ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KATEGORİK VERİ ÇÖZÜMLEMESİNDE SIKÇA KULLANILAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER İÇİN BİR İNCELEME

Uchechukwu Anthony OGWURUMBA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2020

TEZ ONAYI

Uchechukwu Anthony OGWURUMBA tarafından hazırlanan **"Kategorik Veri Çözümlemesinde Sıkça Kullanılan İstatistiksel Yöntemler İçin Bir İnceleme''** adlı tez çalısması 30/01/2020 tarihinde aşağıdakı jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitütüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmitir.

Danışman: Doç Dr. İhsan KARABULUT
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan : Dr. Öğretim Üyesi O. Ufuk EKİZ
Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç Dr. Rukiye DAĞALP
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç Dr. İhsan KARABULUT
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitütüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

30 /01/2020

Uchechukwu Anthony OGWURUMBA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KATEGORİK VERİ ÇÖZÜMLEMESİNDE SIKÇA KULLANILAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER İÇİN BİR İNCELEME

Uchechukwu Anthony OGWURUMBA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç Dr. İhsan KARABULUT

Kategorik verilere ilişkin istatistiksel çözümlemelerin başlangıç konuları çözümlemelerin temelinde yer alan dağılım teorisiyle birlikte gözden geçirilmiş ve örneklerle anlatılmıştır.

Ocak 2020, 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: Anlamlılık düzeyi, güven düzeyi, çapraz tablo, Fisher’in doğrudan testi, McNemar testi.

ABSTRACT

Masters Thesis

A REVIEW OF THE FREQUENTLY USED STATISTICAL METHODS IN CATEGORICAL DATA ANALYSIS

Uchechukwu Anthony OGWURUMBA

Ankara Unıversity
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr Ihsan KARABULUT

Elementary topics on categorical data analysis has been reviewed together with the underlying distribution theory and some examples.

January 2020, 35 pages

Key Words: Significance level, confidence level, contingency table, Fisher's exact test, McNemar test.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri, sabır ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç Dr. ihsan KARABULUT'a, (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) zaman zaman görüş ofislerinde bulunduğumuz çalışmaların süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen akadaşlarıma en derin duygularla teşekkür ederim.

Uchechukwu Anthony OGWURUMBA
Ankara, Ocak 2020

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI SAYFASI

ETİK..i

ÖZET..ii

ABSTRACT………....……........…......………..iii

TEŞEKKÜR..iv

SİMGELER...vii

ÇİZELGELER DİZİNİ..viii

1. GİRİŞ..1

2. ÇALIŞMADA KULLANILAN ÖNEMLİ KAVRAMLAR....................................3

2.1 Kategorik Verilerin Çözümlenmesinde Kullanılan Rasgele Değişkenler ve Dağılımları…………………..……………………………………..……………...….3

2.1.1 Bernoulli dağılımı...3

2.1.2 Binom dağılımı...4

2.1.3 Multinomial (Çok Terimli) Dağılımı..4

2.1.4 Hipergeometrik Dağılımı………………...……………………..……....…..5

2.1.5 Poisson Dağılımı...6

2.2 Merkezi Limit Teoremi ve Büyük Sayılar Kanunu..7

2.2.1 Mekezi Limit Teoremi..7

2.2.2 Büyük Sayılar Kanunu...8

3. KATEGORİK VERİLERLE VERİ ANALİZİ VE İSTATİSTİKSEL HİPOTEZLERİN TESTİ..9

3.1 Birbirlerinden Bağımsız ve Aynı $Bernoulli\ (p)$ Dağılımlı Örneklemden p Parametresinin Tahmin Edicisi..9

3.2 Birbirlerinden bağımsız ve $Binom(n_i, p)$ Dağılımlı Örneklem İçin de p Parametresinin Tahmin Edicisi..10

3.3 Bilinmeyen p İçin Yaklaşık $1-\alpha$ Güven Düzeyli İki Taraflı Güven Aralığı Tahmin Edicisi...11

3.4 p Için Yaklaşık α Anlamlılık Düzeyinde Hipotez Testi..................................11

3.5 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ Örneklemleri Birbirlerinden Bağımsız Olduğunda..14

3.6 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ Rasgele Örneklemleri Birbirlerinden Bağımsız Fakat Örneklem Çapları Küçükse 18
3.7 Bağımlı iki örneklemle Bernoulli dağılım parametrelerinin karşılaştırılması...22
3.8 Odds ve odds oranı 26
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA..32
KAYNAKLAR..33
ÖZGEÇMİS..35

SİMGELER DİZİNİ

$X_i \sim Bernoulli\ (p)$	X_i rasgele değişkeni Bernoulli dağılımlıdır.
$X_i \sim Binom\ (n, p)$	X_i rasgele değişkeni Binom dağılımlıdır
$X_i \sim Poisson\ (\mu_i)$	X_i rasgele değişkeni Poisson dağılımlıdır
$Cov(X_i, X_j)$	Kovayrans
μ	Yığın ortalaması
σ^2	Yığın vayransı
α	Anamlılık düzeyi
H_0	Yokluk hipotezi
H_1	Alternatif hipotez
θ	Odds oranı

Kısaltmalar

b.b.a.d	Birbirden bağımsız ve aynı dağılımlı
MLT	Merkezi limit teoremi
VKİ	Vücut kitle indeksi

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 İki yığından başarı durumu……………………………………………......18
Çizelge 3.2 İki yığından başarı durumu permütasyonlar...20
Çizelge 3.3 İki tedavi yönteminin başarı durumlarına ilişkin veri tablosu…………….……20
Çizelge 3.4 İki tedavi yönteminin başarı ilişkin olası bir duruma ilişkin veri tablosu…21
Çizelge 3.5 Bağımlı gözlemlerle iki etkisin karşılaştırması ilişkin 2 × 2 çaprazı...........23
Çizelge 3.6 Bağımlı gözlemlerle iki etkisinin dağılımı...23
Çizelge 3.7 İki ilacın aynı hastalar üzerindeki başarına
ilişkin gözlemlerin yer aldığının2 × 2 çapraz çizelgesi…………………....26
Çizelge 3.8 Odds ve odds oranı istatistikleri için gözlenen verilerin dizilimi çapraz
tablosu………………………………………………………...……......28
Çizelge 3.9 70 yaş ve üzeri bireylerde aspirinin kullanımı ve kanamalı rahatsızlıkların
araştırıldığı çalışmaya ait çapraz tablo……………..……......................30

1. GİRİŞ

Rasgele değişkenlerin gözlem birimleri üzerinde gözlenmesi ölçüm yapmak olarak tanımlanabilir. Ölçümler değişik duyarlılık düzeylerinde yapılırlar. Örneğin bir bireyin boy uzunluğu rasgele değişkeni metre kullanarak gözlenebilir veya gözlemci uygun veya yeterli buluyorsa gözlemini kısa boylu, orta boylu veya uzun boylu nitelemeleri kullanarak da yapabilir. Boy uzunluğunu metre ile ölçmek kısa, orta veya uzun nitelemeleri kullanarak ölçmekten daha duyarlıdır ve bilgi vericidir. Boy uzunluğu değişkeni metre olarak tanımlanması bu değişken değerleriyle her türlü aritmetik işlem yapılabilir. Fakat boy uzunluğu değişkeni kısa, orta veya uzun nitelemeleriyle ölçülürse boyların kısa, orta, uzun olarak sıralanması dışında gözlem değeriyle başka bir işlem yapılamaz. Üstelik bu nitelemeler gözlemciye de bağlıdır. Ölçümlerin duyarlılığına göre, kabaca aritmetik işlemlere uygunluğuna göre, ölçüm düzeyleri dört başlık altında toplanır. Bunlar adlandırma (nominal), sıralama (ordinal), eşit aralık (interval) ve oranlama (ratio) ölçme düzeyleridir. Adlandırma ölçme düzeyli gözlemler sıralama yapmakta içinde olmak üzere hiçbir aritmetik işleme uygun değildir, bu işlemleri yapmak anlamlıda değildir. Sıralama düzeyli ölçümlerle sadece sıralama yapmak anlamlı olur, diğer aritmetik işlemleri yapmak anlamlı olmaz . Eşit aralıklı ölçme düzeyli ölçümlerle toplama, çıkarma yapmak anlamlı ancak bölme yapmak anlamlı değildir. Ağırlık, uzunluk, çokluk sayısı (frekans) gibi ölçümlerle tanımlanan rasgele değişken değerleriyle, birim dönüşümleri yapıldıktan sonra, her türlü aritmetik işlem yapılabilir.

