ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TREND YENİLEME SÜREÇLERİNDE TAHMİN

Melike Özlem KARADUMAN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

TEZ ONAYI

Melike Özlem KARADUMAN tarafından hazırlanan **"Trend Yenileme Süreçlerinde Tahmin"** adlı tez çalışması 26/09/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ömer ALTINDAĞ
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26/09/2019

Melike Özlem KARADUMAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TREND YENİLEME SÜREÇLERİNDE TAHMİN

Melike Özlem KARADUMAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Sayma süreçlerinden gelen veri kümesinin yapısında bir trend söz konusu ise model olarak yenileme süreci kullanılamaz. Böyle bir durumda homejen olmayan Poisson süreci, geometrik süreç, α -seri süreç gibi bazı sayma süreci modelleri önerilebilir. Bu çalışmada bu süreçlere alternatif olarak Lindqvist (1993) tarafından tanımlanan trend yenileme süreci tanıtılmıştır. Bu sürecin trend fonksiyonu yenileme dağılımı ve trend yenileme fonksiyonuna ait parametreler için tutarlı tahmin ediciler elde edilmiş ve bu tahmin edicilerin işlerliğini görmek için bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Eylül 2019, 95 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yenileme süreci, Trend yenileme süreci, Koşullu şiddet fonksiyonu, Trend fonksiyonu, En çok olabilirlik fonksiyonu.

ABSTRACT

Master Thesis

ESTİMATİON İN TREND RENEWAL PROCESSES

Melike Özlem KARADUMAN

Ankara University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

If there is a trend in pattern of data set arising from the counting process, renewal process can not be used as a model. In this case some counting process models like Poisson process, geometric process, α –series process can be suggested. In this study trend renewal process is considered as an alternative model by Lindqvist (1993). The consistent estimators are obtained for trend function, renewal distribution and trend renewal function's parameters. Then a simulation study is performed to evaluate performance of these estimators.

September 2019, 95 pages

Key Words: Renewal process, The trend renewal process, Conditional intensity function, Trend function, Maximum likelihood function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince derin bilgi birikimi ve sabrıyla desteğini benden esirgemeyen, çalışmalarım süresince bana içtenlikle zaman ayırıp, tecrübeleriyle beni yönlendiren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halil AYDOĞDU'ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) her daim hissettirdiği ilgi ve alakasından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Gerek lisans eğitimim gerekse yüksek lisans eğitimim boyunca tecrübeleriyle beni yönlendiren değerli vaktini ayıran, yoluma ışık tutan, her ihtiyaç duyduğumda desteğiyle yanımda olan değerli hocam Sayın Arş. Gör. Mustafa Hilmi PEKALP'e (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) bana olan inancından dolayı teşekkür ederim.

Bu zorlu süreçte manevi destekleriyle ve sevgileriyle bana güç veren sevgili aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Melike Özlem KARADUMAN
Ankara, Eylül 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

F	Yenileme Dağılımı
$F^{k*}(t)$	F nin kendisiyle olan k. konvolüsyonu
$H(t)$	Yenileme Fonksiyonu
$K(t)$	Kalan ömür rasgele değişkeni
L	Olabilirlik Fonksiyonu
l	Log-olabilirlik Fonksiyonu
$M(t)$	Trend Yenileme Fonksiyonu
$N(t)$	$(0, t]$ zaman aralığında gerçekleşen olay sayısı
$r(t)$	Bozulma Oran Fonksiyonu
S_n	n. olayın gerçekleşme zamanı
$S_{N(t)}$	$N(t)$. olayın gerçekleşme zamanı
X_n	$n-1$. olay ile n. olay arası geçen zaman
$Y(t)$	t anındaki yaş rasgele değişkeni
$\lambda(t)$	Trend Fonksiyonu
$\Lambda(t)$	λ trend fonksiyonunun $[0, t]$ aralığındaki integral dönüşümü
$\gamma(t)$	Koşullu Şiddet Fonksiyonu
*	Konvolüsyon işlemi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Uygulamada sayma süreçlerinden gelen veri kümesinin yapısında trendin varlığı söz konusu ise model olarak homojen olmayan Poisson süreci, geometrik süreç, alfa-seri süreç gibi süreçler yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada bu süreçlere alternatif bir süreç olan trend yenileme süreci ele alınmıştır. Literatürde bu süreç ilk olarak Lindqvist (1993) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır. Ugulamada tamir türlerini modellemede çeşitli stokastik süreçler kullanılmaktadır. Örneğin kusursuz tamir yenileme süreci, minimal tamir ise homojen olmayan Poisson süreci ile modellenmektedir. Trend yenileme süreci basit anlamıyla yenileme sürecinin ve homojen olmayan Poisson sürecinin özel durumlarını içerdiğinden kusursuz tamir ile minimal tamir arasındaki boşluğu doldurmaktadır. Literatürde trend yenileme sürecinin fonksiyonlarına ait parametrelerin parametrik ve parametrik olmayan tahminleri ile ilgili çalışmalar mevcuttur. Fakat ilk kez bu çalışmada trend yenileme sürecinin yenileme süreci ile bağlantısı kullanılarak trend yenileme fonksiyonunun değerinin tahmini problemi üzerinde durulmuştur. Çalışmanın temel amacı ise trend yenileme sürecine ait bazı önemli fonksiyonların bilinmeyen parametrelerine ait çeşitli tahmin yöntemleriyle elde edilmiş tahmin ediciler elde etmek ve simülasyon çalışması ile bu tahmin edicilerin işlerliğini görmektir.

İkinci bölümde çalışmanın ilerleyen bölümleri için gerekli olan bazı temel tanım ve teorilere yer verilmiş, Riemann-Stieltjes integrali ile konvolüsyon kavramlarına değinilmiş, son olarak süreçlerin özelliklerini tanımlamada yardımcı olacak olan $o(h)$ gösterimi, yaşam fonksiyonu, bozulma oran fonksiyonu ve koşullu şiddet fonksiyonu gibi bazı önemli fonksiyonlara ve önemli dağılımlara yer verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde stokastik süreçlere giriş yapılmış, yenileme süreci ve sürece ait koşullu şiddet fonksiyonu, H yenileme fonksiyonu tanımlanmıştır. Yenileme fonksiyonu için integral denklem ve bazı limit ifadeleri verilmiştir. $H(t)$'nin sayısal hesabında kullanılacak olan Riemann-Stieltjes (RS) yöntemine ve Schneider, Lin ve O'cinneide (Schneider, Lin ve O'cinneide 1990) tarafından önerilen yönteme değinilmiştir. Ardından önemli sayma süreçlerinden olan geometrik süreç, α- seri süreç, homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreçlerinin tanımı ve bazı özelliklerine yer verilmiştir. Trend yenileme sürecinin çıkış noktası olarak sayılan homojen Poisson sürecinin homojen olmayan Poisson sürecine dönüştürülmesi üzerinde durulmuştur. Son olarak uygulamada önemli bir yer tutan tamir türlerinin tanımı yapılmış, minimal tamir ve kusurlu tamir üzerinde durulmuş, bu tamirlerin hangi stokastik süreçler ile modellenebileceğine ait çıkarımlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde trend yenileme sürecine bir giriş yapılmış, sürecin tanımının ardından sürecin gösterimine ilişkin tekliği ifade edilmiş ve sürece ait koşullu şiddet fonksiyonu tanımlanmıştır. Sürecin varış zamanlarına ait ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiştir.

Beşinci bölümde trend yenileme sürecinin F yenileme dağılımının bilinmeyen şekil parametresi ile λ trend fonksiyonuna ait bilinmeyen parametrelerin tahminlerine ait yöntemler üzerinde durulmuştur. Birkaç farklı duruma yönelik en çok olabilirlik, en küçük kareler tahmin yöntemleri kullanılarak ilgili parametrelere ait tahmin ediciler elde edilmiştir. Ardından bu parametreler yardımıyla RS yöntemi ve Schneider, Lin ve O'Cinneide tarafından önerilen yöntem (Schneider, Lin ve O'Cinneide 1990) kullanılarak sürece ait trend yenileme fonksiyonu hesaplanmış benzer şekilde bu fonksiyona ait tahmin edici elde edilmiştir.

Altıncı bölümde elde edilen tahmin ediciler için simülasyon çalışması yapılmış ve tahmin edicilerin işlerliği değerlendirilmiştir.

Yedinci bölümde simülasyon çalışmasını destekler nitelikte gerçek veri setleri üzerinde uygulama çalışması yapılmıştır.

Son olarak sekizinci bölümde ise çalışma ile ilgili elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

2. TEMEL KARAMLAR

Bu bölümde çalışmanın ilerleyen bölümlerinde faydalanılacak bazı temel kavramlara önemli fonksiyonlara yer verilmiştir. Olasılık uzayı, rasgele değişken kavramı, dağılım fonksiyonu gibi bazı olasılıksal kavramlar tanımlanmış ardından Riemann-Stieltjes integrali, konvolüsyon kavramı, yaşam ve bozulma oran fonksiyonları ve koşullu şiddet fonksiyonuna yer verilmiştir. Son olarak bazı önemli dağılımlar ve özelliklerine değinilmiştir.

2.1 Olasılık Uzayı

U, Ω'da bir σ-cebir olmak üzere

$P: U \longrightarrow [0,1]$

$\quad A \longrightarrow P(A)$

fonksiyonu

$i)$ $\forall\, A \in U$ için $P(A) \geq 0$,

$ii)$ $P(\Omega) = 1$,

$iii)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in U$ lar U da ayrık olayların bir dizisi olmak üzere

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ özelliklerini sağlıyorsa P fonksiyonuna bir olasılık ölçüsü denir.

Ayrıca $P(A)$ sayısına A olayının olasılığı, $(\Omega, \mathrm{U}, \mathrm{P})$ ölçü uzayına da bir olasılık uzayı denir.

2.2 Rasgele Değişken Kavramı

$(\Omega, \mathrm{U}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı ve

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad \omega \longrightarrow \mathrm{X}(\omega)$

olmak üzere, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ için,

$\{\omega : X(\omega) \leq a\} \in U$

ise X fonksiyonuna bir rasgele değişken denir (Öztürk 1993).

2.3 Dağılım Fonksiyonları

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X bu uzay üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olmak üzere,

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

fonksiyonuna X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir (Öztürk 1993).

(Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı X rasgele değişkenine ait dağılım fonksiyonu F olmak üzere

$i)$ F azalmayan bir fonksiyon,

$ii)$ F sağdan sürekli,

$iii)$ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

dir.

Tanım 2.3.1 X bir rasgele değişken ve g reel sayılarda tanımlı Borel ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$Y = g(X)$ ile belirlenen rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(x) \leq y) \\ &= P\big(X \leq g^{-1}(y)\big) \\ &= F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

dir.

2.4 Rasgele Değişkenlerin Stokastik Olarak Karşılaştırılması

X ve Y iki rasgele değişken olmak üzere $\forall\, a \in \mathbb{R}$ için

$P(X > a) \geq (\leq)\, P(Y > a)$

ise X stokastik olarak Y ‘den büyüktür (küçüktür) denir ve $X \geq_{st} Y$ $(X \leq_{st} Y)$ ile gösterilir.

2.5 Riemann-Stieltjes İntegrali

$[a, b] \subset R$ aralığı $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ özelliğini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölünsün $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ cümlesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması denir. Δ, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması olsun. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne Δ parçalanmasının normu denir ve $\parallel \Delta \parallel$ ile gösterilir, yani

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere

$\parallel \Delta \parallel = \max\{\Delta x_i : i = 1,2, \dots, n\}$

dir.

Tanım 2.5.1 h $[a, b]$ de azalmayan ve sonlu $h(a), h(b)$ değerli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ nin herhangi bir Δ parçalanmasına karşılık

$\Delta h_i = h(x_i) - h(x_{i-1}) \geq 0\,, i = 1,2, \dots, n$

olmak üzere $[a, b]$ üzerinde sınırlı herhangi bir reel değerli g fonksiyonu için

$$M_i = \sup\{g(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}\,, i = 1,2, \dots, n$$

$$m_i = \inf\{g(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}\,, i = 1,2, \dots, n$$

ve

$$U(\Delta, \mathrm{g}, \mathrm{h}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} M_i \Delta h_i\ ,$$

$$L(\Delta, \mathrm{g}, \mathrm{h}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} m_i \Delta h_i$$

olsun. Tüm Δ parçalanmaları üzerinden

$\inf_{\Delta} U(\Delta, \mathrm{g}, \mathrm{h}) = \sup_{\Delta} \mathrm{L}(\Delta, \mathrm{g}, \mathrm{h})$

ise bu ortak değere $[a, b]$ aralığı üzerinde g fonksiyonunun h fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali veya sadece Stieltjes integrali denir ve $\int_a^b gdh$ veya $\int_a^b g(x)dh(x)$ ile gösterilir. $h(x) = x$ alınırsa Riemann-Stieltjes integrali Riemann integralini verir (Rudin 1964).

2.6 Konvolüsyon Kavramı ve Özellikleri

F ve G, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi iki dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - x)dF(x), \ t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

ile ifade edilen $F * G$ fonksiyonuna F ile G dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonu denir. Burada "*" konvolüsyon işlemini göstermektedir. Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her t için (2.1) denkleminin sağ tarafındaki integral vardır (Kawata 1972). $t < 0$ için

$F(t) = G(t) = 0$ sağlanıyor ise $t \geq 0$ için

$$F * G(t) = \int_0^t G(t - x)dF(x), \ t \geq 0 \tag{2.2}$$

olarak ifade edilmektedir.

Konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf üzerinde değişme ve birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılımın dağılım fonksiyonu "*" işlemine göre birim elemandır. Bu özellikler aşağıdaki gibi gösterilir. F, G ve H herhangi birer dağılım fonksiyonu olsun, $G(-\infty) = 0$ ve

$G(t - y) = \int_{-\infty}^{t-y} dG(z)$ olduğundan

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} dG(z) \right\} dF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-z} dF(y) \right\} dG(z)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t - z)dG(z)$$

$= G * F(t)$

dır. O halde konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonları için değişme özelliğine sahiptir. Bununla birlikte

$$F * G * H = \int_{-\infty}^{\infty} (G * H)\,(t - x) dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (H * G)\,(t - x) dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - x - y) dH(y) dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F * G(t - y) dH(y)$$

$$= H * (F * G)(t)$$

$$= (F * G) * H(t)$$

olduğundan konvolüsyon işlemi dağılım fonksiyonları için birleşme özelliğine de sahiptir (Feller 1971).

F herhangi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

ile verilen dağılıma sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım ya da sıfır noktasındaki Dirac dağılımı denir.

$$F^{0*}(t) * F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - x) dF^{0*}(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0^-} F(t - x) d\,F^{0*}(x) + \int_{0^-}^{0^+} F(t - x) dF^{0*}(x) + \int_{0^+}^{\infty} F(t - x) dF^{0*}(x)$$

$$= F(t - 0)\big(F^{0*}(0^+)\big) - F^{0*}(0^-))$$

$$= F(t)$$

olduğundan sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım konvolüsyon işlemi için birim elemandır.

Teorem 2.6.1 X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ve sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonuna sahip iki rasgele değişken olsun. Bu durumda $X+Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t) = F * G(t) \tag{2.3}$$

dır. Yani bağımsız iki rasgele değişkenin toplamlarının dağılım fonksiyonu, bu iki rasgele değişkenin dağılım fonksiyonları konvolüsyonlarına eşittir (Feller 1971).

Teorem 2.6.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve sırasıyla $F_1, F_2, \dots F_n$ dağılım fonksiyonlarına sahip olsunlar. Bu durumda

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t), t \geq 0 \tag{2.4}$$

dır.

Özel olarak $X_1, X_2, \dots X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olduğunda $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = F^{n*}(t), t \geq 0 \tag{2.5}$$

dır. Burada F^{n*}, F dağılım fonksiyonunun kendisi ile n kez konvolüsyonudur.

F ve G dağılım fonksiyonları sırasıyla f ve g yoğunluk fonksiyonlarına sahip olduğunda $F * G$ nin yoğunluk fonksiyonu

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) f(x) dx , t \in \mathbb{R}$$

ile verilen $f * g$ fonksiyonudur. Ayrıca F^{n*} dağılım fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonu f^{n*} dır (Feller 1971).

2.7 Bazı Önemli Fonksiyonlar

2.7.1 o(h) gösterimi

f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$ ise $f(h)=o(h)$ olarak yazılabilir. Bu tanıma göre $f(h)=o(h)$ durumunda $h\to 0$ iken $f(h)$ fonksiyonu h'den daha hızlı sıfıra yaklaşacaktır.

$f(h)=o(h)$ ve $g(h)=o(h)$ iken $af(h)+bg(h)=o(h)$ olduğu açıktır.

2.7.2 Yaşam fonksiyonu ve bozulma oran fonksiyonu

X bir parçanın bozulma zamanını gösteren sürekli bir rasgele değişken ve bu rasgele değişkene ait dağılım fonksiyonu F olmak üzere

$$S(t)=P(X>t)=1-F(t)$$

ile verilen S fonksiyonu, en az t yaşındaki bir parçanın en az t süre çalışması olasılığını ifade eder ve yaşam fonksiyonu adını alır. X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<X\leq t+\Delta t)}{\Delta t}$$

olarak yazılabilir. Burdan $P(t<X\leq t+\Delta t)=\Delta t f(t)+o(\Delta t)$ olduğu açıktır.

Çok küçük bir Δt uzunluklu $(t,t+\Delta t]$ zaman aralığında parçanın bozulma olasılığı yaklaşık olarak $\Delta t f(t)$ dir.

t yaşında olduğu bilinen bir parçanın t'den sonraki çok küçük bir zaman aralığında yaklaşık olarak bozulmasının olasığı

$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<X\leq t+\Delta t|X>t)}{\Delta t}$$

denklemi ile verilir ve bozulma oran fonksiyonu olarak adlandırılır. Bozulma oran fonksiyonu kısaca

$$r(t)=\frac{f(t)}{S(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}$$

ile ifade edilir.

$$R(t) = \int_0^t r(u)du$$

ile tanımlanan R fonksiyonuna birikimli bozulma oran fonksiyonu adı verilir.

Yaşam fonksiyonu ile birikimli bozulma oran fonksiyonu arasında

$$S(t) = e^{-R(t)} = e^{-\int_0^t r(u)du} \quad (2.6)$$

eşitliği geçerlidir.

Yukarıdaki tanımdan görüleceği gibi f, F, S, r ve R fonksiyonları matematiksel olarak denktirler, yani birbirlerini tek olarak belirlerler (Pekalp, 2013).

2.7.3 Koşullu şiddet fonksiyonu

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun ve t anına kadar gözlensin.

$$\gamma(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P((t, t+\Delta t] \text{aralığında en az bir olay olması } | \mathrm{H_t})}{\Delta t} \quad (2.7)$$

ile verilen fonksiyona sürecin koşullu şiddet fonksiyonu adı verilir. Burada $\mathrm{H_t}$ sürecin t zamanına kadar olan geçmişini ifade eder. Sürecin geçmişi rasgele olduğundan $\gamma(t)$ stokastik bir fonksiyondur.

Fakat bağımsız artışlı süreçlerde ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olayların sayısı birbirinden bağımsız olduğundan $\gamma(t)$ fonksiyonunda koşul ifadesi kalkar ve koşullu şiddet fonksiyonu deterministik bir fonksiyon olur.

2.8 Bazı Önemli Dağılımlar

2.8.1 Poisson dağılımı

X bir rasgele değişken olmak üzere X'e ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \; x = 0,1,\dots; \; \lambda > 0$$

şeklinde ise X rasgele değişkeni λ parametreli Poisson dağılımına sahiptir ve $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ olarak gösterilir. λ parametresi ortalama beklenen olay sayısı olarak nitelendirilir. $E(X) = \lambda$ ve $Var(X) = \lambda$ dır. Belirli bir zaman aralığında nadir olarak gerçekleşen olayların sayısı bu dağılım ile modellenir.

2.8.2 Üstel dağılım

X bir rasgele değişken olmak üzere X'e ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}},\ x > 0;\ \theta > 0$$

şeklinde ise bu rasgele değişken θ parametreli üstel dağılıma sahiptir ve $X \sim$Üstel(θ) ile ifade edilir. $E(X) = \theta$ ve $Var(X) = \theta^2$ dir. Bu dağılım genellikle bir parçanın yaşam süresini modellemek için kullanılmaktadır. Üstel dağılım

$$P(X > h + t | X > t) = P(X > h),\ \forall\, t, h > 0$$

ile verilen hafızasızlık özelliğine sahiptir. Bu özelliğe göre t yaşında olan bir parçanın en az $h + t$ süre çalışması olasılığı yeni bir parçanın en az h süre çalışması olasılığı ile aynı olacaktır.Yani t yaşındaki bir parçanın en az h süre kadar daha çalışması olasılığı t zamanından bağımsızdır.

