

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**AÇIK KUANTUM SİSTEMLERİNİN MARKOV OLMAYAN SÜREÇLERİ
VE KUANTUM HAFIZA ETKİLERİ**

Adem TÜRKMEN

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Adem TÜRKMEN tarafından hazırlanan “Açık Kuantum Sistemlerinin Markov Olmayan Süreçleri ve Kuantum Hafıza Etkileri” adlı tez çalışması 14/02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Baskan : Prof. Dr. Ceyhun BULUTAY
Bilkent Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. İnanç ŞAHİN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Hünkar KAYHAN
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Bülent YILMAZ
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

14/02/2019



Adem TÜRKMEN

ÖZET

Doktora Tezi

AÇIK KUANTUM SİSTEMLERİNİN MARKOV OLMAYAN SÜREÇLERİ VE KUANTUM HAFIZA ETKİLERİ

Adem TÜRKMEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Çevresiyle etkileşimine bağlı olarak, bir açık kuantum sistemin zamanla gelişimi Markov veya Markov olmayan süreç olabilir. Etkileşmelerin çevrede oluşturduğu değişikliklerin hızlıca düzeldiği Markov süreçlere hafızasız süreçler de denir. Markov olmayan süreçlerde ise etkileşmeden dolayı çevrede meydana gelen değişiklikler kısa sürede kaybolmaz ve hafıza etkileri oluşur. İndirgenmiş dinamik denilen açık kuantum sistemin gelişimi her zaman aralığında kuantum kanallarla betimlenebiliyorsa süreç bölünebilirdir. Bu çalışmada bölünebilir süreçler Markov süreçler, bölünemez olanlar ise Markov olmayan süreçler olarak tanımlanmıştır. Her iki süreçteki indirgenmiş dinamiği betimleyen kuantum kanalların ve master denklemlerin temel özellikleri irdelenmiştir. Hafıza etkisini nicelendirmek için önerilen Markov olmama ölçüleri incelenmiş ve bunların uygulanabilirlikleri tartışılmıştır. Markov olmama tanığı denilen fonksiyonlar, bir süreçteki Markov olmamayı tespit etmek için kullanılır. Bu fonksiyonlar performanslarına göre incelenmiş ve karşılaştırılmıştır. Kuantum koşullu karşılıklı bilişimin sıfır olduğu üç parçalı durumlar, Markov durumlar olarak tanımlanırlar. Giriş Markov durumken, indirgenmiş dinamiği betimleyen kanallar elde edilmiştir. Saf Markov durumlarda her türden korelasyonların olabileceği ve bu korelasyonların nicel değerinin çevrenin von Neumann entropisine eşit olduğu gösterilmiştir. Son olarak kuantum hata düzeltimi; açık kuantum sistemini, çevresini ve etkileşmeden bağımsız referans sistemini içeren bir çerçevede çalışılmıştır.

Şubat 2019, 133 sayfa

Anahtar Kelimeler: Açık kuantum sistemler, bölünemez süreçler, hafıza etkileri, kuantum kanallar, Lindblad denklemi, Markov olmayan süreçler, Markov olmama ölçütleri, Markov olmama tanıkları, Master denklem.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NON-MARKOVIAN PROCESSES OF OPEN QUANTUM SYSTEMS AND QUANTUM MEMORY EFFECTS

Adem TÜRKMEN

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Science
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Depending on its interaction with environment the time evolution of an open quantum system can be Markovian or non-Markovian process. Markovian processes, in which the changes generated by the interactions in the environment restore rapidly, are also called memoryless processes. In non-Markovian processes, changes in the environment due to interaction do not vanish in a short time and memory effects are taking place. The process is divisible if the evolution of an open quantum system, called reduced dynamics, can be described by quantum channels in each time interval. In this study, the divisible processes are defined as Markovian processes, and the indivisible ones as non-Markovian. Basic properties of quantum channels and master equations that describe reduced dynamics in both processes are examined. In order to quantify the memory effects, the proposed non-Markovianity measures are reviewed and their applicability are discussed. The functions called non-Markovianity witnesses are used to detect non-Markovianity in a process. These functions are investigated and compared with respect to their performances. Any tripartite state, for which conditional quantum mutual information is zero, is defined as the Markov state. When the input is a Markov state, the channel that describes the reduced dynamics has been obtained. It has been shown that all kinds of correlations could be present in pure Markov states and the quantitative values of these correlations are equal to the von Neumann entropy of the environment. Lastly, quantum error correction is studied in a framework consisting of an open quantum system, its environment and an interaction-free reference system.

February 2019, 133 pages

Key Words: Open quantum systems, indivisible processes, memory effects, quantum channels, Lindblad's equation, Non-Markovian processes, Non-Markovianity measures, Non-Markovianity witnesses, Master equation.

TEŞEKKÜR

Bilgisi ve önerileriyle öğrenme sürecimde büyük katkısı olan, yüksekisans ve doktora boyunca özverili tavrına ve sarf ettiği yoğun emeğe hep minnetkar kalacağım, çalışma disiplini ve bilimsel titizlik konularında kendisinden çok Şey öğrendiğim, çalışmalar dıőındaki sohbetlerimizden de oldukça istifade ettiğim danışman hocam sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı) teőekkürlerimi sunarım. Tez izleme komitesindeki değerli hocalarım Doç. Dr. Hünkar KAYHAN'a (Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. İnanç ŞAHİN'e (Ankara Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı) de teşekkür ederim. Ayrıca değerli çalışma arkadaşlarım Solmaz YILMAZ, Durgun DURAN, İbrahim ÜLGEN'e ve çalıőmalarımın her aşamasında verdiği destek ve gösterdiği özveri için sevgili eőim Kübra TÜRKMEN'e ve aileme de teőekkürlerimi sunarım.

BİDEB 2211-A programı kapsamında verdiği burs desteği için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na da teőekkürler ederim.

Adem TÜRKMEN

Ankara, Şubat 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. MARKOV VE MARKOV OLMAYAN SÜREÇLERDE İNDİRGENMİŞ DİNAMİK	8
2.1 Kuantum Durumlar, Gözlenebilirler ve Gelişimler.....	8
2.2 Açık Kuantum Sistemler ve İndirgenmiş Dinamik.....	15
2.2.1 İndirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla betimlenmesi.....	18
2.3 Markov Olmayan Süreçlerin Tanımlanması.....	22
2.3.1 Kuantum kanalların bölünebilirliği	23
2.3.2 Markov ve Markov olmayan süreçlerde ayırt edilebilirlik.....	25
2.3.3 Hipotez testi ve ayırt edilebilirlik.....	29
2.3.4 Bölünebilirlik ve ayırt edilebilirlik tanımlarının karşılaştırılması.....	32
2.4 İndirgenmiş Dinamiğin Master Denklemlerle Tanımı	35
2.4.1 Master denklemin genel formu	36
2.4.2 Markov süreçlerde master denklem.....	42
2.4.3 Markov olmayan süreçlerde master denklem	47
3. MARKOV OLMAMA ÖLÇÜLERİ.....	50
3.1 Choi-Jamiolkowski Temsiliyle Markov Olmamanın Nicelendirilmesi	50
3.2 Ayırt Edilebilirlik Artışı Ölçüsü	53
3.3 Master Denklemin Kanonik Formunda Bozunum Oranı Ölçüsü	56
3.4 Geometrik Ölçü	58
4. BÖLÜNEBİLİR SÜREÇLERDE MONOTON ÖZELLİKLER: MARKOV OLMAMA TANIKLARI.....	60
4.1 Veri İşleme Eşitsizliği.....	61
4.1.1 Karşılıklı bilişim	63
4.2 Veri İşleme Eşitsizliği ve Markov Durumlar.....	65

4.3 İz Uzaklığı Artışı	69
4.4 Özyunluk Azalışı	74
4.5 Fisher Bilişim Artışı	76
4.6 Dolanıklık Artışı	80
4.7 Kuantum Diskort: Toplam Kuantum Korelasyon Artışı	82
4.8 Determinant: Erişilebilir Durum Artışı	84
4.9 Ünitel Kanallarda Entropi Tanığı	86
5. MARKOV DURUMLAR: İNDİRGENMİŞ DİNAMİĞİN TAMAMEN POZİTİFLİĞİ VE KUANTUM HATA DÜZELTİMİ	88
5.1 İndirgenmiş Dinamiğin Tamamen Pozitifliği	88
5.2 Markov Durumlar	90
5.2.1 Saf Markov durumlar	93
5.3 Markov Durumlarda İndirgenmiş Dinamik	95
5.4 Markov Durumlarda Sitem-Çevre Korelasyonları	96
5.4.1 Kuantum dolanıklık: oluşum dolanıklığı	97
5.3.2 Klasik korelasyon: Holevo niceliği	101
5.5 Kuantum Hata Düzeltimi	104
5.5.1 Hata düzeltim kanallarının oluşturulması	106
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	110
KAYNAKLAR	115
EKLER	123
EK 1 Klasik Stokastik Süreçlerde Markov ve Markov Olmayan Gelişimler	124
EK 2 Bilişimsel Yalıtılmışlık	128
EK 3 Kuantum Durumların Saflaştırılması	130
ÖZGEÇMİŞ	133

SİMGELER DİZİNİ

\mathcal{H}	Hilbert uzayı
\mathcal{H}_X	X sistemiyle ilişkili Hilbert uzayı
\mathcal{H}_{QE}	$\mathcal{H}_{QE} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_E$, QE bileşik sisteminin Hilbert uzayı
$S(\mathcal{H})$	\mathcal{H} Hilbert uzayında tanımlı konveks yoğunluk işlemcileri kümesi
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	\mathcal{H} Hilbert uzayında tanımlı sınırlı işlemciler kümesi
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	\mathcal{H} Hilbert uzayında tanımlı çizgisel işlemcilerin vektör uzayı
\dagger	Hermitsel eşlenik alma işlemi
\otimes	Tensörel çarpım
ρ, σ	Yoğunluk işlemcileri
ρ^X, σ^X	X sisteminin yoğunluk işlemcileri
ρ^Q, σ^Q	Açık kuantum sistemin yoğunluk işlemcileri
ρ^E, σ^E	Çevre sisteminin yoğunluk işlemcileri
ρ^R, σ^R	Yardımcı sistemin yoğunluk işlemcileri
$ \psi\rangle$	Saf durum vektörü
Tr	İz alma işlemi
Tr_X	X sistemi üzerinden parçalı iz alma işlemi
$\mathbb{1}$	Birim işlemci
$\mathbb{1}_X$	X sisteminin birim işlemcisi
M_x	Ölçüm sonucunun x olmasıyla ilişkili POVM elemanı
\mathcal{X}, \mathcal{Y}	Ölçüm sonuçlarının oluşturduğu sonlu kümeler
$\langle A \rangle$	A işlemcisinin beklenen değeri
U_X	X sistemi üzerinde tanımlı üniter işlemci
$[A, B]$	A ve B işlemcilerinin sıra değişim bağıntısı: $[A, B] = AB - BA$
$\{A, B\}$	A ve B işlemcilerinin zıt sıra değişim bağıntısı: $\{A, B\} = AB + BA$
Λ	Sistemlerin her türlü fiziksel gelişimini tarif eden gönderim
Λ^*	Λ kanalının dual kanalı
C_Λ	Λ kuantum kanalının Choi matrisi

M_Λ	Λ kuantum kanalının matris temsili
$\mathcal{K}(t, s)$	Hafıza çekirdeği
id	Özdeşlik gönderimi
id_X	X sistemi üzerine etkiyen özdeşlik gönderimi
id_n	n boyutlu sistem üzerine etkiyen özdeşlik gönderimi
ad_X	Etkisi $ad_X(\cdot) = X(\cdot)X^\dagger$ olan gönderim
\mathcal{U}	Sistem-çevre bileşik sisteminde tanımlı üniter kanal
\mathcal{T}	Zaman sıralama işlemcisi
■	İspatın sona erdiğini gösteren işaret
≡	Tanım
\mathcal{L}_t	Master denklemin zamana bağlı üretici
\mathcal{L}	Master denklemin zamandan bağımsız üretici
◦	Gönderimlerin bileşke işlemi
$\ker(\Lambda)$	Λ gönderiminin çekirdeği
$ A $	A işlemcisinin $ A = \sqrt{A^\dagger A}$ olan modülü
$\ A\ _1$	A işlemcisinin iz normu: $\ A\ _1 = Tr A $
$d_1(A, B)$	A ve B işlemcileri arasındaki iz uzaklığı
η	Bilişim akışı niceliği
$\dim(\mathcal{H})$	\mathcal{H} Hilbert uzayının boyutu
\mathcal{N}	Markov olmama ölçüsü
\mathcal{W}	Markov olmama tanığı
I	Dinamiğin incelendiği zaman aralığı
\mathfrak{M}	Bölünebilir kanallar kümesi
\mathfrak{M}	POVM kümesi
\mathcal{D}	Kuantum hata düzeltim kanalı
$E_f(AB)$	A ve B sistemleri arasındaki oluşum dolanıklığı (<i>entanglement of formation</i>)
Δ	Helstrom matrisi
χ	Holevo niceliği

$I_c(R:Q)$	R ve Q sistemleri arasındaki koherent bilgi
C	Klasik korelasyon
$C_{\overline{QE}}$	Erişilebilir bilgi (<i>accessible information</i>): E sistemi üzerine ölçüm uygulanarak, Q sistemiyle ilgili elde edilebilecek klasik bilgi
D	Kuantum diskort
$\gamma_i(t)$	Bozunum oranı (<i>decay rate</i>)

Kısaltmalar

OQS	Açık Kuantum Sistem (<i>Open Quantum System</i>)
CP	Tamamen pozitif (<i>completely positive</i>)
CPTP	Tamamen pozitif ve iz koruyan (<i>completely positive and trace preserving</i>)
QEC	Kuantum hata düzeltimi (<i>Quantum Error Correction</i>)
DPI	Veri işleme eşitsizliği (<i>Data processing inequality</i>)
POVM	Pozitif işlemci değerli ölçü (<i>Positive operator valued measure</i>)
LOCC	Yerel işlemler ve klasik haberleşme (<i>Local operations and classical communications</i>)
GKSL	Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad
RHP	Rivas-Huelga-Plenio
BLP	Breuer-Laine-Piilo
LFS	Li-Fu-Song

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Açık kuantum sistemlerde gönderimler	21
Şekil 2.2 Kuantum kanalların bölünmesi	23



1. GİRİŞ

Doğada fiziksel sistemler özel koşullar dışında çevreleriyle etkileşme halindedir. Bu nedenle gerçekçi incelemelerde, sistemin çevresiyle etkileşmesini dikkate alan açık kuantum sistem (*OQS: open quantum system*) kuramına ihtiyaç vardır. Bu kuramda sistemle çevresi kapalı bir bileşik sistem oluşturur. Kapalı olmakla kastedilen, sistem-çevre durumunun bileşik bir üniter gelişimle gelişiyor olması; bu bileşik sistemin başka herhangi bir sistemle bilişim (*information*) alış verişi içinde olmayan, bilişim anlamında yalıtılmış (*informationally isolated*) bir sistem olmasıdır (Schumacher ve Westmoreland 2010, Ek 2). Bileşik sistem üniter gelişirken; ilgilenilen açık sistemin dinamiği ise indirgenmiş dinamik (*reduced dynamics*) denilen genelde üniter olmayan, terslenemez süreçlerdir (Davies 1976, Breuer ve Petruccione 2002, Alicki ve Lendi 2007, Rivas ve Huelga 2011).

Açık sistem kuramı başta kuantum optik olmak üzere yoğun madde fiziğinden kuantum bilişim kuramına (*quantum information theory*), fiziğin birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır (Alicki ve Lendi 2007, Carmichael 2009, Nielsen ve Chuang 2010, Schumacher ve Westmoreland 2010, Holevo 2012, Weiss 2012, De Vega ve Alonso 2017). Son yıllarda yaşanan deneysel ve kuramsal içerikli gelişmeler, sistemlerin daha hassas kontrol edilerek belirli teknolojik uygulamalarda kuantum özelliklerinden faydalanma olanağı sunmaktadır (Dowling ve Milburn 2003, Nielsen ve Chuang 2010, Wiseman ve Milburn 2010). Kuantum teknolojiler diye adlandırılacak ve kuantum özelliklerden yararlanmayı esas alan bu tür uygulamalarda, sistemin kuantum özelliklerinin çevrenin bozucu etkilerine karşı en azından belli sürelerde korunması gerekir. Bu kapsamda sistemle çevresi arasındaki etkileşmelerin ayrıntılarının anlaşılmasına ihtiyaç vardır.

Kuantum bilgisayarım (*quantum computation*), kuantum kriptoloji (*quantum cryptography*), kuantum internet (*quantum internet*), kuantum metroloji (*quantum metrology*) ve kuantum benzetim (*quantum simulation*) gibi disiplinlerdeki, yeni bir teknoloji çağının öncüsü gelişmelerde, sistemlerin çevreleriyle ya da belirlenmiş bir sistemle etkileşimlerini anlamak, hem kuramsal hem de uygulamaya yönelik pratik

ihtiyaçlar için kritik önemdedir. Bu bağlamda sistemlerin etkileşme halinde oldukları doğadaki gerçek süreçlerde, kuantum özelliklerin davranışının anlaşılması için, açık sistem kuramı kaçınılmazdır.

Sistem ve çevre arasındaki etkileşmeye bağlı olarak açık sistem dinamiğinde iki tür gelişimden bahsedilebilir: Markov¹ ve Markov olmayan süreçler. Markov süreçlerde sistemle çevresi arasındaki bağlaşımın zayıf (*weak coupling*) veya tekil (*singular coupling*) olmasının sonucu olarak, Born-Markov yaklaşıklığı denilen iki yaklaşıklığın yapılabiliyor olması gerekir. İlk yaklaşıklık, sistemle çevrenin başlangıç durumunun ne klasik ne de kuantum nitelikli hiçbir korelasyon içermeyen $\rho^{QE} = \rho^Q \otimes \rho^E$ şeklindeki çarpım durumunda olmasıdır (Born yaklaşıklığı). Bu özellik sistem ve çevrenin başlangıçta birbirinden bağımsız olarak hazırlanabilmesini, sistemin durumundan etkilenmeyen sabit bir çevrenin varlığını ifade eder. İkincisi ise; çevrenin gelişim sürecindeki farklı durumları arasındaki korelasyonun süresini tarif eden çevrenin korelasyon zamanı, etkileşmenin sistemin durumu üzerinde meydana getirdiği değişimin süresini belirten durulma zamanına göre daha kısa olur ve çevre kısa sürede eski haline dönerek, etkileşmenin etkileri çevreden hızlıca silinir (Markov yaklaşıklığı). Çevrenin dinamiğin geçmişiyile ilgili etkileri hızlıca ‘unuttuğu’ bu süreçlere hafızasız (*memoryless*) süreçler, bu durumdaki çevreye de hafızasız çevre (*memoryless environment*) denir.

Hafızasız süreçleri daha açık ifade edebilmek için ilgilenilen açık sistemin geçmişi, şimdiki durumu ve geleceği dikkate alındığında; sistemin geleceği geçmişinden bağımsız olup sadece şimdiki durumu tarafından belirlenir. Ayrıca Markov süreçlerde sistemle çevresi arasındaki etkileşmenin sonucu olarak meydana gelen korelasyonlar aracılığıyla, sistemin bilişiminin tek yönlü olarak çevreye aktığı, sistemden çevreye bilişim akışı (*flow of information*) olduğu da bilinmektedir (Laine vd. 2010). Süreçlerin hafızasızlığının sadece tek yönlü bilişim akışıyla ilişkilendirilmesinin yeterli olmadığına yönelik eleştiriler de vardır (Rivas vd. 2014, Wudarski ve Petruccione 2016).

¹ Olasılık teorisi ve istatistik başta olmak üzere, diferansiyel denklemlerden sayılar teorisine kadar birçok alanda önemli katkılar yapan matematikçi Andrei Andreyevich Markov (1856-1922)’un hayatı ve çalışmalarıyla ilgili özet bir derleme sunan (Basharin vd. 2004) kaynağı incelenebilir.

Doğadaki gerçek fiziksel süreçlerde çoğu durumda Born-Markov yaklaşıklığını yapabilmek mümkün değildir. Bu durumlarda sistemin geleceğinin belirlenmesinde, şimdiki durumunun yanı sıra sürecin geçmişinin de etkisi vardır. Hafızalı süreçler veya Markov olmayan süreçler denilen bu tür gelişimlerde, sistemle çevre arasında çift yönlü bir bilişim akışı olduğu, yani Markov süreçlerde olan sistemden çevreye bilişim akışının yanı sıra çevreden de sisteme geri bilişim akışı (*backflow of information*) da olduğu vurgulanır (Breuer vd. 2009).

Kuantum sistemlerin kontrolüne ve bu sistemlerin gelişiminin daha ayrıntılı anlaşılmasına yönelik deneysel tekniklerde son yıllarda meydana gelen gelişmeler, kuantum teknolojiler için Born-Markov yaklaşıklığının yeterli olmadığını, süreçlerdeki hafıza etkilerini dikkate alan, bu özellikten yararlanmayı amaçlayan yeni yaklaşımlara ihtiyaç olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda Markov olmama özelliğinin kuramsal ve uygulamaya yönelik olarak incelendiği çalışmalar, farklı disiplinler kapsamında günümüzde de yoğun olarak sürmektedir (Rivas vd. 2014, Breuer vd. 2016, De Vega ve Alonso 2017, Li vd. 2018).

Klasik stokastik süreçlerin Markov süreç olma özelliğinin tanımı nettir (Gardiner 1997, Norris 1997). Bu süreçleri tanımlayan koşullu olasılıkların Markov özelliğini sağlaması; yani bu koşullu olasılıkların dinamiğinin bir önceki aşamasındaki olasılıklar tarafından tek şekilde belirlenebiliyor olması, önceki aşamalardaki olasılıklara bağlı olmaması, sürecin hafızasızlığını kesin olarak belirler (Bakınız Ek 1). Sistemlerin kuantum özellikleri dikkate alındığında, klasik süreçlerdeki tanımların doğrudan kuantum sistemlere aktarımını yapmak mümkün değildir. Klasik Markov süreçlerle doğrudan bir benzerlik kurulamamasında birbirleriyle de ilişkili iki temel sebep; kuantum mekaniğinin sıradışı (*noncommutativity*) özelliğinin sonucu olarak aynı sistem üzerinde yapılan ölçümlerle tutarlı bileşik olasılıkların yazılamaması ve ölçüm sürecinin sistemin kuantum özelliklerine zarar veren yıkıcı etkisidir (Rivas vd. 2014, Breuer vd. 2016).

Kuantum özelliklerin kırılğan yapısından dolayı, kuantum hafıza etkilerinin tanımlanması ve hafızalı süreçlerin özelliklerinin belirlenmesinde henüz tam bir uzlaşma mevcut olmadığından, literatürde Markov olmayan süreçlerin farklı özelliklerine işaret eden ve

birbiriyle tam olarak örtüşmeyen iki tanım mevcuttur. İlk tanımda, çevreden sisteme bilişim akışı çevrenin hafıza özelliğinin göstergesi kabul edilerek, sistemin durumlarının hipotez testi kapsamında ayırt edilebilirliğinin artışı, sürecin Markov olmama özelliği olarak benimsenir (Breuer vd. 2009, Laine vd. 2010). İkinci tanımda ise; açık kuantum sistemin indirgenmiş dinamiğini tarif eden zamana bağlı Λ_t kuantum kanalının her $t \geq s \geq 0$ zamanları için $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ şeklinde farklı kanalların bileşkesi olarak bölünebilmesi, sürecin hafızasız olmasını, kanalın bölünemediği durumlar ise hafızalı Markov olmayan dinamiği tasvir etmektedir (Rivas vd. 2010).

Sistemlerin kuantum özelliklerinden yararlanmayı temel alan ve bu özelliklerin bilişimi işleme, aktarma ve depolama süreçlerinde nasıl kullanılabileceğini araştıran kuantum bilişim kuramında özellikle son çeyrek yüzyılda kaydedilen gelişmeler dikkat çekicidir. Sistemlerin klasik özellikleri kullanılarak gerçekleştirilmesi mümkün olmayan bazı yükümlülüklerin (*tasks*) kuantum özelliklerden yararlanılarak gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir (Nielsen ve Chuang 2010, Schumacher ve Westmoreland 2010, Wilde 2017). OQS'lerdeki Markov olmama özelliğinin de bazı kuantum bilişim süreçleri için öz kaynak (*resource*) olabileceği dikkate alınarak (Chitambar ve Gour 2018), bu çalışmada öncelikle kuantum bilişim kuramı yöntemleri ve araçları benimsenecektir.

OQS'lerin zamanla gelişimleri iki şekilde anlatılabilir. Birincisinde kuantum kanal denilen sistemin giriş durumunu çıkış durumuna dönüştüren çizgisel, tamamen pozitif ve iz koruyan (CPTP: *completely positive and trace preserving*) gönderimlerin özellikleriyle süreç karakterize edilir. İkincisinde ise sistemin durumunun zamanla değişimini tarif eden master denklemler kullanılır. Bu tez, Markov ve Markov olmayan süreçlerde kuantum kanalların ve master denklemlerin özelliklerinin belirlenmesinin amaçlandığı kuramsal bir incelemedir. Bu kapsamda Markov olmayan süreçlerin tanımlanmasının ve başlıca özelliklerinin belirlenmesinin amaçlandığı ikinci bölümde ilk olarak kuantum durumlar, gözlenebilirler ve gelişimlerle ilgili ihtiyaç duyulan bilgiler verilecek; devamında ise açık kuantum sistemlerin indirgenmiş dinamiğine ilişkin gerekli kavramlar tanıtılacaktır. Bölümün 2.3 kısmında Markov ve Markov olmayan süreçlerin yukarıda sözü edilen tanımları karşılaştırılacak ve bölünebilirliği temel alan tanım benimsenecektir. Bölümün

son 2.4 alt bölümünde ise, Markov ve Markov olmayan süreçlerde master denklemin özelliklerine değinilecektir.

Üçüncü bölümde hafıza özelliğinin nicelendirilmesinde kullanılan farklı Markov olmama ölçüleri (*non-Markovianity measures*) tanıtılacaktır. Sürecin hafızasız olması için gerek ve yeter koşul olan özellikler gösteren fonksiyonlar olan ölçülerin her biri, bölünebilirliğin alternatif tanımlarıdır. Bu bağlamda ölçülerin birbirlerine göre üstünlüklerinden bahsetmek mümkün değildir, fakat ölçü olarak kullanılan fonksiyonların hesaplanmasındaki zorluklar dikkate alınarak değerlendirmeler yapılmıştır.

Dördüncü bölümde bölünebilir süreçlerde monoton davranış gösteren, fakat bu davranışının sürecin bölünebilmesini gerektirmediği fonksiyonlar tartışılacaktır. Monoton davranışın ihlal edilmesi gelişimin Markov olmama özelliğini söylerken, monoton davranış olması sürecin bölünebilirliğini garantilememektedir. Bu kapsamda süreçlerin hafıza özelliğini tespit etmeye yönelik olarak Markov olmama tanığı (*non-Markovianity witness*) denilen, farklı niceliklerin monoton davranışını esas alan çok sayıda fonksiyon vardır. Bir tanık her sürecin Markov olmama özelliğini tespit edemeyebilir. Tanığın yetkinliği ne kadar çok süreçte hafıza özelliğini algılayabildiğiyle ilgilidir. Bu nedenle incelenen tanıkların Markov olmama özelliğini tespit edebilme performanslarına göre karşılaştırmalar yapılmıştır.

Bölüm 4.2’de anlatılanlar 2017 yılında yayımlanan (Türkmen vd. 2017) tez çalışmasının özgün sonuçlarındandır. Bu bölümde ilk olarak OQS’lerde veri işleme eşitsizliği (DPI: *Data processing inequality*)’nin sağlanmasıyla ilgili gerek ve yeter koşullar; sistem ve çevresi arasındaki başlangıç korelasyonlarına herhangi bir kısıtlama koymadan ve indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarif edilip edilememesiyle ilgilenmeden en genel durumda tartışılmıştır. Özel olarak giriş ya da çıkış sisteminin Markov durumu² olması halinde DPI’nin sağlanma ve ihlal edilme koşulları da ortaya koyulmuştur. Ayrıca 2014 yılında yapılan bir çalışmada (Buscemi 2014) iddia edildiği gibi DPI’nin sağlanması

² Markov durumunun tanımı ve özellikleri için 4.2 alt bölümü incelenebilir.

için giriş durumunun Markov durum olmasının gerek ve yeter koşul değil sadece yeter koşul olduğu da karşı örneklerle ilgili çalışmada gösterilmiştir (Türkmen vd. 2017).

Beşinci bölümde de tez çalışması kapsamında elde edilen yeni sonuçlara değinilmiştir. İndirgenmiş dinamiğin tamamen pozitif (CP: *completely positive*) olduğu başlangıç durumları tartışılarak, sistem-çevre bileşik durumunun bir Markov durumun indirgenmiş olması halinde, açık kuantum sistemin gelişimini tarif eden kuantum kanalların Kraus işlemcileri gösterilmiştir. Ayrıca saf Markov durumların kanonik formu ve bu durumlarda sistemle çevresi arasında var olabilecek korelasyonların analizi de yapılmıştır (Türkmen vd. 2016). Bölümün son kesiminde ise Markov durumların korunduğu gelişim süreçlerinde başlangıç korelasyonu olsa dahi mükemmel kuantum hata düzeltimi (QEC: *quantum error correction*) yapılabileceğinin gösterildiği son çalışmanın (Türkmen ve Verçin 2018) bulgularına kısaca değinilmiştir.

Tezin üç bölümden oluşan Ekler kısmında ilk olarak, indirgenmiş dinamiği betimleyen kanalların bölünebilme özelliğine dayalı kuantum Markov süreç tanımıyla, klasik Markov süreç tanımı arasındaki benzerliği görmek için, klasik stokastik süreçlerdeki bazı kavramlar ve klasik Markov süreç tanımı kısaca incelendi. Eklerin ikinci bölümünde sistem-çevre bileşik durumu üniter gelişirken başka sistemlerden bilişimsel anlamda yalıtılmış olmalarının, üniter gelişen tüm sistemlerin bir özelliği olduğunu gösteren yalıtılmışlık teoremi (*isolation theorem*) tartışıldı. Eklerin son bölümünde ise her saf olmayan durumun daha yüksek boyutlu bir uzayda tanımlı bir saf durumun indirgenmiş olarak düşünülmesine imkan veren, saflaştırma kavramı irdelenmiştir. OQS'lerdeki korelasyon analizlerinde, Markov olmama ölçü ve tanıklarının hesaplanmasında saflaştırma düşüncesi işleri kolaylaştıran bir yöntem olduğu için bütünlük kaygısıyla tezde yer verme gereği görülmüştür.

Tezde OQS Q , sistemin çevresi E , dinamiğe katılmayan yardımcı sistem de R ile gösterilecektir. Kuantum durumların hangi sisteme ait olduklarını belirtmek gerektiğinde ρ^Q, σ^E şeklinde üste yazılacak, diğer işlemciler ve gönderimlerin tanımlı oldukları sistemler U_{QE}, id_R şeklinde altta gösterilecektir. Ayrıca giriş durumları için daima ρ ,

ıkış durumlari içinse σ sembolu kullanılacaktır. Gelişimin ara aşamalarındaki durumlar ise $\rho(t_1)$, $\rho(t_2)$ şeklinde zaman bağımlılıklari açıkça yazılarak ifade edilecektir.

Son olarak bu çalışmada incelemelerin sonlu boyutlu sistemler uzerinde yapıldığını, sonsuz boyutlu sistemlerde bazı kavramların farklılıklar gosterbildiğini belirtmek gerekir.



2. MARKOV VE MARKOV OLMAYAN SÜREÇLERDE İNDİRGENMİŞ DİNAMİK

Açık kuantum sistemlerin dinamiğinde Markov ve Markov olmayan süreçlerin tanımlanması ve temel özelliklerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu bölümde ilk olarak tezin devamına da temel oluşturan kuantum durumlar, gözlenebilirler ve gelişimler anlatılacaktır. Bölümün devamında ise OQS'lerde indirgenmiş dinamik tanıtılacak ve indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarif yapılarak, kuantum kanalların bölünebilmesi bağlamında Markov ve Markov olmayan süreçler tanımlanacak ve bu süreçlerde durumların ayırt edilebilirlik özellikleri incelenecektir. Ayırt edilebilirliği temel alan Markov olmama tanımlarının kuantum kanalların bölünebilme özelliğiyle karşılaştırması bölümün 2.3.3 kısmında yapılacaktır. Son başlıkta ise indirgenmiş dinamiğin master denklemlerle tasvirinde, master denklemlerin genel formuna ve hafızalı ve hafızasız süreçler için bu denklemlerin özelliklerine değinilecektir.

2.1 Kuantum Durumlar, Gözlenebilirler ve Gelişimler

Kuantum mekaniğinin Hilbert uzayı formalizminde her fiziksel sistemle ilişkili bir \mathcal{H} Hilbert uzayı vardır. Bu Hilbert uzayıyla ilişkili sistemin olası tüm saf ve saf olmayan durumları $S(\mathcal{H})$ ile gösterilen konveks bir küme oluşturur ve bu kümenin elemanları ilgili Hilbert uzayı üzerinde tanımlı yoğunluk işlemcisi denilen, genellikle ρ ve σ sembolleriyle gösterilen; pozitif ve birim izli işlemcilerdir. $S(\mathcal{H})$ kümesinin konveks olması, $p_i \geq 0$ ve $\sum_i p_i = 1$ durumunda, $\rho_i \in S(\mathcal{H})$ yoğunluk işlemcilerinin $\sum_i p_i \rho_i$ şeklindeki konveks karışımının da aynı kümede bir yoğunluk işlemcisi olduğunu söyler. $\rho \geq 0$ eşitsizliğiyle ifade edilen pozitiflik, işlemcinin her $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektöründe beklenen değerinin $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ olmasını, boylandırma da denilen birim izlilik ise $Tr \rho = 1$ koşulunu ifade eder. İlgili Hilbert uzayında boylandırılmış $|\psi\rangle$ vektörüyle temsil edilen ve $S(\mathcal{H})$ kümesinin ekstremum noktalarını (*extreme points*) oluşturan, başka durumların konveks karışımı olarak yazılamayan saf durumların yoğunluk işlemcileri ise, rankı bir olan³, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ çarpımıyla elde edilen ve $\rho^2 = \rho$ eşitliğinin sağlandığı izdüşüm (*projection*) işlemcileridir (Holevo 2012).

³ Görüntü kümesi bir boyutlu olan, bir boyutlu uzaya izdüşüren işlemciler.

Bir sistemle ilgili gözlenebilirler geleneksel olarak sistemle ilişkili Hilbert uzayında tanımlı Hermitsel işlemcilerle temsil edilirler. Sistemin bir gözlenebilir olan O işlemcisi, Hermitsel bir işlemci olmanın gereği olarak,

$$O = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\lambda_{\alpha}\rangle \langle \lambda_{\alpha}| = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} P_{\alpha} \quad (2.1)$$

şeklinde spektral ayrışımıyla yazılabilir. Burada λ_{α} özdeğerleri, $|\lambda_{\alpha}\rangle$ özvektörleri ve tamlık bağıntısı denilen $\sum_{\alpha} P_{\alpha} = \mathbb{1}$ eşitliğini sağlayan Hermitsel P_{α} işlemcileri ise $P_{\alpha} P_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} P_{\alpha}$ ifadesindeki diklik koşulunu da sağlayan gözlenebilirin öz izdüşüm işlemcileridir. P_{α} öz izdüşüm işlemcisinin rankı ise λ_{α} özdeğerinin dejenereliğini nicelendirir.

Sistem ρ durumundayken (2.1) denkleminde verilen O gözlenebilirinin beklenen değeri:

$$\langle O \rangle = Tr(\rho O) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Tr(\rho P_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} p_{\alpha} \quad (2.2)$$

olup, burada $p_{\alpha} = Tr(\rho P_{\alpha})$ pozitif sayıları $\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1$ koşulunu sağlayan, ölçümün sonucunun λ_{α} olma ihtimalini gösteren olasılıklardır. P_{α} izdüşüm işlemcilerinin dikliği ise ölçüm sonuçlarının tam olarak ayırt edilebilirliğini ifade eder.

Sonuçlarının ayırt edilebilmesiyle ilgilenmeyen genel bir ölçüm senaryosunda, ölçüm işlemcileri de denilen pozitif işlemcilerin bir koleksiyonu dikkate alınır. Bu koleksiyonun oluşturduğu $\{M_x; x \in \mathcal{X}\}$ kümesinin elemanları, gözlenebilirin ölçüm sonuçlarının etiketlendiği sonlu \mathcal{X} kümesindeki her x değeri için, $0 \leq M_x \leq \mathbb{1}$ koşulunu ve $\sum_x M_x = \mathbb{1}$ tamlık bağıntısını sağlayan, fakat dik olmaları gerekmeyen işlemcilerdir. Bu kümeye POVM (*positive operator valued measure*), bu kümenin elemanlarına da POVM elemanları denir. Ölçüm sonucunun x olma olasılığı ise (2.2) denklemine benzer olarak, $p_x = Tr(\rho M_x)$ eşitliğinden elde edilir. Sistemin gözlenebilirleriyle ilgili tüm bilgi olan ölçüm sonuçlarının olasılıkları, POVM elemanları aracılığıyla belirlendiği için, gözlenebilirler bir POVM tarafından temsil edilir. Bu kümeye bazı kaynaklarda birimin

ayrışımı (*resolution of identity*) ya da genelleştirilmiş gözlenebilir de denir. Ayrıca Hermitsel bir işlemcinin öz izdüşüm işlemcilerinde olduğu gibi, birbirine dik elemanların oluşturduğu POVM tarafından temsil edilen, sonuçların tam olarak ayırt edilebildiği gözlenebilire keskin (*sharp*) gözlenebilir denir (Holevo 2012).

Gözlenebilirler \mathcal{H} Hilbert uzayında tanımlı sınırlı işlemcilerin oluşturduğu $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ kümesinde yer alırlar. Bu küme sonlu boyutlarda aynı Hilbert uzayında tanımlı çizgisel işlemcilerin oluşturduğu $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kümesiyle çakışmaktadır. Hermitsel işlemcilerin gerçel uzayında konveks bir alt küme olan $S(\mathcal{H})$ durumlar kümesi de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kümesinde yer aldığından, durumlar ve gözlenebilirlerin her ikisini de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ya da $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ kümeleriyle göstermek mümkündür. Fakat durumlar ve gözlenebilirleri birbirinden ayırt etmek için $S(\mathcal{H})$ ve $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gösterimleri kullanılacaktır.

Yukarıda durumlar ve gözlenebilirlerle ilgili tek parçalı sistemler için ifade edilen bilgiler, çok parçalı (*multipartite*) bileşik sistemler için de tanımlanabilir. Hem sadelik hem de açık sistem dinamiğinde sistem ve çevresinin oluşturduğu bileşik sistemin iki parçalı olmasından dolayı, ifadeler iki parçalı (*bipartite*) bileşik sistemler için tanımlanacaktır. Gerektiğinde iki parçalı sistemler için verilecek bilgiler çok parçalı sistemlere de genişletilebilir.