Bir araştırmada, araştırma sonuçlarının istatistiksel değerlendirmesi gözlenen rasgele değişkenlerin ölçme düzeyine uygun istatistiksel çözümleme yöntemleri kullanılmışsa anlamlı olur. Örneğin , Dr. Edith öğretmenin ders verdiği öğrencilerin sınav notu ortalaması aynı dersi veren Dr. Osuji öğretmenden ders alan öğrencilerinin sınav notu ortalamasının 2 katıdır demek anlamlı değildir. Çünkü Dr. Edith ve Dr. Osuji öğretmenlerin öğrenci başarısını değerlendirirken başarısızlığı gösteren 0 not tanımlamaları farklı olacaktır.

Bu çalışmada adlandırma veya sıralama ölçüme düzeyli rasgele değişken gözlemleriyle istatistiksel çıkarım üzerinde durulacaktır. Bu iki ölçme düzeyine sahip rasgele değişkenler kategorik değişkenler olarak adlandırılır.

Bu çalışmada kategorik verinin istatistiksel analizi için yaygınca kullanılan yöntemleri anlatılmaktadır. Bölüm 2 'de kategorik veri analizinde istatistiksel modellemelerde kullanılan kesikli değerler alan rasgele değişkenlere ilişkin Bernoulli, binom, çok terimli (multinomial), hipergeometrik ve Poisson dağılımlarından söz edilmiştir. Merkezi limit teoremi ve büyük sayılar kanunu da bu bölümde ifade edilmiştir.

Bölüm 3'te $Bernoulli\ (p)$ dağılımlı yığından alınan rasgele bir örnekleme dayalı olarak bilinmeyen p için güven aralığı ve bu parametre için istatistiksel hipotezlerin testi anlatılmıştır. Bağımsız örneklemlere dayalı olarak iki yığın parametresi p_1 ve p_2'ye ilişkin güven aralıkları ve bunların karşılaştırılmasına ilişkin hipotezlerin testleri işlenmiştir. Örneklem çapı göreli olarak küçük olduğunda Fisher'in tam testi tartışıp kullanılmasına örnek verildi. Bağımlı örneklemler için McNemar test istatistiği kullanılarak iki yığın parametresi p_1 ve p_2'ye ilişkin hipotezlerin testinden de söz edildi, örnek verildi. Odds oranı ve göreli riskler için istatistiksel çıkarım ile çalışma tamamlanmıştır. Bölüm 4'de, araştırmanın sonuçları, bulgular ve öneriler hakkındadır.

2. ÇALIŞMADA KULLANILAN ÖNEMLİ KAVRAMLAR

Bu bölümde kategorik verilerin modellenmesinde sıkça kullanılan kesikli rasgele değişkenlerin dağılımlarından söz edilmiştir. Kesikli rasgele değişkenlerle istatistiksel çözümleme özellikle tam (exact) $1-\alpha$ güven düzeyli aralıklarının oluşturulmasında ve belirlenen I. Tip hatası tam olarak α test istatistiklerinin belirlenmesinde zorlukla karşılaşılır. Bu sorunu aşamak için kullanılan araçlardan biri de merkezi limit teoremidir. Kesikli rasgele değişkenlerle ilgili olasılıklara da, özellikle örneklem çapı çok büyük olduğunda merkezi limit teoremine de başvurulur. Aşağıda merkezi limit teoremi ve kullanımı üzerine bir alt başlığa da yer verilmiş, büyük sayılar kanunundan da söz edilmiştir.

2.1 Kategorik Verilerin Çözümlenmesinde Kullanılan Rasgele Değişkenler Dağılımları

Kategorik verilerin gözlemlendiği araştırmalarda ilgi duyulan rasgele değişkenlerin dağılımları çoğu kez bilinen ve uygun bulunan olasılık dağılımları kullanılarak modellenebilirler. Bu kısımda, bu dağılımlardan en çok kullanılanları olan Bernoulli, binom, multinomial (çok terimli), hipergeometrik ve Poisson olasılık dağılımları kısaca gözden geçirilecektir. Kategorik veya kesikli değerler alan rasgele değişkenlerin modellenmesinde bunların yanında pek çok olasılık dağılımı da vardır ve uygun olduklarında model olarak kullanılabilirler. Geometik dağılım, negatif binom dağılım yanında sürekli rasgele değişkenler kesikli olarak biçimlendirip model olarak kullanılabilirler. Bunlardan çok bilineni geometrik dağılımlı rasgele değişkenin, üstel dağılım kullanılarak elde edilebileceğidir. Bunun için Chakraborty (2015) çalışması kaynak olarak verilebilir.

2.1.1 Bernoulli Dağılımı

X rasgele değişkeninin yalnızca $x=0$ veya $x=1$ sınırlı değerlerini alabildiği rasgele değişkene Bernoulli dağılımlı rasgele değişken denilir. Genel olarak $X=1$ gözlenmesi başarı ve $X=0$ gözlenmesi başarısızlık olarak adlandırılır. Bu genel bir kural değildir, çalışmanın içeriğine göre farklı olarak da adlandırılabilir. Başarı olasılığı $P(X=1)=p$ olduğunda (ve başarısızlık olasılığı $P(X=0)=1-p$ =q) X rasgele değişkenin p başarı olasılıklı Bernoulli dağılımlı olduğu söylenir ve $X \sim Bernoulli\,(p)$ olarak gösterilir. Bernoulli rasgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu

$$P(X=x)=\begin{cases} p^x q^{1-x}, & x=0,\ 1 \\ 0\,, & d.y\,. \end{cases}$$

Bernoulli dağılımın beklen değeri $E(X)=p$ ve varyansı $E(X-p)^2=V(X)=pq$ dir. 17. yüzyıl Fransız matematikçisi James Bernoulli (1654-1705)'nin adıyla adlandırılmıştır (Chiang 2003).

2.1.2 Binom Dağılımı

Birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı $X_i \sim Bernoulli\ (p)$ n tane rasgele değişkeninin $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ toplamlarının dağılımı binom dağılımı olarak adlandırılır ve $X_i \sim Binom\ (n,p)$ olarak gösterilecektir. Binom dağılımlı rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x} & ,x=0,1,2,\cdots,n \\ 0 & , \qquad d.y. \end{cases}$$

dır. Burada dir ve $E(X)=np$, $V(X)=npq$ dır.

2.1.3 Multinomial (Çok Terimli) Dağılımı

m boyutlu rasgele vektör $X=(X_1,\ X_2,\cdots,X_m)$, $p_i>0, \sum_{i=1}^{m} p_i=1$ olmak üzere

$$P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \cdots, X_m = x_m) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_m!} {p_1}^{x_1} {p_2}^{x_2} {p_3}^{x_3} \ldots . {p_m}^{x_m} & ,\ 0 \le x_i \le n,\ ve \sum_{i=1}^{m} x_i = n \\ 0 & , d.y. \end{cases}$$

olasılık fonksiyonuna sahipse rasgele vektör çok terimli (multinomial) dağılımlıdır denir ve $M(n, p_1,\ p_2, \cdots, p_m)$ olarak gösterilecektir. Multinomial dağılımlı rasgele vektörün marjinal dağılımları, $X_i \sim Binom\,(n,\ p_i)$ 'dır. $E(X_i) = np_i$ ve $V(X_i) = np_i q_i$ olup, herhangi iki X_i ve X_j bileşenleri için $Cov\left(X_i, X_j\right) = -np_i q_i$ dır. Dağılım hakkında detaylı bilgi ve önemli sonuçlar için Casella ve Berger (1990) ile Port (1994)'a bakılabilir.

