T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

EĞRİLİKLİ VE NONMETRİSİTİLİ İKİ BOYUTLU RIEMANNSAL OLMAYAN BİR GEOMETRİDE KÜTLEÇEKİM TEORİSİNE DIRAC SPİNÖR ÇİFTLENİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERTAN KÖK

DENİZLİ, TEMMUZ-2020

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

EĞRİLİKLİ VE NONMETRİSİTİLİ İKİ BOYUTLU RIEMANNSAL OLMAYAN BİR GEOMETRİDE KÜTLEÇEKİM TEORİSİNE DIRAC SPİNÖR ÇİFTLENİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERTAN KÖK

DENİZLİ, TEMMUZ-2020

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ERTAN KÖK

ÖZET

EĞRİLİKLİ VE NONMETRİSİTİLİ İKİ BOYUTLU RIEMANNSAL OLMAYAN BİR GEOMETRİDE KÜTLEÇEKİM TEORİSİNE DIRAC SPİNÖR ÇİFTLENİMİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ERTAN KÖK
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MUZAFFER ADAK)
DENİZLİ, TEMMUZ-2020

Einstein'ın kütleçekim teorisi olan genel görelilik teorisinin bazı astrofiziksel ve kozmolojik gözlemlerle uyumsuzluğu ve kuantizasyonundaki kronik problemler yeni bir kütleçekim teorisinin varlığına duyulan ihtiyacı göstermektedir. Bunun yapmanın farklı yolları olsa da bu çalışmada uzayzamanın geometrisi değiştirilerek yeni bir kütleçekim modeli çalışılmıştır. Teorinin kuantizasyonu yönünde bir fikir edinmek için bu oyuncak modele bir Dirac spinör alanı minimal olarak bağlanmıştır. Matematiksel sadelik ve kolaylık için 2-boyutlu uzayzamanda çalışılmıştır. Zayıf nükleer kuvveti, güçlü nükleer kuvveti ve elektromanyetik kuvveti birleştirmesindeki başarısından dolayı ayar yaklaşımı yoluna gidilmiştir. Bu bağlamda eğrilik tensöründe ve nonmetrisiti tensöründe kuadratik olan kütleçekim lagranjiyenine Dirac lagrajiyeni minimal olarak eklenmiştir. Sonrasında bağımsız varyasyon hesabı yapılarak alan denklemleri elde edimiştir. Denklemlere çözüm arama işi ileriki başka çalışmalara bırakılmıştır. Bütün tez boyunca dış cebir kullanılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Einstein kütleçekim teorisi, Dirac spinörü, 2-boyutlu kütleçekim teorisi, eğrilik, nonmetrisiti.

ABSTRACT

A DIRAC SPINOR COUPLING TO A THEORY OF GRAVITY IN A TWO DIMENSIONAL NON-RIEMANN GEOMETRY WITH CURVATURE AND NONMETRICITY
MSC THESIS
ERTAN KÖK
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
PHYSICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. MUZAFFER ADAK)
DENİZLİ, JULY-2020

The incompatibility of Einstein's theory of gravity, the general relativity theory, with some astrophysical and cosmological observations, and chronic problems in its qunatization indicate the need for a new gravitation theory. Although there are different ways to do this, in this study, a new gravitational model has been studied by changing the geometry of spacetime. To get an idea of the quantization of the theory, a Dirac spinor field is minimally coupled to this toy model. It has been studied in 2-dimensional spacetime for mathematical simplicity and convenience. Due to its success in combining weak nuclear force, strong nuclear force and electromagnetic force, gauge approach has been followed. In this context, Dirac lagragian was minimally added to the gravitational lagrangian, which is quadratic in the curvature tensor and the nonmetricity tensor. Then, by calculating the independent variation, the field equations were obtained. The search for solutions to the equations is left to further studies. Exterior algebra was used throughout the thesis.

KEYWORDS: Einstein's theory of gravity, Dirac spinor, 2-dimensional teory of gravity, curvature, nonmetricity.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$	:	n-boyutlu yönlenebilir manifold
$\boldsymbol{g}$	:	$(0,2)$-tipi simetrik dejenere olmayan metrik tensörü
$\boldsymbol{x^\mu}$	:	Koordinat fonksiyonları veya koordinat sistemi
$\boldsymbol{\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu}$	:	Koordinat çerçevesi veya koordinat baz vektörü. dx^μ'nün duali
$\boldsymbol{dx^\mu}$	:	Koordinat koçerçevesi veya koordinat baz 1-formu. ∂_μ'nün duali
$\boldsymbol{\delta^\mu_\nu}$	:	Kronecker deltası. Bazen δ^a_b yazarız.
$\boldsymbol{T_p(M)}$	:	M'nin p noktasında kurulan teğet uzayı. $T^*_p(M)$'nin duali
$\boldsymbol{T^*_p(M)}$	:	M'nin p noktasında kurulan koteğet uzayı. $T_p(M)$'nin duali
$\boldsymbol{X_a}$	:	Ortonormal çerçeve veya ortonormal baz vektörü. e^a'nın duali
$\boldsymbol{e^a}$	:	Ortonormal koçerçeve veya ortonormal baz 1-formu. X_a'nın duali
$\boldsymbol{h^\mu{}_a}$	:	Çok-ayak. Tersi $h^a{}_\mu$ olur.
$\boldsymbol{CT(M)}$	:	M üzerinde kurulan koordinat teğet demeti. $CT^*(M)$'nin duali
$\boldsymbol{OT(M)}$	:	M üzerinde kurulan ortonormal teğet demeti. $OT^*(M)$'nin duali
$\boldsymbol{CT^*(M)}$	:	M üzerinde kurulan koordinat koteğet demeti. $CT(M)$'nin duali
$\boldsymbol{OT^*(M)}$	:	M üzerinde kurulan ortonormal koteğet demeti. $OT(M)$'nin duali
$\boldsymbol{g_{\mu\nu}}$	:	Metriğin koordinat bileşeni
$\boldsymbol{\eta_{ab}}$	:	Metriğin ortonormal bileşeni veya Minkowski metriği
$\boldsymbol{\omega^a{}_b}$	:	Tüm bağlantı 1-formu
$\boldsymbol{\tilde{\omega}^a{}_b}$	:	Levi-Civita bağlantı 1-formu
$\boldsymbol{R^a{}_b}$	:	Eğrilik tensör 2-formu
$\boldsymbol{T^a}$	:	Burulma tensör 2-formu
$\boldsymbol{Q_{ab}}$	:	Nonmetrisiti tensör 1-formu
$\boldsymbol{\bigwedge^p(M)}$	:	M üzerinde kurulan p-formlardan oluşan lineer vektör uzayı
$\boldsymbol{\bigwedge(M)}$	:	M üzerinde kurulan dış cebir
$\wedge$	:	Dış çarpım veya tümüyle antisimetrik tensör çarpımı
$\boldsymbol{d}$	:	Dış türev
$\boldsymbol{D}$	:	Kovaryant dış türev
$\boldsymbol{\iota_a}$	:	X_a ortonormal bazına göre iç çarpım
$\boldsymbol{\iota_\mu}$	:	$\partial/\partial x^\mu$ koordinat bazına göre iç çarpım
$*$	:	Hodge dualite operatörü
$\boldsymbol{\epsilon_{a_1a_2\cdots a_n}}$	:	Tümüyle antisimetrik Levi-Civita epsilon tensörü
$\boldsymbol{\delta}$	:	Varyasyon
$\boldsymbol{L}$	:	Lagranjiyen n-formu
$\boldsymbol{I}$	:	Eylem
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	:	Lagranjiyen fonksiyoneli
$\boldsymbol{\psi}$	:	Önce keyfi bir madde alanı, sonra Dirac spinör alanı
$\boldsymbol{\gamma_a}$	:	Dirac matrisleri veya $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ Clifford cebirinin üreticileri
$\boldsymbol{\sigma_{ab}}$	:	$SO(1,1)$ Lorentz grubunun üreticilerti

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda bana sabırla yol gösteren, gerekli yerlerde müdahale ederek öğrenme sürecime de büyük katkı sağlayan, tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Muzaffer ADAK'a içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte bana psikolojik olarak hep destek olan sevgili eşim Gülistan Kök'e, yine birçok konuda desteklerini esirgemeyen aileme ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Fizikte, binbir gece masallarını anımsatan, tarihteki pek muhtemel ilk önemli adım; Tycho Brahe'nin astronomik gözlemlerineden yararlanarak 1609 yılında yayımladığı, gezegensel hareketleri açıklayan iki yasayla Kepler'e aittir. İlk yasada gezegenlerin eliptik bir yörüngede döndüğünü, ikinci yasada ise gezegenlerin eşit zaman aralıklarında eşit alanlar taradıklarını matematiksel olarak gösterdi. 1619 yılında yayımladığı üçüncü yasada ise, gezegenin periyodunun karesiyle güneşe ortalama uzaklığının küpünün doğrudan orantılı olduğunu göstermiştir.