2.8.3 Gamma dağılımı

X bir rasgele değişken olmak üzere X'e ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}},\ x > 0,\ \alpha;\beta > 0$$

şeklinde ise X rasgele değişkeni α şekil, β ölçek parametreli gamma dağılımına sahiptir denir ve $X \sim$Gamma(α, β) ile gösterilir. Bu dağılımda $E(X) = \alpha\beta$ ve $Var(X) = \alpha\beta^2$ dir. Bu dağılım da üstel dağılım gibi parça veya parçaların yaşam süresinin modellenmesinde sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Gamma dağılım fonksiyonunun açık bir formu bulunmamaktadır. Özel halde $\alpha = 1$ durumunda X rasgele değişkeni β parametreli üstel dağılıma sahip olur.

2.8.4 Weibull dağılımı

X bir rasgele değişken olmak üzere X'e ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x^{\alpha}}{\beta}}, \; x > 0, \alpha; \beta > 0$$

şeklinde ise X rasgele değişkeni α şekil, β ölçek parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir ve $X\sim$Weibull(α, β) ile gösterilir. Bu dağılımda $E(X) = \beta^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$ ve $Var(X) = \beta^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma(\frac{\alpha+2}{\alpha})$ dır.

3. STOKASTİK SÜREÇLER

Bu bölümde stokastik süreç tanımı yapılmış ve stokastik süreçlere ait özellikler hatırlatılmıştır. Önemli stokastik süreçlerden olan sayma süreci, yenileme süreci, homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci, geometrik süreç ve α -seri süreç tanımlanmış ve bu süreçlerin bazı özellikleri verilmiştir. Yenileme sürecine ait önemli bir fonksiyon olan H yenileme fonksiyonu tanımlanmış ve bu fonksiyonun sayısal hesabında kullanılan Reimann-Stieltjes yöntemine değinilmiştir. Homojen Poisson sürecine ait λ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilmiştir. Aynı şekilde homojen olmayan Poisson sürecinin $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonunun da en çok olabilirlik tahminine yer verilmiştir. Trend yenileme sürecinin çıkış noktası olarak kabul edilen homojen olmayan bir Poisson sürecinin homojen Poisson sürecine dönüştürülmesi üzerinde durulmuştur. Son olarak tamir türleri ve modellenmelerine ilişkin çıkarımlara değinilmiştir.

$(\Omega, \mathrm{U}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı ve T verilen bir parametre kümesi olmak üzere

$$X: T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{t}, \omega) \to \mathrm{X}(\mathrm{t}, \omega)$$

ile verilen iki değişkenli X fonksiyonunu göz önüne alalım. Her sabit $t \in T$ için $X(t, \omega)$ bir rasgele değişken ise X fonksiyonuna bir stokastik süreç denir ve sıklıkla

$\{X(t), t \in T\}$ şeklinde gösterilir.

T parametre kümesi bir elemanlı iken stokastik süreç bir rasgele değişkendir ve T parametre kümesi n elemanlı iken stokastik süreç n-boyutlu bir rasgele değişkendir.

Her sabit $t \in T$ için tüm $X(t)$ rasgele değişkenlerinin aldığı değerlerin kümesine sürecin durum uzayı denir ve E ile gösterilir. Her sabit $\omega \in \Omega$ için ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik süreci t'nin bir fonksiyonunu verir. Bu fonksiyona ω gerçeklenişine karşılık gelen bir yörünge fonksiyonu denir.

Bir stokastik süreç T parametre kümesi ve E durum uzayının sayılabilir ya da sayılamaz olması durumuna göre dört temel sınıfa ayrılır. Bunlar

1) Kesikli parametreli, kesikli durum uzaylı

2) Kesikli parametreli, sürekli durum uzaylı

3) Sürekli parametreli, kesikli durum uzaylı

4) Sürekli parametreli, sürekli durum uzaylı stokastik süreçlerdir.

3.1 Stokastik Süreçlerin Bağımsız ve Durağan Artışlılığı

Tanım 3.1.1 $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. n keyfi bir doğal sayı olmak üzere $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ şartını sağlayan T'ye ait $t_1, t_2, \ldots, t_n$ lerin her seçimi için $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rasgele değişkenleri bağımsız ise

$\{X(t), t \in T\}$ sürecine bağımsız artışlıdır denir.

T parametre kümesinin en küçük bir t_0 elemanı varsa $\{X(t), t \in T\}$ sürecinin bağımsız artışlılığı $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rasgele değişkenlerinin bağımsızlığı ile verilir. Yani bağımsız artışlı bir sürece göre ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olaylar birbirinden bağımsızdır denilebilir.

Tanım 3.1.2 $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Her $t \in T$ ve $\forall\, s > 0$ için $t + s \in T$ olacak şekilde $X(t + s) - X(t)$ artış rasgele değişkeninin dağılımı yalnızca s ye bağlı yani t'den bağımsız ise bu stokastik sürece durağan artışlıdır denir. Yani bu sürece göre gerçekleşen olayların sayısının dağılımı yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır.

Trend yenileme sürecini tanımlamadan önce tanıma yardımcı bazı gerekli ve önemli stokastik süreçler tanımlanacaktır.

3.2 Sayma Süreci

$N(t), (0, t]$ aralığında gerçekleşen belli bir türden olayların sayısını gösteren rasgele değişken olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

1)$\forall\, t \geq 0$ için $N(t) \geq 0$,

2)$N(t)$ negatif değerler almayan tamsayı değerli bir rasgele değişkendir, 3)$\forall\, h, t \geq 0$ için $h < t$ durumunda $N(h) \leq N(t)$ dir,

4)$h < t$ için $(h, t]$ zaman aralığında gerçekleşen olay sayısı $N(t) - N(h)$ dir.

Tanım 3.2.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. X_1 bu sürece göre ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zamanı gösteren rasgele değişken olmak üzere X_n rasgele değişkeni $(n-1)$. olay gerçekleştikten sonra n. olay gerçekleşinceye kadar geçen zamanı belirtsin. Bu rasgele değişkenlerden oluşan

$\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinin varışlar arası geçen zaman dizisi denir.

$S_0 = 0$ olacak şekilde S_n , $n = 0,1, ..$ ler olayların gerçekleniş zamanlarını ifade eden rasgele değişkenlerdir. Bu rasgele değişkenler sayma sürecinin varış zamanı rasgele değişkenleri olarak da isimlendirilirler. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, n = 1,2, \ldots$ olduğu açıktır.

t zamanına kadar n ya da daha fazla olay gerçekleşmesi n. varış zamanının t zamanında veya daha önce gerçekleşmesi anlamına geldiğinden

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.2.2 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 1)}{\Delta t}$$

ile verilen $\lambda(t)$ fonksiyonuna sürecin şiddet fonksiyonu denir.

$\Delta t \lambda(t)$ ifadesi çok küçük bir $(t, t + \Delta t]$ zaman aralığında yaklaşık olarak bir veya daha fazla olay olması olasılığını ifade eder.

Benzer şekilde çok küçük bir Δt zamanı için $(t, t + \Delta t]$ aralığında iki ya da daha fazla olay olması olasılığı yaklaşık olarak sıfırdır, yani

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t) \tag{3.1}$$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine regülerdir denir ve (3.1) ifadesine regülerlik şartı adı verilir.

3.3 Yenileme Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olmak üzere bu sürecin $X_1, X_2, \ldots$ varışlar arası geçen zaman rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımına sahip iseler bu süreç bir yenileme süreci olarak adlandırılır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$K(t) = S_{N(t)+1} - t\,,\ t \geq 0$$

ve

$$Y(t) = t - S_{N(t)}\,,\ t \geq 0$$

ile verilen $K(t)$ ve $Y(t)$ fonksiyonlarına sırasıyla kalan ömür ve yaş rasgele değişkenleri denir (Grimmett ve Stirzaker 1992). $K(t)$ t anında kullanılmakta olan parçanın geriye kalan ömrünü, $Y(t)$ ise t anında kullanılan parçanın t anındaki yaşı olarak adlandırılabilir.

Buradan $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecine ait koşullu şiddet fonksiyonu (2.7) yardımıyla

$$\gamma(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P((t, t+\Delta t]\text{aralığında olay olması } |\mathrm{H}_t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(S_{N(t)+1} - t \leq \Delta t | t - S_{N(t)})}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(K(t) \leq \Delta t | Y(t))}{\Delta t}$$

$$= r(Y(t))$$

elde edilir yani, yenileme sürecinin koşullu şiddet fonksiyonu t anına ait yaş rasgele değişkeninin bozulma oran fonksiyonuna eşittir.

Şimdi yenileme süreci ile ilgili önemli bir kavram olan yenileme fonksiyonu tanımlanacaktır.

Tanım 3.3.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$H(t) = E\big(N(t)\big),\ t \geq 0$$

ile verilen sürecin ortalama değer fonksiyonuna yenileme fonksiyonu denir.(Karlin ve Taylor 1975).

$$I_k = \begin{cases} 1, & S_k \leq t \\ 0, & S_k > t \end{cases}$$

olsun.

$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$ olduğu açıktır.

$$E\big(N(t)\big) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)$$

elde edilir. Buradan

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t),\ \ t \geq 0 \tag{3.2}$$

dır. (3.2) ifadesinin kullanılmasıyla H'nin sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olduğu kolaylıkla elde edilir. Ayrıca $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$ olduğu göz önüne alındığında $t \to \infty$ iken bire yakınsamaması dışında $H(t)$ yenileme fonksiyonu dağılım fonksiyonu özelliklerine sahiptir.

(3.2) nin kullanılmasıyla H yenileme fonksiyonu için bir integral denklem elde edilebilir. $F^{(k+1)*}(t)$ yerine matematiksel olarak denk olan $\int_0^t F^{k*}(t-x)\,dF(x)$ integralinin alınmasıyla

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x)\, dF(x),\ t \geq 0 \tag{3.3}$$

$$= F(t) + F * H(t),\ \ t \geq 0$$

bulunur. (3.3) denklemi

$$H(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)\, dH(x),\ t \geq 0 \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir. Çünkü $F * H = H * F$ dir (Aydoğdu, 1997).

Yenileme fonksiyonu için bazı limit ifadeler şunlardır

1) $\{N(t), t \geq 0\}$ her n için $E(X_n) = \mu < \infty$ olacak biçimde bir yenileme süreç olsun. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{3.5}$$

dür (Karlin ve Taylor 1975).

2) F sonlu σ^2 varyanslı aritmetik olmayan bir dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} \left(H(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} \tag{3.6}$$

dir (Karlin ve Taylor 1975).

3) $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. μ ve σ^2 sırasıyla bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman rasgele değişkenlerinin ortalama ve varyansı olmak üzere;

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\, dx \tag{3.7}$$

dir (Karlin ve Taylor 1975).

$\{N(t), t \geq 0\}$ yenilemeler arası geçen zaman sürelerinin dağılım fonksiyonu F olan bir yenileme süreç olsun. F dağılım fonksiyonu bilindiğinde H yenileme fonksiyonu görünüşte (3.2) ve (3.3) ifadelerinin birinden elde edilebilir. Fakat, bu denklemlerden bazı özel durumlar dışında H yenileme fonksiyonu analitik olarak elde edilemez. Böylece sayısal yöntemlerin gerekliliği ortaya çıkar. $H(t)$ yenileme fonksiyonunun (3.4) integral denkleminden sayısal olarak hesaplanmasını sağlayan bir yöntem Xie

(1989) tarafından verilen Reimann-Stieltjes (RS) yöntemidir. Bir diğer yöntem ise Schneider, Lin ve O'Cinneide (1990) tarafından önerilen yöntemdir.

3.3.1 RS yöntemi ile $H(t)$'nin sayısal hesabı

H yenileme fonksiyonunun (3.4) integral denkleminden sayısal olarak çözümü için bu yöntem kullanılır. RS yöntemi kolay olarak programlanabilmesi, hemen hemen tüm durumlarda basitliği ve yakınsaklığı ile iyi sonuçlar verir ve diğer bilinen yöntemler ile karşılaştırıldığında uygulanabilirliği daha fazladır. Bu yöntem özellikle f olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmediği ve singülerliklere sahip iken faydalıdır.

$\int_a^b g(x)dh(x)$ integrali, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere

$$\int_a^b g(x)dh(x) \approx \sum_{i=1}^{n} g((x_i + x_{i-1})/2)(h(x_i) - h(x_{i-1})) \tag{3.8}$$

şeklinde yazılabilir. Riemann-Stieltjes integralin sayısal hesaplanması için kullanılabilecek bu formülde parçalanmanın normu küçüldükçe yaklaşımın daha iyi olacağı açıktır. Şimdi

$$H(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dH(x) \quad , \quad t \geq 0$$

integral denklemi göz önüne alalım. t verilmiş bir değer ve $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ şartını sağlayan bir parçalanma olsun. Bu durumda

$$H(t_i) = F(t_i) + \int_0^{t_i} F(t_i - x)dH(x)$$

olup (3.8) ifadesinin kullanılmasıyla

$H(t_i) \approx F(t_i) + \sum_{j=1}^{i} F(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(H(t_j) - H(t_{j-1}))$ bulunur. Böylece

$T_i = \sum_{j=1}^{i-1} F(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(H(t_j) - H(t_{j-1}))$ alındığında $H(t_i)$ ardışık olarak

$H_a(t_0) = 0$ olmak üzere

$$H_a(t_i) = \frac{F(t_i) + T_i - F(t_i - (t_i + t_{i-1})/2)H_a(t_{i-1})}{1 - F(t_i - (t_i + t_{i-1})/2)} \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \tag{3.9}$$

ile yaklaşık olarak hesaplanabilir (Xie 1989).

(3.3) ve (3.4) denklemleri teorik olarak denktirler. Literatürde en yaygın olanı (3.3) denklemi olmasına rağmen RS yöntemi (3.4) denkleminin çözümüne kısıtlanmıştır. Eşit olmayan adım uzunlukları kullanılırsa (3.4) denklemi ardışık çözüm için daha basit görünür. Aynı zamanda (3.3) yerine (3.4) ün kullanılmasının temel avantajı $F(t)$'nin büyük t'ler için hemen hemen sabit olmasıdır ve böylece $F(t_i) - F(t_{i-1})$ deki yuvarlatma hatası nispeten büyük olacaktır.

3.3.2 $H(t)$'nin parametrik olmayan tahmin edicisi ve sayısal hesabı

$X_n , \dots , X_n$ F dağılım fonksiyonuna sahip bir dağılımdan n birimlik bir örneklem olsun.

$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq t)$ örneklem dağılım fonksiyonu (t'nin her sabit değeri için $F(t)$'nin bir tahmin edicisi) ve $\hat{F}_n^{1*}(t) = F_n(t)$ olmak üzere $F^{k*}(t)$'nin tahmin edicisi ardışık olarak

$$\hat{F}_n^{k*}(t) = \int_0^{\infty} \hat{F}_n^{(k-1)*}(t-x)\, d\hat{F}_n^{1*}(x),\ k = 1,2,\dots$$

ile tanımlanabilir. (3.2) konvolüsyon serisinde $F^{k*}(t)$ yerine $\hat{F}_n^{k*}(t)$ tahmin edicisinin alınmasıyla yenileme fonksiyonu için bir parametrik olmayan tahmin edici elde edilebilir.

$$\hat{H}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_n^{\ k*}(t)$$

ile tanımlanan $\hat{H}_n(t)$ $H(t)$ yenileme fonksiyonunun parametrik olmayan bir tahmin edicisidir (Frees 1986). Bu tahmin edici $H(t)$ tahmin edicisine alternatif olarak tanımlanmıştır.

$(X_1, \dots, X_n)$ örnekleminin her sabit değeri için $\hat{H}_n(t)$ tahmin edicisinin değeri $\hat{H}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_n^{\ k*}(t)$ denkleminden kolaylıkla elde edilemez. $(X_1, \dots, X_n)$ örnekleminin her sabit değeri için

$$\hat{H}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_n^{\,k*}(t)$$

denkleminin

$$\hat{H}_n(t) = F_n(t) + \int_0^t \hat{H}_n(t-x)dF_n(x) \tag{3.10}$$

yenileme denklemine teorik olarak denk olduğu bilinmektedir. Böylece $\hat{H}_n(t)$ bu denklemin çözülmesiyle elde edilebilir. Schneider, Lin ve O'Cinneide (3.10) denkleminin çözümü için bir yöntem önermişlerdir (Schneider vd. 1990). Bu yöntemde $(0,t)$ aralığı kesiklendirilerek $X_i, i = 1, \dots, n$ ler uygun bir h tamsayısı ile çarpılarak yeniden ölçeklendirilir ve en yakın tamsayıya yuvarlatılır ve böylece yenileme fonksiyonunun hesabı için F_n örneklem dağılım fonksiyonuna bir aritmetik dağılım fonksiyonu ile yaklaşılır. RS yöntemindeki yaklaşıma benzer olarak (3.10) daki integralin bir sonlu toplamla yer değiştirmesiyle $\hat{H}_n(t)$ ardışık olarak hesaplanır. $t = k$ ve $\hat{F}_a$ yukarıda bahsedilen aritmetik dağılım fonksiyonu olmak üzere $\hat{H}_{1n}$

$$\hat{H}_n^a(i) = \hat{F}_a(i) + \sum_{j=1}^{i} \hat{H}_n^a(i-j)\left(\hat{F}_a(j) - \hat{F}_a(j-1)\right), \quad i = 1,2,\dots,k$$

toplamından ardışık olarak hesaplanır. $i = 1,2,\dots,k$ olmak üzere $\hat{H}_n(\frac{i}{h}) = \hat{H}_n^a(i)$ dir (Aydoğdu, 1997).

3.4 Homojen Poisson Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki şartları sağladığında λ oranlı bir Poisson sürecidir.

1. $N(0) = 0$,

2. Süreç bağımsız ve durağan artışlı bir süreçtir,

3. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$,

4. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Homojen Poisson sürecinin olaylar arası geçen zaman rasgele değişkenleri yani $X_1, X_2, \dots$ ler birbirinden bağımsız ve aynı $\frac{1}{\lambda}$ beklenen değeri ile üstel dağılımlıdır. Ayrıca her $t \geq 0$ için $N(t)$ λt oranlı Poisson dağılımlıdır, yani

$$P(N(t+h) - N(h) = x) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^{x}}{x!}, x = 0,1, \dots$$

dir. Kısaca ifade etmek gerekirse, yenileme sürecine göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman rasgele değişkenleri üstel dağılımlı ise bu süreç homojen Poisson süreci olarak adlandırılır.

Homojen Poisson süreci için önemli bir fonksiyon olan λ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci olsun. Bu süreç $(0, t_0]$ zaman aralığında gözlenmiş ve bu aralıkta sırasıyla $S_1, S_2, \dots, S_n$ zamanlarında n tane bozulma gerçekleşmişse olabilirlik fonksiyonu

$$L = \lambda^{n} e^{-\lambda t_0}$$

olup, buradan

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_0}$$

en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilir.

Eğer λ oranlı $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson süreci n tane olay gerçekleşinceye kadar gözlenirse $S_1, S_2, \dots, S_n$ sırasıyla bu olayların gerçekleniş zamanlarını göstermek üzere L olabilirlik fonksiyonu

$$L = \lambda^{n} e^{-\lambda S_n}$$

olur. Bu durumda λ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda S_n$$

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - S_n = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{S_n}$$

olarak elde edilir.

3.5 Homojen Olmayan Poisson Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. $t \geq 0$ için $\lambda(t)$, t'nin bir fonksiyonu olmak üzere

1. $N(0) = 0,$

2. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışlı,

3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h),$

4. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci denir.

Homojen olmayan Poisson sürecinde $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu sabit olmadıkça $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri ne bağımsız ne de aynı dağılımlıdırlar.

Homojen olmayan bir Poisson sürecinin şiddet fonksiyonu $\lambda(t)$'nin $\forall\, t \geq 0$ için λ ya eşit olduğu durumda süreç, λ oranlı bir Poisson süreci olur.