2.1.4 Hipergeometrik Dağılımı

$m = 1,2, \cdots, N$ ve $n = 1,2, \cdots, N$ olmak üzere olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , x = 0,1, \cdots, n \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olan X rasgele değişkenine hipergeometrik dağılımlı rasgele değişken denilir. Rasgele değişkenin alacağı değerler için $\max(0, n - N + m \le x \le \min(n, m)$ gösterimi de kullanılmaktadır. İki tür nesnenin toplam sayısının N olduğu bir yığından (kitleden) yerine konmadan yapılan n tane gözlemden türlerden birinin gözlenen sayısı olarak da tanımlanabilir. $E(X) = n\frac{m}{N}$ ve $V(X) = n\frac{m}{N}(1 - \frac{m}{N})\frac{N-n}{N-1}$ ' dir. Hipergeometrik dağılımlı rasgele değişkenlerle binom dağılımlı rasgele değişkenler arasında da bağ vardır. Fakat binom dağılımlı rasgele değişken yerine konularak yapılan gözlemler için tanımlı iken hipergeometrik dağılımlı rasgele değişkenler yerine konulmadan yapılan gözlemler için tanımlıdır. $p = \frac{m}{N}$ alınırsa $E(X) = np$ ve $V(X) = npq\,\frac{N-n}{N-1}$ olarak yazılabilir. $V(X)$ binom dağılımlı rasgele değişkenin varyasından , $\frac{N-n}{N-1}$ çarpanı kadar farklıdır. $N \to \infty$ iken Binom dağılımlı rasgele değişkenle hipergeometrik dağılımlı rasgele değişken arasındaki farklılık azalır $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ olacaktır. (Chiang, 2003, 91-95).

2.1.5 Poisson Dağılımı

Poisson dağılımlı rasgele değişken ayrık zaman dilimleri veya mekanlarda birbirinden bağımsız rasgele gerçekleşen olayların sayısını modellemek için kullanılan negatif olmayan tamsayı değerli bir rasgele değişkendir (Agresti, 2013, ss.6). Poisson dağılımlı rasgele değişkenin $\mu \in (0, \infty)$ parametreli olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\, \mu^x}{x!} & , x = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ 0 & , \quad d.y \end{cases}$$

dır. Rasgele değişkenin dağılımı $X \sim Poisson\ (\mu)$ olarak gösterilecektir. Birbirinden bağımsız n tane $X_i \sim Poisson\ (\mu_i)$ rasgele değişkenleri için ve $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \mu$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson\ (\mu)$ dır.

Poisson dağılımlı rasgele değişkenlere örnekler, haftada belirli bir endüstride endüstriyel kazaların sayısı; belirli bir süre içinde bir gayrimenkul şirketi tarafından satılan ev sayısı vb. olarak verilebilir. Poisson dağılımı için $E(X) = \mu$ ve $V(X) = \mu$ dır. X_i Poisson dağılımıyla binom dağılımı ve multinomial dağılım arasında ilişkiler vardır. $X \sim Binom\ (n, p)$ ve $np = \mu$ sabit olduğunda $n \to \infty$ iken tüm $x = 0, 1, 2, \cdots$ değerleri için

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\mu}\, \mu^x}{x!}$$

dir ve bu sonuç n büyük olduğunda binom dağılımlı rasgele değişkenin olasılıklarını hesaplamak için kullanılır. Birbirinden bağımsız n tane $X_i \sim Poisson\ (\mu_i)$ rasgele değişkenleri için olmak üzere $X_1, X_2, \cdots, X_n$'nin $\sum_{i=1}^{n} X_i = x$ koşulu altında koşullu ortak dağılımı $M(\, n,\ \mu_1/\mu,\ \mu_1/\mu, \cdots, \frac{\mu_n}{\mu})$ dır, burada $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ dir (Port 1994, ss.308).

2.2 Merkezi Limit Teoremi ve Büyük Sayılar Kanunu

2.2.1 Mekezi Limit Teoremi

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı (b.b.a.d.), $E(X_i) = \mu$ ve $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ olan rasgele değişkenler olsun. $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$\frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{d}{\to} N(0,1)$$

dir. Eğer istatistik $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ise $E(Y) = n\mu$ ve $V(Y) = n\sigma^2$ olup $n \to \infty$ iken

$$\frac{(Y-n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \overset{d}{\to} N(0,1)$$

dir.

Bu teorem $n \to \infty$ iken standartlaştırılmış $\bar{X}$ rasgele değişkenin olasılıklarının standart normal dağılımla yaklaşık olarak hesaplanacağını ifade eder: Her $x \in (-\infty, \infty\,)$ için

$$P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \le x\right) \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

dir. Merkezi limit teoremi (MLT), yaklaşımın $n \to \infty$ için doğru olduğunu ifade eder. Herhangi sabit n çaplı örneklem için yaklaşımı garanti etmez. Gözlemlerin alınacağı yığının dağılımı simetrik değilse, sağa ya da sola çarpıksa, n çok büyük olsa da yaklaşım istenilen hassasiyette olmayabilir. Bu durum özellikle kesikli değer alan rasgele değişkenlerin yer aldığı uygulamalarda gözlenir. Bu nedenle kesikli rasgele değişkenler için süreklilik düzeltmesi yapılır. Örneğin $Y \sim Binom(n,p)$ ise $P(Y \le x)$ olasılıklarına MLT süreklilik düzeltmesiyle birlikte

$$P(Y \le x) \approx P(Z \le \frac{x+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}})$$

olarak yaklaşımda bulunulur. $P(Y \geq x)$ olasılıklarına da MLT süreklilik düzeltmesiyle birlikte

$$P(Y \geq x) \approx P(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}})$$

olarak yaklaşımda bulunulur. x bir tamsayı olmak üzere

$$P(Y = x) = P(Y \leq x) - P(Y < x)$$
$$\approx P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - (Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}})$$

dır.

2.2.2 Büyük Sayılar Kanunu

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı (b.b.a.d.), $E(X_i) = \mu$ olan rasgele değişkenler olsun. $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ olmak üzere sabit her $\epsilon > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$P(|\bar{X}_n - \mu|) > \epsilon) \rightarrow 0$$

dır.

3. KATEGORİK VERİLERLE VERİ ANALİZİ VE İSTATİSTİKSEL HİPOTEZLERİN TESTİ

Bernoulli p parametresi için istatistiksel çıkarım kategorik veri analizinin temelinde yer aldığı söylenebilir. Genel olarak kategorik veri analizi kitapları p parametresi için "oran" terimini kullanmaktadırlar.

$Y \sim Binom(n, p)$ binom dağılımlı yığınlarda çoğunlukla $p \in (0,1)$ parametresinin rasgele (birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler) bir örneklemden tahmin edicisi en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak elde edilebilir:

3.1 Birbirlerinden Bağımsız ve Aynı $\boldsymbol{Bernoulli\,(p)}$ Dağılımlı $\boldsymbol{p}$ Parametresinin Tahmin Edicisi

$X_1,\ X_2, \dots\ X_n$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\ (p)$ dağılımlı olmak üzere $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n, p)$ olduğu düşünülerek p parametresinin tahmini yapılabilir. Bernoulli rasgele değişkenlerinin dağılımına ilişkin bu parametrenin tahmini binom dağılımlı Y rasgele değişkeninin dağılımına ilişkin p parametresinin tahminini yapmakla aynı olur.

Bu durumda olabilirlik fonksiyonu $Y = y$ gözlemlendiğinde p'nin bir fonksiyonudur

$$L(p) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

veya

$$Ln\ L(p) = Ln\ \binom{n}{y} + y\ Ln\ p + (n-y)\ Ln\ (1-p)$$

olarak yazılabilir. p parametresine göre türevi alınır ve p 'ye göre

$$\frac{y}{p} - \frac{n-y}{(1-p)} = 0$$

eşitliği çözülürse

$$\hat{p} = \frac{Y}{n}$$

tahmin edicisi bulunur. Bu tahmin edici $L(p)$ veya $Ln\,L(p)$ olabilirlik fonksiyonlarını maksimum yapar, çünkü $Ln\,L(p)$'nin ikinci kez p' ye göre türevi alınırsa

$$-\frac{y}{p^2} - \frac{n-y}{(1-p)^2}$$

$p \in (0,1)$ için negatif değerlidir.

3.2 Birbirlerinden bağımsız ve $\boldsymbol{Binom(n_i, p)}$ Dağılımlı $\boldsymbol{p}$ Parametresinin Tahmin Edicisi

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ b.b. ve $Binom(n_i, p)$ dağılımlı örneklem için de p parametresinin tahmini yine benzer olarak olabilirlik fonksiyonu yazılırsa

$$L(p) = \binom{n_1}{y_1} p^{y_1}(1-p)^{n_1-y_1} \times \binom{n_2}{y_2} p^{y_2}(1-p)^{n_2-y_2} \times \cdots \times \binom{n_n}{y_n} p^{y_n}(1-p)^{n_n-y_n}$$

Yukarıdakine benzer işlemlerle p parametresinin tahmin edicisinin

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

olduğu görülür. $\hat{p}$ tahmin edicisi büyük sayılar kanununa göre tutarlıdır, yansızdır, tam ve yeterli istatistiğe dayalıdır. Bu nedenle $\hat{p}$ tahmin edicisi en iyi yansız tahmin edicidir, $E(\hat{p}) = p$ ve $V(\hat{p}) = p(1-p)/n$ dir. $V(\hat{p})$'nin tahmin edicisi

$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$

dir.

p parametresi için MLT'nin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyli güven aralıkları ve yaklaşık α anlamlılık düzeyindeki test istatistikleri uygulama kolaylığı sağlarlar.

