r}\right)$ şartlarını sağlayan (u_0, θ_0) için bir singüler noktaya sahiptir.

(ii) $\mu(u_0) \neq 0$ olsun. O halde, $\sigma(u_0) \neq 0$ olur. Böylece, (4.47) eşitliğinden $\theta_0 = \cosh^{-1}\left(\frac{\sigma(u_0)\alpha(u_0)}{\mu(u_0)r}\right)$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $\theta_0 = \sinh^{-1}\left(\frac{-\alpha(u_0)}{r}\right)$ olduğu bilindiği için, hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs fonksiyonunun tanımları kullanılarak,

$$\theta_0 = \ln \left(\frac{-\alpha(u_0)(\mu(u_0) + \sigma(u_0))}{r\mu(u_0)} \right)$$

elde edilir. Ayrıca, $\cosh^2 \theta_0 - \sinh^2 \theta_0 = 1$ olduğundan, $\alpha^2(u_0)(\sigma^2(u_0) - \mu^2(u_0)) = r^2\mu^2(u_0)$ bulunur. Böylece, P timelike dairesel yüzeyi $\alpha^2(u_0)(\sigma^2(u_0) - \mu^2(u_0)) = r^2\mu^2(u_0)$ ve $\theta_0 = \ln \left(\frac{-\alpha(u_0)(\mu(u_0) + \sigma(u_0))}{r\mu(u_0)} \right)$ şartlarını sağlayan (u_0, θ_0) noktasında bir singüler noktaya sahiptir. Burada, $\frac{-\alpha(u_0)(\mu(u_0) + \sigma(u_0))}{\mu(u_0)} > 0$ dir.

Şimdi, yukarıda incelenen singülerlikler ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 4.2.1. $\alpha(u) = u, \sigma(u) = 0, \mu(u) = 0$ seçelim. O halde, $M'(u) = ua_1(u)$ olur. $a_1(u) = (\sinh u, 0, \cosh u)$ spacelike vektörünü seçersek,

$$a_2(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$$

$$a_3(u) = (0, -1, 0)$$

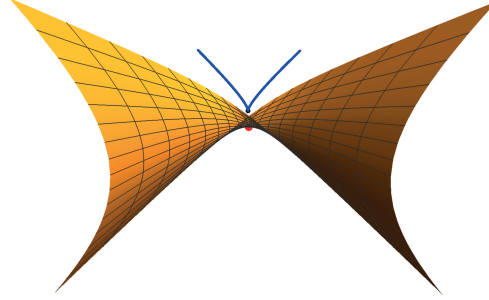
elde edilir. Böylece, $M_1'(u) = u a_1(u) = (u \sinh u, 0, u \cosh u)$ bulunur. Bu ifadeden integral alınarak, taban eğrisi

$$M_1(u) = (u \cosh u - \sinh u, 0, u \sinh u - \cosh u)$$

olarak elde edilir. Burada integral sabitleri 0 olarak seçilmiştir. Açıkça görülür ki $M_1(u)$ eğrisi $u_0 = 0$ noktasında singüler noktaya sahiptir. Böylece, $M_1(u)$ taban eğrisine sahip P_1 timelike dairesel yüzeyi

$$P_1(u, \theta) = (u \cosh u - \sinh u + r \sinh \theta \cosh u, r \cosh \theta, u \sinh u - \cosh u + r \sinh \theta \sinh u)$$

biçimindedir. Durum (1)'den, P_1 timelike dairesel yüzeyinin $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$ 'da singüler noktası olduğu görülebilir. $r = 1$ için, yüzeyin grafiği şekil 4.1'de verilmiştir.

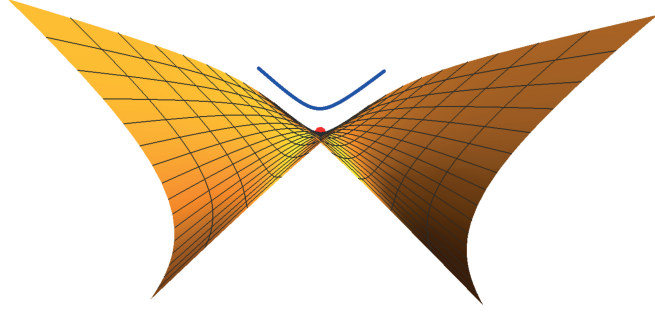


Şekil 4.1 $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$ 'da singülerliğe sahip P_1 timelike dairesel yüzeyi ve bu yüzeyin $u_0 = 0$ noktasında singülerliğe sahip M_1 taban eğrisi

Şimdi, $\alpha(u) = u, \sigma(u) = 1, \mu(u) = 0$ seçelim. O halde, $M_2'(u) = u a_1(u) + a_2(u)$ olur. Benzer hesaplamalarla, M_2 taban eğrisi tarafından üretilen P_2 timelike dairesel yüzeyi

$$P_2(u, \theta) = (u \cosh u + r \sinh \theta \cosh u, r \cosh \theta, u \sinh u + r \sinh \theta \sinh u)$$

şeklinde elde edilir. Durum (1) gereği, $P_2(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyinin $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$ noktasında singüler noktası olduğu görülebilir. Ancak, M_2 taban eğrisinin $u_0 = 0$ 'da singüler noktası yoktur. $r = 1$ için, yüzeyin grafiği şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2 $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$ noktasında singülerliğe sahip P_2 timelike dairesel yüzeyi ve bu yüzeyin regüler M_2 taban eğrisi

Örnek 4.2.2. $\alpha(u) = -1, \sigma(u) = \sqrt{2}, \mu(u) = 1$ seçelim. O halde, $M'(u) = -a_1(u) + \sqrt{2}a_2(u) + a_3(u)$ olur. $a_1(u), a_2(u), a_3(u)$ vektörleri Örnek 4.2.1'deki gibi seçilirse,

$$M'(u) = (-\sinh u + \sqrt{2} \cosh u, -1, \sqrt{2} \sinh u - \cosh u)$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınır ve integral sabitleri sıfır seçilirse

$$M(u) = (-\cosh u + \sqrt{2} \sinh u, -u, -\sinh u + \sqrt{2} \cosh u)$$

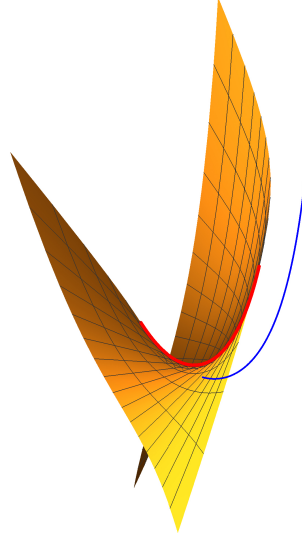
elde edilir. O halde $M(u)$ taban eğrisi tarafından üretilen $P(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyi, $r = 1$ için

$$P(u, \theta) = ((-1 + \sinh \theta) \cosh u + \sqrt{2} \sinh u, -u - \cosh \theta, (-1 + \sinh \theta) \sinh u + \sqrt{2} \cosh u)$$

şeklinde elde edilir. Kolayca görülebilir ki $\theta_0 = \ln(1 + \sqrt{2})$ ve her $u \in I$ için Durum (2)(ii)'nin şartları sağlanır. Dolayısıyla, $P(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyi

$$\delta(u) = P(u, \theta_0) = (\sqrt{2} \sinh u, -u - \sqrt{2}, \sqrt{2} \cosh u)$$

striksiyon eğrisinin tüm noktalarında singülerliklere sahiptir. P yüzeyi ve M taban eğrisinin grafikleri şekil 4.3'de verilmiştir.



Şekil 4.3 δ striksiyon eğrisi (kırmızı) boyunca singülerliğe sahip olan P timelike dairesel yüzeyi ve M taban eğrisi (mavi)

4.2.3 Timelike roller coaster yüzeyler

Bu kısımda, üreten çemberleri eğrilik çizgisi olan timelike dairesel yüzeyler araştırılacaktır. Daha sonra, bu tip yüzeylerin özel bir sınıfı olan timelike roller coaster yüzeylerin parametrik denklemi elde edilip, geometrik özellikleri incelenecektir.

Regüler bir $P(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyinde üreten çemberlerin eğrilik çizgisi olması için

$$N_\theta = \lambda(\theta)P_\theta$$

olmalıdır. Burada, $\lambda(\theta)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu duruma denk olarak, θ -parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için

$$N_\theta \times_L P_\theta = 0 \tag{4.49}$$

olmalıdır. Gerekli işlemler yapıp, P yüzeyinin regülerliği kullanılsa

$$r\mu + \alpha\sigma \cosh \theta - \alpha\mu \sinh \theta \tag{4.50}$$

elde edilir.

Burada, üç durum söz konusudur:

(i) $\alpha = \sigma = \mu = 0$ olsun. Bu durumda, $M' = 0$ olup, taban eğrisi sabit bir noktadır. Dolayısıyla, timelike dairesel yüzey r yarıçaplı pseudo-küredir.

(ii) $\sigma = \mu = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda, $M' = \alpha a_1$ olup, taban eğrisinin teğet vektörü a_1 vektörüne paraleldir. Yani, M' teğet vektörü her noktada çember düzlemine diktir. O halde, dairesel yüzey spacelike taban eğrisine sahip bir timelike tüp yüzey olur.

(iii) $\alpha = \mu = 0$ ve $\sigma \neq 0$ olsun. Bu durumda, $M' = \sigma a_2$ olur. Eğer σ sabit bir fonksiyon ise, sabit bir M_0 vektörü için

$$M = M_0 + \sigma a_1$$

elde edilir. O halde,

$$\|P - M_0\|_L^2 = \sigma^2 + r^2$$

bulunur. Bu ise tüm çember noktalarının $\sqrt{\sigma^2 + r^2}$ yarı çaplı bir pseudo-küre üzerinde yattığını gösterir.