Tezin gösterim tutarlılığı için bileşik sistem; Q ile gösterilen OQS ve E ile gösterilen sistemin çevresinin oluşturduğu iki parça olarak ele alınacaktır. Bu durumda bileşik sistemin Hilbert uzayı \mathcal{H}_{QE} , sırasıyla sistem ve çevresiyle ilişkilendirilmiş \mathcal{H}_Q ve \mathcal{H}_E Hilbert uzaylarının $\mathcal{H}_{QE} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_E$ tensör çarpımı olur. Sistemin durumu $\rho^{QE} \in S(\mathcal{H}_{QE})$ bileşik yoğunluk işlemcisiyle temsil edilirken, bileşik ölçüm işlemcileriye $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{QE}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_Q) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_E)$ kümesinde yer alırlar. Q ve E sistemlerindeki yerel M_x ve M_y ölçüm işlemcilerinin bileşik sistemdeki gösterimleri, \mathcal{X} ve \mathcal{Y} çıktıları kümesi ($x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$) olmak üzere, $M_x \otimes \mathbb{1}_E$ ve $\mathbb{1}_Q \otimes M_y$ işlemcileriyle temsil edilirken, bileşik ölçüm işlemcileriye $M_x \otimes M_y$ biçiminde yazılır. Farklı sistemlere ait yerel gözlenebilirlerin $[M_x \otimes \mathbb{1}_E, \mathbb{1}_Q \otimes M_y] = 0$ ifadesinde görüldüğü gibi her zaman sıra değişiyor olması, bileşik

sistemlerde alt sistemlerin gözlenebilirlerinin aynı anda ölçülebileceğini, bu ölçümlerler aracılığıyla tutarlı bileşik olasılıkların tanımlanabileceğini gösterir.

Sistem ρ^{QE} durumundayken alt sistemlere ait gözlenebilirlerin sırasıyla x ve y olma olasılıkları:

$$p_x = \text{Tr}(\rho^{QE} M_x \otimes \mathbb{1}_E) = \text{Tr}(\rho^Q M_x) \text{ ve } p_y = \text{Tr}(\rho^{QE} \mathbb{1}_Q \otimes M_y) = \text{Tr}(\rho^E M_y) \quad (2.3)$$

bağıntılarından hesaplanır. Burada alt sistemlerin durumlarını temsil eden $\rho^Q = \text{Tr}_E \rho^{QE}$ ve $\rho^E = \text{Tr}_Q \rho^{QE}$ işlemcileri sırasıyla E ve Q sistemleri üzerinden parçalı iz (*partial trace*) alınarak elde edilen indirgenmiş yoğunluk işlemcileridir. Gözlenebilirlerin beklenen değerleri ya da ölçüm sonuçlarının olasılıkları, indirgenmiş yoğunluk işlemcileri tarafında belirlendiğinden, bu işlemciler bileşik sistemlerde alt sistemlerin durumlarını temsil ederler.

Sistem üzerinde bileşik ölçüm yapılırsa; birinci sistemdeki ölçümün x , ikincisindeki ölçümün ise y olma bileşik olasılığı;

$$p_{xy} = \text{Tr}(\rho^{QE} M_x \otimes M_y) \quad (2.4)$$

olur. Bu bileşik olasılık, sistemin durumu $\rho^{QE} = \rho^Q \otimes \rho^E$ olduğunda, $p_{xy} = p_x p_y$ olacak şekilde, ölçüm sonuçları arasında hiçbir korelasyonun olmadığı, ayrık olasılıklar olarak yazılır. Genel durumda ise bileşik olasılığın marjinalerin çarpımından farklı olması ($p_{xy} \neq p_x p_y$), ölçüm sonuçlarının korelasyon içerdiği anlamına gelir, dolayısıyla da ρ^{QE} durumuna korelasyon içeren durum denir.

Bileşik sistemin yoğunluk işlemcisinin $\rho^{QE} = \rho^Q \otimes \rho^E$ şeklinde alt sistemlerin yoğunluk işlemcilerinin tensör çarpımı olarak yazılabildiği durumlar, sistemler arasında klasik veya kuantum mekaniksel hiçbir korelasyonun bulunmadığı çarpım durumları; çarpım durumlarının konveks karışımı olarak yazılabilen

$$\rho^{QE} = \sum_i p_i \rho_i^Q \otimes \rho_i^E \quad , \quad p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1 \quad (2.5)$$

biçimindeki durumlar ise, konveks bir küme oluşturan ayrılabilir (*separable states*) durumları göstermektedir. Ayrılabilir durumlardaki gibi alt sistemlerin çarpım durumlarının konveks karışımı olarak yazılamayan durumlara ise dolanık (*entanglement*) durumlar denir. Dolanık durumlarda alt sistemler arasında klasik karşılığı olmayan, tamamen kuantum mekaniğinden kaynaklı bir özellik olan, kuantum dolanıklık denilen korelasyonlar vardır. Kuantum dolanıklık başta kuantum bilişim kuramındaki öncü uygulamalar olan kuantum uzaktarım (*quantum teleportation*) ve kuantum yoğun kodlama (*quantum dense coding*) olmak üzere, kuantum özelliklerden yararlanmayı esas alan birçok uygulamada vazgeçilemez bir öz kaynaktır (Horodecki vd. 2009).

Kuantum durumların her türlü fiziksel dönüşümünü ve gelişimini tarif eden

$$\Lambda: S(\mathcal{H}_Q) \rightarrow S(\mathcal{H}_{Q'}) \quad (2.6)$$

şeklindeki Λ gönderimlerinin, bir kuantum durumu başka bir kuantum duruma dönüştürmesi gerekir. Kuantum mekaniğinin yapısı gereği çizgisel olan bu gönderimlerin, giriş ve çıkış birer kuantum durum olacağından, yoğunluk işlemcisi olma özelliklerini koruması gerekir. Bunun anlamı Λ gönderiminin pozitifliği ve izi korumasıdır. Her $A \geq 0$ işlemcisi için $\Lambda(A) \geq 0$ olması gönderimin pozitifliği korumasını, $Tr A = Tr \Lambda(A)$ eşitliği ise iz koruma özelliğini ifade eder. Pozitifliği koruyan Λ gönderimine pozitif gönderim denir ve $\Lambda \geq 0$ şeklinde gösterilir.

Kuantum sistemlerin gelişimini tarif etmek için gönderimlerin pozitifliği koruması yeterli olmayabilir. İlgilenilen sistem, dikkate alınmamış ya da kontrolümüzde olmayan başka bir sistemle korelasyon halinde olabilir. Diğer sistemin bireysel olarak herhangi bir dinamiği olmasa dahi, kuantum mekaniğinin bileşik sistem yapısına uyumluluk için, dinamik gönderimin $id_n \otimes \Lambda$ şeklinde tanımlanması, bileşik sistemin kuantum durumlarını da bileşik sistemde bir kuantum duruma dönüştürmesi gerekir. Burada id_n ,

n boyutlu yardımcı sistemin özdeşlik (*identity*) gönderimidir. Her boyutta yardımcı sistem için gönderimin bileşik sistem yapısıyla tutarlığı $id_n \otimes \Lambda$ gönderiminin de her n değeri için ($n = 1, 2, \dots$) pozitif ve iz koruyan olmasını gerektirir. İz koruma özelliği $id_n \otimes \Lambda$ şeklindeki her tensörel genişleme durumunda korunurken, pozitiflik özelliği korunmayabilir. Belirli n değeri için pozitiflik özelliğini koruyan gönderimlere n -pozitif, her tensörel genişleme durumunda pozitifliği koruyan gönderimlere ise CP gönderimler (*completely positive maps*) denir. d boyutlu bir sistem üzerine etkiyen Λ gönderiminin CP olması için gerek ve yeter koşul d -pozitif olmasıdır (Stinespring 1955).

Pozitif fakat CP olmayan gönderimler için bir bazda transpoz alma işlemi örnek gösterilebilir. Transpoz alma işlemi işlemcinin spektrumunu değiştirmeyeceği için, pozitif işlemcileri pozitif işlemcilere dönüştüren pozitif bir gönderimdir. Fakat ilgilenilen durumun başka bir sistemle dolanık olduğu bazı bileşik durumlarda $id_n \otimes \Lambda$ gönderiminin pozitif kalmadığı bilinmektedir (Nielsen ve Chuang 2010).

Λ pozitif gönderiminin her tensörel genişlemesinin, genişletilmiş uzaydaki $\rho^{RQ} = \sum_i p_i \rho_i^R \otimes \rho_i^Q$ ayrılabilir durumlar üzerindeki etkisinin pozitif kaldığı, $(id_n \otimes \Lambda)(\rho^{RQ}) = \sum_i p_i \rho_i^R \otimes \Lambda(\rho_i^Q)$ ifadesinden anlaşılmaktadır. Burada R , n boyutlu yardımcı sistemi, Q ise Λ gönderiminin etkilediği esas sistemi temsil etmektedir. Bu sonuç, tensörel genişleme durumunda gönderimlerin pozitifliğinin korunmamasının dolanık bileşik sistemlerde söz konusu olabileceğini göstermektedir.

Sonuç olarak kuantum sistemlerin gelişimini tarif eden gönderimlerin çizgisel, iz koruyan ve tamamen pozitif (CPTP) gönderimler olması gerekir. Bu özelliklere sahip gönderimlere kuantum kanal denilecektir. Kuantum kanallar $S(\mathcal{H})$ kümesinin konveks yapısını koruyan çizgisel gönderimler olduğundan; geometrik olarak durumlar kümesi üzerinde afin bir dönüşüm yaparlar (Holevo 2012).

Sistemlerin gelişimleri Λ gönderimi aracılığıyla kuantum durumlar üzerinden ifade edildiğinden, kuantum mekaniğinin Schrödinger resminde inceleme yapıldığı anlamına gelir. Durumların değişmediği, gelişimin gözlenebilirlerin değişimi aracılığıyla

anlatıldığı Heisenberg resminde ise, gelişimleri tarif eden gönderimlere dual kanal denir. Schrödinger resmindeki $\Lambda: S(\mathcal{H}_Q) \rightarrow S(\mathcal{H}_{Q'})$ kanalının Λ^* ile gösterilen dual kanalı:

$$\Lambda^*: \mathcal{B}(\mathcal{H}_{Q'}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_Q) \quad (2.7)$$

şeklinde, gözlenebilirler arasındaki dönüşümleri tarif eden, çizgisel ve CP gönderimlerdir.

Sistem ρ durumundayken O gözlenebilirinin beklenen değeri her hangi bir dönüşüm sürecinde hangi resimde inceleme yapıldığından bağımsız olduğundan, Schrödinger resmindeki Λ kanalıyla Heisenberg resmindeki Λ^* dual kanalı arasında

$$Tr[\Lambda(\rho)O] = Tr[\rho\Lambda^*(O)] \quad (2.8)$$

eşitliği her zaman yazılır. Bir kuantum kanalın dual kanalının da çizgisel ve CP olması gerekir. Λ kanalı

$$\Lambda(\mathbb{1}_Q) = \mathbb{1}_{Q'} \quad (2.9)$$

şeklinde birim işlemciyi koruyorsa, kanala bistokastik kanal adı verilir. Giriş ve çıkış sistemleri aynı olan bistokastik kanala da ünital kanal denir. OQS dinamiğinde özel durumlar dışında sistemin tipi değişmediği için, birim işlemciyi koruyan kanallar ünitaldir. Bir kuantum kanalın iz koruması için gerek ve yeter koşul dual kanalının ünital olmasıdır (Caruso vd. 2014).

2.2 Açık Kuantum Sistemler ve İndirgenmiş Dinamik

OQS kuramında çevresiyle etkileşmesine bağlı olarak sistemin zamanla gelişimi incelenir. Sistem ve çevresinin t_0 anındaki $\rho^{QE}(t_0)$ başlangıç durumunun sonraki bir t anındaki ($t \geq t_0$) çıkış $\sigma^{QE}(t)$ durumuna dönüşümü,

$$\begin{aligned}\sigma^{QE}(t) &= \mathcal{U}_{QE}(t, t_0)[\rho^{QE}(t_0)] = ad_{U_{QE}(t, t_0)}[\rho^{QE}(t_0)] \\ &= U_{QE}(t, t_0)\rho^{QE}(t_0)U_{QE}^\dagger(t, t_0)\end{aligned}\quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{U}(t, t_0)$ üniter kanalıyla tarif edilir. Denklemdeki U_{QE} bileşik üniter işlemciyi göstermekte olup, $U_{QE}U_{QE}^\dagger = \mathbb{1}_{QE} = U_{QE}^\dagger U_{QE}$ üniterlik koşulunu sağlamaktadır. Bu üniter gelişimi üreten bileşik sistemin Hamilton işlemcisi de

$$H = H_Q \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_Q \otimes H_E + H_I \quad (2.11)$$

yapısındadır. Burada H_Q ve H_E sırasıyla sistem ve çevrenin serbest Hamilton işlemcilerini, H_I ise etkileşme Hamilton işlemcisini göstermektedir. Bu Hamilton işlemcisinin ürettiği (2.10) eşitliğindeki üniter gelişim işlemci ise

$$U_{QE}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau\right) \quad (2.12)$$

biçiminde olup, ifadedeki \mathcal{T} zaman sıralama (*time ordering*) işlemcisidir. (2.12) denkleminde, $U_{QE}(t, t_0)$ üniter işlemcisi için yazılan

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_{QE}(t, t_0) = H U_{QE}(t, t_0) \quad (2.13)$$

şeklindeki Schrödinger denkleminde yararlanılarak ulaşılır. Hamilton işlemcisinin zamandan bağımsız olması durumunda (2.12) denkleminin basitçe

$$U_{QE}(t, t_0) = \exp \left[\frac{-i}{\hbar} (t - t_0) H \right] \quad (2.14)$$

olacağı da görülmektedir.

Üniter gelişen bileşik sistemin bir alt sistemi olan OQS'in gelişimine **indirgenmiş dinamik** (*reduced dynamics*) denir. OQS teorisinde temel amaç indirgenmiş dinamiğin anlaşılmasıdır. Sistemin herhangi bir t anındaki çıkış durumu

$$\sigma^Q(t) = \text{Tr}_E(U_{QE}(t, t_0)\rho^{QE}(t_0)U_{QE}^\dagger(t, t_0)) \quad (2.15)$$

bağıntısından elde edilir. Bu ifadedeki $U_{QE}(t, t_0)$ bileşik üniter işlemcisi, özel olarak $U_{QE}(t, t_0) = U_Q(t, t_0) \otimes U_E(t, t_0)$ biçiminde ayrılabilirse, OQS her başlangıç $\rho^{QE}(t_0)$ bileşik durumu için üniter olarak evrilir, yani alt sistemlerin her biri de bilişim anlamında birer kapalı sistemdir. Bu sonuç aşağıdaki önermede ifade edilmiştir.

Önerme 2.1: İki parçalı ρ^{QE} durumu $U_{QE} = U_Q \otimes U_E$ çarpım üniter işlemcisiyle gelişiyor olsun. Bu durumda alt sistemlerin her biri de üniter olarak gelişir.

İspat: ρ^{QE} iki parçalı durumu $\rho^{QE} = \sum_{ij} e_{ij} \otimes T_{ij}$ şeklinde blok formunda yazılabilir. Burada, $\{e_{ij}\}$ Q sistemine ait ortonormal bir matris bazı, T_{ij} ise E sisteminde bir işlemcidir. Bu yazımda alt sistemlerin indirgenmiş durumları

$$\rho^Q = \text{Tr}_E \rho^{QE} = \sum_{ij} e_{ij} \text{Tr}_E T_{ij}, \rho^E = \text{Tr}_Q \rho^{QE} = \sum_i T_{ii}$$

olarak elde edilir. ρ^{QE} sisteminin üniter gelişim sonrasındaki çıkış durumu olan σ^{QE} aşağıda verilmiştir.

$$\sigma^{QE} = (U_Q \otimes U_E) \rho^{QE} (U_Q^\dagger \otimes U_E^\dagger) = \sum_{ij} U_Q e_{ij} U_Q^\dagger \otimes U_E T_{ij} U_E^\dagger$$

Bileşik sistemin çıkış durumundan elde edilen σ^Q indirgenmiş durumunun

$$\sigma^Q = Tr_E \sigma^{QE} = \sum_{ij} U_Q e_{ij} U_Q^\dagger Tr_E(T_{ij}) = \sum_{ij} U_Q e_{ij} Tr_E(T_{ij}) U_Q^\dagger = U_Q \rho^Q U_Q^\dagger$$

ifadesinden üniter olarak dönüştüğü görülmektedir. ρ^E durumunun çıkış durumu da benzer işlemler yapılarak

$$\sigma^E = Tr_Q \sigma^{QE} = \sum_{ij} Tr_Q(U_Q e_{ij} U_Q^\dagger) U_E T_{ij} U_E^\dagger = \sum_i U_E T_{ii} U_E^\dagger = U_E \rho^E U_E^\dagger$$

olarak elde edilir. Bu sonuç ρ^E durumunun da üniter olarak geliştiğini göstermektedir. ■

Önermede ele alınan durum dışında alt sistemler genel olarak üniter olmayan bir gelişim gösterirler ve çevreleriyle bilişim alış verişi içinde olan bu sistemlere **açık kuantum sistemler** denir.

OQS'in dinamiği iki yolla anlatılabilir. Birincisinde sistemin giriş durumunu çıkış durumuna dönüştüren gönderimlerin incelemesi yapılır. Bu gönderimlere çoğunlukla dinamik gönderimler (*dynamical maps*) deniliyor olsa da bu çalışmada daha çok kuantum bilişim kuramında kullanılan bölüm 2.1'de tanıtilan kuantum kanal tabirinin kullanımı tercih edilmiştir. İkinci yol ise sistemin durumunun zamanla değişimini tarif eden, genel formu integro-diferansiyel denklem olan, bölüm 2.4'de tanıtılacak olan master denklemler aracılığıyla inceleme yapmaktır. Master denklemin

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \mathcal{L}_t[\rho(t)] \quad (2.16)$$

biçiminde bir diferansiyel denklemle tarif edilebildiği durumlarda, \mathcal{L}_t işlemcisine dinamiğin üretici denir.

Sistemin durumunun zamanla gelişimi için yapılan kuantum kanal ve master denklemlerinin incelemeleri; Heisenberg resminde dual kanallar ve gözlenebilirlerin zamanla değişimini anlatan dual master denklemler için de yapılabilir (Breuer ve Petruccione 2002). Bu çalışmada incelemeler Schrödinger resminde yapılacak, Heisenberg resmindeki incelemelere değinilmeyecektir.

Özel olarak kapalı bir sisteme ait olan $\rho^{QE}(t)$ durumunun zaman içerisindeki değişimini, saf durumlar için kapalı sistemlerin dinamiğini tarif eden Schrödinger denkleminin, tüm kapalı sistemler için, yoğunluk işlemcileri türünden yazılmış hali olan ve genellikle Liouville-von Neumann denklemi denilen

$$\frac{d}{dt}\rho^{QE}(t) = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho^{QE}(t)] \quad (2.17)$$

diferansiyel denklemiyle tarif edilir. Burada dinamiğin üreticisinin etkisinin $\mathcal{L}[\cdot] = \frac{-i}{\hbar}[H, \cdot]$ biçiminde toplam Hamilton işlemcisiyle sıra değişim biçiminde olacağı da açıkça görülmektedir. Üniter gelişmeyen açık kuantum sistemler için master denklemin ayrıntıları bölüm 2.4’de tartışılmıştır.

2.2.1 İndirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla betimlenmesi

Sistem ve çevresinin oluşturduğu ρ^{QE} başlangıç durumu zaman içerisinde üniter olarak gelişirken, OQS’in $\rho^Q = Tr_E \rho^{QE}$ durumunun gelişimini tarif eden gönderimlere indirgenmiş dinamik gönderimler (*reduced dynamical maps*) denir. İndirgenmiş dinamik gönderim Λ , sistemin dinamik sonrası çıkış durumu σ olmak üzere; çıkış durumunun, giriş durumuna ve bileşik üniter gelişime:

$$\sigma^Q(t) = \Lambda(t, t_0)[\rho^Q(t_0)] = Tr_E(U_{QE}(t, t_0)\rho^{QE}(t_0)U_{QE}^\dagger(t, t_0)) \quad (2.18)$$

ifadesiyle bağlı olduğu görülmektedir. Bölüm 2.1’de anlatıldığı gibi Λ gönderiminin bir kuantum kanal olması gerekir. (2.18) eşitliğinden Λ gönderiminin bileşik giriş durumuna

ve bileşik üniter gelişime bağılılığı görülmektedir. Önerme 2.1’de gösterildiği gibi bileşik üniter gelişim özel bir durum olan, $U_{QE} = U_Q \otimes U_E$ şeklinde ayrıştırılabiliyorsa, alt sistemlerin gelişimleri bileşik başlangıç durumundan bağımsız olarak, üniter kanallarla tarif edilebilir. Genel bir üniter gelişim durumunda indirgenmiş dinamik gönderiminin kuantum kanallarla tarif edilebilmesi $\rho^{QE}(t_0)$ başlangıç bileşik durumuna bağılıdır. Bu durumda şu soru önemli olmaktadır: Hangi başlangıç durumları indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarifine imkân sağlar?

Başlangıç durumu $\rho^{QE} = \rho^Q \otimes \rho^E$ olduğunda⁴ sistemler arasında hiçbir korelasyon bulunmadığı için, çevrenin durumu sistemin durumundan bağımsız olarak belirlenebilir. Belirlenen bu yoğunluk işlemcisinin spektral ayrışımı $\rho^E = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|$ şeklinde çevre sisteminden ortonormal bir $\{|e_j\rangle\}$ bazı seçilerek yazılabilir. Bu baz kullanılarak (2.18) denklemindeki çevre sistemi üzerinden parçalı iz alma işlemi yapılırsa:

$$\sigma^Q = \Lambda[\rho^Q] = \sum_{ij}^r K_{ij} \rho^Q K_{ij}^\dagger \quad (2.19)$$

denkleminde ulaşılr. Burada

$$K_{ij} = \sqrt{\lambda_j} \langle e_i | U_{QE} | e_j \rangle \quad (2.20)$$

işlemcilerine gürültü işlemcileri (*noise operators*) veya Kraus işlemcileri denir. Bu işlemciler, gönderimin iz koruma özelliğine eşdeğer olan $\sum_{ij} K_{ij}^\dagger K_{ij} = \mathbb{1}_Q$ koşulunu da sağlarlar. (2.19) denkleminde Λ gönderiminin Kraus temsili denir ve bu temsilin varlığı gönderimin tamamen pozitifliği için gerek ve yeter koşuldur (Kraus 1983). Ayrıca (2.19) denkleminde minimum Kraus işlemcisi adedini gösteren r sayısına gönderimin Kraus rankı denir ve bu sayının giriş sisteminin d boyutlu çıkış sistemini ise d' boyutlu olduğu bir gelişimde $r \leq dd'$ koşulunu sağladığı bilinmektedir (Kraus 1983). Terside bir kuantum kanal olan tek kanal türü Kraus rankı bir olan, yani tek Kraus işlemcisi olan

⁴ Sadelik için durumların zaman bağımlılıkları gösterilmemiştir.

üniter kanallar olduğu için, Kraus rankı kanalların terslenememe ‘miktarıyla’ ilişkili görülebilir.

(2.18) denkleminin çarpım başlangıç durumu için yazılmış

$$\sigma^Q = \Lambda[\rho^Q] = Tr_E(U_{QE}\rho^Q \otimes \rho^E U_{QE}^\dagger) \quad (2.21)$$

biçimine ise kuantum kanalın üniter temsili denir. Açık sistem dinamiğinde çevre; çoğu durumda kontrolümüzde olmayan, yapılandıramadığımız, sistemin dışında kalan her şey olabilir. Bu nedenle çarpım giriş durumlarında, çevrenin başlangıç durumu olan ρ^E , yardımcı bir sistemle saflaştırılarak (*purification*) elde edilen bu yeni saf $|\psi^{E'}\rangle$ durumu her zaman çevre olarak ele alınabilir (Bakınız Ek 3). Bu durumda (2.21) eşitliğindeki kanalın üniter temsili:

$$\sigma^Q = \Lambda[\rho^Q] = Tr_{E'}(U_{QE'}\rho^Q \otimes |\psi^{E'}\rangle\langle\psi^{E'}| U_{QE'}^\dagger) \quad (2.22)$$

şeklinde yazılır. (2.20) denklemindeki Kraus işlemcileri de

$$K_i = \langle e_i | U_{QE} | \psi^{E'} \rangle \quad (2.23)$$

biçiminde bir indisle gösterilir.

Kanalların üniter temsili tamamen pozitif gönderimlerin Stinespring temsiliyle de ilişkilendirilebilir. Stinespring temsilinde; her CP gönderimin Schrödinger resminde

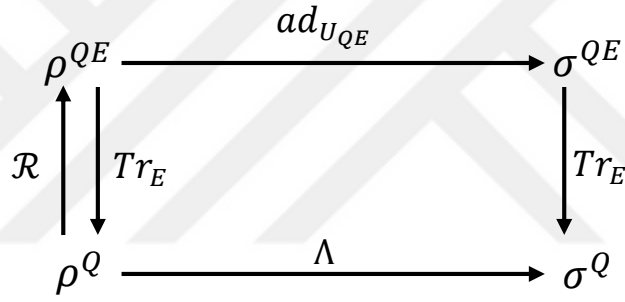
$$\Lambda[\rho^Q] = Tr_E(V\rho^Q V^\dagger) \quad (2.24)$$

biçiminde yazılabileceği bir $V: \mathcal{H}_Q \rightarrow \mathcal{H}_{Q'E}$ izometri işlemcisi ($V^\dagger V = \mathbb{1}_Q$) ve E yardımcı sistemi vardır (Stinespring 1955). Buradaki yardımcı sistemin gerçek çevre

olmasına gerek yoktur, fakat V izometri işlemcisi özel olarak $V = U_{QE}(\mathbb{1}_Q \otimes |\psi_{E'}\rangle)$ seçilirse, (2.24) eşitliğinden (2.22) denkleminde ulaşılabilir.

Sonuç olarak sistem ve çevresi başlangıçta çarpım durumundaysa, bu bileşik durumun her üniter gelişimi için indirgenmiş dinamik kuantum kanallarla betimlenebilir ve bu durumda kanallar sistemin başlangıç durumundan bağımsız olup sadece çevrenin durumuna ve bileşik üniter gelişime bağlıdır. Kanalların sistemin durumundan bağımsız olmasını vurgulamak için, çarpım başlangıç durumundan elde edilen gönderimlere evrensel dinamik gönderimler de denir (Rivas ve Huelga 2011).

OQS'lerin indirgenmiş dinamiği gönderimler açısından şekil 2.1'de gösterildiği gibi üç gönderimin bileşkesi olarak



Şekil 2.1 Açık kuantum sistemlerde gönderimler

$$\Lambda(\rho^Q) = (Tr_E \circ U_{QE} \circ \mathcal{R})(\rho^Q) \quad (2.25)$$

biçiminde yazılabilir. Bunlar etki sırasına göre: $\mathcal{R}: Q \rightarrow QE$ olarak tanımlanan ve sistemi, sistem-çevre bileşik durumunun içerisine yerleştiren/gömen gönderim (*assignment map / embedding map*), $U: QE \rightarrow QE$ şeklinde bileşik sistem üzerinde eşlenik bir üniter etki gösteren üniter kanal ve $Tr_E: QE \rightarrow Q$ biçiminde tanımlanan bileşik sistemden tekrar alt sistemlere ulaşmayı sağlayan parçalı iz gönderimidir. Eşlenik üniter etki Kraus rankı bir olan açıkça bir kuantum kanaldır. Parçalı iz gönderiminin de bir kuantum kanal olduğu çevreden seçilen $\{|e_i\rangle\}$ bazlarından yararlanılarak $K_i = \mathbb{1}_Q \otimes |e_i\rangle$ şeklinde oluşturulan Kraus işlemcileriyle

$$\text{Tr}_E(\rho^{QE}) = \sum_i (\mathbb{1}_Q \otimes \langle e_i |) \rho^{QE} (\mathbb{1}_Q \otimes | e_i \rangle) \quad (2.26)$$

ifadesinden görülebilir. $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}_{QE}$ eşitliği de parçalı iz alma gönderiminin iz koruma özelliğini göstermektedir. Son olarak eğer başlangıç bileşik durumu çarpım durumu ise $\mathcal{R}(\rho^Q) = \rho^Q \otimes \rho^E$ gönderiminin de çevrenin belirlenmiş durumunun $\rho^E = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|$ biçimindeki spektral ayrışımı kullanılarak bir kuantum kanal olduğu gösterilebilir. İz koruma özelliğine de sahip bu kanal için de Kraus işlemcileri $K_k = \sqrt{\lambda_k} \mathbb{1}_Q \otimes |e_k\rangle$ olur. Bu durumda indirgenmiş dinamiği tarif eden Λ gönderimi (2.25) bağıntısında görüldüğü gibi üç kuantum kanalın bileşkesiyle oluşturulduğundan açıkça bir kuantum kanaldır. Burada kritik olan sistem-çevre başlangıç durumunun çarpım durumu olmasıdır. Bu koşul \mathcal{R} gönderiminin de bir kuantum kanal olmasını garantilemiştir. Çarpım durumu dışında ne tür başlangıç durumlarında indirgenmiş dinamiğin her bileşik üniter gelişim için bir kuantum kanalla tarif edilebileceği beşinci bölümde tartışılacaktır.

2.3 Markov Olmayan Süreçlerin Tanımlanması

OQS'in dinamiğinin kuantum kanal denilen; çizgisel CPTP gönderimle tarif edilmesi gerektiği bir önceki kısımda açıklandı. Çevreleriyle etkileşmelerine bağlı olarak sistemlerin zamanla gelişimlerini tarif eden bu kanalların zaman bağımlılıkları vardır. Gösterim kolaylığı için $t_0 = 0$ kabul edilen başlangıç zamanı yazılmayarak, sistemin başlangıç anından sonraki bir t zamanına ($t \geq 0$) kadar olan gelişimi, pozitif bir parametre olarak zamana bağlı olan Λ_t kuantum kanalıyla gösterilir.⁵ Sistemin her türlü fiziksel gelişimini betimleyen

$$\Lambda_t: S(\mathcal{H}_Q) \rightarrow S(\mathcal{H}_Q) \quad (2.27)$$

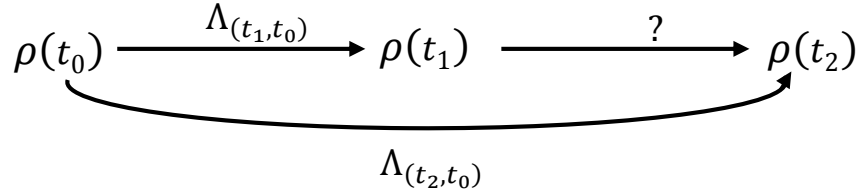
gönderiminin herhangi bir başlangıç durumu üzerindeki etkisi $\rho^Q(0) \mapsto \sigma^Q(t)$ şeklinde $\rho^Q(0)$ giriş durumunu sonraki $\sigma^Q(t)$ çıkış durumuna dönüştürmektir. Sistemlerin

⁵ Başlangıç durumunun indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarifine imkân sağladığı kabul edilmiştir. Ayrıca dinamik boyunca sistemin tipinin değişmediği varsayılmıştır.

zamanla gelişim göstermediği Λ_0 kanalı ise, $\Lambda_0 = id_Q$ özdeşlik kanalı olarak tanımlanır. Başlangıç anından t zamanına kadar olan sürece, önce başlangıçtan s zamanına sonrasında da s zamanından t zamanına gelişim olarak bakılabilir. Bu durumda dinamiği tarif eden kuantum kanal

$$\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s, \quad t \geq s \geq 0 \quad (2.28)$$

biçiminde Λ_s ve $V_{t,s}$ gönderimlerinin bileşkesi olarak yazılacaktır. Bu yazımda Λ_t ve Λ_s gönderimleri sistemin başlangıçtan t ve s zamanlarına kadar olan gelişimlerini anlatan birer kuantum kanaldır. Fakat ara aşamadaki gelişimi betimleyen $V_{t,s}$ gönderiminin her zaman bir kuantum kanal olduğunu söylemek mümkün değildir. $V_{t,s}$ gönderiminin var olup olmaması, varsa ne tür özelliklere sahip olduğu kuantum kanalların ya da gelişimlerin bölünebilirlik özelliklerini belirlemektedir. Kuantum kanalların bileşkelerinin de bir kuantum kanal olduğu açıktır. Bölünebilirlik tartışmasında verilen bir kuantum kanalın başka kuantum kanalların ya da gönderimlerin bileşkesi olarak yazılıp yazılamayacağı problemiyle ilgilenilir.



Şekil 2.2 Kuantum kanalların bölünmesi

2.3.1 Kuantum kanalların bölünebilirliği

İlk olarak (2.28) denklemindeki $V_{t,s}$ çizgisel gönderiminin varlığı sorgulanmalıdır. Λ_t kuantum kanalı her t değeri için terslenebiliyorsa ara süreçteki gönderim, $V_{t,s} = \Lambda_t \circ \Lambda_s^{-1}$ bağıntısıyla belirlenebilir. Λ_s çizgisel gönderiminin tersi de çizgisel ve tek olacağından, $V_{t,s}$ iki çizgisel gönderimin bileşkesi olan çizgisel bir gönderim olarak tek şekilde belirlenmiş olur. (2.28) denkleminde her $t \geq s \geq 0$ için $V_{t,s}$ çizgisel gönderimi varsa bu durumda Λ_t kanalına **çizgisel bölünebilir** kanal denir.

Yakın zamanda yapılan bir çalışmada (Chruściński vd. 2018) kanalların terslenme özelliğine başvurmadan, çizgisel bölünebilirlik için gerek ve yeter koşul ortaya konulmuştur. Buna göre $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ kuantum kanalının her $t > s$ değerinde çizgisel bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul:

$$\ker(\Lambda_t) \supseteq \ker(\Lambda_s) \quad (2.29)$$

olmasıdır. Burada $\ker(X)$, X gönderiminin çekirdeğini (*kernel*) göstermektedir⁶.

(2.28) eşitliğindeki $V_{t,s}$ gönderiminin çizgisel olmasının yanı sıra pozitiflik özelliği de varsa Λ_t kuantum kanalına **pozitif bölünebilir** kanal, tamamen pozitiflik özelliği varsa da **CP bölünebilir** kanal denir.

Λ_t kuantum kanalı iz koruma özelliğine sahip olduğu için, $V_{t,s}$ gönderimi de Λ_s kanalının görüntü kümesi üzerinde iz koruma özelliğine sahiptir. $V_{t,s}$ gönderimi tüm durumlar kümesi üzerinde de iz koruma özelliğine sahipse, gönderime iz koruyan gönderim denir.

(2.28) denklemindeki $V_{t,s}$ gönderiminin kuantum kanal (çizgisel, CPTP) olması durumunda Λ_t kuantum kanalına **bölünebilir kuantum kanal** veya kısaca **bölünebilir kanal** denir.

Tanım 2.1 (Markov süreci): Başlangıç anından t zamanına kadar olan gelişimi Λ_t kuantum kanalıyla tarif edilen bir sistemin her $t \geq s \geq 0$ zaman aralığındaki gelişimi de bir kuantum kanalla tarif edilebiliyorsa, bu gelişime kuantum Markov süreci (*quantum Markovian process*) denir.

Tanımdan Markov süreçlerdeki kuantum kanalların bölünebilir olması gerektiği açıkça anlaşılmaktadır. Herhangi bir zaman aralığındaki gelişimi kuantum kanalla betimlenemeyen süreçlere de **Markov olmayan süreçler** denilecektir. Markov

⁶ Bir işlemcinin çekirdeği: işlemcinin sıfır özdeğerli öz vektörlerinin gerdiği vektör uzayıdır.

süreçlerin kuantum kanalların bölünebilirliğine dayalı yukarıdaki tanımının, klasik stokastik süreçlerde tanımlanan klasik Markov süreç tanımıyla benzerliği de vurgulanmalıdır (Ek 1).

Kuantum Markov ve Markov olmama özelliğini tanımlamada ikinci yaklaşım, gelişimleri durumların ayırt edilebilirliği (*distinguishability*) üzerinden sınıflandırmaktır. Sistemle çevre arasında bilişim alış verişini esas alan, bilişim teorisi açısından anlamının daha açık olduğu savunulan bu yaklaşımla ilgili bilgiler sıradaki 2.3.2 alt bölümünde verilecektir. Bu kısma geçmeden önce, bu çalışmada Markov ve Markov olmayan süreçler için yukarıda verilen bölünebilirlik temelli tanımın benimseneceğini hatırlatmakta yarar vardır.

2.3.2 Markov ve Markov olmayan süreçlerde ayırt edilebilirlik

Durumların ayırt edilebilirliğini karakterize etmede iz norm (*trace norm*) ve bu normdan elde edilen iz uzaklığı (*trace distance*) önemli matematiksel araçlardır. Bu nedenle bu norm ve uzaklık fonksiyonunun ayırt edilebilirlik kapsamında gerekli olan bazı özelliklerine değinilecektir.

İz sınıfından (*trace-class*)⁷ işlemciler üzerinde

$$\|A\|_p \equiv (Tr|A|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (2.30)$$

olarak tanımlanan, Schatten p-norm denilen, bir norm ailesi vardır. Burada $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$ ifadesi A işlemcisinin modülünü tanımlamaktadır. p sayısının bazı değerlerinde buradaki norma özel isimler verilmektedir. $p = 2$ durumunda Frobenius ya da Hilbert-Schmidt norm ve $p = 1$ değerindeyken de iz norm denilir. İşlemcilerin modüllerinin izi alınarak,

⁷ İz sınıfından işlemcilerin izleri sonlu değerler alır.

$$\|A\|_1 \equiv \text{Tr}|A| \quad (2.31)$$

bağıntısıyla tanımlanan iz norm aracılığıyla, iz sınıfından A ve B işlemcileri için

$$d_1(A, B) \equiv \frac{1}{2} \|A - B\|_1 \quad (2.32)$$

şeklinde bir uzaklık fonksiyonu da tanımlanır. Bu fonksiyona iz uzaklığı denir. (2.31) denkleminde iz normun işlemcinin tekil değerlerinin (*singular values*) toplamına eşit olduğunu da göstermek mümkündür (Bhatia 1997). U ve V izometri işlemcileri olmak üzere A işlemcisiyle UAV işlemcilerinin tekil değerleri aynı olacağından iz norm $\|A\|_1 = \|UAV\|_1$ şeklinde izometri değişmezliğine sahiptir. Ayrıca yine (2.31) tanımından Hermitsel işlemciler için iz normun, a_i özdeğerlerinin katlılıkları hesaba katılarak yapılan $\sum_i |a_i|$ şeklindeki mutlak değerlerinin toplamı olacağı da görülmektedir.

\mathcal{H} Hilbert uzayı üzerinde tanımlı kuantum durumların oluşturduğu $S(\mathcal{H})$ kümesi de iz sınıfından işlemcilerden meydana geldiği için, durumlar arası uzaklık belirlemede iz uzaklığı kullanılabilir. Aynı Hilbert uzayı üzerinde tanımlı ρ_1 ve ρ_2 kuantum durumları arasındaki iz uzaklığı,

$$0 \leq d_1(\rho_1, \rho_2) \leq 1 \quad (2.33)$$

eşitsizliğiyle verilen aralıkta olup; bu eşitsizliğin alt sınırının eşitlik durumu için gerek ve yeter koşul $\rho_1 = \rho_2$ olması, üst sınırının eşitliği için ise yine gerek ve yeter koşul ρ_1 ve ρ_2 işlemcilerinin dik olmasıdır (Wilde 2017). Burada dik olmakla kastedilen; işlemcilerin desteği (*support*) denilen sıfırdan farklı özvektörlerinin gerdiği alt uzayların dik olmasıdır.