Burada $X_1, X_2, \dots X_n$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\,(p)$ dağılımlı örneklemi için örneklem çapı n yeterince büyük olduğunda MLT'nin sağladığı kolaylıktan yararlanılarak elde edilen yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyli güven aralıkları verilecektir

3.3 Bilinmeyen p İçin Yaklaşık $1-\alpha$ Güven Düzeyli İki Taraflı Güven Aralığı Tahmin Edicisi

MLT ve Slutsky teoremlerinin bir sonucu olarak $n \to \infty$ iken $(\hat{p}-p)/(\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) \xrightarrow{d} N(0,1)$ olduğundan $(\hat{p}-p)/(\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n})$ bilinmeyen p parametresi için pivot olarak kullanılabilir bu nedenle

$$\left(\hat{p}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}(\hat{p})}, \qquad \hat{p}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}(\hat{p})}\ \right)$$

p için iki taraflı yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyli bir güven aralığı tahmin edicisidir. Burada $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ standart normal dağılımlı rasgele değişkenin $1-\frac{\alpha}{2}$ yüzdelik değeridir. İstenirse süreklilik düzeltmesi yapılabilir. Bu aralık $p < 0.20$ veya $p > 0.20$ olduğu konusunda bilgi varsa kullanılması halinde yanıltıcı olabilecektir. Bunun yerine test istatistikleri sonuçları kullanılarak aralıklar geliştirilmiştir (Agresti, 1996, ss 11). Yukarıda verilen aralıkta $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ gözlendiğinde aralığın alt sınır 0, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ olduğunda üst sınır 1 olarak alınır. p parametresi için güven aralığı farklı şekillerde de oluşturulabilir. Bunun için Casella ve Berger 1990'de ss 444-446 ve Soru 9.21 incelenebilir.

3.4 p İçin Yaklaşık α Anlamlılık Düzeyinde Hipotez Testi

$X_1, X_2, \dots X_n$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\,(p)$ dağılımlı rasgele örneklemi kullanılarak $H_0\colon p = p_0$ yokluk hipotezi $H_1\colon p > p_0$ (veya $H_1\colon p < p_0$, $H_1\colon p \neq p_0$ alternatiflerinden biri de olablir) alternatif hipotezine karşı tam

olarak α anlamlılık düzeyinde test edilemez, ancak örneklem çapı yeterince büyükse yaklaşık α anlamlılık düzeyinde MLT kullanılarak test gerçekleştirilebilir:
$n \to \infty$ iken

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dır veya $$\frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0)}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dır.

Yaklaşık test istatistiği

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq z_{1-\alpha}$$

olduğunda H_0 yokluk hipotezinin reddedilmesidir. Eğer örneklem çapı n küçük ise istenilen α anlamlılık düzeyine yaklaşılamayacaktır. Bunun yerine $p - değeri$ kullanılarak test gerçekleştirilebilir. Fakat rasgeleleştirilmiş (randomized) test istatistiği de kullanılabilir, ancak uygulaması pratik değildir, konu için (Rohatgi 1976) çalışmasına bakılabilir. Ayrıca $\sum_{i=1}^{n} X_i$ istatistiğine dayalı tutucu (conservative) test de uygulanabilir (Bain ve Engelhardt 1992).

Örnek: Nijerya, Benin şehrinde 18 yaş ve üstü bireylerden tifo belirtileriyle hastanelere başvuran hastaların 0.45'ine tifo tanısı konulmaktadır. Ancak Benin Eğitim Hastanesi'nden Enabulele. O ve Awunor, S. N (2016) teşhiste kullanılan Gruber-Widal testinin bu oranı olduğundan büyük belirlediğini ve gerçekte tifo belirtileriyle başvuruda bulunanların tifo olma oranlarının daha az olduğunu iddia etmektedirler. Bu amaçla Benin Eğitim Hastanesi'ne tifo belirtileriyle başvuran 18 yaş ve üstü 271 bireyin kan örnekleri üzerinde detaylı test ve gözlemler ile kan kültürlerinde tifoya neden olan salmonella organizması gelişimi incelenmiş ve 60 bireye tifo teşhisi konulmuştur. Yapılan gözlemlerin tifo belirtisi sergileyen 18 yaş ve üstü bireyler yığınından rasgele bir örneklem olduğu varsayılarak $H_0 : p = 0.45$ hipotezi $H_1 : p < 0.45$ hipotezine karşı yaklaşık $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde test edilecek ve p için yaklaşık $1 - \alpha = 0.95$ güven düzeyli iki taraflı güven aralığı oluşturulacaktır. Örneklem çapı $n = 271$ olup MLT kullanmak için yeterli büyüklükte olduğu düşünülmüştür.

Yapılan gözlemlerden p'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi kullanıldığında $\hat{p} = {}^{60}/_{271} \approx 0.2214$ ve $V(\hat{p}) = p_0(1 - p_0)/n \approx 0.0009$ nokta tahminleri elde edilir.

Yaklaşık test istatistiği için H_0'ın doğruluğu altında

$$\frac{(0.2214 - 0.45)}{\sqrt{0.0009}} \approx -7.62$$

olup $-7.62 < -z_{0.95} = -1.64$ dır ve oldukça yüksek bir istatistiksel kanıtla yokluk hipotezi reddedilir.

$\hat{p} = 0.2214$ nokta tahmini, tahmin edicinin varyans tahmini $\hat{V}(\hat{p}) = \hat{p}(1 - \hat{p})/n \approx 0.0006$ ve $z_{0.975} = 1.96$ olmak üzere yukarıdaki yaklaşık güven aralığı tahmin edicisi kullanarak güven aralığı tahmini $(0.1734,\ 0.2694)$ elde edilir. $(0.1734,\ 0.2694)$ aralığı bilinmeyen p parametresini yaklaşık 0.95 olasılıkla kapsayan bir güven aralığı tahminidir.

İki Bernoulli dağılımlı yığına ait p_1 ve p_2 parametreleri arasındaki farka ilişkin yaklaşık $1 - \alpha$ güven düzeyli güven aralığı ve iki parametre değerinin karşılaştırılmasına ilişkin yaklaşık α anlamlılık düzeyinde hipotez testi yapılabilir. $(X_1, X_2, \cdots, X_n$ b.b.a.d.

$Bernoulli(p_1)$ yığınından ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ b.b.a.d. $Bernoulli(p_2)$ yığınından sırasıyla n ve m çaplı örneklemler olsun).

3.5 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ Örneklemleri Birbirlerinden Bağımsız Olduğunda

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ örneklemleri birbirlerinden bağımsız olduğunda $H_0: p_1 = p_2$ hipotezinin $H_1: p_1 > p_2$ hipotezine karşı yaklaşık α anlamlılık düzeyinde testi MLT ve Slutsky teoremlerinin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık test istatistiği ile gerçekleştirilebilir. $n \to \infty$ iken ve $H_0: p_1 = p_2$ hipotezinin doğruluğu altında

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dır. H_0'ın doğruluğu altında $E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2 = 0$, bağımsız örneklemler olduğu ve varyansları bilinmediği için $V(\hat{p}_1) = p_1(1-p_1)/n$ ve $V(\hat{p}_2) = p_2(1-p_2)/n$ olacak ve H_0' da verildiği gibi $p_1 = p_2$ doğru kabul edildiğinde $V(\hat{p}_1) = p_1(1-p_1)/n$ ve $V(\hat{p}_2) = p_1(1-p_1)/m$ (veya p_2 kullanılarak) olacaktır. $\hat{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ tahmini yapılmalıdır. Her iki örneklemin aynı dağılımlı oldukları bilindiğinden $p_1 = p_2 = p$ olacak ve p'nin nokta tahmini örneklemler birleştirilerek (pooled) yapılabilir, bu da

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_i}{n+m}$$

tahmin edicisi kullanılarak yapılır. Diğer taraftan

$$V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = V(\hat{p}_1) + V(\hat{p}_2)$$

$$= \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}$$

$$= p_1(1-p_1)(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$$

$$= p_2(1-p_2)(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$$

$$= p(1-p)(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})$$

dır. Buradan birleştirilmiş varyansın tahmini

$$\hat{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})$$

kullanılarak yapılabilir. Böylece test istatistiği

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \geq z_{1-\alpha}$$

olduğunda H_0'ın yaklaşık α anlamlılık düzeyinde reddedilmesidir.