Diğer yandan, eğer σ sabit değilse, M timelike eğrisi tarafından üretilen timelike dairesel yüzeye **timelike roller coaster yüzey** adı verilir. Şimdi, timelike roller coaster yüzeylerin bazı geometrik özelliklerini verelim. M timelike taban eğrisinin yay uzunluğu parametresi t olsun. Bu durumda, M timelike taban eğrinin Frenet çatısı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = a_2, & n(t) &= \frac{\frac{de}{dt}}{\|\frac{de}{dt}\|} = \frac{a_1 + \beta a_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} \\ b(t) &= e(t) \times_L n(t) = \frac{\beta a_1 - a_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Burada, $-\langle t, t \rangle = \langle n, n \rangle = \langle b, b \rangle = 1$ dir. Böylece,

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}},$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

bağıntıları sağlanır. Frenet formüllerinden,

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sigma}, \quad \tau(t) + \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\beta/du}{\sigma(1 + \beta^2)} \quad (4.53)$$

(4.52) denklemindeki a_2 ve a_3 ifadeleri, (4.37) denkleminde yerine yazılırsa, timelike taban eğrili timelike roller coaster yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R(t, \theta) = M(t) + r(\sinh \theta e(t) + \cosh \theta [\sin \varphi(t)n(t) + \cos \varphi(t)b(t)]) \quad (4.54)$$

ile verilir. Burada, $\varphi'(t) = \tau(t)$ sağlanır.

Tanım 4.2.2 (Timelike Roller coaster yüzeyin striksiyon eğrisi). Bir $R(t, \theta)$ timelike roller coaster yüzeyi üzerindeki

$$\delta(t) = M(t) + r(\sinh \theta e(t) + \cosh \theta [\sin \varphi(t)n(t) + \cos \varphi(t)b(t)])$$

eğrisinin bir striksiyon eğrisi olabilmesi için δ aşağıdaki şartı sağlamalıdır.

$$\langle \delta'(t), (\sinh \theta(t)e(t) + \cosh \theta(t)[\sin \varphi(t)n(t) + \cos \varphi(t)b(t)]) \rangle_L = 0 \quad (4.55)$$

Böylece, eğrinin striksiyon eğrisi olabilmesi için

$$\sinh \theta_0 = 0$$

olmalıdır.

Teorem 4.2.1. $R(t, \theta)$ timelike roller coaster yüzeyinin $R(t_0, \theta_0)$ noktasında singüleriğinin olması için gerek ve yeter şart

$$\theta_0 = 0 \quad (4.56)$$

olmasıdır.

İspat. R timelike roller coaster yüzeyinin (t_0, θ_0) 'da singüler noktasının olması için

$$\|R_{t_0} \times_L R_{\theta_0}\|_L = 0$$

olmalıdır. O halde,

$$\|R_{t_0} \times_L R_{\theta_0}\|_L = r \sinh \theta_0 (r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi(t_0) + 1)^{\frac{1}{2}} = 0$$

bulunur. Böylece,

$$r \sinh \theta_0 = 0$$

olur. $r \neq 0$ olduğundan, timelike roller coaster yüzeyin (t_0, θ_0) noktasında singüler noktasının olması için

$$\sinh \theta_0 = 0$$

sağlanmalıdır. O halde ispat tamamlanır. \square

Sonuç 4.2.1. Timelike roller coaster yüzeyin singüler noktalarının geometrik yeri ile striksiyon eğrisi çakışır.

Teorem 4.2.2. Bir $R(t, \theta)$ regüler timelike roller coaster yüzeyi için aşağıdakiler sağlanır.

1. λ_1 ve λ_2 asli eğrilikleri aşağıdaki gibi verilir;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\kappa \cos \varphi}{(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^{\frac{1}{2}}}, \\ \lambda_2 &= \frac{r\kappa' \cos \varphi - r^2 \kappa^3 \sinh \theta \cos^3 \varphi - \kappa(\cos \varphi \sinh \theta + r\tau \sin \varphi)}{(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^{\frac{3}{2}} \sinh \theta}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

2. K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki gibidir;

$$K = \frac{\kappa \cos \varphi [r^2 \kappa^3 \cos^3 \varphi \sinh \theta + \kappa(\cos \varphi \sinh \theta + r\tau \sin \varphi) - r\kappa' \cos \varphi]}{(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^2 \sinh \theta}, \quad (4.58)$$

$$H = -\frac{\{2r^2 \kappa^3 \cos^3 \varphi \sinh \theta + \kappa(2 \cos \varphi \sin h\theta + r\tau \sin \varphi) - r\kappa' \cos \varphi\}}{2(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^{\frac{3}{2}} \sinh \theta}. \quad (4.59)$$

3. Flat timelike roller coaster yüzeyler timelike düzlemlerin alt kümesidir.

4. Minimal timelike roller coaster yüzeyler timelike düzlemlerin alt kümesidir.

İspat. $R(t, \theta)$ timelike roller coaster yüzeyinin birinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} R_\theta &= r \cosh \theta e + r(\sin \varphi n + \cos \varphi b) \sinh \theta, \\ R_t &= (1 + r\kappa \cosh \theta \sin \varphi)e + r\kappa \sinh \theta n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda yüzeyin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= -(1 + r\kappa \cosh \theta \sin \varphi)^2 + r^2 \kappa^2 \sinh^2 \theta, \\ F &= -r(r\kappa \sin \varphi + \cosh \theta), \\ G &= -r^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

biçiminde elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} R_t \times R_\theta(t, \theta) &= r \sinh \theta (-r\kappa \sinh \theta \cos \varphi e + (1 + r\kappa \cosh \theta \sin \varphi) \cos \varphi n \\ &\quad + (\sin \varphi - r\kappa \cosh \theta \cos^2 \varphi) b) \end{aligned} \quad (4.61)$$

olup, buradan

$$\|R_t \times R_\theta\|_L = r \sinh \theta (r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (4.62)$$

bulunur. Bu durumda, yüzeyin birim normali $v(t, \theta)$ şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} v(t, \theta) &= \frac{R_t \times_L R_\theta}{\|R_t \times_L R_\theta\|_L} \\ &= r \sinh \theta (-r\kappa \sinh \theta \cos \varphi e + (1 + r\kappa \cosh \theta \sin \varphi) \cos \varphi n \\ &\quad + (\sin \varphi - r\kappa \cosh \theta \cos^2 \varphi) b) (1 + r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ayrıca, yüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} R_{tt} &= (r\kappa' \cosh \theta \sin \varphi + \tau r\kappa \cosh \theta \cos \varphi - r\kappa^2 \sinh \theta) e \\ &\quad + (\kappa + r\kappa^2 \cosh \theta \sin \varphi + r\kappa' \sinh \theta) n + (r\tau\kappa \sinh \theta) b \end{aligned}$$

$$R_{t\theta} = r\kappa \sinh \theta \sin \varphi e + r\kappa \cosh \theta n$$

$$R_{\theta\theta} = r \sinh \theta e + r \cosh \theta \sin \varphi n + r \cosh \theta \cos \varphi b$$

biçiminde bulunur. O halde yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\sqrt{r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1}} \{-\kappa \cos \varphi + r(-\kappa^2 \cosh \theta \sin 2\varphi + \tau\kappa \sinh \theta \sin \varphi) \\ &\quad - r\kappa' \sinh \theta \cosh \varphi + r^2 \kappa^3 (\sinh^2 \theta - \cosh^2 \theta \sin^2 \varphi) \cos \varphi\} \\ f &= \frac{-r\kappa(r\kappa \sin \varphi + \cosh \theta) \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1}} \\ g &= \frac{-r^2 \kappa \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

olarak hesaplanır. Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği, sırasıyla, aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\kappa \cos \varphi [r^2 \kappa^3 \cos^3 \varphi \sinh \theta + \kappa (\cos \varphi \sinh \theta + r\tau \sin \varphi) - r\kappa' \cos \varphi]}{(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^2 \sinh \theta}, \\
H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\
&= - \frac{\{2r^2 \kappa^3 \cos^3 \varphi \sinh \theta + \kappa (2 \cos \varphi \sinh \theta + r\tau \sin \varphi) - r\kappa' \cos \varphi\}}{2(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^{\frac{3}{2}} \sinh \theta}.
\end{aligned}$$

Böylece (1) ve (2) ispatlanmış olur.

Timelike roller coaster yüzeyin asli eğrilikleri $\lambda_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ eşitliği kullanılarak bulunabilir. Yukarıda verilen K ve H formülleri kullanılarak da bu değerler

$$\lambda_1 = \frac{-fF + gE}{EG - F^2}, \quad \lambda_2 = \frac{eG - fF}{EG - F^2}$$

ifadelerine dönüşür. O halde birinci ve ikinci temel form katsayıları yerine yazılarak kolayca gösterilebilir ki

$$\lambda_1 = \frac{-\kappa \cos \varphi}{(1 + r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{r\kappa' \cos \varphi - r^2 \kappa^3 \sinh \theta \cos^3 \varphi - \kappa (\cos \varphi \sinh \theta + r\tau \sin \varphi)}{(r^2 \kappa^2 \cos^2 \varphi + 1)^{\frac{3}{2}} \sinh \theta}$$

olur. Bu da (1)'i ispatlar.

Şimdi (3)'ü ispatlayalım. R timelike roller coaster yüzeyinin bir flat yüzey olması için,

$$\tilde{K}(t, \theta) = \kappa \cos \varphi [r^2 \kappa^3 \cos^3 \varphi \sinh \theta + \kappa (\cos \varphi \sinh \theta + r\tau \sin \varphi) - r\kappa' \cos \varphi] \equiv 0$$

olmalıdır. Bu durumda, $\tilde{K}(t, \theta) + (\partial^2 / \partial \theta^2) \tilde{K}(t, \theta) = 0$ olduğundan, $\kappa \tau \cosh \varphi + \kappa' \sinh \varphi = 0$ elde edilir. Bu ise, $\kappa' \equiv \tau \equiv 0$ olması demektir. Böylece, timelike roller coaster yüzey bir timelike düzlem parçası olur. (4) de benzer yöntemle $H \equiv 0$ şartı kullanılarak ispatlanır. \square

2. durum. a_2 spacelike bir vektör olsun. O halde, $a_3 = a_1 \times_L a_2$ timelike vektörü tanımlanabilir. Böylece, $\{a_1, a_2, a_3\}$ cümlesi aşağıdaki şartları sağlayan bir pseudo-ortonormal çatı oluşturur.

$$\begin{aligned} a_1 \times_L a_2 &= a_3 \\ a_2 \times_L a_3 &= -a_1 \\ a_1 \times_L a_3 &= a_2 \end{aligned}$$

O halde, bu çatının türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Burada β , a_1 eğrisinin geodezik eğriliğidir.

