ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

RADİKALLER YARDIMIYLA HALKALARIN YAPILARININ İNCELENMESİ

Mete Burak ÇALCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2019

TEZ ONAYI

Mete Burak ÇALCI tarafından hazırlanan "**Radikaller Yardımıyla Halkaların Yapılarının İncelenmesi**" adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

18/06/2019

Mete Burak ÇALCI

ÖZET

Doktora Tezi

RADİKALLER YARDIMIYLA HALKALARIN YAPILARININ İNCELENMESİ

Mete Burak ÇALCI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı anlatılmaktadır. İkinci bölümde çalışmanın genelinde kullanılacak temel ön bilgiler ve tanımlar verilmektedir. Üçüncü bölümde J-terslenebilir halkaların temel özellikleri incelenmekte, ardından J-terslenebilir halkaların bazı genelleştirmeleri incelenmektedir. Dördüncü bölümde J-yansımalı halka kavramı tanıtılmakta, bu halka sınıfının temel özellikleri araştırılmakta ve mevcut halka sınıfları ile J-yansımalı halkalar arasındaki ilişkiler incelendikten sonra J-yansımalı halkaların genişlemeleri üzerinde durulmaktadır. Son bölümde çalışma sonucunda elde edilen sonuçları kapsayan bir değerlendirme yapılmaktadır.

Haziran 2019, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler : İndirgenmiş halka, terslenebilir halka, yansımalı halka, simetrik halka, J-terslenebilir halka, J-yansımalı halka, temiz halka, yarı kutuplu halka, matris halkası

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A STUDY OF STRUCTURE OF RINGS VIA RADICALS

Mete Burak ÇALCI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

This thesis consists of five chapters. The first chapter is the introduction of the study. In the second chapter, basic concepts and definitions which are necessary for the thesis are given. In the third chapter, general properties of J-reversible rings are investigated, after that some extensions of J-reversible rings are searched. In the fourth chapter, we introduce the concept of J-reflexive ring, examine the main features of this ring class, and explore the extensions of the ring of J-reflexive rings after examining the relationships between the existing ring classes and the J-reflexive rings. In the last section, an evaluation is carried out covering the results obtained in the study.

June 2019, 47 pages

Key Words : Reduced ring, reversible ring, reflexive ring, symmetric ring, J-reversible ring, J-reflexive ring, clean ring, quasipolar ring, matrix ring

TEŞEKKÜR

Biricik kızım Zeynep'e...

Doktora eğitimi boyunca bilgisinden faydalandığım, birlikte çalışmaktan onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU' na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI' ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); tez çalışmalarımı titizlikle izleyen, bilgi, öneri ve düşünceleriyle yol gösteren hocalarım Sayın Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN' a (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Sayın Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); tez çalışmalarıma bilgi ve birikimleriyle destek veren, dokuz aylık yurt dışı araştırma sürecimde her türlü soru ve sorunlarımla ilgilenen Sayın Prof. Dr. Huanyin Chen'e (Hangzhou Normal Üniversitesi Matematik Bölümü); tüm süreç boyunca her an yanımda olan, kahrımı çeken, tezin her aşamasında büyük emekleri olan, sürekli sevgisini hissettiğim sevgili eşim Tuğçe ÇALCI'ya; bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan kıymetli anne ve babama; tez çalışmamı yurt içi doktora burs programıyla destekleyerek bana maddi olanak sağlayan TÜBİTAK'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

Mete Burak ÇALCI
Ankara, Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK i

ÖZET ii

ABSTRACT iii

TEŞEKKÜR iv

SİMGELER DİZİNİ vi

1. GİRİŞ 1

2. KURAMSAL TEMELLER 4

2.1 Temel Tanımlar ve Denklikler 4

3. J-TERSLENEBİLİR HALKALAR 15

3.1 J-Terslenebilir Halkaların Genel Özellikleri 15

3.2 J-Terslenebilir Halka Genişlemeleri 26

4. J-YANSIMALI HALKALAR 31

4.1 J-Yansımalı Halkaların Genel Özellikleri 31

4.2 J-Yansımalı Halka Genişlemeleri 37

5. SONUÇ 42

KAYNAKLAR 44

ÖZGEÇMİŞ 46

SİMGELER DİZİNİ

$comm(a)$	a ile değişmeli olan elemanların kümesi
$comm^2(a)$	a ile değişmeli olan elemanlarla değişmeli olan elemanların kümesi
$r_R(X)$	X in R deki sağ sıfırlayanı
$l_R(X)$	X in R deki sol sıfırlayanı
${}_RM$	M sol R-modül
$\prod_{i\in I} R_i$	R_i halkalarının direkt çarpımı
$\bigoplus_{i\in I} R_i$	R_i halkalarının direkt toplamı
$R[x]$	R halkası üzerine kurulan polinomlar halkası
$R[[x]]$	R halkası üzerine kurulan kuvvet serisi halkası
$C(R)$	R halkasının merkezi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$U(R)$	R halkasının tersinir elemanlarının kümesi
$N(R)$	R halkasının tüm üstel sıfır elemanlarının kümesi
R^{qnil}	R halkasının tüm yarı üstel sıfır elemanlarının kümesi
$I(R;V)$	R halkasının V modülü ile oluşturulan ideal genişlemesi
$K_s(R)$	R üzerindeki genelleştirilmiş matris halkası
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipinde matris halkası
$T_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris halkası
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathrm{Ker}\theta$	θ homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{Im}\theta$	θ homomorfizmasının görüntü kümesi

1. GİRİŞ

Geometride bölümlü (division) halkaların ortaya çıkışıyla birlikte, modern cebirdeki değişmeli olmayan halkalar, değeri yadsınamaz bir hale gelmiştir. Bugün bilinen ilk değişmeli olmayan halka örneği, Hamilton tarafından 3-boyutlu cebir örnekleri araştırılırken ortaya çıkmış olan kuaterniyon halkasıdır. Hamilton'un vermiş olduğu bu örnekle birlikte, değişmeli olmayan halka kavramı cebir literatürüne girmiştir. Değişmeli olmayan halka teorisi, 19. ve 20. yüzyıllarda pek çok bilim adamı için yeni ve çok zengin bir araştırma sahası olarak ortaya çıkmıştır. Değişmeli olmayan halka sınıfları değişmeli halka sınıflarından çok daha geniş bir çalışma alanına sahip olduğundan pek çok açık problemi bünyesinde barındırmaktadır. Değişmeli halkalar daha eski bir tarihe sahip olduğundan, değişmeli halkalar için cevabı bilinen pek çok soru, değişmeli olmayan halkalar için halen bir problem olarak durmaktadır. Değişmeli halkalar için var olan bir özelliği, değişmeli olmayan halkalarda araştıran ilk matematikçi Emmy Noether'dir. Noether değişmeli halkalar için tanımladığı artan zincir şartını (ascending chain condition), değişmeli olmayan halkalara genellemiştir. Bu yaklaşımıyla araştırmacılar için bir ilham kaynağı olmuştur. Söz konusu örnekle birlikte, değişmeli halkalardaki hangi özelliklerin değişmeli olmayan halkalar için de sağlandığını araştırma problemi pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve kayda değer araştırma ve yayınlar ortaya çıkmıştır. Bu çalışmaların sonucu olarak birçok değişmeli olmayan yeni halka sınıfları oluşmuştur.

Bu çalışmada, mevcut bazı değişmeli olmayan halka sınıfları üzerindeki şartlar genelleştirilerek yeni değişmeli olmayan halka sınıfları oluşturulmaktadır. Elde edilen bu yeni halka sınıfları sayesinde değişmeli halka sınıflarına ait özelliklerin, değişmeli olmayan halkalarda da sağlanıp sağlanmadığının kontrolü için daha zayıf şartlara sahip halkaların incelenmesine olanak sağlamaktadır.

Bu çalışmadaki halkalar aksi söylenmediği takdirde birimli olarak ele alınacaktır. Sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı olmayan halkalara *indirgenmiş (reduced) halka* denir. Lambek 1970 yılındaki çalışmasında indirgenmiş halka sınıfının bir genelleştirmesi olarak simetrik halkaları tanımlamıştır. Bir R halkasında $abc = 0$ şartını sağlayan her $a, b, c \in R$ için $acb = 0$ gerçekleniyorsa R ye *simetrik (symmetric)* *halka* denir. Simetrik halkalar üzerindeki şartları biraz hafifleten Cohn 1999 yılında, bir R halkasında $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R halkasını *terslenebilir (reversible) halka* olarak isimlendirmiştir. 2007 yılında Liang ve Gang, $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $Rbra$ sol nil ideal oluyorsa R halkasını *zayıf terslenebilir (weakly reversible) halka* olarak adlandırmışlardır. Böylece terslenebilir halka sınıfı sol nil idealler yardımıyla genelleştirilmiştir. Zaman içinde halkanın farklı altkümeleri göz önüne alınarak terslenebilir halka sınıfı için birçok farklı genelleştirme yapılmıştır. Bunların en bilinenlerinden biri de Kose vd. tarafından yapılmış olan merkezil terslenebilir halkalardır. Kose vd. 2014 yılına ait çalışmada, bir R halkasında $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $ba \in R$, halkanın merkezinde yer alıyorsa R halkasını *merkezil terslenebilir (central reversible)* halka olarak isimlendirmişlerdir.

Bu çalışmada terslenebilir halkaların yeni bir genelleştirilmesi elde edilmektedir. İlk olarak terslenebilir halka kavramı Jacobson radikali için ele alınmaktadır. Bu şekilde elde edilen yeni halka sınıfı J-terslenebilir halka olarak adlandırılmaktadır. Çalışmanın üçüncü bölümünde, elde edilen yeni halka sınıfının temel özellikleri ve yapısının incelenmesinin ardından mevcut halka sınıfları ile olan ilişkisi detaylı olarak ortaya konulmaktadır. Daha sonra J-terslenebilir halkaların bazı halka genişlemeleri incelenmektedir.

Mason, 1981 yılında ortaya koyduğu çalışmasında terslenebilir halka tanımını birimsiz halkalar üzerinde yeniden incelemiş ve yansımalı ideal tanımını literatüre kazandırmıştır. R bir halka (birimli veya birimsiz) ve I da R nin bir ideali olsun. $aRb \subseteq I$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $bRa \subseteq I$ sağlanıyorsa, I idealine *yansımalı (reflexive) ideal* denir. Tanımdan açıkça görüleceği üzere her yarı asal ideal yansımalıdır. Mason'un çalışmasından ilham alan Kwak ve Lee, yansımalı halka tanımını ortaya koymuştur. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = 0$ iken $bRa = 0$ şartını sağlayan halkalar *yansımalı (reflexive) halka* olarak adlandırılmıştır. Böylece terslenebilir halka sınıfının bir genelleştirmesi elde edilmiştir. Ayrıca, Kwak ve Lee'nin çalışmasında yansımalı halkaların temel özellikleri, mevcut halka sınıfları ile olan ilişkileri ve yansımalı halkaların bazı genişlemeleri üzerinde oldukça detaylı bir araştırma yapılmıştır.

Yukarıdaki tarihsel ve mantıksal akış izlendiğinde, I idealinin özelleştirilmesi durumunda Kwak ve Lee'nin 2012 yılına ait çalışmasında elde edilen sonuçların daha da zenginleşebileceği öngörülmektedir. Buradan alınan motivasyonla birlikte yansımalı halka kavramı, Jacobson radikali için yeniden ele alınarak J-yansımalı halka kavramı literatüre kazandırılmaktadır. Bu çalışmada, J-yansımalı halkaların temel özellikleri incelenmekte, mevcut halka sınıfları ile olan ilişkileri incelenmektedir. Özel olarak, J-terslenebilir halkalar ile J-yansımalı halkaların özellikleri karşılaştırılmakta ve bu iki halka sınıfının ilişkileri ortaya konulmaktadır. Daha sonra J-yansımalı halkaların bazı genelleştirmeleri üzerinde çalışılmaktadır. Bu incelemeler sonucunda J-yansımalı olma özelliğinin Morita değişmez bir özellik olduğu ortaya çıkmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde halkalar ve modüller ile ilgili, çalışmanın sonraki bölümünde kullanılacak olan bazı tanım ve önermelere yer verilmektedir.

2.1 Temel Tanım ve Denklikler

Tanım 2.1.1. R bir halka olmak üzere $e \in R$ için $e^2 = e$ sağlanıyorsa e ye *eşkare (idempotent) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.2. Bir R halkasının tüm elemanları eşkare eleman ise R ye *Boole (Boolean) halkası* denir (Lam 1999).

Tanım 2.1.3. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı mevcut ise a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.4. Sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı olmayan halkaya *indirgenmiş (reduced) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.5. R bir halka olmak üzere $C(R) = \{x \in R : \text{her } y \in R \text{ için } xy = yx\}$ kümesine *R halkasının merkezi (center of R)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.6. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Eğer her $a \in R$ için $ea = eae$ şartı sağlanıyorsa e ye *sağ yarı merkezil (right semicentral) eşkare eleman* denir. Sol yarı merkezil eşkare eleman tanımı da benzer şekilde yapılabilir (Wei 2008).