$p_1 - p_2$ farkı için yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyinde güven aralığı da biraz farklı bir yol izlenerek fakat benzer sonuçlar kullanılarak elde edilir. Hipotez testinde olduğu gibi $p_1 = p_2$ olması söz konusu değildir. Bu nedenle $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ tahmin edicisin varyansı

$$V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = V(\hat{p}_1) + V(\hat{p}_2)$$
$$= \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}$$

dır ve bunun tahmin edicisi

$$\hat{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}$$

dir. Bu nedenle $n \to \infty$ iken

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dir ve $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \Big/ \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$ ifadesinin $p_1 - p_2$ için bir pivot olması sonucu kullanılarak elde edilir. Bu güven aralığı

$$\left((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}},\ \ (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}\right)$$

olarak yazılacaktır.

Örnek:

Nijerya, Benin şehrinde 18 yaş ve üstü bireylerden tifo belirtileriyle hastanelere başvuran hastalara Gruber-Widal testi sonucuna göre tifo tanısı konulmaktadır. Benin Eğitim Hastanesi'nden Enabulele. O ve Awunor, S. N (2016) tarafından yapılan çalışmaya göre hastaneye tifo şüphesiyle başvuran 271 bireyden Gruber-Widal testi pozitif çıkan bireylerin sayısı 124 ve negatif çıkan bireylerin sayısı 147 dır. Pozitif çıkan bireylerin 21'inin ve negatif çıkan bireylerin 39'unun diğer gözlem ve analizlerin sonucunda gerçekten tifo oldukları saptanmıştır. Tifo şüphesiyle başvuran hastalarda Gruber-Widal testi pozitif sonuçlu bireylerdeki gerçekten tifolu olma oranı $p_1$ile Gruber-Widal testi negatif sonuçlu bireylerdeki gerçekten tifolu olanların oranı p_2'nin aynı olduğu hipotezi yaklaşık $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde $p_1 \neq p_2$ alternatif hipotezine karşı bu gözlemler kullanılarak test edilecek ve bilinmyen $p_1 - p_2$ için yaklaşık $1 - \alpha = 0.95$ güven düzeyli bir güven aralığı oluşturulacaktır. Başvuruda bulunan ve Gruber-Widal testi pozitif çıkan bireyler Gruber-Widal testi pozitif çıkan bireyler yığınından (hipotetik bir yığından) rasgele bir örneklem, benzer olarak Gruber-Widal testi negatif çıkan bireyler Gruber-Widal testi negatif çıkan bireyler yığınından (hipotetik diğer bir yığından) rasgele bir örneklem olarak kabul edilebilir. Bu örneklemleri birbirlerinden bağımsız olduğu da kabul edilebilir.

$H_0 : p_1 = p_2$ hipotezi $H_1 : p_1 \neq p_2$ hipotezine karşı yaklaşık $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde test edilecek ve p için yaklaşık $1 - \alpha = 0.95$ güven düzeyli iki taraflı güven aralığı oluşturulacaktır. Örneklem çapı $n = 271$ olup MLT kullanmak için yeterli büyüklükte olduğu düşünülmüştür. Yaklaşık test istatistiği

$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ veya $\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olduğunda H_0 hipotezi yalaşık α anlamlılık düzeyinde reddedilecektir. Bu uygulamada $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$'dır.

İlk hipotetik yığından alınan rasgele örneklemden $\sum_{i=1}^{124} x_i = 21$ ve ikinci hipotetik yığından alınan ve ilk örneklemden bağımsız olan örneklemden $\sum_{j=1}^{147} y_j = 39$ gözlemleri yapıldığına göre

$\hat{p}_1 = 0.1694,$ $\hat{p}_2 = 0.2653\,,$ $\hat{p} = 0.2214$ ve $\hat{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0.0026$ tahminleri yapılır ve yaklaşık 0.05 anlamlılık düzeyindeki iki taraflı test istatistiği sonucu $\frac{-0.0959}{\sqrt{0.0026}} = -1.88 > -1.96$

ve $-1.88 < 1.96$ olduğundan $H_0 : p_1 = p_2$ yokluk hipotezi yaklaşık 0.05 anlamlılık düzeyinde ve eldeki gözlemlere göre reddedilemez. Dahası Gruber-Widal testi pozitif çıkanlar içinden gerçekte daha fazla oranda (0.1694) tifolu bulunması beklenirken, Gruber-Widal testi negatif çıkanlar içinden gerçekte daha fazla oranda (0.2653) tifolu gözlenmiştir.

$p_1 - p_2$ için yaklaşık $1 - \alpha = 0.95$ güven düzeyli güven aralığı oluşturmak için yukarıdaki tahminlere ek olarak varyans tahminine ihtiyaç vardır. Bu da

$$\begin{aligned}\hat{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m} \\ &= \frac{0.1694 \times (0.8306)}{124} + \frac{0.2653 \times 0.7347}{147} \\ &= 0.0025\end{aligned}$$

dır. $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = -0.0959$ ve $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ olduğundan

$$\left(-0.0959 - 1.96 \times \sqrt{0.0025}, \quad -0.0959 + 1.96 \times \sqrt{0.0025}\right) = (-0.1939, \; 0.0021)$$

aralığı bilinmeyen $p_1 - p_2$ farkını yaklaşık 0.95 güven düzeyinde içeren iki taraflı güven aralıklarından biridir. Bulunan aralık hipotez testi sonucuyla da örtüşmektedir.

3.6 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ Rasgele Örneklemleri Birbirlerinden Bağımsız Fakat Örneklem Çapları Küçükse

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ rasgele örneklemleri birbirlerinden bağımsız fakat örneklem çapları n ve m MLT'yi uygulamaya olanak vermeyecek kadar küçük olduklarında $H_0: p_1 = p_2 = p$ hipotezinin $H_1: p_1 > p_2$ hipotezine karşı tam α anlamlılık düzeyinde testi Fisher'in doğrudan testi (Fisher's exact test) gerçekleştirilebilir. Buradaki durumu her iki yığından yapılacak başarı sayısı gözlemleri iki boyutlu bir tablosunda aşağıdaki gibi gösterilebilir. Bu tabloda olası başarı sayıları $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $y = \sum_{j=1}^{m} y_j$ ile gösterilmiştir

Çizelge 3.1 İki yığından başarı durumu

Başarı Durumu / Yığın	Başarı Sayısı	Başarısızlık Sayısı	Toplam
X yığını örneklemi için	x	$n-x$	n
Y yığını örneklemi için	y	$m-y$	m
Toplam	$x+y$	$n+m-x-y$	$n+m$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\,(p_1)$ dağılımlı, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\,(p_2)$ dağılımlı olduklarından $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom\,(n, p_1)$ ve $\sum_{j=1}^{m} Y_j \sim Binom\,(m, p_2)$ dağılımlıdırlar ve bu rasgele değişkenler de birbirlerinden bağımsızdır. n ve m bilinmektedir tabloda yer alan x ve y rasgele değişken değerleri sırasıyla yukarıda verilen dağılımlardan yapılan gözlemlerdir. H_0 hipotezi altında tabloda verilen olayın gerçekleşmesi olasılığı

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = x, \sum_{j=1}^{m} Y_j = y\right) = \binom{n}{x}\binom{m}{y} p^{x+y}(1-p)^{n+m-x-y}$$

dır. Burada p parametresi bilinmediğinden bu olasılık hesaplanamaz. Diğer taraftan

$$S=\sum_{i=1}^{n} X_i+\sum_{j=1}^{m} Y_j$$

bilinmeyen p parametresi için yeterli bir istatistiktir ve $S \sim Binom\,(n+m,p)$ dağılımlıdır. Dolayısıyla koşullu olasılık