M eğrisinin $M'(u)$ teğet vektörü, yukarıda elde edilen çatı kullanılarak

$$M'(u) = \alpha(u)a_1(u) + \sigma(u)a_2(u) + \mu(u)a_3(u)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $\alpha = \alpha(u), \sigma = \sigma(u), \mu = \mu(u)$, M' teğet vektörünün koordinat fonksiyonlarıdır. a_2 ve a_3 vektörleri, M taban eğrisinin her noktasında çember düzlemi için bir pseudo-ortonormal baz oluşturur. O halde, timelike dairesel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(u, \theta) = M(u) + r(\cosh \theta a_2(u) + \sinh \theta a_3(u)) \quad (4.65)$$

biçiminde elde edilir. Bu şekilde verilen bir timelike dairesel yüzeyin geometrik özellikleri 1. durumdakine benzer olarak bulunabilir.

Ayrıca benzer hesaplamalar ile spacelike taban eğrisi tarafından üretilen timelike roller coaster yüzeyin parametrik ifadesi aşağıdaki gibi verilir:

$$R(t, \theta) = \begin{cases} M(t) + r \cosh \theta e + r \sinh \theta (-\sinh \varphi n + \cosh \varphi b), & \varepsilon_b = -1 \text{ ise} \\ M(t) + r \cosh \theta e + r \sinh \theta (\cosh \varphi n - \sinh \varphi b), & \varepsilon_b = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.66)$$

Burada, $\varphi'(t) = -\tau(t)$ ve $\varepsilon_b = \langle b, b \rangle_L$ 'dir. 1. duruma benzer şekilde, spacelike taban eğrili timelike roller coaster yüzeylerin de geometrik özellikleri verilebilir.

4.3 Spacelike ve Timelike Dairesel Yüzeylerin Bölünmüş Kuaterniyonik Gösterimi

Bu kısımda 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında dairesele yüzeyler ve roller coaster yüzeylerin denklemleri bölünmüş kuaterniyon çarpımları ve homotetik hareketler cinsinden yeniden elde edilecektir.

Öncelikle spacelike dairesele yüzeyler ve spacelike roller coaster yüzeylerin bölünmüş kuaterniyonlar ve homotetik hareketler cinsinden ifadelerini verelim.

Teorem 4.3.1. $P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta)$ 3-boyutlu Lorentz uzayında (4.3) denklemlle tanımlanan spacelike dairesele yüzey olsun. O halde P spacelike dairesele yüzeyi,

(i) bölünmüş kuaterniyon çarpımı yardımıyla

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)q_{a_1}(u, \theta) *_L a_2(u) \quad (4.67)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)\mathbf{M}_{a_1}(u, \theta)a_2(u) \quad (4.68)$$

şeklinde verilir. Burada, $q_{a_1}(u, \theta) = \cos \theta + \sin \theta a_1$ timelike vektör kısma sahip bir timelike bölünmüş kuaterniyondur. Ayrıca, $\mathbf{M}_{a_1}, q_{a_1}(u, \theta)$ timelike birim bölünmüş kuaterniyonuna karşılık gelen matris gösterimidir.

İspat. $P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta)$ 3-boyutlu Lorentz uzayında (4.3) denklemlle tanımlanan spacelike dairesele yüzey olsun. Eğer, $q_{a_1}(u, \theta) = \cos \theta + \sin \theta a_1(u)$ timelike bölünmüş kuaterniyonu ve $a_2(u)$ pür bölünmüş kuaterniyonuna bölünmüş kuaterniyon çarpımı uygulanırsa

$$q_{a_1}(u, \theta) *_L a_2(u) = \cos \theta a_2(u) + \sin \theta a_3(u)$$

elde edilir. Son eşitlik, (4.3) ifadesinde yerine yazılırsa (4.67) denklemlne ulaşılır.

Diğer taraftan $M(u)$, $r(u)$, M_{a_1} sırasıyla öteleme vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, (4.68) eşitliği homotetik hareket olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.3.2. Üç boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatısı $\{e, n, b\}$ olan birim hızlı bir $M(t)$ spacelike eğrisi verilsin. $R(t, \theta)$ ise $M(t)$ taban eğrisi tarafından üretilen spacelike roller coaster yüzey olsun. $q_{D_1}(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta D_1(t)$ ya da $q_{D_2}(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta D_2(t)$ birim bölünmüş kuaterniyonları verilsin. Bu durumda $R(t, \theta)$ spacelike roller coaster yüzeyinin denklemi

(i) $q_{D_1}(t, \theta) \times e(t)$ ya da $q_{D_2}(t, \theta) \times e(t)$ bölünmüş kuaterniyon çarpımı ile

$$R(t, \theta) = M(t) + r q_{D_1}(t, \theta) *_L e(t), \quad \varepsilon_b = -1 \text{ ise}$$

$$R(t, \theta) = M(t) + r q_{D_2}(t, \theta) *_L e(t), \quad \varepsilon_b = 1 \text{ ise}$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R(t, \theta) = M(t) + r \mathbf{M}_{D_1} e(t), \quad \varepsilon_b = -1 \text{ ise}$$

$$R(t, \theta) = M(t) + r \mathbf{M}_{D_2} e(t), \quad \varepsilon_b = 1 \text{ ise}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $D_1(t, \theta) = -\sinh(\int \tau(t) dt) n(t) - \cosh(\int \tau(t) dt) b(t)$ ve $D_2(t, \theta) = -\cosh(\int \tau(t) dt) n(t) - \sinh(\int \tau(t) dt) b(t)$ ile tanımlıdır. Ayrıca \mathbf{M}_{D_1} ve \mathbf{M}_{D_2} ise sırasıyla $q_{D_1}(t, \theta)$ ve $q_{D_2}(t, \theta)$ birim bölünmüş kuaterniyonlarına karşılık gelen matris gösterimleridir.

İspat. $R(t, \theta)$, $M(t)$ spacelike birim hızlı eğrisi tarafından oluşturulan bir spacelike roller coaster yüzey olsun. O halde, yüzeyin denklemi

$$R(t, \theta) = \begin{cases} M(t) + r \cos \theta e(t) + r \sin \theta (\cosh \varphi n(t) - \sinh \varphi b(t)), & \varepsilon_b = -1 \text{ ise} \\ M(t) + r \cos \theta e(t) + r \sin \theta (-\sinh \varphi n(t) + \cosh \varphi b(t)), & \varepsilon_b = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.69)$$

ile verilir. Burada $\varphi(t)$, M taban eğrisinin $\tau(t)$ burulmasının bir ilkel fonksiyonudur. Ayrıca, $D_1(t, \theta) = -\sinh(\int \tau(t) dt) n(t) - \cosh(\int \tau(t) dt) b(t)$ ve $D_2(t, \theta) =$

$-\cosh(\int \tau(t)dt)n(t) - \sinh(\int \tau(t)dt)b(t)$ alınsın. $q_{D_1}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta D_1(s)$, $q_{D_2}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta D_2(s)$ birim kuaterniyonu ve $t(s)$ pure kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımını uygulayarak,

$$\begin{aligned} q_{D_1}(s, \theta) *_L t(s) &= \cos \theta t(s) + \sin \theta (\cosh \varphi n(s) - \sinh \varphi b(s)) \\ q_{D_2}(s, \theta) *_L t(s) &= \cos \theta t(s) + \sin \theta (-\sinh \varphi n(s) + \cosh \varphi b(s)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikler, (4.69) denklemlerinde yerine yazılırsa istenen denklemler elde edilir.

Diğer yandan $M(s), r(s), \mathbf{M}_{D_i} (i = 1, 2)$ sırasıyla dönüşüm vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, istenilen eşitlikler homotetik hareket olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Örnek 4.3.1.

$$M(t) = \left(\frac{5u}{3}, \frac{4}{9} \cos\left(\frac{3u}{4}\right), \frac{4}{9} \sin\left(\frac{3u}{4}\right) \right)$$

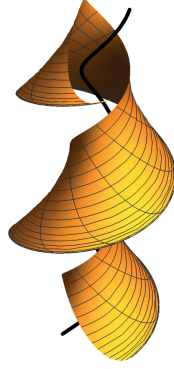
eşitliği ile verilen birim hızlı timelike eğrinin Frenet çatısı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} a_1(u) &= e(u) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \sin\left(\frac{3u}{4}\right), \frac{4}{3} \cos\left(\frac{3u}{4}\right) \right) \\ a_2(u) &= n(u) = \left(0, -\cos\left(\frac{3u}{4}\right), -\sin\left(\frac{3u}{4}\right) \right) \\ a_3(u) &= b(u) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \sin\left(\frac{3u}{4}\right), -\frac{5}{3} \cos\left(\frac{3u}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

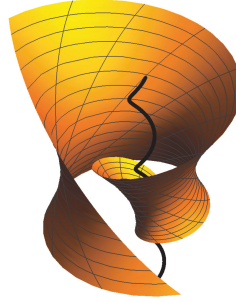
$q_e(u, \theta) = \cos \theta + \sin \theta e(u)$ timelike birim kuaterniyonu kullanılarak, $P_{(M,n,b,r)}(u, \theta)$ dairesel yüzeyi

$$P_{(M,n,b,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)q_e(u, \theta) *_L n(u)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu denklemde $r = 1$ ve $r = \frac{u}{2}$ alınarak elde edilen dairesel yüzeyler, sırasıyla, şekil 4.4 ve şekil 4.5 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.4 $P_{(M,n,b,1)}$ spacelike dairesel yüzeyi