Masalın ikinci bölümünde ise Isaac Newton sahne almış ve 1687 yılında çok meşhur *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica* (Doğal Felsefenin Matematiksel İlkeleri) kitabını yayımlayarak aslında felsefe ve matematik arasında eşi görülmemiş bir köprü kurmuştur. Kitabında ünlü hareket yasalarını anlatmış, klasik mekaniğin temellerini atmıştır. Bu eserinde Newton, dünya üzerinde hareket eden cisimler ile gökyüzünde hareket eden gök cisimlerinin aynı fizik yasalarına uydukları sonucuna varmıştır. Böylece gök cisimlerinin (ay ve gezegenler) hareketlerini tarif eden bir matematiksel ifade yazmıştır. Somut olarak Güneş'in Merkür'e uyguladığı kütleçekim kuvvetini aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \tag{1.1}$$

Burada G Newton evrensel çekim sabiti, M Güneş'in kütlesi, m Merkür'ün kütlesi, r Güneş'in kütle merkezi ile Merkür'ün kütle merkezi arasındaki mesafe ve $\hat{r}$ ise M'den m'ye doğru yönü gösteren birim vektördür. Baştaki eksi işareti bu kuvvetin hep çekici olduğunu gösterir. Bu denkleme Newton'un kütleçekim teorisi denir.

1900'lü yılların başlarına kadar neredeyse mükemmel olduğu düşünülen bu teori, dahiyane bir bakış açısıyla yirminci yüzyılın başlarında yepyeni bir şekil almıştır. 1905 yılında Alber Einstein *Zur Elektrodynamik Bewegter Körper* (Hareketli Cisimlerin Elektrodinamiği Üzerine) isimli makalesini yayımlamıştır. Bu yıl fizikte tam olarak bir milattır. Einstein'a göre zaman, kütle, uzunluk gibi kavramlar görecelidir. Yani yüksek hızlarda hareket eden cisimlere baktığımızda zamanın yavaşladığını, kütlenin arttığını ve uzunluğun kısaldığını görürüz. Bu sonuçların yardımıyla zaman olgusu ile uzay olgusunu tek bir uzayzaman olgusu olarak birleştirmiştir. Einstein'ın bir başka buluşu ise; büyük küçük herkesin beynine kazınmış olan kütle ve enerji arasındaki ünlü $E = mc^2$ formülüdür. Yani, kütle ve enerji aslında biri birine dönüşebilmektedir. Bunun sonucunda da önce ayrı olgular olan enerji ile momentum artık tek bir olgu olan enerjimomentum olgusu altında birleşmiştir.

Diğer taraftan, zamanın göreli olması bulgusu Newton kütleçekim teorisiyle uyumlu değildir. Ayrıca, gezegenlerin hareketlerini gözlemlemede ve ölçmede yeni deneysel teknikler ortaya çıktıkça Newton kütleçekim teorisinde bazı yetersizlikler ortaya çıkmıştır. Bu yetersizlikleri ortadan kaldırma gayretiyle 1915 yılında Einstein meşhur genel görelilik teorisini yayımlamıştır. Einstein, bu makalesinde kütleçekim ivmesiyle kinematikteki ivmenin aslında aynı şey olduğunu geometrik olarak ispatlamıştır ve uzayzamanın düz değil, eğri olduğunu göstermiştir. Bunların sonucunda geometrik kavramlar yardımıyla ünlü genel görelilik teorisini yazmıştır.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

Burada $R_{\mu\nu}$ Ricci eğriliği, $\mathcal{R}$ Riemann eğrilik skaleri, $g_{\mu\nu}$ Riemann metriği, κ içinde G'nin de olduğu bağlanma sabiti ve $T_{\mu\nu}$ içinde kütlenin de olduğu enerjimomentum tensörüdür. Genel görelilik teorisi Einstein'ın kütleçekim teorisidir. Kütleçekim alanının şiddeti zayıf ve cisimlerin hızları düşükse, Einstein kütleçekim teorisi Newton kütleçekim teorisine dönüşür. Bizim de bu tezde odak noktamız Einstein kütleçekim teorisi ve onun ötesi olacaktır.

Einstein'ın kütleçekim teorisi güneş sisteminde gözlemsel sonuçlarla mükemmel bir uyum içinde olsa da son dönemdeki astrofiziksek ve kozmolojiksel gözlemler ve ayrıca genel görelilik teorisinin kuantizasyonu yönündeki boşa çıkan çabalar genel göreliliğin yeniden düzenlenmesi gerektiği yönünde güçlü sinyaller vermektedir (Hehl ve diğ. 1995). Bu birçok yolla başarılabilir ancak biz bu tez çalışmasında Rimeannsal olmayan bir geometriyle bunu yapmaya çalışacağız. Bunu yaparken eğriliğin yanında nonmetrisiti tensörünü de hesaba katıyoruz.

Dirac denklemi, parçacık fiziğinde, A.P. Dirac tarafından türetilmiş rölativistik Schrödinger denklemidir. Serbest parçacık veya elektromanyetik alanla etkileşen parçacık durumlarında paritenin simetrik olduğu elektronlar ve kuarklar gibi bütün spini 1/2 olan kütleli parçacıkları tanımlar. Hem kuantum mekaniği hem de özel görelilik ile uyumludur. Peki, Dirac denklemini eğri uzayzamanda yazmak mümkün müdür? Evet, mümkündür. Düz uzayzaman olan Minkowski geometrisinde yazılan Dirac denklemi, çok-ayaklar ve kütleçekim spin bağlantıları kullanılarak, eğri uzayzaman için yeniden formüle edilebilir. Çok-ayak, sabit Dirac matrislerinin her bir uzayzaman noktasında hareket etmesine izin veren bir yerel durgun çerçeve tanımlar. Bu yolla Dirac denklemi, eğri uzayzamanda aşağıdaki gibi yazılır (Pollock 2010), (Arminjon ve Reifler 2013).

$$i\gamma^a h^\mu{}_a D_\mu \Psi - m\Psi = 0 \tag{1.3}$$

Burada $h^\mu{}_a$ çok-ayak ve $D_\mu := \iota_\mu D$ fermiyonik alanlar için $\partial/\partial x^\mu$ baz vektörüne göre kovaryant türevidir. Dirac alanını teze dahil ederek kuantum teorisinde, kütleçekim alanının fermiyonik parçacıklara etkisini de hesaba katacağız. Böylece yeni kütleçekim teorisinin kuantumlanması için bir ilerleme kaydetmeyi umut ediyoruz.

Diğer taraftan, nonlineer çiftlenimli diferansiyel denklemlerden oluşan genel görelilik teorisinin fiziksel etkilerini araştırmak için sıklıkla bazı basitleştirici kabuller aranır (Adak ve Dereli 2008) . Düşük enerji durumu ve statik limit durumu zamansal Killing vektörünün varlığını varsayarak elde edilir. Ancak, bu tür konfigürasyonların dinamikleri yoktur. Diğer yandan, keyfi enerji ölçeklerinde simetrik limitler, bir veya daha fazla uzaysal Killing vektörü varsayarak elde edilir. Örneğin, küresel simetri varsayımı, (t, r) koordinatlarında etkin bir 2-boyutlu kütleçekim modelinin integrali üstündeki kütleçekimsel etkiyi azaltır. Genel olarak 2-boyutlu kütleçekim modellerinin incelenmesi, kuantum kütleçekimi ile ilgili temel soruların ele alınmasına izin verir ve daha yüksek boyutlarda işlemleri zorlaştıran önemli teknik komplikasyonları atlar. O sebeple, matematik zorlukları azaltıp fiziksel yorumlar elde edebilmek için 2-boyutlu uzayzamanda çalışacağız.