Gönderimler için de operatör norm denilen bir norm ailesi tanımlanabilir. Bu nom için ise,

$$\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_Q) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{Q'}) \quad (2.34)$$

gönderiminin $\|\Lambda\|_{p-p}$ şeklinde gösterilen operatör normu

$$\|\Lambda\|_{p-p} \equiv \sup_{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_Q)} \frac{\|\Lambda(A)\|_p}{\|A\|_p} \quad (2.35)$$

denkleminle tanımlanır. Burada $\|A\|_p$ ve $\|\Lambda(A)\|_p$ giriş ve çıkış sistemlerindeki Schatten p -normlardır. Operatör norm

$$\|\Lambda\|_{p-p} \leq 1 \quad (2.36)$$

özelliğine sahipse, gönderimin p normu büzme (*contractive*) özelliği var denir. Λ çizgisel, iz koruyan ve pozitif bir gönderimse, operatör normun

$$\|\Lambda\|_{p-p} \leq d^{1-\frac{1}{p}} \quad (2.37)$$

ifadesiyle üstten sınırlı olduğu gösterilmiştir (Perez-Garcia vd. 2006). Burada d giriş sisteminin boyutunu göstermektedir. (2.37) denkleminde $p = 1$ seçilirse pozitif ve iz koruyan gönderimlerin iz normu büzme özelliği olduğu anlaşılmaktadır. Ayırt edilebilirlik açısından önemli olan bu özellik, (2.37) denkleminde başvurmadan aşağıdaki teoremle açıkça gösterilmiştir.

Teorem 2.1 (Kossakowski 1972, Ruskai 1994) Λ iz koruyan ve çizgisel bir gönderim olsun. Λ gönderiminin pozitif bir gönderim olması için gerek ve yeter koşul her Hermitsel A işlemcisi için

$$\|\Lambda(A)\|_1 \leq \|A\|_1 \quad (2.38)$$

olmasıdır.

İspat: İlk olarak Λ gönderiminin pozitifliği kabul edildiğinde (2.37) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilecektir. A Hermitsel bir işlemci olduğundan $A = \sum_i a_i P_i$ biçiminde spektral ayrışımına sahiptir. Burada a_i sayıları gerçel özdeğerleri, P_i ise bu özdeğerlere karşılık gelen öz izdüşüm işlemcilerini göstermektedir. Her Hermitsel işlemci pozitif ve negatif özdeğerlerinin belirlediği $A^+ = \sum_{i, a_i \geq 0} a_i P_i^+$ ve $A^- = \sum_{i, a_i < 0} (-a_i) P_i^-$ olarak tanımlanan iki pozitif işlemcinin farkı olarak $A = A^+ - A^-$ şeklinde yazılabilir. Jordan ayrışımı denilen bu yazımda, A^+ ve A^- pozitif işlemcileri, Hermitsel işlemcilerin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz projeksiyonlarının dik desteklere sahip olmasından dolayı birbirlerine diktir. Bu durumda

$$\|\Lambda(A)\|_1 = \|\Lambda(A^+) - \Lambda(A^-)\|_1 \leq \|\Lambda(A^+)\|_1 + \|\Lambda(A^-)\|_1 = \|A^+\|_1 + \|A^-\|_1 = \|A\|_1$$

ifadesine ulaşılabilir. Birinci eşitlik Λ gönderiminin çizgiselliğinin, ilk eşitsizlik ise norm olmanın sonucudur. İkinci eşitlik ise iz koruma ve izi iz normuna eşit olan Hermitsel işlemcilerin sadece pozitif işlemciler olmasından kaynaklanmaktadır. Son eşitlik ise A^+ ve A^- işlemcilerinin dikliğinin sonucudur.

Tersine Λ iz koruyan, çizgisel gönderimi (2.38) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda her $A \geq 0$ pozitif işlemcisi için

$$\|A\|_1 = \text{Tr}A = \text{Tr}\Lambda(A) \leq \|\Lambda(A)\|_1 \leq \|A\|_1$$

ifadesinden $\text{Tr}\Lambda(A) = \|\Lambda(A)\|_1$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuçta $\Lambda(A)$ işlemcisinin de pozitif olduğunu söyler. Her $A \geq 0$ işlemcisi için $\Lambda(A) \geq 0$ olduğundan Λ pozitif bir gönderimdir. ■

Λ pozitif gönderimlerinin iz normu büzme özelliği, iz uzaklığının

$$d_1[\Lambda(\rho_1), \Lambda(\rho_2)] \leq d_1(\rho_1, \rho_2) \quad (2.39)$$

biçiminde monoton olarak azalacağını göstermektedir. Sonuç olarak iz norm ve iz uzaklığı pozitif gönderimler altında monoton olarak azalmaktadır.

2.3.3 Hipotez testi ve ayırt edilebilirlik

Yukarıdaki teoremin ayırt edilebilirlikle ilişkisini görebilmek için hipotez testinden faydalanılacaktır. Buna göre p_1 ve p_2 olasılıklarıyla bir sistemle ilgili ρ_1 ve ρ_2 durumları verilmiş olsun. Tek bir POVM kullanılarak yapılan ölçümler aracılığıyla, durumların ayırt edilmesine hipotez testi denir. Bu testte POVM elemanlarının oluşturduğu $\{M_x\}$ kümesindeki tüm olası sonuçları etiketleyen $x \in \mathcal{X}$ kümesi, $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}$ olacak şekilde birbirinin tümleyeni olan \mathcal{X}_1 ve \mathcal{X}_2 kümelerine ayrılır. Ölçüm sonuçları \mathcal{X}_1 kümesindeyse sistemin durumu ρ_1 , \mathcal{X}_2 kümesindeyse ρ_2 olacağı hipotezi oluşturulur. En uygun ölçümün yapılması durumunda bu hipotezin doğru olma olasılığı nedir?

Ölçüm sonuçlarının \mathcal{X}_1 ya da \mathcal{X}_2 kümesinde olmasına bağlı olarak $\{M_1, M_2\}$ elemanlarıyla iki elemanlı yeni bir POVM düşünülebilir. Bu durumda ortalama doğru tahmin olasılığı

$$\begin{aligned} p &= p_1 \text{Tr}(\rho_1 M_1) + p_2 \text{Tr}(\rho_2 M_2) \\ &= p_1 \text{Tr}(\rho_1 M_1) + p_2 \text{Tr}(\rho_2 (\mathbb{I} - M_1)) \\ &= p_2 + \text{Tr} \Delta M_1 \end{aligned}$$

olur. Burada durumların ayırt edilebilmesinde sıkça kullanılan

$$\Delta = p_1 \rho_1 - p_2 \rho_2 \tag{2.40}$$

Hermitsel işlemcisine Helstrom matrisi denir (Helstrom 1976). En uygun ölçümün seçilmesi durumunda durumları doğru ayırt etme olasılığı

$$p = p_2 + \max_{0 \leq M_1 \leq \mathbb{I}} \text{Tr} \Delta M_1 \tag{2.41}$$

eşitliğiyle belirlenir. Helstrom matrisinin Hermitsel olmasından ve $\Delta = \Delta^+ - \Delta^-$ şeklindeki Jordan ayrışımından da faydalanarak

$$Tr\Delta M_1 = Tr\Delta^+ M_1 - Tr\Delta^- M_1 \leq Tr\Delta^+ M_1 \leq Tr\Delta^+$$

ifadesi elde edilir. İfadedeki ilk eşitsizlikte pozitif işlemcilerin çarpımının izinin her zaman pozitif olması, ikinci eşitsizlikte ise $M_1 + M_2 = \mathbb{1}$ şeklindeki tamlık bağıntısından yararlanılmıştır. Bu durumda (2.41) bağıntısı $p = p_2 + Tr\Delta^+$ olup, Jordan ayrışımındaki Δ^+ ve Δ^- pozitif işlemcilerin dikliğinin sonucu olarak

$$\|\Delta\|_1 = \|\Delta^+\|_1 + \|\Delta^-\|_1 = Tr\Delta^+ + Tr\Delta^-$$

$$Tr\Delta = Tr\Delta^+ - Tr\Delta^- = 2p_1 - 1$$

eşitlikleri de yazılabilir. Bu eşitliklerden elde edilen

$$Tr\Delta^+ = \frac{1}{2}(\|\Delta\|_1 + 2p_1 - 1)$$

sonucu (2.41) bağıntısında kullanılırsa, durumları ortalama doğru ayırt etme olasılığı için

$$p = \frac{1}{2}(1 + \|\Delta\|_1) \tag{2.42}$$

denklemini elde edilir (Fuchs ve van de Graaf 1999, Breuer vd. 2009, Chruściński vd. 2011). Teorem 2.1 gereği (2.41) denklemindeki $\|\Delta\|_1$ Helstrom matrisinin iz normu pozitif gönderimler altında artmaz, monoton olarak azalır. Bunun anlamı, pozitif gönderimler altında ayırt edilebilirliğin sürekli azalacak olmasıdır.

ρ_1 ve ρ_2 durumlarıyla ilgili hiçbir ön bilgi verilmediğinde $p_1 = p_2 = 1/2$ olup, izsiz hale gelen $\Delta = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$ Helstrom matrisinin iz normu

$$\|\Delta\|_1 = d_1(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} \|\rho_1 - \rho_2\|_1 \quad (2.43)$$

olur ve durumlar arasındaki iz uzaklığını gösterir. Bu uzaklığın en büyük değerini aldığı ρ_1 ve ρ_2 'nin dik desteklere sahip olduğu durumda, durumlar birbirlerinden tam olarak ayırt edilebilir. İz uzaklığının sıfır olduğu, durumların aynı olması halinde ise durumların ayırt edilmesi mümkün olmamaktadır.

OQS dinamiği açısından da iz normun monoton olarak azalması önemli bir sonuç olup; pozitif bölünebilir süreçlerde durumların ayırt edilebilirliğinin artmayıp sürekli azalacağını ifade eder. Bazı araştırmacılar ayırt edilebilirliğin azalmasını, fiziksel anlamının daha açık olmasını da vurgulayarak, sürecin Markov olmasının tanımı olarak benimserler (Breuer 2009). Bunun için ilk olarak aşağıda sistemle çevre arasında bilişim akışını tarif eden bir nicelik tanımlanacaktır.

Tanım 2.2 Λ_t ($t \geq 0$) OQS'in zamanla gelişimini tarif eden gönderim ve ρ_1 ve ρ_2 OQS'in iki kuantum durumu olsun. Sistemle çevresi arasındaki bilişim akışı

$$\eta(\rho_1, \rho_2; t) \equiv \frac{d}{dt} \|\Lambda_t(\rho_1 - \rho_2)\|_1 \quad (2.44)$$

denklemleriyle nicelendirilir.

Bu niceliğin negatif olması, sistemden çevreye sürekli bir bilişim akışı olduğunu gösterirken; pozitif olması ise çevreden sisteme ters bilişim akışı olması anlamına gelir. Ayırt edilebilirliği temel alanlar için $\eta(\rho_1, \rho_2; t) \leq 0$ olan süreçler Markov süreçler, $\eta(\rho_1, \rho_2; t) > 0$ olan süreçler ise Markov olmayan süreçlerdir (Breuer vd. 2009). Buna göre Markov süreçlerde durumların ayırt edilebilirliği, bilişimin çevreye akışından dolayı sürekli azalır. Bu azalmada çevrenin, sistemlerle etkileşmeye bağlı olarak elde ettiği bilişimi koruyamamasından dolayı 'hafızasız' olduğu, gelişim sürecinde çevrenin durumları arasındaki korelasyon zamanlarının, sistemlerin sönüm sürelerinden çok kısa olmasına bağlı olarak, sisteme ait bilişimin çevreden çok kısa sürede silindiği söylenir.

Markov olmayan süreçlerde ise çevreye giden bilişim, süreç içerisinde çevreden sisteme geri akarak durumların ayırt edilebilirliklerinde artışlara sebep olur. Sistemle ilgili bilişimi koruyabilmiş olmasından dolayı, Markov olmayan süreçlere hafızalı süreçler, bu süreçlerdeki çevreye ‘hafızalı’ çevre, ayırt edilebilirliğin artmış olmasına da hafıza etkisi (*memory effect*) denir. Sistemle etkileşmenin çevrenin durumları üzerinde meydana getirdiği değişimin süresini nicelendiren çevrenin korelasyon zamanı da, hafızalı süreçler için sistemin durulma zamanıyla karşılaştırılabilir miktarlarda olup, etkileşmenin çevredeki etkisi Markov süreçlerde olduğu gibi kısa sürede silinmez.

Durumların ayırt edilebilirliğinin azalmasını esas alan Markov süreç tanımında gönderimlerin pozitifliğinin yeterli olması, CP’liğin gerekli olmaması önemli bir problemdir. Bileşik sistemlerde kuantum korelasyonların olması durumunda, gönderimlerin CP’liğinin gerekliliği dikkate alınarak, ayırt edilebilirlik temelli Markov süreç tanımı değil, kuantum kanalların bölünebilmesi üzerinden yapılan tanım benimsenmiştir.

2.3.4 Bölünebilirlik ve ayırt edilebilirlik tanımlarının karşılaştırılması

Ayırt edilebilirliğin azalması için süreçlerin pozitif bölünebilir olması yeterliyken, bölünebilirlik için dinamiğin her aşamasının bir kuantum kanalla tarif edilebiliyor olması gerekmektedir. Bu nedenle her bölünebilir süreçte ayırt edilebilirlik azalırken, tersi doğru değildir. Ayırt edilebilirliğin azalması sürecin bölünebilir kanallarla tasvir edilmesini gerektirmez.

Ayırt edilebilirliğin azaldığı gönderimler kümesi (pozitif bölünebilir kanallar), bölünebilir kanallar kümesini (CP bölünebilir kanallar) içeren daha büyük bir küme olup, bu iki kümenin eşit olduğu süreçleri tespit edebilmek için, ayırt edilebilirliğin azaldığı süreçlerdeki gönderimlerin CP bölünebilir özelliğiyle kısıtlandığı alt kümesinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu kısıtlanmış kümedeki gönderimler için ayırt edilebilirlikle bölünebilirlik eşdeğer hale gelmiş olacaktır.

OQS'in zamanla gelişimini betimleyen Λ_t kuantum kanalı her $t \geq 0$ zamanı için terslenebiliyorsa, kanalın $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ ($t \geq s \geq 0$) şeklindeki yazımında $V_{t,s}$ çizgisel gönderiminin varlığının garantilenmiş olduğu 2.3.1 bölümünde açıklandı. Teorem 2.1 gereği terslenebilir gönderimlerin \mathcal{H} Hilbert uzayı üzerinde tanımlı Hermitsel A işlemcisi üzerine etkisi için, iz normun zamanla değişiminin

$$\frac{d}{dt} \|\Lambda_t(A)\|_1 \leq 0 \quad (2.45)$$

olması, Λ_t gönderiminin her t değerinde pozitif olması için gerek ve yeter koşuldur. $\dim(\mathcal{H}) = n$ için Λ_t pozitif gönderiminin CP olması ise $id_n \otimes \Lambda_t$ gönderiminin de pozitif olmasını gerektirir. Bu durumda iz normun zamanla değişiminin $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ üzerinde tanımlı her Hermitsel A^* işlemcisi için,

$$\frac{d}{dt} \|(id_n \otimes \Lambda_t)(A^*)\|_1 \leq 0 \quad (2.46)$$

olması Λ_t gönderiminin CP olmasını gösterir.

Her Hermitsel işlemci boylandırıcı bir sabitle çarpılarak ayırt edilebilirlik için gerekli olan Helstrom matrisi biçiminde görülebilir. Hermitsel A işlemcisi pozitif A^+ ve A^- işlemcilerinin farkı olarak $A = A^+ - A^-$ şeklinde Jordan ayrışımına sahiptir. Bu işlemci $\|A^+\|_1 + \|A^-\|_1$ pozitif sayısına bölünerek;

$$p_1 = \|A^+\|_1 / (\|A^+\|_1 + \|A^-\|_1), \quad p_2 = \|A^-\|_1 / (\|A^+\|_1 + \|A^-\|_1)$$

ve $\rho_1 = A^+ / \|A^+\|_1$, $\rho_2 = A^- / \|A^-\|_1$ olduğu, $\Delta = p_1 \rho_1 - p_2 \rho_2$ şeklinde bir Helstrom matrisi formuna getirilebilir. Helstrom matrisinin iz normunun monoton olarak azalmasının, ayırt edilebilirlik ve sistemden çevreye bilişim akışıyla olan ilişkisi dikkate alındığında: (2.44) eşitliğindeki sistemden çevreye bilişim akışı ya da ayırt edilebilirliğin zamanla azalması Λ_t terslenebilir kuantum kanalının bölünebilir olmasıyla eşdeğerdir.

Her Hermitsel işlemci bir Helstrom matrisi olarak değerlendirilebilir fakat $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ ($t \geq s \geq 0$) şeklinde ayrıştırılmış bir kuantum kanalı için, ρ_1 ve ρ_2 durumlarıyla oluşturulan Helstrom matrisinin ($\Delta = p_1\rho_1 - p_2\rho_2$) Λ_s kanalının görüntü kümesi içerisinde yer alması gerekir. Bu gereksinim dikkate alındığında (2.46) ifadesinin biraz daha kısıtlanması gerektiği anlaşılmıştır. Genel bir Helstrom matrisinin yerine eş olası durumların oluşturduğu $\Delta = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$ Helstrom matrisi, özdeşlik kanalının etki ettiği yardımcı sistemin de boyutunun artırılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu durumda n boyutlu bir sistem üzerine etkiyen terslenebilir Λ_t kuantum kanalının bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{d}{dt} \|(id_{n+1} \otimes \Lambda_t)(\rho_1 - \rho_2)\|_1 \leq 0 \quad (2.47)$$

olmasıdır (Bylicka vd. 2017).

Kanalların terslenme özelliği olmadığı durumlarda $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ ($t \geq s \geq 0$) ayrışımında $V_{t,s}$ çizgisel gönderiminin varlığı garanti edilemediği için Teorem 2.1 kapsamında bir değerlendirme yapmak mümkün olmamaktadır. (2.45) eşitsizliğinin sağlanabildiği fakat $V_{t,s}$ çizgisel gönderiminin olmadığı durumlar olabilir. Bu durumlar için (2.29) bağıntısıyla verilen $\ker(\Lambda_t) \supseteq \ker(\Lambda_s)$ şeklinde olan, gönderimlerin çekirdekleri arasındaki içerme bağıntısının varlığı, Λ_t kuantum kanalının çizgisel bölünebilirliği için gerek ve yeter koşuldur. Terslenebilir kuantum kanallar durumunda da $\ker(\Lambda_t) = \ker(\Lambda_s) = 0$ olacağından, tüm süreç boyunca kanalların çekirdeğinin sıfır olduğu ve (2.29) bağıntısındaki eşitlik durumunun sağlandığı görülür. Ayrıca (2.45) eşitsizliğinin varlığı, kanalın çizgisel bölünebilirliği için yeter koşul da ortaya koymaktadır.

Kanalların terslenip terslenmemesiyle ilgilenmeden, bilişim akışını verilen bir topluluktaki durumların ayırt edilebilirliğini nicelendiren tahmin olasılığı (*guessing probability*)'nin zamanla değişimi aracılığıyla da incelemek mümkündür. Bu durumda da, yine ilgilenilen sistemle aynı boyutta bir yardımcı sistem düşünülür. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ Hilbert

uzayı üzerinde tanımlanmış ρ^i durumlarının p_i önsel olasılıklarıyla oluşturulan, $\{p_i; \rho^i\}$ şeklinde sonlu bir topluluğu dikkate alınır. Buna göre kuantum kanalın bölünebilir bir kanal olması için gerek ve yeter koşul, herhangi bir topluluk için tahmin olasılığının azalmasıdır (Buscemi ve Datta 2016).

Terslenme problemine ihtiyaç duymadan ifade edilen tahmin olasılığıyla ilgili koşul, genel durumda bölünebilirlikle bilişim akışı arasındaki ilişkiyi kuruyor gözükse de; seçilecek topluluğun nasıl oluşturulacağına belirsiz olması, bu koşulun pratikte uygulanabilirliğini oldukça güç hale getirmektedir.

2.4 İndirgenmiş Dinamiğin Master Denklemlerle Tarifi

OQS dinamiğinde Markov ve Markov olmayan süreçlerin belirlenmesi için, giriş durumlarını çıkış durumlarına dönüştüren gönderimlerin incelenmesiyle eşdeğer bir yöntem de, indirgenmiş durumların zamanla değişimlerinin incelendiği master denklem denilen denklemlerin özelliklerinin belirlenmesidir. Bu kapsamda master denklemlerin genel formları tanıtılacak, Markov ve Markov olmayan süreçlerde denklemlerin temel özellikleri belirlenecek ve varsa standart formları gösterilecektir. Genel formun elde edilmesinde izdüşüm işlemci tekniklerine ve denklemin üreticinin dinamiği belirleyen bileşik Hamilton işlemcisinden elde edildiği mikroskobik üretim aşamalarına değinilecektir. Mikroskopik üretim sürecinde, etkileşmeye bağlı olarak kullanılan yöntemlerin ve yaklaşıklıkların ayrıntılarına girilmeden sonuçları tartışılacaktır.

Master denklem incelemelerinde, denklemin tarif ettiği indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitifliğinin sağlanmış olması ilk dikkat edilecek husustur. Hamilton işlemcisinden çoğunlukla pertürbasyon yöntemleri kullanılarak, etkileşmeye bağlı olarak yapılan fiziksel varsayımlar altında, indirgenmiş dinamiği tasvir eden bir denklem elde edilebilir. Fakat bu denklemin açık sistemin dinamiğini betimleyen denklem olabilmesi için ilk kontrol edilmesi gereken, indirgenmiş dinamik gönderimlerin kuantum kanal özelliklerine sahip olup olmadığıdır. Sistemle çevresi arasındaki etkileşmenin zayıf kabul edildiği Markov süreçlerde indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla betimlenebildiği master denklemin elde edilme yöntemleri nispeten iyi bilinmektedir (Born-Markov

yaklaşıklığı, seküler yaklaşıklık). Zayıf bağlaşım varsayımının yapılamadığı Markov olmayan süreçlerde ise, indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitif kaldığı master denklemlerin elde edilmesi aktif olarak çalışılan, fakat henüz genel sonuçların elde edilemediği bir alandır.

2.4.1 Master denklemin genel formu

Master denklemlerin genel formu elde edilirken izdüşüm işlemci yöntemleri (*projection operator techniques*) yaygın olarak kullanılır. Bu yöntemde ρ^{QE} bileşik durumundan çevrenin serbestlik dereceleri üzerinden parçalı iz alınarak elde edilen ρ^Q indirgenmiş durumu elde etme işlemi, $S(\mathcal{H}_{QE})$ bileşik durumlar kümesi üzerinde tanımlanan, \mathcal{P} izdüşüm işlemcisi ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$) aracılığıyla dikkate alınır. Bu izdüşüm işlemcisinin etkisi basitçe $\mathcal{P}(\rho^{QE}) = (\text{Tr}_E \rho^{QE}) \otimes \omega^E$ şeklinde, açık kuantum sistemin indirgenmiş durumuyla belirlenmiş bir çevre durumunun tensörel çarpımıdır⁸. Elde edilen $\mathcal{P}(\rho^{QE})$ durumuna bileşik sistemin ilişkili kısmı (*relevant part*) denilirken, bu izdüşümün dik tümleyeni olan yani $\mathcal{P}Q = Q\mathcal{P} = 0$ ve $\mathcal{P} + Q = \mathbb{1}_{QE}$ koşullarını sağlayan Q izdüşüm işlemcisinin ($Q^2 = Q$) etkisiyle ulaşılan $Q(\rho^{QE})$ durumlarına ise bileşik sistemin ilişkisiz kısmı (*irrelevant part*) denir. Burada amaç ilişkili kısmın zamanla değişimini betimleyen bir denklem elde etmektir (Breuer ve Petruccione 2002). Bu yöntemle master denklem elde etmede yaygın olarak kullanılan iki yol vardır. Bunlar Nakajima-Zwanzig (Nakajima 1958, Zwanzig 1960) ve zaman konvolüsyonsuz (*time-convolutionless*) (Shibata ve Takahashi 1977, Chaturvedi ve Shibata 1979) izdüşüm işlemci yöntemleridir.

Nakajima-Zwanzig izdüşüm işlemci yöntemiyle master denklemin oldukça genel bir formu

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \int_{t_0}^t ds \mathcal{K}(t,s) \rho^Q(s) \quad (2.48)$$

⁸ İzdüşüm işlemci yönteminde çevrenin durumu yerine başka bir işlemci de yazılabilirdi fakat fiziksel anlamının açıklığından dolayı bu işlemci çevrenin başlangıç durumu seçilir.

şeklinde bir integro-diferansiyel denklem olarak elde edilebilir (Breuer ve Petruccione 2002). Bu denklem açıkça sistemin durumunun zamanla değişiminin geçmişe bağımlılık gösterdiği, hafıza etkilerinin olduğu bir yapıdadır. Denklemdaki $\mathcal{K}(t, u)$ gönderimine integral denklemin hafıza çekirdeği (*memory kernel*) denir. Çekirdeğin $\mathcal{K}(t, u) \approx \delta(t - u)\mathcal{K}(t)$ olduğu durumlarda süreçlerin hafızasız olacağı görülmektedir. Burada $\mathcal{K}(t)$ hafızasız sürecin üreticini temsil etmektedir.

Genel durumda bu denklemin çözümü oldukça zor olduğundan, denklemi analitik ya da nümerik olarak çözmeye yönelik farklı yöntemler kullanılmaktadır. Maalesef tüm durumlarda fiziksel olarak tutarlı sonuçlar veren yöntemler geliştirilememiştir.

Zaman konvolüsyonsuz izdüşüm işlemci yönteminde, Nakajima-Zwanzig yöntemiyle elde edilen integro-diferansiyel denklemin, çözümü güçleştiren hafıza çekirdeğinden kurtulup, master denklemi

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \mathcal{L}_t[\rho^Q(t)] \quad (2.49)$$

biçiminde zamanda yerel (*time-local*) bir denklem olarak yazmak amaçlanmaktadır (Breuer ve Petruccione 2002, Rivas ve Huelga 2011). Zamanda yerel olmanın anlamı; denkleminin sol tarafı türev işleminden dolayı belirli bir zaman için belirlenirken, bu türevin eşiti olan sağ taraftaki dinamiğin üretici denilen \mathcal{L}_t gönderiminin de türevin alındığı zamana bağlı olarak tanımlanabiliyor olmasıdır. Çoğu süreçte bu yöntem kullanılarak master denklem (2.49) eşitliğindeki gibi yerel olarak yazılabilir, fakat bu durum dinamiğin hafızasızlığı anlamına gelmez. Yerel bir denklemin üretici olan \mathcal{L}_t gönderiminin kendisi hafızasız olmayıp, geçmişe bağımlılık gösterdiği durumlar olabilir (Chruściński ve Kossakowski 2010).

Zaman konvolüsyonsuz izdüşüm işlemci yönteminde master denklem türetilirken, bazı zaman aralıklarında zamanda ters yönde propagatörler tanımlamak gerekmektedir. Bunun için de ilgili zaman aralıklarında gönderimlerin terslenebiliyor olması gerekir. Çoğu

durumda gönderimlerin tersi mevcut olsa da, gönderimlerin tersinin olmadığı süreçlerin de varlığı dikkate alındığında, bu yöntemin de genel olmadığı belirtilmelidir.

(2.49) denklemindeki zamanda yerel üreteç oldukça karmaşık olabilir. Denklemin doğrudan çözülemediği bu tür durumlarda, Markov süreçlerin master denklemini elde ederken de kullanılan

$$H = H_Q \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_Q \otimes H_E + \alpha H_I \quad (2.50)$$

Hamilton işlemcisindeki etkileşme teriminin önündeki bağlaşım şiddetini tarif eden α parametresinin belirli bir mertebeye kadar kuvvetlerini içeren pertürbasyon yöntemleri kullanılır. Bu yöntemlerle çözümler elde edilebiliyor olsa da, açılımda sonlu sayıda terim kullanıldığı durumlarda dinamiği tarif eden gönderimin CP'lik, hatta pozitiflik özelliğinin kaybolduğu, yani indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarif edilemediği gelişimlerin varlığı gösterilmiştir (Breuer ve Petruccione 2002, Rivas ve Huelga 2011).

Dinamiği betimleyen Λ_t gönderimi her zaman değeri için terslenebiliyorsa (2.49) denklemindeki üreteç

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t[\rho^Q(t)] &= \frac{-i}{\hbar} [H_Q(t), \rho^Q(t)] \\ &+ \sum_i \gamma_i(t) \left[L_i(t) \rho^Q(t) L_i^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger(t) L_i(t), \rho^Q(t)\} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

formunda olup, bu yapı 2.4.2 kesiminde anlatılacak Markov süreçlerdeki master denklemlerin Lindblad formuna benzerdir (Breuer vd. 2016). Burada bozunum oranı (*decay rate*) denilen $\gamma_i(t)$ sayıları, Hermitsel $H_Q(t)$ işlemcisi ve $L_i(t)$ işlemcilerinin zamana bağımlı olması önemlidir. (2.51) denkleminin sağ tarafı

$$\mathcal{L}_t[\rho^Q(t)] = \frac{-i}{\hbar} [H_Q(t), \rho^Q(t)] + \mathcal{D}_t[\rho^Q(t)] \quad (2.52)$$

şeklinde iki ifadenin toplamı olarak yazıldığında, birinci terim etkin Hamilton işlemcisinin ürettiği gelişimin üniter kısmını, ikinci terim ise dinamiğin yitirimli (*dissipative*) kısmını göstermektedir. Yitirimli kısmın olmaması durumunda denklemin, kapalı sistemlerin gelişimini tarif eden Liouville-von Neumann denkleminin (Denklem 2.17) dönüştüğü görülmektedir. OQS'in gelişiminde yitirimli ikinci kısmın varlığı; üniter olarak tarif edilemeyen, terslenemeyen, sistemlerin çevreleriyle bilişim alış verişi içinde oldukları süreçlerin varlığını vurgulamaktadır.

İzdüşüm işlemci yöntemlerine başvurmadan, master denklemlerin genel formunun elde edilebilmesine yönelik çalışmalar devam etmektedir (Breuer vd. 2016, De Vega ve Alonso 2017). Örneğin her Markov olmayan gelişimin genişletilmiş uzaydaki bir Markov gelişimden indirgenebileceği düşüncesine dayanarak, dinamiği betimleyen $\Lambda_{(t,t_0)}$ kuantum kanalının, R yardımcı sistemiyle genişletilmiş $\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_R$ Hilbert uzayında tanımlanan \mathcal{L} Markov süreç üreticinden ve yardımcı sistemin ω^R sabit durumundan

$$\Lambda_{(t,t_0)}[\rho^Q] \equiv Tr_R[e^{(t-t_0)\mathcal{L}}(\rho^Q \otimes \omega^R)] \quad (2.53)$$

ifadesiyle elde edilebileceği gösterilmiştir (Chruściński ve Kossakowski, 2010). Bu sonuç $\Lambda_{(t,t_0)}$ gönderiminin, dolayısıyla da $\mathcal{L}_{(t-t_0)}$ üreticinin $t - t_0$ zaman aralıklarına bağlı olduğu, dinamiği tarif eden master denklem

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \mathcal{L}_{(t-t_0)}[\rho^Q(t)] \quad (2.54)$$

biçiminde birinci mertebeden bir diferansiyel denklemle tarif edilebiliyor olsa da; üreticinin zamanda yerel olmadığı, sürecin her aşamasında t_0 başlangıç zamanıyla ilişkili olduğu, yani hafıza etkilerini taşıdığı görülmektedir (Chruściński ve Kossakowski 2010).

Master denklemin diferansiyel denklem olması durumunda, süreci tarif eden $\Lambda_{(t,t_0)}$ gönderiminin genel formuna da ulaşmak mümkündür. (2.49) denkleminde $\rho^Q(t) = \Lambda_{(t,t_0)}[\rho^Q(t_0)]$ ilişkisi kullanılarak

$$\frac{d\Lambda_{(t,t_0)}}{dt} = \mathcal{L}_t \Lambda_{(t,t_0)} \quad (2.55)$$

eşitliği yazılabilir ve denklemin çözümü olan kuantum kanal ise,

$$\Lambda_{(t,t_0)} = \mathcal{T}exp\left(\int_{t_0}^t \mathcal{L}_s ds\right) \quad (2.56)$$

eşitliğiyle elde edilir. (2.54) denkleminde elde edilen gönderimde, üreticinin başlangıç anıyla olan zaman aralıklarına bağlı olmasından dolayı,

$$\Lambda_{(t,t_0)} = \mathcal{T}exp\left(\int_0^{t-t_0} \mathcal{L}_s ds\right) \quad (2.57)$$

denklemine ulaşılır. $\Lambda_{(t,t_0)}$ kanalının her zaman değeri için terslenebildiği durumlarda, (2.55) denklemi kullanılarak üretici ile dinamiği betimleyen kuantum kanal arasında

$$\mathcal{L}_t = \frac{d\Lambda_{(t,t_0)}}{dt} \Lambda_{(t,t_0)}^{-1} \quad (2.58)$$

ifadesi yazılır. Ayrıca başlangıç zamanı $t_0 = 0$ seçilerek, (2.48) denkleminde

$$\mathcal{L}_t = \int_0^t ds \mathcal{K}(t,s) \Lambda_s \Lambda_t^{-1} \quad (2.59)$$

üretici de elde edilir (Hall vd. 2014).

Zamanda yerel master denklemlerdeki \mathcal{L}_t üreticinin çizgisel olması kullanılarak, üreticiyle ilgili kanonik bir forma ulaşılır. Bunun için çizgisel gönderimlerin sahip olduğu

$$\mathcal{L}_t[\rho^Q(t)] = \sum_i A_i(t) \rho^Q(t) B_i(t) \quad (2.60)$$

şeklindeki işlemci toplamı temsilinden (*operator-sum representation*) yararlanılır (Watrous 2018). $\dim(\mathcal{H}_Q) = d$ olduğunda, bu sistem üzerine etkiyen çizgisel işlemciler d^2 boyutlu,

$$\text{Tr}[A^\dagger B], \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_Q)$$

şeklinde tanımlanan Hilbert-Schmidt iç çarpımıyla donatılmış bir Hilbert uzayı oluştururlar. Bu Hilbert uzayında seçilen $\{F_k; k = 0, 1, 2 \dots d^2 - 1\}$ bazı, $F_0 = 1/\sqrt{d}$, $F_k = F_k^\dagger$ ve $\text{Tr}(F_k F_l) = \delta_{kl}$ özelliklerine sahip, F_0 hariç diğerleri izsiz ($\text{Tr} F_k = 0$) işlemcilerden oluşturulmuş olsun. (2.60) toplamındaki A_i ve B_i işlemcileri sadelik için zaman bağımlılıkları yazılmadan, seçilen bu bazda $A_i = \sum_k a_{ik} F_k$ ve $B_i = \sum_l b_{il} F_l$ şeklinde yazılır. \mathcal{L}_t gönderiminin Hermitsel olma özelliğini korumasından ve her ρ^Q için $\text{Tr}[\mathcal{L}_t(\rho^Q)] = 0$ koşulundan yararlanılarak, üretcin kanonik formu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t[\rho^Q(t)] &= \frac{-i}{\hbar} [H_Q(t), \rho^Q(t)] \\ &+ \sum_{k=1}^{d^2-1} \gamma_k(t) \left[F_k(t) \rho^Q(t) F_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{F_k^\dagger(t) F_k(t), \rho^Q(t)\} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

olarak elde edilir (Hall vd. 2014). Kanonik form elde edilirken \mathcal{L}_t gönderiminin indirgenmiş durumlara çizgisel olarak etkidiğinin kabul edildiğini unutmamak gerekir. (2.61) denkleminin genel master denklemin Lindblad benzeri formu denilecektir. Master denklemin bu formundan üçüncü bölümde süreçlerin Markov olmama miktarını belirlemede de yararlanılacaktır.

2.4.2 Markov süreçlerde master denklem

Her zaman aralığındaki gelişimi bir kuantum kanalla betimlenebilen süreçler Markov süreçler olarak tanımlandı (Tanım 2.1). Markov süreçlerde açık kuantum sistemin herhangi bir t zamanındaki $\rho^Q(t)$ durumu dikkate alınarak, $\Delta t > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\rho^Q(t + \Delta t) - \rho^Q(t) &= [\Lambda_{(t+\Delta t,0)} - \Lambda_{(t,0)}]\rho^Q(0) = [\Lambda_{(t+\Delta t,t)} - id_Q]\Lambda_{(t,0)}[\rho^Q(0)] \\ &= [\Lambda_{(t+\Delta t,t)} - id_Q]\rho^Q(t)\end{aligned}\quad (2.62)$$

denklemini elde edilir. Burada dinamiği tarif eden kuantum kanalın $\Lambda_{(t+\Delta t,0)} = \Lambda_{(t+\Delta t,t)}\Lambda_{(t,0)}$ şeklinde bölünebilmesinden yararlanılmıştır. $\Delta t \rightarrow 0$ için yukarıdaki eşitlik,

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho^Q(t + \Delta t) - \rho^Q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\Lambda_{(t+\Delta t,t)} - id_Q]\rho^Q(t)}{\Delta t}\quad (2.63)$$

şeklinde sistemin durumunun değişim hızını tarif eden master denkleme dönüşmektedir. (2.63) denkleminde dinamiğin üreticinin

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\Lambda_{(t+\Delta t,t)} - id_Q]}{\Delta t}\quad (2.64)$$

olarak tanımlanmasından dolayı, Markov süreçleri tarif eden master denklemlerin zamanda yerel olduğu görülmektedir. Ayrıca (2.64) denkleminde üreticinin, genel yerel master denklemlerde olabileceği gibi geçmişe bağımlı olmaması, bölünebilir süreçlerin hafızasızlığını açıkça göstermektedir.

Bölünebilir süreçlerde (2.64) denklemindeki üreticinin yapısı da bilinmektedir. Master denklemin bölünebilir bir süreci tarif edebilmesi için gerek ve yeter koşul üreticinin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t[\rho^Q(t)] &= \frac{-i}{\hbar} [H_Q(t), \rho^Q(t)] \\ &+ \sum_i \gamma_i(t) \left[L_i(t) \rho^Q(t) L_i^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger(t) L_i(t), \rho^Q(t)\} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

formunda yazılabiliyor olmasıdır (Gorini vd. 1976, Lindblad 1976, Rivas ve Huelga 2011). Bu denklem (2.61) denklemiyle aynı gözükse de, denklemin bölünebilir süreçleri tarif ettiği durumlarda, her i değeri ve her $t \geq 0$ için bozunum oranının $\gamma_i(t) \geq 0$ olması gerekmektedir. Üretecin yukarıdaki biçimine Lindblad formu, bu üretecin oluşturduğu master denkleme de master denklemin Lindblad ya da GKSL⁹ (Gorini, Kosssakowski, Sudarshan, Lindblad) formu, toplamda yer alan $L_i(t)$ işlemcilerine de Lindblad işlemcileri denir. Bu denklem elde edilirken, herhangi bir t_1 anından sonraki t_2 anına ($t \geq t_2 \geq t_1 \geq 0$) kadar olan gelişimi tarif eden $\Lambda_{(t_2, t_1)}$ gönderiminin bir kuantum kanal olmasından yararlanır. Bu kanalın

$$\Lambda_{(t_2, t_1)}[\rho^Q(t_1)] = \sum_l K_l(t_2, t_1) \rho^Q(t_1) K_l^\dagger(t_2, t_1) \quad (2.66)$$

şeklinde Kraus temsili düşünülerek, Kraus işlemcileri, (2.61) denklemi elde edilirken yapıldığı gibi, izsiz bir bazda yazılır. Kanalların Kraus temsilleri tek olmadığında, farklı Kraus işlemcileriyle (2.65) denklemi elde edilebilir. Bu nedenle üretecin Lindblad formunda yazımı tek değildir. Yazımın tek olması için Lindblad formundaki L_j işlemcilerinin izsiz olması gerekir (Gorini vd. 1976).