Şekil 4.5 $P_{(M,n,b,u/2)}$ spacelike dairesel yüzeyi

Örnek 4.3.2. Birim hızlı spacelike $M(t) = (\cosh t, 0, \sinh t)$ eğrisi verilsin. O halde, bu eğri için Frenet çatısı şu şekilde hesaplanır:

$$e(t) = (\sinh t, 0, \cosh t)$$

$$n(t) = (\cosh t, 0, \sinh t)$$

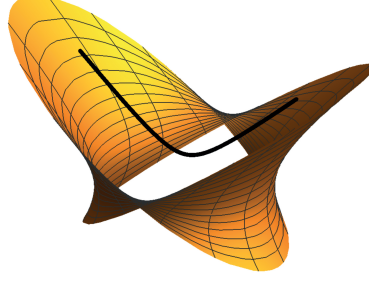
$$b(t) = (0, 1, 0)$$

$$\kappa(t) = 1, \tau(t) = 0$$

Bu durumda b binormal vektörü spacelike bir vektördür. $\varphi = -\int \tau dt = 0$ seçilirse, $D_2 = -n$ iken, $q_{D_2}(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta D_2(t)$ birim bölünmüş kuaterniyonu kullanarak, spacelike roller coaster yüzey

$$R(t, \theta) = M(t) + r q_{D_2} *_L e$$

biçiminde elde edilir. $r = 3$ için spacelike roller coaster yüzey şekil 4.6 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.6 $r = 3$ için $R(t, \theta)$ spacelike roller coaster yüzeyi

Şimdi timelike dairesel yüzeyler ve timelike roller coaster yüzeylerin kuaterniyonik çarpımlar ve homotetik hareketler cinsinden ifadeleri verilecektir.

Bu bölümdeki teoremlerin ispatları spacelike dairesel yüzeyler ve spacelike roller coaster yüzeylerdeki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde verilebilir. Bu sebeple, sadece teoremler ifade edilecektir.

Teorem 4.3.3. $P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta)$ 3-boyutlu Lorentz uzayında (4.37) ya da (4.65) denklemiyle tanımlanan timelike dairesel yüzey olsun. O halde P timelike yüzeyi, $\varepsilon_{a_3} = \langle a_3, a_3 \rangle_L$ olmak üzere

(i) bölünmüş kuaterniyon çarpımı ile

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)q_{a_1}(u, \theta) *_L a_2(u), \quad \varepsilon_{a_3} = -1 \text{ ise}$$

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)q_{a_1}(u, \theta) *_L a_3(u), \quad \varepsilon_{a_3} = 1 \text{ ise}$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)M_{a_1}a_2(u), \quad \varepsilon_{a_3} = -1 \text{ ise}$$

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(u, \theta) = M(u) + r(u)M_{a_1}a_2(u), \quad \varepsilon_{a_3} = 1 \text{ ise}$$

biçiminde verilir. Burada, $q_{a_1}(u, \theta) = \cosh \theta + \sinh \theta a_1(u)$ spacelike vektör kısma sahip timelike birim bölünmüş kuaterniyondur. Ayrıca M_{a_1} , ise $q_{a_1}(u, \theta)$ timelike birim bölünmüş kuaterniyonuna karşılık gelen matris gösterimidir.

Teorem 4.3.4. Üç boyutlu Lorentz uzayında Frenet çatısı $\{e, n, b\}$ olan birim hızlı bir $M(t)$ eğrisi verilsin. $R(t, \theta)$ ise $M(t)$ taban eğrisi tarafından üretilen timelike roller coaster yüzey olsun.

1. Eğer $M(t)$ taban eğrisi spacelike bir eğriyse, $q_{D_1}(t, \theta) = \cosh \theta + \sinh \theta D_1(t)$ veya $q_{D_2}(t, \theta) = \cosh \theta + \sinh \theta D_2(t)$ birim bölünmüş kuaterniyonları kullanılarak, $R(t, \theta)$ timelike roller coaster yüzeyi

(i) $q_{D_1}(t, \theta) \times e$ ya da $q_{D_2}(t, \theta) \times e$ bölünmüş kuaterniyon çarpımı ile

$$R(t, \theta) = M(t) + r q_{D_1} *_L e, \quad \varepsilon_b = -1 \text{ ise}$$

$$R(t, \theta) = M(t) + r q_{D_2} *_L e, \quad \varepsilon_b = 1 \text{ ise}$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R(t, \theta) = M(t) + r M_{D_1} e, \quad \varepsilon_b = -1 \text{ ise}$$

$$R(t, \theta) = M(t) + r M_{D_2} e, \quad \varepsilon_b = 1 \text{ ise}$$

şeklinde verilir. Burada, $D_1(t, \theta) = -\cosh(\int \tau(t) dt) n(t) - \sinh(\int \tau(t) dt) b(t)$ ve $D_2(t, \theta) = -\sinh(\int \tau(s) dt) n(t) - \cosh(\int \tau(t) dt) b(t)$ biçiminde tanımlıdır. Ayrıca M_{D_1} ve M_{D_2} sırasıyla $q_{D_1}(t, \theta)$ ve $q_{D_2}(t, \theta)$ birim kuaterniyonlarına karşılık gelen matris gösterimleridir.

2. Eğer $M(t)$ taban eğrisi timelike bir eğriyse, $q_D(t, \theta) = \sinh \theta + \cosh \theta D(t)$ birim kuaterniyonu kullanılarak, $R(t, \theta)$ timelike roller coaster yüzeyinin denklemi

(i) $q_D(t, \theta) *_L e$ bölünmüş kuaterniyon çarpımı ile

$$R(t, \theta) = M(t) + r q_D *_L e$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$R(t, \theta) = M(t) + r M_D e$$

şeklinde verilir. Burada, $D = -\cos(\int \tau(t)dst)n(t) - \sin(\int \tau(t)dt)b(t)$ biçiminde tanımlıdır. Ayrıca M_D , $q_D(t, \theta)$ birim bölünmüş kuaterniyonuna karşılık gelen matris gösterimidir.

Örnek 4.3.3. $M(u) = (M_1(u), M_2(u), M_3(u))$ bileşenleri aşağıdaki gibi olan bir spacelike helis olsun (Ali 2010).

$$\begin{aligned} M_1(u) &= \frac{e^{\frac{u}{6}}}{\sqrt{35}} \\ M_2(u) &= \frac{e^{\frac{u}{6}}}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{35}} \cos \left[\frac{\sqrt{35}u}{6} \right] + \sin \left[\frac{\sqrt{35}u}{6} \right] \right) \\ M_3(u) &= \frac{e^{\frac{u}{6}}}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{35}} \sin \left[\frac{\sqrt{35}u}{6} \right] - \cos \left[\frac{\sqrt{35}u}{6} \right] \right) \end{aligned}$$

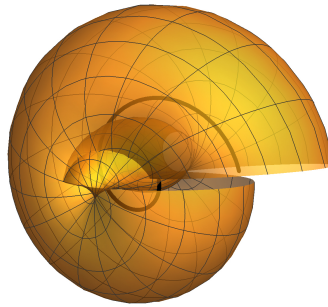
M eğrisi boyunca Frenet çatısı şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} a_1(u) &= e(u) = \frac{6}{\sqrt{35}} \left(\frac{1}{6}, \cos\left(\frac{\sqrt{35}}{6}u\right), \sin\left(\frac{\sqrt{35}}{6}u\right) \right) \\ a_2(u) &= n(u) = (0, -\sin u, \cos u) \\ a_3(u) &= b(u) = \frac{1}{\sqrt{35}} \left(6, \cos\left(\frac{\sqrt{35}}{6}u\right), \sin\left(\frac{\sqrt{35}}{6}u\right) \right) \end{aligned}$$

Buradan, $a_3(s)$ vektörünün bir timelike vektör olduğu görülür. $q_e = \cosh \theta + \sinh \theta e$ birim bölünmüş kuaterniyonu kullanılarak timelike dairesel yüzey

$$P(u, \theta) = M(u) + r(u)q_e(u, \theta) *_L n(u)$$

şeklinde ifade edilir. $r = \frac{1}{2}$ için timelike dairesel yüzeyin grafiği şekil 4.7 ile verilmiştir.



Şekil 4.7 $r = 1/2$ için $P(u, \theta)$ timelike dairesel yüzeyi

Örnek 4.3.4. $M(t) = (0, \cos t, \sin t)$ birim hızlı spacelike eğrisi verilsin. Bu durumda eğri boyunca Frenet elemanları

$$\mathbf{e}(t) = (0, -\sin t, \cos t),$$

$$\mathbf{n}(t) = (0, -\cos t, -\sin t),$$

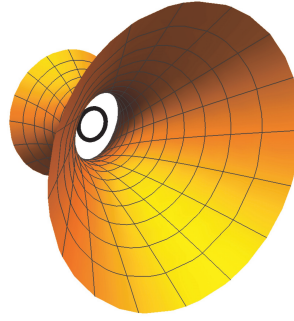
$$\mathbf{b}(t) = (-1, 0, 0),$$

$$\kappa(t) = 1, \quad \tau(t) = 0.$$

biçiminde bulunur. O halde binormal vektör bir timelike vektördür. $\varphi = -\int \tau dt = \ln 2$ alalım. $\mathbf{D}_1 = -(5/4)\mathbf{n}(t) - (3/4)\mathbf{b}(t)$ olmak üzere, $q_{\mathbf{D}_1} * L\mathbf{e}$ bölünmüş kuaterniyon çarpımı kullanılarak

$$R(t, \theta) = \left(-\frac{5}{4}r \sinh \theta, \cos t \left(1 + \frac{3}{4}r \sinh \theta \right) - r \cosh \theta \sin t, \right. \\ \left. \sin t \left(1 + \frac{3}{4}r \sinh \theta \right) + r \cosh \theta \cos t \right).$$

timelike roller coaster yüzeyi elde edilir. $r = 2$ için yüzeyin grafiği şekil 4.8 ile verilmiştir.