Tanım 2.1.7. R bir halka ve I da R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer I ideali sıfırdan farklı bir ideal kapsamıyor ise I ya minimal ideal denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.8. R bir halka olsun. Eğer R nin ideallerinin $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ şeklindeki her azalan zinciri sonlu bir adımda duruyorsa R ye *Artin (Artinian) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.9. R bir halka olsun. Eğer R nin bir I idealinin her elemanı üstel sıfır ise I ya *nil ideal* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.10. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer $I^n = \{0\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı mevcut ise I ya *nilpotent ideal* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.11. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ için $ab \in I$ olması $a \in I$ veya $b \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya *kuvvetli asal (strongly prime) ideal* denir (Lam 1999).

Tanım 2.1.12. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $aRa \in I$ olması $a \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya *yarı asal (semiprime) ideal* denir (Lam 1999).

Tanım 2.1.13. R bir halka olsun. $N(R) = \{x \in R : x^n = 0, n \in \mathbb{Z}^+\}$ ile *R nin üstel sıfır elemanlarının kümesi* gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.14. R bir halka olmak üzere R nin tüm maksimal sağ ideallerinin kesişimine, veya denk olarak, maksimal sol ideallerinin kesişimine *R nin Jacobson radikali (Jacobson radical of R)* denir ve $J(R)$ ile gösterilir (Lam 1999).

Önerme 2.1.15. R bir halka olsun. Bu durumda $j \in J(R)$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in R$ için $1 - xj \in U(R)$ olmasıdır (Lam 1999).

Önerme 2.1.16. R bir halka olsun. Bu durumda $J(R)$ yarı asaldır (Lam 1999).

Tanım 2.1.17. R bir halka olsun.

$$J^{\#}(R) = \{x \in R : \; x^n \in J(R) \text{ olacak şekilde } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ mevcuttur}\}$$

ile *Jacobson radikalinin üstel kümesi* gösterilir (Chen vd. 2016).

Tanım 2.1.18. Bir R halkasındaki her $a \in R$ için $a \in U(R)$ ya da $a \in J(R)$ ise R ye *yerel (local) halka* denir (Lam 1999).

Önerme 2.1.19. R bir yerel halka olsun. Bu durumda $J(R) = J^{\#}(R)$ sağlanır (Chen vd. 2016).

Tanım 2.1.20. Bir R halkasının eşkare elemanlarının tamamı halkanın merkezinde ise R ye *Abel (Abelian) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.21. R bir halka olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R ye *bölümlü (division) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.22. R bir halka ve $X \neq \emptyset$ olsun. $r_R(X) = \{a \in R : Xa = 0\}$ kümesine *X in R deki sağ sıfırlayanı (right annihilator of X in R)* denir. $l_R(X) = \{a \in R : aX = 0\}$ kümesine *X in R deki sol sıfırlayanı (left annihilator of X in R)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.23. M ve X birer R-modül ve I keyfi bir indeks kümesi olsun. $X = M' \oplus A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ ve $M \cong M'$ olmak üzere $X = M' \oplus (\oplus_{i\in I} A_i')$ olacak şekilde $A_i' \subseteq A_i$ altmodülleri bulunabiliyorsa M ye *değişim özelliğine (exchange property) sahip bir modül* denir. Eğer bir M modülü yukarıda belirtilen şartları sonlu bir indeks kümesi için gerçeklerse M ye *sonlu değişim özelliğine (finite exchange property) sahip bir modül* denir (Nicholson 1977).

Önerme 2.1.24. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır.

(2) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ vardır.

(3) $R = Re + R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır.

(4) $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır (Nicholson 1977).

Tanım 2.1.25. Bir R halkasının her elemanı yukarıdaki denk şartlardan birini sağlıyorsa R ye *değişim (exchange) halkası* denir (Nicholson 1977).

Tanım 2.1.26. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer $x - x^2 \in I$ olacak şekildeki her $x \in R$ için $e - x \in I$ şartını sağlayan bir $e^2 = e \in R$ varsa *eşkare elemanlar I idealine göre yükselir (idempotents lift modulo I)* denir (Nicholson 1977).

Tanım 2.1.27. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $a = e + u$ olacak şekilde $u \in U(R)$ ve $e^2 = e \in R$ mevcut ise o zaman a ya *temiz (clean) eleman* denir. Her elemanı temiz olan halkaya *temiz (clean) halka* denir (Nicholson 1977).

Önerme 2.1.28. Her temiz halka değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

Önerme 2.1.29. Bir R halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter şart R nin değişim halkası olması ve eşkare elemanlarının halkanın merkezinde yer almasıdır (Nicholson 1977).

Önerme 2.1.30. Bir R halkasının değişim halkası olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ nin değişim halkası olması ve eşkare elemanların $J(R)$ ye göre yükselmesidir (Nicholson 1977).

Önerme 2.1.31. Bir R halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ nin temiz halka olması ve eşkare elemanların $J(R)$ ye göre yükselmesidir (Camillo ve Yu 1994).

Tanım 2.1.32. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $a = e + u$ olacak şekilde $u \in U(R)$, $e^2 = e \in R$ mevcut ve $eu = ue$ şartı sağlanıyor ise o zaman a ya *kuvvetli temiz (strongly clean) eleman* denir. Her elemanı kuvvetli temiz olan halkaya *kuvvetli temiz (strongly clean) halka* denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.33. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $a = e + u$ olacak şekilde $u \in U(R)$ ve $e^2 = e \in R$ tek türlü olarak mevcut ise o zaman a ya *tek türlü temiz (uniquely clean) eleman* denir. Her elemanı tek türlü temiz olan halkaya *tek türlü temiz (uniquely clean) halka* denir (Nicholson ve Zhou 2004).

Teorem 2.1.34. Her Boole halkası tek türlü temiz halkadır (Nicholson ve Zhou 2004).

Önerme 2.1.35. Tek türlü temiz halkanın tüm eşkare elemanları halkanın merkezinde yer alır (Nicholson ve Zhou 2004).

Tanım 2.1.36. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a = e+j$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $j \in J(R)$ mevcut ve $ej = je$ ise o zaman a ya *kuvvetli J-temiz (strongly J-clean) eleman* denir. Her elemanı J-temiz olan halkaya *kuvvetli J-temiz (strongly J-clean) halka* denir (Chen 2010).

Önerme 2.1.37. R bir J-temiz halka ve $u \in U(R)$ olsun. Bu durumda $u-1 \in J(R)$ dir (Chen 2010).

Tanım 2.1.38. R bir halka ve $a \in R$ olsun. $comm(a) = \{x \in R : ax = xa\}$ ve $comm^2(a) = \{x \in R : xy = yx, \text{ her } y \in comm(a)\}$ şeklinde tanımlıdır (Harte 1991).

Tanım 2.1.39. R bir halka olsun. $R^{qnil} = \{x \in R : \text{her } x \in comm(a) \text{ için } 1 - xa \in U(R)\}$ şeklinde tanımlı kümeye R *nin yarı üstel sıfır elemanlarının kümesi (the set of quasinilpotent elements of R)* denir (Harte 1991).

Tanım 2.1.40. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer R halkasında $a+p \in U(R)$, $ap \in R^{qnil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ mevcut ise a ya *yarı kutuplu (quasipolar)* eleman denir. Bir R halkasının her elemanı yarı kutuplu ise halkaya *yarı kutuplu (quasipolar) halka* denir (Harte 1991).

Tanım 2.1.41. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer R halkasında $a+p \in J(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ mevcut ise a ya *J-yarı kutuplu (J-quasipolar)* eleman denir. Bir R halkasının her elemanı J-yarı kutuplu ise halkaya *J-yarı kutuplu (J-quasipolar) halka* denir (Cui ve Chen 2012).

Tanım 2.1.42. R bir halka olsun. Eğer $aR + bR = R$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $a + by$ sağ tersinir olacak şekilde $y \in R$ var ise o zaman R ye *sabit aralığı 1 (stable range 1) dir* denir (Yu 1995).

Önerme 2.1.43. Eşkare elemanları halkanın merkezinde yer alan değişim halkalarının sabit aralığı 1 dir (Yu 1995).

Tanım 2.1.44. R bir halka olsun. Eğer $ab = 1$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $ba = 1$ oluyorsa o zaman R ye *Dedekind sonlu (Dedekind finite)* halka denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.45. R bir halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ olsun. Eğer $f(x)g(x) = 0$ olması her $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ için $a_i b_j \in J(R)$ olmasını gerektiriyorsa R ye *J-Armendariz halka* denir (Chen vd. 2016).

Tanım 2.1.46. Bir R halkasının her maksimal sağ ideali maksimal ideal ise R ye *sağ yarı-ikili (right quasi-duo) halka* denir. Sol yarı-ikili halka tanımı da benzer şekilde verilir. Bir R halkası hem sağ hem de sol yarı-ikili ise R ye *yarı-ikili (quasi-duo)* denir (Lam ve Dugas 2005).

Teorem 2.1.47. R bir halka ve $R/J(R)$ de bir değişim halkası olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir sağ yarı-ikili halkadır.

(2) R bir yarı-ikili halkadır.

(3) R bir indirgenmiş halkadır.

(4) R bir Abel halkadır (Lam ve Dugas 2005).

Önerme 2.1.48. R bir sağ (sol) yarı-ikili halka olsun. Bu durumda R nin tüm üstel sıfır elemanları Jacobson radikalinde yer alır (Yu 1993).

Tanım 2.1.49. R bir halka olmak üzere $x \in R$ için $xyx = x$ olacak şekilde $y \in R$ mevcut ise x e *düzenli (regular) eleman* denir. Her elemanı düzenli olan halkaya *düzenli (regular) halka* denir. (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.50. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a = a^2x = ya^2$ olacak şekilde $x, y \in R$ mevcut ise a ya *kuvvetli düzenli (strongly regular) eleman* denir. Her elemanı kuvvetli düzenli olan halkaya *kuvvetli düzenli (strongly regular) halka* denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.51. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^n = a^n b a^n$ olacak şekilde $b \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcut ise a ya *π-düzenli (π-regular) eleman* denir. Her elemanı π-düzenli halkaya *π-düzenli (π-regular) halka* denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.52. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^{n+1}x = a^n$ ve $ax = xa$ olacak şekilde $x \in R$ ve n pozitif tamsayısı mevcut ise a ya *kuvvetli π-düzenli (strongly π-regular) eleman* denir. Her elemanı kuvvetli π-düzenli olan halkaya *kuvvetli π-düzenli (strongly π-regular) halka* denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.53. R bir halka olmak üzere, $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R ye *terslenebilir (reversible) halka denir* (Cohn 1999).

Tanım 2.1.54. R bir halka olmak üzere, $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ şartı sağlanıyorsa R ye *yarı-değişmeli (semicommutative) halka* denir (Cohn 1999).

Tanım 2.1.55. R bir halka olmak üzere, $abc = 0$ şartını sağlayan her $a, b, c \in R$ için $acb = 0$ sağlanıyorsa R ye *simetrik (symmetric) halka* denir (Lambek 1971).

Tanım 2.1.56. R bir halka olmak üzere, $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $Rbra$ sol üstel ideal oluyorsa R ye *zayıf terslenebilir (weakly reversible) halka* denir (Liang ve Gang 2014).

Tanım 2.1.57. R bir halka olmak üzere, $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $ba \in R$ halkanın merkezinde yer alıyorsa R ye *merkezil terslenebilir (central reversible) halka* denir (Köse vd. 2014).

Tanım 2.1.58. R bir halka olmak üzere, $e^2 = e \in R$ ve $a \in R$ olsun. Eğer Ra ideali sol minimal ideal ise a ya *sol minimal (left minimal) eleman* denir. Eğer e bir sol minimal eleman ise e ye *sol minimal eşkare (left minimal idempotent) eleman* denir. R halkasının bütün sol minimal eşkare elemanlarının kümesi $ME_l(R)$ ile gösterilir. Eğer $ME_l(R)$ kümesinin her elemanı sol yarı merkezil ise R halkasına *sol minimal Abel (left minimal Abelian)* halka denir (Wei 2008).

Tanım 2.1.59. R bir halka olmak üzere $abc = 0$ şartını sağlayan her $a, b, c \in R$ için $bac \in J(R)$ sağlanıyorsa R ye *J-simetrik (J-symmetric) halka* denir (Calci vd. 2019).

Tanım 2.1.60. R bir halka (birimli ya da birimsiz) ve I da R nin bir ideali olsun. $aRb \subseteq I$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $bRa \subseteq I$ sağlanıyorsa I ya *yansımalı (reflexive) ideal* denir (Mason 1981).