Teorem 3.5.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci ve $M(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ olmak üzere $N(t)$ rasgele değişkeni $M(t)$ ortalamalı Poisson dağılımlıdır, yani

$$P(N(t+h) - N(h) = x) = \frac{e^{-(M(t+h)-M(h))}(M(t+h)-M(h))^x}{x!}, x = 0,1, \dots$$

dir (Ross 1996). Buna göre $M(t)$ fonksiyonu homojen olmayan Poisson sürecin ortalama değer fonksiyonu olarak adlandırılır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ λ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışlı bir süreç olduğundan ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olayların sayısı birbirinden bağımsız olacaktır. Bu nedenle homojen olmayan Poisson süreci için koşullu şiddet fonksiyonu

$$\gamma(t) = \lambda(t)$$

ile verilen deterministik bir fonksiyondur.

3.5.1 $\lambda(t)$'nin en çok olabilirlik tahmini

$\{N(t), t \geq 0\}$ $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci olsun. Bozulma zamanlarının gözlenmesi yerine ayrık zaman aralıklarındaki bozulmaların sayısı elimizde olsun. Kabul edelim ki ayrık $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_m, b_m]$ aralıklarında sırasıyla $n_1, n_2, \dots, n_m$ bozulma sayısı gözlensin. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L = P(N(b_i) - N(a_i) = n_i, i = 1,2, \dots, m)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} P(N(b_i) - N(a_i) = n_i)$$

sürecin bağımsız artışlılığı ile

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{e^{-(M((b_i) - M(a_i))}(M((b_i) - M(a_i))^{n_i}}{n_i!}$$

$$= (\prod_{i=1}^{m} \frac{(M((b_i) - M(a_i))^{n_i}}{n_i!})e^{-\sum_{i=1}^{m}(M((b_i) - M(a_i))}$$

$$= (\prod_{i=1}^{m} \frac{(\int_{a_i}^{b_i} \lambda(u)du)^{n_i}}{n_i!})e^{-\sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} \lambda(u)du}$$

dur. Böylece log-olabilirlik fonksiyonu $\sum_{i=1}^{m} \ln(n_i\,!)$ sabiti haricinde

$$\ln L = -\sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} \lambda(u)du + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln(\int_{a_i}^{b_i} \lambda(u)du)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [\mathrm{n_i} \ln\left(\int_{a_i}^{b_i} \lambda(u)du \right) - \int_{a_i}^{b_i} \lambda(u)du]$$

dur.

Eğer bu süreç $(0, t_0]$ zaman aralığında gözlenmiş ve varış zamanları $S_1 = s_1$, $S_2 = s_2, \dots, S_n = s_n$ olarak belirlenmiş ise bu sürece ilişkin olabilirlik fonksiyonunun

$$L = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \\ \vdots \\ h_n \to 0}} \frac{P(s_i < S_i \le s_i + h_i, N(t_0) = n, i = 1,2, \dots n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$$

olduğu bilinmektedir.

$(s_i < S_i \le s_i + h_i,\ N(t_0) = n,\ i = 1,2, \dots n)$ olayı bozulmaların $(s_i, s_i + h_i]$,

$i = 1,2, \dots, n$ aralıklarında meydana gelmesi ve diğer aralıklarda hiç bozulma meydana gelmemesi, yani $(0, s_1], (s_1 + h_1, s_2], \dots, (s_n + h_n, t_0]$ aralıklarında hiç bozulma olmaması ve $(s_1, s_1 + h_1], (s_2, s_2 + h_2], \dots, (s_n, s_n + h_n]$ aralıklarında ise yalnızca 1 bozulma olması olayına denktir.

Ayrıca $\{N(t), t \ge 0\}$ süreci bağımsız artışlı olduğundan

$$P(s_i < S_i \le s_i + h_i,\ N(t_0) = n,\ i = 1,2, \dots n)$$

$$= P(N(s_1) = 0) P(N(s_2) - N(s_1 + h_1) = 0) \dots P(N(t_0) - N(s_n + h_n) = 0)$$

$$\times P(N(s_1 + h_1) - N(s_1) = 1) P(N(s_2 + h_2) - N(s_2) = 1)$$

$$\dots P(N(s_n + h_n) - N(s_n) = 1)$$

$$= e^{-M(s_1)} e^{-[M(s_2) - M(s_1 + h_1)]} \dots e^{-[M(s_n) - M(s_{n-1} - h_{n-1})]} e^{-M(t_0)} \times \big(\lambda(s_1) h_1 +$$

oh1(λs2h2+o(h2)...(λsnhn+ohn)

$$= (e^{-M(t_0)} e^{\sum_{i=1}^{n} (M(s_i + h_i) - M(s_i))}) \times (\lambda(s_1) \lambda(s_2) \dots \lambda(s_n) h_1 h_2 \dots h_n +$$

$$o(h_1 h_2 \dots h_n))$$

elde edilir. Olabilirlik fonksiyonu

$$L h_1 h_2 \dots h_n = e^{-M(t_0)} e^{\sum_{i=1}^{n} (M(s_i + h_i) - M(s_i))} \lambda(s_1) \lambda(s_2) \dots \lambda(s_n) h_1 h_2 \dots h_n$$

$$+ o(h_1 h_2 \dots h_n) + o(h_1 h_2 \dots h_n)$$

$$L = e^{-M(t_0)}\lambda(s_1)\lambda(s_2)\ldots\lambda(s_n)\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0\\ \vdots\\ h_n\to 0}} e^{\sum_{i=1}^{n}\left(M(s_i+h_i)-M(s_i)\right)} + \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0\\ \vdots\\ h_n\to 0}} \frac{o(h_1h_2\ldots h_n)}{h_1h_2\ldots h_n}$$

$$= e^{-M(t_0)}\lambda(s_1)\lambda(s_2)\ldots\lambda(s_n)$$

dir. O halde

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda(s_i)\right)e^{-\int_0^{t_0}\lambda(u)du} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir.

Eğer süreç belirlenmiş $(0, t_0]$ zaman aralığı yerine n olay gerçekleşinceye kadar gözlenirse L olabilirlik fonksiyonu (3.11) ifadesinde t_0 yerine S_n alınarak verilir, yani

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda(s_i)\right)e^{-\int_0^{S_n}\lambda(u)du}$$

dur.

3.5.2 Homojen olmayan bir Poisson sürecinin homojen Poisson sürecine dönüştürülmesi

Homojen olmayan bir Poisson süreci aşağıdaki şekilde bir Poisson sürecine dönüştürülebilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$, azalmayan ve sürekli $M(t)$ ortalama değer fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci olsun. $S_1, S_2, \ldots, S_n$ rasgele değişkenleri sürecin varış zamanlarını belirtmek üzere $T_i = M(S_i),\ i = 1,2,\ldots$ ile tanımlanan T_i , $i = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenleri $\lambda = 1$ ortalamalı bir Poisson sürecinin varış zamanlarıdır (Parzen 1964).

Buradan haraketle $T_1, T_2, \ldots$ varış zamanlarına karşılık gelen süreç $\{U(t), t \geq 0\}$ olsun. Bu sürecin $\lambda = 1$ ortalamalı homojen Poisson süreci olduğu aşağıdaki şekilde gösterilir.

M^{-1} ters fonksiyonu $M^{-1}(t)$ =inf $\{h: M(h) \geq t\},\ t \geq 0$ olmak üzere

$U(t) = N\left(M^{-1}(t)\right), t \geq 0$ eşitliği kolaylıkla yazılabilir.

1) $U(0) = N\big(M^{-1}(0)\big) = N(0) = 0$,

2) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışlı ve $M^{-1}(t)$ nin azalmayan bir fonksiyon olması ile

$U(t) = N\big(M^{-1}(t)\big)$ ifadesinden $\{U(t), t \geq 0\}$ sürecinin de bağımsız artışlı olduğu görülmektedir.

3) $s > 0$ için $U(t+s) - U(t) = N\big(M^{-1}(t+s)\big) - N\big(M^{-1}(t)\big) \sim Poisson(s)$,

$M^{-1}(t+s) > M^{-1}(t)$

Yukarıdaki üç madde göz önüne alındığında $\{U(t), t \geq 0\}$, $\lambda = 1$ ortalamalı bir Poisson sürecidir. Aynı zamanda bu sonucun tersi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ rasgele değişkenleri $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecinin varış zamanları rasgele değişkenleri ve M azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $M(S_1), M(S_2), \ldots$ rasgele değişkenleri $\lambda = 1$ ortalamalı bir Poisson sürecinin varış zamanları ise başlangıçta seçilen $\{N(t), t \geq 0\}$ süreci M ortalama değer fonksiyonlu bir homojen olmayan Poisson sürecidir. Buradan hareketle yukarıdaki sonucunun tersinin de doğru olduğu görülmektedir.

Ayrıca bu dönüşüm trend yenileme sürecinin tanımını yapmada ve anlamada katkısı olan bir dönüşümdür.

3.6 Geometrik Süreç

$\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ negatif değerler almayan rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere $\{a^{n-1}X_n,\ n = 1,2, \ldots\}$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi olacak biçimde $a > 0$ mevcut iken $\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ dizisi üzerine kurulu $\{N^G(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine a oranlı bir geometrik süreç denir.

Bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman rasgele değişkenleri olan $X_1, X_2, \ldots$ ler birbirinden bağımsızdırlar fakat aynı dağılımlı değildirler. Bu rasgele değişkenler yalnızca $a = 1$ olduğu durumda aynı dağılımlı olurlar ve $\{N^G(t), t \geq 0\}$ sayma süreci bir yenileme süreci olur.

3.6.1 Geometrik sürecin monotonluğu

$\{a^{n-1}X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ bir geometrik süreç olmak üzere $0 < a < 1$ iken süreç stokastik olarak artandır.

$Y_n = a^{n-1}X_n$ diyelim. Bu durumda $X_n = a^{1-n}Y_n$ olacaktır. $n = 1,2,\dots$ için X_n rasgele değişkenlerine ait dağılım fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \le x) = P(Y_1 \le x) = F(x)$$

$$F_{X_2}(x) = P(X_2 \le x) = P(a^{-1}Y_2 \le x) = P(Y_2 \le ax) = F(ax)$$

.

.

.

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x) = P(a^{1-n}Y_n \le x) = P(Y_n \le a^{n-1}x) = F(a^{n-1}x)$$

$$F_{X_{n+1}}(x) = P(X_{n+1} \le x) = P(a^{-n}Y_{n+1} \le x) = P(Y_n \le a^n x) = F(a^n x)$$

$0 < a < 1$ için $a^{n-1}x > a^n x$ ve F azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$F(a^{n-1}x) \ge F(a^n x)$$

dir. Buradan hareketle her $x \in \mathbb{R}$ için

$P(X_n \ge x) \le P(X_{n+1} \ge x)$ eşitsizliğine yani $\{a^{n-1}X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ geometrik sürecinin $0 < a < 1$ için stokastik olarak artan olduğuna ulaşılır. Benzer olarak $a > 1$ durumunda bu sürecin stokastik olarak azalan olduğu görülür.

3.7 α- Seri Süreç

$\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ negatif değerler almayan rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere

$\{n^\alpha X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi olacak biçimde $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut iken $\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ dizisinin oluşturduğu $\{N(t), t \ge 0\}$ sayma sürecine bir α -seri süreç denir.

$\alpha < 0$ durumunda α -seri süreç stokastik olarak artandır.

$Y_n = n^{\alpha} X_n$ olarak seçildiğinde

$X_n = n^{-\alpha} Y_n$ olduğu açıktır. $n = 1,2, \ldots$ için X_n rasgele değişkenlerine ait dağılım fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) = P(1^{-\alpha} Y_1 \leq x) = F(x)$$

$$F_{X_2}(x) = P(X_2 \leq x) = P(2^{-\alpha} Y_2 \leq x) = F(2^{\alpha} x)$$

.

.

.

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = P(n^{-\alpha} Y_n \leq x) = F(n^{\alpha} x)$$

$$F_{X_{n+1}}(x) = P(X_{n+1} \leq x) = P((n+1)^{-\alpha} Y_{n+1} \leq x) = F((n+1)^{\alpha} x)$$

olduğundan ve F'in azalmayan bir fonksiyon olması ile

$$F_{X_n}(x) > F_{X_{n+1}}(x) \Rightarrow P(X_n \geq x) < P(X_{n+1} \geq x)$$

dir ve buradan $\alpha < 0$ iken α-seri sürecin stokastik olarak artan olduğu, benzer şekilde $\alpha > 0$ iken sürecin stokastik olarak azalan olduğu görülmektedir.

3.8 Tamir Türleri

Tamirin genelde aşağıda verilen altı tane mümkün türü vardır.

1. Yenisi kadar iyi (kusursuz tamir)
2. Eskisi kadar kötü (minimal tamir)
3. Eskisinden iyi fakat yenisinden kötü (kusurlu tamir)
4. Yenisinden iyi
5. Eskisinden kötü (minimal tamirden kötü)

6. En kötü tamir (istenmediği halde ürünün kazayla imha olmasına götüren tamir)

$X_1 = x_1$ zamanında gerçekleşen ilk tamir göz önüne alındığında orijinal parçanın ömrü olan X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F_1 ve $X_1 = x_1$ zamanında tamir edilen parçanın ömrü olan X_2 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu ise F_2 ile gösterilir.

3.8.1 Minimal tamir

Minimal tamir kavramı ilk kez Barlow ve Hunter (1960) tarafından önerilmiştir. Rasgele bir ömre sahip tamir edilebilen bir parça ya da bir sistem göz önüne alınsın. Parçanın ömrünü X_1 ve dağılımını F ile gösterilsin. Parçanın $X_1 = x_1$ zamanında bozulduğu gözlendiğinde parçanın x_1 zamanında ilk tamirinin yapılmasıyla tamir edilen bu parçanın ömrünün dağılımı F_2 ile gösterilsin. Eğer bu tamir ile parça bozulmadan hemen önceki durumuna geri getirilirse ya da başka bir deyişle parça yalnızca bozulma zamanındaki yaşına eşit yaşta bir parça olarak çalışır duruma gelirse, yani

$$F_2(x) = F(x|x_1) = P(X_1 - x_1 \leq x|X_1 > x_1)\,, \qquad x\epsilon\mathbb{R}$$

ise bu tamire bir minimal tamir adı verilir. Burada X_2 ilk kez x_1 zamanında bozulup tamir edilen parçanın ömrü olmak üzere F_2 dağılım fonksiyonu

$$F_2(x) = P(X_2 \leq x|X_1 = x_1)$$

ile verilir.

Minimal tamir altında orijinal parçanın bozulma oran fonksiyonu ilk tamirini görmüş parçanın bozulma oran fonksiyonuna eşittir.

Orijinal parçaya ait bozulma oran fonksiyonu $r_1 = r(x + x_1)$ dir. İlk tamirini görmüş parçanın bozulma oran fonksiyonu ise $r_2 = r(x|x_1)$ dir. X_2 rasgele değişkenine ait dağılım fonksiyonu

$$F(x|x_1) = \begin{cases} \dfrac{F(x + x_1) - F(x_1)}{1 - F(x_1)}, & x \geq 0 \\ 0 \qquad , & d.d. \end{cases}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|x_1) = \frac{f(x+x_1)}{1-F(x_1)}$$

dir.

$$r_2 = r(x|x_1) = \frac{f(x|x_1)}{1-F(x|x_1)} = \frac{f(x+x_1)/1-F(x_1)}{1-(F(x+x_1)-F(x_1)/1-F(x_1))}$$

$$= \frac{f(x+x_1)}{1-F(x+x_1)} = r(x+x_1) = r_1$$

dir.

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. Bu durumda homojen olmayan Poisson sürecinin tanımından

$$P(X_1 > t) = e^{-M(t)} ,$$

$$P(X_2 > t|X_1 = x_1) = e^{-(M(x_1+t)-M(x_1))}$$

$$P(X_n > t|X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = e^{-\int_0^t \lambda(x_1+\cdots+x_{n-1}+s)ds}$$

$$= e^{-(M(x_1+\cdots+x_{n-1}+t)-M(x_1+\cdots+x_{n-1}))}$$

olduğu biliniyor. Minimal tamir tanımından

$$P(X_1 - x_1 > t|X_1 > x_1) = P(X_1 > x_1 + t|X_1 > x_1)$$

$$= \frac{P(X_1>x_1+t)}{P(X_1>x_1)} = \frac{e^{-M(x_1+t)}}{e^{-M(x_1)}} = e^{-(M(x_1+t)-M(x_1))}$$

dir.

$$X_1 - x_1|X_1 > x_1 \overset{d}{=} X_2|X_1 = x_1$$

olduğundan homojen olmayan Poisson süreci altında yapılan ilk tamir minimaldir.

Benzer şekilde homojen olmayan Poisson sürecine göre

$$P(X_3 > t|X_1 = x_1, X_2 = x_2) = e^{-(M(x_1+x_2+t)-M(x_1+x_2))}$$

dir.

Minimal tamir ile yapılan ikinci tamir ise

$$P(X_1-(x_1+x_2)>t|X_1>x_1+x_2)=P(X_1>x_1+x_2+t|X_1>x_1+x_2)$$

$$=\frac{P(X_1>x_1+x_2+t)}{P(X_1>x_1+x_2)}=e^{-(M(x_1+x_2+t)-M(x_1+x_2))}$$

dir.

$$X_1-(x_1+x_2)|X_1>x_1+x_2 \overset{d}{=} X_3|X_1=x_1,X_2=x_2$$

olduğundan homojen olmayan Poisson süreci altında yapılan ikinci tamir de minimaldir.

Genel halde

$$P(X_{n+1}>t|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=e^{-(M(x_1+\cdots+x_n+t)-M(x_1+\cdots+x_n)}$$

dir. n. minimal tamir ise

$$P(X_1-(x_1+\cdots+x_n)>t|X_1>x_1+\cdots+x_n)$$

$$=P(X_1>x_1+\cdots+x_n+t|X_1>x_1+\cdots+x_n)$$

$$=\frac{P(X_1>x_1+\cdots+x_n+t)}{P(X_1>x_1+\cdots+x_n)}=e^{-(M(x_1+\cdots+x_n+t)-M(x_1+\cdots+x_n))}$$

dir.

$$X_1-(x_1+\cdots+x_n)|X_1>x_1+\cdots+x_n \xrightarrow{d} X_{n+1}|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n$$

olduğundan homojen olmayan Poisson süreci altında yapılan tüm tamirler minimaldir.

Minimal tamir altında $\{N(t),t\geq 0\}$ sayma sürecinin bir boyutlu olasılık dağılımı

$n=1,2,\dots$ olmak üzere S_n rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$P(N(t)=n)=\int_0^t f_{N(t)|S_n}(n|s)ds+\int_t^\infty f_{N(t)|S_n}(n|s)ds.$$

$N(t)=n,\ S_n=s \Leftrightarrow (0,s)$ zaman aralığında $n-1$ olay gerçekleşmesi, s anında 1 olay gerçekleşmesi ve $(s,t]$ zaman aralığında hiç olay gerçekleşmemesi

$P(N(t) = n,\ S_n = s) = P(N(s) = n - 1)P(s\ anında\ 1\ olay\ olması\ |N(s) = n - 1)$

$P(N(t) - N(s) = 0|s\ anında\ 1\ olay\ olması,\ N(s) = n - 1\ )$ dir.

$P(s\ anında\ 1\ olay\ olması\ |N(s) = n - 1) = P(N(s + \Delta t) - N(s) = 1|H_s)$ olarak yazılabilir. Ayrıca

$E(N(s + \Delta t) - N(s) = 1|H_s) = P(N(s + \Delta t) - N(s) = 1|H_s)$ olduğundan

$E(\lambda_c(s)) = \lambda(s)$ olduğu açıktır ve

$P(N(t) - N(s) = 0|s\ anında\ 1\ olay\ olması, N(s) = n - 1\ ) = P(X_1 > t|X_1 > s)$

$= \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}$ dir. Bu ifadelerin yerine yazılmasıyla

$$P(N(t) = n,\ S_n = s) = P(N(s) = n - 1)\lambda(s)\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}$$

olasılığı elde edilir. Böylece $n = 1,2,\ldots$ için $P(N(t) = n) = P_n(t)$ gösterimi ile

$$P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(s)\lambda(s)\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}ds$$

olarak elde edilir.

$\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}$ dir. Minimal tamir altında $r(t)$ bozulma oran fonksiyonu $\lambda_c(t)$'ye eşittir. $E(\lambda_c(t)) = \lambda(t)$ olduğundan $r(t)$ yerine eşiti olan $\lambda(t)$ nin yazılmasıyla

$$\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} = e^{-M(t)}$$

elde edilir ve

$$P_n(t) = e^{-M(t)}\int_0^t P_{n-1}(s)\frac{\lambda(s)}{\overline{F}(s)}ds$$

denklemine ulaşılır.