2. TEMEL MATEMATİK ARAÇLAR

2.1 Temel Tanımlar ve Kavramlar

Bu tez çalışmasında iki boyutta çalışacağız. Ancak bu bölümde genel olarak n boyutlu bir manifold üzerine kurulan geometri üzerine temel tanım, kavram ve işlemleri özetleyeceğiz. Genel olarak uzayzaman (veya geometri) $\{M, g, \nabla\}$ üçlüsüyle ifade edilir. Burada M niceliği yönlenebilir ve türevlenebilir n boyutlu bir manifoldu, g niceliği (0,2)-tipi simetrik ve dejenere olmayan metrik tensörünü, ∇ niceliği bağlantıyı temsil eder. Metrik tensörü (i) uzunluğu ölçmek (ii) açıyı ölçmek (iii) indisleri aşağı/yukarı hareket ettirmek için kullanırız. Bağlantıyı da tensörleri ve spinörleri paralel taşımak için kullanırız.

M üzerindeki herhangi bir p noktasının koordinatlarını $x^\alpha(p)$ ile gösterelim. Burada $\alpha = \hat{0}, \hat{1}, \cdots, \hat{n} - \hat{1}$ koordinat indisidir. $x^\alpha(p)$ niceliğine koordinat fonksiyonları da denir. En genelde her bir koordinatın artış yönünde koordinata teğet bir vektör tanımlanır. Buna göre $x^\alpha(p)$ koordinatına teğet olan vektörü $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p)$ kısmi türevi ile göstereceğiz. Bu teğet vektörler lineer bağımsız oldukları için aynı zamanda baz vektörler olarak da adlandırılırlar. Bu baz vektörlerin doldurduğu $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p)\right\}$ kümesine M'nin p noktasında kurulan koordinat çerçevesi diyeceğiz ve bundan sonra genel olarak kısaca $\{\partial_\alpha(p)\}$ ile göstereceğiz. Zaman zaman ihtiyaç hissedildiğinde açık halini de kullanacağız. Baz vektörlerin doldurduğu kümeye diferansiyel geometride teğet (tanjant) uzayı denir. Bu nedenle $T_p(M) = \{\partial_\alpha(p)\}$ yazıyoruz. M üzerindeki bütün p noktalarında kurulan koordinat çerçevelerinin bileşimine koordinat teğet demeti denir. Bu çalışmada bunu $CT(M)$ ile göstereceğiz, $CT(M) = \cup_{p\in M} T_p(M)$. Lineer cebirden bilindiği üzere her vektör uzayının bir duali vardır. Yukarıda M'nin p noktasında tanımladığımız koordinat baz vektörlerinin, $\partial_\alpha(p)$, ürettiği dual vektörleri $dx^\beta(p)$ ile göstereceğiz ve koordinat baz kovektörleri adını vereceğiz. Vektörler ile kovektörler arasındaki dualite ilişkisi aşağıdaki bağıntı ile verilir.

$$dx^\alpha(p)[\partial_\beta(p)] = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}(p) = \delta^\alpha_\beta \tag{2.1}$$

burada δ^α_β Kronecker sembolüdür. Koordinat baz kovektörlerinin doldurduğu kümeye kısaca koordinat kobazı da deriz, $\{dx^\beta(p)\}$. Yukarıda tanımladığımız dualite bağıntısının bir sonucu olarak $T_p(M)$ teğet (tanjant) uzayının duali olan koteğet (kotanjant) uzayını tanımlıyoruz ve $T^*_p(M)$ ile gösteriyoruz. Koteğet uzaylarının birleşimiyle de $CT(M)$'nin duali olan $CT^*(M)$'yi yani koordinat koteğet demetini tanımlıyoruz, $CT^*(M) = \cup_{p\in M} T^*_p(M)$.

Lineer cebirden çok iyi bilindiği üzere bir baz vektörler kümesinden Gram-Schmidt yöntemiyle ortonormal bir baz kümesi elde edilebilir. Bunun için vektörlerin boylarını ve aralarındaki açıları tanımlayan bir skaler çarpım işlemine ihtiyaç vardır. Bu işlemi diferansiyel geometride metrik tensörü yardımıyla yaparız. Bu nedenle x^α koordinat sisteminde g metrik tensörünü aşağıdaki gibi ifade ediyoruz.

$$g = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \otimes dx^\beta \tag{2.2}$$

Burada $\otimes$ simetrik tensörel çarpımı temsil eder, yani $dx^\alpha \otimes dx^\beta = dx^\beta \otimes dx^\alpha$, bunun soncu olarak da $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)$. İlaveten, $g_{\alpha\beta}(x) = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ niceliğine metriğin koordinat bileşenleri denir. Metriğin koordinat bileşenleri en genelde koordinatlara bağlıdır. Bunu kısaca $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$ olarak gösteriyoruz.

Yukarıda bahsettiğimiz ortonormalleştirme yöntemiyle $\{\partial_\alpha(p)\}$ koordinat çerçevesinden $X_a(p)$ ortonormal çerçeveye geçebiliriz. Burada $a = 0, 1, \cdots, n-1$ ortonormal indis deriz. Bundan sonra Yunan harfleriyle gösterilen indislere koordinat indisleri ve Latin harfleriyle gösterilen indislere ortonormal indis diyeceğiz. $\partial_\beta(p)$'nın dualini $dx^\alpha(p)$ ile gösterdiğimiz gibi $X_b(p)$'nin dualini $e^a(p)$ ile göstereceğiz. Bu durumda (2.1) ile verilen dualite bağıntısı aşağıdaki hali alır.

$$e^a(p)[X_b(p)] = \delta^a_b \tag{2.3}$$

Dikkat! Burada (2.1) denklemindeki gibi $\partial X_b/\partial X_a$ gibi bir türev yazmayınız, çünkü X_a niceliği koordinat değildir. (2.3) denklemi sadece e^a ile X_b arasındaki dualite bağıntısıdır. Terminoljide $e^a(p)$'ya ortonormal baz kovektörü ve $\{e^a(p)\}$ kümesine de ortonormal koçerçeve denir. Koordinat koçerçevesinde (2.2) ile verilen metrik tensörü ortonormal korçeçevede aşağıdaki gibi olur.

$$g = \eta_{ab} e^a(x) \otimes e^b(x) \tag{2.4}$$

Burada $g(X_a, X_b) = \eta_{ab} = \eta_{ba}$ metrik bileşenlerinin koordinatlardan bağımsız olduğuna, fakat ortonormal baz kovektörlerinin koordinata bağlı olduğuna, $e^a = e^a(x)$, özellikle dikkat edilmelidir. Ortonormal metrik bileşeni olan η_{ab} genel olarak köşegen elemanları ± 1, diğer elemanları sıfır olan $n \times n$ matris olarak temsil edilebilir. Köşegen elemanların hepsi $+1$ olursa η_{ab}'ye Euclid metriği, ± 1 karışık olursa η_{ab}'ye Minkowski metriği denir.

Koordinat baz vektörlerinin doldurduğu teğet uzaylarının birleşimine koordinat teğet demeti demiştik ve $CT(M)$ ile göstermiştik. Şimdi de ortonormal baz vektörlerinin oluşturduğu teğet uzaylarının birleşimine ortonormal teğet demeti adını vereceğiz ve $OT(M)$ ile göstereceğiz. Dualite yardımıyla koordinat koteğet demetine $CT^*(M)$ karşılık ortonormal koteğet demeti $OT^*(M)$ gelecektir.