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i=x\,|S=s\right) &= \frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i=x\,,\sum_{i=1}^{n} X_i+\sum_{j=1}^{m} Y_j=s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i+\sum_{j=1}^{m} Y_j=s\right)} \\
&= \frac{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i=x,\ \ \sum_{j=1}^{m} Y_j=s-x\right)}{P(S=s)} \\
&= \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{s-x} p^{x+(s-x)}(1-p)^{n+m-x-(s-x)}}{\binom{n+m}{s} p^{s}(1-p)^{n+m-s}} \\
&= \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{s-x}}{\binom{n+m}{s}}
\end{aligned}$$

bilinmeyen p parametresinden bağımsızdır ve burada $x=0,1,\cdots,n$ ve $s=0,1,\cdots,m+n$ ’dir. Verilen alternatife göre

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\geq x\,|S=s\right)=\sum_{i=x}^{s}\frac{\binom{n}{i}\binom{m}{s-i}}{\binom{n+m}{s}}\leq\alpha$$

olacak şekilde bir x belirlenebilir; $P(\sum_{i=1}^{n} X_i\geq x\,|S=s)\leq\alpha$ ise veya x değeri y değerinden anlamlı olarak daha büyükse H_0 reddedilir. Bu test istatistiği tam α çaplı Fisher test istatistiği olarak bilinir (Bain & Engelhardt (1987), ss. 399) ve büyük çaplı örneklemler için de kullanılır. Yukarıdaki tabloda $x+y$, n,m bilindiğinde tablonun gözlemlenebilecek tüm durumlarına (permütasyonlarına) ilişkin olasılıklar hesaplanabilir, aşağıdaki tablo buna bir örnektir.

Çizelge 3.2 İki yığından başarı durumu permütasyonlar

Başarı Durumu / Yığın	Başarı Sayısı	Başarısızlık Sayısı	Toplam
X yığını örneklemi için	$x-1$	$n-x$+1	n
Y yığını örneklemi için	$y+1$	$m-y-1$	m
Toplam	$x+y$	$n+m-x-y$	$n+m$

Örnek

Bir diş hekimi diş çürüğü tedavisinde kullanılan A yönteminin başarı olasılığı p_A'nın B yönteminin başarı olasılığı p_B'ye eşit olduğu hipotezini, A yönteminin başarı olasılığının B yöntemine göre daha büyük olduğunu hipotezine karşı $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde test edecektir. Bu amaçla diş çürüğü olan hastaları arasından rasgele seçtiği 12 hastasından yine rasgele belirlediği 7 hastasına A yöntemiyle, diğerlerine de B yöntemiyle tedavi uygulamıştır. Tedaviler üzerinden bir ay geçtikten sonra hastalarının tümünü kontrol muayenesine çağırarak tedavi yapılan dişlerinin rahatsızlık (ağrı) verip vermediğini sormuştur. Dişin rahatsızlık vermemesinin başarı olarak değerlendirildiği aşağıdaki gözlemler tablo 3.8c'de elde edilmiştir:

Çizelge 3.3 İki tedavi yönteminin başarı durumlarına ilişkin veri tablosu

Başarı Durumu / Yığın	Ağrı Yok	Ağrı Var	Toplam
A yöntemi Uygulananlar	6	1	7
B yöntemi Uygulananlar	3	2	5
Toplam	9	3	12

Bu gözlemlerin H_0 hipotezi altında gerçekleşmesi olasılığı

$$P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i = 6 \mid S = 9\right) = \frac{\binom{7}{6}\binom{5}{3}}{\binom{12}{9}}$$

$$= \frac{7}{22}$$

dır. Bu sonuç H_0'ın reddedilememesi için yeterlidir, ancak yukarıdaki $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{7} X_i \geq 6 \mid S = 9)$ olasılığı bulunmak isternilse aşağıdaki tablo 3.8d'deki olası duruma ilişkin verilerin olasılığın da bulunmalıdır.

Çizelge 3.4 İki tedavi yönteminin başarı ilişkin olası bir duruma ilişkin veri tablosu

Başarı Durumu / Yığın	Ağrı Yok	Ağrı Var	Toplam
A yöntemi Uygulananlar	7	0	7
B yöntemi Uygulananlar	2	3	5
Toplam	9	3	12

$$P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i = 7 \mid S = 9\right) = \frac{\binom{7}{7}\binom{5}{2}}{\binom{12}{9}}$$

$$= \frac{1}{22} = 0.045$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i \geq 6 \mid S = 9\right) = P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i = 6 \mid S = 9\right) + P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i = 7 \mid S = 9\right)$$

$$= \frac{8}{22} = 0.36$$

${}^{8}/_{22} \leq 0.05$ olmadığından H_0 $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde reddedilemez. Dikkat edilirse uygulamanın p – değeri kullanılarak yapılan bir testten farklı değildir. Dağılımın kesikli olması nedeniyle tam $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyi ancak rasgeleleştirilmiş Fisher test istatistiği kullanılırsa elde edilebilir. Burada kullanılan test istatistiği rasgeleleştirilmiş olsaydı düzgün en güçlü test istatistiği uygulanmış olurdu.

3.7 Bağımlı iki örneklemle Bernoulli dağılım parametrelerinin karşılaştırılması

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\,(p_1)$ dağılımlı rasgele değişkenler ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ birbirlerinden bağımsız ve aynı $Bernoulli\ (p_2)$ dağılımlı rasgele değişkenler olsun. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ rasgele örneklemleri bağımsız olmadığında $H_0: p_2 - p_1$ yokluk hipotezinin $H_1: p_1 > p_2$ veya $H_1: p_2 \neq p_1$ alternatif hipotezlerine karşı α anlamlılık düzeyinde testi McNemar test istatistiği ile gerçekleştirilebilir. Birbirinden bağımsız olmayan iki örneklemin olduğu tasarımlar çoklukla eşleştirmenin (paired design) yapıldığı tasarımlardır. Bu nedenle konu bu şekliyle işlenecek ve iki örneklemin çapları $n = m$ olacaktır. Örneğin A ve B uygulanacak iki ilacı veya iki sınıflama fonksiyonunu gösterebilir. İlaçlar söz konusuysa bir ilacın başarılı olması durumunda Bernoulli rasgele değişken değeri 1 aksi halde 0 değeri ile gösterildiği düşünülsün . A ilacı uygulama sonuçları iki değerli Y_1 rasgele değişkeni ve B ilacı uygulama sonuçları iki değerli Y_2 rasgele değişkeni ile gösterilecektir

Önce A ilacı n bireye uygulanıp sonra gözlemler yapılacak A ilacının etkisi geçinceye kadar bir süre beklendikten sonra B ilacı aynı bireylere verilir ve gözlemler yapılır. Örneklemler sonucunda gözlemlenebilecek verinin gösterimi aşağıdaki gibi olacaktır.

Y_1	Y_2
1	0
1	1
0	1
0	0
0	1
.	.
.	.
1	0

Bu gözlemler aşağıdaki 2×2 çapraz çizelgesinde de gösterilebilir:

Çizelge 3.5 Bağımlı gözlemlerle iki etkisin karşılaştırması ilişkin 2×2 çapraz

		B İlacı		
		Başarılı $Y_2 = 1$	Başarısız $Y_2 = 0$	Toplam
A ilacı	A ilacı Başarılı $Y_1 = 1$	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
	A ilacı Başarısız $Y_1 = 0$	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
	Toplam	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..}$

Tabloda $(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22})$ vektörü $(N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22})$ rasgele vektörünün gözlem değerleri olarak görülmektedir. Tabloya göre $n_{..}$ bilinmektedir ve $N_{11} + N_{12} + N_{21} + N_{22} = n_{..}$ dır. $(N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22})$ rasgele vektörüne ilişkin ortak olasılık dağılım tablosu $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$ olmak üzere