Zamanda yerel (2.49) denkleminde, dinamiğin üretecin zamandan bağımsız olması durumundaki

⁹ Aynı yıl yayımlanan iki makaleyle ortaya çıkan, hafızasız süreçlerin master denkleminin öyküsünü, tarihsel anekdotları da içerecek şekilde takip etmek için Chruściński ve Pascazio'nun (2017) makalesi incelenebilir.

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \mathcal{L}[\rho^Q(t)] \quad (2.67)$$

diferansiyel denkleme **homojen master denklem** denir. Homojen olmakla kastedilen, zamanla gelişimin her aralığında dinamiğin aynı üreteçle tarif edilebilmesi, farklı zaman aralıklarındaki üreteçlerin birbirinden farklı olmamasıdır. Bu durumda

$$\mathcal{L}[\rho^Q(t)] = \frac{-i}{\hbar} [H_Q, \rho^Q(t)] + \sum_i \gamma_i \left[L_i \rho^Q(t) L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho^Q(t)\} \right] \quad (2.68)$$

olan üreteç, (2.61) ve (2.65) denklemleriyle aynı formdadır, fakat ifadeyi oluşturan H_Q Hamilton işlemcisinin, L_i Lindblad işlemcilerinin ve γ_i bozunum oranının her i değerinde zamandan bağımsız olması önemlidir (Gorini vd. 1976, Lindblad 1976). Homojen master denklemlerde açık kuantum sistemin herhangi bir zaman aralığındaki gelişimini tarif eden gönderim de

$$\Lambda_{(t_2, t_1)} = \exp((t_2 - t_1)\mathcal{L}) \quad (2.69)$$

biçiminde olup, yalnızca ilgilenen zaman aralıkları farkına ve sabit üretece bağlı bir kuantum kanaldır. Zaman aralığı farkına $t_2 - t_1 = \tau$ denilerek $\Lambda_\tau = \exp(\tau\mathcal{L})$ kuantum kanalı tek bir τ parametresine bağlı olarak yazılabilir. Dinamiğin $t_0 = 0$ seçilen başlangıç anından, t zamanına kadar olan tüm zaman aralıklarındaki gelişimi

$$\{\Lambda_\tau: 0 \leq \tau \leq t, \Lambda_0 = id\} \quad (2.70)$$

kuantum kanallar kümesinin elemanlarıyla betimlenir. Bu küme, her Λ_τ , Λ_s ve Λ_u elemanlarının $\Lambda_{\tau+s} = \Lambda_\tau \circ \Lambda_s$ şeklinde aynı kümede kalacak şekilde bileşimlerinin yazılabilmesinden ve gönderimlerin bileşke işlemine göre $(\Lambda_\tau \circ \Lambda_s) \circ \Lambda_u = \Lambda_\tau \circ (\Lambda_s \circ \Lambda_u)$ şeklindeki birleşme özelliğine (*assosiative*) sahip olmalarından dolayı, tek parametrelili yarıgrup (*semigroup*) özelliğine sahiptir. Kümenin elemanlarının tersinin her zaman olmamasından ya da var olan terslerin kümenin elemanı kalmamasından dolayı

kümenin grup yapısı yoktur. (2.67) denkleminde görülen, kümenin elemanlarını belirleyen \mathcal{L} gönderimine yarıgrupun üretici (*generator*) denir. ‘Üreteç’ ifadesi gerçek anlamını indirgenmiş dinamiği tarif eden gönderimlerin yarıgrup özelliğine sahip olduğu homojen master denklemlerle tarif edilen süreçlerde kazanır. Bundan önceki ‘üreteç’ ifadeleri bu yarıgrup yapısına benzetilerek söylenmiş olup, diğer durumlarda gönderimlerin tek bir parametreyle ifade edilebilmeleri ve gelişimleri tarif eden gönderimlerin tek bir üreteç aracılığıyla tanımlanabilmeleri mümkün değildir.

Homojen master denklemlerle tasvir edilebilen süreçlerde; her zaman aralığının bir kuantum kanalla tarif edilebiliyor olması bölünebilirliği, üreticinin zaman bağımlılığının olmaması da gelişimin hafızasız olmasını ifade eder.

Mikroskobik tasvir denilen master denklemin dinamiği belirleyen (2.50) denklemindeki Hamilton işlemcisinden elde edilmesinde, Markov süreçlerde sistemle çevre arasındaki bağlaşımın zayıf olduğu varsayılır. Zayıf etkileşimin sonucu olarak, Born-Markov yaklaşıklığı yapılır ve bölünebilir süreçleri tarif eden zamana bağlı Lindblad denklemi formuna ulaşmak amaçlanır. Bu bağlamda yaygın olarak kullanılan ve nispeten daha kolay yaklaşımlardan biri, (2.17) denkleminde verilen Liouville-Von Neumann denklemini etkileşme resminde

$$\frac{d}{dt}\rho^{QE}(t) = \frac{-i}{\hbar}[H_I(t), \rho^{QE}(t)] \quad (2.71)$$

şeklindeki yazıp¹⁰, denklemin integralinden elde edilen

$$\rho^{QE}(t) = \rho^{QE}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t ds [H_I(s), \rho^{QE}(s)] \quad (2.72)$$

¹⁰ İşlemcilerin etkileşme resminde olduğunu belirtmek için ayrı bir yazım benimsenmemiştir.

sonucunun (2.71) denkleminde tekrar yazıldığı iterasyon yöntemidir. Bu yöntemle elde edilen ifade de $Tr_E[H_I(t), \rho^{QE}(0)] = 0$ kabul edilip, çevre sistemi üzerinden parçalı iz alınarak

$$\frac{d}{dt}\rho^Q(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds Tr_E[H_I(t), [H_I(s), \rho^{QE}(s)]] \quad (2.73)$$

denklemini elde edilir. Zayıf bağlaşım durumunda etkileşmenin çevre üzerindeki etkisinin hızlıca kaybolduğu varsayılarak, Born yaklaşıklığı yapılabilir. Gelişimin herhangi bir anında $\rho^{QE}(s)$ bileşik durumunun yaklaşık $\rho^{QE}(s) \approx \rho^Q(s) \otimes \rho^E$ şeklinde çarpım durumunda kaldığı ve çevrenin ρ^E durumunun dinamik boyunca sabit olduğu varsayıldığında, (2.73) denklemini

$$\frac{d}{dt}\rho^Q(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds Tr_E[H_I(t), [H_I(s), \rho^Q(s) \otimes \rho^E]] \quad (2.74)$$

olur. Redfield denklemini de denilen (2.74) denkleminde, ifadenin sağ tarafı hala hafıza etkilerini taşımaktadır. Hafıza etkilerinden kurtulabilmek için Markov yaklaşıklığına ihtiyaç duyulur. Çevrenin durumları arasındaki korelasyonların sönüm zamanı, sistemdeki değişimlerin durulma zamanından çok kısa olduğu kabul edilerek, (2.74) denklemindeki s zamanı yerine $t - s$ zamanı yazılır ve integralin üst sınırı sonsuza götürülür. Elde edilen

$$\frac{d}{dt}\rho^Q(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty ds Tr_E[H_I(t), [H_I(t - s), \rho^Q(t) \otimes \rho^E]] \quad (2.75)$$

denklemini Markov süreçleri tarif eden master denklemin genel formudur ve bu denklem (2.65) denkleminde dönüştürülebilir (Breuer ve Petruccione 2002, Rivas ve Huelga 2011). (2.75) denkleminde iterasyonun bir kez yapıp devam ettirilmemesinin sebebi, denklemin sağ tarafındaki etkileşme Hamilton işlemcisi (2.50) denklemindeki gibi

yazıldığında bağlaşım sabitinin karesinin yer alması ve bu sabitin yeterince küçük kabul edilmesidir.

İterasyon yöntemiyle yapılan açılımlar ve Born-Markov yaklaşıklığı kullanarak elde edilen master denklemlerde, indirgenmiş dinamiğin pozitifliğinin her zaman korunmaması önemli bir problemdir. Bu problem etkileşme Hamilton işlemcisinde etkileşmenin şiddetini gösteren α parametresinin açılımlarına dayanan tüm pertürbasyon yaklaşımlarında da vardır (Breuer ve Petruccione 2002, Rivas ve Huelga 2011). Bu nedenle Born-Markov yaklaşıklığının yanı sıra; kuantum optikte daha çok dönen dalga yaklaşıklığı (*rotating wave approximation*) diye bilinen, hızlı salınan yüksek frekanslı terimlerin ortalamasının sıfır kabul edildiği seküler yaklaşıklık (*secular approximation*) yapmaya da ihtiyaç duyulur (Rivas ve Huelga 2011).

2.4.3 Markov olmayan süreçlerde master denklem

Markov olmayan süreçlerde master denklemlerin yapısıyla ilgili genel özellikler iyi bilinmemektedir. 2.4.1 bölümünde anlatılan Nakajima-Zwanzig izdüşüm işlemci tekniğiyle (2.47) denklemindeki hafızalı integro-diferansiyel denklemler elde edildikten sonra, Born-Markov yaklaşıklığı yapmadan denklemi çözmek çoğu durumda oldukça güçtür. Mikroskopik tasvir denilen bileşik sistemin üniter gelişimini üreten Hamilton işlemcisinden indirgenmiş dinamiği tarif eden denklemin elde edilmesi de çoğu zaman zorlu bir süreçtir.

Bölünebilir süreçlerde zayıf bağlaşım varsayımının yapılabilmesinden dolayı, zaman konvolüsyonsuz izdüşüm işlemci tekniğinde ikinci mertebeden pertürbasyon açılımları kullanılarak, indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitifliğini ihlal etmeyen master denklemler elde edilebilir. Hafızasız süreçlerde dahi bu yöntemin açık sistemin gelişiminin kuantum kanallarla betimlemesine her zaman olanak sağlamadığı bilinmektedir. Zayıf bağlaşımın olmadığı Markov olmayan süreçler için pertürbasyon açılımındaki tüm terimlerin dikkate alınmadığı her durumda aynı problem devam etmektedir. (Beuer ve Petruccione 2002, Rivas ve Huelga 2011, de Vega ve Alonso 2017). Master denklemin çözümüyle ilgilenmeden (2.48) denklemindeki dinamiğin üretici

denilen $\mathcal{K}(t, s)$ hafıza çekirdeğinin, indirgenmiş dinamik gönderimin CP olması için sahip olması gereken matematiksel özellikler de incelenmiştir (Kossakowski ve Rebolledo 2009).

Zaman konvolüsyonsuz izdüşüm işlemci tekniğiyle elde edilen zamanda yerel üreteç (2.61) denklemindeki gibi kanonik formda yazıldığında, bölünebilir bir süreci betimlemesi için gerek ve yeter koşul $\gamma_k(t)$ bozunun oranının tüm $t \geq 0$ zamanlarındaki her k değerinde $\gamma_k(t) \geq 0$ olmasıdır. Bu nedenle kanonik formda yazılmış bir master denklemin Markov olmayan bir süreci betimlemesi için de gerek ve yeter koşul bozunum oranının negatif olmasıdır (Hall vd. 2014). Fakat gerçek fiziksel süreçlerde bileşik sistemin Hamilton işlemcisi bilindiğinden, temel problem bu işlemciden indirgenmiş dinamiğin üreticinin elde edilmesidir. Elde edilen üreteç indirgenmiş dinamiğin kanallarla betimlenmesi gerekliliğini sağlıyorsa, üreticinin kanonik formda yazılması sürecin hafıza özelliğini kesin olarak belirlemektedir.

Markov olmayan süreçlerdeki integro-diferansiyel denklemin $\mathcal{K}(t, s)$ çekirdeğinin hafıza etkilerinin kaybolduğu durumlarda yarıgrup üreticine dönüşen fonksiyonlarla tanımlandığı fenomenolojik yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemlerde (2.48) denkleminin

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \int_{t_0}^t ds k(t-s) \mathcal{L}[\rho^Q(s)] \quad (2.76)$$

şeklinde yazımı yaygın kullanılmaktadır. Burada \mathcal{L} homojen master denklemin yarıgrup üretici, $k(t-s)$ ise hafıza etkilerini taşıyan bir fonksiyondur. Fonksiyon $k(t-s) \rightarrow \delta(t-s)$ olduğunda (2.76) denkleminin homojen master denkleme olacağı görülmektedir. $k(t-s)$ fonksiyonunun seçiminde indirgenmiş dinamiğin kuantum kanal olma özelliğinin korunması önemlidir (Barnett ve Stenholm 2001, Daffer vd. 2004, Breuer ve Vacchini 2008). Bu fonksiyon çoğu durumda üstel bir fonksiyonla orantılı olarak

$$k(t-s) \propto ge^{(t-s)} \quad (2.77)$$

şeklinde seçilir. Post-Markov süreç master denklemi denilen diğer bir fenomenolojik yöntemde ise, (2.48) denklemi

$$\frac{d\rho^Q(t)}{dt} = \mathcal{L} \int_{t_0}^t ds k(t-s) e^{(t-s)\mathcal{L}} [\rho^Q(s)] \quad (2.78)$$

biçiminde yazılır (Shabani ve Lidar 2005). \mathcal{L} gönderiminin yarıgrup üreticini gösterdiği bu denklemde de $k(t-s) \rightarrow \delta(t-s)$ olduğu hafızasız durumda yine homojen master denklem elde edilir. Fenomenolojik master denklemler indirgenmiş dinamiğin CP'liğini garantiliyor ve matematiksel olarak hafıza çekirdeği içeriyor olsalar da, çevreden sisteme geri bilişim akışı özelliğini sağlamadığı örnekler gösterilmiştir. Bu nedenle fenomenolojik yöntemle elde edilen master denklemin hafıza çekirdeğinin olması her zaman Markov olmama özelliğini tam olarak belirlemede yeterli değildir (Mazzola vd. 2010).

Nakajima-Zwanzig denkleminin çözümünün zorluğundan dolayı, 2.4.1 bölümünde de söylendiği gibi zaman konvolüsyonsuz izdüşüm işlemci yöntemiyle yerel diferansiyel denklemler elde etmek çözüme giden yolda daha elverişlidir. Bu yöntemde sistem ve çevre arasındaki etkileşmenin sönümlü harmonik salıncı (*damped harmonic oscillator*) ve spin-bozon modeli çerçevesinde incelenebildiği durumlarda indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitif kaldığı master denklemleri mikroskobik olarak türetmek mümkündür. Ayrıca iki seviyeli atomların kendiliğinden yayınım (*spontaneous emission*) süreçlerini tarif eden hafızalı master denklemler de zaman konvolüsyonsuz işlemci yöntemiyle etkileşme Hamilton işlemcisinden türetilebilmektedir (Beuer ve Petruccione 2002). Bileşik sistemin Hamilton işlemcisinin ürettiği üniter gelişim işlemcisinin ikinci mertebeden seri açılımları kullanılarak, dinamiğin zamandan bağımsız üreteçlerle tarif edilebildiği aralıklara bölünerek incelendiği, dinamik kabalama (*dynamical coarse graining*) yöntemi denilen yöntemde de indirgenmiş dinamiğin CP'liği garantilenebilmektedir (Schaller ve Brandes 2008, 2009).

3. MARKOV OLMAMA ÖLÇÜLERİ

Kuantum Markov olmama kavramı önceki bölümde ayrıntılı irdelenerek, bölünebilir kanallarla tarif edilebilen süreçler Markov süreçler, bu şekilde tarif edilemeyen süreçler ise Markov olmayan süreçler olarak tanımlandı. Bu bölümde ise süreçlerin Markov olmama özelliğini nicelendirme imkânı veren bazı fonksiyonlar incelenecektir. Markov olmama ölçüleri (*measure of non-Markovianity*) denilen bu fonksiyonların değeri, her zamanla gelişim süreci için negatif olmayan bir sayıdır. Fonksiyonun değerinin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul ise dinamiğin bölünebilir olması yani Markov süreç olmasıdır. Bu nedenle bahsedilecek fonksiyonlar hafıza olgusunun farklı yönlerine işaret eden, gelişimin Markov olmamasının farklı tanımları olarak görülebilir.

3.1 Choi-Jamiołkowski Temsiliyle Markov Olmamanın Nicelendirilmesi

Kuantum kanalları incelemede önemli bir yöntem de, durumlarla kanallar arasındaki Choi-Jamiołkowski izomorfizmidir. Durum-kanal dualitesi de denilen bu izomorfizme göre her kuantum kanalına genişletilmiş uzayda bir kuantum durum karşılık gelir (Jamiołkowski 1972, Choi 1975).

Q sistemiyle ilişkili Hilbert uzayının boyutu $\dim(\mathcal{H}_Q) = n$ olduğunda, $\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_Q$ bileşik sistemindeki en dolanık durum vektörü $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |ii\rangle$, karşılık gelen saf durum yoğunluk işlemcisi de $|\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n |ii\rangle\langle jj|$ olur. Q sistemi üzerine etkiyen $\Lambda: S(\mathcal{H}_Q) \rightarrow S(\mathcal{H}_{Q'})$ kuantum kanalı verildiğinde bu kanala karşılık gelen ve Jamiołkowski durumu ya da Choi matrisi denilen işlemci

$$C_\Lambda \equiv (id_n \otimes \Lambda)(|\alpha\rangle\langle\alpha|) \quad (3.1)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bu izomorfizme göre Λ pozitif gönderiminin CP olması için gerek ve yeter koşul, karşılık gelen işlemcinin $C_\Lambda \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca Λ gönderiminin Kraus temsilindeki minimum işlemcilerin sayısını gösteren Kraus rankı, C_Λ matrisinin rankına eşittir (Jamiołkowski 1972, Choi 1975, Kraus 1983).

Bir sistemin zamanla gelişimini tarif eden kuantum kanal (2.28) denklemindeki gibi $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ olarak tanımlandığında, Markov süreçlerde $V_{t,s}$ gönderiminin her $t \geq s \geq 0$ için bir kuantum kanal olması gerektiği ifade edilmiştir. Choi-Jamiołkowski izomorfizmi gereği ara süreçler için yazılacak her gönderime karşılık gelen Choi matrisinin pozitif olması bu gönderimlerin CP'liği için gerek ve yeter koşuldur. İz koruma özelliği Λ_s kanalının görüntü kümesi üzerinde her zaman korunacağı için Choi matrisinin izi de her zaman korunacak ve bire eşit olacaktır. Hermitsel bir matrisin izinin iz normuna eşit olması için gerek ve yeter koşul matrisin pozitif olması olduğundan, Choi matrisinin pozitifliği ya da gönderimin bölünebilir kanal olması için de gerek ve yeter koşul her $t \geq s \geq 0$ için

$$\|(id_n \otimes V_{t,s})(|\alpha\rangle\langle\alpha|)\|_1 = 1 \quad (3.2)$$

olmasıdır. $V_{t,s}$ gönderiminin CP olmadığı her durumda iz norm

$$\|(id_n \otimes V_{t,s})(|\alpha\rangle\langle\alpha|)\|_1 > 1 \quad (3.3)$$

olacaktır. Bir kuantum sistemin I zaman aralığındaki Markov olmama miktarını belirlemek için, $\Delta t \in I$ olmak üzere

$$f(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\|(id_n \otimes \Lambda_{(t+\Delta t)})(|\alpha\rangle\langle\alpha|)\|_1 - 1}{\Delta t} \quad (3.4)$$

fonksiyonu tanımlanır. $f(t) = 0$ iken incelenen zaman aralığında dinamiğin Markov süreç olduğu, $f(t) > 0$ olduğunda ise gelişimin Markov olmama özelliği gösterdiği anlaşılmaktadır. Toplam Markov olmama miktarını belirlemek için de, $f(t)$ fonksiyonunun I zaman aralığı boyunca toplamının belirlenmesi gerekir. Bu kapsamda

$$\mathcal{N}_{RHP} \equiv \int_I f(t) dt \quad (3.5)$$

ifadesi süreç içerisindeki toplam Markov olmama miktarını tanımlamakta olup, bu niceliğe, ölçüyü ilk ortaya koyan yazarlara (Rivas, Huelga ve Plenio) atfen *RHP* Markov olmama ölçüsü denir (Rivas vd. 2010). Bu ölçünün dinamik boyunca gönderimlerin tamamen pozitiflikten ayrılma miktarını belirlediği (3.4) denklemindeki tanımdan açıkça anlaşılmaktadır.

RHP ölçüsünü kullanabilmek için ara aşamalarda $V_{t,s}$ gönderimlerinin her $t \geq s \geq 0$ için tanımlı olması gerekmektedir. Kanalların bölünebilmesi kapsamında bölüm 2.3.1’de değinildiği gibi Λ_t kuantum kanalının her $t \geq 0$ için terslenebildiği durumlarda $V_{t,s}$ çizgisel gönderimi vardır ve bu ölçü kullanılabilir. Ayrıca (2.29) ifadesindeki gönderimlerin çekirdekleri arasındaki içme ilişkisi, terslenebilir kanallardan daha geniş bir kümede bu gönderimlerin varlığını gösterdiği vurgulandı.

Kanalın terslenemediği zamanlarda da süreç içerisindeki gönderimleri farklı biçimlerde tanımlayarak, *RHP* ölçüsünü hesaplamaya yönelik değişik yöntemler önerilmiştir (Hou vd. 2012, Rivas vd. 2014). Bunlarda biri kanalın doğrudan tersini almak yerine ϵ değerini uygun seçerek her zaman tersi olan $\epsilon I + V_{t,s}$ ifadesinin tersini bulmak ve bulunan sonucu $\epsilon \rightarrow 0$ limit durumuna götürmektir. Bir diğeri ise tekillik oluşturan t_1 zamanının komşuluğundaki bir t_2 zamanında $f(t)$ değerini hesaplamak ve sonucu tekrar $t_2 \rightarrow t_1$ limitinde hesaplamaktır (Rivas vd. 2014).

Choi-Jamiołkowski izomorfizmi aracılığıyla Markov olmama miktarını belirlemede, *RHP* ölçüsüyle aynı anlayışla geliştirilen bir yöntem de, Choi matrisinin negatif özdeğerlerinin toplamını sürecin Markov olmama ölçüsü olarak kullanmaktır. (2.28) denklemindeki $V_{t,s}$ gönderiminin CP olması için gerek ve yeter koşul, bu gönderimle ilişkili Choi matrisinin pozitif olması olduğundan, bölünebilir süreçlerde tüm zaman aralıklarında dinamiği tarif eden gönderimlere karşılık gelen Choi matrisinin negatif özdeğeri olmaması gerekir. İlgilenilen zaman aralığındaki Choi matrisinin negatif özdeğerleri μ_k olmak üzere

$$f_{CJ} \equiv - \sum_k \mu_k \quad (3.6)$$

toplamı, bu aralıktaki Markov olmama miktarını göstermektedir (Hou vd. 2011). Tüm süreçteki Markov olmama miktarı ise, (3.5) denkleminde olduğu gibi zaman aralığının tamamında f_{CJ} fonksiyonunun toplanmasıyla elde edilir.

Choi-Jamiołkowski izomorfizmine dayanarak yukarıda tanıtılan ölçülerin her ikisini de hesaplayabilmek için süreci tarif eden gönderimin tam olarak bilinmesi gerekmektedir. Bunu yapabilmek için ilk akla gelen yöntem kuantum süreç tomografisi (*quantum process tomography*) (Nielsen ve Chuang 2010) kullanılarak farklı zaman aralıklarına ait gönderimleri belirlemektir. Bu durum pratik uygulamalar için bir zorluk oluştursa da, çoğu durumda zamanla gelişim süreci modellenerek kuramsal olarak bilinebilir ve süreç tomografisine ihtiyaç duymadan inceleme yapılabilir (Rivas vd. 2014). Ayrıca bu ölçülerle Markov olmama miktarının hesaplanmasında herhangi bir optimizasyonun bulunmaması önemli bir kolaylıktır.

3.2 Ayırt Edilebilirlik Artışı Ölçüsü

Hipotez testi bağlamında p_1 ve p_2 önsel olasılıklarıyla verilen ρ_1 ve ρ_2 durumlarının uygun bir POVM belirlenerek en iyi ayırt edilebilirliklerinin, $\Delta = p_1\rho_1 - p_2\rho_2$ şeklindeki Helstrom matrisinin iz normuyla ilişkili olduğu ve Teorem 2.1' in sonucu olarak Markov süreçlerinde ayırt edilebilirliğin zaman içerisinde monoton olarak azaldığı, 2.3.2 bölümünde sistemle çevresi arasındaki bilişim akışıyla ilişkilendirilerek anlatıldı. Bu monoton davranış için dinamiği tarif eden gönderimlerin pozitif olması yeterli olsa da, bölünebilirliği esas alan Tanım 2.1'de bu gönderimlerin tamamen pozitif olması gerekir.

2.3.4 bölümünde değinildiği gibi bölünebilir süreçlerde ayırt edilebilirlik özelliğinin incelenmesinde gönderimlerin CP'liğinin gereği olarak, yardımcı sistemleri de hesaba katmak kaçınılmazdır. Bu amaçla sistemle aynı boyutlu yardımcı R sistemi seçilerek $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2 \in S(\mathcal{H}_{RQ})$ yoğunluk işlemcileriyle yeni bir

$$\tilde{\Delta} = p_1 \tilde{\rho}_1 - p_2 \tilde{\rho}_2 \quad (3.7)$$

Helstrom matrisi yazılır ve bu matrisin iz normu aracılığıyla Markov olmama miktarı belirlenebilir (Chruściński vd. 2011). Burada $\rho_1 = Tr_R \tilde{\rho}_1$ ve $\rho_2 = Tr_R \tilde{\rho}_2$ yoğunluk işlemcileri yardımcı sistem eklenmiş bileşik durumun indirgenmişleridirler. Genişletilmiş Helstrom matrisinin iz normunun zamanla değişimi

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\Delta}, t) \equiv \frac{d}{dt} \|(id_R \otimes \Lambda_t) \tilde{\Delta}\|_1 \quad (3.8)$$

olup, bu değerin pozitif olduğu durumlarda, durumların ayırt edilebilirliği artmaktadır ve süreç Markov olmama özelliği göstermektedir. Verilen bir I zaman aralığındaki toplam Markov olmama miktarıysa

$$\int_{t \in I, \tilde{\sigma} > 0} \tilde{\sigma}(\tilde{\Delta}, t) dt \quad (3.9)$$

olur. Markov olmama miktarının durumlardan ve önsel olasılıklardan bağımsız olabilmesi için

$$\mathcal{N}_H \equiv \max_{\tilde{\Delta}} \int_{t \in I, \tilde{\sigma} > 0} \tilde{\sigma}(\tilde{\Delta}, t) dt \quad (3.10)$$

şeklinde Helstrom matrisleri üzerinden optimize edilmesi gerekir. (3.10) ifadesine Markov olmamanın Helstrom matrisi ölçüsü denir (Rivas vd. 2014).

Bu ölçünün Markov olmama miktarını doğru tespit edebilmesi için dinamiği tarif eden gönderimin tüm ara aşmalarda iz koruyan ve çizgisel bölünebilir olması gerekir. Bir önceki *RHP* ölçüsü için ara aşmalarda gönderimin varlığı tartışması Helstrom matrisi ölçüsü için de geçerlidir.

Bu ölçüyle ilgili diğer bir husus da, 2.3.4 bölümünde anlatılan kanalların bölünmesi durumunda iz koruma özelliğinin bir önceki aşamadaki gönderimin görüntü kümesi üzerinde tanımlanmış olması, tüm durumlar uzayında her zaman geçerli olmamasıdır. Bu sorunun aşılabilmesi için Helstrom matrisi ölçüsünde kullanılan yardımcı sistemin, sistemin boyutundan bir fazla boyutta olması, bileşik sistemde yazılan Helstrom matrisindeki önsel olasılıkların ise aynı olması gerektiği (2.47) denkleminde ifade edilmiştir (Bylicka vd. 2017).

Helstrom matrisi ölçüsünün ayırt edilebilirlikle ilişkisinden dolayı fiziksel olarak anlamlı olduğu düşünülse de, (3.10) denklemindeki optizasyonun hem bileşik sistemdeki durumlara hem de önsel olasılıklara bağlı olmasından dolayı uygulanmasını zorlaştırmaktadır. Helstrom matrisindeki optimal durumların, durumlar kümesinin yüzeyinde yer alan birbirine dik durumlar olması gerektiği gösterilmiştir (Wißmann vd. 2012). Sistemin ρ_1 durumu tam ranklı (rankı sistemin Hilbert uzayının boyutuna eşit) seçilip, bu durum saflaştırılarak sistemle aynı boyutta yardımcı sistem içeren bileşik saf durumlar elde edilebilir. Bu saf durumlara dik durumlar bulunarak elde edilecek ρ_2 durumlarıyla optimal Helstrom matrisleri kurulabilir.

Markov süreçler ayrılabilir durumlara, Markov olmayan süreçler ise dolanık durumlara benzetilerek; gelişimleri tarif eden gönderimlerin pozitiflik dereceleri aracılığıyla Markov olmama derecesi belirlenmiştir (Chruściński ve Maniscalco 2014). (2.28) denklemindeki $V_{t,s}$ gönderiminde: $id_k \otimes V_{t,s}$ pozitifse Λ_t gönderimine k-pozitif gönderim, sürece ise k-bölünebilir süreç denir. $dim(\mathcal{H}_Q) = d$ olan açık kuantum sisteminin gelişiminde: $V_{t,s}$ gönderimi 1-pozitifse Λ_t kanalı pozitif bölünebilir, n-pozitifse ($n \geq d$) tamamen pozitif bölünebilir (ya da bölünebilir süreç) kanal denir. 0-pozitif süreçlerde ise, $V_{t,s}$ gönderiminin pozitif bir gönderim olmadığı anlaşılır. Ayrıca sürecin bölünebilir olduğu en yüksek k değerine sürecin bölünebilme derecesi denir. Bölünebilme derecesi k olan bir sürecin Markov olmama derecesi $d - k$ değerini alır. Markov süreçler d bölünebilir olduğu için, Markov olmama derecesi 0 iken, bu değer 0-bölünebilir süreçlerde en yüksek değerine olan d değerine ulaşır. Markov olmama derecesi d olan süreçlere ise hakiki Markov olmayan (*essentially non-Markovian*) süreç denir (Chruściński ve Maniscalco 2014).

Bölünebilirlik derecesi k olan bir süreç için de (3.8) denklemine benzer olarak genişletilmiş uzaydaki $\tilde{\Delta} \in S(\mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_Q)$ Helstrom matrisleriyle oluşturulan

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\Delta}, t) \equiv \frac{d}{dt} \|(id_k \otimes \Lambda_t) \tilde{\Delta}\|_1 \quad (3.11)$$

ifadesinin pozitif olması, ayırt edilebilirlik artışını nicelendirecektir. Tüm süreçteki ayırt edilebilirlik (3.11) denklemindeki $\tilde{\sigma}(\tilde{\Delta}, t)$ niceliğinin pozitif olduğu değerlerin (3.9) denkemindeki toplam değeri belirlenip, bu değer Helstrom matrisleri üzerinden (3.10) tanımındaki gibi optimize edilmesi aracılığıyla dinamiğin Markov olmaması nicelendirilebilir.

3.3 Master Denklemin Kanonik Formunda Bozunum Oranı Ölçüsü

Zamanda yerel (2.49) denklemindeki üreticinin çizgisel olmasından dolayı, master denklem (2.61) eşitliğindeki kanonik Lindblad benzeri forma dönüşebileceği 2.4.1 bölümünde gösterildi. Kanonik formun yazımının tek olması ve üniter dönüşümler altında $\gamma_k(t)$ bozunum oranının değişmeden kalması, incelemelerin etkileşme resminde ya da Heisenberg resminde yapılmasına da imkân sağlamasından dolayı önemlidir.

$\gamma_k(t)$ bozunum oranının pozitif olduğu durumlarda master denklemin bölünebilir gelişimleri, negatif olduğunda ise Markov olmayan süreçleri tarif ettiği 2.4.2 bölümünde anlatıldı. İlgilenilen zaman aralığında bozunum oranının negatifliği gelişimin Markov olmamasını nicelendirirmede kullanılır (Hall vd. 2014). Bu amaçla (2.61) denklemindeki toplamda yer alan her terim için

$$f_k(t) \equiv \max[-\gamma_k(t), 0] \quad (3.12)$$

fonksiyonuyla sürecin Markov olmamasına olan katkılar belirlenir. (3.12) fonksiyonu Markov süreçlerde bozunum oranının pozitif olmasından dolayı daima sıfır değerini

alırken, Markov olmayan süreçlerde pozitif değer alacaktır. Toplamdaki her k değerinden Markov olmama olan katkılar

$$f(t) = \sum_{k=1}^{d^2-1} f_k(t) \quad (3.13)$$

eşitliğiyle belirlenir. $f(t)$ fonksiyonunun değeri t anındaki Markov olmama miktarını gösterirken, ilgilenilen I zaman aralığındaki toplam Markov olmama miktarı

$$\mathcal{N}_\gamma \equiv \int_{t \in I} f(t) dt \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır (Hall vd. 2014). (3.14) denkleminin herhangi bir optimizasyon içermemesi uygulama açısından önemli bir avantajdır.

2.4.1 bölümünde değinildiği gibi, zaman konvolüsyonsuz izdüşüm işlemci yöntemiyle çoğu sürecin zamanda yerel bir master denklemlerle tarif edilebiliyor olması, (3.14) denklemindeki Markov olmama ölçüsüne yaygın kullanım alanı sağlamaktadır. Ayrıca Markov olmama özelliğinin doğrudan bozunum oranıyla ilişkilendirilmiş olması, süreçlerdeki hafıza özelliğinin fiziksel temelini anlaşılması için önemlidir. Bozunum oranının negatifliği hafızasız süreçlerde sistemin belirli özelliklerinin sönmüldüğünü, yitirildiğini; bu niceliğin pozitif olması ise hafıza etkilerinin bazı özelliklerin geri kazanımına, onarımına yol açabildiğini göstermektedir. OQS'lerin çevreleriyle etkileşmeye bağlı olarak, sahip oldukları koherenslik (*coherence*) özelliklerini kaybetmelerinden dolayı, $\gamma_k(t)$ sayısının negatif olması doğrudan bu özelliğin azalmasına da işaret edebilir. Bu nedenle hafıza etkilerinin, kaybedilen koherenslik özelliğinin geri kazanımına yol açabileceği düşünülmektedir.

(3.14) denklemindeki Markov olmama ölçüsünün matematiksel netliği ve fiziksel yorumunun çekiciliğinin yanı sıra bazı zorluklarına değinmek de gereklidir. Bu ölçü master denklemin kanonik formunun varlığını ve tekliliğini kullanırken, bu forma nasıl ulaşılabileceği ile ilgili bir bilgi vermez. 2.4 bölümünde de vurgulandığı gibi, uygulamada

esas problem, Hamilton işlemcisi bilinen bir etkileşmeyi tarif edecek fiziksel olarak tutarlı master denkleme ulaşmaktır.

3.4 Geometrik Ölçü

Bir sistemin gelişimini tasvir eden tüm kuantum kanallar konveks bir küme oluştururken, Markov süreçleri betimleyen kuantum kanallar kümesinin konvekslik özelliği yoktur. Örneğin açıkça bölünebilir gelişimleri tarif eden üniter kanalların

$$\Lambda_{(t,t_0)}[\rho_Q(t_0)] = \sum_i p_i U_Q(t, t_0) \rho_Q(t_0) U_Q^\dagger(t, t_0) \quad (3.15)$$

şeklindeki konveks karışımları, Markov olmayan süreçleri tasvir eden bölünemez bir kanal olabilir (Rivas vd. 2014). Kuantum kanalların konveks kümesi, bölünebilir ve bölünemez kanallar olarak ayrıştırıldığında her iki kümede konvekslik özelliğini kaybeder.

Verilen bir kuantum kanalın bölünebilir kanallar kümesine olan uzaklığı aracılığıyla kanalın Markov olmama miktarı belirlenebilir. Başlangıç zamanı $t_0 = 0$ seçilerek Λ_t kanalının, \mathfrak{M} bölünebilir kanallar kümesine uzaklığı, kanallar kümesi üzerinde tanımlı d uzaklık fonksiyonu kullanılarak

$$f_g(\Lambda_t) \equiv \min_{\Phi_t \in \mathfrak{M}} d[\Lambda_t, \Phi_t] \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır. Tüm I zaman aralığı için sürecin Markov olmama miktarı ise, geometrik ölçü denilen ve

$$\mathcal{N}_G \equiv \min_{t \in I} f_g(\Lambda_t) \quad (3.17)$$

biçiminde tanımlanan \mathcal{N}_G fonksiyonuyla belirlenebilir (Wolf vd. 2008). Geometrik ölçünün hesaplanmasında bölünebilir kanallar kümesinin konveks bir küme olmaması,

zaten yeterince güç iki tane optimizasyon içeren (3.17) denkleminin değerini belirlemeyi daha da güç hale getirmektedir. Bu güçlükleri aşabilmek için başka bazı yöntemler önerilse de (Wolf ve Perez-Garcia 2009), bu yöntemler de pratikte geometrik ölçünün uygulanmasındaki zorlukları ortadan kaldıramamaktadır.



4. BÖLÜNEBİLİR SÜREÇLERDE MONOTON ÖZELLİKLER: MARKOV OLMAMA TANIKLARI

Bu bölümde monoton davranış göstermesi için dinamiğin Markov süreç olmasının yeter koşul olduğu fakat gerek koşul olmadığı niceliklerle ilgilenilecektir. Bu niceliklerle her Markov süreçte ve bazı Markov olmayan süreçlerde sıfır olan, Markov olmama tanığı (*non-Markovianity witness*) denilen fonksiyonlar tanımlanacaktır. Fonksiyonların sıfırdan farklı olması Markov olmama özelliğini gösterirken, sıfır olması Markov süreç olmayı garantilememektedir. Bu nedenle Markov olmama tanıkları, Markov süreç olmanın gerek ve yeter koşul olduğu özellikler kullanılarak üçüncü bölümde tanıtılan Markov olmama ölçülerinden farklıdır. Ölçülerde sürecin Markov olmasının çift yönlü önermeler oluşturduğu özellikler kullanılırken, tanıklar tek yönlü önermelerle oluşturulur.

OQS Q ile çevresi E ile ve dinamikten etkilenmeyen yardımcı sistemde R ile gösterildiğinde üç parçalı giriş durumu ρ^{RQE} iken çıkış durumu da

$$\sigma^{RQE} = (id_R \otimes ad_{U_{QE}}) \rho^{RQE} \quad (4.1)$$

olur. Q sisteminin ρ^Q giriş durumunu $\Lambda(\rho^Q) = \sigma^Q$ şeklinde çıkış durumuna dönüştüren Λ kuantum kanalı

$$(id_R \otimes \Lambda) \rho^{RQ} = \sigma^{RQ} \quad (4.2)$$

özelliğini de sağlıyorsa Λ kanalına yerel kanal (*local channel*) denir. Her yerel kanalın Q sistemi üzerinde de bir kanal olacağı (4.2) eşitliğinin her iki yanının R sistemi üzerinden parçalı izi alınarak görülebilir. Fakat tersi her zaman doğru değildir, yani sistemin giriş durumunu çıkış durumuna dönüştüren yerel olmayan kanallar da vardır. Bu tür kanallara da genişletilemeyen kanallar (*nonextensible channels*) denir (Türkmen vd. 2017).