$T_p(M)$ teğet uzayında koordinat baz vektörlerinden ortonormal baz vektörlerine geçişi $h^\alpha{}_a$ ve tersine ortonormal baz vektörlerinden koordinat baz vektörlerine geçişi $h^a{}_\alpha$ nicelikleriyle yapacağız. Bunlara literatürde çok-ayaklılar denir (Adak ve diğ. 2006).

$$\begin{aligned} X_a(x) &= h^\alpha{}_a(x)\partial_\alpha \\ \partial_\alpha &= h^a{}_\alpha(x) X_a(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada çok-ayaklıların koordinata bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Benzer olarak $T_p^*(M)$ koteğet uzayında koordinat baz kovektörleri ile ortonormal baz kovektörleri arasındaki ilişki de aynı çok-ayaklılar yardımıyla yapılır.

$$\begin{aligned} e^a(x) &= h^a{}_\alpha(x) dx^\alpha \\ dx^\alpha &= h^\alpha{}_a(x) e^a(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tanımladığımız bu koordinattan ortonormale ve tersi geçiş bağıntılarını yukarıdaki (2.1) ile (2.3) dualite bağıntılarında kullanırsak çok-ayaklılar arasında aşağıdaki ilişkilere ulaşırız.

$$\begin{aligned} h^{\alpha}{}_{a}(x)h^{a}{}_{\beta}(x) &= \delta^{\alpha}_{\beta} \\ h^{a}{}_{\alpha}(x)h^{\alpha}{}_{b}(x) &= \delta^{a}_{b} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bu tezde yoğun olarak dış cebir kullanacağız. Dış cebir konusunu 3. Bölümde ayrıca anlatıyoruz. Yukarıda tanımladığımız baz kovektörlerine dış cebirde baz 1-form adı verilir. Buna göre dx^{α} niceliğine koordinat baz 1-formu ve e^{a} niceliğine de ortonormal baz 1-form diyeceğiz. Dış cebir dilinde dx^{α} daki d operatörü x^{α} 0-formunu dx^{α} 1-formuna dönüştüren dış türev operatörü olarak isimlendirilir. Dış cebirde dış türev Poincare leması olarak bilinen $d^2 = 0$ özelliğine sahiptir. Diğer taraftan, literatürde koçerçevenin dış türevine anholonomluk 2-formu denir (Kiefer 1987). Sonuç olarak, Poincare leması sayesinde $d(dx^{\alpha}) = 0$ olduğundan, dx^{α} niceliği holonomik 1-form olarak da bilinir. Fakat, ortonormal 1-formun $e^{a}(x)$ dış türevi en genelde sıfır olmak zorunda değildir, $de^{a}(x) \neq 0$. Bu nedenle $e^{a}(x)$ niceliği anholonomik 1-form olarak da adlandırılabilir. Bu sınıflamaya bağlı olarak, litaratürde koordinat indisleri bazen holonomik indisler ve ortonormal indisler de anholonomik indisler olarak adlandırılır. Sonuç olarak koordinat çerçevesinin dış türevi sıfırken, ortonormal çerçevenin dış türevi sıfır değildir. Dış türevin metrik bileşenlerine etkisine bakacak olursak tam tersini görürüz, $dg_{\alpha\beta}(x) \neq 0$ ve $d\eta_{ab} = 0$. O halde, hem koçerçevenin hem de metrik bileşeninin sıfırdan farklı olduğu bir çerçeve olabilir mi? Evet, olabilir. Buna karışık çerçeve ismini veriyoruz. Böyle bir durumu aşağıdaki metrik ile ifade edebiliriz.

$$g = g_{AB}(x)e^{A}(x) \otimes e^{B}(x) \tag{2.8}$$

Burada $dg_{AB}(x) \neq 0$ ve $de^{A}(x) \neq 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Bundan sonra büyük Latin harflerine karışık indis; $A, B, \cdots = \bar{0}, \bar{1}, \cdots, \bar{n} - \bar{1}$, küçük Latin harflerine ortonormal indisi; $a, b, \cdots = 1, 2, \cdots, n - 1$ ve küçük

Yunan harflerine koordinat indisi; $\alpha, \beta, \cdots = \hat{0}, \hat{1}, \cdots, \hat{n} - \hat{1}$ diyeceğiz. Yukarıda tanımladığımız çok-ayaklılara benzer yeni dönüşüm elemanları bularak karışık çerçeveye geçebilir yada karışık çerçeveden çıkabiliriz. Ama literatürde neredeyse hiç bir zaman karışık çerçevede hesap yapılmaz. Çerçevelerin sınıflandırılması için Tablo 2.1 bakınız.

Tablo 2.1: Koordinat çerçevesi, ortonormal çerçeve ve karışık çerçeve

	Koordinat çerçevesi $g = g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$	Ortonormal çerçeve $g = \eta_{ab} e^{a}(x) \otimes e^{b}(x)$	Karışık çerçeve $g = g_{AB}(x) e^{A}(x) \otimes e^{B}(x)$
Metrik bileşeni	$dg_{\alpha\beta} \neq 0$	$d\eta_{ab} = 0$	$dg_{AB} \neq 0$
Koçerçeve	$d(dx^{\alpha}) = 0$	$de^{a} \neq 0$	$de^{A} \neq 0$

Yönlenebilir n boyutlu M manifoldunun yönelimini Hodge haritası $*$ ile sabitleriz.

$$*1 = \frac{1}{n!} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \tag{2.9}$$

Burada $\wedge$ dış cebirde dış çarpım operatörüdür, $\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ tümüyle antisimetrik Levi-civita tensörüdür. Manifoldun yönelimini $\epsilon_{01 \cdots (n-1)} = +1$ seçerek sabitleyeceğiz. Genellikle 1-formların dış çarpımlarını aşağıdaki gibi kısaltarak yazarız.

$$e^{a_1 a_2 \cdots a_n} \equiv e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \tag{2.10}$$

∇ bağlantısı, bağlantı 1-form $\omega^{a}{}_{b}$ terimleriyle tam olarak tanımlanır. Genel olarak bağlantı niceliği tensörlerin (ve hatta spinörlerin) uzayzamanda nasıl paralel taşıncağını belirleyen kuralı temsil eder. Tensör değillerdir. Bunu açıkça göstermek için koordinat çerçevesinde ve ortonormal çerçevede bağlantı 1-formunun çok-ayaklar yardımıyla biribirine dönüşüm kuralını aşağıdaki bağıntılar ile veriyoruz.

$$\begin{aligned} \omega^{a}{}_{b} &= h^{a}{}_{\alpha} \omega^{\alpha}{}_{\beta} h^{\beta}{}_{b} + h^{a}{}_{\alpha} dh^{\alpha}{}_{b} \\ \omega^{\alpha}{}_{\beta} &= h^{\alpha}{}_{a} \omega^{a}{}_{b} h^{b}{}_{\beta} + h^{\alpha}{}_{a} dh^{a}{}_{\beta} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Bu denklemlerde eşitliğin sağındaki ikinci terimlere dikkat edilmelidir. (2.5) ile verilen baz vektör dönüşümlerinde ve (2.6) ile verilen baz kovektör dönüşümlerinde eşitliğin sağında ikinci terim yoktur. Çünkü baz vektörleri (0,1)-tipi tensör, baz kovektörleri de (1,0)-tipi tensördür. Bağlantı 1-formu $\omega^a{}_b$'ye benzeyen iki indisli $\mathfrak{T}^a{}_b$ gibi bir tensör nicelik olursa, buna (1,1)-tipi bir tensör denir. Böyle bir tensörün dönüşümü de aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^a{}_b &= h^a{}_\alpha \mathfrak{T}^\alpha{}_\beta h^\beta{}_b \\ \mathfrak{T}^\alpha{}_\beta &= h^\alpha{}_a \mathfrak{T}^a{}_b h^b{}_\beta \end{aligned} \tag{2.12}$$

Buradan da görüleceği gibi tensör nicelik ile bağlantı nicelik arasında çok temel bir fark vardır. Bu farkı görmenin yollarından biri dönüşüm kuralına bakmatır. Elimizde bir bağlantı varsa, bir tensörün (ve spinörün) kovaryant türevini tanımlayabiliriz. Bu çalışmada herhangi bir (p, q)-tipi tensör-değerli r-formunun, $\mathfrak{T}^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q}$, kovaryant dış türevini ortonormal çerçevede aşağıdaki gibi yazacağız.

$$\begin{aligned} D\mathfrak{T}^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q} = d\mathfrak{T}^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q} + \omega^{a_1}{}_c \wedge \mathfrak{T}^{c a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q} + \cdots + \omega^{a_p}{}_c \wedge \mathfrak{T}^{a_1 a_2 \cdots c}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q} \\ -\omega^c{}_{b_1} \wedge \mathfrak{T}^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{c b_2 \cdots b_q} - \cdots - \omega^c{}_{b_q} \wedge \mathfrak{T}^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots c} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Burada d dış türevi, D kovaryant dış türevi göstermektedir.