Tanım 2.1.61. R bir halka olsun. $aRb = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $bRa = 0$ sağlanıyorsa R ye *yansımalı (reflexive) halka* denir (Kwak ve Lee 2012).

Tanım 2.1.62. R bir halka ve $u, r \in R$ olsun. Eğer $ur = 0$ olması $r = 0$ olmasını gerektiriyorsa u ya *sağ düzgün (right regular)* eleman denir. Benzer şekilde sol düzgün eleman tanımı da verilebilir. Eğer $u \in R$ hem sağ hem de sol düzgün bir eleman ise u ya *düzgün (regular)* eleman denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.63. R bir halka ve S de R nin merkezil tersinir elemanlarının çarpımsal olarak kapalı bir altkümesi olsun. $S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a \in R, \ b \in S \right\}$ kümesine *R nin S kümesine göre lokalizasyonu* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.64. R bir halka olsun. Eğer R halkasının boştan farklı her altkümesinin sağ (sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyor ise o zaman R ye *Baer halka* denir (Kaplansky 1968).

Tanım 2.1.65. M, K ve U birer R-modül olmak üzere her $f : M \longrightarrow K$ R-modül epimorfizması ve her $\gamma : U \longrightarrow K$ R-modül homomorfizması için $f\overline{\gamma} = \gamma$ olacak biçimde $\overline{\gamma} : U \longrightarrow M$ R-modül homomorfizması varsa U ya *M-projektif modül* denir. Eğer U her M modülü için M-projektif ise U ya *projektif modül* adı verilir

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dotted, "\overline{\gamma}"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.66. R bir halka ve ${}_RM_R$ ikili modül olmak üzere R nin M ile olan *aşikar genişlemesi (trivial extension)* $R \propto M = R \oplus M$ bileşensel toplama işlemi ve $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir halkadır. Bu halka $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm matrislerden oluşan halkaya izomorftur (Tang ve Zhou 2012).

Tanım 2.1.67. A ve B birer halka; ${}_AN_B$ ve ${}_BM_A$ ikili modüller olsun. $\Psi : N\otimes_B M \to A$ ve $\Phi : M\otimes_A N \to B$ modül homomorfizmaları olmak üzere $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ için $\Psi(n \otimes m)n' = n\Phi(m \otimes n')$ ve $\Phi(m \otimes n)m' = m\Psi(n \otimes m')$ olsun. Bu durumda (A, B, M, N, Ψ, Φ) altılısına *Morita yapısı (Morita context)* denir. Bu çalışmada $m \otimes_A n = mn$ ve $n \otimes_B m = nm$ ile gösterilecektir. $\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ dörtlüsü bilinen matris toplaması ve yukarıdaki şartları sağlayan dönüşümler yardımıyla elde edilecek çarpma yardımı ile bir halka yapısı meydana getirir. Bu halkaya *Morita yapısının halkası* ya da *Morita yapısı (Morita context)* denir. $\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ şeklindeki bir Morita yapısında eğer konteks çarpımları aşikar yani $MN = \mathrm{Im}\Phi = 0$ ve $NM = \mathrm{Im}\Psi = 0$ ise, bu durumda bu halkaya *aşikar Morita yapısı (trivial Morita context)* denir (Tang vd. 2014).

Önerme 2.1.68. $R = (A, M, N, B)$ aşikar bir Morita yapısı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

(1) $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M \\ N & J(B) \end{pmatrix}$.

(2) $U(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R : \ a \in U(A), \ b \in U(B) \right\}$.

Tanım 2.1.69. Tanım 2.1.67 de $A = B = N = M = R$ alınması sonucunda meydana gelen halkaya *genelleştirilmiş matris halkası (generalized matrix ring)* denir. Bir R halkası yardımıyla elde edilen genelleştirilmiş matris halkası, $s \in C(R)$ olmak üzere $K_s(R)$ ile gösterilir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 2.1.70. R bir halka ve $s \in C(R)$ olsun.

(1) $(s : J(R)) = \{r \in R : rs \in J(R)\}$ olmak üzere $J(K_s(R))=\begin{bmatrix} J(R) & (s : J(R)) \\ (s : J(R)) & J(R) \end{bmatrix}$ dir.

(2) R bir yerel halka ve $s \in J(R)$ ise $J(K_s(R))=\begin{bmatrix} J(R) & R \\ R & J(R) \end{bmatrix}$ dir.

(3) R bir yerel halka ve $s \in J(R)$ olsun. $\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in K_s(R)$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart $a, b \in R$ nin tersinir olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

Tanım 2.1.71. R bir halka ve ${}_RV_R$ ikili modül olsun. R nin V ile olan *Dorroh genişlemesi (Dorroh extension)* veya *ideal genişlemesi (ideal extension)* $I(R;V)$ ile gösterilir. $I(R;V) = R \oplus V$ kümesi bileşensel toplama işlemi ile abel gruptur ve $(r,v)(s,w) = (rs, rw + vs + vw)$ şeklinde tanımlı çarpma işlemi ile birimi $(1,0)$ olan bir halkadır (Nicholson ve Zhou 2004).

Uyarı 2.1.72. Bir R halkasının $I(R;V)$ Dorroh genişlemesi verilsin. Burada $(R,0) = \{(r,0) : r \in R\}$ ve $(0,V) = \{(0,v) : v \in V\}$ olmak üzere $(R,0)$ kümesi R nin bir althalkasıdır ve $(R,0) \cong R$ dir. Ayrıca $(0,V)$ kümesi $I(R;V)$ nin bir ideali olup $(0,V) \cong V$ ve $I(R;V)/(0,V) \cong R$ dir (Nicholson ve Zhou 2004).

Uyarı 2.1.73. R bir halka ve $S = I(R;V)$ için aşağıdakiler denktir.

(1) $(0,V) \subseteq J(S)$ dir.

(2) Eğer $u \in U(R)$ ve $v \in V$ ise $(u,v) \in U(S)$ dir.

(3) Eğer $v \in V$ ise $v + w + vw = 0$ olacak şekilde $w \in V$ mevcuttur (Nicholson ve Zhou 2004).

Tanım 2.1.74. R bir halka ve $f : R \to R$ bir halka homomorfizması olsun. R üzerindeki *skew formal kuvvet serilerinin halkası (skew formal power series ring over R)* $R[[x,f]]$ ile gösterilir. Burada $R[[x,f]]$ ile x değişkenine bağlı ve her $r \in R$ için $xr = f(r)x$ şartını sağlayan tüm formal kuvvet serilerinin kümesi gösterilmektedir (Lam 1999).

Lemma 2.1.75. Bir R halkası üzerindeki skew formal kuvvet serisi halkası için $J(R[[x,f]]) = J(R) + < x >$ sağlanır (Lam 1999).

Tanım 2.1.76. Tanım 2.1.74 te $f = 1_R : R \to R$ alınırsa $R[[x]] = R[[x, 1_R]]$ elde edilir. $R[[x]]$ halkasına *R üzerindeki kuvvet serilerinin halkası (ring of formal power series over R)* denir (Lam 1999).

Tanım 2.1.77. A bir halka ve B de A nın bir althalkası olsun. Bu durumda

$$R[A,B] = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, b, b, \cdots) \ : \ a_i \in A, \ b \in B, \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

kümesi bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır (Chen vd. 2016).

Lemma 2.1.78. A bir halka ve B de A nın bir althalkası olsun. Bu durumda $J(R[A,B]) = R[J(A), J(A) \cap J(B)]$ sağlanır (Chen vd. 2016).

Tanım 2.1.79. R ve S birer halka olmak üzere, eğer R halkasının tüm sağ R-modüllerinin kategorisi ile S nin tüm sağ S-modüllerinin kategorileri denk ise, R ve S ye *Morita denktir (Morita equivalent)* denir. Denk halkaların sağladığı özelliklere *Morita değişmez özellikler (Morita invariant properties)* denir. R halkası tarafından sağlanan bir $\mathcal{P}$ özelliğinin Morita değişmez olması için gerek ve yeter şart R halkası tarafından sağlanan bu özelliğin aynı zamanda her $e^2 = e \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için eRe ve $M_n(R)$ halkaları tarafından da sağlanmasıdır (Lam 2001).

3. J-TERSLENEBİLİR HALKALAR

Bu bölümde terslenebilir halkaların bir genellemesi olan J-terslenebilir halka kavramı verilmektedir. İlk olarak J-terslenebilir halka kavramı için kullanışlı bir karakterizasyon verilip, ardından J-terslenebilir halkaların mevcut halka sınıfları ile olan ilişkileri araştırılmaktadır. Son olarak J-terslenebilir halkaların yapısal özellikleri üzerinde durulmaktadır.

3.1 J-Terslenebilir Halkaların Genel Özellikleri

Tanım 3.1.1. R bir halka olsun. R halkasında $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $ba \in J(R)$ oluyor ise R halkasına *J-terslenebilir (J-reversible) halka* denir.

Örnek 3.1.2.

(1) İndirgenmiş halkalar J-terslenebilir halkalardır.

(2) Simetrik halkalar J-terslenebilir halkalardır.

(3) Terslenebilir halkalar J-terslenebilir halkalardır.

Lemma 3.1.3. R bir halka olsun.

(1) Eğer $R/J(R)$ terslenebilir halka ise, R halkası J-terslenebilirdir.

(2) Eğer $N(R)$ kümesi R nin bir ideali ise, R halkası J-terslenebilirdir.

Her terslenebilir halka J-terslenebilir halka olmasına rağmen, her J-terslenebilir halka terslenebilir olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.4. R bir indirgenmiş halka olmak üzere;
$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$ olarak seçilsin. Bu durumda S halkası indirgenmiş bir halkadır. Böylece S halkasının J-terslenebilir halka olduğu açıktır. Eğer $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ olarak seçilirse, $AB = 0$

olmasına rağmen $BA \neq 0$ olduğu görülmektedir. Bu durumda S halkası terslenebilir bir halka değildir.

Aşağıdaki teorem bir halkanın J-terslenebilir olup olmadığının belirlenmesinde oldukça kullanışlı bir karakterizasyondur.

Teorem 3.1.5. Aşağıdaki ifadeler bir R halkası için denktir.

(1) R halkası J-terslenebilirdir.

(2) $a^2 = 0$ şartını sağlayan her $a \in R$ için $a \in J(R)$ dir.

(3) $a^2 = 0$ şartını sağlayan her $a \in R$ ve her $b \in R$ için $ab - ba \in J(R)$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $a^2r = 0$ olur. R halkası J-terslenebilir olduğundan $ara \in J(R)$ dir. Jacobson radikali yarı asal olduğundan $a \in J(R)$ bulunur.
(2) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. O halde $(ba)^2 = 0$ elde edilir. Hipotez gereği $ba \in J(R)$ olur.
(2) $\Rightarrow$ (3) $a^2 = 0$ olacak şekilde $a \in R$ alınsın. Böylece $a \in J(R)$ dir. Buradan her $b \in R$ için $ab - ba \in J(R)$ dir.
(3) $\Rightarrow$ (2) $a^2 = 0$ olacak şekilde $a \in R$ alınsın. Bu durumda her $b \in R$ için $ab - ba \in J(R)$ dir. Buradan $a(ab - ba) = -aba \in J(R)$ dir. Jacobson radikali yarı asal olduğundan $a \in J(R)$ dir.

J-terslenebilir halka örnekleri oldukça fazladır. Aşağıdaki önerme yerel halkaların J-terslenebilir olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.1.6. R bir halka olsun. Eğer $J(R) = J^{\#}(R)$ ise R halkası J-terslenebilirdir.

İspat: $J(R) = J^{\#}(R)$ ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Böylece $(ba)^2 = 0$ olup $ba \in J(R) = J^{\#}(R)$ dir.

Sonuç 3.1.7. Eğer R bir yerel halka ise o zaman R halkası J-terslenebilirdir.

İspat: Önerme 2.1.19 gereğince ispat açıktır.

Lemma 3.1.8. J-temiz halkalar J-terslenebilirdir.

İspat: R halkası J-temiz olsun. $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ alınsın. Böylece $(ba)^2 = 0$ dır. Buradan $1 - ba \in U(R)$ olur. J-temiz halkalarda tersinir elemanlar Jacobson radikaline 1 eşkare elemanıyla işleme girmesi sonucu düşeceğinden $1-ba-1 = -ba \in J(R)$ dir. O halde $ba \in J(R)$ olup istenilen elde edilir.

Önerme 3.1.9. R bir halka olsun. Eğer R halkası J-yarı kutuplu ise o zaman J-terslenebilirdir.

İspat: Lemma 3.1.8 in ispatına benzer şekilde sonuca ulaşılır.

Önerme 3.1.10. Her merkezil terslenebilir halka J-terslenebilirdir.