$P_0(t) = P(N(t) = 0) = \overline{F}(t) = e^{-M(t)}$ olduğunun göz önüne alınmasıyla $P_n(t), n$'ye göre ardışık olarak yukarıdaki denklemden elde edilir.

$$P_1(t) = e^{-M(t)}\int_0^t e^{-M(s)}\frac{\lambda(s)}{\overline{F}(s)}ds = M(t)e^{-M(t)}$$

bulunur. Benzer olarak

$$P_2(t) = e^{-M(t)} \int_0^t M(s)e^{-M(s)} \frac{\lambda(s)}{e^{-M(s)}} ds = e^{-M(t)} \int_0^t M(s)\lambda(s)ds = e^{-M(t)} \frac{M^2(t)}{2}$$

elde edilir. Genel halde

$$P_n(t) = \frac{e^{-M(t)} M^n(t)}{n!}, n = 0,1, \dots$$

olduğu tümevarım yöntemiyle kolaylıkla gösterilir. Böylece $\{N(t), t \geq 0\}$ bir homojen olmayan Poisson sürecidir.

3.8.2 Kusurlu tamir

Bir parça bozulduğunda tamir edilen parçayı p olasılıkla yenisi kadar iyi duruma (kusursuz tamir), $1 - p$ olasılıkla parça yalnızca bozulma zamanındaki yaşına eşit yaşta bir parça olarak çalışır duruma (minimal tamir) getiren tamir bir kusurlu tamirdir (Brown ve Proschan 1983).

Literatürde değişik kusurlu tamir modelleri de vardır. Örneğin geometrik süreç, α-seri süreç ve genelleştirilmiş yenileme süreç modelleri bunlardan bazılarıdır.

Mark Brown ve Frank Proschan (1983) tarafından verilen klasik model aşağıdaki gibidir.

$F_{X_1} = F$ olmak üzere $X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$ bozulma zamanları gözlemleri ile

$n = 2$ için

$$F_{X_2}(x) = pF(x) + (1-p)F(X_1 - x_1 < x | X_1 > x_1) = pF(x) + (1-p)F(x|x_1)$$

$n = 3$ için

$$F_{X_3}(x) = pF(x) + (1-p)F(X_1 - (x_1 + x_2) < x | X_1 > x_1 + x_2)$$

$$= pF(x) + (1-p)F(x | x_1 + x_2)$$

olmak üzere genel halde

$$F_{X_n}(x) = pF(x) + (1-p)F(x|x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$

dir.

4. TREND YENİLEME SÜRECİ

Bu bölümde sayma süreçlerinden gelen veri kümesinin yapısında bir trend söz konusu ise homejen olmayan Poisson süreci, geometrik süreç, α-seri süreç gibi model olarak önerilen bazı süreçlere alternatif bir süreç olan trend yenileme süreci tanımlanmıştır. Ardından trend yenileme sürecine ait özelliklere değinilmiştir. Sürece ait trend yenileme fonksiyonu, koşullu şiddet fonksiyonu verilmiş, çeşitli yollarla trend yenileme süreci için en çok olabilirlik fonksiyonu elde edilmiştir.

Trend yenileme süreci ilk kez Lindqvist (1993) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır. Bu süreç yenileme süreci ve Homejen olmayan Poisson sürecinin özel durumlarını içeren bir süreç olarak tanımlanmıştır. Uygulamada kullanılacak olan tamir yöntemine göre modellemede kullanılacak süreçler farklılık göstermektedir. Minimal tamiri modellemede homojen olmayan Poisson süreci kullanılırken kusursuz tamiri modellemede yenileme süreci kullanılmaktadır. Bu iki uç tamir yöntemi arasındaki boşluğu trend yenileme süreci hem homojen olmayan Poisson sürecini hem de yenileme sürecini içerdiğinden kapatmaktadır. Uygulamada her iki yöntemin de eksik kaldığı durumlardaki açık trend yenileme süreci ile doldurulmaktadır.

Trend yenileme süreci ve sürece ait önemli fonksiyonların parametre tahmini ile ilgili literatürde pek çok çalışma vadır. Fakat ilk kez bu çalışmada trend yenileme sürecinin yenileme süreci ile olan bağlantısı kullanılarak trend yenileme fonksiyonunun değerinin tahmini problemi üzerinde durulmuştur.

Tanım 4.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. $\lambda(t)$ negatif değerler almayan , integrallenebilir bir fonksiyon ve $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ olmak üzere $\Lambda(S_1), \Lambda(S_2), \ldots$ ler bir $\{N_y(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci oluşturuyorlarsa, yani $\Lambda(S_1), \Lambda(S_2) - \Lambda(S_1), \Lambda(S_3) -$

$\Lambda(S_2)$ ... ler birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımına sahip iseler $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir trend yenileme süreci denir ve $TYS(F, \lambda)$ ile gösterilir. Burada F dağılım fonksiyonu yenileme dağılımı ve λ trend fonksiyonu adını alır (Lindqvist 1993).

Tanım 4.1'den anlaşılacağı üzere trend yenileme süreci; yenileme süreci ve homojen olmayan Poisson sürecinin genel bir halidir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F, \lambda)$ olsun. Yenileme dağılımının 1 oranlı üstel dağılım olması durumunda süreç λ oranlı bir homojen olmayan Poisson süreci olacaktır yani,

$$F(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$$

iken

$$TYS(\, 1 - e^{-x}, \lambda) = HOPS(\lambda)$$

dır. Benzer şekilde F yenileme dağılımı 1 oranlı üstel dağılıma sahipken bu kez trend fonksiyonu $\lambda = 1$ seçildiğinde yani, sabit olduğunda $\{N(t), t \geq 0\}$ süreci 1 oranlı bir Poisson sürecidir.

$$TYS(1 - e^{-x}, 1) = HPS(1)$$

Yenileme dağılımı F, λ oranlı üstel dağılım ve trend fonksiyonu $\lambda = 1$ durumunda ise

$$TYS\left(1 - e^{-\lambda x}, 1\right) = HPS(\lambda)$$

olduğu açıktır. Ayrıca trend fonksiyonu $\lambda = 1$ seçilirse süreç F dağılımlı bir yenileme süreci olacaktır yani,

$$TYS(F, 1) = YS(F)$$

dir. Bu ifadelerden görüldüğü üzere trend yenileme süreci tek değildir. Sürecin tekliği aşağıdaki gibi gösterilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci bir $TYS(F, \lambda(.))$ olsun.

Bir $c > 0$ için F dağılım fonksiyonu iken F_1'in de dağılım fonksiyonu olduğu

$F_1(x) = F(cx)$ ve $\lambda_1(t) = \frac{\lambda(t)}{c}$ tanımlayalım. Bu durumda

$\Lambda(S_1), \Lambda(S_2) - \Lambda(S_1), \Lambda(S_3) - \Lambda(S_2)$ ... bağımsız ve aynı F dağılımlı $\Leftrightarrow$

$\Lambda_1(S_1), \Lambda_1(S_2) - \Lambda_1(S_1), \Lambda_1(S_3) - \Lambda_1(S_2)$ ... bağımsız ve aynı F_1 dağılımlı olduğundan $TYS\big(F, \lambda(.)\big) = TYS(F_1, \lambda_1(.))$ dir. Yani $TYS\big(F(x), \lambda(.)\big) = TYS(F(cx), \frac{\lambda(t)}{c})$ dir.

Böylece trend yenileme sürecinin tarifi ve gösterimi tek değildir. Bu sürecin tarifi yukarıdaki şekilde yalnızca bir ölçek çarpanına kadar tektir. Bu tanımlamayı tek yapabilmek için F dağılımının ortalaması 1 olarak alınır.

4.1 Trend Yenileme Fonksiyonu

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F, \lambda)$ olmak üzere

$$M(t) = E(N(t)),\ t \geq 0$$

ile verilen M fonksiyonuna trend yenileme fonksiyonu denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ $TYS(F, \lambda)$ sürecinin tanımı göz önüne alındığında bu süreçle ilgili yenilemeler arası geçen zamanların dağılımı F olan $\{N_y(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci yardımıyla

$$N(t) = N_y\big(\Lambda(t)\big),\ t \geq 0$$

olduğu açıktır. Bu durumda $M(t)$ trend yenileme fonksiyonu H yenileme fonksiyonuna bağlı olarak

$$M(t) = H\big(\Lambda(t)\big),\ t \geq 0 \tag{4.1}$$

biçiminde yazılabilir.

Yenileme fonksiyonunun asimptotik özelliklerinden faydalanılarak trend yenileme fonksiyonu için bazı asimptotik özellikler elde etmek mümkündür. Bunlar;

1) $\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F, \lambda)$ ve bu sürece göre gerçekleşen yenilemeler arası geçen zamanların dağılımı F olan $\{N_y(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere (3.5) den

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = 1$$

olduğu biliniyor. Bu durumda $\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$ iken $\lim_{t\to\infty} \frac{H(\Lambda(t))}{\Lambda(t)} = 1$, yani

$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{\Lambda(t)} = 1$ dir. Böylece büyük t'ler için $M(t) \approx \Lambda(t)$ dir.

2) $\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F,\lambda)$ ve bu sürece göre gerçekleşen yenilemeler arası geçen zamanların dağılımı 1 ortalamalı, sonlu σ^2 varyanslı F olan $\{N_y(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. Bu durumda (3.6)'dan

$\lim_{t\to\infty}(H(t) - t) = \frac{\sigma^2-1}{2}$ olup $\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$ olduğunda

$\lim_{t\to\infty}(M(t) - \Lambda(t)) = \frac{\sigma^2-1}{2}$ dir. Böylece büyük t'ler için $M(t) \approx \Lambda(t) + \frac{\sigma^2-1}{2}$

elde edilir.

3) $\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F,\lambda)$ ve bu sürece göre gerçekleşen yenilemeler arası geçen zamanların dağılımı 1 ortalamalı, sonlu σ^2 varyanslı F olan $\{N_y(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere (3.7) yardımıyla

$$\frac{N_y(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dir. Yani

$$N_y(t) \sim AN\left(\frac{t}{\mu}, \frac{\sigma^2 t}{\mu^3}\right)$$

dir. Buradan

$\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$ ise

$$N(t) \sim AN(\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t))$$

olduğu açıktır.

4.2 Trend Yenileme Sürecinin Koşullu Şiddet Fonksiyonu

$\{N(t), t \geq 0\}$ λ trend fonksiyonlu bir trend yenileme süreci olsun. Trend yenileme sürecinin tanımından $N(t) = N_y(\Lambda(t))$ olduğu biliniyor. Bu sürece ait koşullu şiddet fonksiyonu kısım 2.7.3'den

$$\gamma(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\big((t, t+\Delta t] \text{aralığında olay olmaması} \big| H_t\big)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\big(\{N_y(t), t \geq 0\} \text{yenileme sürecinde } (\Lambda(t), \Lambda(t+\Delta t)] \text{ aralığında olay olmaması } \big| H_t\big)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\big((\Lambda(t), \Lambda(t+\Delta t)] \, \big| H_t\big)}{\Delta t} \frac{\Delta\Lambda(t)}{\Delta\Lambda(t)}$$

$$= r(\Lambda(t) - \Lambda(S_{N(t)})) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t}$$

$$= r\left(\Lambda(t) - \Lambda(S_{N(t)})\right) \lambda(t)$$

olarak elde edilir.

4.3 Trend Yenileme Süreci için Olabilirlik Fonksiyonunun Koşullu Şiddet Fonksiyonu Yardımıyla Elde Edilmesi

$\{N(t), t \geq 0\}$ $\gamma(t)$ koşullu şiddet fonksiyonlu bir trend yenileme süreci olsun. Süreç $(0, t]$ zaman aralığında gözlensin ve bozulma zamanları $S_1, S_2, \ldots, S_{N(t)}$ olarak belirlensin. $N(t) = n$ varsayımı altında sürece ait olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

Genel olarak $\gamma(t)$ koşullu şiddet fonksiyonlu bir sayma süreci için olabilirlik fonksiyonu

$$L = \left(\prod_{i=1}^{N(t)} \gamma(S_i)\right) e^{-\int_0^t \gamma(u) du}$$

biçiminde olduğu (3.11) denkleminden açıktır. Buradan

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n} \gamma(S_i)\right) e^{-\int_0^{S_1} \gamma(u) du} e^{\int_{S_1}^{S_2} \gamma(u) du} \ldots e^{\int_{S_{N(t)}}^{t} \gamma(u) du}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} r\big(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_{i-1})\big)\lambda(S_i)\right) e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_{S_{i-1}}^{S_i} r(\Lambda(u)-\Lambda(S_{i-1}))\lambda(u)du}$$

$$\times\, e^{-\int_{S_n}^{t} r(\Lambda(u)-\Lambda(S_n))\lambda(u)du}$$

$\Lambda(\mathrm{u}) - \Lambda(\mathrm{S}_{i-1}) = \mathrm{v}$ değişken değiştirmesiyle $\lambda(u)du = dv$ olacaktır. Sonuç olarak

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n} r\big(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_{i-1})\big)\lambda(S_i)\right) e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})} r(\mathrm{v})dv}\, e^{-\int_{0}^{\Lambda(t)-\Lambda(S_n)} r(v)dv}$$

elde edilir. Bu durumda sürecin log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\Big[\ln r\big(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_{i-1})\big) + \ln\lambda(S_i) - \int_{0}^{\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})} r(\mathrm{v})dv\Big]$$
$$- \int_{0}^{\Lambda(t)-\Lambda(S_n)} r(v)dv$$

dir.

4.4 Trend Yenileme Sürecine Ait Varış Zamanları Rasgele Değişkenlerinin Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Çıkarımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci $\lambda(t)$ trend fonksiyonlu bir trend yenileme süreci olsun. $S_1, S_2, \ldots$ ler bu sürece göre gerçekleşen olayların varış zamanları rasgele değişkenleri olmak üzere

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$$

dönüşümü ile elde edilen $\Lambda(S_1), \Lambda(S_2), \ldots$ rasgele değişkenlerinin bir $\{N_y(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecine ait varış zamanı rasgele değişkenleri olduğu ve

$$N(t) = N_y(\Lambda(t))$$

denklemi kısım 4.1'den bilinen sonuçlardır.

$\Lambda(S_1), \Lambda(S_2) - \Lambda(S_1), \ldots, \Lambda(S_n) - \Lambda(S_{n-1})$ fark rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu dikkate alınarak

$$\Lambda(S_1) = Y_1,$$

$$\Lambda(S_2) = Y_2,$$

.

.

.

$$\Lambda(S_n) = Y_n$$

dönüşümü yapılırsa

$$S_1 = \Lambda^{-1}(Y_1), S_2 = \Lambda^{-1}(Y_2), \ldots, S_n = \Lambda^{-1}(Y_n)$$

olarak elde edilir. Tanım 2.3.1 ışığında $\Lambda(S_i) = Y_i, i = 1,2, \ldots$ dönüşümü yapılmış değişkenlerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(\Lambda(s_1), \Lambda(s_2), \ldots, \Lambda(s_n))|J|$$

dir.

$[J] = \begin{bmatrix} \lambda(s_1) & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & \lambda(s_n) \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı alt üçgensel bir matris olması sebebiyle köşegen elemanlarının çarpımı yani,

$$|J| = \lambda(s_1)\lambda(s_2) \ldots \lambda(s_n)$$

dir. Buradan $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n \Leftrightarrow Y_1 = y_1, Y_2 - Y_1 = y_2 - y_1, \ldots,$

$Y_n - Y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ olduğunun göz önüne alınmasıyla

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = f\big(\Lambda(s_1)\big)f\big(\Lambda(s_2) - \Lambda(s_1)\big) \ldots f(\Lambda(s_n) - \Lambda(s_{n-1}))\lambda(s_1)\lambda(s_2) \ldots \lambda(s_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f\big(\Lambda(s_i) - \Lambda(s_{i-1})\big)\lambda(s_i)$$

dır. Burada $s_0 \equiv 0$ ve $\lambda(s_0) \equiv 0$

$$f_{(S_{n+1}|S_1,S_2,\dots S_n)}(s_{n+1}|s_1,s_2,\dots s_n) = \frac{f_{(S_1,S_2,\dots S_{n+1})}(s_1,s_2,\dots s_{n+1})}{f_{(S_1,S_2,\dots S_n)}(s_1,s_2,\dots s_n)}$$

$$= \frac{f\big(\Lambda(s_1)\big)f\big(\Lambda(s_2)-\Lambda(s_1)\big)\dots f(\Lambda(s_{n+1})-\Lambda(s_n))\lambda(s_1)\lambda(s_2)\dots\lambda(s_{n+1})}{f\big(\Lambda(s_1)\big)f\big(\Lambda(s_2)-\Lambda(s_1)\big)\dots f(\Lambda(s_n)-\Lambda(s_{n-1}))\lambda(s_1)\lambda(s_2)\dots\lambda(s_n)}$$

$$= f(\Lambda(s_{n+1})-\Lambda(s_n))\lambda(s_{n+1})$$

olduğundan $\{S_n, n = 0,1,\dots\}$ $(S_0 \equiv 0)$ süreci bir Markov sürecidir.

4.5 Trend Yenileme Süreci için En Çok Olabilirlik Fonksiyonunun Varış Zamanlarına Ait Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ile Çıkarımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci $\lambda(t)$ trend fonksiyonlu bir trend yenileme süreci olsun. Bu süreç τ zamanına kadar gözlensin ve $S_1 = s_1$, $S_2 = s_2, \dots, S_n = s_n$ gözlemleri elde edilsin. Ayrıca $S_{n+1} > \tau$ yani, $N(\tau) = n$ olduğu bilinsin. Bu bilgiler doğrultusunda $\{N(t), t \geq 0\}$ trend yenileme süreci için en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yeniden elde edilebilir.

$$L = f_{S_1}(s_1)f_{(S_2|S_1)}(s_2|s_1)\dots f_{(S_n|S_1,S_2,\dots S_{n-1})}(s_n|s_1,s_2,\dots s_{n-1})P(S_{n+1} > \tau|S_1 = s_1, S_2 = s_2,\dots,S_n = s_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f\big(\Lambda(s_i)-\Lambda(s_{i-1})\big)\lambda(s_i)P(S_{n+1} > \tau|S_1 = s_1, S_2 = s_2,\dots,S_n = s_n)$$

yazılabilir.

$$P(S_{n+1} > \tau|S_1 = s_1, S_2 = s_2,\dots,S_n = s_n)$$

$$= P(\Lambda(S_{n+1}) > \Lambda(\tau)|\Lambda(S_1) = \Lambda(s_1), \Lambda(S_2) = \Lambda(s_2),\dots,\Lambda(S_n) = \Lambda(s_n))$$

$$= P(\Lambda(S_{n+1}) - \Lambda(S_n) > \Lambda(\tau) - \Lambda(s_n)|\,\Lambda(S_1) = \Lambda(s_1),$$

$$\Lambda(S_2) - \Lambda(S_1) = \Lambda(s_2) - \Lambda(s_1),\dots,\Lambda(S_n) - \Lambda(S_{n-1}) = \Lambda(s_n) - \Lambda(s_{n-1}))$$

$$= P(\Lambda(S_{n+1}) - \Lambda(S_n) > \Lambda(\tau) - \Lambda(s_n))$$

$$= 1 - F\big(\Lambda(\tau) - \Lambda(s_n)\big)$$

$$= e^{-R(\Lambda(\tau)-\Lambda(s_n))} = e^{-\int_0^{\Lambda(\tau)-\Lambda(s_n)} r(u)du}$$

olduğundan

$$L = \prod_{i=1}^{n} f\big(\Lambda(s_i) - \Lambda(s_{i-1})\big)\lambda(s_i)\, e^{-\int_0^{\Lambda(\tau)-\Lambda(s_n)} r(u)du}$$

dur.

5. TREND YENİLEME SÜREÇLERİNDE TAHMİN

Uygulamada trend yenileme sürecine ait tahmin, F yenileme dağılımı ve $\lambda(t)$ trend fonksiyonu üzerine kurulmakta ve bunlara ait tahmin edicilere büyük oranda ihtiyaç duyulmaktadır. Pratikte yenileme dağılımı ve trend fonksiyonuna ilişkin olarak aşağıdaki durumlarda karşılaşılır.