Şimdi elimizde üç tane temel nicelik var; metrik bileşeni, $g_{AB}(x)$, koçerçeve, $e^A(x)$, bağlantı 1-formu, $\omega^A{}_B(x)$. Tanımlamaları olabildiğince genel tutmak için bütün nicelikleri bu noktada karışık çerçevede yazıyoruz. O nedenle indisleri büyük Latin harfleriyle gösteriyoruz. Bu üç tane temel nicelik yardımıyla üç tane temel tensör nicelik tanımlarız. Aşağıdaki üç denkleme birlikte Cartan yapı denklemleri denir.

$$Q_{AB} := -\frac{1}{2} D g_{AB} = \frac{1}{2}(-dg_{AB} + \omega_{AB} + \omega_{BA}) \tag{2.14}$$

$$T^A := De^A = de^A + \omega^A{}_B \wedge e^B \tag{2.15}$$

$$R^A{}_B := D\omega^A{}_B := d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B \tag{2.16}$$

Burada Q_{AB} niceliğine nonmetrisiti tensör 1-formu, T^A niceliğine burulma tensör 2-formu ve $R^A{}_B$ niceliğine eğrilik tensör 2-formu denir. Tanım olarak nonmetrisiti

1-formu simetriktir, $Q_{AB} = Q_{BA}$, ancak eğrilik 2-formunda genel olarak böyle bir simetri yada antisimetri yoktur. Eğriliğin tanımında bağlantı 1-formunun kovaryant dış türevine benzer bir işlem yazdığımıza dikkat edilmelidir. En genelde tensör niceliklerin kovaryant dış türevinin tanımlı, fakat bağlantının kovaryatnt dış türevinin tanımlı olmadığı unutulmamalıdır. O nedenle $D\omega^A{}_B$'dan hem önce hem de sonra eşit işareti yazmadık. Sadece şekilsel benzerlik için $D\omega^A{}_B$ kullandık. Tanımladığımız üç tane tensör formların kovaryant dış türevleri Bianchi özdeşliklerini verir.

$$DQ_{AB} = \frac{1}{2}(R_{AB} + R_{BA}) \tag{2.17}$$

$$DT^A = R^A{}_B \wedge e^B \tag{2.18}$$

$$DR^A{}_B = 0\,. \tag{2.19}$$

Burada ilk denkleme sıfırıncı Bianchi özdeşliği, ikinci denkleme birinci Bianchi özdeşliği ve son denkleme de ikinci Bianchi özdeşliği denir.

Cartan yapı denklemleri geometrinin temel nicelikleri olan nonmetrisiti tensörünü, burulma tensörünü ve eğrilik tensörünü tanımladığı için onları koordinat çerçevesinde, $de^A \to ddx^\alpha = 0$,

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-dg_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}) \tag{2.20}$$

$$T^\alpha = \omega^\alpha{}_\beta \wedge dx^\beta \tag{2.21}$$

$$R^\alpha{}_\beta = d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\gamma \wedge \omega^\gamma{}_\beta \tag{2.22}$$

ve ortonormal çerçevede, $dg_{AB} \to d\eta_{ab} = 0$,

$$Q_{ab} = \frac{1}{2}(\omega_{ab} + \omega_{ba}) \tag{2.23}$$

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{2.24}$$

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{2.25}$$

olarak yeniden yazıyoruz.

Bunların geometrik anlamları, M ile M'nin üzerinde kurulan teğet demeti resimi birlikte çizildiğinde ortaya çıkar. Bir vektörü M'nin üstündeki kapalı bir eğri üzerinde paralel taşıdığımızı düşünelim. M'de vektör başladığı noktaya geri gelecektir. Şimdi M'nin üzerindeki demette neler olduğuna bakalım. Demette ilk vektör ile son vektör aynı noktada değilse $T^a \neq 0$, ilk vektör ile son vektörün boyları eşit değilse $Q_{ab} \neq 0$ ve ilk vektör ile son vektör arasında bir açı varsa $R^a{}_b \neq 0$ anlamına gelir.

Geometri (veya uzayzaman) nonmetrisiti, burulma ve eğrilik tensörlerinin sıfır olup olmamasına göre sınıflandırılır. Tablo 2.2'de literatürde en çok çalışılan durumları listeledik. En genelde, nonmetrisiti 1-formu, iz 1-formu, $Q = \eta^{ab} Q_{ab}$, ve iz harici diğer bileşenler 1-formu, $\hat{Q}_{ab}$, olarak ayırılır; $Q_{ab} = \hat{Q}_{ab} + \frac{1}{n}\eta_{ab} Q$ burada $\eta^{ab}\hat{Q}_{ab} = 0$ olur, çünkü $\eta_{ab}\eta^{ab} = \delta^a_a = n$. Ayrıca, ortonormal çerçevede metrik bileşenleri hiç -1 olmadan sadece $+1$'lerden oluşursa, bunu Kronecker deltası ile gösteririz; $g = \delta_{ij} e^i \otimes e^j$ burada $\delta_{ij} = diag(+1, +1, \cdots, +1)$ ve $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Tablo 2.2: Metrik, eğrilik, burulma ve nonmetrisiti birlikte geometriyi belirler. Euclid geometrisine ait metriğin ortonormal çerçevede bileşenleri Kronecker deltası ile temsil edilir; $g = \delta_{ij} e^i \otimes e^j$ burada $\delta_{ij} = diag(+1, +1, \cdots, +1)$. Tabloda $Q_{ab} = \hat{Q}_{ab} + \frac{1}{n}\eta_{ab} Q$ öyle ki $\eta_{ab}\hat{Q}_{ab} = 0$

g	$R^a{}_b$	T^a	Q_{ab}	*Geometrinin adı*
δ_{ij}	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Euclid geometrisi
η_{ab}	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Minkowski geometrisi
δ_{ij}	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	Riemann geometrisi
η_{ab}	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	Pseudo-Riemann geometrisi
		$\neq 0$	$= 0$	Riemann-Cartan geometri
	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Teleparalel geometri
		$\neq 0$	$= 0$	Weitzenböck geometrisi
		$= 0$	$\neq 0$	Simetrik teleparalel geometri
	$\neq 0$	$= 0$	$Q \neq 0, \hat{Q}_{ab} = 0$	Riemann-Weyl geometrisi
		$\neq 0$	$\neq 0$	Metrik efayn geometri

2.2 Tüm Bağlantı 1-Formunun Ayrışması

Karışık çerçevede tüm bağlantı 1-formu aşağıdaki gibi ayrışabilir (Adak 2018).

Bu ayrışım tektir.

$$\omega^A{}_B = \underbrace{(g^{AC}dg_{CB} + p^A{}_B)/2 + \tilde{\omega}^A{}_B}_{Metrik} + \underbrace{K^A{}_B}_{Burulma} + \underbrace{q^A{}_B + Q^A{}_B}_{Nonmetrisiti} \tag{2.26}$$

Burada $\tilde{\omega}^A{}_B$ niceliğine Levi-Civita bağlantı 1-formu denir ve $\tilde{\omega}_{AB} = -\tilde{\omega}_{BA}$ antisimetri özelliğine sahiptir.

$$\tilde{\omega}^A{}_B \wedge e^B = -de^A \tag{2.27}$$

$K^A{}_B$ niceliğine koburulma tensör 1-formu denir ve bu da antisimetriktir, $K_{AB} = -K_{BA}$.

$$K^A{}_B \wedge e^B = T^A \tag{2.28}$$

ve tensör olmayan p_{AB} 1-form niceliği ile tensör olan q_{AB} 1-form niceliği

$$p_{AB} = -(\imath_A dg_{BC})e^C + (\imath_B dg_{AC})e^C \tag{2.29}$$

$$q_{AB} = -(\imath_A Q_{BC})e^C + (\imath_B Q_{AC})e^C \tag{2.30}$$

olarak tanımlıdır, her ikisi de antisimetriktir. Burada $\imath_A \equiv \imath_{X_A}$ niceliği dış cebirde X_A baz vektörüne göre iç çarpım operatörüdür. Kısaca X_B baz vektörü ile e^A baz kovektörü arasındaki dualiteyi iç çarpım operatörü cinsinden şöyle ifade ederiz.