İspat: R bir merkezil terslenebilir halka ve $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. Buradan her $r \in R$ için $abr = 0$ dır. Böylece $bra \in C(R)$ dir. Her $s \in R$ için $(bra)s(bra) = brabras = 0$ dır. $J(R)$ yarı asal ideal olduğundan her $r \in R$ için $bra \in J(R)$ elde edilir. O halde $ba \in J(R)$ dir.

Önerme 3.1.11. R bir halka olsun. Eğer R halkası yarı-değişmeli ise o zaman J-terslenebilirdir.

İspat: $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ alınsın. Buradan her $r \in R$ için $abr = 0$ dır. Böylece $brabra = 0$ olur. R halkası yarı-değişmeli olduğundan $braRbra = 0$ dır. Buradan $(braR)(braR) = 0$ elde edilir. $braR$ kümesi R de sağ nil ideal olduğundan $braR \subseteq J(R)$ dir. Böylece $ba \in J(R)$ bulunur.

Aşağıdaki örnek Önerme 3.1.11 in karşıtının genel olarak doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.12. R değişmeli bir halka olsun. $n \geq 2$ tamsayıları için $T_n(R)$ halkası yarı-değişmeli olmamasına rağmen J-terslenebilir halkadır.

Sonuç 3.1.13. R bir halka olsun. Eğer R halkası zayıf terslenebilir ise o zaman J-terslenebilirdir.

İspat: Önerme 3.1.11 in ispatına benzer şekilde sonuca ulaşılır.

Terslenebilir halkaların Abel halka olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki örnek J-terslenebilir halkaların genel olarak Abel olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.14. R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda R halkası J-terslenebilirdir. Buradan $T_2(R)$ halkası J-terslenebilirdir. Fakat $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_2(R)$ bir eşkare eleman olmasına rağmen $T_2(R)$ nin merkezinde değildir. Böylece $T_2(R)$ halkası Abel değildir.

Calci vd., 2019 yılındaki çalışmada J-simetrik halkaların sol minimal Abel halka olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde J-terslenebilir halkaların da sol minimal Abel halka olduğu gösterilebilir.

Önerme 3.1.15. Her J-terslenebilir halka sol minimal Abel halkadır.

İspat: R bir J-terslenebilir halka, $e \in ME_l(R)$ ve $a \in R$ için $h = ae - eae$ olsun. $h \neq 0$ ve $eh = 0$ olsun. Bu durumda $he = h$ ve $Rh = Re$ bulunur. R halkası J-terslenebilir olduğundan $h = he \in J(R)$ dir. Buradan $e = rh$ olacak şekilde $r \in R$ mevcuttur. Böylece $e \in J(R)$ olup $e = 0$ bulunur ve çelişki elde edilir. Bu durumda $h = 0$ bulunur. O halde $ae = eae$ olup istenilen elde edilir.

Önerme 3.1.16. R bir halka olsun ve her eşkare eleman $J(R)$ ye göre yükselsin. Eğer R halkası J-terslenebilir ise o zaman $R/J(R)$ Abeldir.

İspat: $\overline{f}^2 = \overline{f} \in R/J(R)$ olsun. Eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseldiğinden $e^2 = e \in R$ vardır. $e(1-e) = 0$ olduğundan her $r \in R$ için $e(1-e)r = 0$ dır. R halkası J-terslenebilir olduğundan $(1-e)Re \subseteq J(R)$ dir. Ayrıca $eR(1-e) \subseteq J(R)$ olduğu da açıktır. Böylece her $a \in R$ için $(1-e)ae \in J(R)$ ve $ea(1-e) \in J(R)$ elde edilir. Buradan $ea - ae \in J(R)$ olup istenilen elde edilir.

Lemma 3.1.17. Her J-terslenebilir halka Dedekind sonludur.

İspat: R halkası J-terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 1$ olsun. Buradan $a(1-ba) = 0$ dır. R halkası J-terslenebilir olduğundan $(1-ba)a \in J(R)$ dir. Böylece $(1-ba)ab = 1-ba \in J(R)$ olur. $1-ba$ bir eşkare elemandır. Jacobson radikalindeki tek eşkare eleman 0 olduğundan $1 - ba = 0$ dır. Bu durumda $1 = ba$ olup istenilen elde edilir.

Lemma 3.1.17 nin karşıtı genel olarak doğru değildir.

Örnek 3.1.18. $\mathbb{R}$ halkası için $M_n(\mathbb{R})$ Dedekind sonlu olmasına rağmen J-terslenebilir değildir.

Yukarıda verilen halka sınıfları arasındaki ilişki aşağıdaki şemada gösterilmektedir.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Merkezil terslenebilir} \arrow[r] & \text{Zayıf terslenebilir} \arrow[dr] & \\
\text{Simetrik} \arrow[r] & \text{Terslenebilir} \arrow[u] \arrow[r] & \text{Yarı değişmeli} \arrow[r] & \textbf{\textit{J}-terslenebilir} \arrow[d] \\
\text{İndirgenmiş} \arrow[u] & & & \text{Dedekind Sonlu}
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.1.19. R bir halka ve $f(x) = a_o + a_1x,\ g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$ olsun. Eğer $f(x)g(x) = 0$ olması her $0 \leq i, j \leq 1$ için $a_ib_j \in J(R)$ olmasını gerektiriyorsa R ye *J-doğrusal Armendariz (J-linear Armendariz) halka* denir.

Önerme 3.1.20. R bir halka olsun. Eğer R halkası J-terslenebilir ise o zaman R halkası J-doğrusal Armendariz halkadır.

İspat: R bir J-terslenebilir halka ve $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $a_0b_0 = 0$, $a_0b_1 + a_1b_0 = 0$ ve $a_1b_1 = 0$ dır. R halkası J-terslenebilir olduğundan $b_0a_0 \in J(R)$, $b_1a_1 \in J(R)$ ve $a_0b_1a_0 \in J(R)$ dir. Ayrıca her $r \in R$ için $b_0ra_0 \in J(R)$ ve $a_0b_1ra_0 + a_1b_0ra_0 = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $a_0b_1ra_0 \in J(R)$ olup her $r \in R$ için $a_0b_1ra_0b_1 \in J(R)$ elde edilir. Jacobson radikali yarı asal olduğundan $a_0b_1 \in J(R)$ bulunur. Benzer şekilde $a_1b_0 \in J(R)$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda R halkası J-doğrusal Armendariz halka olur.

Nicholson'un değişim halkaları üzerine yapmış olduğu 1977 yılındaki çalışmasında değişim halkası şartlarını sağlayan halka sınıflarından birinin de temiz halkalar olduğu gösterilmiştir. Fakat bu önermenin karşıtının genel olarak doğru olmadığı bilinmektedir. Bu çalışmadan sonra pek çok araştırmacı değişim halkalarının hangi şartlar altında temiz olduğunu araştırmıştır. Aşağıdaki teorem değişim halkaları ile temiz halkaların birbirine denk olması için gerekli bir şartı ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1.21. R bir J-terslenebilir halka olsun. Bu durumda R nin temiz olması için gerek ve yeter şart R nin değişim halkası olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) İspatı açıktır.
($\Leftarrow$) R bir değişim halkası olsun. Bu durumda $R/J(R)$ de bir değişim halkasıdır. Önerme 3.1.16 gereğince $R/J(R)$ bir Abel halkadır. Bu durumda Önerme 2.1.29 yardımıyla, $R/J(R)$ halkasının temiz olduğu açıktır. Buradan Önerme 2.1.31 gereğince R halkası temizdir.

Yu 1999 yılında yayımlanan çalışmasında değişim halkalarının hangi şartlar altında sabit aralığının 1 olduğunu araştırmıştır. Aşağıdaki teorem bu sorunun cevapları arasında sayılabilir.

Teorem 3.1.22. R bir değişim halkası olsun. Eğer R halkası J-terslenebilir ise o zaman R nin sabit aralığı 1 dir.

İspat: R halkası J-terslenebilir olsun. Önerme 3.1.16 gereğince $R/J(R)$ Abeldir. Hipotez gereği R değişim halkası olduğundan Önerme 2.1.43 gereğince $R/J(R)$ nin sabit aralığı 1 dir. Böylece R halkasının da sabit aralığı 1 dir.

Teorem 3.1.23. Her sağ yarı-ikili halka J-terslenebilirdir.

İspat: R bir sağ yarı-ikili halka olmak üzere $a, b \in R$ için $ab = 0$ ve $ba \notin J(R)$ olsun. Buradan $ba \notin M$ olacak şekilde R nin bir sağ maksimal M ideali vardır. Böylece $baR + M = R$ olur. Bu durumda $1 = bar + m$ olacak şekilde $r \in R$ ve $m \in M$ vardır. Buradan $a = am \in M$ olup $ba \in M$ bulunur. Böylece bir çelişki elde edilir. O halde R halkası J-terslenebilirdir.

Teorem 3.1.24. R bir değişim halkası olsun. R nin J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı-ikili halka olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) R halkası J-terslenebilir olsun. R değişim halkası olduğundan Önerme 2.1.30 gereğince R deki eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. Önerme 3.1.16 gereği $R/J(R)$ Abeldir. Teorem 2.1.47 gereğince R halkası yarı-ikilidir.
($\Leftarrow$) Teorem 3.1.23 gereğince açıktır.

Aşağıdaki sonuç yarı-ikili halkalar için bilinmektedir. Burada J-terslenebilir halkalar için ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 3.1.25. Bir π-düzenli halkanın kuvvetli π-düzenli olması için gerek ve yeter şart halkanın J-terslenebilir olmasıdır.

Uyarı 3.1.26. Sonuç 3.1.25 gereğince Abel π-düzenli halkalar ve sonlu Abel halkalar J-terslenebilirdir.

Önerme 3.1.27. I indeks kümesi için $\{R_i\}_{i\in I}$ ile halkaların bir koleksiyonu gösterilsin. Bu durumda $\Pi_{i\in I}R_i$ nin J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için R_i nin J-terslenebilir olmasıdır.

İspat: ($\Leftarrow$) Her $i \in I$ için R_i halkası J-terslenebilir halka ve $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}R_i$ için $(a_i)(b_i) = 0$ olsun. Buradan her $i \in I$ için $a_ib_i = 0$ dır. Hipotez gereğince her $i \in I$ için $b_ia_i \in J(R_i)$ dir. Böylece $(b_i)(a_i) \in \Pi_{i\in I}J(R_i) = J(\Pi_{i\in I}R_i)$ dir. Bu durumda $\Pi_{i\in I}R_i$ halkası J-terslenebilirdir.
($\Rightarrow$) Açıkça görülmektedir.

Aşağıdaki sonuç Önerme 3.1.27 nın direkt bir sonucudur.

Sonuç 3.1.28. R bir halka ve $e^2 = e \in C(R)$ olsun. Bu durumda eR ve $(1-e)R$ nin J-terslenebilir halka olması için gerek ve yeter şart R nin J-terslenebilir olmasıdır.

Lemma 3.1.29. R bir halka olsun. Bu durumda R nin J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart her $e^2 = e \in R$ için eRe nin J-terslenebilir olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $a, b \in R$ için $(eae)(ebe) = 0$ olsun. R halkası J-terslenebilir olduğundan $(ebe)(eae) \in J(R)$ dir. Böylece $(ebe)(eae) \in eJ(R)e = J(eRe)$ elde edilir.
($\Leftarrow$) $e = 1$ için açıkça görülmektedir.

Çalışmanın bundan önceki kısmında J-terslenebilir halka tanımı birimli halkalar için verilmektedir. J-terslenebilir halka tanımı birimsiz halkalar için de benzer şekilde yapılmaktadır.

Tanım 3.1.30. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. $ab = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in I$ için $ba \in J(I)$ sağlanıyorsa I ya J-terslenebilir ideal denir.

Önerme 3.1.31. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer R halkası J-terslenebilir ise o zaman I ideali de J-terslenebilirdir.

İspat: $a, b \in I$ için $ab = 0$ olsun. R halkası J-terslenebilir olduğundan $ba \in J(R)$ dir. Buradan $ba \in J(R) \cap I = J(I)$ olup istenilen elde edilir.

Teorem 3.1.32. T bir J-terslenebilir halka, R kümesi T nin bir althalkası ve I da T nin R tarafından kapsanan bir ideali olsun. Eğer R/I halkası J-terslenebilir ise o zaman R de J-terslenebilirdir.

İspat: $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $ba \in J(T)$ dir. Böylece her $r \in R$ için $1 - bar \in U(T)$ olur. Bu durumda $t(1 - bar) = 1$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. O halde $\overline{ba} \in J(R/I)$ olup her $\overline{r} \in R/I$ için $\overline{1} - \overline{bar} \in U(R/I)$ dır. Buradan $(\overline{1} - \overline{bar})\overline{s} = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{s} \in R/I$ vardır. Bu durumda $1 - (1 - bar)s \in I$ olur. O halde $t(1 - (1 - bar)s) = t - s \in I$ dır. Son eşitlikteki t elemanının R de olduğu açıktır. Böylece $1 - bar$ elemanı R de sol tersinirdir. Benzer şekilde $1 - bar$ nin R de sağ tersinir olduğu da gösterilebilir. Böylece her $r \in R$ için $1 - bar \in U(R)$ olup $ba \in J(R)$ bulunur.