4.1 Veri İşleme Eşitsizliği

DPI; yerel kuantum kanalların korelasyonları artıramayacağını, korelasyonların monoton olarak azalması gerektiğini ifade eder (Nielsen ve Chuang 2010). Bu eşitsizlik açık kuantum sistemlerin indirgenmiş dinamiğinin hafıza özelliklerini belirlemede kullanılabilir. İndirgenmiş dinamik her zaman aralığında kuantum kanalla tasvir edilebildiği için, Markov süreçlerde DPI daima sağlanır. Eşitsizliğin sağlanmaması sürecin Markov olmama özelliğini göstermektedir. İncelenen korelasyonun türüne bağlı olarak farklı veri işleme eşitsizlikleri yazılacaktır.

Kuantum durumunun bilişim içeriğiyle, ölçüm sonuçlarının ‘sürpriz’ miktarıyla ve ölçümden önceki bilgisizlikle ilişkilendirilen; olasılıkların bir fonksiyoneli olan bilişim entropisi, bilişim aktarma ve depolama süreçlerini betimlemede kullanılan temel niceliktir. ρ^Q durumunun von Neumann entropisi olan

$$S(\rho^Q) = S(Q) = -\text{Tr}(\rho^Q \log \rho^Q) = -\sum_i p_i \log p_i \quad (4.3)$$

niceliği sistemin durumunun p_i özdeğerleri tarafından belirlendiği için, üniter dönüşümler altında değişmez.

Kuantum sistemler arasındaki bilişim ilişkilerini ya da korelasyonları tarif eden bağıntılar da yazılabilir. Bunlardan en önemlisi: ρ ve σ kuantum durumları için

$$S(\rho||\sigma) \equiv \text{Tr} \rho \log \rho - \text{Tr} \rho \log \sigma \quad (4.4)$$

ile tanımlanan kuantum bağıl entropi (*quantum relative entropy*) fonksiyoneldir (Umegaki 1962). (4.4) denkleminin sonlu değerler alabilmesi için durumların destekleri arasında $\text{supp}(\rho) \subseteq \text{supp}(\sigma)$ ilişkisinin olması gerekir. Bu ilişkinin olmadığı durumda $S(\rho||\sigma) = +\infty$ olacaktır. Bağıl entropi her zaman $S(\rho||\sigma) \geq 0$ olup, eşitlik için gerek ve yeter koşul $\rho = \sigma$ olmasıdır. Bu özelliğinden dolayı, matematiksel anlamda uzaklık

fonksiyonu olma koşullarından üçgen eşitsizliğini ve simetri özelliğini sağlamasa da, bağıl entropi durumlar arasında uzaklık benzeri bir fonksiyon olarak görülür.

Kuantum bağıl entropinin veri işleme eşitsizliğinin de temelini oluşturan özelliği, Λ tamamen pozitif gönderimleri için

$$S(\rho||\sigma) \geq S(\Lambda(\rho)||\Lambda(\sigma)) \quad (4.5)$$

biçiminde ifade edilen monoton davranışdır (Lindblad 1975, Uhlmann 1977, Lesniewski ve Ruskai 1999). Yakın zamanda yapılan bir çalışmada bağıl entropinin monotonluğu için Λ gönderiminin pozitif olmasının yeterli olduğu gösterilmiştir (Müller-Hermes ve Reeb 2017). (4.5) eşitsizliği veri işleme eşitsizliğinin genel formu olarak ele alınacaktır.

Markov süreçlerde açık kuantum sistemin gelişimi her zaman aralığında bir kuantum kanalla betimlenebildiği için bağıl entropinin monotonluğunun sonucu olarak

$$f(t) \equiv \frac{d}{dt} S(\Lambda_t(\rho_1^Q)||\Lambda_t(\rho_2^Q)) \leq 0, \quad \forall \rho_1^Q, \rho_2^Q \in S(\mathcal{H}_Q) \quad (4.6)$$

ifadesi yazılabilir (Laine vd. 2010). Bu ifade kullanılarak

$$W_{RE} = \max\{0, f(t)\} \quad (4.7)$$

şeklinde Markov olmama tanığı oluşturulabilir. Dinamik boyunca $W_{RE} > 0$ olan bir zamanın bulunması sürecin Markov olmamasını göstermektedir.

(4.5) eşitsizliğindeki monotonluk özelliği von Neumann entropisi kullanılarak ifade edilebildiği gibi daha genel Rényi ve Tsallis entropileri aracılığıyla da yazılabilir (Furuichi vd. 2004, Mosonyi ve Hiai 2011) ve bu eşitsizlikler kullanılarak da benzer Markov olmama tanıkları kurulabilir (Chruściński ve Kossakowski 2012).

4.1.1 Karşılıklı bilişim

$S_\rho(R:Q)$ şeklinde gösterilen, ρ^{RQ} durumuyla hiç korelasyon içermeyen $\rho^R \otimes \rho^Q$ çarpım durumunun

$$S_\rho(R:Q) = S(\rho^{RQ} || \rho^R \otimes \rho^Q) = S(\rho^R) + S(\rho^Q) - S(\rho^{RQ}) \quad (4.8)$$

denklemindeki bağıl entropisi olarak tanımlanan, kuantum karşılıklı bilişim (*quantum mutual information*): R ve Q sistemleri arasındaki toplam korelasyonu nicelendirir. Q sistemi üzerine etkiyen yerel bir kanalın olması durumunda (4.5) denklemindeki monotonluk özelliği ve (4.8) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} S(\rho^{RQ} || \rho^R \otimes \rho^Q) &\geq S((id_R \otimes \Lambda) \rho^{RQ} || (id_R \otimes \Lambda)(\rho^R \otimes \rho^Q)) \\ S_\rho(R:Q) &\geq S_\sigma(R:Q) \end{aligned} \quad (4.9)$$

eşitsizlikleri yazılır. OQS'yle yardımcı sistem arasındaki toplam korelasyon miktarının; sistemin üzerine yerel kanal etkimesi durumunda artamayacağını, monoton olarak azaldığının belirten (4.9) ifadesine karşılıklı bilişim için DPI denir.

Açık sistem dinamiğinde kanalların zaman bağımlılıklarını dikkate almak için, ρ^{RQ} giriş durumu olmak üzere herhangi bir andaki karşılıklı bilişim

$$S_t(R:Q) \equiv S((id_R \otimes \Lambda_t) \rho^{RQ} || (id_R \otimes \Lambda_t)(\rho^R \otimes \rho^Q)) \quad (4.10)$$

olsun. Λ_t kuantum kanalının CP olduğu durumlarda veri işleme eşitsizliğinin sonucu olarak

$$f(t) = \frac{d}{dt} S_t(R:Q) \leq 0 \quad (4.11)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağlanmadığı $f(t) > 0$ durumlarında süreç Markov olmama özelliği gösterir (Luo vd. 2012).

(4.9) eşitsizliğinde Λ_t gönderiminin CP'liğinin garanti edebilmek için, $id_R \otimes \Lambda_t$ gönderimi pozitif olmalıdır. Bunun için $\dim(\mathcal{H}_R) \geq \dim(\mathcal{H}_Q)$ olması ve tüm giriş durumlarının hesaba katılması gerekir. Kanalin bölünebilme özelliğini giriş durumlarına bağımlı olmaktan kurtarabilmek için, giriş durumu $\rho^{RQ} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ olacak şekilde indirgenmişlerinin rankı boyuta eşit olan maksimum korelasyon içeren saf durum seçilebilir. Bu durumda Choi-Jamiołkowski izomorfizmi gereği Λ_t gönderiminin CP'liği için $(id_R \otimes \Lambda_t)(|\alpha\rangle\langle\alpha|)$ işlemcisinin pozitif olması gerekecektir. (4.10) bağıntısında $\rho^{RQ} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ seçilirse $f(t) > 0$ olan herhangi bir zamanın olması, dinamik boyunca kuantum kanalla betimlenemeyen zaman aralıkları olduğunu belirtir. Tüm I zaman aralığında Markov olmama özelliği ise

$$W_{MI} \equiv \int_{t \in I, f(t) > 0} f(t) dt \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanan, karşılıklı bilişim Markov olmama tanığı aracılığıyla belirlenir (Luo vd. 2012). Bu tanığa, ilk ortaya koyanlardan dolayı *LFS* tanığı da (Lu, Fu, Song) denir.

Karşılıklı bilişim toplam korelasyonları nicelendirdiği için bu tanıkla algılanan Markov olmayan süreçlerde, yardımcı sistemle OQS arasındaki korelasyonların arttığı zamanların olduğu anlaşılır. Bu korelasyonlar klasik ve/veya kuantum nitelikli olabileceğinden, karşılıklı bilişim tanığıyla korelasyonların türünü ayırt etmek mümkün değildir. Giriş durumunun indirgenmiş dinamiğin kanalla betimlenmesine imkân sağladığı durumda, DPI gereği olarak çıkış durumundaki korelasyonların giriş durumundakinden fazla olması mümkün değildir. Markov olmama özelliği çevrenin hafıza etkilerine bağlı olarak dinamiğin ara aşamalarında, başlangıçta var olan değerini aşmayacak şekilde, korelasyonların tekrar oluşabileceğini ifade etmektedir.

(4.9) eşitsizliğinin her iki yanından dinamik boyunca değişmeyen $S_\rho(R) = S_\sigma(R)$ yardımcı sistemin entropisi kaldırılırsa, koherent bilişim denilen

$$I_c(R:Q) = S(R:Q) - S(R) \quad (4.13)$$

ifadesi elde edilir (Schumacher ve Nielsen 1996). Koherent bilişim, karşılıklı bilişimden farklı olarak her zaman pozitif değerler almaz. ρ^{RQ} saf dolanık durum olduğunda koherent bilişimin pozitif değerler alacağı açıkça görülmektedir. Bu nicelik R ve Q sistemleri arasındaki dolanıklığın bilişim ölçüsüdür. (4.9) denklemi gereği yazılan

$$I_{c\rho}(R:Q) \geq I_{c\sigma}(R:Q) \quad (4.14)$$

eşitsizliğine de koherent bilişim için DPI denir. Yukarıda anlatılan, karşılıklı bilişim için DPI'nin ihlalini esas alan Markov olmama tanıkları kurma süreci koherent bilişim için de geçerlidir. Bu durumda DPI'nin ihlal edildiği Markov olmayan süreçlerde, açık kuantum sistemiyle yardımcı sistem arasındaki kuantum dolanıklığın arttığı en az bir zaman aralığının olduğu anlaşılır.

4.2 Veri İşleme Eşitsizliği ve Markov Durumlar

Üç parçalı sistemlerde parçalar arasındaki bilişim ilişkisiyle ilgili temel bir bağıntı da kuantum koşullu karşılıklı bilişim (*conditional quantum mutual information*) niceliğidir. Sistemin bir parçasının diğerleriyle olan korelasyon miktarının, bileşik sistemin bir parçası hesaba katılmadığında artamayacağını ifade etmesinden dolayı her zaman negatif olmayan değerler alan, güçlü alt toplanabilirlik (*strong subadditivity*) bağıntısı olarak da bilinen, ρ^{RQE} durumunun Q koşullu karşılık bilişimi:

$$\begin{aligned} S_\rho(R: E|Q) &= S_\rho(R: QE) - S_\rho(R: Q) \\ &= S_\rho(RQ) + S_\rho(QE) - S_\rho(RQE) - S_\rho(Q) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır (Lieb ve Ruakai 1973, Ruskai 2002). (4.15) denklemi B sisteminin bilgisine sahip olduğunda A sistemiyle ilgili bilgisizliği tarif eden $S(A|B) = S(AB) - S(B)$ koşullu kuantum entropi (*conditional quantum entropy*) fonksiyonelleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} S_\rho(R: E|Q) &= S_\rho(R|Q) + S_\rho(E|Q) - S_\rho(RE|Q) \\ &= S_\rho(R|Q) - S_\rho(R|QE) = S_\rho(E|Q) - S_\rho(E|RQ) \end{aligned} \quad (4.16)$$

olarak da yazılabilir. (4.16) bağıntısına koşullu entropinin monotonluğu da denir.

$S(R: E|Q) = 0$ koşulunu sağlayan ρ^{RQE} durumuna Q koşullu **Markov durumu** denir. Bu durumların DPI açısından önemli özelliği: giriş Markov durumu olduğunda ρ^Q OQS'ini çıkış durumuna dönüştüren bir yerel kanalın her zaman var olmasıdır (Bakınız 5.1, 5.2 bölümleri ve Türkmen vd. 2016).

OQS'lerde (4.1) denkleminde gösterildiği gibi ρ^{RQE} ve ρ^{QE} durumları üniter olarak gelişir. Üniter gelişimler entropiyi değiştirmeyeceği için

$$S_\rho(RQE) = S_\sigma(RQE), \quad S_\rho(QE) = S_\sigma(QE) \quad (4.17)$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler çıkış σ^{RQE} durumu için yazılan koşullu karşılıklı bilişim ifadesinde kullanılırsa

$$S_\sigma(R: E|Q) = S_\sigma(R|Q) - S_\rho(R|QE) \geq 0 \quad (4.18)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç sistem ve çevresinin başlangıç durumunun bir Markov durumun indirgenmiş olduğu her açık sistem dinamiğinde, koşullu entropiler arasında

$$S_\sigma(R|Q) \geq S_\rho(R|QE) \quad (4.19)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu söyler (Türkmen vd. 2017).

OQS dinamiğinde karşılıklı bilişimin değişimiyle koşullu karşılıklı bilişimin değişimi arasındaki ilişkiyi kurmaya yarayan aşağıdaki teorem bu kesimdeki önemli sonuçlardandır.

Teorem 4.1 (Türkmen vd. 2017)

Sistem ve çevresinin her U_{QE} bileşik üniter gelişiminde; R ve Q sistemleri arasındaki karşılıklı bilişimin azalması (artması) için gerek ve yeter koşul Q koşullu karşılıklı bilişimin artmasıdır (azalmasıdır). Karşılıklı bilişimin korunması için de gerek ve yeter koşul koşullu karşılıklı bilişimin korunmasıdır.

İspat: Çıkış ve giriş durumlarının koşullu karşılık bilişimleri arasındaki fark, (4.17) eşitlikleri kullanılarak

$$S_{\sigma}(R: E|Q) - S_{\rho}(R: E|Q) = S_{\sigma}(RQ) - S_{\sigma}(Q) + S_{\rho}(Q) - S_{\rho}(RQ) \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir. $S_{\rho}(R) = S_{\sigma}(R)$ olduğundan, ifadenin sağ tarafına $S_{\rho}(R)$ eklenip, $S_{\sigma}(R)$ çıkarılarak

$$S_{\sigma}(R: E|Q) - S_{\rho}(R: E|Q) = S_{\rho}(R: Q) - S_{\sigma}(R: Q) \quad (4.21)$$

sonucu elde edilir. ■

Koherent bilişim için de

$$S_{\sigma}(R: E|Q) - S_{\rho}(R: E|Q) = I_{c\rho}(R: Q) - I_{c\sigma}(R: Q) \quad (4.22)$$

şeklinde yazılan (4.21) denkleminde, açık sistem dinamiğinde $S(R: E|Q) + S(R: Q)$ niceliğinin değişmeden kaldığı da görülmektedir.

Üç parçalı saf giriş durumlarında $S_\rho(RQE) = 0$ olurken, Schmidt ayrışımı gereği indirgenmiş durumların entropileri $S_\rho(RQ) = S_\rho(E)$, $S_\rho(QE) = S_\rho(R)$ ve $S_\rho(Q) = S_\rho(RE)$ olur. Bu eşitlikler $S_\rho(R:E|Q)$ ifadesinin (4.15) denklemindeki tanımında kullanıldığında, saf durumlarda koşullu karşılıklı bilişim

$$S_\rho(R:E|Q) = S_\rho(R:E) \quad (4.23)$$

eşitliğinde görüldüğü gibi, karşılıklı bilişime eşit olur. Teorem 4.1' in gereği olarak da

$$S_\sigma(R:E) - S_\rho(R:E) = S_\rho(R:Q) - S_\sigma(R:Q) \quad (4.24)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç R ve Q sistemleri arasındaki karşılıklı bilişimin artmasının (kesin azalmasının) ancak ve ancak R ve E sistemleri arasındaki karşılıklı bilişimin azalmasıyla (kesin artmasıyla) mümkün olabileceğini belirtir. Yani R ve Q arasında DPI sağlanıyorsa (sağlanmıyorsa), R ve E arasında sağlanmaz (sağlanır) (Türkmen vd. 2017).

Giriş Markov durumu olduğunda $S_\rho(R:E|Q) = 0$ olması ve çıkış koşullu karşılıklı bilişiminin pozitifliğinin sonucu olarak

$$S_\rho(R:Q) - S_\sigma(R:Q) \geq 0 \quad (4.25)$$

olduğu, yani DPI'nin daima sağlandığı ve eşitliğin sadece çıkışın da Markov durum olmasıyla elde edilebileceği görülmektedir. Ayrıca giriş Markov durumu değilken çıkışın Markov durum olması halinde DPI'nin sağlanmayacağı da (4.21) denkleminin diğer bir sonucudur.

DPI'nin sağlanması için girişin Markov durum olmasının sadece yeter koşul değil gereklilik de olduğu iddia edilmiştir (Buscemi 2014). Bu iddianın doğru olmadığı, giriş Markov durum değilken de DPI'nin sağlanabildiği karşı örneklerle gösterilmiştir (Türkmen vd. 2017).

Süreçlerin hafıza özelliğini belirlemede de Markov durumların kısıtlı da olsa işlevleri vardır. Giriş Markov durumuken dinamik boyunca Markov durum olma özelliği korunuyorsa, indirgenmiş dinamik her zaman aralığında kuantum kanallarla tasvir edilebileceği için gelişim Markov süreçtir. Giriş Markov durum değilken zamanla gelişimin herhangi bir anında Markov durum oluşursa, DPI'nin ihlal edilmesine bağlı olarak dinamiğin hafıza etkisi gösterdiği anlaşılır.

Saf üç parçalı durumlarda tek parçalı alt sistemlerin entropileri,

$$2S(R) = S(R:Q) + S(R:E)$$

$$2S(Q) = S(R:Q) + S(Q:E) \quad (4.26)$$

$$2S(E) = S(R:E) + S(Q:E)$$

eşitliklerinde görüldüğü gibi ilgili parçanın diğer parçalarla olan karşılıklı bilişimlerinin aritmetik ortalamasına eşit olur. R sisteminin entropisi dinamik boyunca değişmeyeceği için $S(R:Q) + S(R:E)$ karşılıklı bilişimlerin ve $I_{c\rho}(R:Q) + I_{c\rho}(R:E) = 0$ olan koherent bilişimlerin toplamı, üç parçalı saf durumların açık sistem dinamiğinde değişmez niceliklerdir (Türkmen vd. 2017).

4.3 İz Uzaklığı Artışı

Hermitsel işlemcilerin iz normunun çizgisel, pozitif ve iz koruyan gönderimler altında monoton olarak azaldığı ve bu özelliğin ayırt edilebilirlikle ilişkisi ikinci bölümde gösterildi (Bakınız bölüm 2.3.2, Teorem 2.1). Durumlarla ilgili önsel bir bilginin olmadığı hallerde ayırt edilebilirlikte kullanılan Helstrom matrisinin eş olasılıklı $\Delta = \frac{1}{2}(\rho_1^Q - \rho_2^Q)$ olduğu ve bu matrisin iz normunun

$$d_1(\rho_1^Q, \rho_2^Q) = \|\Delta\|_1 = \frac{1}{2} \|\rho_1^Q - \rho_2^Q\|_1; \quad \rho_1^Q, \rho_2^Q \in S(\mathcal{H}_Q) \quad (4.27)$$

eşitliğindeki gibi durumlar arasındaki iz uzaklığı olduğuna da 2.3.2 bölümünde değinildi.

OQS'lerin iz uzaklığının zamanla değişimi

$$\begin{aligned}\eta(\rho_1^Q, \rho_2^Q, t) &= \frac{d}{dt} \left[d_1(\rho_1^Q(t), \rho_2^Q(t)) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{d_1(\rho_1^Q(t + \epsilon), \rho_2^Q(t + \epsilon)) - d_1(\rho_1^Q(t), \rho_2^Q(t))}{\epsilon}\end{aligned}\quad (4.28)$$

fonksiyonuyla ifade edilsin. Bu fonksiyonun değeri (2.44) denklemindeki sistemle çevresi arasındaki bilişim akışını nicelendiren fonksiyonla aynıdır. Markov süreçlerde, bölünebilirliğin gereği olarak, tüm giriş durumları için $\eta(\rho_1^Q, \rho_2^Q, t) \leq 0$ olur (Breuer vd. 2009, Laine vd. 2010). Dinamik boyunca fonksiyonun $\eta(\rho_1^Q, \rho_2^Q, t) > 0$ olduğu bir zaman varsa süreç hafıza özelliği göstermektedir. Bir I zaman aralığının tamamında Markov olmama özelliğini tespit edebilmek için de

$$W_{BLP} = \max_{\rho_1^Q, \rho_2^Q} \int_{t \in I} dt \eta(\rho_1^Q, \rho_2^Q, t), \quad \forall \eta(\rho_1^Q, \rho_2^Q, t) > 0 \quad (4.29)$$

şeklinde *BLP* Markov olmama tanığı oluşturulur (Breuer vd.2009). Burada *BLP* hafızasız süreçlerde iz normun monotonluk özelliğinin bilişimsel anlamını ortaya koyan yazarları göstermektedir (Breuer, Laine ve Piilo). *BLP* tanığının kullanımındaki zorluk, tüm giriş durumları üzerinden optimizasyona ihtiyaç duyulmasıdır. Buna yönelik olarak, W_{BLP} değerini maksimum yapan giriş durumlarının, durumlar kümesinin sınırında yer alan birbirine dik durumlardan seçilmesi gerektiği gösterilmiştir (Wißmann vd. 2012).

Dinamik boyunca iz uzaklığının monoton olarak azalması, durumların ayırt edilebilirliklerinin azalması anlamına gelir. Ayırt edilebilirlik azalışı ise durumların bilişiminin çevreye akmasının sonucudur. Hafızalı çevrenin olduğu Markov olmayan süreçlerde ise, çevreye akmış olan sistemin bilgisi çevrede hızlıca silinmediği için belli zaman aralıklarında, çevredeki sistemle ilgili bilgi geri sisteme akmaktadır. Meydana

gelen geri bilişim akışı durumların ayırt edilebilirliklerinin artışına sebep olur (Bakınız bölüm 2.3.2). Ayırt edilebilirliğin bilişim kuramı kapsamındaki anlamının daha belirgin olduğu, hafıza etkisine fiziksel yorumu açık bir açıklama sunduğu düşünülerek; çok sayıda sistemin Markov olmama özelliğinin hem kuramsal hem de deneysel olarak incelenmesinde *BLP* tanığı kullanılmıştır (Liu vd. 2011, Breuer vd. 2016, De Vega vd. 2017).

Kuantum durumlarla ilgili önsel bilgiler varsa, Helstrom matrisi (4.27) denklemindeki gibi eş olasılıklı durumlarla değil $\Delta = p_1\rho_1^Q - p_2\rho_2^Q$ şeklinde p_1 ve p_2 olasılıklarını ($p_1 + p_2 = 1$) içerecek şekilde oluşturulur. Durumların ayırt edilebilme olasılığı (2.42) denkleminde gösterildiği gibi yine Helstrom matrisinin iz normunun artmasıyla mümkün olur. Markov süreçlerde bu norm monoton olarak azaldığı için ayırt edilebilirlik zamanla sürekli azalmaktadır.

BLP tanığı genel bir Helstrom matrisi için yazıldığında,

$$f_{BLP}(t) = \frac{d}{dt} \|\Lambda_t \Delta\|_1 \quad (4.30)$$

olur. Eş olasılıklı durumda olduğu gibi tüm Markov süreçlerde $f_{BLP}(t) \leq 0$ olurken, gelişim boyunca $f_{BLP}(t) > 0$ olduğu bir zamanın olması sürecin hafızalı olduğunu gösterir. Sürecin gerçekleştiği I zaman aralığının tamamında hafıza özelliğini belirleyebilmek için (4.29) denklemine benzer olarak genelleştirilmiş *BLP* tanığı denilen

$$W_{BLP} = \max_{p_1, p_2, \rho_1^Q, \rho_2^Q} \int_{t \in I} dt f_{BLP}(t), \quad \forall f_{BLP}(t) > 0 \quad (4.31)$$

ifadesi oluşturulur (Wißmann vd. 2015). Bu ifadeyi maksimum yapacak giriş durumları (4.27) denkleminde olduğu gibi

$$\|\Delta\|_1 = \|p_1\rho_1^Q - p_2\rho_2^Q\|_1 = 1 \quad (4.32)$$

koşulunu sağlayan en ayırt edilebilir durumlar olmalıdır. Genelleştirilmiş *BLP* tanığında kullanılacak giriş durumları birbirine dik işlemcilerle oluşturulmuş, iz normu bir olan tüm Hermitsel işlemciler arasından belirlenir. Bu durumların belirlenmesine yönelik olarak, durumlar uzayının iç bölgesindeki sabit bir durumla, bu durumu çevreleyen durumlar arasındaki iz uzaklığı aracılığıyla optimal durumları belirlemeyi amaçlayan alternatif bir yöntem de geliştirilmiştir (Liu vd. 2014).

Genelleştirilmiş *BLP* tanığının pozitif olduğu bazı durumlarda (4.27) denklemindeki iz uzaklığıyla oluşturulan tanık sıfır değerini alabilmektedir. Yani (4.27) denklemindeki tanığın algılamadığı fakat (4.31) ifadesindeki tanığın algılayabildiği durumlar vardır. Bunun sebebi (4.27) ifadesindeki tanığın gönderimin ünital olmayan kısmından kaynaklanan hafıza etkilerine duyarsız olmasıdır (Liu vd. 2013). Bu sonucu daha açık görebilmek için, giriş ve çıkış sistemlerinin boyutu d olan; Λ_t kuantum kanalının $G_0 = I/\sqrt{d}$ hariç diğerleri izsiz ($Tr G_k = 0$), Hermitsel ($G_k = G_k^\dagger$) ve Hilbert-Schmidt iç çarpımına göre dik ($Tr(G_k^\dagger G_l) = \delta_{kl}$) bir $\{G_k; k = 0, 1, 2 \dots d^2 - 1\}$ bazında yazıldığında, M_{Λ_t} ile gösterilecek olan kanalın matris temsili dikkate alınsın. Genelleştirilmiş Gell-Mann matrisleri de denilen bu bazda elemanları $(M_{\Lambda_t})_{kl} = Tr(G_k^\dagger \Lambda_t(G_l))$ olan bu matris

$$M_{\Lambda_t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_t & \Delta_t \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

formunda yazılır. Burada q_t $d^2 - 1$ bileşenli kolon vektörünü Δ_t ise $(d^2 - 1) \times (d^2 - 1)$ tipinde gerçel bir matrisi göstermektedir. Kanalın ünital olması için gerek ve yeter koşul $q_t = 0$ olmasıdır (Caruso vd. 2014).

Bu kanalın, genelleştirilmiş Bloch temsili

$$\rho = \frac{1}{d} \left(\mathbb{1}_d + \sum_{i=1}^{d^2-1} r_i G_i \right) \quad (4.34)$$

olan bir kuantum duruma etkisi, bileşenleri r_i' ler olan ve r şeklinde gösterilecek Bloch vektörünü r' ile gösterilecek başka bir Bloch vektörüne

$$r' = \Delta_t r + q_t \quad (4.35)$$

biçiminde bir afın dönüşümle dönüştürmektir. (4.34) denklemindeki giriş durumuyla

$$\rho' = \frac{1}{d} \left(\mathbb{1}_d + \sum_{i=1}^{d^2-1} r_i' G_i \right) \quad (4.36)$$

şeklindeki çıkış durumu arasındaki iz uzaklığı sadece $\Delta_t(r' - r)$ niceliğine bağlı olup, kanalın ünital olmayan kısmını temsil eden q_t ifadesine bağlı değildir. (4.29) denklemindeki durumlar arasındaki iz uzaklığının değişiminde ünital olmayan kanal etkileri kaybolur. Bu nedenle genelleştirilmiş *BLP* tanığı (4.29) denklemindeki tanıktan daha duyarlıdır.

OQS'in başlangıç durumu ρ^Q olan, kuantum kanalların tek parametreliliği yarımgrup özelliğine sahip olduğu Markov süreçlerinde kanalların bölünebilmesinin sonucu olarak

$$\rho^Q(t + \Delta t) = \Lambda_{(t+\Delta t)} \rho^Q = \Lambda_t \Lambda_{\Delta t} \rho^Q = \Lambda_t \rho^Q(\Delta t) \quad \text{ve} \quad \rho^Q(t) = \Lambda_t \rho^Q$$

eşitlikleri yazılabilir. Sistemin Δt zaman aralıklı durumları arasındaki iz uzaklığı

$$d_1[\rho^Q(t + \Delta t), \rho^Q(t)] = d_1[\Lambda_t \rho^Q(\Delta t), \Lambda_t \rho^Q] \leq d_1[\rho^Q(\Delta t), \rho^Q] \quad (4.37)$$

eşitsizliğinde görüldüğü gibi zamanla azalmaktadır. Yarımgrup özelliğine sahip kanallarda; bir durumun belirli zaman aralığındaki ayırt edilebilirliği azalmakta, yani durumlar arasındaki benzerlik gelişim boyunca artmaktadır.

4.4 Özuygunluk Azalışı

Kuantum durumların birbirine yakınlığının ölçüsü olan özuygunluk (*fidelity*) fonksiyonu, saf $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ durumları için

$$F(\psi_1, \psi_2) \equiv |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 \quad (4.38)$$

şeklinde durumlar arasındaki geçiş olasılığıdır. Saf olmayan ρ_1 ve ρ_2 durumlarının $\rho_1 = \text{Tr}_R |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ ve $\rho_2 = \text{Tr}_R |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$ olmak üzere, R yardımcı sistemiyle saflaştırılmış halleri $|\varphi_1\rangle$ ve $|\varphi_2\rangle$ olduğunda, bu durumlar için özuygunluk

$$F(\rho_1, \rho_2) \equiv \max_{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle} |\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \quad (4.39)$$

olur. (4.39) denkleminin sonucunun Uhlmann özuygunluğu da denilen

$$F(\rho_1, \rho_2) = \|\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}\|_1^2 \quad (4.40)$$

bağıntısına eşit olduğu gösterilmiştir (Uhlmann 1976, Jozsa 1994). (4.40) denkleminde Uhlmann özuygunluğunun $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$ olan simetrik bir nicelik olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca

$$0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1 \quad (4.41)$$

aralığında değerler alan bu fonksiyonun üst sınırı, sadece $\rho_1 = \rho_2$ olduğunda alt sınırı ise ρ_1 ve ρ_2 durumları birbirine dik olduğunda sağlanır. Bu özelliğinden dolayı matematiksel anlamda uzaklık fonksiyonu değildir.

Özuygunluk fonksiyonunun süreçlerin hafıza etkisini belirlemede kullanılmasını sağlayan özelliği: Λ kuantum kanalları uygulandığında

$$F(\Lambda(\rho_1), \Lambda(\rho_2)) \geq F(\rho_1, \rho_2) \quad (4.42)$$

biçiminde fonksiyonun monoton olarak artmasıdır. Eşitlik için gerek ve yeter koşul ise kanalın üniter olmasıdır (Molnar 2001).

OQS'lerin hafızasız gelişimlerinde, her ρ_1^Q ve ρ_2^Q giriş durumları için özuygunluk niceliğinin zamanla değişiminin daima pozitif olur. Bu nedenle

$$g_F(t) \equiv -\frac{d}{dt}F(\Lambda_t(\rho_1^Q), \Lambda_t(\rho_2^Q)) \quad (4.43)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon tüm Markov süreçlerde pozitif olmayan değerler alır. Zamanla gelişim içinde $g_F(t) > 0$ olan bir zaman varsa dinamiğe Markov olmayan süreç denir (Rivas vd. 2014). Tüm dinamik boyunca hafıza etkilerini tespiti, dinamiğin gerçekleştiği I zaman aralığında

$$W_F \equiv \min_{\rho_1^Q, \rho_2^Q} \int_I dt g_F(t) \quad , \quad \forall g_F(t) > 0 \quad (4.44)$$

olarak tanımlanan özuygunluk tanığının pozitif olmasıyla tespit edilebilir.

Zamanla gelişimin homojen bir master denklemlerle tarif edildiği, gönderimlerin tek parametreliliğe sahip olduğu Markov süreçlerindeki bölünebilir kanallar

$$\Lambda_{t+\tau} = \Lambda_t \circ \Lambda_\tau \quad (4.45)$$

şeklinde yazılır (Bakınız bölüm 2.4.2). Açık sistemin $\rho^Q(0)$ başlangıç durumuyla τ zaman sonrasındaki $\rho^Q(\tau) = \Lambda_\tau[\rho^Q(0)]$ durumları için, özuygunluğun monotonluk özelliğinin gereği olarak,

$$F[\rho^Q(\tau), \rho^Q(0)] \leq F[\Lambda_t(\rho^Q(\tau)), \Lambda_t(\rho^Q(0))] \leq F[\rho^Q(t+\tau), \rho^Q(t)] \quad (4.46)$$

eşitsizliği yazılır (Rajagopal vd. 2010). Bu eşitsizlik (4.37) ifadesinde olduğu gibi, homojen Markov süreçlerde gelişim boyunca sistemin belirli zaman aralığındaki farklı durumları arasındaki özuygunluğun arttığını, yani durumların yakınlaştığını söyler.

4.5 Fisher Bilişim Artışı

Gerçek bir θ parametresine bağlı ρ_θ durumundan,¹¹ parametreyle ilgili ne kadar bilgi elde edilebilir ya da durum parametreye ne kadar bağlıdır soruları, θ parametresinin kuantum Fisher bilişimiyle ilgilidir (Holevo 1982, Wiseman ve Milburn 2010). Sistem ρ_θ durumundayken bir $\{M_x\}$ POVM kümesinin işlemcileriyle $p(x|\theta) = \text{Tr}(M_x \rho_\theta)$ şeklinde olasılıklar elde edilmiş olsun. Ölçüm sonuçlarıyla ilgili olasılık dağılımının Fisher bilişimi

$$\mathcal{F}[p(x|\theta)] \equiv \int \frac{1}{p(x|\theta)} \left[\frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta} \right]^2 dx \quad (4.47)$$

şeklinde tanımlanır. ρ_θ durumunun Fisher bilişimi ise tüm POVM'lar üzerinden (4.47) denklemi optimize edilerek

$$\mathcal{F}(\rho_\theta) \equiv \max_{M_x} \mathcal{F}[p(x|\theta)] \quad (4.48)$$

denklemlerle belirlenir. Fisher bilişimin tanımlanmasında diğer bir yöntem de, simetrik logaritmik türev (*symmetric logarithmic derivative*) denilen,

$$\frac{d\rho_\theta}{d\theta} \equiv \frac{1}{2} \{\rho_\theta, L_\theta\} \quad (4.49)$$

¹¹ Sistemin durumu birde çok parametreye de bağlı olabilir. Burada sadelik için tek bir parametreyle ilgilenilmiştir.

denklemini sağlayan, L_θ ile gösterilen işlemciyi kullanmaktır. Bu işlemci kullanılarak Fisher bilişim

$$\mathcal{F}(\rho_\theta) \equiv \text{Tr}(L_\theta^2 \rho_\theta) \quad (4.50)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

(4.40) denklemindeki özuygunluk aracılığıyla kuantum durumlar uzayında

$$d_B(\rho_1, \rho_2) \equiv \sqrt{2[1 - F(\rho_1, \rho_2)]} \quad (4.51)$$

şeklinde tanımlanan, Bures uzaklığı denilen monoton bir uzaklık fonksiyonu da vardır. Bu fonksiyonla Fisher bilişim arasında

$$\mathcal{F}(\rho_\theta) \equiv 4 \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[\frac{d_B(\rho_\theta, \rho_{\theta+\Delta\theta})}{\Delta\theta} \right]^2 \quad (4.52)$$

ilişkisi yazılabilir (Braunstein ve Caves 1994). Denklem (4.52) tanımından da anlaşıldığı gibi Fisher bilişim, parametrenin değişimine durumun ne kadar duyarlı olduğunu gösterir. Özuygunluğun (4.42) eşitsizliğiyle gösterilen monotonluk özelliği gereği Fisher bilişim de Λ tamamen pozitif gönderimleri etkisinde

$$\mathcal{F}[\Lambda(\rho_\theta)] \leq \mathcal{F}(\rho_\theta) \quad (4.53)$$

biçiminde monoton olarak azalır. Bu özelliğin sonucu olarak OQS'in zamanla gelişim sürecindeki Fisher bilişim akışı

$$f_{QFI}(t) \equiv \frac{\partial \rho_\theta^Q(t)}{\partial t} \quad (4.54)$$

şeklinde olur. (4.54) fonksiyonu tüm Markov süreçlerde $f_{QFI}(t) \leq 0$ olurken, $f_{QFI}(t) > 0$ olan bir zamanın olması sürecin Markov olmama özelliğini göstermektedir (Lu vd. 2010).

OQS'i tarif eden master denklem (2.61) denkleminde olduğu gibi kanonik formda

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\theta}^Q(t)}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} [H_Q(t), \rho_{\theta}^Q(t)] \\ &+ \sum_{k=1}^{d^2-1} \gamma_k(t) \left[F_k(t) \rho_{\theta}^Q(t) F_k^{\dagger}(t) - \frac{1}{2} \{ F_k^{\dagger}(t) F_k(t), \rho_{\theta}^Q(t) \} \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

şeklinde yazıldığında, toplamda yer alan her üniter olmayan gelişimin Fisher bilişim akışının

$$\mathcal{J}_k(t) \equiv -Tr \left\{ \rho_{\theta}^Q(t) [L(\rho_{\theta}^Q, t), F_k(t)]^{\dagger} [L(\rho_{\theta}^Q, t), F_k(t)] \right\} \leq 0 \quad (4.56)$$

niceliği kullanılarak; $\gamma_k(t)\mathcal{J}_k(t)$ şeklinde yazılabileceği ve süreçteki toplam bilişim akışının ise

$$f_{QFI}(t) = \sum_k \gamma_k(t) \mathcal{J}_k(t) \quad (4.57)$$

bağıntısıyla toplanabileceği gösterilmiştir (Lu vd. 2010). (4.56) fonksiyonu iki pozitif işlemcinin izinin negatifi olduğundan pozitif olamaz. Bu nedenle açık kuantum sistem dinamiğinde geri Fisher bilişim akışı olabilmesi yani $f_{QFI}(t) > 0$ olması için mutlaka $\gamma_k(t)$ bozunum oranının en az bir negatif değerinin olması gerekir. (4.57) denklemi her bir yitirimli sürecin bilişim akışına katkısını dikkate alıyor olmasından dolayı önemlidir. Fisher bilişimin doğrudan bozunum oranıyla ilişkilendirilmesi açık kuantum sistemelerin yitirimli süreçlerinin bilişim kuramı kapsamında anlamlandırılmasına olanak sağlamaktadır. Bu kapsamda Markov süreçlerin hafızasızlığı, parametreyle ilgili

bilişimin süreç boyunca kaybedilmesidir. Hafıza etkisi ise parametre bilgisinin çevrede korunabildiği ve bu bilginin gelişim sürecinde tekrar kazanıldığı anlamına gelir.