Şekil 4.8 $r = 2$ için M spacelike taban eğrili R timelike roller coaster yüzeyi

5. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ DAİRESSEL YÜZEYLER

Tezin bu kısmında genelleştirilmiş dairesel yüzeyler incelenecektir. Bu kapsamda, ilk olarak genelleştirilmiş dairesel yüzeylerin tanımı verilecek, sonrasında bu yüzeylere dair bazı geometrik özellikler incelenecektir. Genelleştirilmiş tüp yüzeyleri özel bir genelleştirilmiş dairesel yüzeydir. Bu tip kanal (tüp) yüzeyleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Gross 1997, Doğan 2012, Gök 2017) Daha sonra, genelleştirilmiş dairesel yüzeylerin kuaterniyonik gösterimleri verilecek ve bu yüzeyler üzerindeki parametre eğrilerinin bazı özel eğriler olma durumları ile ilgili karakterizasyonlar elde edilecektir.

5.1 Öklid Uzayda Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeyler ve Bazı Geometrik Uygulamaları

Tanım 5.1.1. Bir genelleştirilmiş dairesel yüzey

$$P(s, \theta) = P_{(M, a_2, a_3, r)}(s, \theta) = M(s) + r(\theta)(\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlı

$$P : I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dönüşümüdür. Burada $M, a_2, a_3 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğriler ve $r(\theta)$ ise θ parametresinin bir fonksiyonudur. Ayrıca, her $s \in I$ için $\langle a_2, a_2 \rangle = \langle a_3, a_3 \rangle = 1, \langle a_2, a_3 \rangle = 0$ şartları sağlanır. M eğrisi genelleştirilmiş dairesel yüzeyin taban eğrisi, $r(\theta)$ yarıçap fonksiyonu, a_2, a_3 eğri çifti ise genelleştirilmiş dairesel yüzeyi oluşturan çatı, $\theta \rightarrow M(s) + r(\theta)(\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s))$ standart çemberleri de genelleştirilmiş dairesel yüzeyi üreten çemberler olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 5.1.2 (Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeyin Küresel Çatısı). (5.1) denkleminde verilen genelleştirilmiş dairesel yüzeyi üreten çemberleri içeren her bir düzlemin normali a_1 vektörü olmak üzere, M taban eğrisini a_1 vektör alanının Gauss dönüşümü altında görüntüsü ile elde edilen küresel eğrinin s yay parametresi ile

yeniden parametrelendirelim. Bu durumda

$$a_2(s) = a_1'(s) \quad \text{ve} \quad a_3(s) = a_1(s) \times a_2(s)$$

biçiminde tanımlıdır. O halde, $a_1(s)$ birim hızlı bir eğri olduğundan $\|a_2(s)\| = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\{a_1, a_2, a_3\}$ cümlesi M eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluştururlar. Tanımlanan bu çatı

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_1 \rangle &= \langle a_2, a_2 \rangle = \langle a_3, a_3 \rangle = 1 \\ \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle a_2, a_3 \rangle = \langle a_3, a_1 \rangle = 0 \\ a_1 \times a_2 &= a_3, \quad a_3 \times a_1 = a_2, \quad a_2 \times a_3 = a_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

eşitliklerini ve aşağıda verilen Frenet formüllerini gerçekler.

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Burada β , $a_1(s)$ eğrisinin geodezik eğriliğidir. Elde edilen ortonormal çatı yardımıyla, $M'(s)$ teğet vektörü,

$$M' = \alpha(s)a_1(s) + \sigma(s)a_2(s) + \mu(s)a_3(s) \quad (5.4)$$

biçiminde ifade edilebilir.

O halde, (5.1) denklemi ile tanımlı genelleştirilmiş dairesel yüzeyin (5.3) denklemi ile verilen küresel çatıya göre temel form katsayılarını hesaplayalım. P yüzeyinin s ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} P_s &= (\alpha - r \cos \theta)a_1 + (\sigma - r\beta \sin \theta)a_2 + (\mu + r\beta \cos \theta)a_3 \\ P_\theta &= (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta)a_2 + (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta)a_3 \end{aligned}$$

olup, $x = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta - \dot{r} \cos \theta$ alınırsa

$$\begin{aligned} P_s &= (\alpha - r \cos \theta)a_1 + (\sigma - r\beta \sin \theta)a_2 + (\mu + r\beta \cos \theta)a_3 \\ P_\theta &= -y(\theta)a_1(s) + x(\theta)a_3(s) \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. Burada "" ile üstüne "." konulan fonksiyonunun θ parametresine göre türevi gösterilmektedir. O halde

$$P_s \times P_\theta = (\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)a_1 + (r \cos \theta - \alpha)(xa_2 + ya_3) \quad (5.6)$$

bulunur. Buradan da

$$w = \|P_s \times P_\theta\| = \sqrt{(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)^2 + (r \cos \theta - \alpha)^2(r^2 + \dot{r}^2)} \quad (5.7)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned} N(s, \theta) &= \frac{P_s \times P_\theta}{\|P_s \times P_\theta\|} \\ &= \frac{1}{w} \left[(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)a_1 + (r \cos \theta - \alpha)(xa_2 + ya_3) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

şeklinde verilir.

O halde, yüzeyin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= (\alpha - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2 \\ F &= r(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta) + \dot{r}(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) = -\sigma y + \mu x + r^2\beta \quad (5.9) \\ G &= x^2 + y^2 = r^2 + \dot{r}^2 \end{aligned}$$

biçimindedir. Diğer yandan, $P(s, \theta)$ genelleştirilmiş dairesel yüzeyinin ikinci mer-
tebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} P_{ss} &= (\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)a_1 \\ &\quad + (\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta)a_2 \\ &\quad + (\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta)a_3 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$P_{\theta\theta} = -\dot{y}a_2 + \dot{x}a_3 \quad (5.11)$$

$$P_{s\theta} = ya_1 + x\beta a_2 - y\beta a_3 \quad (5.12)$$

biçiminde bulunur.

Böylece, yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{1}{w} \left[\begin{array}{c} (\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta) \\ +x(r \cos \theta - \alpha)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta) \\ +y(r \cos \theta - \alpha)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta) \end{array} \right], \quad (5.13)$$

$$f = \frac{1}{w} [(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)y - \beta(r \cos \theta - \alpha)(r^2 + \dot{r}^2)], \quad (5.14)$$

$$g = \frac{y^2}{w} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{x}{y} \right) (r \cos \theta - \alpha) \quad (5.15)$$

eşitlikleri ile ifade edilir.

Kolayca gösterilebilir ki (5.9), (5.13)–(5.15) eşitliklerinde $r = sbt$ alındığında, bu eşitlikler (3.26), (3.28)–(3.30) denklemlerine dönüşecektir.

O halde, (5.9), (5.13)–(5.15) eşitliklerinden faydalanılarak, K Gauss eğriliği ile H ortalama eğriliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K = \frac{1}{w^2} \left\{ \begin{aligned} & \left((\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta) \right. \\ & + x(r \cos \theta - \alpha)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta) \\ & \left. + y(r \cos \theta - \alpha)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta) \right) y^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{x}{y} \right) (r \cos \theta - \alpha) \\ & - [(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)y - \beta(r \cos \theta - \alpha)(r^2 + \dot{r}^2)]^2 \end{aligned} \right\},$$

$$H = \frac{1}{2w^3} \left\{ \begin{aligned} & (\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)[(r^2 + \dot{r}^2)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta) \\ & - 2\dot{r}y(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) - 2ry(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta)] \\ & + (r \cos \theta - \alpha)[(r^2 + \dot{r}^2)(\alpha x - rx \cos \theta + \sigma'x - r\beta'x \sin \theta - \mu\beta x - r\beta^2 x \cos \theta \\ & + \sigma\beta y - r\beta^2 y \sin \theta + \mu'y + r\beta'y \cos \theta) + 2\beta r(r^2 + r'^2)(-\sigma \sin \theta + \mu \cos \theta + r\beta) \\ & + 2\beta\dot{r}(r^2 + r'^2)(\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta) + y^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{x}{y} \right) (\alpha^2 + \sigma^2 + \mu^2 + r^2 \cos^2 \theta \\ & + r^2\beta^2 - 2\alpha r \cos \theta - 2\sigma r\beta \sin \theta + 2\mu r\beta \cos \theta) \end{aligned} \right\}.$$

Kolayca gösterilebilir ki, r sabit alındığında

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{x}{y} \right) &= -\frac{1}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

olup, elde edilen bu ifadeler K ve H değerlerinde yerine yazılırsa (3.31) ve (3.32) denklemlerine ulaşılır.

Şimdi genelleştirilmiş dairesel yüzey örnekleri verelim.

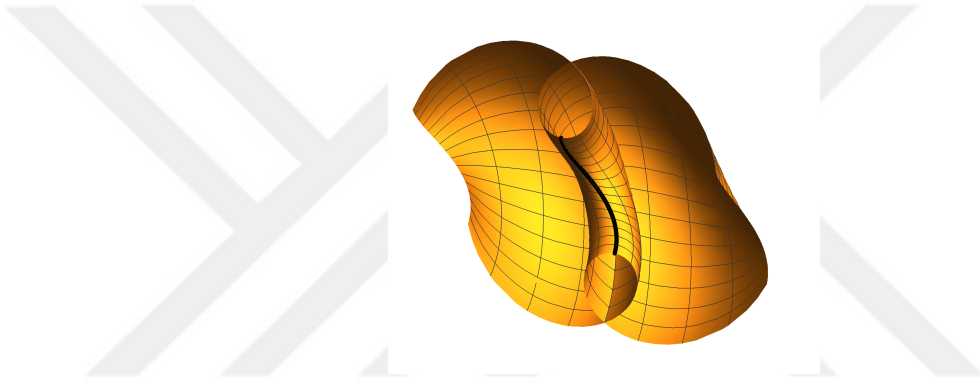
Örnek 5.1.1. $M(u) = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ helis eğrisini ele alalım. Ayrıca,

$$a_1(u) = (0, \cos u, \sin u), \quad a_2(u) = (0, -\sin u, \cos u), \quad a_3(u) = (1, 0, 0)$$