Sonuç 3.1.33. T bir J-terslenebilir halka, R de T nin bir J-terslenebilir althalkası olsun. Bu durumda T nin her I ideali için $I + R$ de J-terslenebilirdir.

İspat: Teorem 3.1.32 den kolayca elde edilir.

Sonuç 3.1.34. Bir J-terslenebilir halkanın her sonlu altdirekt çarpımı da J-terslenebilirdir.

İspat: R bir halka, R nin I ve K idealleri için R/I ve R/K halkaları J-terslenebilir ve $I \cap K = 0$ olsun. $f : R \to R/I \oplus R/K$ homomorfizması $f(r) = (r + I, r + K)$ şeklinde tanımlansın. Buradan $R \cong \mathrm{Im} f$ elde edilir. Hipotez gereği $R/I \oplus R/K$ ve $\mathrm{Im} f/f(I) \cong R/I$ halkaları J-terslenebilirdir. Ayrıca $f(I) \subseteq \mathrm{Im} f \subseteq R/I \oplus R/K$ dır. Teorem 3.1.32 den sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.35. R bir halka, I ve K da R nin idealleri olsun. Eğer R/I ve R/K halkaları J-terslenebilir ise o zaman $R/(I \cap K)$ da J-terslenebilirdir.

İspat: $f : R/(I \cap K) \to R/I$ ve $g : R/(I \cap K) \to R/K$ homomorfizmaları sırasıyla $f(r + I \cap K) = r + I$ ve $g(r + I \cap K) = r + K$ şeklinde tanımlansın. Buradan f ve g birer epimorfizmadır ve $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g = 0$ dır. Böylece $R/(I \cap K)$ halkası R/I ve R/K nın bir altdirekt çarpımıdır. Ayrıca $R/I \cong (R/(I \cap K))/(I/(I \cap K))$ ve $I/(I \cap K) \subseteq R/(I \cap K) \subseteq R/I$ olduğu bilinmektedir. Bu bilgiler ışığında Sonuç 3.1.34 gereğince istenilen elde edilir.

R bir halka olsun. $S = \{(x, y) \in R \times R : x - y \in J(R)\}$ kümesi bileşensel işlemler ile $R \times R$ halkasının bir althalkasıdır.

Teorem 3.1.36. Aşağıdaki ifadeler bir R halkası için denktir.

(1) R halkası J-terslenebilirdir.

(2) $S = \{(x, y) \in R \times R : x - y \in J(R)\}$ halkası J-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Eğer $I_1 = J(R) \times \{0\}$ ve $I_2 = \{0\} \times J(R)$ olarak seçilirse $I_1 \cap I_2 = 0$ dır. Ayrıca $S/I_1 \cong S/I_2 \cong R$ olur. Böylece S halkası R halkasının altdirekt çarpımı olduğundan Sonuç 3.1.34 gereğince ispat açıktır.
(2) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $(a, a)(b, b) = (0, 0)$ dır. S halkası J-terslenebilir olduğundan $(b, b)(a, a) = (ba, ba) \in J(S)$ dir. Buradan her $x \in R$ için $(1, 1) - (x, x)(ba, ba) \in U(S)$ dir. Buradan $1 - xba \in U(R)$ dir. Böylece $ba \in J(R)$ olup ispat biter.

Halkaya ait olan bir özelliğin bölüm halkasına aktarılıp aktarılmaması durumu halka teorisinde ilgi çeken bir araştırma sorusudur. Aşağıdaki önerme J-terslenebilir olma özelliğin hangi durumlarda bölüm halkasına aktarıldığını, hangi durumlarda bölüm halkasından halkaya yükseldiğini ortaya koymaktadır.

Önerme 3.1.37. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun.

(1) Eğer I kuvvetli asal ise o zaman R/I halkası J-terslenebilirdir.

(2) Eğer I nil ideal ve R/I halkası da J-terslenebilir ise o zaman R halkası J-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\overline{ab} = \overline{0}$ olsun. Bu durumda $ab \in I$ olur. Böylece $(ba)^2 \in I$ dır. I kuvvetli asal olduğundan $ba \in I$ olur. Böylece $\overline{ba} \in J(R/I)$ bulunur.
(2) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $\overline{ab} = \overline{0}$ dır. R/I halkası J-terslenebilir olduğundan $\overline{ba} \in J(R/I)$ olur. Bu durumda her $r \in R$ için $\overline{1} - \overline{bar} \in U(R/I)$ elde edilir. O halde $\overline{s}(\overline{1} - \overline{bar}) = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{s} \in U(R/I)$ vardır. Böylece $1 - s(1 - bar) \in I$ dır. I bir nil ideal olduğundan $s(1 - bar) \in U(R)$ dir. Buradan $(1 - bar) \in U(R)$ olup $ba \in J(R)$ bulunur.

Önerme 3.1.37 nın ifadesindeki nil ve kuvvetli asal ideal olma şartları kaldırılamazdır. Aşağıdaki örnekler bu şartlar olmadan Önerme 3.1.37 nın sağlanmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.38. $R = M_2(\mathbb{Z})$ ve $I =< AB - BA : A, B \in M_2(\mathbb{Z}) >$ olsun. Buradan açıkça görülmektedir ki R/I halkası değişmelidir. Böylece R/I halkası J-terslenebilirdir. Fakat $M_2(\mathbb{Z})$ halkası J-terslenebilir değildir.

Örnek 3.1.39. $R = \mathbb{Z}_{(3)}$ lokalizasyon halkası olmak üzere Q ile R üzerinde kuaterniyonlar halkası gösterilsin. Q halkasının değişmeli olmayan bir tamlık bölgesi olduğu bilinmektedir. Bu durumda Q bir J-terslenebilir halkadır. Ayrıca $J(Q) = 3Q$ ve $Q/J(Q) \cong M_2(\mathbb{Z}_3)$ dür. Böylece $Q/J(Q)$ halkası J-terslenebilir değildir.

Önerme 3.1.40. R bir halka, I ve K da R nin idealleri olsun. Eğer R/I ve R/K halkaları J-terslenebilir ise o zaman $R/(IK)$ halkası da J-terslenebilirdir.

İspat: R nin her I ve K ideali için $IK \subseteq I \cap K$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $R/(I \cap K) \cong R/(IK)/(I \cap K)/(IK)$ her zaman sağlanır. Sonuç 3.1.35 gereğince $R/(I \cap K)$ halkası J-terslenebilirdir. Ayrıca $((I \cap K)/(IK))^2 = 0$ olduğu görülmektedir. Önerme 3.1.37 gereğince $R/(IK)$ halkası J-terslenebilirdir.

Sonuç 3.1.41. R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R/I halkası J-terslenebilirdir.

(2) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için R/I^n halkası J-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Önerme 3.1.40 yardımıyla kolayca elde edilir.

3.2 J-Terslenebilir Halka Genişlemeleri

Bu bölümde birinci bölümde temel özellikleri incelenmiş olan J-terslenebilir halkaların bazı halka genişlemeleri araştırılmaktadır. Böylece mevcut bir J-terslenebilir halka yardımıyla, yeni J-terslenebilir halkalar elde edilmesi mümkün olmaktadır.

Önerme 3.2.1. R bir halka olsun. Eğer R halkası J-terslenebilir ise $S^{-1}R$ halkası da J-terslenebilirdir.

İspat: $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in S^{-1}R$ olmak üzere $a, b, c, d \in R$ ve b, d sıfırdan farklı olsun. $\dfrac{ac}{bd} = 0$ kabul edilsin. bd tersinir olduğundan, $ac = 0$ olur. R halkası J-terslenebilir olduğundan, $ca \in J(R) \subseteq J(S^{-1}R)$ dir. Böylece $\dfrac{c}{d}\dfrac{a}{b} = \dfrac{ca}{db} \in J(S^{-1}R)$ elde edilir.

Önerme 3.2.2. $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ aşikar Morita yapısı olsun. Bu durumda R halkasının J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart A ve B halkalarının J-terslenebilir olmalarıdır.

İspat: R halkası J-terslenebilir olsun. Bu durumda Lemma 3.1.29 gereğince A ve B halkaları J-terslenebilir olarak bulunur. Karşıt olarak A, B halkaları J-terslenebilir olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix} = 0$ olarak alınsın. Böylece $\begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ cx+dt & dz \end{pmatrix} = 0$ dır. Buradan $ax = 0$, $dz = 0$, $cx + dt = 0$ ve $ay + bz = 0$ bulunur. A ve B halkaları J-terslenebilir olduğundan $xa \in J(A)$, $zd \in J(B)$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb+yd \\ ta+zc & dz \end{pmatrix} \in J(R)$ olduğu görülür.

Sonuç 3.2.3. $R = \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda R nin J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart S ve T halkalarının J-terslenebilir olmalarıdır.

İspat: Önerme 3.2.2 gereği ispat açıktır.

Sonuç 3.2.4. R bir halka olsun. R nin J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n(R)$ halkasının J-terslenebilir olmasıdır.

İspat: $n = 2$ için Önerme 3.2.2 den dolayı ispat açıktır. $n > 2$ olması halinde Önerme 3.2.2 nin ispatına benzer şekilde sonuca ulaşılır.

Halkaların önemli genişlemelerinden biri de Dorroh genişlemeleridir. Aşağıdaki sonuç J-terslenebilir halkaların Dorroh genişlemeleri ile olan ilgisini ortaya koymaktadır.

Önerme 3.2.5. R bir halka ve $S = I(R;V)$ de R nin bir Dorroh genişlemesi olsun. Her $v \in V$ için $v + w + vw = 0$ sağlayan bir $w \in V$ mevcut olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R halkası J-terslenebilirdir.

(2) $S = I(R;V)$ genişlemesi J-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R halkası J-terslenebilir ve $(r,v),(p,w) \in S = I(R;V)$ için $(r,v)(p,w) = (rp, rw+vp+vw) = (0,0)$ olsun. R halkası J-terslenebilir olduğundan, $pr \in J(R)$ dir. İddia $(p,w)(r,v) = (pr, pv + wr + wv) \in J(S)$ olduğudur. Hipotez gereği $(0,V) \subseteq J(S)$ olduğu görülmektedir. Eğer $(pr,0) \in J(S)$ olduğu gösterilebilirse, ispat tamamlanır. $(x,y) \in S$ seçilsin. Bu durumda $(1 - xpr, -ypr) = (1 - xpr, 0)(1, (1-xpr)^{-1}(-ypr))$ ve $(1, (1-xpr)^{-1}(-ypr)) = (1,0)+(0, (1-(xpr)^{-1}(-ypr)))$ olduğundan $(1,0)-(x,y)(pr,0) = (1-xpr, -ypr) \in U(S)$ dir. Böylece $(pr,0) \in J(S)$ olup $(p,w)(r,v) = (pr, pv + wr + wv) \in J(S)$ elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (1) $(r,v)(p,w) = (0,0)$ olsun. S halkası J-terslenebilir olduğundan, $(p,w)(r,v) = (pr, pv + wr + wv) \in J(S)$ olur. Hipotez gereği $(0,V) \subseteq J(S)$ olup $(pr,0) \in J(S)$ dir. Buradan $pr \in J(R)$ bulunur.

Sonuç 3.2.6. R bir halka ve $f : R \to R$ bir halka homomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R halkası J-terslenebilirdir.

(2) $R[[x,f]]$ halkası J-terslenebilirdir.

İspat: $< x >$ kümesi x tarafından üretilen ideal olmak üzere $R[[x,f]] \cong I(R;< x >)$ dir. Böylece Önerme 3.2.5 yardımıyla sonuca ulaşılır.

Önerme 3.2.7. R bir halka olsun. R nin J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $R[[x]]$ halkasının J-terslenebilir olmasıdır.

İspat: $J(R[[x]]) = J(R) + < x >$ olduğundan sonuç kolayca elde edilir.

Önerme 3.2.8. Aşağıdaki ifadeler R halkası için denktir.

(1) R halkası J-terslenebilirdir.

(2) $S = \left\{ \begin{pmatrix} w & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ 0 & w & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w \end{pmatrix} : w, w_{ij} \in R (i < j), 2 \leq i, j \leq n-1 \right\}$ halkası J-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Eğer S nin ideali olarak $I = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ seçilirse, $I^n = 0$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca $S/I \cong R$ dir. Böylece Lemma 3.1.37 gereğince, S halkası J-terslenebilir bulunur.
(2) $\Rightarrow$ (1) Lemma 3.1.29 den açıkça görülmektedir.

Sonuç 3.2.9. Aşağıdaki ifadeler bir R halkası için denktir.

(1) R halkası J-terslenebilirdir.