Giriş durumu $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ hesaplama bazlarında yazılmış

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle; \theta \in [0, \pi), \phi \in [0, 2\pi) \quad (4.58)$$

şeklindeki saf kübit durumları olan bir sistemin, bağlı olduğu θ ve ϕ parametreleriyle

$$\mathcal{F}(t) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\theta(t) & \mathcal{F}_{\theta\phi}(t) \\ \mathcal{F}_{\phi\theta}(t) & \mathcal{F}_\phi(t) \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

formunda Fisher bilişim matrisi denilen bir matris tanımlanır. Burada matrisin elemanları (4.49) denklemindeki Fisher bilişim tanımından

$$\mathcal{F}_\theta = \text{Tr}[L_\theta^2 \rho], \mathcal{F}_\phi = \text{Tr}[L_\phi^2 \rho], \mathcal{F}_{\phi\theta} = \mathcal{F}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\rho(L_\theta L_\phi - L_\phi L_\theta)] \quad (4.60)$$

eşitlikleriyle hesaplanır. L_θ ve L_ϕ ilişkili parametrenin simetrik logaritmik türev işlemcileridir. Bu işlemciler Hermitsel olduğu için $\mathcal{F}(t)$ matrisi de Hermitseldir. Bu matrisin elemanlarının zamanla değişimleri Markov süreçlerde (4.54) denkleminde olduğu gibi, daima pozitif olmayan değerler alır (Song vd. 2015).

Fisher bilişimi; parametrelerin belirlenebilmesi için en uygun ölçümün seçilmesinin ve ölçüm sonuçlarının kesinliğinin artırılmasının amaçlandığı, kuantum metroloji (*quantum metrology*) ve kuantum kestirim kuramında (*quantum estimation theory*) önemli işlev görmektedir (Helstrom 1976). Yansız (*unbiased*) bir kestirici (*estimator*) kullanıldığında θ parametresiyle ilgili belirsizliği gösteren varyans ifadesini sınırlandıran

$$(\Delta\theta)^2 \geq \frac{1}{N\mathcal{F}(\rho_\theta)} \quad (4.61)$$

şeklindeki ünlü Cramer-Rao sınırı (*Cramer-Rao bound*) vardır (Helstrom 1976, Holevo 1982). Burada N bağımsız ölçüm sayısını göstermektedir. Varyansın parametreye ilgili belirsizliği gösterdiği düşünülürse, Fisher bilişimin fazla olması parametrenin daha kesin belirlenebileceği, hatanın azaltılabileceği anlamına gelir. Bu özelliğiyle hafızalı çevre kuantum metroloji açısından yeni imkânlar sunmaktadır.

4.6 Dolanıklık Artışı

Klasik korelasyonlar kullanılarak gerçekleştirilemeyecek birçok yükümlülüğün gerçekleştirilmesinde yararlanılan vazgeçilmez bir özkaynak olan dolanıklık, bileşik sistemlerde klasik karşılığı olmayan en önemli kuantum korelasyon türüdür. Dolanıklık yerel işlemler ve klasik haberleşmeler (LOCC: *Local operations and classical communications*) kullanılarak yaratılamayacak bir korelasyon türüdür (Horodecki vd. 2009).

Bir kuantum durumun dolanıklık miktarını belirlemek için çok sayıda dolanıklık ölçüsü (*entanglement measure*) geliştirilmiştir. Ölçülerin sağlaması gereken koşullardan biri de, dolanıklık miktarının yerel işlemler altında artmaması, monoton olarak azalmasıdır (Vedral vd. 1997). Bu kapsamda OQS'le dinamiğe katılmayan yardımcı sistem arasındaki dolanıklığı nicelendiren E dolanıklık ölçüsü dikkate alındığında, bu nicelik $id_R \otimes \Lambda_t$ şeklinde yerel işlemler uygulanarak artırılmaz. Zamanla gelişim sürecinde dolanıklıklığın arttığı bir zaman aralığının olması, bu aralıkta indirgenmiş dinamiği tarif eden yerel bir gönderimin olmaması anlamına gelir. $\rho^{RQ}(t) = (id_R \otimes \Lambda_t)\rho^{RQ}(0)$ şeklinde gelişen bileşik durumun parçaları arasındaki dolanıklığın artışını belirlemek için, monotonluk özelliği kullanılarak

$$W_E \equiv \Delta E + \int_0^t \left| \frac{dE[\rho^{RQ}(s)]}{ds} \right| ds \quad (4.62)$$

ifadesindeki Markov olmama tanığı oluşturulabilir. Burada $\Delta E = E[\rho^{RQ}(t)] - E[\rho^{RQ}(0)]$ olup, çıkış durumuyla giriş durumunun dolanıklık nicelikleri farkıdır. Sürecin

her aşaması yerel bir kuantum kanalla betimlenebilen Markov süreçlerde $W_E = 0$ değerini alır. Markov olmayan süreçlerde ise dolanıklığın arttığı en az bir zaman aralığı vardır ve $W_E > 0$ olur (Rivas vd. 2010). W_E niceliğine Markov olmamanın dolanıklık tanığı denir. Bu tanığı giriş durumundan bağımsız hale getirmek için $\rho^{RQ}(0)$ başlangıç durumunun en dolanık durum seçilmesi kolaylık sağlamaktadır (Rivas vd. 2010).

Dekoherens (*decoherence*) süreci kapsamında (Zurek 2003); OQS'le dolanık haldeki \mathcal{A} ile gösterilen ölçüm aparatından ve çevreden oluşan üç parçalı ρ^{AQE} sistemi dikkate alınmış olsun. ρ^{AQ} bileşik durumu ve çevrenin durumu saf seçildiğindeki üç parçalı saf ρ^{AQE} durumunda Koashi-Winter monogami ilişkisi (Koashi ve Winter 2004)

$$E_f(\mathcal{A}Q) + C_{\overline{QE}} = S(\rho^Q) \quad (4.63)$$

şeklinde yazılır¹². Burada $E_f(\mathcal{A}Q)$ oluşum dolanıklığı (*entanglement of formation*) denilen dolanıklık ölçüsüdür (Bakınız bölüm 5.3.1). Simetrik olmayan bir korelasyon ölçüsü olan ve erişilebilir bilişim (*accessible information*) denilen $C_{\overline{QE}}$ ifadesi, çevre sisteminden elde edilebilecek OQS bilişimini nicelendirir. Erişilebilir bilişim

$$C_{\overline{QE}} = \max_{\{M_x\}} \left[S(\rho^Q) - \sum_x p_x S(\rho_x^Q) \right] \quad (4.64)$$

bağıntısıyla tanımlanır (Henderson ve Vedral 2001). İfadedeki maksimum, çevre sisteminin POVM'ları üzerinden belirlenir. $S(\rho^Q)$ OQS'in von Neumann entropisini gösterirken, toplamdaki terimler

$$\rho_x^Q = \frac{\text{Tr}_E[(\mathbb{1}_Q \otimes M_x) \rho^{QE} (\mathbb{1}_Q \otimes M_x)]}{p_x}, \quad p_x = \text{Tr}_{QE}[(\mathbb{1}_Q \otimes M_x) \rho^{QE} (\mathbb{1}_Q \otimes M_x)] \quad (4.65)$$

¹²Türkmen vd. 2016 çalışmasında yapılan, Koashi-Winter monogami bağıntısının alternatif bir ispatı için 5.3.1 bölümüne bakılabilir.

biçiminde belirlenir. Dekoherens sürecinde açık kuantum sistemi çevreyle doğrudan etkileşmeyen, fakat ölçüm aparatıyla dolanık halde bir sistemdir. Çevreyle aparatın etkileşmesine bağlı olarak çevreden sistemle ilgili bilgiler elde edilir. Bu durumda (4.63) bağıntısından, sistemin entropisi zamanla değişmeden kalacağından,

$$\frac{dE_f(\mathcal{A}Q)}{dt} = -\frac{dC_{\overline{QE}}}{dt} \quad (4.66)$$

eşitliği yazılır. Markov süreçlerde oluşum dolanıklığı zamanla monoton olarak azalacağından, çevreden elde edilebilecek sistemle ilgili erişilebilir bilişim artacaktır (Fanchini vd. 2014, Haseli vd. 2014).

4.7 Kuantum Diskort: Toplam Kuantum Korelasyon Artışı

Bileşik sistemlerde dolanıklıktan başka kuantum korelasyonlar da olabilir. Diskortun tanıtılmasına kadar bir bileşik sistemde olabilecek tek kuantum korelasyonun dolanıklık olduğu, ayrılabilir durumlar dolanıklık içermeyen durumlar olduğu için de bu durumlardaki korelasyonların sadece klasik korelasyonlar olabileceği düşünülüyordu. Bu düşünce saf durumlar için doğru olsa da, saf olmayan durumlarda dolanıklık haricinde de kuantum korelasyonların olabileceği görüldü ve dolanıklığı da içine alacak şekilde bir sistemin sahip olduğu tüm kuantum korelasyonlara kuantum diskort (*quantum discord*) denildi (Zurek 2000, Henderson ve Vedral 2001, Ollivier ve Zurek 2001).

ρ^{RQ} durumundaki toplam korelasyonu nicelendiren karşılıklı bilişim

$$S_\rho(R:Q) = S(\rho^R) + S(\rho^Q) - S(\rho^{RQ}) \quad (4.67)$$

$$J_\rho(\overrightarrow{RQ}) = S(\rho^Q) - S(\rho^Q|\rho^R) \quad (4.68)$$

biçiminde iki farklı şekilde tanımlanabilir. (4.68) tanımındaki koşullu entropilerin hesaplanabilmesi için ρ^R sistemi üzerine ölçüm uygulamak gerekecektir. Bilindiği gibi ölçümün sistemin kuantum özelliklerini bozucu etkisi vardır. Bu nedenle klasik sistemlerde birbiriyle aynı olan (4.67) ve (4.68) ifadeleri kuantum sistemlerde aynı değildir. (4.68) ifadesinde toplam korelasyon ρ^R sistemi üzerine ölçüm uygulanarak elde

edilen bilişimin ρ^Q sistemiyle ilgili de ne kadar bilişim içerdiğini ifade eder. R sistemi üzerine yerel ölçüm uygulanarak elde edilecek bilişim klasik bilişim olduğu için (4.68) denklemi sistemler arasındaki toplam klasik korelasyonu nicelendirir. Klasik korelasyonlar yerel olarak sistemi bozmadan elde edilebilecek bilişimle ilişkilidir. (4.67) denklemi ise hem klasik sistemlerdeki hem de kuantum sistemlerdeki toplam korelasyonu nicelendirmeye devam etmektedir. Bu iki nicelik arasındaki

$$D(R \rightarrow Q) = S_\rho(R:Q) - \mathcal{J}_\rho(\overrightarrow{RQ}) \quad (4.69)$$

farkı ise, yerel ölçümlerle elde edilemeyen, klasik olmayan korelasyonları ifade eden kuantum diskorttur. Klasik korelasyonların maksimum değerini belirleyebilmek için ölçüm işlemcileri üzerinden optimizasyon yapmak gerekir. Bu durumda (4.69) denklemi

$$D(R \rightarrow Q) = S(\rho^R) - S(\rho^{RQ}) + \min_{\{M_i^R\}} S(M_i^R | \rho^Q) \quad (4.70)$$

biçimini alır. Burada $\{M_i^R\}$ R sistemi üzerinde tanımlı POVM'ü göstermektedir. (4.70) denkleminde de görüldüğü gibi kuantum diskort simetrik olmayan bir niceliktir:

$$D(R \rightarrow Q) \neq D(Q \rightarrow R).$$

Diskortun sıfır olması için de gerek ve yeter koşul ρ^{RQ} durumunun

$$\rho^{RQ} = \sum_i \kappa_j |r_j\rangle\langle r_j| \otimes \rho_j^Q$$

şeklinde klasik-kuantum durum olmasıdır. Burada $\{|r_j\rangle\}$, R sisteminde ortonormal bir bazı göstermektedir.

OQS dinamiğindeki Markov olmama özelliğinin tespit edilmesinde kuantum diskortun önemi, yerel kanallar altında monoton davranışındır. Kuantum diskortun kuantum

dolanıklık ölçülerinde olduğu gibi yerel kanallar altında her zaman monoton azalan bir davranışı olmadığından, bu nicelik kullanılarak her durumda geçerli bir Markov olmama tanığı oluşturmak mümkün değildir (Streltsov vd. 2011, Ciccarello ve Giovannetti 2012). Fakat çevre ve OQS arasındaki diskort miktarıyla ve bu niceliğin zamanla değişimleri üzerinden Markov olmama özelliğiyle ilişkiler gösterilmiştir (Alipour vd. 2012, Haikka vd. 2013).

4.8 Determinant: Erişilebilir Durum Artışı

Determinant fonksiyonelinin $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ özelliğinden dolayı, kanalların bölünebilme özelliğiyle kanalı temsil eden matrisin determinanı arasında ilişki olması beklenir. İlişkiyi görebilmek için (4.33) denkleminde olduğu gibi kanalın matris temsiliyle ilgilenilecektir. (4.33) matrisi oluşturulurken genelleştirilmiş Gell-Mann matrisleri baz olarak kullanıldı. Determinant bazdan bağımsız olduğundan hangi bazın kullanıldığı tartışmanın genelliğini etkilemez. Gönderimlerle karşılık gelen matrisler izomorf olduğundan; gönderimlerle ilişkili özdeğer, tekil değer ve determinant gibi karakteristik özellikler matrislerle de incelenebilir. Λ gönderimine karşılık gelen M_Λ matrisinin Hermitsel $\{F_i\}$ bazındaki matris elemanları

$$(M_\Lambda)_{kl} = \text{Tr}[F_k \Lambda(F_l)] \quad (4.71)$$

olduğundan, dual kanalın matrisi de $M_{\Lambda^*} = M_\Lambda^\dagger$ olur.

Pozitif ve çizgisel her Λ gönderimi $\Lambda(A^\dagger) = [\Lambda(A)]^\dagger$ olacak şekilde Hermitselliği de korur. Bu özellik her matrisin B ve C Hermitsel matrisler olmak üzere, $A = B + iC$ şeklinde yazılabilmemesinin ve her Hermitsel matrisin iki pozitif matrisin farkı olarak yazılabiliyor olmasının sonucudur. Λ pozitif ve çizgisel gönderimi için $\Lambda(X) = \lambda X$ özdeğer denklemi yazılırsa, Hermitselliğin korunmasından dolayı $\Lambda(X^\dagger) = \bar{\lambda} X^\dagger$ denklemi de vardır. Burada $\bar{\lambda}$, λ özdeğerinin kompleks eşleniğini göstermektedir. Yani Λ gönderiminin özdeğerleri ya gerçel ya da birbirinin kompleks eşleniği olan çiftler

halindedirler. Bu nedenle pozitif ve çizgisel gönderimlerin determinanı daima gerçeldir. Bu determinant değerinin $[-1,1]$ aralığında olduğu gösterilmiştir (Wolf ve Cirac 2008).

Pozitif veya tamamen pozitif gönderimlerin matris temsillerinin pozitif matris olmasının gerekmediğine, hatta ünital kanallarda olduğu gibi Hermitsel bile olmadığına dikkat etmek gerekir. Tamamen pozitif bir gönderimin determinantının negatif olduğu bir örnek Wolf ve Cirac'ın çalışmasında gösterilmiştir (Wolf ve Cirac 2008).

Λ_t kuantum kanalı $\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s$ ($t \geq s \geq 0$) şeklinde pozitif bölünebiliyorsa ($V_{t,s}$ pozitif gönderimse) determinantların mutlak değerleri arasında

$$|\det \Lambda_t| = |\det V_{t,s}| |\det \Lambda_s| \leq |\det \Lambda_s| \quad (4.72)$$

ifadesi yazılabilir. Bu sonuç pozitif bölünebilir süreçlerde determinantın mutlak değerinin sürekli azalacağı anlamına gelir. Determinantın mutlak değerinin zamanla değişimini betimleyen

$$f_d(t) = \frac{d}{dt} |\det \Lambda_t| \quad (4.73)$$

fonksiyonu tüm bölünebilir süreçlerde monoton olarak azalır veya sabit kalır. $f_d(t) > 0$ olduğu en az bir zamanın olması sürecin Markov olmama özelliğini gösterir. (4.73) fonksiyonuna Markov olmanın determinant tanığı denilecektir.

Λ_t kuantum kanalına karşılık gelen matris (4.33) ifadesindeki olduğu gibi

$$M_{\Lambda_t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_t & \Delta_t \end{pmatrix}$$

şeklinde yazıldığında $\det(M_{\Lambda_t}) = \det(\Delta_t)$ olduğundan, $f_d(t)$ fonksiyonu 4.3 bölümündeki iz uzaklığında olduğu gibi, kanalın ünital olmayan kısmını temsil eden q_t niceliğinden bağımsızdır. Bu durum determinant Markov olmama tanığıyla kanalların

ünital olmayan özelliklerinden kaynaklanan hafıza etkilerinin algılanamayacağı anlamına gelir.

$|det\Lambda_t|$ fonksiyonelinin ilginç bir özelliği de kanalın tüm durumlar üzerinde etkisi sonucu ortaya çıkan durumların hacmini nicelendirmesidir. Yani $|det\Lambda_t|$ kanalın görüntü kümesinin hacmidir (Lorenzo vd. 2013). Pozitif bölünebilir süreçlerde kanal etkisiyle ulaşılan durumların hacimleri monoton olarak azalmaktadır.

4.9 Ünitel Kanallarda Entropi Tanığı

OQS dinamiğinde aksi söylenmedikçe sistemin tipinin değişmediği kabul edilir. Bu nedenle birim işlemciyi koruyan

$$\Lambda\left(\frac{\mathbb{1}}{d}\right) = \frac{\mathbb{1}}{d}$$

şeklindeki bistokastik kanallar ünital kanallardır. Ünital kanalların kuantum bilişim kuramındaki önemli bir özelliği, bu kanalların entropiyi azaltmaması, sürekli artırmasıdır. Bu özellik bağıl entropinin monotonluk özelliğinin doğal bir sonucudur. Çünkü bağıl entropinin

$$S(\rho||\sigma) \geq S(\Lambda(\rho)||\Lambda(\sigma))$$

şeklindeki monotonluk bağıntısında $\sigma = \mathbb{1}/d$ en saf olmayan durumda seçilirse,

$$S(\rho||\frac{\mathbb{1}}{d}) = -S(\rho) + \log d, \quad S(\Lambda(\rho)||\Lambda(\frac{\mathbb{1}}{d})) = -S(\Lambda(\rho)) + \log d$$

eşitlikleri yazılır. Bu sonuçlar bağıl entropinin monotonluk bağıntısında kullanılırsa

$$S(\Lambda(\rho)) \geq S(\rho) \tag{4.74}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bölünebilir ünital süreçlerde von Neumann entropisinin zamanla değişimi

$$f(t) = \frac{d}{dt} S(\rho^Q(t)) \geq 0 \quad (4.75)$$

olurken, $f(t) < 0$ olan bir zamanın olması sürecin Markov olmama özelliğini tespit eder (Haseli vd. 2015).

Burada önemli bir husus, OQS'in gelişimini betimleyen kanalın ünital olduğunun garanti edilmesidir. Çünkü dinamik boyunca herhangi bir zaman aralığındaki gelişim ünital olmayan bir kanalla tarif edilse dahi, bu kanal entropiyi azaltabilir. Yani (4.75) ifadesi tüm bölünebilir süreçlerde geçerli değildir, tüm süreç boyunca kanalın ünital olduğunun bilindiği durumlarda kullanılabilir.

5. MARKOV DURUMLAR: İNDİRGENMİŞ DİNAMİĞİN TAMAMEN POZİTİFLİĞİ VE KUANTUM HATA DÜZELTİMİ

Markov durumların DPI'nin sağlanmasındaki işlevi, 2017 yılında yapılan çalışmadan (Türkmen vd. 2017) elde edilen bulgular çerçevesinde 4.2 bölümünde incelendi. Burada ise bu durumların; indirgenmiş dinamiğin CP'liğinin sağlanması ve kuantum hata düzeltimi (QEC: *quantum error correction*) kapsamındaki özellikleri tartışılacaktır. 2016 ve 2018 yılında yapılan çalışmalardan (Türkmen vd. 2016, Türkmen ve Verçin 2018) elde edilen sonuçların değerlendirileceği bu bölümde, üç temel amaç güdülmüştür. Birincisi indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tasvirinin mümkün olduğu bilinen en geniş küme olan Markov durumlarda, dinamiği tarif eden gönderimlerin kuantum kanal olduğunu açıkça göstermek ve bu kanalların Kraus işlemcilerini elde etmektir. İkincisi ise saf Markov durumlarının kanonik formunu ve başlıca özelliklerini ortaya koyarak, bu durumlarda her türden korelasyonun olabileceğini ve bu korelasyonların nicel değerinin çevrenin entropisi olduğunu göstermektir. Son olarak, bir gelişim sürecinde Markov durum olma özelliğinin korunması halinde, mükemmel QEC yapabilmenin mümkün olduğu gösterilecektir. OQS ve çevresinin bir Markov durumun indirgenmiş olması halinde, her türden korelasyonun varlığında dahi CP indirgenmiş dinamiğin olduğu ve Markov durum yapısının korunduğu gelişimlerde, var olan başlangıç korelasyonlarının QEC işlemine engel oluşturmadığı vurgulanacaktır.

5.1 İndirgenmiş Dinamiğin Tamamen Pozitifliği

OQS'lerin indirgenmiş dinamiği, (2.25) denkleminde de gösterildiği gibi $\Lambda(\rho^Q) = (Tr_E \circ ad_{U_{QE}} \circ \mathcal{R})(\rho^Q)$ şeklinde üç gönderimin bileşkesi olarak yazılabilir. $ad_{U_{QE}}$ ve Tr_E gönderimlerinin birer kuantum kanal olduğu bilindiğinden (Bakınız bölüm 2.2), Λ indirgenmiş dinamik gönderiminin kuantum kanal olmasında \mathcal{R} gönderiminin sahip olması gereken özellikler önemlidir. Yerleştirme gönderimi (*assignment map*) adıyla \mathcal{R} gönderiminin sahip olması gereken üç özelliği ortaya koyan ve indirgenmiş dinamiğin CP, hatta pozitif bile olmadığı durumların olabileceğini ilk dikkat çeken Pechukas olmuştur (Pechukas 1994). Pechukas'a göre, indirgenmiş dinamiğin kuantum kanalla tarif edilebilmesi için \mathcal{R} gönderiminin

$$1. \mathcal{R}(\sum_i p_i \rho_i) = \sum_i p_i \mathcal{R}(\rho_i), \quad \forall \rho_i \in S(\mathcal{H}_Q), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

$$2. (Tr_E \circ \mathcal{R})(\rho^Q) = \rho^Q$$

$$3. \mathcal{R}(A) \geq 0, \quad \forall A \geq 0$$

şeklindeki; sırasıyla çizgisellik, tutarlılık (*consistency*) ve pozitiflik özelliklerini sağlaması gerekir. Pechukas'ın sistem ve çevresinin başlangıç durumunun hiçbir korelasyon içermeyen $\rho^{QE} = \rho^Q \otimes \rho^E$ çarpım durumu olması dışında, indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitifliğinin zorunlu olmadığını vurgulaması ve Alicki'nin indirgenmiş dinamiğin CP'liğinin korunması gerektiğini savunan itirazıyla, \mathcal{R} gönderiminin sağlaması gereken özellikler ve CP indirgenmiş dinamik için başlangıç durumlarının sahip olması gereken koşullarla ilgili tartışma başlamıştır (Alicki 1995, Pechukas 1995). Burada yerleştirme gönderiminin özellikleriyle ilgili bir inceleme yapılmayacak, başlangıç durumlarının özellikleri üzerinden indirgenmiş dinamiğin CP'liği için gerekli koşullara değinilecektir. 2.2 bölümünde açıklandığı gibi başlangıç sistem-çevre bileşik durumu çarpım durumuysa, \mathcal{R} gönderimi bir kuantum kanaldır ve indirgenmiş dinamik sistemin giriş durumundan da bağımsız bir kuantum kanalla betimlenir. Bu nedenle açık sistem kuramında başlangıç durumunu çarpım durumunda kabul etmek standart bir yaklaşım haline gelmiştir. (Breuer ve Petruccione 2002, Alicki ve Lendi 2007, Rivas ve Huelga 2011). Doğadaki gerçek süreçlerin işleyişi ve başlangıç koşullarını oluşturmadaki zorluklar düşünüldüğünde, giriş durumlarına bağlı kuantum kanalların varlığına imkân veren, çarpım durumları dışında başlangıç durumlarını araştırmaya gerek duyulmuştur.

İndirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tasvirine imkân sağlayan başlangıç durumlarının, çarpım durumlarını da içeren daha geniş bir küme olan, diskort içermeyen,

$$\rho^{QE} = \sum_i p_i |q_i\rangle\langle q_i| \otimes \rho_E^i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \forall \rho_E^i \in S(\mathcal{H}_E) \quad (5.1)$$

biçimindeki, sadece klasik korelasyon içeren klasik-kuantum durumlardan oluşabileceği gösterilmiştir (Rodriguez-Rosario vd. 2008). Daha açık ifade etmek gerekirse kuantum diskortun sıfır olduğu durumlarda indirgenmiş dinamik kuantum kanallarla tasvir

edilebilmektedir. Burada $\{|q_j\rangle\}$, Q sisteminde seçilen bir bazı temsil etmektedir. Ayrıca ayrılabilir iki kübit örneği aracılığıyla, diskort içeren başlangıç durumlarında indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitif kalmayabileceği de gösterilmiştir (Rodriguez-Rosario vd. 2008).

Diskortun sıfır olduğu durumların indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarif edilebilmesi için sadece yeter koşul değil, gerek koşul da olduğu söylene de (Shabani ve Lidar 2009); bu iddianın doğru olmadığı diskort içeren bir durumda indirgenmiş dinamiğin CP olduğu aksi bir örnekle gösterilmiştir (Brodtch vd. 2013). Böylece diskortun olmadığı başlangıç durumlarının indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tarifi için yeter şart olduğu fakat gereklilik olmadığı anlaşılmıştır.

Sadece klasik korelasyon içeren durumlar dışında, dolanıklık içeren başlangıç durumlarında da indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitif olabileceği, Buscemi tarafından üç parçalı Markov durumlar kapsamında gösterilmiştir (Buscemi 2014). Çarpım durumları ya da klasik-kuantum durumlar özel türden birer Markov durumu olarak görülebileceği için, Markov durumlar indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla betimlenebildiği bilinen en geniş kümedir. Bu nedenle bu bölümün devamında genel Markov durumlar tanıtılacak ve ayrıntılı incelemelerin yapılacağı saf Markov durumlarının kanonik formu gösterilecektir.

5.2 Markov Durumlar

4.2 bölümünde de belirtildiği gibi

$$S_\rho(R: E|Q) = S_\rho(RQ) + S_\rho(QE) - S_\rho(RQE) - S_\rho(Q) \geq 0 \quad (5.2)$$

şeklindeki güçlü alt toplanabilirlik bağıntısında $S(R: E|Q) = 0$ koşulunu sağlayan üç parçalı ρ^{RQE} durumuna **Q koşullu Markov durum** denir. ρ^{RQE} durumunun Q koşullu Markov durum olması için gerek ve yeter koşul

$$\rho^{RQE} = (id_R \otimes \mathcal{R})\rho^{RQ} \quad (5.3)$$

olacak şekilde $\mathcal{R}: Q \rightarrow QE$ kuantum kanalının olmasıdır (Petz 2003, Hayden vd. 2004).

(5.2) denklemindeki güçlü alt toplanabilirlik, bağıl entropinin

$$S(\rho||\sigma) \geq S(\Lambda(\rho)||\Lambda(\sigma)) \quad (5.4)$$

eşitsizliğindeki monoton davranışının sonucudur. Eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul Λ gönderiminin

$$\mathcal{R}\Lambda(\rho) = \rho, \quad \mathcal{R}\Lambda(\sigma) = \sigma \quad (5.5)$$

şeklinde sol tersinin olmasıdır¹³. $\Lambda(\sigma)$ işlemcisinin desteği (*support*) üzerinde bir kuantum kanal olan \mathcal{R} gönderiminin etkisi

$$\mathcal{R}(X) = \sigma^{1/2} \Lambda^* [(\Lambda\sigma)^{-1/2} X (\Lambda\sigma)^{-1/2}] \sigma^{1/2} = ad_{\sigma^{1/2}} \Lambda^* ad_{(\Lambda\sigma)^{-1/2}}(X) \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlanır (Petz 2003). Burada Λ^* , Λ kanalının dual kanalıdır. Λ gönderiminin etkisini geri alan \mathcal{R} gönderimine Petz gönderimi (*Petz map*) denir. (5.6) denkleminden görülebileceği gibi Petz gönderimi üç CP gönderimin bileşkesi olarak yazılmış CP bir gönderimdir.

Λ , E çevre sistemi üzerinden kısmi iz alma, $\rho = \rho^{RQE}$ ve $\sigma = \rho^R \otimes \rho^{QE}$ seçilerek, koşullu kuantum karşılıklı bilişim:

$$S(\rho^{RQE} || \rho^R \otimes \rho^{QE}) \geq S(\Lambda(\rho^{RQE}) || \Lambda(\rho^R \otimes \rho^{QE})) \quad (5.7)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda Λ kanalının sol tersi olan \mathcal{R} kanalının etkisi

¹³ Sadelik için gönderimlerin bileşkesini gösteren \circ sembolü kullanılmayacaktır.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X) &= (\rho^{QE})^{1/2} [(\rho^Q)^{-1/2} X (\rho^Q)^{-1/2} \otimes \mathbb{1}_E] (\rho^{QE})^{1/2} \\ &= ad_{(\rho^{QE})^{1/2}} \left[(ad_{(\rho^Q)^{-1/2}} X) \otimes \mathbb{1}_E \right]\end{aligned}\quad (5.8)$$

şeklinde ρ^Q durumunun desteği üzerinde tanımlanır (Hayden vd. 2004, Fawzi ve Renner 2015). Sonuç olarak Markov durumlarda var olan $\mathcal{R}: Q \rightarrow QE$ kuantum kanalı, çevre üzerinden kısmi iz alma kanalının sol tersi olan, yani kısmi iz alma işleminin etkisini geri alan özel bir Petz gönderimidir. $Tr_{QE}[\mathcal{R}(X)] = Tr_Q X$ eşitliğindeki iz koruma özelliğinin ρ^Q durumunun desteği üzerinde geçerli olduğu

$$Tr_E[Y(X \otimes \mathbb{1}_E)] = (Tr_E Y)X, \quad Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{QE}) \quad (5.9)$$

özdeşliği kullanılarak görülür. $\mathcal{R}(X)$ gönderiminin tüm $\mathcal{B}(\mathcal{H}_Q)$ üzerinde tanımlı olması durumunda da iz artırmayan (*trace non-increasing*) tamamen pozitif bir gönderim olduğu gösterilmiştir (Wilde 2015).

Sonuç olarak giriş Markov durumuyken, indirgenmiş dinamik $\Lambda(\rho^Q) = (Tr_E \circ ad_{U_{QE}} \circ \mathcal{R})(\rho^Q)$ biçiminde üç kuantum kanalın bileşkesi olarak yazılabiliyor olmasından dolayı bir kuantum kanaldır. Bu kanalın giriş durumuna bağlı olduğunu ve giriş durumunun desteği üzerinde tanımlı olduğunu tekrar vurgulamakta yarar vardır. Λ kanalının Kraus işlemcileriyle oluşturulan açık formu, genel Markov durumlar ve saf Markov durumları kapsamında bölüm 5.3’de incelenecektir.

Güçlü alt toplanabilirlik bağıntısında eşitliği sağlayan Markov durumların genel formunda, Q sisteminin Hilbert uzayının

$$\mathcal{H}_Q = \bigoplus_i \mathcal{H}_{Q_i^L} \otimes \mathcal{H}_{Q_i^R} \quad (5.10)$$

şeklinde sol $\mathcal{H}_{Q_i^L}$ ve sağ $\mathcal{H}_{Q_i^R}$ Hilbert uzaylarının tensör çarpımlarının direkt toplamı (*direct sum*) olarak yazılması gerektiği ve üç parçalı durumun da

$$\rho^{RQE} = \bigoplus_i p_i \rho^{RQ_i^L} \otimes \rho^{Q_i^{RE}} \quad ; \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (5.11)$$

biçiminde olduğu gösterilmiştir (Hayden vd. 2004).

5.2.1 Saf Markov durumlar

Markov durumların tanımı gereği yazılan

$$S(R:E|Q) = 0 = S(RQ) + S(QE) - S(RQE) - S(Q) \quad (5.12)$$

denkleminde, ρ^{RQE} durumu saf olduğunda $S(RQE) = 0$ ve Schmidt ayrışımı gereği bu üç parçalı durumun iki parçalı ayrışımalarında indirgenmiş durumların entropileri eşit olur. Alt sistemlerin entropileri için yazılan

$$S(RQ) = S(E), \quad S(QE) = S(R), \quad S(Q) = S(RE) \quad (5.13)$$

eşitlikleri (5.12) denkleminde kullanılırsa, saf Markov durumları için güçlü alt toplanabilirlik bağıntısı

$$S(R) + S(E) - S(RE) = S(R:E) = S(R:E|Q) = 0 \quad (5.14)$$

halini alır. (5.14) denklemi saf durumların Q koşullu karşılıklı bilişiminin R ve E sistemleri arasındaki karşılıklı bilişime eşit olduğunu ve karşılıklı bilişimin sıfır olması sebebiyle R ve E sistemlerini $\rho^{RE} = \rho^R \otimes \rho^E$ biçiminde çarpım durumunda olması gerektiğini söyler. Karşılıklı bilişimin sıfır olması için iki parçalı bileşik durumun çarpım durumu olması gerek ve yeter koşul olduğundan, üç parçalı ρ^{RQE} saf durumunun Markov durumu olması için de gerek ve yeter koşul $\rho^{RE} = \text{Tr}_Q \rho^{RQE} = \rho^R \otimes \rho^E$ olmasıdır (Türkmen vd. 2016).

ρ^R ve ρ^E durumlarının

$$\rho^R = \sum_j \kappa_j |r_j\rangle\langle r_j|, \rho^E = \sum_j \mu_k |\varepsilon_k\rangle\langle \varepsilon_k| \quad (5.15)$$

olan spektral ayrışimleri kullanılarak yazılan,

$$\rho^{RE} = \rho^R \otimes \rho^E = \sum_{jk} \kappa_j \mu_k |r_j\rangle\langle r_j| \otimes |\varepsilon_k\rangle\langle \varepsilon_k| \quad (5.16)$$

şeklindeki çarpım durumunun saflaştırılmasıyla (Bakınız Ek 3) saf Markov durumunun aşağıdaki kanonik formu elde edilir:

$$|\psi^{RQE}\rangle = \sum_{jk} \sqrt{\kappa_j \mu_k} |r_j\rangle \otimes |q_{jk}\rangle \otimes |\varepsilon_k\rangle. \quad (5.17)$$

Üçlü Schmidt ayrışımı da denilen (5.17) denkleminde, $\{|r_j\rangle\}$ ve $\{|\varepsilon_k\rangle\}$ vektörleri sırasıyla R ve E sistemlerinin ortonormal öz durumlarını göstermektedir (Schumacher ve Westmoreland 2002). Yine ortonormal $\{|q_{jk}\rangle\}$; $\langle q_{jk} | q_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$ kümesinin de ρ^Q durumunun öz durumlarını gösterdiği,

$$\rho^Q = \text{Tr}_{RE} |\psi^{RQE}\rangle\langle \psi^{RQE}| = \sum_{jk} \kappa_j \mu_k |q_{jk}\rangle\langle q_{jk}| \quad (5.18)$$

eşitliğinden görülmektedir. Ayrıca bu ifadeden Q koşullu saf Markov durumlarında alt sistemlerin rankları arasında

$$\text{rank}(\rho^Q) = \text{rank}(\rho^R) \text{rank}(\rho^E) \quad (5.19)$$

bağıntısının olduğu da anlaşılmaktadır. Bu rank eşitliğinin sonucu olarak R ve E sistemlerinin her ikisi de saf durumdayken Q sistemi de saf olur ve bileşik durum

$$|\psi^{RQE}\rangle = |\psi^R\rangle \otimes |\psi^Q\rangle \otimes |\psi^E\rangle \quad (5.20)$$

şeklinde saf durumların çarpımı olur. Eğer R ve E sistemlerinden yalnız biri saf durumdaysa, bileşik saf Markov durum aşağıda verilen iki formdan birinde olmak zorundadır.

$$\rho^{RQE} = \begin{cases} |\psi^{RQ}\rangle \langle \psi^{RQ}| \otimes |\varphi^E\rangle \langle \varphi^E| \\ |\psi^R\rangle \langle \psi^R| \otimes |\varphi^{QE}\rangle \langle \varphi^{QE}| \end{cases} \quad (5.21)$$

Ayrıca Q sisteminin rankının asal sayı olması durumunda, saf Markov durumun yukarıdaki durumlar dışında bir durumda olması mümkün değildir.

5.3 Markov Durumlarda İndirgenmiş Dinamik

ρ^{RQE} giriş Markov durumu $\rho^{RQE} = (id_R \otimes \mathcal{R})\rho^{RQ}$ şeklinde yazıldığından; R sistemi üzerinde her hangi bir dinamik olmaması ve ρ^{QE} bileşik durumunun da üniter gelişmesinin sonucu olarak σ^{RQE} çıkış durumu

$$\sigma^{RQE} = (id_R \otimes ad_{U_{QE}}) \rho^{RQE} = [id_R \otimes (ad_{U_{QE}} \circ \mathcal{R})] \rho^{RQ} \quad (5.22)$$

olur. Bu gelişimde Q sisteminin indirgenmiş dinamiği bir kuantum kanalla tarif edilmektedir. Kanalı daha net görebilmek için R sisteminin $\{e_{ij} = |e_i\rangle \langle e_j|\}$ standart matris bazları kullanılarak, ρ^{RQ} bileşik durumu $\rho^{RQ} = \sum_{ij} |e_i\rangle \langle e_j| \otimes T_{ij}$ şeklinde blok formda yazılabilir. Bu blok form (5.22) denkleminde yerine yazılarak, R sistemi üzerinden parçalı iz alındığında elde edilen

$$\sigma^{QE} = (ad_{U_{QE}} \circ \mathcal{R})\rho^Q \quad (5.23)$$

eşitliğinde, çevre üzerinden de kısmi iz alma işlemi uygulanarak, Q sisteminin gelişimini betimleyen gönderim

$$\Lambda(\rho^Q) = (Tr_E \circ ad_{U_{QE}} \circ \mathcal{R})\rho^Q \quad (5.24)$$

şeklinde üç kuantum kanalın bileşkesi olarak yazılır. (5.24) denkleminde ulaşılrken giriş durumunun saf Markov durum olması değil, sadece Markov durum olması kullanılmıştır. Buna göre giriş $\rho^{QE} = Tr_R \rho^{RQE}$ durumu bir ρ^{RQE} Markov durumundan indirgenmişse, Q açık kuantum sisteminin gelişimi (5.24) denkleminde tarif edildiği gibi bir kuantum kanalla betimlenir. (5.8) denklemindeki \mathcal{R} kanalının açık ifadesi (5.24) denkleminde yazılarak ve E sisteminin başlangıç öz durumlarından elde edilen tam bazda kısmi iz alma işlemi yapılarak, kanalın E_{kl} Kraus işlemcilerinin

$$E_{kl} = \langle e_k | U_{QE} (\rho^{QE})^{1/2} | e_l \rangle (\rho^Q)^{-1/2} \quad (5.25)$$

olduğu görülür (Türkmen vd. 2016). Kraus işlemcilerinde birinci indis olan k çevrenin bazlarını, l indisi ise çevrenin başlangıç öz durumlarını göstermektedir. Genel Markov durumlarından elde edilen Kraus işlemcilerinin saf Markov durumdaki formu;

$$\rho^{QE} = \sum_j \kappa_j |\psi_j^{QE}\rangle \langle \psi_j^{QE}|, \quad |\psi_j^{QE}\rangle = \sum_k \sqrt{\mu_k} |q_{jk}\rangle \otimes |\varepsilon_k\rangle \quad (5.26)$$

biçiminde yazılan bileşik durum ve $\rho^Q = \sum_{jk} \kappa_j \mu_k |q_{jk}\rangle \langle q_{jk}|$ durumu, (5.25) denkleminde yerine konularak

$$E_{kl} = \sum_j \langle e_k | U_{QE} |\psi_j^{QE}\rangle \langle q_{jl}| \quad (5.27)$$

denklemini elde edilir.