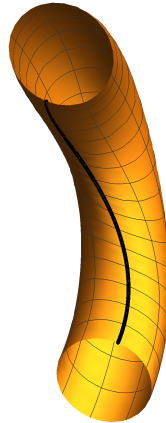
seçelim. Bu durumda, taban eğrisi M olan genelleştirilmiş dairesel yüzeyin parametrik denklemi

$$P(u, \theta) = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}} + r(\theta) \sin \theta, \frac{\sin u}{\sqrt{2}} - r(\theta) \cos \theta \sin u, \frac{u}{\sqrt{2}} + r(\theta) \cos \theta \cos u\right)$$

biçiminde elde edilir. $P(u, \theta)$ genelleştirilmiş dairesel yüzeyinin grafiği $r = \theta/4$ ve $r = \sin \theta$ için sırasıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.1 $r = \theta$ için elde edilen genelleştirilmiş dairesel yüzey



Şekil 5.2 $r = \sin \theta$ için elde edilen genelleştirilmiş dairesel yüzey

Tanım 5.1.3. (Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeyin Striksiyon Eğrisi) Bir $P(s, \theta)$ genelleştirilmiş dairesel yüzeyi üzerindeki

$$\delta(s) = M(s) + r(\theta)(\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)) \quad (5.16)$$

eğrisinin bir striksiyon eğrisi olabilmesi için aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

$$\langle \delta'(s), (\cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)) \rangle = 0 \quad (5.17)$$

Gerekli işlemler yapıldığında,

$$\sigma \cos \theta + \mu \sin \theta = 0$$

olduğu görülür.

$$M'(s) = \alpha a_1 + \sigma a_2 + \mu a_3 \quad (5.18)$$

olmak üzere, genelleştirilmiş dairesel yüzeyde

$$\langle a_2, M' \rangle = \langle a_3, M' \rangle = 0, \forall u \in I$$

şartı sağlanıyorsa,

$$\sigma = \mu = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$M' = \alpha a_1$$

olur. Yani $\{e, n, b, \kappa, \tau\}$, M eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere $a_1 = e$, $a_2 = n$, $a_3 = b$ ve $\alpha = \frac{1}{\kappa}$ elde edilir. O halde, striksiyon eğrileri bir genelleştirilmiş tüp yüzeyi üzerindedir.

Teorem 5.1.1. $P(s, \theta)$ genelleştirilmiş dairesel yüzeyinin (s_0, θ_0) noktasında singüler noktalarının olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} (r \cos \theta_0 - \alpha(s_0))(r^2(\theta_0) + \dot{r}^2(\theta_0)) &= 0, \\ \sigma(s_0)x(\theta_0) + \mu(s_0)y(\theta_0) - r(\theta_0)\dot{r}(\theta_0)\beta(s_0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $P(s, \theta)$ dairesel yüzeyinin (s_0, θ_0) için singüler noktasının olması için

$$\|P_s \times P_\theta\| (s_0, \theta_0) = 0$$

sağlanmalıdır. O halde,

$$\|P_s \times P_\theta\| (s_0, \theta_0) = \sqrt{(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)^2 + (r \cos \theta - a)^2(r^2 + \dot{r}^2)} = 0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} (r \cos \theta_0 - \alpha(s_0))(r^2(\theta_0) + \dot{r}^2(\theta_0)) &= 0, \\ \sigma(s_0)x(\theta_0) + \mu(s_0)y(\theta_0) - r(\theta_0)\dot{r}(\theta_0)\beta(s_0) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki durumlar söz konusudur:

(i) $r(\theta_0) \cos \theta_0 - \alpha(s_0) = 0$ ve $r^2(\theta_0) + \dot{r}^2(\theta_0) \neq 0$ olsun. Bunu da üç alt durumda inceleyelim.

(a) $r(\theta_0) = 0$ ve $\dot{r}(\theta_0) \neq 0$ olsun. O halde, $\alpha(s_0) = 0$ bulunur. Diğer yandan $x(\theta_0) = \dot{r}(s_0) \sin \theta_0$ ve $y(\theta_0) = -\dot{r}(\theta_0) \cos \theta_0$ elde edilir. Bulunan bu ifadeler (5.19)'de ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\sigma(s_0) \sin \theta_0 - \mu(s_0) \cos \theta_0 = 0$$

ifadesine ulaşılır.

(b) $r(\theta_0) \neq 0$ ve $\dot{r}(\theta_0) = 0$ olsun. O halde $\cos \theta_0 = \frac{\alpha(s_0)}{r(\theta_0)}$ elde edilir. Ayrıca $x(\theta_0) = r(\theta_0) \cos \theta_0$ ve $y = r(\theta_0) \sin \theta_0$ yazılır. Bulunan ifadeler (5.19)'de ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\sigma(s_0) \cos \theta_0 + \mu(s_0) \sin \theta_0 = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\sigma(s_0)\alpha(s_0) \pm \mu(s_0)(r^2(\theta_0) - \alpha^2(s_0)) = 0$$

sonucuna ulaşılır.

(c) $r(\theta_0) \neq 0$, $|r(\theta_0)| > |\alpha(s_0)|$ ve $\dot{r}(\theta_0) \neq 0$ olsun. O halde $\cos \theta_0 = \frac{\alpha(s_0)}{r(\theta_0)}$ ve $\sin \theta_0 = \pm \frac{\sqrt{r^2(\theta_0) - \alpha^2(s_0)}}{r(\theta_0)}$ elde edilir. Bu durumda

$$x(\theta_0) = \frac{\dot{r}(\theta_0)\sqrt{r^2(\theta_0) - \alpha^2(s_0)}}{r(\theta_0)} + \alpha(s_0), \quad y(\theta_0) = \sqrt{r^2(\theta_0) - \alpha^2(s_0)} - \dot{r}(\theta_0)\frac{\alpha(s_0)}{r(\theta_0)}$$

bulunur. Elde edilen bu ifadeler de (5.19)'nin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(s_0)\dot{r}(\theta_0)}{r(\theta_0)}\sqrt{r^2(\theta_0) - \alpha^2(s_0)} + \sigma(s_0)\alpha(s_0) + \mu(s_0)(\sqrt{r^2(\theta_0) - \alpha^2(s_0)} - \dot{r}(\theta_0)\frac{\alpha(s_0)}{r(\theta_0)}) \\ - r(\theta_0)\dot{r}(\theta_0)\beta(s_0) = 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $r^2(\theta_0) + \dot{r}^2(\theta_0) = 0$ olsun. Dolayısıyla $r(\theta_0) = \dot{r}(\theta_0) = 0$ sağlanmalıdır. O halde $\alpha(s_0) = 0$ olup (s_0, θ_0) bir singüler noktadır. \square

5.2 Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeylerin Kuarterniyonik Gösterimi

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında bir genelleştirilmiş daireysel yüzeyin kuarterniyonik gösterimi ve homotetik hareket cinsinden ifadesi verilecektir.

Teorem 5.2.1. $P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta)$ 3-boyutlu Öklid uzayında (5.1) denklemiyle tanımlanan genelleştirilmiş daireysel yüzey olsun. O halde P genelleştirilmiş daireysel yüzeyi $q_{a_1}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta a_1$ olmak üzere

(i) kuarterniyon çarpımı yardımıyla

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta) = M(s) + r(\theta)q_{a_1} \times a_2 \quad (5.20)$$

(ii) homotetik hareket cinsinden

$$P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta) = M(s) + r(\theta)M_{a_1}(s, \theta)a_2 \quad (5.21)$$

biçiminde ifade edilir. Burada M_{a_1} , $q_{a_1}(s, \theta)$ birim kuarterniyonuna karşılık gelen matris gösterimidir.

İspat. $P_{(M,a_2,a_3,r)}(s, \theta)$, (5.1) denklemiyle verilen genelleştirilmiş dairesel yüzey olsun. $q_{a_1}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta a_1$ birim kuaterniyonu ve $a_2(s)$ pure kuaterniyonuna kuaterniyon çarpımını uygulayanak, $q_{a_1}(s, \theta) \times a_2(s) = \cos \theta a_2(s) + \sin \theta a_3(s)$ elde edilir. Bu eşitlik, (5.1) denkleminde yerine yazılırsa (5.20) bulunur.

Diğer yandan, $M(s)$, $r(\theta)$ ve M_{a_1} sırasıyla öteleme vektörü, homotetik skalar ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olsun. O halde, (5.21) eşitliği homotetik hareket olarak elde edilir. \square

5.3 Genelleştirilmiş Dairesel Yüzeylerin Parametre Eğrileri ile İlgili Bazı Karakterizasyonlar

Bu kısımda, genelleştirilmiş dairesel yüzey üzerindeki parametre eğrilerinin geodezik ve asimptotik olduğu durumlar incelenecektir.

Teorem 5.3.1. $P(s, \theta)$, (5.1) denklemini ile verilen bir genelleştirilmiş dairesel yüzey olsun. O halde, aşağıdaki durumlar sağlanır.

- (i) Genelleştirilmiş dairesel yüzeyin s -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta) + (r \cos \theta - \alpha)(\alpha x - r \cos \theta x \\ &+ \sigma'x + \beta(-\mu x + \sigma y + \mu'y - r\dot{r}\beta' - r^2\beta^2)) = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

olmasıdır.

- (ii) Genelleştirilmiş dairesel yüzeyin θ -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart $c, \theta_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $r(\theta) = c \sec(\theta + \theta_0)$ olmasıdır.

İspat. Yüzey üzerinde bir α eğrisinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart α'' ivme vektörünün yüzeye teğet olmasıdır. Yani, yüzeyin normali N olmak üzere, $\langle N, \alpha'' \rangle = 0$ olmalıdır.

(i) Dairesel yüzey üzerindeki s -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için $\langle N, P_{ss} \rangle = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle N, P_{ss} \rangle = \frac{1}{w} \left[(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta)(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta) \right. \\ \left. + (r \cos \theta - \alpha)(\alpha x - r \cos \theta x \right. \\ \left. + \sigma' x + \beta(-\mu x + \sigma y \right. \\ \left. + \mu' y - r\dot{r}\beta' - r^2\beta^2)) \right] = 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla istenilen elde edilir. Burada özel olarak $r = sbt$ alındığında, (3.99) eşitliği elde edilir.