(2) Her $n \geq 2$ için $R[x]/ < x^n >$ halkası J-terslenebilirdir.

İspat:

$$R[x]/ < x^n > \cong \left\{ \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & \cdots & w_{1n} \\ 0 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1(n-1)} \\ 0 & 0 & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{11} & w_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{11} \end{pmatrix} : w_{ij} \in R, 1 \leq i, j \leq n-1 \right\}$$

olduğu bilinmektedir. Önerme 3.2.8 yardımıyla ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.10. A bir halka ve B de A nın bir althalkası olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) A halkası J-terslenebilir ve $a, b \in B$ için $ab = 0$ iken $ba \in J(A) \cap J(B)$ dir.

(2) $R[A, B]$ halkası J-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $(x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, \ldots)(y_1, y_2, \ldots, y_n, b_2, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ olmak üzere $x_i, y_i \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ alınsın. Böylece $x_1y_1 = 0$, $x_2y_2 = 0$, ..., $b_1b_2 = 0$ olur. A ve B halkaları J-terslenebilir olduğundan, $1 \leqslant i \leqslant n$ için $y_ix_i \in J(A)$ ve $b_2b_1 \in J(B)$ sağlanır. Ayrıca $b_2b_1 \in J(A)$ dır. Buradan $(y_1, y_2, \ldots, b_2, \ldots)$ $(x_1, x_2, \ldots, b_1, \ldots) \in J(R[A, B])$ bulunur.
(2) $\Rightarrow$ (1) $x_1, y_1 \in A$ için $x_1y_1 = 0$ olsun. Böylece

$$(x_1, 0, \ldots, 0, \ldots)(y_1, 0, \ldots, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

olur. $R[A, B]$ halkası J-terslenebilir olduğundan, $(y_1, 0, \ldots, 0, \ldots)(x_1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in J(R[A, B])$ bulunur. Bu durumda $y_1x_1 \in J(A)$ olur. B halkasının J-terslenebilir olması da benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdiye kadar bir R halkasının J-terslenebilir olması durumunda bazı genişlemelerinin hangi şartlar altında J-terslenebilir olduğu üzerinde incelemeler ortaya konuldu. Verilen bir J-terslenebilir halkanın tüm genişlemeleri J-terslenebilir olmak zorunda değildir. Aşağıda R halkasının J-terslenebilir halka olması halinde bile R üzerindeki matris halkalarının J-terslenebilir olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.2.11. R bir halka olsun. $M_3(R)$ halkası ele alınsın. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ olarak seçilsin. Bu durumda $AB = 0$ olmasına rağmen, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \notin J(M_3(R))$ olduğu görülmektedir. Böylece $M_n(R)$ halkasının genel durumda J-terslenebilir olmadığı görülmektedir.

Benzer şekilde J-terslenebilir halkalar üzerinde inşa edilen genelleştirilmiş matris halkaları da J-terslenebilir olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.12. $R = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda R halkası J-terslenebilirdir. $K_s(R)$ için $s = 2$ olarak seçilsin. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $AB = 0$ olur. Fakat $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \notin J(K_2(R))$ dir. Bu durumda $K_s(R)$ halkası da genel durumda J-terslenebilir değildir.

4. J-YANSIMALI HALKALAR

Bu bölümde J-terslenebilir ve yansımalı halkaların bir genellemesi olan J-yansımalı halka kavramı verilecektir. İlk olarak J-yansımalı halka kavramı için kullanışlı bir karakterizasyon verilmekte, ardından J-yansımalı halkaların temel özellikleri incelenmekte, son olarak J-yansımalı halkaların mevcut halka sınıfları ile olan ilişkileri araştırılmaktadır.

4.1 J-Yansımalı Halkaların Genel Özellikleri

Tanım 4.1.1. R bir halka olsun. R halkasında $aRb = 0$ şartını sağlayan her $a, b \in R$ için $bRa \subseteq J(R)$ oluyor ise R halkasına *J-yansımalı (J-reflexive) halka* denir.

Örnek 4.1.2.

(1) Yansımalı halkalar J-yansımalıdır.

(2) İndirgenmiş halkalar J-yansımalıdır.

Aşağıdaki teorem J-yansımalı halkaları karakterize etmektedir.

Teorem 4.1.3. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) Her $a \in R$ için $(r_R(aR))(Ra) \subseteq J(R)$ ve $(aR)(l_R(Ra)) \subseteq J(R)$ sağlanır.

(3) R halkasının $IRK = 0$ şartını sağlayan boştan farklı her I, K altkümeleri için $KRI \subseteq J(R)$ sağlanır.

(4) R halkasının $< a >< b >= 0$ şartını sağlayan her a, b elemanı için $< b >< a > \subseteq J(R)$ sağlanır.

(5) R halkasının $IK = 0$ şartını sağlayan her I, K sağ (sol) idealleri için $KI \subseteq J(R)$ sağlanır.

(6) R halkasının $IK = 0$ şartını sağlayan her I, K idealleri için $KI \subseteq J(R)$ sağlanır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $b \in r_R(aR)$ olsun. Bu durumda $aRb = 0$ dır. R halkası J-yansımalı olduğundan, $bRa \subseteq J(R)$ bulunur. Bu durumda $(r_R(aR))(Ra) \subseteq J(R)$ dir. Benzer şekilde $(aR)(l_R(Ra))$ olduğu da gösterilebilir.
(2) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Bu durumda $b \in r_R(aR)$ dir. Hipotez gereğince $bRa \subseteq J(R)$ olup, R halkası J-yansımalı elde edilir.
(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) İspat açıktır.
(6) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ için $aRb = 0$ sağlansın. Buradan $RaRRbR = 0$ olur. Hipotez gereği $RbRRaR \subseteq J(R)$ elde edilir. $bRa \subseteq RbRRaR$ olduğundan, $bRa \subseteq J(R)$ bulunur.
(1) $\Rightarrow$ (3) R halkasının boştan farklı I, K altkümeleri için $IRK = 0$ olsun. O halde her $a \in I$ ve $b \in K$ için $aRb = 0$ dır. R halkası J-yansımalı olduğundan, $bRa \subseteq J(R)$ bulunur. Böylece $KRI \subseteq J(R)$ olduğu görülür.

J-yansımalı halka örnekleri oldukça fazladır. Aşağıda J-terslenebilir halkaların J-yansımalı halka olduğu gösterilmektedir.

Önerme 4.1.4. J-terslenebilir halkalar J-yansımalıdır.

İspat: R halkası J-terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Böylece $ab = 0$ ve her $r \in R$ için $abr = 0$ olur. R halkası J-terslenebilir olduğundan, her $r \in R$ için $bra \in J(R)$ dır. Buradan $bRa \subseteq J(R)$ elde edilir.

Yukarıda verilen önermenin karşıtı genel olarak doğru değildir. Aşağıdaki örnek Önerme 4.1.4 ün karşıtının genel olarak doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.1.5. $R = M_2(\mathbb{Z})$ halkası verilsin. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ olmasına rağmen $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J(R)$ olduğundan, R halkası J-terslenebilir değildir. R halkasının J-yansımalı olduğu kolayca gösterilebilir.

Aşağıdaki önerme J-yansımalı halkaların hangi durumda J-terslenebilir halka olduğunu ortaya koymaktadır.

Teorem 4.1.6. R bir Baer halka olsun. R halkasının J-terslenebilir olması için gerek ve yeter şart R nin J-yansımalı halka olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Önerme 4.1.4 gereğince açıktır.

($\Leftarrow$) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $abR = 0$ olup $a \in l_R(bR)$ dir. R halkası Baer olduğundan, $l_R(bR) = eR$ şartını sağlayan bir e eşkare elemanı vardır. Böylece $eRbR = 0$. R halkası J-yansımalı olduğundan, $bReR \subseteq J(R)$ dir. Buradan $ba \in J(R)$ elde edilir.

Yansımalı halkalar J-yansımalı olmasına rağmen bu ifadenin karşıtı genel olarak doğru değildir.

Örnek 4.1.7. R bir değişmeli halka olsun. R halkası üzerinde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası alınsın. S halkasının J-terslenebilir olduğu kolayca gösterilebilir. Önerme 4.1.4 gereğince S halkası J-yansımalı bir halkadır. Fakat $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse, $ASB = 0$ olmasına rağmen $BSA \neq 0$ dır. Böylece S halkasının yansımalı olmadığı görülmektedir.

Aşağıdaki sonuç J-yansımalı halka tanımı yardımıyla direkt olarak elde edilebildiğinden ispatsız olarak verilmektedir.

Sonuç 4.1.8. R bir halka olsun.

(1) Eğer $R/J(R)$ halkası yansımalı bir halka ise, R halkası J-yansımalıdır.

(2) Eğer $R/J(R)$ halkası değişmeli ise, R halkası J-yansımalıdır.

Sonuç 4.1.8 yardımıyla tek türlü temiz halkaların J-yansımalı olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.9. Her tek türlü temiz halka J-yansımalıdır.

İspat: R tek türlü temiz bir halka olsun. Bu durumda Teorem 2.1.35 gereğince $R/J(R)$ bir Boole halkasıdır. Sonuç 4.1.8 gereğince R halkası J-yansımalıdır.

Sonuç 4.1.9 karşıtı genel olarak doğru değildir.

Örnek 4.1.10. R değişmeli bir halka olmak üzere $M_2(R)$ halkası alınsın. $M_2(R)$ halkası Abel halka olmadığı için, tek türlü temiz değildir. $M_2(R)$ halkasının J-yansımalı olduğu kolayca gösterilebilir.

Önerme 4.1.11. R bir halka olsun. Eğer $N(R) \subseteq J(R)$ ise o zaman R halkası J-yansımalı bir halkadır.

İspat: $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Böylece her $r \in R$ için $arb = 0$ olup $ab = 0$ elde edilir. Buradan her $r \in R$ için $(bra)^2 = brabra = 0$ dır. Bu durumda $bra \in N(R)$ bulunur. Hipotez gereğince $bra \in J(R)$ olup, istenilen elde edilir.

Sonuç 4.1.12. Her sağ (sol) yarı-ikili halka J-yansımalıdır.

İspat: Önerme 2.1.48 gereğince ispat açıktır.

Aşağıda bir halkanın bölüm halkasının J-yansımalı olması için gerek ve yeter şartlar ortaya konulmaktadır.

Teorem 4.1.13. R bir halka I da R nin nilpotent ideali olsun. Bu durumda R nin J-yansımalı olması için gerek ve yeter şart R/I halkasının J-yansımalı olmasıdır.

İspat: $R/I = \overline{R}$ ve $a+I = \overline{a} \in \overline{R}$ olmak üzere, $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{R}$ için $\overline{aRb} = \overline{0}$ şartı sağlansın. Buradan $aRb \subseteq I$ olur. I bir nilpotent ideal olduğundan $(RaRbR)^k = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. R halkası J-yansımalı olduğundan, $(RbRaR)^k \subseteq J(R)$ bulunur. Jacobson radikali yarı asal olduğundan $RbRaR \subseteq J(R)$ elde edilir. O halde $\overline{RbRaR} \subseteq J(R)/I = J(\overline{R})$ dir. Böylece $\overline{bRa} \subseteq J(\overline{R})$ olur.
Karşıt olarak, $a, b \in R$ için $aRb = 0$ sağlansın. Buradan $\overline{aRb} = \overline{0}$ dır. Bu durumda $aRb \subseteq I$ ve $RaRbR \subseteq I$ olur. I nilpotent olduğundan, $I^k = 0$ şartını sağlayacak bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece, $(RaRbR)^k = RaRbRaRbR \cdots RaRbR = 0$ dır. Bu durumda, $\overline{(RaRbR)^k} = \overline{0}$ bulunur. R/I halkası J-yansımalı olduğundan,

$\overline{(RbRaRbRaR\cdots RbRaR)} = \overline{(RbRaR)}^k \subseteq J(\overline{R})$ olur. Jacobson radikali yarı asal olduğundan, $RbRaR \subseteq J(\overline{R})$ elde edilir. Bu nedenle, $\overline{bRa} \subseteq J(\overline{R})$ olur. Buradan, her $\overline{r} \in \overline{R}$ için, $\overline{1} - (\overline{bra})\overline{x} \in U(\overline{R})$ şartını sağlayan bir $\overline{x} \in J(\overline{R})$ vardır. Böylece, $(\overline{1} - (\overline{bra})\overline{x})\overline{s} = \overline{1}$ şartını sağlayan $\overline{s} \in \overline{R}$ vardır. Buradan, $1 - (1 - bra)xs \in I$ olur. Her nilpotent ideal bir nil ideal olduğundan, $1 - (brax)s \in U(R)$ elde edilir. Böylece, $bra \in J(R)$ olup $bRa \subseteq J(R)$ bulunur.

Sonuç 4.1.14. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) Eğer $J(R)$ nilpotent ideal ise o zaman, R halkasının J-yansımalı olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ halkasının J-yansımalı olmasıdır.