$$\imath_B e^A = \delta^A_B \tag{2.31}$$

(2.26) ile verilen ayrışma kendi içinde tutarlıdır. Bunu görmek için (2.26) deklmenini sağdan $\wedge e^B$ ile çarpmak ve yukarıdaki tanımları kullanmak yeterlidir. Karışık çerçevede $dg_{AB} \neq 0$ ve nonmetrisiti olduğunda $Dg_{AB} \neq 0$ olduğu için indisleri d ve D önünde düşey olarak hareket ettirirken, özen gösterilmelidir. Tüm bağlantı 1-formunun simetrik kısmı ve antisimetrik kısmı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\omega_{(AB)} = Q_{AB} + \frac{1}{2}dg_{AB} \tag{2.32}$$

$$\omega_{[AB]} = \frac{1}{2}p_{AB} + \tilde{\omega}_{AB} + K_{AB} + q_{AB} \tag{2.33}$$

Geometride eğer sadece $Q_{AB} = 0$ olursa bağlantıya metrik uyumlu bağlantı, eğer hem $Q_{AB} = 0$ hem de $T^A = 0$ olursa bağlantıya Levi-Civita bağlantısı adı verilir (Dereli ve Tucker 1994). Örneğin Einstein'ın genel rölativite teorisinde bağlantı Levi-Civita bağlantısıdır. Daha önce söylediğimiz gibi literatürde ya koordinat çerçevesinde hesap yapılır ya da ortonormal çerçevede hesap yapılır (Benn ve diğ. 1981). Bu nedenle (2.26) ile verilen ayrışmanın koordinat çerçevesinde aşağıdaki biçime geldiğini not edelim.

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \underbrace{g^{\alpha\sigma}(\iota_{\gamma}dg_{\sigma\beta} + \iota_{\beta}dg_{\sigma\gamma} - \iota_{\sigma}dg_{\beta\gamma})dx^{\gamma}/2}_{Metrik} + \underbrace{K^{\alpha}{}_{\beta}}_{Burulma} + \underbrace{q^{\alpha}{}_{\beta} + Q^{\alpha}{}_{\beta}}_{Nonmetrisiti} \qquad (2.34)$$

Burada $\iota_{\alpha} \equiv \iota_{\partial_{\alpha}}$ iç çarpım operatörü $\iota_{\beta}dx^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ eşitliğini sağlar ki bu da (2.1) ile verilen dualite bağıntısının başka bir gösterimidir. Ayrıca $\iota_{\gamma}dg_{\sigma\beta} = \partial_{\gamma}g_{\sigma\beta}$ ve $\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}dx^{\gamma}$ yazılırsa denklemin sağ tarafındaki ilk terimin Christoffel sembollerini gösterdiği görülecektir.

Bu tez çalışmasında biz seçilen koordinat sisteminden bağımsız olarak hep ortonormal çerçevede çalışacağımız için (2.26) ayrışımının ortonormal çerçevede aşağıdaki hale geldiğini açıkça yazmakta fayda vardır.

$$\omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} + K_{ab} + q_{ab} + Q_{ab} \qquad (2.35)$$

Ortonormal çerçevede Levi-Civita bağlantı 1-formunu de^a cinsinden ve koburulma tensör 1-formunu da T^a cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\tilde{\omega}_{ab} = \frac{1}{2}\left[-\iota_a de_a + \iota_b de_a + (\iota_a \iota_b de_c)e^c\right] \qquad (2.36)$$

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\left[\iota_a T_b - \iota_b T_a - (\iota_a \iota_b T_c)e^c\right] \qquad (2.37)$$

Burada $\iota_a \equiv \iota_{X_a}$ iç çarpım operatörü $\iota_b e^a = \delta^a_b$ ilişkisini sağlar ki bu da (2.3) ile verilen dualite eşitliğinin başka türlü bir gösterimidir. Son olarak q_{ab} tensör niceliği nonmetrisiti tensör 1-formu cinsinden tanımlanır.

$$q_{ab} = -(\iota_a Q_{bc})e^c + (\iota_b Q_{ac})e^c \qquad (2.38)$$

Hesap yaparken aşağıdaki özdeşlikleri sıkça kullanacağız.

$$\begin{aligned}
&D * e_{a_1} = -Q \wedge *e_{a_1} + *e_{a_1 a_2} \wedge T^{a_2} \\
&D * e_{a_1 a_2} = -Q \wedge *e_{a_1 a_2} + *e_{a_1 a_2 a_3} \wedge T^{a_3} \\
&\vdots \\
&D * e_{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = -Q \wedge *e_{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + e_{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n} \wedge T^{a_n} \\
&D * e_{a_1 a_2 \cdots a_n} = -Q \wedge *e_{a_1 a_2 \cdots a_n} \\
&D\eta_{ab} = -2Q_{ab}\,, \quad D\eta^{ab} = +2Q_{ab}\,, \quad D\delta^a_b = 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Burada $Q := Q^a{}_a = \eta^{ab} Q_{ab} = \omega^a{}_a$ nonmetrisiti tensör 1-formunun veya tüm bağlantı 1-formunun iz 1-formudur. Son özdeşliklere baktığımızda görüyoruz ki ortonormal çerçevede hesap yaparken ortonormal indislerin sadece D önünde düşey hareketlerine dikkat etmeliyiz. Ortonormal çerçevede indisleri d önünde rahatça düşey hareket ettirebiliriz.

2.3 Genel Lineer Koordinat Dönüşümleri

Fizikte ölçme çok önemlidir ve ölçmeyi yapana da gözlemci denir. Gözlemci bir insan yada ölçme cihazı veya sistemi olabilir. Aynı olayı birden fazla gözlemci ölçebilir ve her gözlemci de kendisi için en uygun koordinat sistemini kurar. Bu durumda gözlem sonuçlarının tutarlı olarak karşılaştırılabilmesi için verilerin birbirine dönüştürülmesi gerekir. Bunun yapılabilmesinin ilk şartı gözlemcilerin kullandıkları koordinat sistemlerinin biribirine dönüşümlerinin belirlenmesidir. Bu nedenle bu kısımda genel koordinat dönüşümlerini inceleyeceğiz. Bir gözlemcinin kurduğu koordinat sistemini x^μ, diğer bir gözlemcinin kurduğu koordinat sistemini de $x^{\mu'}$ ile gösterelim. Genel lineer koordinat dönüşümünde x^μ koordinatlarından $x^{\mu'}$ koordinatlarına geçişi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x^{\mu'} = \Gamma^{\mu'}{}_\mu x^\mu + \xi^{\mu'} \tag{2.40}$$

Burada $\Gamma^{\mu'}{}_\mu = \Gamma^{\mu'}{}_\mu(x)$ niceliği dönüşümün dönme kısmını ve $\xi^{\mu'} = \xi^{\mu'}(x)$ niceliği öteleme kısmını temsil eder. Şimdi eşitliğin iki tarafının da tanım gereği koordinat seçiminden bağımsız olan dış türevini alalım.

$$dx^{\mu'} = \{[\partial_\mu \Gamma^{\mu'}{}_\nu(x)]x^\nu + \Gamma^{\mu'}{}_\mu(x) + \partial_\mu \xi^{\mu'}(x)\}dx^\mu \tag{2.41}$$

Burada $L^{\mu'}{}_\mu(x) := [\partial_\mu \Gamma^{\mu'}{}_\nu(x)]x^\nu + \Gamma^{\mu'}{}_\mu(x) + \partial_\mu \xi^{\mu'}(x)$ ataması yaparak iki farklı koordinat koçerçevesinin biribirine dönüşümünü aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$dx^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\mu dx^\mu \tag{2.42}$$

Bu dönüşüm kuralının öteleme terimi içermediğine dikkat edilmelidir. Bunun yardımıyla (2.40) denklemi ile verilen genel koordinat dönüşümünün ürettiği ortonormal koçerçeve dönüşüm kuralını çok-ayaklar yardımıyla elde edebiliriz.

$$dx^{\mu'} = h^{\mu'}{}_{a'} e^{a'} \quad \text{ve} \quad dx^\mu = h^\mu{}_a e^a \tag{2.43}$$