(ii) Dairesel yüzey üzerindeki θ -parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $\langle N, P_{\theta\theta} \rangle = 0$ olmasıdır. O halde

$$\begin{aligned} \langle N, P_{\theta\theta} \rangle &= \frac{(-r^2 - 2\dot{r}^2 + r\ddot{r})(r \cos \theta - \alpha)}{w} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Buradan da, $(r \cos \theta - \alpha) \neq 0$ olduğundan

$$-r^2 - 2\dot{r}^2 + r\ddot{r} = 0$$

elde edilir. Elde edilen ikinci mertebeden sabit katsayılı adi diferensiyel denklemin çözümü ise c ve θ_0 reel sabitler olmak üzere $r(\theta) = c \sec(\theta + \theta_0)$ biçimindedir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 5.3.2. $P(s, \theta)$, 5.1 denklemi ile verilen bir genelleştirilmiş dairesel yüzey olsun. O halde, aşağıdaki durumlar söz konusudur.

(i) Genelleştirilmiş dairesel yüzeyin s -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} y(r \cos \theta - \alpha)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta) \\ - x(r \cos \theta - \alpha)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta \cos \theta) = 0 \\ -y(r \cos \theta - \alpha)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta) \\ + (\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)(\sigma\beta - r\beta^2 \sin \theta + \mu' + r\beta' \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

$$x(r \cos \theta - \alpha)(\alpha' - \sigma + r\beta \sin \theta) \\ -(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta)(\alpha - r \cos \theta + \sigma' - r\beta' \sin \theta - \mu\beta - r\beta^2 \cos \theta) = 0$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

- (ii) Genelleştirilmiş dairesel yüzeyin θ -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart ya $r(\theta) = c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olması ya da yüzeyin sabit yarıçaplı bir dairesel yüzey olmasıdır.

İspat. Yüzey üzerinde bir α eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart α'' ivme vektörünün yüzeyin normaline paralel olmasıdır. Yani, yüzeyin normali N olmak üzere, $N \times \alpha'' = 0$ olmalıdır.

(i) Dairesel yüzey üzerindeki s -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N \times P_{ss} = 0$ olmasıdır. Bu durumda, gerekli işlemler yapıldığında istenilen eşitlikler elde edilir.

(ii) Dairesel yüzey üzerindeki θ -parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N \times P_{\theta\theta} = 0$ olmasıdır. Gerekli işlemler yapıldığında kolayca görülebilir ki bu ifadenin sağlanması için

$$(r \cos \theta - \alpha)(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0 \\ -\dot{x}(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta) = 0 \\ -\dot{y}(\sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta) = 0$$

eşitlikleri gerçekleşmelidir. Bu durumda, $r \cos \theta - \alpha \neq 0$ olacağından

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} + r\ddot{r} = 0 \\ \sigma x + \mu y - r\dot{r}\beta = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla $\dot{r}(r + \ddot{r}) = 0$ elde edilir. O halde şu durumlar elde edilir.

1. $\dot{r} = 0$ olur. Bu da r 'nin sabit olması yani yüzeyin sabit yarıçaplı bir dairesel yüzey olması demektir.

2. $\ddot{r} + r = 0$ olur. İkinci mertebeden sabit katsayılı bu diferensiyel denklem çözümlenerek, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $r(\theta) = c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta$ elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır. □

5.3.1 Genelleştirilmiş dairesel yüzey üzerindeki loxodromik eğriler

Bu bölümde, 3.4.1 bölümündekine benzer olarak, genelleştirilmiş dairesel yüzeyler üzerindeki loxodromik eğriler incelenmiştir. Dolayısıyla 3.4.1 bölümündeki kavramlardan yararlanılmıştır.

Bir genelleştirilmiş dairesel yüzeyin birinci temel form katsayıları (5.9) ile verilir. Birinci temel form katsayıları (3.102) eşitliğinde yerine yazılırsa, loxodromik eğri ve paraleller arasındaki açı

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{Fdu + Gd\theta}{\sqrt{EGdu^2 + 2FGdud\theta + G^2d\theta^2}} \\ \cos \vartheta &= \frac{(-\sigma y + \mu x + r^2\beta)du + (r^2 + \dot{r}^2)d\theta}{\sqrt{((\alpha - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2)(r^2 + \dot{r}^2)du^2 \\ &\quad + 2(-\sigma y + \mu x + r^2\beta)(r^2 + \dot{r}^2)dud\theta + (r^2 + \dot{r}^2)^2d\theta^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, genelleştirilmiş dairesel yüzey üzerindeki tüm paralelleri sabit ϑ açısı ile kesen loxodromik eğri

$$\begin{aligned} &(-\sigma y + \mu x + r^2\beta)^2 du^2 - [(r^2 + \dot{r}^2)(\sigma^2 + \mu^2 + r^2\beta^2 \\ &- 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta + (\alpha - r \cos \theta)^2)] \cos^2 \vartheta du^2 \\ &+ [(r^2 + \dot{r}^2)^2 \sin^2 \vartheta] d\theta^2 + [2(r^2 + \dot{r}^2)(-\sigma y + \mu x + r^2\beta) \sin^2 \vartheta] dud\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

diferensiyel denklemini sağlar. Özel olarak, $\vartheta = 0$, alınırsa, eşitlik

$$\begin{aligned} &(-\sigma y + \mu x + r^2\beta)^2 - (r^2 + \dot{r}^2)(\sigma^2 + \mu^2 + r^2\beta^2 \\ &- 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta + (\alpha - r \cos \theta)^2) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi loxodromik eğri ve meridyenler arasındaki açı hesaplanabilir:

Benzer şekilde, (5.9) ile verilen birinci temel form katsayıları (3.101) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\cos \gamma = \frac{Edu + Fd\theta}{\sqrt{E^2 du^2 + 2EFdud\theta + EGd\theta^2}}$$

$$= \frac{[(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2] du + (-\sigma y + \mu x + r^2 \beta) d\theta}{\sqrt{\begin{aligned} &(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2 du^2 \\ &+ 2[(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 \\ &+ (\mu + r\beta \cos \theta)^2](-\sigma y + \mu x + r^2 \beta) dud\theta \\ &+ [(a - r \cos \theta)^2 + (\sigma - r\beta \sin \theta)^2 + (\mu + r\beta \cos \theta)^2](r^2 + r'^2) d\theta^2 \end{aligned}}}$$

bulunur. Bu durumda, genelleştirilmiş dairesel yüzey üzerindeki tüm paralleri sabit γ açısı ile kesen loxodromik eğrinin diferensiyel eşitliği

$$\begin{aligned} &[\sigma^2 + \mu^2 + r^2 \beta^2 - 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta \\ &+ (\alpha - r \cos \theta)^2] \sin^2 \gamma du^2 \\ &+ [2(\sigma^2 + \mu^2 + r^2 \beta^2 - 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta \\ &+ (\alpha - r \cos \theta)^2)(-\sigma y + \mu x + r^2 \beta)] \sin^2 \gamma dud\theta \\ &+ [(-\sigma y + \mu x + r^2 \beta)^2 - (r^2 + r'^2)(\sigma^2 + \mu^2 + r^2 \beta^2 \\ &- 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta + (\alpha - r \cos \theta)^2)] \cos^2 \gamma d\theta^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Özel olarak, $\gamma = 0$, alınırsa,

$$\begin{aligned} &(-\sigma y + \mu x + r^2 \beta)^2 - (r^2 + r'^2)(\sigma^2 + \mu^2 + r^2 \beta^2 \\ &- 2r\sigma\beta \sin \theta + 2r\mu\beta \cos \theta + (\alpha - r \cos \theta)^2) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Öklid uzayında dairesel yüzeyler Izumiya ve arkadaşları tarafından tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir (Izumiya vd. 2007). Hatta aynı çalışmada dairesel yüzeylerin özel bir sınıfı olan roller coaster yüzeylerin de parametrik denklemi verilip geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu çalışmadan sonra benzer bir çalışma Minkowski uzayında spacelike dairesel ve spacelike roller coaster yüzeyler için yapılmıştır. Bu tez çalışmasında dairesel yüzeyler üç boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır.

Tezin orijinal bölümlerini oluşturan 3. ve 4. bölümde üç boyutlu Öklid ve üç boyutlu Minkowski uzaylarında dairesel yüzeyler ele alınarak, bu yüzeylerin tanımı, bazı parametrik gösterimleri, karakterizasyonları, kuaterniyonik ve matris temsilleri ile geometrik uygulamaları verilmiştir. Özel bir dairesel yüzey çeşidi olan roller coaster yüzeyler 3-boyutlu Öklid uzayında Uzunoğlu ve arkadaşları tarafından tanımlanan $\{n, c, w\}$ çatısı ile ele alınarak, bu yüzeylerin de geometrik uygulamaları ile bazı sonuçlar verilmiştir.

Tezin yine orijinal kısmı olan son bölümünde dairesel yüzeylerde yarıçapı θ parametresine bağlı olan dairesel yüzeyler incelenmiştir. Bu tür yüzeyler genelleştirilmiş dairesel yüzey olarak adlandırılmıştır. Bu yüzeylerin geometrik özellikleri, kuaterniyonik ve matris temsilleri ve üzerindeki bazı özel parametre eğrileri ele alınmıştır.

Dairesel yüzeylere dair verilen özellikler, örnek ve görsellerle desteklenerek, konunun daha iyi anlaşılması hedeflenmiştir. Çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar ile dairesel yüzeylere dair birçok özellik verildiğinden, tez geometri alanında bu konuya dair önemli bir kaynak olarak düşünülebilir.