(2) Eğer R bir Artinian halka ise o zaman, R halkasının J-yansımalı olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ halkasının J-yansımalı olmasıdır.

İspat: (1) Teorem 4.1.13 gereğince ispat açıktır.
(2) Artinian halkaların Jacobson radikalleri nilpotent ideal olduğundan, (1) gereğince ispat açıktır.

Önerme 4.1.15. R bir halka ve I da R nin $I \subseteq J(R)$ şartını sağlayan bir ideali olsun. Eğer R/I halkası J-yansımalı ise o zaman, R halkası J-yansımalıdır.

İspat: $\overline{R} = R/I$ ve $\overline{a} = a + I \in R/I$ olmak üzere $a, b \in R$ için $aRb = 0$ sağlansın. Buradan $\overline{aRb} = \overline{0}$ olur. $\overline{R}$ halkası J-yansımalı olduğundan, $\overline{bRa} \subseteq J(\overline{R})$ bulunur. Böylece her $\overline{r} \in \overline{R}$ için $\overline{bra} \in J(\overline{R})$ sağlanır. Bu durumda, her $\overline{x} \in \overline{R}$ için $\overline{1} - (\overline{bra})\overline{x} \in U(\overline{R})$ olur. O halde, $(\overline{1} - (\overline{bra})\overline{x})\overline{s} = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{s} \in \overline{R}$ vardır. Bu nedenle, $1 - (1 - brax)s \in I$ dır. I ideali $J(R)$ tarafından kapsandığından dolayı, $(1 - brax)s \in U(R)$ bulunur. Sonuç olarak $bra \in J(R)$ olup $bRa \subseteq J(R)$ elde edilir.

Önerme 4.1.16. R bir halka ve I da R nin yansımalı bir ideali olsun. Bu durumda, R/I halkası J-yansımalıdır.

İspat: $\overline{R} = R/I$ ve $\overline{a} = a + I \in R/I$ olmak üzere $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{R}$ için $\overline{aRb} = \overline{0}$ sağlansın. Böylece, $aRb \subseteq I$ olur. I ideali yansımalı olduğundan, $bRa \subseteq I$ elde edilir. O halde, $\overline{bRa} = \overline{0} \in J(\overline{R})$ bulunur.

Teorem 4.1.17. J-yansımalı halkaların her altdirekt çarpımı da J-yansımalıdır.

İspat: R bir halka ve I, K da R nin idealleri olmak üzere R halkası R/I ve R/K halkalarının bir altdirekt çarpımı olsun. R/I ve R/K halkaları J-yansımalı ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ sağlansın. Buradan, $\overline{0} = \overline{aRb}$ ifadesi R/I ve R/K tarafından kapsanır. R/I ve R/K halkaları J-yansımalı olduğundan, $\overline{bRa} \subseteq J(R/I)$ ve $\overline{bRa} \subseteq J(R/K)$ dir. Böylece her $x \in R$ için $\overline{1 - brax} \in U(R/I)$ ve $\overline{1 - brax} \in U(R/K)$ sağlanır. O halde, $\overline{(1 - brax)y} = \overline{1} \in R/I$ ve $\overline{(1 - brax)z} = \overline{1} \in R/K$ şartlarını sağlayan $y \in R/I$ ve $z \in R/K$ vardır. Bu durumda, $1 - (1 - brax)y \in I$ ve $1 - (1 - brax)z \in K$ olur. Elde edilen son iki terim çarpılırsa, $(1 - (1 - brax)y)(1 - (1 - brax)z) \in IK \subseteq I \cap K = 0$ elde edilir. Böylece, $1 - (1 - brax)t = 0$ ve $(1 - brax)t = 1$ olur. Sonuç olarak $bRa \subseteq J(R)$ dir.

Sonuç 4.1.18. R bir halka, I ve K da R nin idealleri olsun. Eğer R/I ve R/K halkaları J-yansımalı ise o zaman $R/(I \cap K)$ halkası da J-yansımalıdır.

İspat: $\alpha : R/(I \cap K) \to R/I$ ve $\beta : R/(I \cap K) \to R/K$ fonksiyonları $\alpha(r + (I \cap K)) = r + I$ ve $\beta(r + (I \cap K)) = r + K$ olacak şekilde tanımlansın. α ve β fonksiyonlarının örten birer halka homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca, $\mathrm{Ker}\alpha \cap \mathrm{Ker}\beta = 0$ olur. Bu durumda, $R/(I \cap K)$ halkası R/I ve R/K halkalarının bir altdirekt çarpımıdır. Böylece, $R/(I \cap K)$ halkası Teorem 4.1.17 gereğince J-yansımalıdır.

Sonuç 4.1.19. R bir halka ve I, K da R nin idealleri olsun. Eğer R/I ve R/K halkaları J-yansımalı ise o zaman R/IK halkası da J-yansımalıdır.

İspat: R/I ve R/K halkaları J-yansımalı olsun.

$$R/I \cap K \cong (R/IK)/(I \cap K/IK)$$

ve $(I \cap K/IK)^2 = 0$ olduğundan, Teorem 4.1.13 gereğince ispat biter.

4.2 J-Yansımalı Halka Genişlemeleri

Bu bölümde J-yansımalı halka sınıfının bazı genişlemeleri incelenmektedir. İlk olarak J-yansımalı olma özelliğinin Morita değişmez bir özellik olduğu gösterilmektedir. Ardından, J-yansımalı halkaların bazı halka genişmelerinin hangi durumlarda J-yansımalı olduğu ortaya konulmaktadır.
Aşağıdaki sonuç J-yansımalı halka olma özelliğinin Morita değişmez bir özellik olduğunu ortaya koymaktadır.

Teorem 4.2.1. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) Eğer R halkası J-yansımalı ise o zaman her $e^2 = e \in R$ için eRe halkası da J-yansımalıdır.

(2) R halkasının J-yansımalı olması için gerek ve yeter şart her n pozitif tamsayısı için $M_n(R)$ halkasının J-yansımalı olmasıdır.

İspat: (1) R halkası J-yansımalı ve $a, b \in eRe$ için $aeReb = 0$ sağlansın. R halkası J-yansımalı olduğundan, $ebRae = ebRea \subseteq eJ(R)e = J(eRe)$ elde edilir. Bu durumda, eRe halkasının J-yansımalı olduğu bulunur.
(2) $M_n(R)$ halkası J-yansımalı olsun. (1) gereğince R halkasının J-yansımalı olduğu açıktır. Karşıt olarak, R halkası J-yansımalı olsun ve $M_n(R)$ halkasının I ve K idealleri için $IK = 0$ şartı sağlansın. Bu durumda, R halkasının $I = M_n(I_1)$ ve $K = M_n(K_1)$ şartlarını sağlayan I_1 ve K_1 idealleri mevcuttur. Böylece $0 = IK = M_n(I_1)M_n(K_1) = M_n(I_1K_1)$ olup $I_1K_1 = 0$ bulunur. R halkası J-yansımalı olduğundan, $K_1I_1 \subseteq J(R)$ elde edilir. O halde, $KI = M_n(K_1)M_n(I_1) = M_n(K_1I_1) \subseteq M_n(J(R)) = J(M_n(R))$ dir. Böylece, $M_n(R)$ halkası J-yansımalı olur.

Sonuç 4.2.2. R bir J-yansımalı halka ve M sonlu üreteçli projektif bir R modül olsun. O halde, $\mathrm{End}_R(M)$ halkası J-yansımalıdır.

İspat: Teorem 4.2.1 gereğince ispat açıktır.

Önerme 4.2.3. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) $M = \left\{ \begin{pmatrix} r & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & r & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & r \end{pmatrix} : r \in R,\ x_{ij} \in R, 2 \le i,j \le n-1 \right\}$ bir J-yansımalı halkadır.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $I = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse, Teorem 4.1.13 gereğince ispat açıktır.

Önerme 4.2.4. *R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R bir J-yansımalı halkadır.*

(2) *R halkasının aşikar genişlemesi olan $R \propto R$ halkası bir J-yansımalı halkadır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R bir J-yansımalı halka olsun. Ayrıca $A = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & y \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R \propto R$ için, $A(R \propto R)B = 0$ sağlansın. Her $M = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \in R \propto R$ için, $AMB = \begin{pmatrix} asb & asy + atb + xsb \\ 0 & asb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bulunur. R halkası J-yansımalı ve $aRb = 0$ olduğundan, her $s \in R$ için $bsa \in J(R)$ olduğu görülür. $J(R \propto R) = \begin{pmatrix} J(R) & R \\ 0 & J(R) \end{pmatrix}$ olduğu bilinmektedir. O halde, $B(R \propto R)A \subseteq J(R \propto R)$ olup, istenilen sonuç elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (1) $R \propto R$ halkası bir J-yansımalı halka ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Buradan, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R \propto R$ için, $A(R \propto R)B = \begin{pmatrix} aRb & aRb \\ 0 & aRb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $R \propto R$ halkası J-yansımalı olduğundan, $B(R \propto R)A \subseteq J(R \propto R)$ bulunur. Böylece, $bRa \subseteq J(R)$ elde edilir.

Önerme 4.2.5. I bir indeks kümesi olmak üzere $\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ kümesi R_i halkalarının bir indeksli kümesi olsun. O halde, her $i \in \mathcal{I}$ için R_i halkasının J-yansımalı olması için gerek ve yeter şart $\prod_{i\in\mathcal{I}} R_i$ halkasının J-yansımalı olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\prod_{i\in\mathcal{I}} R_i$ halkasının $\prod_{i\in\mathcal{I}} M_i, \prod_{i\in\mathcal{I}} K_i$ idealleri için $\prod_{i\in\mathcal{I}} M_i \prod_{i\in\mathcal{I}} K_i = 0$ olsun. O halde, $\prod_{i\in\mathcal{I}} M_i K_i = 0$ dır. Buradan, her $i \in \mathcal{I}$ için $M_i K_i = 0$ bulunur. Her $i \in \mathcal{I}$ icin R_i halkaları J-yansımalı olduğundan, $K_i M_i \subseteq J(R_i)$ elde edilir. Bu durumda, $\prod_{i\in\mathcal{I}} K_i \prod_{i\in\mathcal{I}} M_i = \prod_{i\in\mathcal{I}} K_i M_i \subseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} J(R_i) = J(\prod_{i\in\mathcal{I}} R_i)$ bulunur.
($\Leftarrow$) R_ϕ halkasının M_ϕ ve K_ϕ idealleri için $M_\phi K_\phi = 0$ olsun. $M = (M_\phi)_{\phi\in\mathcal{I}}$ ve $K = (K_\phi)_{\phi\in\mathcal{I}}$ ideallerini sadece ϕ. bileşeni sıfırdan farklı olacak şekilde seçilsin. M ve K kümeleri $\prod_{i\in\mathcal{I}} R_i$ halkasının birer idealidir. Ayrıca, $MK = 0$ dır. $\prod_{i\in\mathcal{I}} R_i$ halkası J-yansımalı olduğundan, $KM \subseteq J(\prod_{i\in\mathcal{I}} R_i)$ bulunur. Bu durumda, $K_\phi M_\phi \subseteq J(R_\phi)$ olduğu görülür.

Önerme 4.2.6. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) Her n pozitif tamsayısı için $T_n(R)$ halkası J-yansımalıdır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $n = 1$ için ispat açıktır. $T_2(R)$ halkası için, $I = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ideali seçilsin. Buradan $I^2 = 0$ olduğu açıktır. Böylece $T_2(R)/I \cong R \times R$ elde edilir. Önerme 4.2.5 gereğince, $T_2(R)/I$ halkası J-yansımalıdır. Bu durumda, Teorem 4.1.13 gereğince, $T_2(R)$ halkası J-yansımalıdır. Tümevarım yardımıyla, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n(R)$ halkasının J-yansımalı olduğu benzer şekilde gösterilebilir.
(2) $\Rightarrow$ (1) Teorem 4.2.1(1) gereğince ispat açıktır.

Önerme 4.2.7. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ merkezil olsun. Bu durumda, R halkasının J-yansımalı olması için gerek ve yeter sart eR ve $(1-e)R$ halkalarının J-yansımalı olmalarıdır.

İspat: İfadenin gerek koşulu Teorem 4.2.1 gereği açıktır. İfadenin yeter koşulunun ispatı için e merkezil bir eşkare eleman olmak üzere, eR ve $(1-e)R$ halkaları J-yansımalı alınsın. $R \cong eR \times (1-e)R$ olduğu bilinmektedir. Önerme 4.2.5 gereğince, R halkası J-yansımalı olur.