Burada $h^{\mu'}{}_{a'} = h^{\mu'}{}_{a'}(x'(x))$ ve $h^\mu{}_a = h^\mu{}_a(x)$. Bunları denklemde yerlerine koyduktan sonra $h^{b'}{}_{\mu'} h^{\mu'}{}_{a'} = \delta^{b'}_{a'}$ ilişkisini kullanarak şunu elde ederiz.

$$e^{b'} = L^{b'}{}_b e^b \tag{2.44}$$

Burada $L^{b'}{}_b(x'(x)) := h^{b'}{}_{\mu'} \Omega^{\mu'}{}_\mu h^\mu{}_b$ olarak tanımlanmıştır. Matris gösteriminde bu denklemi $e' = L^{-1}e$ olarak yazabiliriz. O halde, ters dönüşümü $e^a = L^a{}_{a'} e^{a'}$ veya matris gösteriminde $e = Le'$ olarak ifade ederiz. Buna göre $L^a{}_{a'}$ dönüşüm elemanı ile $L^{a'}{}_a$ niceliği birbirinin tersidir; $L^a{}_{a'} L^{a'}{}_b = \delta^a_b$ veya matris notasyonunda $LL^{-1} = 1$. (2.44) dönüşüm kuralında da öteleme teriminin olmadığına dikkat edilmelidir. Son olarak bu dönüşüm kuralı altında ortonormal çerçevede metrik bileşenlerinin nasıl dönüştüğüne bakmak bize dönüşümün grup yapısı hakkında bilgiler verecektir.

$$g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b = \eta_{a'b'} e^{a'} \otimes e^{b'} \tag{2.45}$$

şeklinde yazılır ve her iki çervede $\eta_{ab} = \eta_{a'b'} = \text{diag}(-1, +1, \cdots)$ Minkowski metriğidir. Burada $e^{a'} = L^{a'}{}_a e^a$ ve $e^{b'} = L^{b'}{}_b e^b$ ilişkilerini yerlerine yerleştirirsek

$$\eta_{a'b'} = L^a{}_{a'} \eta_{ab} L^b{}_{b'} \tag{2.46}$$

sonucuna ulaşırız. Matris notasyonunda bu eşitlik aşağıdaki gibi olur.

$$e' = L^{-1}e \quad \rightarrow \quad \eta' = L^T \eta L \tag{2.47}$$

Burada ^{T} simgesi transpoz matrisini belirtir. Genel olarak Minkowski metriğini bu şekilde dönüştüren dönüşüm elemanlarının oluşturduğu gruba Lorentz grubu denir ve $SO(1, n-1)$ olarak gösterilir (Benn ve diğ. 1982). Bu sonuç, bize (2.40) ile verilen genel lineer koordinat dönüşümünden elde edilen dönüşüm elemanlarının ortonormal teğet demette, $OT(M)$, Lorentz grubu oluşturduğunu gösterir.

Şimdi de (1,0)-tipi tensör 1-formu olan ortonormal koçerçevenin (2.40) genel lineer koordinat dönüşümü altında (2.44) kuralına göre dönüştüğünü gördükten sonra koçerçeveden bağımsız olan bağlantı 1-formu için de aşağıdaki dönüşüm kuralını veriyoruz.

$$\omega^{a'}{}_{b'} = L^{a'}{}_a \omega^a{}_b L^b{}_{b'} + L^{a'}{}_a dL^a{}_{b'} \tag{2.48}$$

Matris bunu şöyle ifade edebiliriz; $\omega' = L^{-1}\omega L + L^{-1}dL$. Burada sağdaki ikinci terim özel olarak eklenmiştir. Bu terim sayesinde tensör nicelikler olan nonmetrisiti 1-formu, burulma 2-formu ve eğrilik 2-formu aşağıdaki gibi dönüşür.

$$Q_{a'b'} = Q_{ab} L^b{}_{b'} L^a{}_{a'} L \tag{2.49}$$

$$T^{a'} = L^{a'}{}_a T^a \tag{2.50}$$

$$R^{a'}{}_{b'} = L^{a'}{}_a R^a{}_b L^b{}_{b'} \tag{2.51}$$

Bunları matris formülasyonunda sırasıyla $Q' = QLL$ ve $T' = L^{-1}T$ ve $R' = L^{-1}RL$ olarak iafede edebiliriz. Görüldüğü gibi tensör niceliklerin dönüşümlerinde bağlantının dönüşümünde görülen artık terime benzer terimler gelmez. En temelde tensör ile bağlantı arasındaki fark budur. Bu dönüşüm kurallarının önemli bir sonucu şudur: Bir tensör nicelik bir çerçevede sıfır ise diğer bütün çerçevelerde de sıfırdır. Diğer yandan bağlantı bir çerçevede sıfır iken başka bir çerçevede sıfırdan farklı olabilir. Bu sonucu bazen bağlantı çerçeveye bağlıdır diye ifade ederiz.

3. DIŞ CEBİR

Bu çalışmadaki hesaplarda dış cebir kullanılmıştır. Dış cebirde koteğet demeti uzayının, $T^*(M)$, baz elemanları 1-form olarak adlandırılır. Yani, dx^μ niceliği koordinat baz 1-formu ve e^a niceliği de ortonormal baz 1-formu adını alır. Eğer kovektör çarpım uzayına, $\wedge$ sembolü ile göstereceğimiz tümüyle antisimetrik bir tensör çarpımı koyarsak

$$\underbrace{T^*(M) \wedge \cdots \wedge T^*(M)}_{p-tane} \tag{3.1}$$

elde edilen uzay, p-formlar uzayı olarak adlandırılır ve $\bigwedge^p(M)$ ile gösterilir. En genelde, $\bigwedge^p(M)$ uzayı, linner vektör uzayı yapısındadır. Herhangi bir p-form, $\omega \in \bigwedge^p(M)$, koordinat çerçevesinde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \tag{3.2}$$

Burada $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ tümüyle antisimetrik olduğu için $\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ bileşen 0-formu da bütün indislerinde tümüyle antisimetriktir. Bunu bazen açıkça köşeli parantez ile belirtiriz, $\omega_{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]}$.

$\bigwedge^p(M)$ nesnesi lineer vektör uzayı olarak ele alındığında, $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ niceliğine bu uzayın koordinat bazı, $\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}$ niceliğine de ω'nın koordinat bileşeni denir. p-formlar lineer vektör uzayının boyutu $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ olarak hesap edilir. Buna göre, 0-formlar uzayından başlayarak n-formlar uzayına kadar koordinat bazlarını ve vektör uzayının boyutunu aşağıdaki gibi açıkça yazabiliriz.

p-form Uzayı	Koordinat Bazı	Boyut
$\bigwedge^0(M)$	1	1
$\bigwedge^1(M)$	$\{dx^{\mu_1}\}$	n
$\bigwedge^2(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}\}$	$n(n-1)/2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bigwedge^{n-1}(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{n-1}}\}$	n
$\bigwedge^n(M)$	$dx^{\hat{0}} \wedge \cdots \wedge dx^{\hat{n}-\hat{1}}$	1

Eğer bütün p-fromları birlikte düşünürsek doğrudan toplam uzayı

$$\bigwedge(M) := \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^{p}(M) \tag{3.3}$$

şeklinde gösterilir ve dış cebir olarak adlandırılır. Bu durumda n boyutlu M manifoldu üzerine kurulan $\bigwedge(M)$ dış cebirinin boyutu $\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} = 2^n$ olarak hesap edilir.

3.1 Dış Çarpım

$\bigwedge(M)$ cebirinde iki elemanın çarpımını $\wedge$ sembolü ile göstereceğiz ve adına dış çarpım veya wedge çarpımı diyeceğiz. Dış çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$ dağılma
2. $(a\omega_1) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (a\omega_3) = a(\omega_1 \wedge \omega_3)$ skaler ile çarpım
3. $(\omega_1 \wedge \omega_3) \wedge \omega_4 = \omega_1 \wedge (\omega_3 \wedge \omega_4)$ asosiyatiflik (birleşme)
4. $\omega_1 \wedge \omega_3 = (-1)^{p \cdot q} \omega_3 \wedge \omega_1$ komütatiflik (sıra değiştirme)

Burada $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^p(M)$, $\omega_3 \in \bigwedge^q(M)$, $\omega_4 \in \bigwedge^r(M)$ ve a gerçel bir sayıdır. Genel olarak, $\omega_1 \wedge \omega_3 \in \bigwedge^{p+q}(M)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Yani, p-form ile q-formun dış çarpımı $(p+q)$-form olur. Son özellikten, dış çarpımda sıranın önemli olduğunu görüyoruz.