Bu durumlardan ilki F yenileme dağılımının şekilsel formu bilinirken dağılıma ait bazı parametrelerin bilinmemesi ve aynı şekilde λ trend fonksiyonunun şekilsel olarak yapısı bilinirken bazı parametrelerinin bilinmemesi durumudur. Karşılaşılan bir diğer durum ise F yenileme dağılımına ait hiçbir bilgiye sahip değilken, trend fonksiyonunun şekilsel halinin bilinmesi ve bazı parametrelerinin bilinmemesi durumudur. Son olarak F yenileme dağılımının şekilsel olarak bilinip bazı parametrelerinin bilinmemesi, trend fonksiyonu bilgisine de sahip olunmaması pratikte sıklıkla karşılaşılaşılan durumlardandır. Parametre tahmini için pratikte karşılaşılan bu durumlara yönelik çeşitli tahmin yöntemleri kullanılarak parametre tahmini yapmak mümkündür.

Bu çalışmada bu durumlardan ilk ikisi ele alınmış ve bu varsayımlar üzerinden tahmin ediciler elde edilmiştir.

İlk durum F yenileme dağılımının şekilsel halinin bilinip bazı parametrelerinin bilinmediği ayrıca trend fonksiyonunun şekilsel halinin bilinip, bazı parametrelerinin bilinmediği durumdur. Böyle bir durumda tahmin ediciler en çok olabilirlik tahmin yöntemi kullanılarak elde edilmektedir.

İkinci olarak F yenileme dağılımının bilinmediği trend fonksiyonunun ise şeklinin bilindiği ve bazı parametrelerinin bilinmediği durumda trend fonksiyonunun parametrelerinin tahminidir. Böyle bir durumda ise tahmin yöntemlerinden en küçük kareler yöntemi kullanılarak parametre tahmini yapılmaktadır.

F yenileme dağılımı bilindiğinde uygulamada en çok karşılaşılan dağılımlardan olan Weibull ve gamma dağılımı ele alınmış, ayrıca trend fonksiyonunun bilindiği durum için de yine uygulamada sıklıkla karşılaşılan yapılardan ikisi olan

$$\lambda(t) = abt^{b-1}, a, b > 0,\ t \geq 0$$

ve

$$\lambda(t) = e^{a+bt}, -\infty < a, b < \infty, \ t \geq 0$$

trend fonksiyonları kullanılmıştır.

Trend yenileme süreci ile ilgili uygulamalarda bir diğer önemli fonksiyon olan $M(t)$ trend yenileme fonksiyonu bilgisine ihtiyaç duyulur.

Trend yenileme sürecinin yenileme dağılımı F ve trend fonksiyonu λ'nın bilinmeyen parametrelerine ilişkin tahminler elde edildiğinde süreç için bir diğer önemli fonksiyon olan trend yenileme fonksyonu M'nin parametrik tahmini de kolaylaşmaktadır fakat F ve Λ'nın açık ifadeleri verilmiş olsa bile trend yenileme sürecine ilişkin yenileme sürecinin H yenileme fonksiyonu genelde analitik olarak elde edilemez. Bu fonksiyonun sayısal hesabı RS yöntemi yardımıyla (3.9) denklemi kullanılarak yapılabilir.

Bu durumda $M(t)$ trend yenileme fonksiyonu her sabit $t \geq 0$ için (4.1) ifadesi yardımıyla

$$\widehat{M}_n(t) = \widehat{H}_n\left(\widehat{\Lambda}_n(t)\right), t \geq 0 \tag{5.1}$$

ile verilen $\widehat{M}_n(t)$ ile tahmin edilebilir. Burada $\widehat{H}_n(t)$ yenilemeler arası geçen zamanların dağılımı $\widehat{F}_n(t)$ olan yenileme sürecinin yenileme fonksiyonudur, yani $H(t)$'nin bir parametrik tahmin edicisidir ve $\widehat{\Lambda}_n(t) = \int_0^t \hat{\lambda}_n(s)ds$ dir.

Şekilsel olarak bilinen F ve λ fonksiyonları için bilinmeyen parametreler sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_s$ olsun. F ve λ fonksiyonlarının bilinmeyen parametrelerine göre sürekli olması durumunda $\hat{\alpha}_i$ ve $\hat{a}_i$ sırasıyla α_i ve a_i nin tutarlı tahmin edicileri olmak üzere

$$M = H \circ \Lambda \tag{5.2}$$

ifadesi göz önüne alındığında sürekli dönüşüm teoremi ile (5.1) deki $\widehat{M}_n(t)$ tahmin edicisi her sabit $t \geq 0$ için $M(t)$'nin tutarlı bir tahmin edicisi olacaktır.

5.1 En Çok Olabilirlik Yöntemi ile F ve λ'nın Parametrik Tahmini

Bu yöntem F yenileme dağılımının bilindiği durumlarda kullanılır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F, \lambda)$ olsun. Kabul edelim ki F ve λ şekilsel olarak bilinirken bazı parametreleri bilinmesin. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ve $a_1, a_2, \dots, a_s$ sırasıyla F yenileme dağılımı ve λ trend fonksiyonunun bilinmeyen parametrelerini göstermek üzere

$$F = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

ve

$$\lambda = \lambda(a_1, a_2, \dots, a_s)$$

yazılsın. $\{X_1, X_2, \dots X_n\}$, $TYS(F, \lambda)$ dan gelen bir veri kümesi olsun. Burada $X_1, X_2, \dots X_n$ ler bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zamanları gösterir. Bu veriye dayalı olarak $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_r$ ve $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_s$ sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ve $a_1, a_2, \dots, a_s$ parametrelerinin tahmin edicileri olsunlar. F ve λ fonksiyonlarında bilinmeyen parametreler yerine tahmin edicilerinin alınmasıyla açık olarak F ve λ için

$$\hat{F}_n = F(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_r)$$

ve

$$\hat{\lambda}_n = \lambda(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_s)$$

tahmin edicileri elde edilir.

F ve λ her bir parametreye göre sürekli iken $\hat{\alpha}_i$ ve $\hat{a}_i$ α_i ve a_i nin tutarlı tahmin edicileri olduğundan sürekli dönüşüm teoreminden $\hat{F}_n$ ve $\hat{\lambda}_n$ sırasıyla F ve λ'nın iki tutarlı tahmin edicileridir.

5.1.1 F Weibull dağılımı ve $\lambda(t) = abt^{b-1}$ iken parametre tahmini

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F, \lambda)$ olsun. $\lambda(t) = abt^{b-1}$ ve F yenileme dağılımı α şekil, β ölçek parametresi ile Weibull dağılımına sahip olsun. Trend yenileme sürecinin teklik özelliği kullanıldığından $\beta = 1/\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$ olacaktır. Bu durumda

$$f\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)=\alpha\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha}(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))^{\alpha-1}e^{-(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha}},\alpha>0$$

$$F\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)=1-e^{-(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha}},\ \alpha>0$$

dır. Buradan sürece ait bozulma oran fonksiyonu ise

$$r\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)=\frac{f\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)}{1-F\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)}$$

$$=\alpha\Gamma(1+\tfrac{1}{\alpha})^{\alpha}(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))^{\alpha-1},\ \alpha>0$$

olacaktır. Sürece ait koşullu şiddet fonksiyonu ise

$$\gamma\big(\Lambda(S_i)\big)=r\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)\lambda(S_i)$$

$$=[\alpha\Gamma(1+\tfrac{1}{\alpha})^{\alpha}(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))^{\alpha-1}]abS_i{}^{b-1}],\ a,b,\alpha>0$$

dır. Bu durumda trend yenileme süreci için olabilirlik fonksiyonu

$\varphi=[a\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)]^{\alpha}$ olmak üzere

$$L=(\prod_{i=1}^{n}\gamma(S_i))e^{\int_0^t\gamma(u)du}$$

$$=(\prod_{i=1}^{n}\ \varphi\alpha bs_i{}^{b-1}(s_i{}^b-s_{i-1}{}^b)^{\alpha-1})e^{-\varphi\sum_{i=1}^{n}\left((s_i{}^b-s_{i-1}{}^b)^{\alpha}\right)}$$

dır.

$$l=\ln L=n(\ln\varphi+\ln\alpha+\ln b\}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\{(b-1)\ln s_i+(\alpha-1)\ln(s_i{}^b-s_{i-1}{}^b)-\varphi(s_i{}^b-s_{i-1}{}^b)^{\alpha}\} \qquad (5.3)$$

(5.3) denkleminde ilgili parametrelere göre türev alınmasıyla

$$\frac{dl}{d\varphi}=\frac{n}{\varphi}+\sum_{i=1}^{n}(s_i{}^b-s_{i-1}{}^b)^{\alpha}=0$$

$$\hat{\varphi}_{ML}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ [s_i{}^{\hat{b}_{ML}}-s_{i-1}{}^{\hat{b}_{ML}}]^{\hat{\alpha}_{ML}}}$$

$$\hat{a}_{ML} = \frac{\hat{\varphi}^{1/\hat{\alpha}}}{\Gamma(1+\frac{1}{\hat{\alpha}})}$$

tahmin edicileri elde edilir.

$$\frac{dl}{db} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n}\{[s_i{}^b \ln s_i - s_{i-1}{}^b \ln s_{i-1}] \times \left[\frac{\alpha-1}{s_i{}^b - s_{i-1}{}^b} - \hat{\varphi}\alpha(s_i{}^b - s_{i-1}{}^b)^{\alpha-1}\right] + \ln s_i\} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(s_i{}^b - s_{i-1}{}^b)[1 - \hat{\varphi}(s_i{}^b - s_{i-1}{}^b)^{\alpha}] = 0 \quad (5.5)$$

b ve α parametrelerine ait tahmin ediciler ise (5.4) ve (5.5) eşitliklerinin ortak çözümü ile elde edilirler.

5.1.2 F gamma dağılımı ve $\lambda(t) = abt^{b-1}$ iken parametre tahmini

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F,\lambda)$ olsun. $\lambda(t) = abt^{b-1}$ ve F yenileme dağılımı α şekil, β ölçek parametresi ile gamma dağılımına sahip olsun. Trend yenileme sürecinin teklik özelliği kullanıldığından $\beta = \frac{1}{\alpha}$ olacaktır. Bu durumda

$$f(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_{i-1})) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_{i-1}))^{\alpha-1} e^{-\alpha(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))}, \qquad \alpha > 0$$

dır. Bu süreç $[0,\tau]$ zaman aralığında gözlenmiş ve sürece ait varış zamanları $S_1, S_2, \ldots, S_n$ olarak belirlenmiştir. Sürece ait olabilirlik fonksiyonu

$$L = \left(\prod_{i=1}^{N(\tau)} f(\Lambda(s_i) - \Lambda(s_{i-1}))\, \lambda(s_i)\right) e^{-\int_0^{\Lambda(\tau)-\Lambda(s_n)} r(u)du}$$

dur.

$$N(\tau) = n\,, \tau = S_n$$

olarak seçilmesiyle olabilirlik fonksiyonu

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n} f(\Lambda(s_i) - \Lambda(s_{i-1}))\, \lambda(s_i)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_{i-1}))^{\alpha-1} e^{-\alpha(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}))} abS_i{}^{b-1}\right]$$

dir.

$\Lambda(S_i) = \int_0^{S_i} \lambda(u)du = aS_i{}^b$, $i = 1,2, \ldots, n$ ifadesinin yerine yazılmasıyla

$$= \prod_{i=1}^{n} [\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(a(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)\right)^{\alpha-1} e^{-\alpha\left(a(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)\right)} abS_i{}^{b-1}]$$

$$= \left(\frac{\alpha^\alpha a^\alpha b}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b\right)^{\alpha-1} e^{-\alpha\left(a(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)\right)} S_i{}^{b-1}$$

elde edilir. Sürece ait log-olabilirlik fonksiyonu ise

$$l = \ln L = n\alpha(\ln\alpha + \ln a) + n(\ln b - \ln\Gamma(\alpha)) + \sum_{i=1}^{n} [\,(\alpha - 1)\ln\left(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b\right)$$

$$+(b - 1)\ln S_i - \alpha a(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)]$$

dir. İlgili parametrelere göre türev alındığında

$$\frac{dl}{da} = \frac{n\alpha}{a} + \alpha \textstyle\sum_{i=1}^{n} (S_i{}^b - S_{i-1}{}^b) = 0$$

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)},$$

$$\frac{dl}{db} = \frac{n}{b} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} [(S_i{}^b \ln S_i - S_{i-1}{}^b \ln S_{i-1}) \left(\frac{\alpha-1}{S_i{}^b - S_{i-1}{}^b} - \alpha a\right) + \ln S_i)] = 0 \qquad (5.6)$$

$$\frac{dl}{d\alpha} = n(\ln\alpha + \ln a + 1) + \frac{n(\Gamma(\alpha))'}{\Gamma(\alpha)} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} [\ln(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b) - a(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)] = 0 \quad (5.7)$$

b ve α parametrelerine ait tahmin ediciler ise (5.6) ve (5.7) eşitliklerinin ortak çözümü ile elde edilirler.

5.1.3 *F* Weibull dağılımı ve $\lambda(t) = e^{a+bt}$ iken parametre tahmini

Trend fonksiyonu $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $t \geq 0, -\infty < b < \infty$ ve F yenileme dağılımı α şekil, $\beta = \frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}$ ölçek parametreli Weibull dağılımı olsun. Bu durumda trend yenileme süreci için olabilirlik fonksiyonu

$$L = (\textstyle\prod_{i=1}^{n} f\left(\Lambda(s_i) - \Lambda(s_{i-1})\right) \lambda(s_i))\, e^{-\int_0^{\Lambda(\tau)-\Lambda(s_n)} r(u)du}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [\alpha\, \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \frac{e^{a(\alpha-1)}}{b^{\alpha-1}} (e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})^{\alpha-1} e^{-(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}})e^{a}}{b})^{\alpha}} e^{a+bs_i}]$$

$$= (\frac{\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} e^{a\alpha}}{b^{\alpha-1}})^{n} \prod_{i=1}^{n} [(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})^{\alpha-1} e^{bs_i-(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}})e^{a}}{b})^{\alpha}}]$$

$$\ln L = l = n\left(\ln\alpha + \alpha\ln\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + a\alpha - (\alpha-1)b\right) + \sum_{i=1}^{n} [(\alpha-1)\ln(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})$$

$$+ bs_i - (\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})e^{a}}{b})^{\alpha}]$$

Log-olabilirlik fonksiyonu l'de ilgili parametrelere göre türev alınmasıyla

$$\frac{dl}{da} = n\alpha - \sum_{i=1}^{n} [\frac{e^{a\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}}{b^{\alpha}} (e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})^{\alpha}] = 0$$

$$\hat{a} = \frac{\ln(\frac{nb^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n}(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})^{\alpha}})}{\alpha}$$

tahmin edicisi elde edilir.

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\left(\ln\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) + n(a - \ln b)$$

$$+ \sum_{i=}^{n} [\ln(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})$$

$$- \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})\right)^{\alpha} \ln\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})\right)$$

$$\times \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)' (e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}) \left(\frac{-1}{\alpha^2}\right)\right] = 0 \qquad (5.8)$$

$$\frac{dl}{db} = \frac{-n(\alpha-1)}{b} + \sum_{i=1}^{n} [(\alpha-1) + s_i - \left(\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}})\right)^{\alpha-1}$$

$$\times \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right)\right)\Big] = 0 \qquad (5.9)$$

α ve b parametrelerine ait tahmin ediciler ise (5.8) ve (5.9) denklemlerinin ortak çözümüyle elde edilirler.

5.1.4 F gamma dağılımı ve $\lambda(t) = e^{a+bt}$ iken parametre tahmini

Trend fonksiyonu $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $t \geq 0, -\infty < b < \infty$ ve F yenileme dağılımı α şekil, $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ölçek parametreli gamma dağılımı olsun. Bu durumda trend yenileme süreci için olabilirlik fonksiyonu

$$L = \left(\prod_{i=1}^{n} f\big(\Lambda(s_i) - \Lambda(s_{i-1})\big)\,\lambda(s_i)\right) e^{-\int_0^{\Lambda(\tau)-\Lambda(s_n)} r(u)du}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\Big(\frac{e^a}{b}\left(\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right)\right)^{\alpha-1} e^{-\alpha\frac{e^a}{b}\left(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}}\right)} e^{a+bs_i}\Big]$$

$$= \left(\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{e^{a(\alpha-1)}}{b^{\alpha-1}}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\Big[e^{a+bs_i-\alpha\frac{e^a}{b}\left(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}}\right)}\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right)^{\alpha-1}\Big]$$

$$\ln L = l = \alpha n \ln\alpha - n\ln\Gamma(\alpha) - n(\alpha-1)\ln b + na\alpha$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\Big[(\alpha-1)\ln\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right) + bs_i - \frac{\alpha e^a}{b}\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right)\Big]$$

Log-olabilirlik fonksiyonu l'de ilgili parametrelere göre türev alınmasıyla

$$\frac{dl}{da} = n\alpha - \sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{\alpha}{b}\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right)e^a\Big] = 0$$

$$\hat{a} = \ln\frac{nb}{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(e^{bs_i} - e^{bs_{i-1}}\right)\right]}$$

tahmin edicisi elde edilir.

$$\frac{dl}{d\alpha} = n(\ln\alpha + 1) - n\frac{\Gamma(\alpha)'}{\Gamma(\alpha)} + n\ln b + na$$

$$+\sum_{i=}^{n}[\ln(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}})-\frac{e^{a}}{b}(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}})]=0 \quad (5.10)$$

$$\frac{dl}{db}=\frac{-n(\alpha-1)}{b}+\sum_{i=1}^{n}[(\alpha-1)+s_i-\alpha e^{a}\frac{b^2-1}{b^2}(e^{bs_i}-e^{bs_{i-1}})]=0 \quad (5.11)$$

α ve b parametrelerine ait tahmin ediciler ise (5.10) ve (5.11) denklemlerinin ortak çözümüyle elde edilirler.

5.2 En Küçük Kareler Yöntemi ile $\boldsymbol{\lambda(t)=abt^{b-1}}$ iken $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$'nin Tahmini

$\{N(t), t\geq 0\}$ $\lambda(t)=abt^{b-1}$ olan bir $TYS(F,\lambda)$ olsun. F yenileme dağılımı bilgisine ihtiyaç olmaksızın λ trend fonksiyonunun parametrelerine ait tahmin ediciler en küçük kareler yöntemi yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1}), i=1,2,...$ birbirinden bağımsız 1 ortalamalı aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere

$$S_{EKK}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\right)-1\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\left(a\left(S_i{}^{b}-S_{i-1}{}^{b}\right)\right)-1]^2$$

$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^{b}-S_{i-1}{}^{b})^2-2a\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^{b}-S_{i-1}{}^{b})+n$$

yazılabilir.

$\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^{b}-S_{i-1}{}^{b})$ ifadesi yerine eşiti olan $S_n{}^{b}$ nin yazılmasıyla

$$S_{EKK}=a^2\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^{b}-S_{i-1}{}^{b})^2-2aS_n{}^{b}+n$$

dir. Bu durumda

$$\frac{dS_{EKK}}{da}=2a\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^{b}-S_{i-1}{}^{b})^2-2S_n{}^{b}=0$$

a parametresine ait en küçük karaler tahmin edicisi

$$\hat{a} = \frac{S_n{}^b}{\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)^2}$$

olarak bulunur.

$$\frac{dS_{EKK}}{db} = 2a^2 \sum_{i=1}^{n} [(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)(S_i{}^b \ln S_i - S_{i-1}{}^b \ln S_{i-1})] - 2aS_n{}^b \ln S_n = 0$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} [(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)(S_i{}^b \ln S_i - S_{i-1}{}^b \ln S_{i-1})] = S_n{}^b \ln S_n$$

$\hat{a} = \frac{S_n{}^b}{\sum_{i=1}^{n}(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)^2}$ ifadesinin yerine yazılmasıyla

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} [(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)(S_i{}^b \ln S_i - S_{i-1}{}^b \ln S_{i-1})]}{\sum_{i=1}^{n}\left(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b\right)^2}$$

$$= \ln S_n \sum_{i=1}^{n} [(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)(S_i{}^b \ln S_i - S_{i-1}{}^b \ln S_{i-1})] - \ln S_n \sum_{i=1}^{n}\left(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b\right)^2 = 0$$

Yukarıdaki ifadede $i = 1$ durumunda $\ln S_{i-1}$ in tanımsız oluşundan dolayı b parametresine ait en küçük kareler tahmin edicisi

$$S_1{}^b\left(S_1{}^b \ln S_1\right) + \sum_{i=2}^{n} [(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b)(S_i{}^b \ln S_i - S_{i-1}{}^b \ln S_{i-1})]$$
$$- \ln S_n \sum_{i=1}^{n}\left(S_i{}^b - S_{i-1}{}^b\right)^2 = 0$$

eşitliğinin çözümü ile elde edilir.

Burada not edelim ki $\lambda(t)$'nin fonksiyonel yapısı farklı olsa bile en küçük kareler yöntemi ile $\lambda(t)$'ye ilişkin bilinmeyen parametreler tahmin edilebilir.