Önerme 4.2.8. R bir halka ve $M = I(R; S)$ de R nin değişmeli S halkası yardımıyla elde edilen Dorroh genişlemesi olsun. Her $s \in S$ için $s + s' + ss' = 0$ şartını sağlayan bir $s' \in S$ mevcut olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) M bir J-yansımalı halkadır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M$ için $(a_1, b_1)M(a_2, b_2) = (0, 0)$ sağlansın. Bu durumda her $(x, y) \in M$ için, $(a_1, b_1)(x, y)(a_2, b_2) = (0, 0)$ gerçeklenir. O halde, $(a_1xa_2, a_1xb_2 + a_1ya_2 + b_1xa_2 + b_1ya_2 + a_1yb_2 + b_1xb_2 + b_1yb_2) = (0, 0)$ bulunur. Böylece, $a_1xa_2 = 0$ ve $a_1xb_2 + a_1ya_2 + b_1xa_2 + b_1ya_2 + a_1yb_2 + b_1xb_2 + b_1yb_2 = 0$ elde edilir. R halkası J-yansımalı olduğundan, her $x \in R$ için $a_2xa_1 \in J(R)$ dir. Böylece, $(a_2, b_2)(x, y)(a_1, b_1) = (a_2xa_1, *)$ olur. Hipotez gereğince, $(0, S) \subseteq J(M)$ dir. Her $x \in R$ için $(a_2xa_1, 0) \in J(M)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Sonuç olarak, $(a_2, b_2)S(a_1, b_1) \subseteq J(M)$ bulunur.
(2) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. O halde, $(a, 0)M(b, 0) = (0, 0)$ sağlanır. M halkası J-yansımalı olduğundan, $(b, 0)M(a, 0) \subseteq J(M)$ dir. Hipotez gereğince, $(0, S) \subseteq J(M)$ dir. Buradan $(bRa, 0) \subseteq J(S)$ bulunur. Sonuç olarak, $bRa \subseteq J(R)$ elde edilir.

Sonuç 4.2.9. R bir halka ve $f : R \to R$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) $R[[x, f]]$ bir J-yansımalı halkadır.

İspat: Önerme 4.2.8 gereğince ispat açıktır.

Sonuç 4.2.10. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) $R[[x]]$ bir J-yansımalı halkadır.

İspat: Sonuç 4.2.9 gereğince ispat açıktır.

Önerme 4.2.11. R bir halka ve M de R halkasının merkezil tersinir elemanlarını içeren çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda asağıdaki ifadeler denktir.

(1) R bir J-yansımalı halkadır.

(2) $S = M^{-1}R = \{\frac{a}{b} : a \in R, b \in M\}$ bir J-yansımalı halkadır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $a, b \in S$ için $aSb = 0$ olsun. Bu durumda $a = a_1u^{-1}$ ve $b = b_1v^{-1}$ şartlarını sağlayacak $a_1, b_1 \in R$ ve $u^{-1}, v^{-1} \in M$ mevcuttur. O halde $0 = aSb = a_1u^{-1}Sb_1v^{-1} = a_1Sbv^{-1}$ olur. Böylece her $rs^{-1} \in S$ için $a_1rs^{-1}bv^{-1}$ sağlanır. Buradan her $r \in R$ için $a_1rb_1 = 0$ dir. R halkası J-yansımalı olduğundan, $b_1ra_1 \in J(R)$ elde edilir. Bu ise $b_1v^{-1}rs^{-1}a_1u^{-1} \in J(R)$ olmasını gerektirir. $J(R) \subseteq J(S)$ olduğundan, $aSb \subseteq J(S)$ elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ ve $u, v \in M$ icin $aRb = 0$ sağlansın. Buradan $auRbv = 0$ olur. Böylece her $m \in M$ ve $r \in R$ için $aurmbv = 0$ bulunur. S halkası J-yansımalı, olduğundan, $bvrmau \in J(S)$ dır. Eğer $bvrmau$ ifadesi u, m, v elemanlarinin tersleri ile çarpılırsa, her $r \in R$ için $bra \in J(R)$ elde edilir. Bu durumda R halkasının J-yansımalı olduğu görülür.

Aşağıdaki ifade Önerme 4.2.11 in bir sonucudur.

Sonuç 4.2.12. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $R[x]$ bir J-yansımalı halkadır.

(2) $R[x, x^{-1}]$ bir J-yansımalı halkadır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada terslenebilir halkalarla başlayıp Dedekind sonlu halkalara kadar olan genelleştirmelerden ilham alınarak iki yeni halka sınıfı tanımlanmaktadır. Bu halka sınıflarından biri, terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olarak ortaya konulan J-terslenebilir halkalardır. Çalışmanın ilk bölümünde J-terslenebilir halkalar tanımlandıktan sonra mevcut halka sınıflarıyla olan ilişkisi incelenmektedir. Bu bölümde elde edilen önemli sonuçlardan bir tanesi, Nicholson tarafından 1977 yılında ortaya atılan soruya verilen cevap olmaktadır. Nicholson, temiz halkaların değişim halkası olduğunu gösterdikten sonra önermenin karşıtının doğru olmadığını söylemektedir. Bu nedenle, değişim halkalarının hangi şartlar altında temiz halka olduğu sorusu uzun yıllar araştırmacılar için bir problem olarak kalmıştır. Bu çalışmada değişim halkalarının J-terslenebilir halka olma özelliğini sağlaması halinde temiz olduğu gösterilmektedir. Bununla birlikte, Nicholson'ın 1999 yılına ait, kuvvetli temiz halka kavramını incelediği çalışmasında, beş açık problem araştırmacıların dikkatine sunulmaktadır. Bu sorulardan biri de kuvvetli temiz halkaların Dedekind sonlu olup olmadığıdır. Bu çalışmada bahsi geçen problem incelenmekte ve kuvvetli J-temiz halkaların Dedekind sonlu olduğu elde edilmektedir. Daha sonra J-terslenebilir halkaların bazı halka genişlemeleri ele alınmakta, verilen bir J-terslenebilir halkadan yeni J-terslenebilir halkalar oluşturulmaktadır.

Çalışmanın kalan kısmında, J-terslenebilir halka kavramı genelleştirilerek J-yansımalı halkalar tanımlanmaktadır. Bu bölümde J-yansımalı halkalar için önemli bir karakterizasyon yapılmaktadır. J-yansımalı halka sınıfının mevcut halka sınıfları ile olan ilişkisi incelenmektedir. J-yansımalı halkaların Baer halka olma şartlarını sağlaması halinde J-terslenebilir halka sınıfıyla denk olduğu gösterilmektedir. Bu bölümdeki en önemli sonuçlardan biri de, J-yansımalı halka olma özelliğinin Morita değişmez bir özellik olduğunun gösterilmesidir. Böylece, J-yansımalı bir halka verildiğinde bu halkanın üzerinde tanımlı matris halkalarının ve halkanın eşkare elemanları yardımıyla elde edilen köşegensel halkanın da J-yansımalı halka olduğu sonucuna varılmaktadır. Benzer şekilde bu bölümde de J-yansımalı halkaların birçok halka genişlemesi incelenmekte ve J-yansımalı halkalar ile genişlemeleri aralarında önemli bağlantılar kurulmaktadır.

Bu çalışmada tanımlanan J-terslenebilir ve J-yansımalı halkalar sayesinde terslenebilir, simetrik ve yarı-değişmeli halka kavramlarından daha genel iki yeni halka sınıfı literatüre kazandırılmaktadır. Bu sayede, değişmeli halkalarda mevcut olan özelliklerin değişmeli olmayan halkalarda sağlanıp sağlanmadığının kontrolünde kullanılmak üzere daha geniş halkalar ortaya konulmuş olmaktadır. Böylece, değişmeli halkalardan değişmeli olmayan halkalara genellenmesi düşünülen bir özelliğin, daha az şartları olan bir halka sınıfına taşınmasına katkı sağlanmaktadır.

KAYNAKLAR

Anderson, F.W. ve Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer-Verlag, 376 s., Berlin.

Camillo, V. P. ve Yu, H. P. ,1994. Exchange rings, units and idempotents. Comm. Algebra, 22(12) (1994); 4737-4749.

Calci, T.P., Halicioglu, S. ve Harmanci A. Symmetric Property of rings with respect to the Jacobson radical. Commun. Korean Math. Soc. 34 (2019), No. 1; 43-54.

Chen, H. On strongly J-clean rings. Comm. Algebra. 38(2010); 3790-3804.

Chen, H., Gurgun, O., Halicioglu S. ve Harmanci, A. Rings in which nilpotents belong to Jacobson radical. An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. LXII (2) (2016); 1-12.

Cohn, P. M. Reversible rings. Bull. London Math. Soc. 31(6)(1999); 641-648.

Cui, J. ve Chen, J. A class of quasipolar rings, Comm. Algebra. 40 (2012); 4471-4482.

Kaplansky, I. Rings of operators, 1968. 151 s., New York: W. A. Benjamin.

Koliha, J. J. ve Patricio, P. Elements of rings with equal spectral idempotents. J. Aust. Math. Soc. 72(1)(2002); 137-152.

Kose, H., Ungor, B., Halicioglu, S. ve Harmanci, A. A generalization of reversible rings. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci. 38(1)(2014); 43-48.

Krylov, P.A. Isomorphism of generalized matrix rings. Algebra Logic. 47 (4) (2008); 258-262.

Kwak, T.K. ve Lee, Y. Reflexive property of rings. Comm. Algebra. 40 (2012); 1576-1594.

Lam, T.Y. 1998. Lectures on modules and rings. Springer-Verlag, 557 s., Berlin.

Lam, T.Y. 2001. A First course in noncommutative Rings. Springer-Verlag, 441 s., Berlin.

Lam, T.Y. ve Dugas, A.S. Quasi-duo rings and stable range descent. J. Pure. Appl. Algebra. 195 (2005); 243-259.

Lambek, J. On the representation of modules by sheaves of factor modules. Canad. Math. Bull. 14 (1971); 359-368.

Liang, Z. ve Gang, Y. On weakly reversible rings. Acta Math. Univ. Comenian. 76 (2) (2007); 189-192.

Marianne, M. Rings of quotients of generalized matrix rings. Comm. Algebra. 15 (1987); 1991-2015.

Mason, G. Reflexive ideals. Comm. Algebra. 9 (1981); 1709-1724.

Morita, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Diagaku Sect. (1958) A6; 83142.

Nicholson, W.K. 1977. Lifting idempotents and exchange rings. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. (229); 269-278.

Nicholson, W.K. 1999. Strongly clean rings and Fitting's lemma. Comm. Algebra, Vol. (27); 3583-3592.

Nicholson, W.K. ve Zhou, Y. 2004. Rings which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit. Glasgow Math. J., Vol.(46); 227-236.

Tang, G. ve Zhou, Y. 2012. Strongly cleanness of generalized matrix rings over a local ring. Linear Algebra Appl., Vol.(437); 2546-2559.

Tang, G. Li, C. ve Zhou, Y. 2014. Study of Morita contexts, Comm. Algebra., Vol.(42); 1668-1681.

Warfield, R.B. Exchange rings and decompositions of modules. Math. Ann. 199 (1972); 31-36.

Wei, J. Certain rings whose simple singular modules are nil-injective. Turkish J. Math. 32 (2008), no. 4; 393-408.

Yu, H.P. Stable range one for exchange rings. J. Pure. Appl. Algebra. 98 (1995); 105-109.

Yu, H. On quasi-duo rings. Glasgow Math. J. 37(1)(1993); 21-31.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mete Burak ÇALCI
Doğum Yeri : Bakırköy
Doğum Tarihi : 23.01.1989
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

EĞİTİM DURUMU

Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü
Doktora: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü

YAYINLAR

M. B. Calci, S. Halicioglu ve A. Harmanci, *A class of J-quasipolar rings*, J. Alg. and Related Topics, 3(2)(2015), 1-15.

M. B. Calci, B. Ungor ve A. Harmanci, *Central quasipolar rings*, Rev. Colomb. Math., 49 (2015), 281-292.

M. B. Calci, H. Chen, S. Halicioglu ve A. Harmanci, *Reversibility of rings with respect to the Jacobson radical*, Mediterr. J. Math. 14:137 (2017).

H. Chen ve M.B. Calci, *On gs-Drazin inverses in a ring*, J. Algebra Appl., (2019), https://doi.org/10.1142/S0219498820500292.

M. B. Calci, S. Halicioglu ve A. Harmanci, *Strong P-cleannes of Trivial Morita Contexts*, Comm. Korean Math. Soc., Published online March 2019, doi=10.4134/CKMS.c180361.

BURSLAR

TÜBİTAK Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu (2012-2014).
TÜBİTAK Yurt İçi Doktora Bursu (2014-2018).

AKADEMİK GÖREVLER

Hangzhou Normal University (ÇİN), Misafir Araştırmacı (2017-2018).

SÖZLÜ SUNUMLAR

Ankara Matematik Günleri, Ankara Üniversitesi, 26-27 Mayıs 2016.

ICAA 2017, Moulay Ismail Üniversitesi, Fas, 26-28 Nisan 2017.