5.4 Markov Durumlarda Sistem-Çevre Korelasyonları

Bölümün ilk iki kesiminde başlangıç durumu Markov durumken indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla tasvir edilebileceği gösterildi. Bu kesimde ise giriş saf Markov

durumuyken sistemle çevresi arasındaki korelasyonlar incelenecektir. Başlangıç durumunda sistem ve çevresi arasında kuantum korelasyonların olabileceği Buscemi' nin çalışmasında (Buscemi 2014) söylenmiş olsa da, bu kesimde saf Markov durumlarında bu korelasyonların nicel karşılığının çevrenin von Neumann entropisine eşit olduğu da gösterilecektir.

5.4.1 Kuantum dolanıklık: oluşum dolanıklığı

Sistemle çevresi arasındaki kuantum dolanıklığı nicelendirmek için oluşum dolanıklığı (*entanglement of formation*) kullanılacaktır. Oluşum dolanıklığı; iki parçalı saf durumlarda Schmidt ayrışımının sonucu olarak parçaların entropilerinin eşit olması ve bu entropinin sıfırdan farklı olmasının bileşik sistemin dolanıklığını göstermesi özelliğinden, saf olmayan durumlarda da yararlanmayı amaçlar.

ρ^{AB} bileşik durumu safken $S(AB) = 0$, $S(A) = S(B)$ olup, $S(A) = S(B) = 0$ olması saf durumun kuantum dolanıklık içermeyen bir çarpım durumu olduğunu ifade eder. Saf durumlarda olabilecek tek korelasyon türü kuantum dolanıklık olup, bu korelasyon indirgenmiş durumların entropi değerine eşittir. Bu nedenle en dolanık (*maximally entangled*) durumlarda indirgenmiş durumların entropileri en büyük değerini alırken, alt sistemler de en saf olmayan (*maximally mixed*) durumdadırlar.

Her yoğunluk işlemcisi

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (5.28)$$

şeklinde, boylandırılmış fakat dik olmaları gerekmeyen $|\psi_i\rangle$ vektörleriyle oluşturulmuş rankı bir olan $P_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ projeksiyonlarının konveks karışımı olarak yazılabilir. ρ^{AB} bileşik durumunun bu şekilde bir yazımı

$$\rho^{AB} = \sum_i p_i |\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}| = \sum_i p_i P_i^{AB}, \quad P_i^{AB} = |\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}| \quad (5.29)$$

olduğunda, iki parçalı bu durumdaki dolanıklığı belirleyen $E_f(AB)$ oluşum dolanıklığı,

$$E_f(AB) = \inf_{\{p_i, P_i^{AB}\}} \sum_i p_i S(\text{Tr}_B P_i^{AB}) \quad (5.30)$$

eşitliğiyle tanımlanır (Bennett vd. 1996, Wootters 1998).

Oluşum dolanıklığının (5.30) tanımına eşdeğer bir yazımı da koşullu entropilerle yapılabilir. Bunun için ρ^A 'nın saflaştırılmasıyla elde edilen $|\varphi^{RA}\rangle$ durumu dikkate alınsın. Saflaştırıcı R sistemi üzerinde tanımlanmış POVM

$$\mathbb{M} = \left\{ M_i : 0 \leq M_i \leq \mathbb{1}_R, \sum_i M_i = \mathbb{1}_R \right\} \quad (5.31)$$

olduğunda, A sisteminin ölçüm sonrasındaki ρ_i^A koşullu durumları (*post-measurement states*)

$$p_i \rho_i^A = \text{Tr}_R [(\sqrt{M_i} \otimes \mathbb{1}_A) |\varphi^{RA}\rangle \langle \varphi^{RA}| (\sqrt{M_i} \otimes \mathbb{1}_A)] \quad (5.32)$$

olur. $p_i = \text{Tr}(M_i \rho^R)$ sonuçların olasılıklarını, $\rho^R = \text{Tr}_A(|\varphi^{RA}\rangle \langle \varphi^{RA}|)$ ise saflaştırıcı sistemin indirgenmiş durumunu göstermektedir. Tek bir ölçümün sonucuyla ilgilenmeyen seçici olmayan ölçüm (*nonselective measurement*) sürecinde, A sisteminin ölçüm sonrası durumu

$$\rho^A = \sum_i p_i \rho_i^A \quad (5.33)$$

biçimindedir. Acaba ρ^A durumunun bu ayrışımı (5.28) denklemindeki gibi saf durum ayrışımı mıdır? Bu sorunun cevabı aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 5.1 (Türkmen vd. 2016) ρ_i^A koşullu durumlarının saf olması için gerek ve yeter koşul M_i ölçüm işlecilerinin rankının bir olmasıdır.

İspat: (5.52) denklemindeki ölçüm işlecileri boylandırılmış olması gerekmeyen sıfırdan farklı $|\alpha_i\rangle$ vektörüyle oluşturulmuş, rankı bir olan $M_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ şeklinde işleciler olsun. ρ^A durumunun

$$\rho^A = \sum_m \lambda_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \quad (5.34)$$

olan spektral ayrışımı yazıldığında, bu durumun saflaştırılmasıyla elde edilen $|\varphi^{RA}\rangle$ durumu

$$|\varphi^{RA}\rangle = \sum_m \sqrt{\lambda_m} |m\rangle \otimes |\psi_m\rangle \quad (5.35)$$

olur. Burada $\{|m\rangle\}$ saflaştırıcı R sisteminde ortonormal bir bazdır. (5.32) denkleminde

$$|\varphi^{RA}\rangle\langle\varphi^{RA}| = \sum_{mn} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} |m\rangle\langle n| \otimes |\psi_m\rangle\langle\psi_n| \quad (5.36)$$

denklemini yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p_i \rho_i^A &= \sum_{mn} Tr_R(M_i |m\rangle\langle n|) \sqrt{\lambda_m \lambda_n} |\psi_m\rangle\langle\psi_n| \\ &= \sum_{mn} \langle\alpha_i|m\rangle\langle n|\alpha_i\rangle \sqrt{\lambda_m \lambda_n} |\psi_m\rangle\langle\psi_n| \end{aligned} \quad (5.37)$$

sonucu elde edilir. $|\phi_i\rangle = \sum_m \langle\alpha_i|m\rangle \sqrt{\lambda_m} |\psi_m\rangle$ vektörü kullanılarak, (5.37) denklemini $p_i \rho_i^A = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ biçiminde yazılır. (5.36) denkleminde A sistemi üzerinden kısmi iz alındığında saflaştırıcı sistem

$$\rho^R = \sum_m \lambda_m |m\rangle\langle m|,$$

durumunda olduğundan $p_i = \text{Tr}_R(M_i \rho^R) = \langle \phi_i | \phi_i \rangle$ olur. Bu durumda ρ_i^A koşullu durumlar, boylandırılmış $|\chi_i\rangle = |\phi_i\rangle / \sqrt{p_i}$ saf durumunun $\rho_i^A = |\chi_i\rangle\langle \chi_i|$ şeklindeki yoğunluk işlemcileridir.

Tersine $\rho_i^A = |\eta_i\rangle\langle \eta_i|$ şeklinde bir saf durum olduğunda, (5.37) denklemindeki birinci eşitlik

$$p_i |\eta_i\rangle\langle \eta_i| = \sum_{mn} \langle n | M_i | m \rangle \sqrt{\lambda_m \lambda_n} |\psi_m\rangle\langle \psi_n| = \sum_{mn} (M_i)_{nm} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} |\psi_m\rangle\langle \psi_n| \quad (5.38)$$

şeklinde yazılır. M_i işlemcisinin matris elemanları $b_{ik} = \sqrt{p_i / \lambda_k} \langle \psi_k | \eta_i \rangle$ ifadesi cinsinden $(M_i)_{kl} = b_{ik} b_{il}^*$ biçiminde yazılır. Bu yazımdan $M_i = |b_i\rangle\langle b_i|$ olması gerektiği görülür ■

ρ^{AB} durumunun saflaştırılmışı olan $P^{RAB} = |\phi^{RAB}\rangle\langle \phi^{RAB}|$ saf durumunda, R sistemi üzerine rankı bir olan $\{M_x\}$ yerel ölçüm işlemcileri uygulanıp, ölçüm sonucu elde edilen durumda saflaştırıcı sistem üzerinden kısmi iz alınarak, Lemma 5.1 gereği

$$\rho^{AB} = \sum_x \text{Tr}_R[(\sqrt{M_x} \otimes I^{AB}) P^{RAB} (\sqrt{M_x} \otimes I^{AB})] = \sum_x p_x P_x^{AB}, \quad (5.39)$$

şeklinde saf durum ayrışımı elde edilir. Burada $\rho^R = \text{Tr}_{AB} P^{RAB}$ saflaştırıcı sistemin indirgenmiş durumu olup, $p_x = \text{Tr}_R M_x \rho^R$ karışım olasılıklarını göstermektedir. Ortonormal $\{|x\rangle\}$ baz vektörlerini p_x olasılıklarının etiketlediği \mathcal{H}_X Hilbert uzayına sahip bir X sistemi kullanılarak aşağıdaki üç parçalı klasik-kuantum durum yazılabilir:

$$\rho^{XAB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes P_x^{AB}. \quad (5.40)$$

Bu durumda B sistemi üzerinden kısmi iz alınarak elde edilen

$\rho^{XA} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_i^A$ durumunun $S(A|X) = S(AX) - S(X) = \sum_x p_x S(\rho_i^A)$ şeklindeki koşullu entropisi, (5.30) denklemindeki oluşum dolanıklığı ifadesinde en küçük değeri aranan ortalama entropidir. Böylece oluşum dolanıklığının eşdeğer bir yazımı olan

$$E_f(AB) = \inf_{\mathbb{M}} \left\{ S(A|X); \rho^{XA} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_i^A \right\} \quad (5.41)$$

denkleminde ulaşılır (Türkmen vd. 2016). Burada \mathbb{M} rankı bir olan elemanların oluşturduğu POVM'u temsil etmektedir.

5.3.2 Klasik korelasyon: Holevo niceliği

$C(R \rightarrow B)$ şeklinde gösterilen $\rho^{RB} = Tr_A P^{RAB}$ durumdaki klasik korelasyon, $\rho^B = Tr_A P^{RAB} = \sum_x p_x \rho_x^B$ durumunun Holevo niceliği (*Holevo quantity*) denilen,

$$\chi(\{p_x, \rho_x^B\}) = S\left(\sum_x p_x \rho_x^B\right) - \sum_x p_x S(\rho_x^B) \quad (5.42)$$

bağıntısıyla belirlenir. von Neumann entropisinin konkavlık özelliğinden dolayı pozitif değerler alan Holevo niceliği; göndericinin x klasik mesajını ρ_x^B durumlarına kodlayarak p_x olasılıklarıyla alıcıya gönderdiği bilişim aktarım sürecinde, alıcının kendisine gelen durumlara POVM uygulayarak gönderilen mesajla ilgili elde edebileceği, erişilebilir bilişim (*accessible information*) denilen niceliğin üst sınırını belirler (Holevo 2012).

Üç parçalı sistemlerin iki parçalı alt sistemlerindeki klasik korelasyonlar ve oluşum dolanıklığının sınırlarını belirlemede Koashi-Winter monogami bağıntısı önemlidir (Koashi ve Winter 2004). Aşağıdaki lemmada bu bağıntının alternatif bir ispatı yapılacaktır.

Lemma 5.2 (Türkmen vd. 2016): ρ^{RAB} üç parçalı saf durumundan indirgenmiş ρ^{AB} durumundaki $E_f(AB)$ oluşum dolanıklığı ve $C(R \rightarrow B)$ ile gösterilen R ve B sistemleri arasındaki klasik korelasyonların toplamı

$$E_f(AB) + C(R \rightarrow B) = S(B) \quad (5.43)$$

şeklinde B sisteminin entropisine eşit olur.

İspat: $\rho^B = \sum_x p_x \rho_x^B$ durumunun Holevo niceliği $\rho^{XB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x^B$ bileşik durumunun karşılıklı bilişimiyle

$$\chi(\{p_x, \rho_x^B\}) = S(X:B) = S(B) - S(B|X) \quad (5.44)$$

şeklinde yazılır. $C(R \rightarrow B)$ klasik korelasyonu, R sistemi üzerinde tanımlı rankı bir olan elemanlarda oluşan \mathbb{M} POVM'u üzerinden Holevo niceliğinin maksimum değeri olduğundan

$$C(R \rightarrow B) = S(B) - \inf_{\mathbb{M}} S(B|X) \quad (5.45)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte $E_f(AB) = E_f(BA)$ özelliği ve (5.41) bağıntısından yararlanılarak (5.43) ifadesine ulaşılır. ■

Bu durumda Lemma 5.1 ve Lemma 5.2'nin sonuçları kullanılarak ρ^{RQE} saf durumlarında Koashi-Winter monogami bağıntısı

$$E_f(QE) + C(R \rightarrow E) = S(E) \quad (5.46)$$

biçiminde yazılır. Toplam korelasyonları nicelendiren karşılıklı bilişimden klasik korelasyonların çıkarılmasıyla toplam kuantum korelasyonu nicelendiren kuantum diskort elde edilir. Q ve E sistemleri arasındaki kuantum diskort

$$D(Q \rightarrow E) = S(Q: E) - C(Q \rightarrow E) \quad (5.47)$$

olur. (5.46) denkleminde $R \leftrightarrow Q$ değişimi yapılırsa

$$E_f(RE) + C(Q \rightarrow E) = S(E) \quad (5.48)$$

sonucu elde edilir. Saf üç parçalı durumlarda geçerli (4.26) özdeşliklerinden üçüncüsü olan

$$2S(E) = S(R: E) + S(Q: E) \quad (5.49)$$

denklemi (5.48) denkleminden çıkarıldığında şu sonuca ulaşılır:

$$S(R: E) - E_f(RE) + D(Q \rightarrow E) = S(E). \quad (5.50)$$

ρ^{RQE} saf Markov durumunda $\rho^{RE} = \rho^R \otimes \rho^E$ olduğundan

$$S(R: E) = 0 = E_f(RE) = D(R \rightarrow E) = C(R \rightarrow E) \quad (5.51)$$

olur. (5.46), (5.48) ve (5.50) denklemlerinde (5.51) sonuçları kullanılırsa

$$E_f(QE) = D(Q \rightarrow E) = C(Q \rightarrow E) = S(E) = \frac{1}{2}S(Q: E) \quad (5.52)$$

eşitlikleri elde edilir (Türkmen vd. 2016). Bu eşitliklerden çevrenin saf olmadığı her saf Markov durumda; indirgenmiş dinamik kuantum kanalla betimlense de, sistemle çevresi arasında dolanıklık dahil her türden korelasyonun olduğu anlaşılmaktadır.

Çevrenin saf olması durumunda Markov durum, sistemle çevresinin hiçbir korelasyon içermeyen çarpım durumunda olduğu (5.21) denklemindeki birinci formda olmak

zorundadır. Diskort toplam kuantum korelasyonu nicelendirildiği için, diskortla klasik korelasyonun toplamının toplam korelasyonu belirleyen karşılıklı bilişime eşit olması da aşikâr bir sonuçtur. Ayrıca kuantum dolanıklık saf durumlarda olabilecek tek kuantum korelasyon türü olduğundan ρ^{QE} durumunun (5.21) denklemindeki ikinci formda olması halinde diskortun dolanıklığa eşit olması da doğaldır. Kuantum korelasyonlarla klasik korelasyonların her zaman birbirine eşit olması ise bu durumların ilginç özelliklerindedir.

Çevrenin indirgenmişinin saf olmadığı durumda, dolanıklık dışında başka kuantum korelasyon içermeyen saf olmayan ρ^{QE} durumları elde edilecektir. Bu özellik saf olmayan dolanık durumların elde edilmesinde önemli olabilir.

Saf Markov durumlar indirgenmiş dinamiğin tamamen pozitif olması için korelasyonları esas alan incelemelerin yetersiz olduğunu, her hangi bir korelasyon türünün olmasının belirleyici olmadığını göstermesi açısından da önemlidir.

Markov durum olma özelliği dinamik boyunca korunuyorsa, gelişimin her aşaması kuantum kanalla betimlenebileceği için sürecin tamamını tarif eden kuantum kanal bölünebilirdir. Bu nedenle de dinamik Markov süreçtir (Türkmen vd. 2016).

5.5 Kuantum Hata Düzeltimi

4.2 bölümünde giriş Markov durumuken DPI'nin daima sağlandığı ve eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter koşulun çıkışın da Markov durum olması gerektiği gösterildi. 5.4 bölümünde ise OQS bir Markov durumun indirgenmişiyse, sistemin gelişiminin her zaman kuantum kanalla betimleneceği ortaya koyuldu. Bu kesimde ise Markov durumların QEC bağlamındaki önemi tartışılacaktır.

OQS'ler çevreleriyle etkileşmelerine bağlı olarak gürültü (*noise*) denilen bozucu etkilere maruz kalırlar. Gönderilmek istenen bilişimin kodlandığı, bilişimin taşıyıcısı olan ρ^Q durumu, gürültülü bir ortamda çıkışa ulaştığında başka bir σ^Q durumuna dönüşür.

Gürültünün bozucu etkisinin sonucu olarak çıkış durumundan gönderilen bilişimin tamamını elde etmek çoğunlukla mümkün değildir. Çıkış durumundaki bozulmaları mümkün olduğunca onarıp, giriş durumuna göre en az değişmiş durumları oluşturmak mümkün müdür? Bunun için çevreyle etkileşimdeki gürültülerin elden geldiğince modellenmesi ve çıkış durumunda mümkünse bu gürültüleri onarıcı işlemler uygulanması gerekir. Bu onarma işlemine QEC denir (Schumacher 1996, Schumacher ve Nielsen 1996, Knill ve Laflamme 1997, Terhal 2015). Klasik veya kuantum bilişim aktarım süreçlerindeki en önemli aşamalardan biri hata düzeltimidir. Bu aşama gerçekleştirilip, yeterli seviyede düzeltmeler yapılmadan güvenli iletişim olanaksızdır. Bu düzeltim işlemi sonrasında giriş durumu tam olarak elde edilebiliyorsa mükemmel QEC yapılmış demektir. Bilişim işleme sürecinde

$$\rho^Q \xrightarrow{\Lambda} \sigma^Q \xrightarrow{\mathcal{D}} \sigma^{Q'} \quad (5.53)$$

şeklindeki bir dönüşümde, çıkış durumuna uygulanan $\mathcal{D}(\sigma^Q)$ kanalı hata düzeltim işlemini temsil etmektedir. Bu işlem sonucu elde edilen düzeltilmiş durum $\sigma^{Q'} = \rho^Q$ oluyorsa mükemmel QEC gerçekleşmiş demektir. Mükemmel QEC yapıldığında

$$\mathcal{D}\Lambda(\rho^Q) = \rho^Q \quad (5.54)$$

olacağından, \mathcal{D} kanalı Λ kanalının sol tersi olmaktadır. Bir kanalın sol tersinin olabilmesi için Kraus işlemcilerinin sağlaması gereken özellikler bağlamında mükemmel QEC için cebirsel koşullar (Knill ve Laflamme 1997), bilişim niceliklerinin sağlaması gereken özelliklerle de entropik koşullar (Schumacher ve Westmoreland 2010) belirlenmiştir. Entropik koşul olarak bir süreçte mükemmel QEC olabilmesi için gerek ve yeter koşul dolanıklığın bilişim ölçüsü olan (4.13) denkleminde tanımlanan OQS'yle yardımcı ρ^R sistemi arasındaki koherent bilişimin korunmuş olmasıdır (Schumacher 1996).

Giriş ρ^{RQE} durumu Q koşullu bir saf Markov durumken (4.13) denklemindeki

$$I_c(R:Q) = S(R:Q) - S(R) \quad (5.55)$$

koherent bilişim niceliğinin korunabilmesi için gerek ve yeter koşul çıkış σ^{RQE} durumunun da bir saf Markov durum olmasıdır. R sisteminin dinamikten etkilenmediği düşünülürse, koherent bilişimin korunduğu süreçlerde karşılıklı bilişimin de korunacağı (5.55) ifadesinden anlaşılmaktadır. Sonuçta saf Markov durum olma özelliğinin korunduğu gelişimlerde mükemmel hata düzeltimi yapılabilir.

Burada şu sorulabilir: Markov durumların kuantum hata düzeltimi bağlamında getirdiği bir yenilik var mıdır? 2.2.1 bölümünde vurgulandığı gibi indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla betimlenmesini garantileyebilmek için geleneksel yaklaşım sistem-çevre giriş durumunu çarpım durumu almaktır. Kuantum hata düzeltim incelemelerinde de bu yaklaşım benimsenir. Halbuki 5.3 ve 5.4 bölümlerinde gösterildiği gibi Markov durumlarda sistemle çevresi arasında her türden korelasyon olmasına rağmen indirgenmiş dinamik kuantum kanallarla betimlenebilir. Yani buradaki yenilik, başlangıç korelasyonları durumunda da mükemmel hata düzeltiminin mümkün olmasıdır.

5.5.1 Hata düzeltim kanallarının oluşturulması

Şimdi saf Markov durum olmanın korunduğu gelişim süreçlerinde \mathcal{D} gönderiminin nasıl oluşturulacağı incelenecektir. Giriş (5.17) denklemindeki gibi

$$|\psi^{RQE}\rangle = \sum_{jk} \sqrt{\kappa_j \mu_k} |r_j\rangle \otimes |q_{jk}\rangle \otimes |\varepsilon_k\rangle \quad (5.56)$$

biçiminde bir saf Markov durumken, çıkış durumu da

$$|\phi^{RQE}\rangle = \sum_{lk} \sqrt{\kappa_l \lambda_k} |r_l\rangle \otimes |p_{lk}\rangle \otimes |f_k\rangle \quad (5.57)$$

şeklinde bir Markov durumu olsun. Burada λ_k 'lar ve $|f_k\rangle$ 'lar çevrenin çıkış özdeğerlerini ve özvektörlerini gösterirken; $|p_{jk}\rangle$ 'lar ise sistemin özvektörleridirler. Çıkış $\sigma^{RQ} = \Lambda(\rho^{RQ})$ durumunu giriş ρ^{RQ} durumuna dönüştürecek kanal

$$\rho^{RQ} = \sum_k \mu_k |\psi_k^{RQ}\rangle \langle \psi_k^{RQ}|, \quad \sigma^{RQ} = \sum_m \lambda_m |\varphi_m^{RQ}\rangle \langle \varphi_m^{RQ}| \quad (5.58)$$

ifadelerinden yararlanılarak kurulabilir. Burada

$$|\psi_k^{RQ}\rangle = \sum_j \sqrt{\kappa_j} |r_j\rangle \otimes |q_{jk}\rangle, \quad |\varphi_m^{RQ}\rangle = \sum_l \sqrt{\kappa_l} |r_l\rangle \otimes |p_{lm}\rangle \quad (5.59)$$

vektörleri $\langle \psi_m^{RQ} | \psi_k^{RQ} \rangle = \delta_{mk} = \langle \varphi_m^{RQ} | \varphi_k^{RQ} \rangle$ olan ortonormal durumlardır. Bu durumlardan yararlanılarak yazılan

$$A_{kl} = \sqrt{\mu_k} |\psi_k^{RQ}\rangle \langle \varphi_l^{RQ}| \quad (5.60)$$

çizgisel işlemcinin çıkış durumundaki $|\varphi_m^{RQ}\rangle$ vektörüne etkisi $A_{kl} |\varphi_m^{RQ}\rangle = \delta_{lm} \sqrt{\mu_k} |\psi_k^{RQ}\rangle$ olduğundan,

$$A_{kl} \sigma^{RQ} A_{kl}^\dagger = \lambda_k \mu_l |\psi_l^{RQ}\rangle \langle \psi_l^{RQ}| \quad (5.61)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu işlemciler RQ durumları üzerinde mükemmel hata düzeltimi yapan \mathcal{D}^{RQ} kanalının Kraus işlemcileridir. Çünkü kanalın çıkış durumuna etkisi

$$\sum_{kl} A_{kl} \sigma^{RQ} A_{kl}^\dagger = \mathcal{D}^{RQ}(\sigma^{RQ}) = \sum_{kl} \lambda_k \mu_l |\psi_l^{RQ}\rangle \langle \psi_l^{RQ}| = \rho^{RQ} \quad (5.62)$$

şeklinde giriş durumunu elde etme imkanı sağlamaktadır (Türkmen ve Verçin 2018). (5.60) denklemindeki Kraus işlemcileri

$$\sum_{kl} A_{kl}^\dagger A_{kl} = \mathbb{1}_{\text{supp}(RQ)} \quad (5.63)$$

eşitliğini sağlayan, σ^{RQ} durumunun desteği üzerinde iz koruyan gönderimlerdir. Sonuç olarak σ^{RQ} durumunun desteği üzerinde tanımlı \mathcal{D}^{RQ} kuantum kanalı ρ^{RQ} durumunun gelişim sürecinde oluşan hataları tam olarak düzeltebilmektedir.

Sadece Q sistemi üzerindeki hataları düzeltmek için de Kraus işlemcileri

$$K_{kl} = \sqrt{\mu_k} \sum_n |q_{nk}\rangle \langle p_{nl}| \quad (5.64)$$

şeklinde olan \mathcal{D}^Q ile gösterilen bir kanal oluşturulabilir. Bu kanalın çıkış $\sigma^Q = \sum_{jm} \kappa_j \lambda_m |p_{jm}\rangle \langle p_{jm}|$ durumuna etkisi,

$$\mathcal{D}^Q(\sigma^Q) = \sum_{kl} K_{kl} \sigma^Q K_{kl}^\dagger = \sum_{jk} \kappa_j \mu_k |q_{jk}\rangle \langle q_{jk}| = \rho^Q \quad (5.65)$$

olur. Görüldüğü gibi \mathcal{D}^Q kanalı da Q sistemi üzerinde mükemmel hata düzeltimi yapmaktadır. Bu kanalın σ^Q durumunun desteği üzerinde iz koruma özelliği

$$\sum_{kl} K_{kl}^\dagger K_{kl} = \sum_{nl} |q_{nk}\rangle \langle p_{nl}| = \mathbb{1}_{\text{supp}(Q)} \quad (5.66)$$

ifadesinden anlaşılmaktadır. \mathcal{D}^Q kanalının (4.1) denkleminde tanımlandığı gibi yerel bir kanal olduğu da

$$(id_R \otimes \mathcal{D}^Q)(\sigma^{QR}) = \rho^{QR} \quad (5.67)$$

denkleminden görülür.

RQ ve Q sistemleri için elde edilen mükemmel hata düzeltim kanallarının (5.61) ve (5.64) ifadelerindeki Kraus işlemcilerinin her ikisinin de çevrenin başlangıç özdeğerlerine bağlı olması alıcının bu kanalları oluşturmasını zorlaştırdığı düşünülebilir. Fakat Q ve R

sisteminin başlangıç spektrumuna sahip olunursa; Q durumunun başlangıç c_{ij} özdeğerleri $c_{ij} = \kappa_i \mu_j$ şeklinde olduğundan, çevrenin başlangıç özdeğerine de sahip olunmuş demektir. Bu zorluğun üstesinden gelmenin bir yolu da, çevrenin $1_E/d_E$ şeklinde en saf olmayan durumda olması yani tüm özdeğerlerinin $1/d_E$ olmasıdır.

Geleneksel QEC kanallarında sistem-çevre durumu başlangıçta çarpım durumunda alındığı için kanalların sistemin durumuna bağımlılıkları yoktur. Başlangıç korelasyonları varsa kanalların durum bağımlılıkları olduğu 5.3 bölümünde elde edilen kanallarda açıkça görülmektedir. Bu bağımlılık başlangıç korelasyonlarını hesaba katmanın doğal bir sonucudur. Kanalın duruma bağımlı olması makul, durumdan bağımsız kanal düşüncesi kısıtlayıcı olarak görülebilir. Burada her türden korelasyonun olması halinde de hata düzeltiminin mümkün olduğunun gösterilmesinin gerçekçi uygulamalar için önemli olduğu değerlendirilmektedir.

Hata düzeltim kanalları oluştururken Markov durum olmanın korunduğu gelişimlerle ilgilenildi. Acaba gerçekten bu tür gelişimler var mıdır? Bu soruya cevap olması için (5.21) denkleminde gösterilen iki tür Markov durum ailesini koruyan bileşik üniter gelişimlerin olduğu gösterilmiştir (Türkmen ve Verçin 2018). Ayrıca (5.21) ifadesindeki her iki form için hata düzeltim kanalları da elde edilmiştir. Bu formlardan ilki olan

$$\rho^{RQE} = |\psi^R\rangle\langle\psi^R| \otimes |\varphi^{QE}\rangle\langle\varphi^{QE}| \quad (5.68)$$

ifadesinde, her üniter gelişim için Markov durum olma özelliğinin korunduğu açıkça görülmektedir. Çünkü çıkış

$$\sigma^{RQE} = |\psi^R\rangle\langle\psi^R| \otimes U_{QE} (|\varphi^{QE}\rangle\langle\varphi^{QE}|) U_{QE}^\dagger \quad (5.69)$$

durumunda da her zaman $\sigma^{RE} = \sigma^R \otimes \sigma^E$ olduğundan, her U_{QE} için Markov durum olma özelliği korunur. İkinci form için de saf Markov durum olmayı koruyan bileşik üniter gelişimlerin varlığı gösterilmiştir (Türkmen ve Verçin 2018). Sonuç olarak burada gösterilen kanalların elde edilebileceği üniter gelişimler vardır.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Sistemin geleceği, dinamiğinin geçmişine de bağımlılık gösterdiği için hafızalı süreçler de denilen Markov olmayan gelişimlerin kuramsal olarak incelendiği bu çalışmada yapılanlar dört başlıkta toplanabilir. Bunlardan üçü Markov olmama olgusunun tanımlanması, nicelendirilmesi ve algılanmasıdır. Dördüncüsü ise Markov durumların OQS dinamiği kapsamındaki işlevlerinin incelenmesidir. Bu bölümde bahsi geçen dört başlık altında tezde ulaşılan sonuçlar ve bu sonuçlarla ilgili değerlendirmeler yapılacaktır.

İkinci bölümde de değinildiği gibi Markov olmama özelliği iki şekilde tanımlanmaktadır. Bunlar hafıza etkilerine bağlı olarak kuantum sistemlerin hipotez testi kapsamında ayırt edilebilirliğinin artması (Tanım 2.2) ve dinamiği betimleyen kuantum kanalın CP bölünebilir olmasıdır (Tanım 2.1). Ayırt edilebilirlik artışı tanımının, hafıza etkisini kuantum bilişim kuramı bağlamında anlamlandırma imkânı olmasından dolayı çekicidir. Fakat ayırt edilebilirliğin pozitif bölünebilir süreçlerde azalıyor olması, indirgenmiş dinamik gönderimlerin CP'liğine ihtiyaç duymaması önemli bir problemdir. CP'liğin kuantum mekaniğinde bileşik sistemlerin gelişiminin tutarlı şekilde tarif edilebilmesi için hayati önemde olduğu dikkate alınarak, bu çalışmada ayırt edilebilirlik temelli tanım benimsenmemiştir. Durumlarla ilgili önsel hiçbir bilginin olmadığı, izsiz Helstrom matrisinin iz normu ya da durumlar arasındaki iz uzaklığının artması üzerinden önerilen ilk ayırt edilebilirlik tanımı (Breuer vd. 2009), pozitif bölünebilir süreçlerdeki hafıza etkilerini dahi tam olarak karakterize etmemektedir. Çünkü iz uzaklığının gelişim sürecindeki davranışında, kanalın ünital olmayan kısmından kaynaklanabilecek hafıza etkilerinin rolü yoktur (Bylicka vd. 2017). Ayrıca Markov olmama özelliğinin kuantum bilişim kuramı bağlamındaki anlamını belirlemede hipotez testi biraz dolaylı bir yöntem olup, hafıza etkilerinin mümkünse doğrudan entropik niceliklerle karakterize edilmesi uygun olacaktır. Bu bağlamda hafıza etkisini karakterize etmek için fiziksel motivasyonu olan, doğrudan sistemin bilişim nicelikleriyle yapılacak analizlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Gelişim sürecinde indirgenmiş dinamiği betimleyen gönderimlerin CP'likten ayrılmasını esas alan Markov olmama tanımı (Tanım 2.1), kuantum mekaniğinin bileşik sistem yapısıyla uyumlu olmasından dolayı tercih edilmiştir. Fakat CP'liğin ihlal edilmesinin

fiziksel anlamı yeterince açık olmadığı için, hafıza etkilerinin fiziksel kökenlerini anlama imkânı vermemektedir. Hâlbuki gönderimlerin CP olmasıyla ilgili 2.2.1 bölümünde anlatılan sağlam fiziksel gerekçeler vardır. Bu nedenle bölünebilirliği esas alan Markov olmama tanımının matematiksel netliği cazip olsada, fiziksel anlamının yeterince açık olmadığı değerlendirilmektedir.

Yukarıda bahsedilen iki tanımı bağdaştırmak için pozitif bölünebilir kanalların CP bölünebilir kanallara kısıtlanması gerekir. Bunun için de en az sistemle aynı boyuta sahip yardımcı sisteme ihtiyaç vardır. Bu kapsamdaki çalışmalarda indirgenmiş dinamik gönderimlerin varlığını garantilemek amacıyla tüm gelişim boyunca kanallarının terslenebilir olmasına ihtiyaç duyulmuştur (Chruściński vd. 2011, Bylicka vd. 2017). Çünkü gelişim boyunca çizgisel gönderimlerin dahi tanımlanamadığı, dinamiğin tekil (*singular*) davranış gösterdiği zamanlar olabilir (Hou vd. 2012). Yakın zamanda yapılan bir çalışmada kanalları terslenme koşulunu da içerecek şekilde gönderimlerin çekirdeklerinin (2.29) denklemindeki koşulu sağlaması gerektiği gösterilmiştir (Bylicka vd. 2017).

İndirgenmiş dinamiğin betimlenmesinde diğer bir yöntem de master denklemdir. Bölünebilir süreçlerde master denklemin üreticinin yapısı (2.65) denkleminde gösterildiği gibi zamana bağlı Lindblad ya da GKSL formundadır. Üreticinin çizgiselliği kullanılarak elde edilen (2.61) denklemindeki kanonik form, Markov olmayan süreçlerde de master denklemini karakterize etmektedir. Burada önemli olan çizgisel üreticinin tüm dinamik boyunca varlığının garanti edilmesi, olabilecek tekilliklerin dikkate alınmasıdır. Kanalların terslenebildiği süreçlerde çizgisel üreticinin her zaman vardır. Uygulamada indirgenmiş dinamiğin üreticini baştan bilmek mümkün değildir. (2.11) denklemindeki Hamilton işlemcisi bilinmektedir. Asıl zorluk bu Hamilton işlemcisinden indirgenmiş dinamiğin üreticini elde etmektir. Mikroskopik üretim denilen bu süreçte elde edilecek master denklemin, indirgenmiş dinamiğin CP'liğini bozmaması gerekir. Markov süreçlerde bu üretimin nasıl yapılabileceğiyle ilgili etkileşimin özelliklerine dayanan (zayıf veya tekil bağlaşım), fiziksel gerekçeleri olan yaklaşıklıklar vardır (Born-Markov yaklaşıklığı, seküler yaklaşıklık). Fakat Markov olmayan süreçlerde bu tür fiziksel temeli olan yaklaşıklıklar yapılamadığı için, indirgenmiş dinamiğin kuantum kanalla

betimlenmesini garantileyecek genel yöntemler geliştirilememiştir. Hafızalı süreçlerin master denklemlerinin belirlenmesinde en önemli ve zorlu açık problem bu husustur. Bu problemle ilgili ciddi gelişmelerin; OQS dinamiğindeki hem kuramsal hemde deneysel çalışmaların daha iyi anlaşılmasında ve kuantum mekaniğinin temellerine ilişkin tartışmalarda ilerlemeler sağlayacağı öngörülmektedir.

Belirli özellikleri göstermesinde sürecin bölünebilir olması gerek ve yeter koşul olan fonksiyonlar birer Markov olmama ölçüsüdür. 3. bölümde tanıtılan bu ölçü fonksiyonlarının her biri, hafızalı süreçlerin farklı özellikleri aracılığıyla yapılmış Markov olmama tanımlarıdır. Bu nedenle ölçüler arasında kıyaslama yapılamaz, fakat hesaplama kolaylıkları açısından bir karşılaştırma yapılabilir. Bu çerçevede CP gönderimlerin Choi-Jamiolkowski temsiline dayanan, sürecin CP'likten ayrılma miktarını nicelendiren RHP ölçüsü (Denklem 3.5) en kullanışlı ölçü olarak değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmede RHP ölçüsünün diğer ölçülerde olduğu gibi optimizasyon gerektirmemesi etkili olmuştur.

Bölünebilir süreçlerde monoton davranış gösteren özelliklere sahip fonksiyonlarla da sürecin hafıza özelliğini tespit etmede kullanılan Markov olmama tanıkları oluşturulur. Bir tanık ne kadar fazla sürecin hafıza etkisini tespit edebiliyorsa o kadar yetkindir. Tanıklar arasında karşılaştırma yaparken aynı sistem üzerinde hangi tanığın hafıza etkilerini algıladığına bakılır. Bu kapsamda tanıkların kübit ve iki kübit sistemlerindeki bazı süreçlerdeki hafıza etkilerini algılama performansları karşılaştırılmıştır. Her Markov olmama ölçüsü aynı zamanda bir Markov olmama tanığı olarak görülebileceğinden (Tersi doğru değildir), kübit kanallarında ölçü ve tanıkların birlikte değerlendirildiği incelemeler de vardır (Jiang ve Luo 2013, Addis vd 2014). Bu tür karşılaştırmalar incelenen sürece özgü sonuçlar olup, genel sonuçlara ulaşmayı sağlamamaktadır.

Markov olmama özelliğinin korelasyonlarla ilişkisini en kapsamlı tespit edebilen, süreç içerisinde karşılıklı bilişimin artışını hafıza etkisi olarak kabul edildiği (4.12) denklemindeki LFS tanığı olduğu değerlendirilmiştir. Karşılıklı bilişim hem klasik hem de kuantum korelasyonları nicelendirdiği için, dolanıklık ve diskort temelli tanıklardan daha yetkindir (Neto vd. 2016). İz uzaklığını esas alan BLP tanığı ile korelasyon temelli

LFS tanığının karşılaştırıldığı örneklerden de (Addis vd. 2014) genel sonuçlara ulaşmak mümkün değildir. Bu karşılaştırma çok anlamlı da değildir. Çünkü OQS dinamiğinde korelasyon niceleyicilerinin davranışıyla, uzaklık fonksiyonlarının davranışı arasında doğrudan bir ilişki kurulmamaktadır.