Çizelge 3.6 Bağımlı gözlemlerle iki etkisinin dağılımı

		B İlacı	
		Başarılı	Başarısız
A ilacı	Başarılı	p_{11}	p_{12}
	Başarısız	p_{21}	p_{22}

olarak verilebilir. Rasgele vektör çok terimli $(N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22}) \sim M(n, p_{11},\ p_{12},$ $p_{21},\ p_{22})$ dağılıma sahiptir. Bilindiği gibi Y_1 ve Y_2 rasgele değişkenleri (marjinal dağılımılar) sahiptirler. $n_{..}$ biliniyorken $Y_1 \sim Binom(n_{..},\ p_{11} + p_{12})$ ve $Y_2 \sim Binom(n_{..},\ p_{11} + p_{21})$ dağılımlara sahiptirler. Bu rasgele değişkenler birbirlerinden bağımsız değildirler. Ayrıca aynı aileden dağılımlar olmakla birlikte aynı dağılımlı da değildirler. H_0 hipotezi H_1 hipotezine karşı test edilecek olduğundan $H_0: p_1 = p_2$ hipotezinin doğruluğu altında $p_1 = p_{11} + p_{12}$ ve $p_2 = p_{11} + p_{21}$ olduğundan $p_{11} + p_{12} = p_{11} + p_{21}$ olacak ve $p_{12} = p_{21}$ ya da $p_{12} - p_{21} = 0$ olmalıdır. Bu olasılıklar iki uygulama grubunda her iki ilaç için benzemez sonuçları alma (dissimilarity) olasılıklarıdır ve bunlar için

$$P(Y_1 = 1, \quad Y_2 = 0) = P(Y_1 = 0, \quad Y_2 = 1)$$

dir. Benzemezliklerin sayısı rasgele değişkeni $N_d = N_{12} + N_{21}$ olarak tanımlanabilir. $N_d = n_d$ verilmişken N_{12}'nin H_0'ın doğruluğu altında koşullu dağılımı $Binom(n_d, 0.5)$'dır (Westfall et. al, 2010). Benzemezliklerin sayısının anlamlı olarak büyüklüğü alternatif hipotezi destekler bir gözlem olacaktır. O halde test istatistiği $P_{H_0}(N_{12} \geq n^*) \leq \alpha$ olacak şekilde belirlenir. $N_{12} \geq n^*$ ise H_0 hipotezi α anlamlılık düzeyinde reddedilir. p −değeri kullanılarak test gerçekleştirilmek istenirse

$$p - değeri = \sum_{i=0}^{\min(n_{12}, n_{21})} \binom{n_d}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_d}$$

olarak hesaplanır.

Tam McNemar testi yerine yaklaşık test, MLT ile standartlaştırılmış test istatistiği uygulamada daha çok kullanılır. Bunun için

$$E(N_{12}) = \frac{n_d}{2} = \frac{n_{12} + n_{21}}{2}$$

ve

$$V(N_{12}) = n_d \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{n_{12} + n_{21}}{4}$$

kullanılarak standartlaştırma yapılır ve yaklaşık α anlamlılık düzeyinde test istatistiği

$$\frac{N_{12} - (\frac{n_{12} + n_{21}}{2})}{\sqrt{\frac{n_{12} + n_{21}}{4}}} \geq z_{1-\alpha}$$

ise H_0 reddedilmesidir. Genellikle verildiği biçimde

$$\frac{n_{12} - (\frac{n_{12} + n_{21}}{2})}{\sqrt{\frac{n_{12} + n_{21}}{4}}} = \frac{n_{12} - n_{21}}{\sqrt{n_{12} + n_{21}}} \geq z_{1-\alpha}$$

ise H_0 hipotezi yaklaşık α anlamlılık düzeyinde reddedilir. Süreklilik düzeltmesi de yapılabilir.

Örnek. Aynı türden ağrı tedavisi gören hastalar içinden 20 hasta rasgele seçilmiş ve hastalara önce A ağrı kesici ilacı uygulanmış ve kendilerine bu ilacın etkili olup olmadığı sorulmuştur. Yeterli bir süre geçip önceki ilacın etkisi kalmadığında aynı hastalara B ağrı kesicisi uygulanmış ve bu ilacın etkili olup olmadığı sorulmuştur. $H_0: p_A = p_B$, hipotezi A ilacının ağrıyı kesmekte B ilacına göre daha etkili olduğu hipotezi $H_0: p_A > p_B$ 'ye karşı $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde test edilecektir. Gözlem değerleri aşağıdaki tabloda verildiği gibidir.

Çizelge 3.7 İki ilacın aynı hastalar üzerindeki başarına ilişkin gözlemlerin yer aldığın 2×2 çapraz

		B İlacı		
		B ilacı Başarılı	B ilacı Başarısız	Toplam
A ilacı	A ilacı Başarılı	6	8	14
	A ilacı Başarısız	2	4	6
	Toplam	8	12	20

Gözlem değerleri için

$$\frac{n_{12} - (\frac{n_{12} + n_{21}}{2})}{\sqrt{\frac{n_{12} + n_{21}}{4}}} = \frac{n_{12} - n_{21}}{\sqrt{n_{12} + n_{21}}} \geq z_{1-\alpha}$$

test istatistiği kullanılırsa

$$\frac{6}{\sqrt{10}} = 1.9 > 1.64$$

olduğu gözlenir. Buna göre $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde H_0 hipotezi reddedilir.

3.8 Odds ve Odds oranı

Odds (karşıtlık) bir A olayın gerçekleşeceği olasılığı $P(A)$'nın gerçekleşmemesi olayı A^c'nin olasığına oranıdır. A olayına ilşkin odds $P(A)/P(A^c)$ ve B olayına ilişkin odds $P(B)/P(B^c)$ olmak üzere iki oddsun oranı

$$\theta = \frac{\frac{P(A)}{1-P(A)}}{\frac{P(B)}{1-P(B)}}$$

odds oranı olarak adlandırılır. $\theta \geq 0$ dır. Odds oranını kumarbazların ifadeleriyle yorumlamak bu tanımın kullanımını ve anlaşlmasını kolaylaştıracaktır. Örneğin A hilesiz bir zarın rasgele atılmasıyla üzerinde beş noktanın gözlenmesi olayını göstersin. A olayına ilişkin odds $({}^{1}/_{6})/({}^{5}/_{6}) = 1/5$ dır. B hilesiz bir zarın rasgele atılmasıyla üzerinde beş noktanın gözlenmemesi olayını göstersin. B olayına ilişkin odds $({}^{5}/_{6})/({}^{1}/_{6}) = 5$ dır. Bu iki olayın odds oranı $\theta = (1/5)/5 = 1/25,$ B olayı A olayına göre 25 kat fazla gözlenir bu durum 1: 25 olarak da ifade edilebilir. Odds ve odds oranları sağlık uygulamaların da sıkça kullanılır. İki olayın olması olasılıklarının oranı olan rasgele A olayının rasgele B olayına göre riski $P(A)/P(B)$ göreli riski ile karıştırılmamasıdır. Çoğu zaman araştırmacılar tanımlamalarda kullanılan $P(A)$ ve $P(B)$ olasılıkları yığın değerlerine sahip değildirler. Tasarlanan araştırma sürecinde yapılacak gözlemlerle bu olasılıkları tahmin edilen değerleri kullanılarak odds ve odds oranları tahmin değerleri verilebilir. Aşağıdaki örnekte de bu yapılmıştır.

Örnek. Bir sağlık probleminin, bir A tedavi yönteminin başarı ile sonuçlanması olayı A ile gösterilsin ve başarı olasılığı $P(A) = 8/10$ olsun bu yöyemin başarısızlıkla sonuçlanması olayının olasılığı $P(A^c) = 2/10$ olduğundan, A olayının (karşıtlığı) odds $8/2 = 4$ olur; bu yöntem başarısızlığına göre 4 kat başarılıdır. B tedavi yönteminin başarı ile sonuçlanması olayı B ile gösterilsin ve başarı olasılığı $P(B) = 6/10$ olsun bu yöntemin başarısızlıkla sonuçlanması olayının olasılığı $P(B^c) = 4/10$ olduğundan, B olayının (karşıtlığı) odds $3/2$ olur; bu yöntem başarısızlığına göre 1.5 kat başarılıdır. A yönteminin B yöntemine göre odds oranı ise

$$\theta = \frac{\frac{\frac{8}{10}}{\frac{2}{10}}}{\frac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{10}}} = \frac{\frac{8}{10} \times \frac{10}{2}}{\frac{6}{10} \times \frac{10}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

olarak hesaplanır. A tedavi yöntemi B tedavi yöntemine göre 2.67 kat başarılıdır. Odds oranı $8 : 3$ olarak da ifade edilir. A tedavi yönteminin B tedavi yöntemine göre başarısı 167% daha fazladır.

Örneklemden hesaplanan odds oranı rasgele bir değşkendir örneklem çapları çok büyük olmadıkça oldukça çarpık bir dağılıma sahiptir. Odds oranları için istatistiksel çıkarımlarda θ yerine $\ln(\theta)$ kullanılması önerilir. $\ln(\hat{\theta}\ )$ örneklem dağılımı daha az çarpıktır, asimtotik olarak $N(\ln(\theta)\,,\sigma^2)$ dağılımlıdır. Burada varyans

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} + \frac{1}{n_{22}}$$

dır.