Daha sonraki çalışmalarda, dairesel yüzeyler ve genelleştirilmiş dairesel yüzeylerin Galile uzayında benzer özelliklerinin incelenmesi hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

- Abdel-Baky, R. and Ünlütürk, Y. 2016. *On the Curvatures of spacelike circular surfaces*. Kuwait J. Sci. 43(3); 50-58.
- Akutagawa, K. and Nishikawa, S. 1990. *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*. Tohoku Math. J. 42; 67-82.
- Ali, A.T. 2010. *Position vectors of spacelike general helices in Minkowski 3-space*. Nonlinear Analysis, 73; 1118-1126.
- Aslan, S. and Yaylı, Y. 2016a. *Canal Surfaces with Quaternions*. Adv. Applied Clifford Algebras, 26; 31-38.
- Aslan, S. and Yaylı, Y. 2016b. *Split Quaternions and Canal Surfaces in Minkowski 3-space*. International Journal of Geometry, Vol.5, No.2; 51-61.
- Ateş, F., Kocakuşaklı, E., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2018. *A study of the tubular surfaces constructed by the spherical indicatrices in Euclidean space*. Turkish Journal of Math., 4; 1711-1725.
- Babaarslan, M. and Yaylı, S. 2015. *Differential Equation of the Loxodrome on a Helicoidal Surface*. The Journal of Navigation; 962-970.
- Bastl, B., Jüttler, B., Lavicka, M., Schulz, T. and Sir, Z. 2014. *On the Parameterization of Rational Ringed Surfaces and Rational Canal Surfaces*. Math. in Computer Science. Vol.8, 2; 299-319.
- Beem, J. K., Ehrlich, P. E. and Easley, K.E. 1996. *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker, New York.
- Bizzarri, M. 2014. *Blending by Rational Canal and Ringed Surfaces*. Dissertation thesis. Faculty of Applied Sciences, University of West Bohemia.
- Bizzarri, M. and Lavicka, M. 2012. *A symbolic-numerical method for computing approximate parameterizations of canal surfaces*. Computer Aided-Design. 9; 846-857.
- Bottema, O. and Roth, B. 1979. *Theoretical Kinematics*. North-Holland Press, New York.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B. and Öztürk, G. 2017. *Canal surfaces in 4-dimensional Euclidean space*. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA). Vol.7, No.1;83-89.
- Choi, J.H. and Kim, Y.H. 2012. *Associated Curves of a Frenet Curve and their applications*. Appl. Math. and Comp. 218; 9116-9124.
- Cleave, J. P. 1980. *The form of the tangent developable at points of zero torsion an space curves*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 88; 403-407.

- Cui, L., Wang, D. and Dai, J.S. 2009. *Kinematic Geometry of Circular Surfaces With a Fixed Radius Based on Euclidean Invariants*. Journal of Mechanical Design, Volume 131.
- Dogan, F. 2012. *Genelleştirilmiş Kanal Yüzeyleri*. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Duggai, K. L. and Bejancu, A. 1996. *Lightlike submanifolds of semi-riemann manifolds and applications*. Kluwer academic publishers, Dordrecht.
- Duldul, M. 2004. *Homotetik Uzay Hareketleri ve Holditch Teoremi*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Gorjanc, S. and Jurkin, E. 2015. *Circular Surfaces $CS(\alpha, p)$* . Filomat, 29; 725-737.
- Gök, İ. 2017. *Quaternionic approach of canal surfaces constructed by some new ideas*. Adv. Appl. Clifford Algebras, 27; 1175-1190.
- Gray, A. 1998. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press.
- Gross, A.D. 1994. *Analyzing Generalized Tubes*. Proc. SPIE 2354, <https://doi.org/10.1117/12.189111>.
- Hacısalihoglu, H.H. 1980. *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- Hacısalihoglu, H.H. 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara.
- Hacısalihoglu, H.H. 2000. *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*. Ankara.
- Hamilton, W.R. 1844. *On Quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra*. London Edinb. Dublin. Philos. Mag. J. Sci. 25(3); 489-495.
- Inoguchi, J. 1998. *Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space*. Tokyo J. Math., 21(1); 141-152.
- Ishikawa, G. 1993. *Determinacy of the Envelope of the Osculating Hyperplanes to a Curve*. Bull. London Math. Soc., 25(6); 603-610.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2001. *Singularities of ruled surfaces in E^3* . Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 130; 1-11.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2003. *Special curves and ruled surfaces*. Contributions to Algebra and Geometry, 44; 203-212.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2003. *Geometry of ruled surfaces*. Applicable Math. in the Golden Age. 44; 203-212.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. *New Special Curves and Developable Surfaces*. Turkish Journal of Mathematics, 28; 153-163.

- Izumiya, S., Saji, K. and Takeuchi, N. 2007. *Circular Surfaces*. Advances in Geometry, 7(2); 295-313.
- Izumiya, S., Nagai, T., Saji, K. 2011. *Great circular surfaces in the three-sphere*. Differ. Geom. Appl. 29; 409-425.
- Karacan, M. K. and Bukcu, B. 2007. *An Alternative Moving Frame for Tubular Surface around the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-space*. Mathematica Moravica, Vol. II; 47-54.
- Kocakuşaklı, E., Tuncer, O.O., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2017. *A new representation of canal surfaces with split quaternions in Minkowski 3-space*. Adv. Appl. Clifford Algebras, 27; 1387-1409.
- Kula, L. 2003. *Bölinmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları*. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Lancret, M.A. 1806. *Memorie sur les courbes a double courbure*. Memories presentes a l'Institut, 1; 416-454.
- Lü, W. and Pottmann, H. 1996. *Pipe surfaces with rational spine curve are rational*. Computer Aided Geometric Design, 13; 327-339.
- Macit, N. and Duldul, M. 2014. *Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4* . Turk. J. Math. 38; 1023-1037.
- Marsh, D. 2005. *Applied Geometry For Computer Graphics and CAD*. Springer Undergraduate Math. Series.
- Miyaoka, R. and Takeuchi, N. 1992. *A note on Ogiue-Takagi conjecture on a characterization of Euclidean 2-spheres*. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Volume 46; 129-135.
- Mond, D. 1982. *On the tangent developable of a space curve*. Math. Proc. Camb.
- Ogiue, K. and Takagi, A. 1984. *A submanifold which contains many extrinsic circles*. Tsukuba J. Math.; 171-182.
- Ogiue, K. and Takeuchi, N. 1993. *Hula hoop surfaces*. J. Geometry, 46; 127-132.
- Ogiue, K. and Takeuchi, N. 1994. *A sphere can be characterized as a smooth ovaloid which contains one circle through each point*. J. Geometry. 49; 163-165.
- O' Neill, B. 1983. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, Inc, New York.
- Özdemir, M. and Ergin, A.A. 2006. *Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space*. Journal of Geometry and Physics, 56; 322-336.
- Ozdemir, M. 2009. *The roots of a split quaternion*. Appl. Math. Lett. 22; 258-263.

- Özdoğan, S. 2016. *Alternatif hareketli çatılara göre bazı özel eğrileri*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 64, Ankara.
- Özdoğan, S., Tuncer, O.O., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2018. *Some new types of associated curves in Euclidean 3-space*. An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 26(1); 205-221.
- Peternell, M. and Pottmann, H. 1997. *Computing rational parametrizations of canal surfaces*. J. Symbolic Computation. 23; 255-266.
- Porteus, I.R. 1991. *The normal singularities of submanifold*. J. Diff. Geometry. 5; 543-564.
- Pottmann, H., Wallner, J. 2001. *Computational line geometry*. Mathematics and Visualization, Springer-Verlag, Berlin.
- Pratt, M.J. 1995. *Cyclides in Computer Aided Geometric Design II*. Comput. Aided Geom. Design, 12; 131-152.
- Ratcliffe, J.G. 2005. *Foundations of Hyperbolic Manifolds Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Volume 149, Springer, New York.
- Sabuncuoğlu, A. 2004. *Diferensiyel Geometri*. Nobel Basımevi, Ankara.
- Shcherbak, O. P. 1986. *Projectively dual space curves and Legendre singularities*. Sel. Math. Sov. 5, no:4; 391-421.
- Soni, A.H. and Ting, K.L. 1983. *Instantaneous Kinematics of a Plane in Spherical Motion*. ASME J. Mech., Transm., Autom. Des., 105; 560-568.
- Srinivas, Y.L. and Dutta, D. 1994. *An intuitive procedure for constructing geometrically complex objects using cyclides*. Computer Aided Design, 26; 327-335.
- Takeuchi, N. 1985. *A sphere as a surface which contains many circles*. J. Geometry, 24; 123-130.
- Takeuchi, N. 2000. *Cyclides*. Hokkaido Math. J., 29; 195-200.
- Ting, K.L. and Soni, A.H. 1983. *Instantaneous Kinematics of a Plane in Space Motion*. ASME J. Mech., Transm., Autom. Des., 105; 552-559.
- Tosun, M., Küçük, A. and Gungor, M.A. 2006. *The homothetic motions in the Lorentzian 3-space*. Acta Math. Sci. 26B(4); 711-719.
- Tunçer, Y. 2011. *On Geometry of the First and The Second Fundamental Forms of Canal Surfaces*. arXiv:1106.3177, 7 pages.
- Uzunoglu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. *A new approach on curves of constant precession*. Applied Math. Comput. 275; 317-323.
- Xu, Z., Feng, R. and Sun G.J. 2006. *Analytic and algebraic properties of canal surfaces*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 195; 220-228.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeynep ÇANAKCI

Doğum Yeri : Malatya

Doğum Tarihi : 21/02/1987

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : 20 Mayıs Vakfı Turgut Özal Lisesi (YDA) (2001-2005)

Lisans : Fırat Üniversitesi, Matematik Bölümü (2006-2010)

Yüksek Lisans : Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2010-2013)
İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Pedagojik Formasyon
(2010-2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

- TÜBİTAK -Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (2013-Halen)

Yayımları:

- Çanakcı, Z., Tuncer, O.O., Gök, İ. and Yaylı, Y., The construction of circular surfaces with quaternions, Asian-Eur. J. Math., (2018) Vol.12, No:1.
- Tuncer, O.O., Çanakcı, Z., Gök, İ. and Yaylı, Y., Circular surfaces with split quaternionic representations in Minkowski 3-space, Adv. Appl. Clifford Algebr., (2018), 28:63.