Hafıza etkisinin nicelendirilmesi ve tespit edilmesi kapsamında, bu özelliğin farklı yönlerini esas alan, Markov olmama ölçü ve tanıklarıyla ilgili çalışmalar da yoğun olarak devam etmektedir (Breuer vd. 2016, De Vega ve Alonso 2017, Li vd. 2018). Yukarıda tanımları değerlendirilen söylenenler, Markov olmama ölçüleri için de geçerlidir. Çünkü üçüncü bölümde de belirtildiği gibi ölçüler, hafıza etkisinin farklı özellikler çerçevesindeki tanımlarıdır. Oluşturulacak ölçünün, hafıza etkisinin fiziksel anlamının belirgin olması ve hesaplanabilir olması önemlidir. Markov olmama tanıklarının performanslarına ilişkin ise, incelenen modellerden bağımsız kapsamlı değerlendirmelere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmanın özgün sonuçlarından biri karşılıklı bilişimin ve koherent bilişimin DPI'ni sağlama koşullarının üç parçalı (sistem, çevresi ve dinamiğe katılmayan yardımcı sistem) sistemlerde koşullu karşılıklı bilişimin davranışıyla ilişkilendirilmesidir (Teorem 4.1). Giriş Markov durumuyken DPI'nin her zaman sağlandığı ve eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun çıkış durumunun da Markov durum olması gerektiği gösterildi. Ayrıca girişin Markov durum olmasının DPI'nin sağlanması için sadece yeter koşul değil gerek koşul da olduğu iddiasının doğru olmadığı, Markov olmayan giriş durumlarında da DPI'nin sağlandığı örneklerle gösterilmiştir (Türkmen vd. 2017). Giriş Markov durum değilken zaman içerisinde Markov durum oluşması dinamikte DPI'nin ihlal edildiğini söyler. Bu ihlal de sürecin Markov olmama özelliğini tespit eder.

Markov durumlarla ilgili 4.2 ve 5. bölümlerde anlatılanlardan üç yeni sonuç vurgulanmalıdır. İlki sistem-çevre giriş durumu bir Markov durumun indirgenmiş durumuysa, OQS'in gelişimini tarif eden kuantum kanalların Kraus işlemcilerinin yapısı net olarak belirlenmiştir. İkincisi saf Markov durumların detaylı incelemesi yapılarak bu durumların kanonik formu ve temel özellikleri tespit edilmiştir. Üçüncüsü saf Markov durumlarının korelasyon analizi yapılarak, çevre saf değilken bu durumlarda her türden

korelasyonun olduğu ve bu korelasyonların nicel değerinin çevrenin entropisine eşit olduğunun gösterilmesidir. Son olarak giriş saf Markov durumken, çıkış durumunda kanalın gürültüsünden kaynaklanan kayıpları telafi edebilmek için mükemmel QEC yapılabilmesi için, çıkış durumunun da saf Markov durum olması gerektiği gösterilmiştir. Bu durumda mükemmel QEC'nin yapılabileceği kuantum kanallar oluşturulmuştur. Ayrıca saf Markov durumu koruyan üniter gelişimlerin varlığı (5.21) denklemindeki iki Markov durum sınıfı için incelenmiştir.

OQS ve çevresi bir Markov durumun indirgenmişi olduğu durumlarda, indirgenmiş dinamiğin kuantum kanallarla betimlenmesi mümkün olduğundan; Markov durum olma özelliğinin korunduğu süreçler hafızasız bölünebilir süreçlerdir. Bu çalışmada saf Markov durumlar ayrıntılı incelenmiştir. Genel Markov durumlarla hafızasız süreçler arasındaki ilişkilerin araştırılması önemli bir araştırma konusudur. Bu kapsamda Markov durumları koruyan bileşik üniter dönüşümlerin ve bu dönüşümlerden elde edilecek indirgenmiş dinamiği betimleyen kanalların özelliklerinin belirlenmesi de tez çalışmasındaki diğer açık problemlerdendir.

KAYNAKLAR

- Addis, C., Bylicka, B., Chruściński, D. and Maniscalco, S. 2014. Comparative study of non Markovianity measures in exactly solvable one- and two-qubit models. *Phys. Rev. A* 90 052103.
- Alicki, R. and Lendi, K. 2007. *Quantum Dynamical Semigroup and Applications*. (Springer. Berlin).
- Alicki, R. 1995. Comment on Reduced dynamics need not be completely positive, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3020.
- Alipour, S., Mani, A. and Reza khani, A.T. 2012. Quantum discord and non-Markovianity of quantum dynamics. *Phys. Rev. A* 85 052108.
- Barnett, S.M. and Stenholm, S. 2001. Hazards of reservoir memory. *Phys. Rev. A* 64 033808.
- Basharin, G.P., Langville, A.N., and Naumov, V.A. 2004. The life and work of A.A. Markov, *Linear Algebra Appl.* 386 3-26.
- Bennett, C.H., DiVincenzo, D.P., Smolin, J.A. and Wootters, W.K. 1996. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A* 54, 3824.
- Bhatia, R. 1997. *Matrix Analysis*. (Springer. Berlin)
- Braunstein, S.L. and Caves, C.M. 1994. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Phys. Rev. Lett.* 72 3439.
- Breuer, H-P. and Petruccione, F. 2002. *The Theory of Open Quantum Systems*, (Oxford University Press, Oxford, Cambridge, UK).
- Breuer, H-P. and Vacchini, B. 2008. Quantum Semi-Markov Processes. *Phys. Rev. Lett.* 101, 140402.
- Breuer, H-P., Laine, E-M. and Piilo, J. 2009. Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems. *Phys. Rev. Lett.* 103, 210401.
- Breuer, H. P., Laine, E. M., Piilo, J. and Vacchini, B. 2016. Non-Markovian dynamics in open quantum systems, *Rev. Mod. Phys.* 88, 021002.
- Brodutch, A., Datta, A., Modi, K., Rivas, A., Rodríguez-Rosario, C.A. 2013. Vanishing quantum discord is not necessary for completely positive maps. *Phys. Rev. A* 87, 042301.
- Buscemi, F. 2014. Complete Positivity, Markovianity, and the Quantum Data-Processing Inequality, in the Presence of Initial System-Environment Correlations. *Phys. Rev. Lett.* 113, 140502.

- Buscemi, F and Datta, N. 2016. Equivalence between divisibility and monotonic decrease of information in classical and quantum stochastic processes. *Phys. Rev. A* 93, 012101.
- Bylicka, B., Johansson, M. and Acín, A. 2017. Constructive Method for Detecting the Information Backflow of Non-Markovian Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 118, 120501.
- Carmichael, H. 2009. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer, Berlin.
- Caruso, F., Giovannetti, V., Lupo, C., and Mancini, S. 2014, Quantum channels and memory effects. *Rev. Mod. Phys.* 86, 1203.
- Chaturvedi, S and Shibata, J. 1979. Time-convolutionless projection operator formalism for elimination of fast variables. Applications to Brownian motion. *Z. Phys. B* 35, 297.
- Chitambar, E and Gour, G. 2018. Quantum Resource Theories. arXiv: 1806.06107.
- Choi, M-D. 1975. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Alg. Appl.* 10, 285-290.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2010. Non-Markovian Quantum Dynamics: Local versus Nonlocal. *Phys. Rev. Lett.* 104, 070406.
- Chruściński, D., Kossakowski, A. and Rivas, Á. 2011. Measures of non-Markovianity: Divisibility versus backflow of information. *Phys. Rev. A* 83, 052128.
- Chruściński, D. and Kossakowski, A. 2012. Markovianity criteria for quantum evolution. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 45, 154002.
- Chruściński, D., and Maniscalco, S. 2014. Degree of Non-Markovianity of Quantum Evolution. *Phys. Rev. Lett.* 112, 120404.
- Chruściński, D. and Pascazio, S. 2017. A Brief History of GKSL Equation. *Open Sys. Inf. Dyn.* 24, 1740001.
- Chruściński, D., Rivas, Á. and Størmer, E. 2018. Divisibility and Information Flow Notions of Quantum Markovianity for Noninvertible Dynamical Maps. *Phys. Rev. Lett.* 112, 080407.
- Ciccarello, F. and Giovannetti, V. 2012. Creating quantum correlations through local nonunitary memoryless channels. *Phys. Rev. A* 85, 010102(R).
- Daffer, S. Wódkiewicz, K. Cresser, J.D. and McIver, J.K. 2004. Depolarizing channel as a completely positive map with memory. *Phys. Rev. A* 70, 010304.
- Davies, E.B. 1976. *Quantum Theory of Open Systems* (London: Academic Press)

- De Vega, I. and Alonso, D. 2017. Dynamics of non-Markovian open quantum systems, *Rev. Mod. Phys.* 89, 015001.
- Dowling, J.P. and Milburn, G.J. 2003. Quantum technology: the second quantum revolution. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 361, 1655–1674.
- Fanchini, F. F., Karpat, G., Çakmak, B., Castelano, L. K., Aguilar, G. H. Farías, O. J. Walborn, S. P., Ribeiro, P. H. S. and M. C. de Oliveira. 2014. Non-Markovianity through Accessible Information, *Phys. Rev. Lett.* 112, 210402.
- Fawzi, O and Renner, R. 2015. Quantum Conditional Mutual Information and Approximate Markov Chains, *Commun. Math. Phys.* 340, 575.
- Feller, W. 1950. *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume 1, 1st Edition, Wiley, New York.
- Fuchs, C.A. and van de Graaf, J. 1999. Cryptographic Distinguishability Measures for Quantum-Mechanical States. *IEEE Trans. Inf. Theory* 45, 1216-1227.
- Furuichi, S., Yanagi, K. and Kuriyama, K. 2004. Fundamental properties of Tsallis relative entropy. *J. Math. Phys.* 45, 4868
- Gardiner, C.W. 1997. *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin)
- Gorini, V., Kossakowski, A., and Sudarshan, E.C.G. 1976. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems *J. Math. Phys.* 17, 821-825.
- Haikka, P., Johnson, T. H. and Maniscalco, S. 2013. Non-Markovianity of local dephasing channels and time-invariant discord. *Phys. Rev. A* 89, 042120
- Hall, M.J.W., Cresser, J.D., Li, L. and Anderson, E. 2014. Canonical form of master equations and characterization of non-Markovianity. *Phys. Rev. A* 87, 010103 (R).
- Haseli, S. Karpat, G. Salimi, S. Khorashad, A. S., Fanchini, F. F., Cakmak, B., Aguilar, G. H., Walborn, S. P. and Ribeiro, P. H. S. 2014. Non-Markovianity through flow of information between a system and an environment, *Phys. Rev. A* 90, 052118.
- Haseli, S., Salimi, S. and Khorashad, A.S. 2015. A measure of non-Markovianity for unital quantum dynamical maps. *Quantum Inf. Process.* 143581.
- Hayden, P., Jozsa, R., Petz, D. and Winter, A. 2004. Structure of states which satisfy strong subadditivity of quantum entropy with equality, *Commun. Math. Phys.* 246, 359-374.
- Helstrom, C. W. 1976. *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press)

- Henderson, L. and Vedral, V. 2001. Classical, quantum and total correlations. *J.Phys. A* 34, 6899.
- Holevo, A.S. 1982. *Probabilistic and Statistical Aspect of Quantum Theory.* (Amsterdam: North-Holland)
- Holevo, A.S. 2012. *Quantum Systems, Channels, Information: A Mathematical Introduction.*(de Gruyter, Berlin, Boston)
- Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M. and Horodecki, K. 2009. Quantum Entanglement. *Rev. Mod. Phys.* 81, 865-942.
- Hou, S.C., Yi, X.X., Yu, S.X., and Oh, C.H. 2011. Alternative non-Markovianity measure by divisibility of dynamical maps. *Phys. Rev. A* 83, 062115.
- Hou, S.C., Yi, X.X., Yu, S.X. and Oh, C.H. 2012. Singularity of dynamical maps. *Phys. Rev. A* 86, 012101.
- Jamiolkowski, A. 1972. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Rep. Math. Phys.* 3, 275-278.
- Jiang, M and Luo, S. 2013. Comparing quantum Markovianities: Distinguishability versus correlations, *Phys. Rev. A* 88, 034101.
- Jozsa, R. 1994. Fidelity for Mixed Quantum States. *J. Mod. Opt.* 41, 2315.
- Knill, E. and Laflamme, R. 1997. Theory of quantum error-correcting codes. *Phys. Rev. A* 55, 900.
- Koashi, M. and Winter, A. Monogamy of quantum entanglement and other correlations. *Phys. Rev. A*, 69 022309.
- Kossakowski, A. 1972. On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.* 3 247.
- Kossakowski, A. and Rebolledo, R. 2009. On the Structure of Generators for Non-Markovian Master Equations. *Open Syst. Inf. Dyn.* 16, 259.
- Kraus, K. 1983. *States, Effects and Operations* (Springer Lecture Notes in Physics vol 190) (Berlin: Springer)
- Laine, E-M., Piilo, J. and Breuer, H-P. 2010. Measure for the non-Markovianity of quantum processes. *Phys. Rev. A* 81, 062115.
- Lesniewski, A and Ruskai, M.B. 1999 Monotone Riemannian metrics and relative entropy on noncommutative probability spaces. *J. Math. Phys.* 40 5702.
- Li, L., Hall, M.J.W. and Wiseman, H.M. 2018. Concepts of quantum non-Markovianity: A hierarchy. *Phys. Rep.* 759, 1-51.

- Lieb, E. H., Ruskai, M. B. 1973. Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy. *J. Math. Phys.* 14, 1938–1941.
- Lindblad, G. 1975. Completely positive maps and entropy inequalities. *Commun. Math. Phys.* 40, 147–151.
- Lindblad, G. 1976. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.* 48, 119-130.
- Liu, B.-H., Li, L., Huang, Y.-F., Li, C.-F., Guo, G.-C., Laine, E.-M., Breuer, H.-P. and J. Piilo. 2011. Experimental control of the transition from Markovian to non-Markovian dynamics of open quantum systems. *Nat. Phys.* 7, 931.
- Liu, J., Lu, X.-M. and Wang, X. 2013. Nonunital non-Markovianity of quantum Dynamics. *Phys. Rev. A* 87, 042103.
- Liu, B.-H., Wißmann, S., Hu, X.-M., Zhang, C., Huang, Y.-F., Li, C.-F. G.-C. Guo, A. Karlsson, J. Piilo, and Breuer, H.-P. 2014. Locality and universality of quantum memory effects. *Sci. Rep.* 4, 6327.
- Lorenzo, S., Plastina, F. and Paternostro, M. 2013. Geometrical Characterization of non-Markovianity. *Phys. Rev. A* 88, 020102.
- Lu, X.-M., Wang, X. and Sun, C. P. 2010. Quantum Fisher information flow and non-Markovian processes of open systems. *Phys. Rev. A* 82, 042103.
- Luo, S., Fu, S. and Song, H. 2012. Quantifying non-Markovianity via correlations. *Phys. Rev. A* 86, 044101
- Mazzola, L., Laine, E.-M., Breuer, H.-P., Maniscalco, S. and Piilo, J. 2010. Phenomenological memory-kernel master equations and time-dependent Markovian processes. *Phys. Rev. A* 81, 062120.
- Molnar, L. 2001. Fidelity preserving maps on density operators. *Rep. Math. Phys.* 48, 299.
- Mosonyi, M. and Hiai, F. 2011. On the Quantum Rényi Relative Entropies and Related Capacity Formulas. *IEEE Trans. Inform. Theory* 57, 2474.
- Müller-Hermes, A. and Reeb, D. 2017. Monotonicity of the Quantum Relative Entropy Under Positive Maps, *Ann. Henri Poincaré* 18(5), 1777–1788.
- Nakajima, S. 1958. On Quantum Theory of Transport Phenomena: Steady Diffusion. *Prog. Theor. Phys.* 20, 948.
- Neto, A.C., Karpat, G. and Fanchini, F.F. 2016. Inequivalence of correlation-based measures of non-Markovianity. *Phys. Rev. A* 94 032105.
- Nielsen, M.A. and Chuang, I. 2010. *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition, (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

- Norris, J.R. 1997. Markov Chains (Cambridge University Press, Cambridge)
- Ollivier, H. and Zurek, W.H. 2001. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations, Phys. Rev. Lett. 88, 017901.
- Pechukas, P. 1994. Reduced dynamics need not be completely positive, Phys. Rev. Lett. 73, 1060.
- Pechukas, P. 1995. Pechukas replies, Phys. Rev. Lett. 75, 3021.
- Perez-Garcia, D., Wolf, M.M., Petz, D. and Ruskai, M.B. 2006. Contractivity of positive and trace-preserving maps under L_p norms J. Math. Phys. 47, 083506.
- Petz, D. 2003. Monotonicity of quantum relative entropy revisited. Rev. Math. Phys. 15, 79.
- Rajagopal, A. K., Usha Devi, A. R. and Rendell, R. W. 2010. Kraus representation of quantum evolution and fidelity as manifestations of Markovian and non-Markovian forms, Phys. Rev. A 82, 042107.
- Rivas, A., Huelga, S.F. and Plenio, M.B. 2010. Entanglement and Non-Markovianity of Quantum Evolutions. Phys. Rev. Lett. 105 050403
- Rivas, A. and Huelga, S.F. 2011. Open Quantum Systems: An Introduction. (Springer. Berlin).
- Rivas, A., Huelga, S.F. and Plenio, M.B. 2014. Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection. Rep. Prog. Phys. 77.
- Rodriguez-Rosario, C. A., Modi, K., Kuah, A.-m., Shaji, A. and Sudarshan, E.C.G. 2008. Completely positive maps and classical correlations. J. Phys. A 41, 205301.
- Ruskai, M.B. 1994. Beyond strong subadditivity? Improved bounds on the contraction of generalized relative entropy. Rev. Math. Phys. 06, 1147.
- Ruskai, M.B. 2002. Inequalities for quantum entropy: A review with conditions for equality. J. Math. Phys. 43, 4358.
- Schaller, G. and Brandes, T. 2008. Preservation of positivity by dynamical coarse graining. Phys. Rev. A 78, 022106.
- Schaller, G. and Brandes, T. 2009. Systematic perturbation theory for dynamical coarse-graining. Phys. Rev. A 79, 032110.
- Schumacher, B. 1996. Sending entanglement through noisy quantum channels. Phys. Rev. A, 54 2614.
- Schumacher, B. and Nielsen, M.A. 1996. Quantum data processing and error correction. Phys. Rev. A, 54 2629.

- Schumacher, B. and Westmoreland, M.D. 2002. Approximate quantum error correction. *Quant. Info. Proc.* 1, 5.
- Schumacher, B. and Westmoreland, M.D. 2010. *Quantum Processes, Systems, and Information.* (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- Shabani, A. and Lidar, D.A. 2005. Completely positive post-Markovian master equation via a measurement approach. *Phys. Rev. A* 71, 020101(R).
- Shabani, A., Lidar, D.A. 2009. Vanishing quantum discord is necessary and sufficient for completely positive maps. *Phys. Rev. Lett.* 102, 100402.
- Shibata, N. H. F. and Takahashi, Y. 1977. A generalized stochastic Liouville equation. Non-Markovian versus memoryless master equations. *J. Stat. Phys.* 17, 171.
- Song, H., Luo, S. and Hong, Y. 2015. Quantum non-Markovianity based on the Fisher-information matrix. *Phys. Rev. A*, 91 042110.
- Stinespring, W. F. 1955. Positive functions on C*-algebras. *Proc. Am. Math. Soc.* 6 211–316.
- Streltsov, A., Kampermann, H. and Bruß, D. 2011. Behavior of Quantum Correlations under Local Noise. *Phys. Rev. Lett.* 107, 170502.
- Terhal, B.M. 2015. Quantum error correction for quantum memories. *Rev. Mod. Phys.* 87, 307.
- Türkmen, A., Verçin, A. and Yılmaz, S. 2016. Reduced quantum dynamics with initial system-environment correlations characterized by pure Markov states. *Phys. Rev. A* 94 032308.
- Türkmen, A., Verçin, A. and Yılmaz, S. 2017. Data processing inequality and open quantum systems: Beyond Markov states. *Phys. Rev. A* 96 042112.
- Türkmen, A. and Verçin, A. 2018. Quantum error correction in the presence of initial system environment correlations (yayın için gönderildi).
- Uhlmann, A. 1976. The “transition probability” in the state space of a *-algebra. *Rep. Math. Phys.* 9 273.
- Uhlmann, A. 1977. Relative entropy and the Wigner–Yanase–Dyson–Lieb concavity in an interpolation theory. *Commun. Math. Phys.* 54 (1), 21–32.
- Umegaki, H. 1962. Conditional expectation in an operator algebra IV. Entropy and information. *Kodai Math. Sem. Rep.* 14, 59–85.
- Vedral, V., Plenio, M.B., Rippin, M.A and Knight, P.L. 1997. Quantifying Entanglement. *Phys. Rev. Lett.* 78 2275.
- Watrous, J. 2018. *The Theory of Quantum Information.* Cambridge University Press.

- Weiss, U. 2012. Quantum Dissipative Systems, 4th Edition, World Scientific, Singapore.
- Wißmann, S., Karlsson, A., Laine, E., Piilo, J. and Breuer, H-P. 2012. Optimal state pairs for non-Markovian quantum dynamics. Phys. Rev. A 86 062108.
- Wißmann, S., Breuer, H.-P. and Vacchini, B. 2015. Generalized trace-distance measure connecting quantum and classical non-Markovianity. Phys. Rev. A 92, 042108.
- Wilde, M.M. 2015. Recoverability in quantum information theory. Proc. R. Soc. London, Ser. A 471, 20150338.
- Wilde, M.M. 2017. Quantum Information Theory. (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- Wiseman, H.M. and Milburn, G. 2010. Quantum Measurement and Control. (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- Wolf, M.M. and Cirac, J.I. 2008. Dividing quantum channels. Commun. Math. Phys. 279, 147-168.
- Wolf, M. M., Eisert, J., Cubitt, T. S. and Cirac, J. I. 2008. Assessing non-Markovian quantum dynamics, Phys. Rev. Lett. 101 150402.
- Wolf, M.M. and Perez-Garcia, D. 2009. Assessing quantum dimensionality from observable dynamics. Phys. Rev. Lett. 102 190504.
- Wootters, W.K. 1998. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. Phys. Rev. Lett. 80, 2245.
- Wudarski, F.A. and Petruccione, F. 2016. Exchange of information between system and environment: Facts and myths, Europhys. Lett. 113 50001.
- Zurek, W.H. 2000. Einselection and decoherence from an information theory perspective. Ann. Phys. (Leipzig) 9, 855.
- Zurek, W.H. 2003. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. Rev. Mod. Phys. 75, 715.
- Zwanzig, R. 1960. Ensemble method in the theory of irreversibility. J. Chem. Phys. 33 1338.

EKLER

EK 1 Klasik Stokastik Süreçlerde Markov ve Markov Olmayan Gelişimler

EK 2 Bilişimsel Yalıtılmışlık

EK 3 Kuantum Durumların Saflaştırılması



EK 1 Klasik Stokastik Süreçlerde Markov ve Markov Olmayan Gelişimler

Kuantum Markov süreçlerdeki kanalların bölünebilirliğiyle, klasik Markov süreçlerdeki stokastik matrislerin bölünebilirliği arasındaki benzerliğin gösterilmesinin amaçlandığı bu bölümde anlatılanlar, Rivas ve çalışma arkadaşlarının (Rivas vd. 2014) makalesindeki çerçeveye sınırlandırılmıştır.

Elemanlarını rastgele bir deneyin tüm sonuçlarının oluşturduğu Ω kümesi örneklem uzayını, bu kümenin altkümelerinin koleksiyonundan oluşan sınıf denilen Σ 'da mümkün olaylar kümesini gösterebiliriz. Boş olmayan Ω kümesi üzerindeki Σ sınıfı

1. $\Omega \in \Sigma$,
2. Her $A \in \Sigma$ için $A^c \in \Sigma$,
3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_n \in \Sigma$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

özelliklerine sahipse bu sınıfa σ -cebri denir. Burada A^c , A kümesinin tümleyenini göstermektedir. Bu durumda Σ sınıfının her bir elemanına bir olay, (Ω, Σ) ikilisine de ölçülebilir uzay (*measurable space*) denir.

Σ bir σ -cebri olmak üzere, bu küme üzerinde tanımlı

$$P: \Sigma \rightarrow [0,1]$$

$$A \mapsto P(A) \tag{1}$$

şeklindeki fonksiyon:

1. Her $A \in \Sigma$ için $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$; $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$

özelliklerini (Kolmogorov aksiyomları) sağlıyorsa; P gönderimine bir olasılık ölçüsü, $P(A)$ sayısına da A olayının olasılığı denir. (Ω, Σ, P) üçlüsüne de olasılık uzayı adı verilir (Feller 1950).

(Ω, Σ, P) olasılık uzayında tanımlanan rastgele değişkenler (*random variables*) ise, örneklem uzayındaki olayları gerçel sayılara karşılık getiren,

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

şeklindeki ölçülebilir fonksiyonlardır. I kümesinde değerler alan bir parametreye bağlı olarak farklılaşan

$$\{X(t), t \in I \subset \mathbb{R}\} \quad (3)$$

rastgele değişkenler kümesine de stokastik süreç denir. Burada kullanılacak parametre zamandır. X rastgele değişkeninin bir stokastik sürecin t_n anındaki x_n değerini alma olasılığı bir önceki $t_{n-1} \leq t_n$ anındaki durum tarafından tek şekilde belirlenebiliyorsa ve bu olasılık t_{n-1} anından önceki durumlardan bağımsızsa, gelişim bir Markov sürecidir.

Markov süreçler için koşullu olasılıklar sürecin geçmişinden bağımsız olarak,

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. (4) eşitliğinde görüldüğü gibi koşullu olasılıklar t_{n-1} anından önceki olasılıklara bağlı değildir, yani hafıza özelliği göstermezler. Bu durum klasik Markov süreçlerin hafızasızlığını açıkça göstermektedir.

Süreç içerisindeki $t_3 \geq t_2 \geq t_1$ zamanları için bileşik olasılık Bayes kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned}
P(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) P(x_2, t_2; x_1, t_1) \\
&= P(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) \quad (5)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Gelişim Markov süreci, koşullu olasılığın hafızasızlığının sonucu olarak

$$\begin{aligned}
P(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) \\
P(x_3, t_3 | x_1, t_1) &= \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) \quad (6)
\end{aligned}$$

olur. (6) denkleminin Chapman-Kolmogorov denklemi denir. Bu denklemi sağlayan koşullu olasılıklar her zaman bir Markov sürecinin koşullu olasılıkları olarak görülebilir.

t_0 andaki olasılık dağılımını başka bir andaki olasılık dağılımına dönüştüren

$$P(x_1, t_1) = \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} \Lambda(x_1, t_1 | x_0, t_0) P(x_0, t_0) \quad (7)$$

toplamındaki $\Lambda(x_1, t_1 | x_0, t_0)$ terimleri geçiş matrisi ya da stokastik matris denilen Λ matrisinin matris elemanlarıdır. Her $P(x_0, t_0) \geq 0$ değerinde $P(x_1, t_1) \geq 0$ olması gerektiğinden, bu matrisin her sütununun elemanları pozitif olmalıdır. Ayrıca (7) denkleminin x_1 üzerinden toplamı alınırsa $\sum_{x_1 \in \mathcal{X}} P(x_1, t_1) = 1$ olması gerektiğinden her satırının elemanların toplamı da pozitif ve bire eşit olmalıdır. Sonuçta Λ matrisi negatif olmayan elemanlara sahip, her satırındaki sayıların bir olasılık dağılımını temsil ettiği satır stokastik bir matristir.

t_0 başlangıç durumundaki olasılık dağılımının sonraki bir t_2 andaki olasılık dağılımına geçişi için

$$P(x_2, t_2) = \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} P(x_2, t_2 | x_0, t_0) P(x_0, t_0) \quad (8)$$

ifadesi yazılabileceğinden, geçiş matrisi yerine koşullu olasılıklar gelir. Fakat sonraki bir t_1 anından t_2 anına geçişlerin de koşullu olasılıklarla tarif edilebilmesi için, bu olasılıkların geçmişe bağımlı olmaması, hafıza etkisi göstermemesi gerekir. Bu nedenle Markov süreçlerdeki geçişlerdeki geçiş matrisinin elemanları

$$\Lambda(x_2, t_2 | x_1, t_1) = P((x_2, t_2 | x_1, t_1) \quad (9)$$

şeklinde koşullu olasılıklardır. Chapman-Kolmogov denkleminde göre geçiş matrisleri de

$$\Lambda(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} \Lambda(x_3, t_3 | x_2, t_2) \Lambda(x_2, t_2 | x_1, t_1) \quad (10)$$

eşitliğini sağlarlar. Bu denklem klasik Markov süreçlerin bölünebilirliğini göstermektedir. Dinamik boyunca farklı zaman aralıklarındaki geçişler stokastik matrislerle betimlenebilir. Bu sonuç (2.28) denkleminde kuantum Markov süreçlerin bölünebilirliğiyle benzerdir. Kuantum durumlarda olasılık dağılımlarının yerini yoğunluk işlemcileri, stokastik matrislerin yerini ise kuantum kanallar almaktadır. Bu nedenle satır stokastik matrisler klasik iletişim kanalı olarak görülebilir.

EK 2 Bilişimsel Yalıtılmışlık

ρ^{QE} bileşik sistemi üniter olarak geliştirken, Q sisteminin bilişimsel olarak yalıtılmış olması için gerek ve yeter koşul üniter gelişmesidir (Schumacher ve Westmoreland 2010). Bir sistemin bilişimsel olarak yalıtılmış olması demek, sistemden çevreye hiçbir bilişimin gitmemesi, sistemle ilgili hiçbir yerde kaydın olmaması anlamına gelir. Bunun için de çevrenin durumunun sistemin başlangıç durumlarından bağımsız olması, tüm başlangıç durumları için çevrenin aynı kalması gerekir.

Schumacher ve Westmoreland bu teoremi ispatlarken çevrenin durumunu saf ve sistem-çevre bileşik durumunu $\rho^Q \otimes |\varepsilon_0\rangle\langle\varepsilon_0|$ şeklinde çarpım durumunda kabul etmişlerdir (Schumacher ve Westmoreland 2010). Bu iki parçalı durum saflaştırma yoluyla üç parçalı

$$\rho^{RQE} = |\psi^{RQ}\rangle\langle\psi^{RQ}| \otimes |\varepsilon_0\rangle\langle\varepsilon_0| \quad (1)$$

durumuna dönüşür. Bu durum açıkça 5. bölümde ayrıntılı tartışılan bir saf Markov durumdur. Markov durumlarla ifade edilecek olursa; (1) denklemindeki Markov durumundaki Q sisteminin bilişimsel olarak yalıtılmış olması için gerek ve yeter koşul σ^{RQE} çıkış durumunun da bir Markov durum olmasıdır¹⁴. Ayrıca burada $|\psi^{RQ}\rangle$ durumu en dolanık durum olarak alınarak, ρ^Q durumunu tam ranklı olması istenmiştir. Bu durumda

$$\text{rank}(\rho^Q) = \text{rank}(\rho^R) = \dim(\mathcal{H}_Q) = \dim(\mathcal{H}_R) \quad (2)$$

seçilebilir (Bakınız Ek3). Seçilen

$$|\psi^{RQ}\rangle = \sum_i \sqrt{\kappa_i} |r_i\rangle \otimes |q_i\rangle \quad (3)$$

¹⁴ Schumacher ve Westmoreland bu ifadeyi bir problem olarak bırakmışlar (Schumacher ve Westmoreland 2010 Problem 9.10).

durumunda Q sistemi V üniter işlemcisiyle gelişsin. Çıkış

$$|\varphi^{RQE}\rangle = \sum_i \sqrt{\kappa_i} |r_i\rangle \otimes V|q_i\rangle \otimes |f\rangle \quad (4)$$

durumunda σ^{RE} açıkça çarpım durumundadır. Tersine çıkış $\sigma^{RE} = \sigma^R \otimes \sigma^E$ şeklinde çarpım durumunda olsun. R sisteminin rankı değişmeyeceği için, (5.19) ifadesi gereği çevre sistemi çıkış durumunda da saf olur. Bu durumda çıkış

$$\begin{aligned} |\varphi^{RQE}\rangle &= (\mathbb{1}_R \otimes U_{QE})|\psi^{RQE}\rangle = \sum_i \sqrt{\kappa_i} |r_i\rangle \otimes U_{QE}(|q_i\rangle \otimes |\varepsilon_0\rangle) \\ &= \sum_i \sqrt{\kappa_i} |r_i\rangle \otimes |p_i\rangle \otimes |f\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

olur. Burada $\{|p_i\rangle\}$ vektörleri sistemin yeni özvektörleridir. Bu eşitliğin her iki tarafında çıkış durumundaki R ve E sistemlerinin özvektörleri kullanılarak kısmi iç çarpım uygulanırsa sıfırdan farklı κ_i değerlerinde

$$|p_i\rangle = \langle f|U_{QE}|\varepsilon_0\rangle |q_i\rangle \quad (6)$$

eşitliği elde edilir. $\langle f|U_{QE}|\varepsilon_0\rangle = W$ olmak üzere, $|p_i\rangle$ ve $|q_i\rangle$ özvektörlerinin dikliğinin sonucu olarak

$$1 = \langle p_i|p_i\rangle = \langle q_i|q_i\rangle = \langle q_i|W^\dagger W|q_i\rangle \quad (7)$$

yazılır. İfadeden $W^\dagger W = \mathbb{1}_Q$ olduğu görülmektedir (Türkmen ve Verçin 2018).

EK 3 Kuantum Durumların Saflaştırılması

Saf Markov durumların kanonik formunu elde ederken ve Markov olmama ölçü ve tanıklarında, saf olmayan bir durumun daha büyük bileşik sistemdeki saflaştırılmış durumlarına ihtiyaç duyuldu. Bu nedenle bu bölümde kısaca kuantum durumları saflaştırılmalarıyla ilgili temel bilgiler verilecektir.

Her saf olmayan ρ^A durumu, $|\psi^{RA}\rangle$ saf durumunun

$$\rho^A = \text{Tr}_R(|\psi^{RA}\rangle\langle\psi^{RA}|) \quad (1)$$

şeklinde indirgenmiş durumu olarak yazılabilir. Burada R sistemine saflaştırıcı sistem, $|\psi^{RA}\rangle$ durumuna da ρ^A durumunun bir saflaştırılmışı denir.

Bir saf olmayan durum verildiğinde bu durumun saflaştırılmışı nasıl elde edilecek? Bunun için en yaygın kullanılan yöntem ρ^A durumunun

$$\rho^A = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \quad (2)$$

şeklindeki spektral ayrışımını kullanmaktır. $\{|i\rangle\}$ saflaştırıcı R sisteminde ortonormal vektörler olmak üzere

$$|\psi^{RA}\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle \otimes |\lambda_i\rangle \quad (3)$$

durumu ρ^A durumunun bir saflaştırılmışıdır. Çünkü

$$\text{Tr}_R(|\psi^{RA}\rangle\langle\psi^{RA}|) = \text{Tr}_R \left[\sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |i\rangle\langle j| \otimes |\lambda_i\rangle\langle\lambda_j| \right] = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| = \rho^A \quad (4)$$

olur. Saflaştırıcı sistemin indirgenmiş durumu da

$$\rho^R = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| \quad (5)$$

şeklinde aynı özdeğerlere ve ranka sahip bir durumdur. Diğer bir saflaştırma yöntemi de kanonik saflaştırma denilen yöntemdir (Wilde 2017). Bu yöntemde $|\omega^{RA}\rangle = \sum_i |ii\rangle$ vektörü kullanılarak yazılan,

$$|\psi^{RA}\rangle = (\mathbb{1}_R \otimes \sqrt{\rho^Q}) |\omega^{RA}\rangle \quad (6)$$

saf durumu ρ^A durumunun bir saflaştırılmışıdır. Yukarıda anlatılan saflaştırma yöntemleriyle elde edilen saflaştırılmış durumlar tek değildir. ρ^A durumunun saflaştırıcı durumları arasında izometrik bir dönüşüm vardır. $|\psi^{R_1A}\rangle$ ve $|\psi^{R_2A}\rangle$ ρ^A durumunun iki saflaştırılmış durumu ve $\dim(\mathcal{H}_{R_1}) \leq \dim(\mathcal{H}_{R_2})$ olsun. Bu durumda

$$|\psi^{R_2A}\rangle = (V \otimes \mathbb{1}_A) |\psi^{R_1A}\rangle \quad (7)$$

olur. Burada $V: \mathcal{H}_{R_1} \rightarrow \mathcal{H}_{R_2}$ şeklinde bir izometri dönüşümüdür ($V^\dagger V = \mathbb{1}_{R_1}$) (Wilde 2017, Watrous 2018).

Saflaştırıcı sistemin rankı Schmidt ayrışımı gereği, (5) denkleminde de açıkça görüldüğü gibi sistemin rankına eşittir. (7) eşitliğinin sonucu olarak herhangi bir saflaştırıcı sistemin boyutu

$$\dim(\mathcal{H}_R) \geq \text{rank}(\rho^A) \quad (8)$$

olmalıdır (Watrous 2018).

Bileşik sistemde indirgenmişlerden biri saf durursa, bu saf durumla bileşik sistemin geri kalanı çarpım durumunda olmak zorundadır (Rivas ve Huelga 2011). Bu bilgi (5.21) denklemindeki Markov durum sınıfları yazılırken kullanılmıştır.

Bir sistemin bilgisine tam olarak sahip olunuyorsa sistem saf durumda demektir. Eğer sistem saf durumda değilse, sistemin durumuyla ilgili bilgimiz tam değildir. Saflaştırma kavramı sistemin durumuyla ilgili bilgisizliğimizi sistemin başka bir sistemle dolanık olmasıyla ilişkilendirir.

Her Λ kuantum kanalının Stinespring teoremi gereği

$$\Lambda(\rho^Q) = Tr_E(V\rho^Q V^\dagger) \quad (9)$$

şeklinde yazılabileceği bir $V: \mathcal{H}_Q \rightarrow \mathcal{H}_{QE}$ izometri gönderimi ve \mathcal{H}_E sistemi vardır. Yani her kanal $V(\cdot)V^\dagger$ olan bir izometri kanalının indirgenmiş olarak yazılabilir. Burada izometri kanalına kanalın saflaştırılmışı denir (Watrous 2018).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Adem TÜRKMEN

Doğum Yeri : Giresun

Doğum Tarihi : 08.12.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Giresun İHL (1997)

Lisans : Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı (2012)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı (Şubat 2013-Mart 2019)

Çalıştığı Kurumlar

Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi (2011-2012)

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (2012-2018)

Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi (2018-...)

SCI Yayınlar

A. Türkmen, A. Verçin and S. Yılmaz. 2016. Reduced quantum dynamics with initial system-environment correlations characterized by pure Markov states, Phys. Rev. A. 94 032308.

A. Türkmen, A. Verçin and S. Yılmaz. 2017. Data processing inequality and open quantum systems: Beyond Markov states. Phys. Rev. A. 96 042112.

A. Türkmen and A. Verçin. 2018. Quantum error correction in the presence of initial system-environment correlations. (yayın için gönderildi)