5.3 $\lambda(t)$ Bilinmek Üzere F Bilinmediği Durumda $M(t)$'nin Tahmini

Bu yöntem F yenileme dağılımının bilinmediği fakat λ trend fonksiyonunun şekilsel olarak bilindiği durumlarda kullanılır. F yenileme dağılımı bilinmiyorken λ trend fonksiyonuna ait parametreler en küçük kareler yöntemi ile elde edilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir $TYS(F,\lambda)$ olmak üzere $\{X_1, X_2, \dots X_n\}$, $TYS(F,\lambda)$'dan gelen bir veri kümesi olsun. Burada $X_1, X_2, \dots X_n$ ler bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zamanları gösterir. $\lambda(t)$ trend fonksiyonunun bilinmeyen parametreleri $a_1, a_2, \dots a_s$ olmak üzere bu parametrelerin en küçük kareler tahmin edicileri olan $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots \hat{a}_s$ üzerine kurulu $\lambda(t)$'nin $\hat{\lambda}(t)$ tahmin edicisini göz önüne alınsın.

$\widehat{\Lambda}(t) = \int_0^t \hat{\lambda}(s)\, ds$ olmak üzere

$$\hat{Y}_i = \widehat{\Lambda}(S_i) - \widehat{\Lambda}(S_{i-1}), i = 1,2,\dots,n$$

tanımlansın. $\hat{Y}_i$'lar Y_i'lerin öngörüleridir. Bu öngörülere dayalı olarak her sabit $t \geq 0$ için $F(t)$ yenileme dağılım fonksiyonunun bir uyarlanmış deneysel tahmin edicisi

$$\breve{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(\hat{Y}_i \leq t\right), t \in \mathbb{R}$$

ile verilebilir. Bu şekilde oluşturulan $\breve{F}_n(t)$ dağılım fonksiyonuna karşılık gelen yenileme sürecinin yenileme fonksiyonu $\breve{H}(t)$ olmak üzere (5.2) ifadesine bağlı olarak her sabit $t \geq 0$ için $M(t)$ trend yenileme fonksiyonunun bir tahmin edicisinin

$$\breve{M}_n(t) = \breve{H}_n\left(\widehat{\Lambda}_n(t)\right),\ t \geq 0 \tag{5.12}$$

olduğu açıktır.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde $\lambda(t) = abt^{b-1}$ ve $\lambda(t) = e^{a+bt}$ biçimindeki trend fonksiyonlarının parametrelerinin tahmini için altıncı bölümde verilen en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahmin yöntemlerinin performansını görmek için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu simülasyon çalışmasında F yenileme dağılımı Weibull ve gamma dağılımları olarak seçilmiştir. F Weibull ve gamma dağılımı iken şekil parametresi sırasıyla $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.5$ olarak alınmıştır.

Bu simülasyon çalışması farklı olarak seçilmiş a ve b değerleri göz önüne alınarak 1000 tekrar sayısı üzerinden $n = 30$, $n = 50$ ve $n = 100$ örneklem hacimleri için yapılmıştır. Ayrıca $M(t)$ trend yenileme fonksiyonunun değerinin tahmini için sırasıyla (5.1) ve (5.12) ile verilen

$$\widehat{M}_n(t) = \widehat{H}_n\left(\widehat{\Lambda}_n(t)\right),\ t \geq 0$$

ve

$$\breve{M}_n(t) = \breve{H}_n\left(\widehat{\Lambda}_n(t)\right),\ t \geq 0$$

tahmin edicilerinin işlerlikleri yine yukarıdaki simülasyon koşulları altında belirlenmiş t zaman noktaları için değerlendirilmiştir.

Simülasyon çalışmasında Matlab ve Mathematica paket programlarından faydalanılmış, en çok olabilirlik tahminleri bulunurken olabilirlik fonksiyonunun logaritması maksimize edilmiştir.

Çizelge 6.1 F Weibull dağılımı, $\lambda = abt^{b-1}$ iken α, a ve b parametrelerine ait en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri

n	α	a	b	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
30	0.5	0.5	0.5	0.6777	0.8740	0.5317
50	0.5	0.5	0.5	0.5475	0.4205	0.5071
100	0.5	0.5	0.5	0.4870	0.5835	0.5060
30	0.5	0.5	1	0.6117	0.6121	1.1525
50	0.5	0.5	1	0.6398	0.5852	1.0520
100	0.5	0.5	1	0.4920	0.3270	1.0635
30	0.5	0.5	1.5	0.6288	0.3297	1.8180
50	0.5	0.5	1.5	0.5350	0.8823	1.2360
100	0.5	0.5	1.5	0.4832	0.5276	1.5210
30	0.5	1.5	0.5	0.3681	1.3420	0.5316
50	0.5	1.5	0.5	0.4588	1.8920	0.4852
100	0.5	1.5	0.5	0.5053	1.1264	0.5016
30	0.5	1.5	1	0.5034	1.4765	0.8928
50	0.5	1.5	1	0.6133	1.6701	0.9103
100	0.5	1.5	1	0.5389	1.5686	1.0326
30	0.5	1.5	1.5	0.5148	1.0409	1.4307
50	0.5	1.5	1.5	0.4540	1.1848	1.5747
100	0.5	1.5	1.5	0.5296	1.5856	1.5132
30	1.5	0.5	0.5	1.4340	0.8141	0.4282
50	1.5	0.5	0.5	1.5922	0.8978	0.4367
100	1.5	0.5	0.5	1.4947	0.4693	0.5144
30	1.5	0.5	1	1.5949	0.6422	0.9330
50	1.5	0.5	1	1.7314	0.6105	0.9805
100	1.5	0.5	1	1.4169	0.5083	1.0155
30	1.5	0.5	1.5	1.8086	0.3334	1.6058
50	1.5	0.5	1.5	1.4413	0.4746	1.5131
100	1.5	0.5	1.5	1.4893	0.5320	1.5221
30	1.5	1.5	0.5	1.7643	1.3842	0.6194
50	1.5	1.5	0.5	1.6723	1.3795	0.5181
100	1.5	1.5	0.5	1.5701	1.4703	0.5055
30	1.5	1.5	1	1.4397	1.2857	1.1252
50	1.5	1.5	1	1.4804	1.6452	0.9920
100	1.5	1.5	1	1.5942	1.4014	1.0157
30	1.5	1.5	1.5	1.2014	1.8622	1.4483
50	1.5	1.5	1.5	1.7045	1.8227	1.3255
100	1.5	1.5	1.5	1.6362	1.3021	1.5404

Çizelge 6.2 F gamma dağılımı, $\lambda = abt^{b-1}$ iken α, a ve b parametrelerine ait en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri

n	α	a	b	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
30	0.5	0.5	0.5	0.5922	0.3119	0.5772
50	0.5	0.5	0.5	0.4959	0.4713	0.5212
100	0.5	0.5	0.5	0.4728	0.5361	0.5133
30	0.5	0.5	1	0.5977	0.8982	0.9623
50	0.5	0.5	1	0.3852	0.5357	0.9859
100	0.5	0.5	1	0.5090	0.5060	0.9764
30	0.5	0.5	1.5	0.4803	0.2998	1.8330
50	0.5	0.5	1.5	0.4453	0.4942	1.5347
100	0.5	0.5	1.5	0.5028	0.4501	1.5082
30	0.5	1.5	0.5	0.3645	1.8044	0.4144
50	0.5	1.5	0.5	0.4656	1.6350	0.5349
100	0.5	1.5	0.5	0.5092	1.4026	0.5025
30	0.5	1.5	1	0.6200	1.8683	0.9862
50	0.5	1.5	1	0.5278	1.8543	0.9384
100	0.5	1.5	1	0.4963	1.2336	1.0815
30	0.5	1.5	1.5	0.7750	1.2189	1.6707
50	0.5	1.5	1.5	0.4790	1.2174	1.5416
100	0.5	1.5	1.5	0.5938	1.6518	1.5365
30	1.5	0.5	0.5	1.2910	0.3757	0.5217
50	1.5	0.5	0.5	1.6406	0.7268	0.4503
100	1.5	0.5	0.5	1.6225	0.4853	0.5011
30	1.5	0.5	1	1.6728	0.5876	0.9192
50	1.5	0.5	1	1.6795	0.7104	0.9390
100	1.5	0.5	1	1.4629	0.5040	0.9895
30	1.5	0.5	1.5	1.3037	0.5241	1.4576
50	1.5	0.5	1.5	1.7351	0.4280	1.5451
100	1.5	0.5	1.5	1.5692	0.4880	1.5078
30	1.5	1.5	0.5	1.5216	1.4853	0.5191
50	1.5	1.5	0.5	1.5592	1.4283	0.5338
100	1.5	1.5	0.5	1.4540	1.5029	0.5052
30	1.5	1.5	1	1.4160	1.5026	0.9933
50	1.5	1.5	1	1.4373	1.5521	1.0121
100	1.5	1.5	1	1.5335	1.5899	1.0124
30	1.5	1.5	1.5	1.6084	1.5545	1.5616
50	1.5	1.5	1.5	1.5666	1.5029	1.4800
100	1.5	1.5	1.5	1.5367	1.4531	1.5445

Çizelge 6.3 F Weibull dağılımı, $\lambda = e^{a+bt}$ iken α, a ve b parametrelerine ait en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri

n	α	a	b	$\hat{\alpha}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
30	0.5	0.5	0.5	0.6723	0.7684	0.2334
50	0.5	0.5	0.5	0.6865	0.8312	0.3135
100	0.5	0.5	0.5	0.6704	0.5709	0.3913
30	0.5	0.5	1	0.6678	0.3450	1.0397
50	0.5	0.5	1	0.6320	0.1176	0.9698
100	0.5	0.5	1	0.6277	0.1634	1.0037
30	0.5	0.5	1.5	0.6847	0.4002	1.1379
50	0.5	0.5	1.5	0.6764	0.2663	1.3185
100	0.5	0.5	1.5	0.6150	0.2094	1.4125
30	0.5	1.5	0.5	0.7291	1.2014	0.8416
50	0.5	1.5	0.5	0.5429	1.1635	0.2262
100	0.5	1.5	0.5	0.6757	1.7171	0.3650
30	0.5	1.5	1	0.6488	1.4753	0.9298
50	0.5	1.5	1	0.6150	1.0060	0.9242
100	0.5	1.5	1	0.5797	1.5354	0.9063
30	0.5	1.5	1.5	0.6800	1.4134	1.2612
50	0.5	1.5	1.5	0.6457	1.6314	1.1467
100	0.5	1.5	1.5	0.6588	1.5756	1.3422
30	1.5	0.5	0.5	1.2887	0.7111	0.4774
50	1.5	0.5	0.5	1.2956	0.5138	0.5256
100	1.5	0.5	0.5	1.2915	0.4908	0.6644
30	1.5	0.5	1	1.3508	0.8076	0.9676
50	1.5	0.5	1	1.2812	0.2665	1.1745
100	1.5	0.5	1	1.2145	0.5151	1.0684
30	1.5	0.5	1.5	1.3928	0.3961	1.6962
50	1.5	0.5	1.5	1.2814	0.8833	1.4577
100	1.5	0.5	1.5	1.3064	0.4436	1.6336
30	1.5	1.5	0.5	1.2502	1.5750	0.5649
50	1.5	1.5	0.5	1.3315	1.5493	0.5311
100	1.5	1.5	0.5	1.3400	1.5345	0.5305
30	1.5	1.5	1	1.2862	1.9105	0.9743
50	1.5	1.5	1	1.3184	1.6682	1.0939
100	1.5	1.5	1	1.3908	1.7360	0.9961
30	1.5	1.5	1.5	1.3228	1.7328	1.6219
50	1.5	1.5	1.5	1.2261	1.6949	1.6129
100	1.5	1.5	1.5	1.3040	1.5785	1.5164

Çizelge 6.4 F gamma dağılımı, $\lambda = e^{a+bt}$ iken α, a ve b parametrelerine ait en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$	$\hat{\boldsymbol{a}}$	$\hat{\boldsymbol{b}}$
30	0.5	0.5	0.5	0.4909	0.3983	0.5226
50	0.5	0.5	0.5	0.5041	0.5982	0.5029
100	0.5	0.5	0.5	0.5727	0.4622	0.5335
30	0.5	0.5	1	0.4577	0.8513	0.7177
50	0.5	0.5	1	0.4657	0.5557	0.9895
100	0.5	0.5	1	0.4839	0.5439	1.0140
30	0.5	0.5	1.5	0.4390	0.4795	1.6840
50	0.5	0.5	1.5	0.6517	0.5833	1.5141
100	0.5	0.5	1.5	0.4383	0.5830	1.5048
30	0.5	1.5	0.5	0.6912	1.8378	0.5560
50	0.5	1.5	0.5	0.4565	1.5831	0.5539
100	0.5	1.5	0.5	0.5455	1.5111	0.5502
30	0.5	1.5	1	0.6816	1.2131	0.8691
50	0.5	1.5	1	0.6183	1.5546	0.9872
100	0.5	1.5	1	0.5627	1.5267	0.9800
30	0.5	1.5	1.5	0.4230	1.3142	1.5248
50	0.5	1.5	1.5	0.5297	1.6939	1.3536
100	0.5	1.5	1.5	0.5585	1.5026	1.4884
30	1.5	0.5	0.5	1.5377	0.7044	0.4402
50	1.5	0.5	0.5	1.4826	0.6573	0.4830
100	1.5	0.5	0.5	1.5014	0.4159	0.5117
30	1.5	0.5	1	1.5638	0.5048	1.1412
50	1.5	0.5	1	1.4622	0.4792	1.0244
100	1.5	0.5	1	1.5662	0.4956	1.0322
30	1.5	0.5	1.5	1.4597	0.2946	1.6467
50	1.5	0.5	1.5	1.6294	0.6276	1.4217
100	1.5	0.5	1.5	1.4036	0.4869	1.4646
30	1.5	1.5	0.5	1.8112	1.3294	0.5842
50	1.5	1.5	0.5	1.4617	1.4107	0.4939
100	1.5	1.5	0.5	1.4785	1.5341	0.4956
30	1.5	1.5	1	1.4679	1.3906	0.8756
50	1.5	1.5	1	1.4543	1.5878	0.9260
100	1.5	1.5	1	1.5164	1.5569	0.9338
30	1.5	1.5	1.5	1.2482	1.7741	1.3689
50	1.5	1.5	1.5	1.3756	1.3752	1.5538
100	1.5	1.5	1.5	1.4951	1.5233	1.4409

Çizelge 6.5 F Weibull dağılımı, $\lambda = abt^{b-1}$ iken α, a ve b parametrelerine ait en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri

n	α	a	b	$\hat{a}$	$\hat{b}$
30	0.5	0.5	0.5	0.3703	0.5497
50	0.5	0.5	0.5	0.4035	0.5348
100	0.5	0.5	0.5	0.4975	0.5178
30	0.5	0.5	1	0.3263	1.1428
50	0.5	0.5	1	0.4066	1.0836
100	0.5	0.5	1	0.6503	0.9770
30	0.5	0.5	1.5	0.4391	1.6028
50	0.5	0.5	1.5	0.3978	1.6363
100	0.5	0.5	1.5	0.6601	1.4814
30	0.5	1.5	0.5	1.2311	0.5851
50	0.5	1.5	0.5	2.0214	0.4754
100	0.5	1.5	0.5	2.0190	0.4865
30	0.5	1.5	1	1.4247	1.1242
50	0.5	1.5	1	1.2037	1.1130
100	0.5	1.5	1	1.4217	1.0660
30	0.5	1.5	1.5	2.0960	1.4002
50	0.5	1.5	1.5	1.6082	1.5937
100	0.5	1.5	1.5	1.4143	1.6318
30	1.5	0.5	0.5	0.2676	0.5936
50	1.5	0.5	0.5	0.8633	0.4527
100	1.5	0.5	0.5	0.6966	0.4903
30	1.5	0.5	1	0.6677	0.9442
50	1.5	0.5	1	0.8445	0.9163
100	1.5	0.5	1	0.6552	0.9620
30	1.5	0.5	1.5	0.3548	1.6499
50	1.5	0.5	1.5	0.6935	1.4510
100	1.5	0.5	1.5	0.5294	1.5469
30	1.5	1.5	0.5	1.7951	0.4816
50	1.5	1.5	0.5	1.7158	0.4922
100	1.5	1.5	0.5	1.4288	0.5240
30	1.5	1.5	1	1.1411	1.1076
50	1.5	1.5	1	1.3213	1.0712
100	1.5	1.5	1	1.4396	1.0393
30	1.5	1.5	1.5	1.1974	1.7963
50	1.5	1.5	1.5	1.2695	1.7009
100	1.5	1.5	1.5	1.5122	1.5684

Çizelge 6.6 F gamma dağılımı, $\lambda = abt^{b-1}$ iken α, a ve b parametrelerine ait en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahmin değerleri

n	α	a	b	$\hat{a}$	$\hat{b}$
30	0.5	0.5	0.5	0.8179	0.4289
50	0.5	0.5	0.5	0.7951	0.4556
100	0.5	0.5	0.5	0.7076	0.4710
30	0.5	0.5	1	0.8556	0.8796
50	0.5	0.5	1	0.4016	1.0808
100	0.5	0.5	1	0.6109	0.9520
30	0.5	0.5	1.5	0.8977	1.1567
50	0.5	0.5	1.5	0.7615	1.4085
100	0.5	0.5	1.5	0.5922	1.4569
30	0.5	1.5	0.5	1.1374	0.4981
50	0.5	1.5	0.5	1.1022	0.6207
100	0.5	1.5	0.5	1.6593	0.4827
30	0.5	1.5	1	1.6216	0.9733
50	0.5	1.5	1	1.8661	0.8515
100	0.5	1.5	1	1.3386	0.3813
30	0.5	1.5	1.5	1.7056	1.6454
50	0.5	1.5	1.5	1.9828	1.5903
100	0.5	1.5	1.5	1.4069	1.6976
30	1.5	0.5	0.5	0.7995	0.4302
50	1.5	0.5	0.5	0.3189	0.5611
100	1.5	0.5	0.5	0.6778	0.4749
30	1.5	0.5	1	0.2833	1.1464
50	1.5	0.5	1	0.4228	1.0612
100	1.5	0.5	1	0.3874	1.0463
30	1.5	0.5	1.5	0.2972	1.6872
50	1.5	0.5	1.5	0.7125	1.3907
100	1.5	0.5	1.5	0.3974	1.5560
30	1.5	1.5	0.5	1.8987	0.4611
50	1.5	1.5	0.5	1.2030	0.5447
100	1.5	1.5	0.5	1.5452	0.5019
30	1.5	1.5	1	1.7208	0.9226
50	1.5	1.5	1	1.7875	0.9302
100	1.5	1.5	1	1.2992	1.0246
30	1.5	1.5	1.5	1.6158	1.4723
50	1.5	1.5	1.5	1.5155	1.4812
100	1.5	1.5	1.5	1.4542	1.5076

Yukarıda en çok olabilirlik yöntemi ile en küçük kareler yönteminden elde edilen parametrelere ilişkin tahmin değerleri incelendiğinde örneklem hacmi büyüdükçe tahmin değerlerinin gerçek değerlere yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin değerleri, en küçük kareler tahmin değerleriyle kıyaslandığında en çok olabilirlik tahmin değerlerinin gerçek değerlere daha yakın olduğu görülmektedir.