Yukarıdaki anlatım devam ettirilirse A olayı A tedavisinin başarısını ve B olayı B tedavisinin başarısını göstermek üzere aşağıdaki 2×2 çapraz tablo oddslara ilişkin işlemleri göstermeye yardımcı olacaktır.

Çizelge 3.8 Odds ve odds oranı istatistikleri için gözlenen verilerin dizilimi çapraz tablosu

Tadavi Yöntemi	Tedavi Etkisi		
	Başarılı	Başarısız	Toplam
A yöntemi	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
B yöntemi	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
Toplam	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..}$

Burada $n_{i.}$ değerleri verilmişse bulunacak olasılıklar her bir deney yada gözlemde rasgele değerler alacaktır. Buna göre yukarıdaki σ^2 yerine $\hat{\sigma}^2$ bir tahmin edici olacaktır:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} + \frac{1}{n_{22}}$$

Buna göre A yönteminin B yöntemine göre odds oranı tahmin edicisi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}$$

olacaktır. Büyük örneklem çapıyla normal dağılım yaklaşımı ile $\ln(\theta)$ için yaklaşık $1-\alpha$ güven düzeyli iki taraflı bir güven aralığı tahmin edicisi

$$(\ln(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \qquad \ln(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

dir.

Tabloda n_{ij} gözlem değerlerinden biri 0 olarak gözlenebilir, bu durumda odds oranı tahmin edicisi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{(n_{11}+0.5)(n_{22}+0.5)}{(n_{12}+0.5)(n_{21}+0.5)}$$

olarak önerilir (Agresti, 2007).

Örnek.1 Avustralya ve Amerika Birleşik Devletleri'nde 2010-2014 yıllarında kasabalarda yaşayan 70 yaş ve üzeri sahip sağlıklı toplam 19114 kadın ve erkek üzerinde yapılan bir araştırmada 9525 bireyin aspirin kullanması 9589'unun da placebo kullanması sağlanmıştır. Bireyler araştırma süresince kalp-damar rahatsızlıkları ile kanamalı sağlık problemler geliştirip geliştirmedikleri izlenmiştir. Aşağıdaki Tablo 4.2 da yapılan gözlemler verilmiştir.

Çizelge 3.9 70 yaş ve üzeri bireylerde aspirinin kullanımı ve kanamalı rahatsızlıkların araştırıldığı çalışmaya ait çapraz tablo

Alınan İlaç	Kanamalı Rahatsızlık		
	Kanamalı Rahatsızlık Var	Kanamalı Rahatsızlık Yok	Toplam
Aspirin	872	8653	9525
Placebo	634	8955	9589
Toplam	1506	17608	19114

Source:John J. McNeil, Nelson, Woods, R. L., & Lockery, J. E. 2018. Effect of Aspirin on Cardiovascular Events and Bleeding in the Healthy Elderly. *The New england Journal of Medicine*. 1514 -1515

Örnek.2 Avustralya ve Amerika Birleşik Devletleri'nde 2010-2014 yıllarında kasabalarda yaşayan 70 yaş ve üzeri sahip sağlıklı toplam 19114 kadın ve erkek üzerinde yapılan bir araştırmada 9525 bireyin aspirin kullanması 9589'unun da placebo kullanması sağlanmıştır. Bireyler araştırma süresince kalp-damar rahatsızlıkları ile kanamalı sağlık problemler geliştirip geliştirmedikleri izlenmiştir. Aşağıdaki Tablo 4.2 da yapılan gözlemler verilmiştir.

Yukarıdaki veriler kullanılarak σ^2'nin tahmini,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{872} + \frac{1}{865} + \frac{1}{634} + \frac{1}{8955}$$

$$= 0.004$$

olarak hesaplanır ve aspirinin placebo'ye göre odds oranı tahmini

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{872\ x\ 8653}{634\ x\ 8955} = 1.33$$

elde edilir. Aspirinin sağlam ve 70 yaş üstü bireylerde kanamalı rahatsızlığa neden olması placebo'ye göre 1.33 kattır, aspirinin placebo'ye göre etkisi 33% daha fazladır.

$\ln(\theta)$ için yaklaşık $1-\alpha=0.95$ güven düzeyli iki taraflı güven aralığı tahmin edicisi kullanılarak

$$(\ln(1.33)-1.94, \quad \ln(1.33)+1.94) = (-1.6548, \quad 2.2252)$$

tahmini yapılır. Buna göre bulunan bu aralık, bilinmeyen $\ln(\theta)$ parametresini yaklaşık 0.95 olasılıkla içeren aralıklardan birisidir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Kategorik verilerle ilgili çalışmalar yapılırken çoğu kez istatistiklerin dağılım teorisinden genellikle uzak durulur ve büyük örneklem teorisinin sonuçları kullanılarak çıkarımlar yapılır. Bu yaklaşımda kategorik verilerle dağılımdan bağımsız-parametrik olmayan istatistiklerle çözümleneceği düşüncesinin de etkili olduğu söylenebilir. Bunun yerine istatistiklerin dağılım teorisine dayandırılarak istatistiksel sonuç çıkarım yapılması bu alanda yapılacak çalışmalara ve kullanılan yöntemlere zenginlik kazandıracaktır.

KAYNAKLAR

Agresti, A. 1996. *An introduction to Categorical Data Analysis.* New York, Chichester, Brisbane, Toronto, singapore: John Wiley & Sons, INC.372 s

Agresti, A. 2007. *An Introduction to Categorical Data Anlaysis.* Hoboken- New Jersey: John Wiley & Sons Inc. 342 s

Agresti, A. 2012. *An Intoduction to Categorical Data.* Hoboken-New Jersey: John Wiley. 752 s

Agresti, A. 2019. *An introduction to Categorical data Analysis (3rd Edition).* Florida: John Wiley & Sons. Inc. 400 s

Bain, L. J., & Engelhardt, M. 1987. *Introduction to Probability and mathematical Statistics.* California: Duxbury Classic.656 s

Chiang, C. L. 2003. *Statistical methods of Analysis.* California: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 656 s

Enabulele O., A. S. 2016. Typhoid Fever in Tertiary Hospital in Nigeria : Another look at the Widal Agglutination Test as preferred option for Diagnosis. *PubMed*, 145-149.

George Casella, R. L. 1990. *Statistical Inference* (First ed.). Kentucky: Duxbury Press. 688 s

John J. McNeil, Nelson, Woods, R. L., & Lockery, J. E. (2018). Effect of Aspirin on All-Cause Mortality in the Healthy Elderly. *The New england Journal of Medicine*. 1521 -1523

John J. McNeil, Nelson, Woods, R. L., & Lockery, J. E. 2018. Effect of Aspirin on Cardiovascular Events and Bleeding in the Healthy Elderly. *The New england Journal of Medicine*. 1514 -1515

Joseph L. Fleiss, Bruce Levin, Myunghee Cho Paik. 2010. *Statistical Methods for Rates and Proportions.* New Jersey: John Wiley. 800 s

Lee J. Bain , Max Engelhardt. 1992. *Introduction to the Probability and mathematical Statistics.* California USA: Duxbury Classic. 656 s

Port, S. C. 1994. *Theoretical Probability for Applications.* New York: John Wiley & Sons Ltd. 894 s

Rohatgi, V. K., & A.K Md. Ehsanes Saleh. 1976. *An Introduction to Probability and Statistics.* Massachusetts: John Wiley & Sons Inc. 728 s

Wan Tang, Hua He, Xin M.Tu. 2012. *Applied Categorical and Count Data Analysis* . Boca Raton, Florida: CRC Press. 384 s

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Uchechukwu Anthony OGWURUMBA
Doğum Yeri : Lagos- Nijerya
Doğum Tarihi : 09/10/1988
Medenli Hali : Bekar
Yabancı Dili : Türkçe

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ajeromı Ifelodun Hıgh School Lagos- Nijerya (2003)
Lisans : Nnamdi Azikiwe University – Nijerya (2012)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (Ocak 2020)

Çalıstığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Portalkal Eğitim Danışmanlığı- Batıkent (2019- şimdikli)
Batı Kulvar Koleji Batıkent- Ankara (2019)
Başaran Koleji Kırrıkale (2018-2019)
Grand Cenptral Africa Limited, Ikeja GRA Lagos (2014- 2016)
Junior Secondary School, Saminaka- Niger State. (2013-2014)
Regia Luxuria Hotels and Suites, Iyana Ipaja – Lagos State (2013-2013)