λ trend fonksiyonu $\lambda(t) = abt^{b-1}$ iken, Weibull ve gamma dağılım varsayımları altında en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemlerinden elde edilmiş tahmin değerleri kullanılarak hesaplanan $\widehat{M}_n(t)$ ve $\breve{M}_n(t)$ tahmin edicilerinin tahmin değerleri ise aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.7 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1},\ a = 0.5,$ $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.6368	0.5072	0.0344
	0.8	1.2078	1.1794	0.1058
	1	1.3079	1.2971	0.1069
	2	1.6198	1.7399	0.2611
	5	2.1831	2.7519	0.7615
50	0.1	0.6368	0.4901	0.0001
	0.8	1.2078	0.9412	0.1873
	1	1.3079	1.0218	0.2164
	2	1.6198	1.2931	0.3555
	5	2.1831	1.7706	0.8042
100	0.1	0.6368	0.7428	0.0200
	0.8	1.2078	1.3934	0.1627
	1	1.3079	1.5234	0.2195
	2	1.6198	1.8293	0.4675
	5	2.1831	2.5220	1.3721

Çizelge 6.8 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.5060	0.3300	0.0001
	0.8	1.1389	0.9502	0.0333
	1	1.3079	1.1133	0.0334
	2	2.0477	1.5805	0.4478
	5	3.9004	4.7676	1.7195
50	0.1	0.5060	0.2990	0.0200
	0.8	1.1389	0.8644	0.1491
	1	1.3079	1.0492	0.1949
	2	2.0477	1.7711	0.5602
	5	3.9004	3.9028	2.1685
100	0.1	0.5060	0.5232	0.0001
	0.8	1.1389	0.8820	0.1848
	1	1.3079	1.0208	0.3527
	2	2.0477	1.6255	1.1166
	5	3.9004	3.1244	3.3253

Çizelge 6.9 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.5338	0.3310	0.0001
	0.8	1.0496	0.4955	0.0002
	1	1.3079	0.6857	0.0667
	2	2.5876	1.6862	0.9511
	5	7.2796	6.9768	2.8472
50	0.1	0.5338	0.4393	0.0001
	0.8	1.0496	1.4365	0.0400
	1	1.3079	1.7272	0.0800
	2	2.5876	3.1033	0.8008
	5	7.2796	7.8192	2.8073
100	0.1	0.5338	0.5723	0.0001
	0.8	1.0496	1.1465	0.2021
	1	1.3079	1.4097	0.4275
	2	2.5876	2.8059	1.3448
	5	7.2796	7.9905	4.0291

Çizelge 6.10 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	1.1389	1.8712	0.2311
	0.8	2.4464	3.4390	1.4418
	1	2.7015	3.6716	1.7620
	2	3.4326	4.5878	3.5307
	5	4.8616	6.2604	8.9640
50	0.1	1.1389	1.6603	0.3746
	0.8	2.4464	3.2266	3.4580
	1	2.7015	3.4831	4.3716
	2	3.4326	4.4042	8.8935
	5	4.8616	6.1222	22.4682
100	0.1	1.1389	1.0320	0.4354
	0.8	2.4464	2.0212	3.8014
	1	2.7015	2.1557	4.7493
	2	3.4326	2.7949	9.3829
	5	4.8616	3.8858	23.2916

Çizelge 6.11 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.6368	1.1785	0.0001
	0.8	2.3160	2.2977	1.0259
	1	2.7015	2.5555	1.3513
	2	4.4702	4.1051	3.1306
	5	9.2766	4.8900	8.4453
50	0.1	0.6368	1.1095	0.0001
	0.8	2.3160	1.9654	0.6602
	1	2.7015	2.3069	0.9614
	2	4.4702	3.9262	2.3178
	5	9.2766	5.1732	6.4357
100	0.1	0.6368	2.0001	0.0200
	0.8	2.3160	2.1254	0.9624
	1	2.7015	2.4940	1.3434
	2	4.4702	4.4203	3.0220
	5	9.2766	9.6562	8.1079

Çizelge 6.12 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.5608	0.5289	0.0001
	0.8	2.1428	1.6295	1.0829
	1	2.7015	2.0291	1.3846
	2	5.8369	4.1376	3.3327
	5	18.6370	12.0963	9.0367
50	0.1	0.5608	0.6798	0.0001
	0.8	2.1428	2.0111	0.8898
	1	2.7015	2.6024	1.1826
	2	5.8369	5.4830	2.8172
	5	18.6370	17.4979	7.7276
100	0.1	0.5608	0.4995	0.0001
	0.8	2.1428	2.0395	0.7592
	1	2.7015	2.5398	1.0564
	2	5.8369	5.8772	2.5691
	5	18.6370	19.7091	7.1049

Çizelge 6.13 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0493	0.1507	0.0020
	0.8	0.2383	0.4787	0.0345
	1	0.2859	0.5703	0.0350
	2	0.4571	0.8465	0.2485
	5	0.8340	1.3502	0.6372
50	0.1	0.0493	0.1202	0.1067
	0.8	0.2383	0.5299	0.7840
	1	0.2859	0.6046	0.9717
	2	0.4571	0.9053	1.6995
	5	0.8340	1.5052	3.8480
100	0.1	0.0493	0.0358	0.1626
	0.8	0.2383	0.2167	0.7012
	1	0.2859	0.2553	0.8401
	2	0.4571	0.4321	1.3709
	5	0.8340	0.8066	2.9145

Çizelge 6.14 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.0270	0.0213	0.0001
	0.8	0.2079	0.2773	0.2416
	1	0.2859	0.3770	0.3132
	2	0.7372	0.9046	0.9692
	5	2.2303	2.5860	3.0955
50	0.1	0.0270	0.0151	0.0404
	0.8	0.2079	0.2238	0.4454
	1	0.2859	0.3101	0.6557
	2	0.7372	0.8724	1.6009
	5	2.2303	2.6274	4.4860
100	0.1	0.0270	0.0333	0.0406
	0.8	0.2079	0.2293	0.3477
	1	0.2859	0.3185	0.4468
	2	0.7372	0.7850	1.0625
	5	2.2303	2.3559	3.1305

Çizelge 6.15 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.0399	0.0201	0.0001
	0.8	0.1714	0.0557	0.1378
	1	0.2859	0.1055	0.1379
	2	1.1299	0.6681	0.6326
	5	5.3205	4.0683	2.4717
50	0.1	0.0399	0.0456	0.0002
	0.8	0.1714	0.1704	0.3052
	1	0.2859	0.3027	0.4586
	2	1.1299	1.0992	1.4091
	5	5.3205	5.1482	4.1434
100	0.1	0.0399	0.0409	0.0100
	0.8	0.1714	0.1883	0.2218
	1	0.2859	0.3135	0.4063
	2	1.1299	1.2327	1.2159
	5	5.3205	5.8936	3.6206

Çizelge 6.16 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.2859	0.1116	0.4844
	0.8	1.0307	0.8656	2.1997
	1	1.2295	0.9661	2.6465
	2	1.8499	1.7915	5.4242
	5	3.1305	3.4213	13.5220
50	0.1	0.2859	0.1711	0.3284
	0.8	1.0307	0.8854	2.2700
	1	1.2295	0.9851	2.7549
	2	1.8499	1.6583	5.0827
	5	3.1305	2.7889	12.2626
100	0.1	0.2859	0.2308	0.2957
	0.8	1.0307	1.0104	1.7293
	1	1.2295	1.1100	2.0382
	2	1.8499	1.8114	4.2089
	5	3.1305	3.0061	9.4372

Çizelge 6.17 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0493	0.0314	0.0001
	0.8	0.9320	0.7575	0.4952
	1	1.2295	0.9519	0.8184
	2	2.7305	2.5486	1.9721
	5	7.2305	7.6087	5.4923
50	0.1	0.0493	0.0565	0.0404
	0.8	0.9320	1.0368	0.8703
	1	1.2295	1.3352	1.1726
	2	2.7305	2.9362	2.5899
	5	7.2305	7.8362	6.9481
100	0.1	0.0493	0.0323	0.0301
	0.8	0.9320	0.8064	0.9792
	1	1.2295	1.1037	1.2747
	2	2.7305	2.5062	2.8720
	5	7.2305	6.8861	7.6464

Çizelge 6.18 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0493	0.0943	0.0010
	0.8	0.8049	1.1560	0.6796
	1	1.2295	1.6515	0.9250
	2	3.9305	4.8494	2.3239
	5	16.5005	18.9494	6.4506
50	0.1	0.0493	0.0322	0.0200
	0.8	0.8049	0.9781	0.7159
	1	1.2295	1.1792	1.0323
	2	3.9305	4.1824	2.4931
	5	16.5005	15.0824	6.8212
100	0.1	0.0493	0.0371	0.0100
	0.8	0.8049	0.6021	0.8692
	1	1.2295	0.9935	1.1753
	2	3.9305	3.3965	2.7377
	5	16.5005	15.2265	7.4173

Çizelge 6.19 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.3946	0.2431	0.6596
	0.8	0.7405	0.4807	1.0709
	1	0.8631	0.5309	1.1762
	2	1.0961	0.7099	1.2940
	5	1.5361	1.0665	2.4171
50	0.1	0.3946	0.3986	0.5290
	0.8	0.7405	0.7583	1.6997
	1	0.8631	0.8445	2.0134
	2	1.0961	1.0679	2.8252
	5	1.5361	1.5429	3.8424
100	0.1	0.3946	0.4386	0.6174
	0.8	0.7405	0.8772	1.4611
	1	0.8631	0.9381	1.5998
	2	1.0961	1.2067	2.1639
	5	1.5361	1.7119	3.2672

Çizelge 6.20 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.3095	0.2398	0.7352
	0.8	0.7405	0.9735	1.6808
	1	0.8631	1.1891	1.8862
	2	1.4283	2.0712	2.8384
	5	2.9870	4.5406	4.7867
50	0.1	0.3095	0.4362	0.1571
	0.8	0.7405	0.9251	0.7474
	1	0.8631	1.0586	0.8835
	2	1.4283	1.6592	1.4268
	5	2.9870	3.3639	2.7010
100	0.1	0.3095	0.3020	0.2353
	0.8	0.7405	0.7293	1.0695
	1	0.8631	0.8511	1.2197
	2	1.4283	1.4033	1.9257
	5	2.9870	2.8687	3.6547

Çizelge 6.21 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.3274	0.3454	0.1898
	0.8	0.6770	0.4929	0.7412
	1	0.8631	0.6354	0.8550
	2	1.8649	1.4609	1.3813
	5	6.1075	6.2688	3.4010
50	0.1	0.3274	0.3813	0.1560
	0.8	0.6770	0.6829	0.8702
	1	0.8631	0.9450	1.1035
	2	1.8649	1.9902	2.1202
	5	6.1075	6.4307	5.3450
100	0.1	0.3274	0.3250	0.1063
	0.8	0.6770	0.6346	0.6338
	1	0.8631	0.7988	0.7585
	2	1.8649	1.7232	1.5053
	5	6.1075	5.5003	3.9707

Çizelge 6.22 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$	$\breve{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$
30	0.1	0.8631	1.3594	0.5444
	0.8	1.7491	2.3789	1.1161
	1	1.9592	2.5930	1.1331
	2	2.5790	3.2232	1.8662
	5	3.8471	4.3530	3.1642
50	0.1	0.8631	0.9126	0.6888
	0.8	1.7491	1.9172	2.6893
	1	1.9592	2.1277	3.0507
	2	2.5790	2.9538	4.9054
	5	3.8471	4.4329	9.5673
100	0.1	0.8631	0.7784	0.8687
	0.8	1.7491	1.6810	2.2681
	1	1.9592	1.8389	2.6321
	2	2.5790	2.4395	3.9561
	5	3.8471	3.6178	6.7659

Çizelge 6.23 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}, a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$	$\breve{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$
30	0.1	0.3946	0.3007	0.2348
	0.8	1.6430	1.6854	1.1909
	1	1.9592	2.0944	1.5094
	2	3.4938	4.0092	3.0430
	5	8.0112	9.4170	7.9263
50	0.1	0.3946	0.3692	0.3886
	0.8	1.6430	1.9133	1.3642
	1	1.9592	2.2233	1.6129
	2	3.4938	3.9470	2.9220
	5	8.0112	8.8593	6.4589
100	0.1	0.3946	0.3982	0.1688
	0.8	1.6430	1.3250	0.7450
	1	1.9592	1.6492	0.9359
	2	3.4938	3.0956	1.6386
	5	8.0112	7.5179	3.3269

Çizelge 6.24 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.3095	0.1592	0.1048
	0.8	1.4283	1.3357	1.2535
	1	1.9592	1.3357	1.6465
	2	4.7026	3.9483	3.6516
	5	17.2233	18.0890	9.5691
50	0.1	0.3095	0.3282	0.1262
	0.8	1.4283	1.2417	1.5518
	1	1.9592	1.6793	2.0281
	2	4.7026	4.0409	4.3096
	5	17.2233	15.0653	11.2002
100	0.1	0.3095	0.2422	0.2064
	0.8	1.4283	1.5096	1.4054
	1	1.9592	1.9740	1.6454
	2	4.7026	5.1475	3.1650
	5	17.2233	19.8642	7.8572

Çizelge 6.25 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0720	0.0585	0.1111
	0.8	0.3070	0.2110	0.4855
	1	0.3614	0.2453	0.5601
	2	0.5490	0.3798	0.9202
	5	0.9388	0.7659	1.7399
50	0.1	0.0720	0.0319	0.0204
	0.8	0.3070	0.4739	0.1538
	1	0.3614	0.5401	0.1571
	2	0.5490	0.8016	0.3136
	5	0.9388	1.3066	0.6384
100	0.1	0.0720	0.0329	0.0863
	0.8	0.3070	0.2766	0.5048
	1	0.3614	0.3208	0.5919
	2	0.5490	0.4304	1.0530
	5	0.9388	0.8936	2.1548

Çizelge 6.26 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.0406	0.0302	0.0010
	0.8	0.2715	0.3124	0.1000
	1	0.3614	0.4215	0.1011
	2	0.8404	0.9038	0.3756
	5	2.3340	2.1993	1.4999
50	0.1	0.0406	0.0299	0.0100
	0.8	0.2715	0.4203	0.2151
	1	0.3614	0.5141	0.2667
	2	0.8404	1.1601	0.8080
	5	2.3340	2.9981	2.2243
100	0.1	0.0406	0.0432	0.0100
	0.8	0.2715	0.2784	0.1974
	1	0.3614	0.3689	0.2476
	2	0.8404	0.8488	0.6008
	5	2.3340	2.3425	1.8039

Çizelge 6.27 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.0406	0.0572	0.0001
	0.8	0.2369	0.2935	0.1367
	1	0.3716	0.4239	0.2378
	2	1.2477	1.2865	0.7019
	5	5.4342	5.4849	2.2995
50	0.1	0.0406	0.0272	0.0010
	0.8	0.2369	0.1534	0.4288
	1	0.3716	0.2338	0.5348
	2	1.2477	0.9916	1.4009
	5	5.4342	5.3887	3.9079
100	0.1	0.0406	0.0360	0.0001
	0.8	0.2369	0.2083	0.1847
	1	0.3716	0.3302	0.2640
	2	1.2477	1.2013	0.8067
	5	5.4342	5.4194	2.5704

Çizelge 6.28 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.3614	0.3030	0.6269
	0.8	1.1367	1.1319	2.5587
	1	1.3355	1.3307	3.2357
	2	1.9342	1.9294	5.6492
	5	3.1839	3.2492	11.5398
50	0.1	0.3614	0.2698	0.1687
	0.8	1.1367	1.1239	1.1727
	1	1.3355	1.2232	1.4090
	2	1.9342	1.9214	2.6198
	5	3.1839	3.1912	6.2434
100	0.1	0.3614	0.2536	0.3317
	0.8	1.1367	1.1474	1.8099
	1	1.3355	1.3462	2.1594
	2	1.9342	1.9448	3.9142
	5	3.1839	3.2246	8.9759

Çizelge 6.29 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$	$\breve{M}_n(t)$
30	0.1	0.0720	0.0699	0.0345
	0.8	1.0376	1.0575	1.1070
	1	1.3355	1.3555	1.3590
	2	2.8339	2.7538	2.9141
	5	7.3345	7.2597	7.5897
50	0.1	0.0720	0.0785	0.0612
	0.8	1.0376	1.0523	1.0595
	1	1.3355	1.3502	1.4005
	2	2.8339	2.9486	3.0853
	5	7.3345	7.7493	8.1362
100	0.1	0.0720	0.0688	0.0200
	0.8	1.0376	1.0303	0.7018
	1	1.3355	1.3282	0.9266
	2	2.8339	3.0266	2.1815
	5	7.3345	7.9272	5.9165

Çizelge 6.30 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = abt^{b-1},\ a = 1.5,$ $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$	$\boldsymbol{\breve{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0406	0.0337	0.0333
	0.8	0.8404	0.8177	0.8914
	1	1.3355	1.3128	1.2547
	2	4.0340	4.3114	2.6995
	5	16.6058	19.0131	7.2472
50	0.1	0.0406	0.0362	0.0010
	0.8	0.8404	0.8261	0.7448
	1	1.3355	1.3212	1.0683
	2	4.0340	3.8197	2.4310
	5	16.6058	16.1213	6.5938
100	0.1	0.0406	0.0381	0.0100
	0.8	0.8404	0.8324	0.7474
	1	1.3355	1.2280	1.0588
	2	4.0340	4.0260	2.4102
	5	16.6058	17.2778	6.5140

Elde edilen değerler incelendiğinde $\widehat{M}_n(t)$ değerlerinin $\breve{M}_n(t)$ değerlerine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

λ trend fonksiyonu $\lambda(t) = e^{a+bt}$ iken, Weibull ve gamma dağılım varsayımları altında en çok olabilirlik tahmin değerleri kullanılarak elde edilen $\widehat{M}_n(t)$ değerleri ise aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.31 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.6609	0.3733
	0.8	1.1390	1.4403
	1	1.3486	1.7378
	2	2.5748	3.4820
	5	38.8945	37.5754
50	0.1	0.6609	0.3581
	0.8	1.1390	1.5005
	1	1.3486	1.9128
	2	2.5748	3.9193
	5	38.8945	39.5195
100	0.1	0.6609	0.3754
	0.8	1.1390	1.2441
	1	1.3486	1.5385
	2	2.5748	3.2852
	5	38.8945	37.5832

Çizelge 6.32 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.6844	0.3949
	0.8	1.3080	1.3016
	1	1.6199	1.7061
	2	4.0439	5.4375
	5	245.0201	243.7006
50	0.1	0.6844	0.3851
	0.8	1.3080	1.0433
	1	1.6199	1.3810
	2	4.0439	3.8401
	5	245.0201	146.8660
100	0.1	0.6844	0.4451
	0.8	1.3080	1.0992
	1	1.6199	1.4304
	2	4.0439	4.0857
	5	245.0201	176.8901

Çizelge 6.33 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.7522	0.4232
	0.8	1.5062	1.4383
	1	1.9787	1.9090
	2	6.8924	6.6428
	5	1988.2030	386.6363
50	0.1	0.7522	0.4329
	0.8	1.5062	1.3693
	1	1.9787	1.8919
	2	6.8924	7.2535
	5	1988.2030	721.6793
100	0.1	0.7522	0.5162
	0.8	1.5062	1.3110
	1	1.9787	1.7722
	2	6.8924	6.7194
	5	1988.2030	1020.6063

Çizelge 6.34 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	1.2416	0.7176
	0.8	2.1831	2.6909
	1	2.6383	3.5491
	2	5.4122	10.8161
	5	102.0082	261.4806
50	0.1	1.2416	1.0979
	0.8	2.1831	1.6895
	1	2.6383	2.0135
	2	5.4122	3.6261
	5	102.0082	31.1956
100	0.1	1.2416	0.7994
	0.8	2.1831	3.1528
	1	2.6383	4.0576
	2	5.4122	8.8988
	5	102.0082	80.0329

Çizelge 6.35 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	1.3079	0.9005
	0.8	2.5429	3.1213
	1	3.0723	4.1092
	2	8.9128	12.3819
	5	662.0543	486.7944
50	0.1	1.3079	0.8296
	0.8	2.5429	2.0172
	1	3.0723	2.6318
	2	8.9128	7.5750
	5	662.0543	297.9666
100	0.1	1.3079	1.0553
	0.8	2.5429	2.9109
	1	3.0723	3.7163
	2	8.9128	10.7099
	5	662.0543	471.2100

Çizelge 6.36 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	1.3242	0.8437
	0.8	2.9807	3.4988
	1	4.0153	4.7812
	2	16.1634	19.9614
	5	5399.6003	1782.6093
50	0.1	1.3242	0.9066
	0.8	2.9807	3.3033
	1	4.0153	5.1927
	2	16.1634	19.0860
	5	5399.6003	1373.9330
100	0.1	1.3242	0.8816
	0.8	2.9807	4.0362
	1	4.0153	5.5856
	2	16.1634	24.7095
	5	5399.6003	2954.2030

Çizelge 6.37 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0543	0.0844
	0.8	2.3890	2.5915
	1	3.8845	3.4273
	2	9.0355	9.2772
	5	36.7305	36.8059
50	0.1	0.0543	0.0831
	0.8	2.3890	2.0458
	1	3.8845	2.7466
	2	9.0355	8.0737
	5	36.7305	36.7028
100	0.1	0.0543	0.0839
	0.8	2.3890	2.1787
	1	3.8845	2.5976
	2	9.0355	9.3003
	5	36.7305	36.7046

Çizelge 6.38 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.0594	0.0996
	0.8	3.0537	3.7577
	1	4.3830	5.2310
	2	17.1773	19.9634
	5	242.7305	289.7801
50	0.1	0.0594	0.2710
	0.8	3.0537	2.1605
	1	4.3830	3.1285
	2	17.1773	14.3313
	5	242.7305	392.8095
100	0.1	0.0594	0.2100
	0.8	3.0537	2.5620
	1	4.3830	3.5979
	2	17.1773	14.9944
	5	242.7305	324.8426

Çizelge 6.39 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{(t)}$
30	0.1	0.0755	0.0921
	0.8	3.8845	3.5817
	1	6.0446	5.7194
	2	34.4579	37.9373
	5	1985.9623	4223.0310
50	0.1	0.0755	0.1136
	0.8	3.8845	4.7891
	1	6.0446	7.2791
	2	34.4579	39.9253
	5	1985.9623	2424.6390
100	0.1	0.0755	0.1084
	0.8	3.8845	3.3378
	1	6.0446	5.3201
	2	34.4579	33.7795
	5	1985.9623	3362.2003

Çizelge 6.40 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{(t)}$
30	0.1	0.2539	0.3692
	0.8	7.0415	6.2661
	1	9.3678	8.5476
	2	25.3191	23.9817
	5	99.7305	134.8240
50	0.1	0.2539	0.3213
	0.8	7.0415	6.5951
	1	9.3678	8.7677
	2	25.3191	23.9758
	5	99.7305	116.7877
100	0.1	0.2539	0.3014
	0.8	7.0415	6.6432
	1	9.3678	8.5403
	2	25.3191	231338
	5	99.7305	114.7843

Çizelge 6.41 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$
30	0.1	0.2698	0.3203
	0.8	8.8693	7.9870
	1	12.5248	15.0924
	2	46.2553	56.7800
	5	659.7306	898.8693
50	0.1	0.2698	0.2295
	0.8	8.8693	9.3838
	1	12.5248	13.5350
	2	46.2553	54.1883
	5	659.7306	1145.6010
100	0.1	0.2698	0.3016
	0.8	8.8693	10.2833
	1	12.5248	14.7040
	2	46.2553	54.6424
	5	659.7306	823.3009

Çizelge 6.42 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan Weibull dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$
30	0.1	0.2859	0.3412
	0.8	11.1955	12.7255
	1	17.0111	19.9113
	2	94.4417	123.3860
	5	5398.8021	1158.3006
50	0.1	0.2859	0.3792
	0.8	11.1955	11.4994
	1	17.0111	17.6586
	2	94.4417	105.9847
	5	5398.8021	1072.6300
100	0.1	0.2859	0.3483
	0.8	11.1955	10.3949
	1	17.0111	15.9048
	2	94.4417	88.8039
	5	5398.8021	6272.4210

Çizelge 6.43 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.4105	0.4196
	0.8	2.0634	1.8703
	1	2.5790	2.3904
	2	6.1075	5.7249
	5	37.4487	36.5669
50	0.1	0.4105	0.4065
	0.8	2.0634	2.2633
	1	2.5790	2.8776
	2	6.1075	6.7007
	5	37.4487	37.0397
100	0.1	0.4105	0.3478
	0.8	2.0634	1.9507
	1	2.5790	2.3598
	2	6.1075	5.9802
	5	37.4487	38.3164

Çizelge 6.44 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.4261	0.4720
	0.8	2.4765	3.0731
	1	3.2914	3.9867
	2	11.0155	11.1092
	5	243.8075	114.7493
50	0.1	0.4261	0.4627
	0.8	2.4765	2.5430
	1	3.2914	3.4626
	2	11.0155	11.5909
	5	243.8075	246.9044
100	0.1	0.4261	0.4427
	0.8	2.4765	2.5072
	1	3.2914	3.3235
	2	11.0155	11.0499
	5	243.8075	268.8821

Çizelge 6.45 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1\ .5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.4714	0.5436
	0.8	2.9870	3.3204
	1	4.3004	5.1408
	2	21.5287	26.6781
	5	1986.7366	4350.1912
50	0.1	0.4714	0.3476
	0.8	2.9870	2.9663
	1	4.3004	4.7719
	2	21.5287	23.2901
	5	1986.7366	2294.9321
100	0.1	0.4714	0.5445
	0.8	2.9870	3.3221
	1	4.3004	4.6390
	2	21.5287	23.6758
	5	1986.7366	2203.7532

Çizelge 6.46 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.8147	0.6256
	0.8	4.9036	4.6277
	1	6.3080	6.0294
	2	15.9217	15.6379
	5	100.6279	170.3714
50	0.1	0.8147	0.8771
	0.8	4.9036	4.9974
	1	6.3080	6.4032
	2	15.9217	16.0189
	5	100.6279	131.7755
100	0.1	0.8147	0.7591
	0.8	4.9036	4.8209
	1	6.3080	6.2243
	2	15.9217	15.8364
	5	100.6279	120.5572

Çizelge 6.47 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.8390	0.6550
	0.8	6.0073	5.7394
	1	8.2116	7.9416
	2	29.1383	28.8600
	5	661.3312	294.4939
50	0.1	0.8390	0.7082
	0.8	6.0073	5.8152
	1	8.2116	8.0178
	2	29.1383	28.9389
	5	661.3312	662.9737
100	0.1	0.8390	0.7636
	0.8	6.0073	5.8956
	1	8.2116	8.0989
	2	29.1383	29.0224
	5	661.3312	627.0901

Çizelge 6.48 F şekil parametresi $\alpha = 0.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.8631	0.9838
	0.8	7.4102	7.5930
	1	10.9153	11.0997
	2	57.5739	57.7667
	5	5360.3040	4993.2107
50	0.1	0.8631	0.8250
	0.8	7.4102	7.3537
	1	10.9153	11.4591
	2	57.5739	57.5138
	5	5360.3040	3491.4326
100	0.1	0.8631	0.7915
	0.8	7.4102	7.3046
	1	10.9153	10.8088
	2	57.5739	57.4614
	5	5360.3040	5147.9823

Çizelge 6.49 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{(t)}$
30	0.1	0.0788	0.0750
	0.8	0.9388	0.9305
	1	1.9342	1.9259
	2	10.8350	10.8267
	5	36.7387	35.8300
50	0.1	0.0788	0.0806
	0.8	0.9388	0.9427
	1	1.9342	1.9381
	2	10.8350	10.8390
	5	36.7387	36.3428
100	0.1	0.0788	0.0786
	0.8	0.9388	0.9503
	1	1.9342	1.9457
	2	10.8350	10.8467
	5	36.7387	36.5384

Çizelge 6.50 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\widehat{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{(t)}$
30	0.1	0.0857	0.0791
	0.8	1.4351	1.4212
	1	2.6339	2.6202
	2	17.8360	17.8220
	5	242.8682	434.8737
50	0.1	0.0857	0.0900
	0.8	1.4351	1.4439
	1	2.6339	2.6426
	2	17.8360	18.8450
	5	242.8682	261.8829
100	0.1	0.0857	0.0789
	0.8	1.4351	1.4209
	1	2.6339	2.5198
	2	17.8360	17.8215
	5	242.8682	274.8532

Çizelge 6.51 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 0.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.1073	0.1124
	0.8	2.0341	2.0434
	1	3.6340	3.6433
	2	34.8384	34.8481
	5	1985.9010	3068.9174
50	0.1	0.1073	0.0928
	0.8	2.0341	2.0074
	1	3.6340	3.6073
	2	34.8384	34.8107
	5	1985.9010	1609.3152
100	0.1	0.1073	0.1201
	0.8	2.0341	2.0572
	1	3.6340	3.6521
	2	34.8384	34.8626
	5	1985.9010	1682.3002

Çizelge 6.52 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 0.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{\widehat{M}_n(t)}$
30	0.1	0.3250	0.2741
	0.8	4.2341	4.1764
	1	5.6343	5.5765
	2	15.2356	15.1772
	5	99.8477	112.7841
50	0.1	0.3250	0.3325
	0.8	4.2341	4.2429
	1	5.6343	5.6431
	2	15.2356	15.2446
	5	99.8477	88.8561
100	0.1	0.3250	0.3292
	0.8	4.2341	4.2390
	1	5.6343	5.6392
	2	15.2356	15.2406
	5	99.8477	101.8536

Çizelge 6.53 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.3431	0.3495
	0.8	5.3342	5.3416
	1	7.5345	7.5419
	2	28.4375	28.4451
	5	659.9279	359.8961
50	0.1	0.3431	0.3523
	0.8	5.3342	5.3448
	1	7.5345	7.6452
	2	28.4375	28.4485
	5	659.9279	535.9290
100	0.1	0.3431	0.3400
	0.8	5.3342	5.3306
	1	7.5345	7.5309
	2	28.4375	28.4338
	5	659.9279	535.9037

Çizelge 6.54 F şekil parametresi $\alpha = 1.5$ olan gamma dağılımı, $\lambda(t) = e^{a+bt}$, $a = 1.5$, $b = 1.5$ iken $M(t)$'ye ait tahmin değerleri

n	t	$M(t)$	$\widehat{M}_n(t)$
30	0.1	0.3614	0.4195
	0.8	6.7344	6.0825
	1	10.2349	10.3034
	2	56.8416	56.9152
	5	5398.9586	4037.7009
50	0.1	0.3614	0.3878
	0.8	6.7344	6.7649
	1	10.2349	10.2656
	2	56.8416	56.8744
	5	5398.9586	6020.8963
100	0.1	0.3614	0.3624
	0.8	6.7344	6.7355
	1	10.2349	10.2360
	2	56.8416	56.8428
	5	5398.9586	4280.8540

λ trend fonksiyonu $\lambda(t) = e^{a+bt}$ iken, Weibull ve gamma dağılım varsayımları altında en çok olabilirlik tahmin değerleri kullanılarak elde edilen $\widehat{M}_n(t)$ değerlerinin $M(t)$'nin gerçek değerlerine çok yakın olduğu böylelikle yöntemin işlerliğinin iyi olduğu görülmüştür.

7. UYGULAMA

Yapısında trendin varlığı tespit edilmiş 2 veri kümesi göz önüne alınmış ve önerilen yöntemlerden bazıları bu veri kümelerinde uygulanmıştır. Bu verilerden ilki zaman sensörlü bir gaz kompresörünün 41 bozulma zamanına aittir (Lindqvist vd. 2003).

Çizelge 7.1 Zaman sensörlü bir gaz kompresörünün bozulma zamanları

1	4	305	330	651	859	996	1016	1155
1520	1597	1729	1758	1852	2070	2073	2093	2213
3197	3555	3558	3724	3768	4103	4124	4170	4270
4336	4416	4492	4534	4578	4762	5474	5573	5577
5715	6424	6692	6830	6999				

Çizelge 7.2 Zaman sensörlü bir gaz kompresörünün bozulma zamanları veri kümesinin parametrelerine ait tahmin değerleri

	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$
EKK	0.0116	0.8234	
EÇO (Weibull)	0.0475	0.7637	0.8397
EÇO (gamma)	0.0403	0.7821	0.7754

F yenileme dağılımının Weibull ve gamma seçildiği durumda veri kümesine en çok olabilirlik tahmin yöntemi uygulanmış $\hat{\alpha}, \hat{a}$ ve $\hat{b}$ tahmin edicileri için tahmin değerleri elde edilmiş ve bu değerlerin birbirlerine çok yakın olduğu görülmüştür. Böylelikle çalışmada kullanılan yöntemlerin işlerliği gözlenmiştir.

Ayrıca veri kümesine en küçük kareler tahmin yöntemi de uygulanmış $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ değerlerinin en çok olabilirlik yönteminden elde edilen $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ ya ait tahmin değerleriyle yakın değerler olduğu saptanmıştır. Uygulanan tüm yöntemlerden tahmin edicilere ait elde edilen tahmin değerleri yakın olmakla birlikte en çok olabilirlik yönteminin her iki dağılım durumunda en küçük kareler yönteminden elde edilen tahmin değerlerine göre birbirlerine daha yakın olduğu bulunmuştur.

2. veri kümesi ise U.S.S. Grampus adlı denizaltının dizel motorlarından birinde meydana gelen ardışık 56 bozulma zamanına (planlanmamış bakım faaliyetleri saatleri) aittir.

Çizelge 7.3 U.S.S. Grampus adlı denizaltının dizel motorlarından birinde meydana gelen ardışık 56 bozulma zamanları

860	1258	1317	1442	1897	2011	2122	2439
3203	3298	3902	3910	4000	4247	4411	4456
4517	4899	4910	5676	5755	6137	66221	6311
6613	6975	7335	8158	8498	8690	9042	9330
9394	9426	9872	10191	11511	11575	12100	12126
12368	12681	12795	13399	13668	13780	13877	14007
14028	14035	14173	14174	14449	14587	14610	15070

Çizelge 7.4 U.S.S. Grampus adlı denizaltının dizel motorlarından birinde meydana gelen ardışık 56 bozulma zamanları veri kümesinin parametrelerine ait tahmin değerleri

	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$
EKK	0.001162	1.0518	
EÇO (Weibull)	0.004430	1.22105	0.9832
EÇO (gamma)	0.000446	1.22036	0.9589

Zaman sensörlü bir gaz kompresörünün bozulma zamanları veri kümesiyle benzer olarak tahmin yöntemlerinden her ikisi de veri kümesine uygulanmış $\hat{\alpha}, \hat{a}$ ve $\hat{b}$ tahmin edicileri için tahmin değerleri elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahmin yönteminde F yenileme dağılımı Weibull ve gamma dağılımı olarak seçilmiştir. Benzer şekilde tüm tahmin değerleri birbirlerine yakın olmakla birlikte en çok olabilirlik tahmin yönteminde her iki dağılım varsayımında elde edilen tahmin değerlerinin yine kendi içlerinde birbirlerine en küçük kareler tahmin yöntemiyle elde edilmiş tahmin değerlerine göre daha yakın oldukları görülmüştür.

8. SONUÇ

Bu çalışmada öncelikli olarak bazı stokastik süreçler ve bunlara ait özellikler tanıtılmış ardından tamir türlerinden bahsedilmiştir. Tamir türlerinin yapılarına göre modelleneceği stokastik süreçler belirtilmiştir. Uygulamadan gelen veri setinin yapısında trendin varlığı söz konusu olduğunda kullanılabilecek süreçler tanıtılmış ve bu süreçlere ait özellikler ile koşullu şiddet fonksiyonları elde edilmiştir. Daha sonra trendin varlığı söz konusu olduğu durumlarda model olarak kullanılabilecek bir süreç olan trend yenileme süreci tanıtılmış ve bu sürece ait bazı özelliklere değinilmiştir. Ardından trend yenileme sürecine ait F yenileme dağılımı ve λ trend fonksiyonuna ait parametreler için çeşitli yöntemlerle tahmin ediciler elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler F yenileme dağılımı bilgisine sahip olunduğu durumda en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilmiş aksi durumda ise alternatif olarak en küçük kareler yöntemi ile elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahmin edicileri için F yenileme dağılımının Weibull ve gamma dağılımı varsayımlarına sahip olduğu durumlar ele alınmış, λ trend fonksiyonu $\lambda(t) = abt^{b-1}$ ve $\lambda(t) = e^{a+bt}$ olarak seçilmiştir. Elde edilen tahmin ediciler kullanılarak sürece ait trend yenileme fonksiyonu M için (5.1) ile verilen tahmin edici tanımlanmış ve bu tahmin edicinin sayısal hesabı için RS yöntemi kullanılmıştır. F yenileme dağılımının bilinmediği durum için ise λ trend fonksiyonu $\lambda(t) = abt^{b-1}$ olarak seçilmiş ve bilinmeyen parametrelere ait tahmin ediciler elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler kullanılarak M trend yenileme fonksiyonu için (5.12) ile verilen tahmin edici tanımlanmış ve bu tahmin edicinin sayısal hesabı Schneider, Lin ve O'cinneide tarafından önerilen yöntem kullanılarak yapılmıştır.

Elde edilen tahmin ediciler için simülasyon çalışması yapılmıştır ve gerçek veri üzerinde yöntemlerin işlerliği incelenmiştir.

Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlara göre F yenileme dağılımının bilindiği durumda her iki dağılım varsayımında da α, a ve b parametreleri için $\hat{\alpha}, \hat{a}$ ve $\hat{b}$ tahmin edicileri önerilebilir. Bu tahmin edicilerin işlerliği iyi olup örneklem hacmi büyüdükçe tahmin değerlerinin gerçek değerlere daha yakın olduğu görülmüştür.

F yenileme dağılımının bilinmediği durumda ise a ve b'ye ait tahmin edicilerin örneklem hacmi büyüdükçe performanslarının iyileştiği saptanmıştır.

F yenileme dağılımı biliniyorsa λ trend fonksiyonuna ait a ve b parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edcilerinin en küçük kareler tahmin edicilerine göre performansları daha iyidir ve bu durumda en çok olabilirlik tahmin edicileri diğerlerine göre tercih edilir.

M trend yenileme fonksiyonuna ait RS yöntemi kullanılarak sayısal hesabı yapılmış $\widehat{M}_n(t)$ tahmin edicisinin işlerliğinin iyi oduğu görülmüştür. F yenileme dağılımı bilgisine sahip olunduğu durumda $\widehat{M}_n(t)$, bu fonksiyona ait parametrik olmayan tahmin edici $\breve{M}_n(t)$'ye göre tercih edilir ve önerilebilir.

KAYNAKLAR

Altındağ, Ö. 2012. Dağılım Fonksiyonları Konvolüsyonlarının Monte Carlo Tahmini ve Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aydoğdu, H. 1997. Yenileme Süreçlerinde Tahmin. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Barlow, R. E. and Hunter, L. 1960. Optimum Preventive Maintenance Policies. Operation Research, 8(1); 90-100.

Brown, M. and Proschan, F. 1983. Imperfect Repair. Journal of Appl. Prob., 20(4); 851-859.

Feller, W. 1971. An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume II, Second edition. JohnWiley & Sons, Inc. New York.

Franz, J., Jokiel-Rokita, A. and Magiera, R. 2014. Prediction in Trend-Renewal Processes For Repairable Systems. Stat. Comput., 24(1); 633-649.

Gamiz, M. L. and Lindqvist, B. H. 2016. Nonparametric Estimation in Trend-Renewal Processes. Reliability Engineering and System Safety, 145(1); 38-46.

Gamiz, M. L., Kulasekera, K. B., Limnios, N. and Lindqvist, B. H. 2011. Applied Nonparametric Statistics in Reliability. Springer Series in Reliability Engineering, London.

Heggland, K. and Lindqvist, B. H. 2007. A Nonparametric Monotone Maximum Likelihood Estimator of Time Trend for Repairable System Data. Reliability Engineering and System Safety, 92(1); 575-584.

Karlin, S. and Taylor, H. M. 1975. A First Course in Stochastic Processes. Second edition. Academic Press. New York.

Kawata, T. 1972. Fourier Analysis in Probability Theory. Academic Press, Inc. New York.

Lindqvist, B. H., Elvebakk G. and Heggland K. 2003. The Trend-Renewal Process for Statistical Analysis of Repairable Systems. Technometrics, 45(1); 31-44.

Lindqvist, B. H. 1993. The Trend Renewal Process a Useful Model for Repairable Systems. Society in Reliability Engineers, Scandinavian Chapter, Annual Conference, Malmö, Sweden.

Lindqvist, B. H. 1997. Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems. 1st International Conference on Mathematical Methods in Reliability, September 16-19 1997, Bucharest, Romania.

Muralidharan, K. 2008. A Review of Repairable System and Point Process Models. ProbStat Forum, Volume 01; 26-49.

Öztürk, F. 1993. Matematiksel İstatistik. A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

Parzen, E. 1964. Stochastic Processes. Holden Day, Inc., London.

Pekalp, M. H. 2013. Sayma Süreçlerine İlişkin Trend Testleri ve Karşılaştırılmaları. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Ross, S.M. 1996. Stochastic Processes. John Wiley and Sons. Inc., California.

Saito Y. and Dohi, T. 2016. Another Look at Nonparametric Estimation for Trend-Renewal Processes. Journal of the Operations Research Society of Japan, 59(4); 312-333.

Schneider, H., Lin, B. S. and O'cinneide, C. 1990. Comparison of Nonparametric Estimators for the Renewal Function. Applied Statistics, 39(1); 55-61.

Xie, M. 1989. On the Solution of Renewal-Type Integral Equations. Commun. Statist. Simula., 18(1); 281-293.

Xie, M. 1989. Some Results on the Renewal Equations. Commun. Statist. Theory Meth., 18(3); 1159-1171.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Melike Özlem KARADUMAN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 21.11.1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mamak Lisesi (2005-2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2010-2015)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2015- 2019)