3.2 Dış Türev

Dış cebirde türev işlemi, bir p-formu $(p+1)$-forma gönderen bir işlem olarak tanımlanır. Bu çalışmada bu işlemi yapan matematiksel nesneyi d ile göstereceğiz ve adına dış türev diyeceğiz.

$$d \quad : \quad \bigwedge^{p}(M) \to \bigwedge^{p+1}(M)$$

Denklem (3.2) ile verilen herhangi bir ω p-formunun dış türevi şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!}\frac{\partial\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}}{\partial x^\mu}dx^\mu\wedge dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{(p+1)!}\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}]}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{p+1}} \end{aligned}$$

Burada $d(dx^\mu) = d^2x^\mu = 0$ Poincare leması kullanılmıştır. Ayrıca köşeli parantez, bütün indislerde tümüyle antisimetrikliği ifade eder. İkinci satırda toplam indislerini yeniden adlandırdık ve $d\omega$ niceliğinin $(p+1)$-form olduğunu açıkça gördük. Dış türev, genel olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

2. $d(\omega_1\wedge\omega_3) = d\omega_1\wedge\omega_3 + (-1)^p\omega_1\wedge d\omega_3$

3. $d(d\omega_1) = d^2\omega_1 = 0$

4. $df(x^\mu) = \frac{\partial f(x^\mu)}{\partial x^\nu}dx^\nu$

Burada $\omega_1,\omega_2 \in \bigwedge^p(M)$, $\omega_3 \in \bigwedge^q(M)$ ve $f \in \bigwedge^0(M)$ yani $f(x^\mu)$ bir fonksiyondur. İkinci özelliğe Leibniz kuralı ve üçüncü özelliğe Poincare leması denir. Son özellikten görüyoruz ki bir fonksiyonun dış türevi aslında temel matematikten bildiğimiz fonksiyonun diferansiyelini almaya eşdeğerdir.

3.3 İç Çarpım

Dış türev bir p-formu $(p+1)$-forma gönderen işlemdi. Şimdi de bunun tersini yapan bir işlem tanımlayacağız, iç çarpım. İç çarpımı ι ile gösteriyoruz.

$$\iota \quad : \quad \bigwedge^{p}(M) \to \bigwedge^{p-1}(M)$$

İç çarpım etki ettiği bir p-formun bir vektör alanı yönündeki değişim oranını verir. Yani, kabaca p-form bölüm vektör alanı gibi düşünebiliriz. Buna göre, ι operatörünü X_a ortonormal baz vektörüyle birlikte kullanıyoruz. Kısaca, $\iota_{X_a} \equiv \iota_a$ gösterimini tercih edeceğiz. Artık, iç çarpımın temel özelliklerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

1. $\iota_a f = 0$

2. $\iota_{fX_a}\omega_1 = f\iota_a\omega_1$

3. $\iota_a e^b = \delta_a^b$

4. $\iota_a(\omega_1 + \omega_2) = \iota_a\omega_1 + \iota_a\omega_2$

5. $(\iota_a + \iota_b)\omega_1 = \iota_a\omega_1 + \iota_b\omega_1$

6. $\iota_a\iota_b\omega_1 = -\iota_b\iota_a\omega_1$

7. $\iota_a(\omega_1 \wedge \omega_3) = (\iota_a\omega_1) \wedge \omega_3 + (-1)^p\omega_1 \wedge (\iota_a\omega_3)$

Burada $f \in \bigwedge^0(M)$, $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^p(M)$ ve $\omega_3 \in \bigwedge^q(M)$. Benzer özellikleri koordinat baz vektörlerini, ∂_α, kullanarak da yazabiliriz. Örneğin üçüncü özellik, $\iota_{\partial_\beta} dx^\alpha = \partial_\beta dx^\alpha = \partial x^\alpha / \partial x^\beta = \delta_\beta^\alpha$ olur. Bu özelliklerle birlikte (3.2) ile verilen bir p-formun $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ koordinat vektör bazına göre iç çarpımını hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}
\iota_\mu\omega &= \frac{1}{(p-1)!}\omega_{\mu\mu_2\mu_3\cdots\mu_p} dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\omega_{\mu\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{p-1}}
\end{aligned}$$

İkinci satırda toplam indislerini yeniden adlandırdık. Böylece ω niceliği p-form iken $\iota_\mu\omega$ niceliğinin $(p-1)$-form olduğunu açıkça görebiliyoruz. Ayrıca, (2.5) ve (2.6) denklemleri ile tanımladığımız $h^a{}_\mu$ ve $h^\mu{}_a$ çok-ayakları yardımıyla koordinat bazında (3.2) olarak yazdığımız p-form ω'yı ortonormal bazda aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{a_1a_2\cdots a_p} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_p} \tag{3.4}$$

Burada $e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_p}$ ortnormal baz p-formu tümüyle antisimetrik olduğu için $\omega_{a_1a_2\cdots a_p}$ bileşen 0-formu bütün indislerinde tümüyle antisimetriktir. Şimdi bunun X_a ortonormal vektör bazına göre iç çarpımını, $\iota_{X_a}\omega = \iota_a\omega$, hesaplarsak

$$\iota_a\omega = \frac{1}{(p-1)!}\omega_{aa_1a_2\cdots a_{p-1}} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_{p-1}}$$

buluruz.

3.4 Hodge Dualite Operatörü

Dış cebirdeki bir başka çok önemli işlem olan Hodge dualite operatörü, bir p-formu bir $(n-p)$-forma gönderen (ya da eşleştiren) lineer bir haritadır.

$$* \quad : \quad \bigwedge^{p}(M) \to \bigwedge^{n-p}(M)$$

Çalışmalarımızda n-boyutlu bir M manifoldunun yönelimini bu işlem ile sabitleriz. Yani, M'nin yönlü hacim elemanını veya n-formunu $*1$ ile eşleştiriyoruz.

$$*1 = \frac{1}{n!}\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \tag{3.5}$$

Burada $\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ niceliğine tümüyle antisimetrik Levi-Civita epsilon tensörü denir. Bu tez çalışmasında manifoldun yönelimini $\epsilon_{01\cdots(n-1)} = +1$ seçerek sabitliyoruz. Bu seçim altında $*1$ aşağıdaki hale gelir.

$$*1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{a_{n-1}}$$

(3.5) denklemi ile 0-formların bazı olan 1'in Hodge dualini aldık. Benzer olarak herhangi bir 1-formun ortonormal bazı olan e^a'nın Hodge dualini ve bunların dış çarpımlarıyla oluşturulan 2-form, 3-form ve diğerlerinin Hodge dualini aşağıdaki bağıntılar yardımıyla hesap ederiz.

$$\begin{aligned}
*e^{a_1} &= \frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{a_1}{}_{a_2 a_3 \cdots a_n} e^{a_2} \wedge e^{a_3} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \\
*(e^{a_1} \wedge e^{a_2}) &= \frac{1}{(n-2)!}\epsilon^{a_1 a_2}{}_{a_3 a_4 \cdots a_n} e^{a_3} \wedge e^{a_4} \wedge \cdots \wedge e^{a_n} \\
&\vdots \\
*(e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots e^{a_n}) &= \frac{1}{0!}\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_n}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Burada bir noktaya özellikle dikkat çekmek istiyoruz. Üç beş satır yukarıda tümüyle antisimetrik Levi-Civita epsilon tensöründe bütün indisler aşağıdayken sayısal değer atadık. Şimdiyse epsilon tensöründe indislerin bir kısmı yukarıda bir kısmı aşağıda görünüyor. $\epsilon_{01\cdots(n-1)} = +1$ seçimine göre bu karışık indisli epsilonlara sayısal değer belirlemek için önce bütün indisleri aşağı indirmemiz gerekmektedir. Bir tensörde bir indisi aşağı indirme veya yukarı kaldırma işlemini sadece metrik tensörü ile yapabiliriz. O sebeple, diyoruz ki Hodge dualite operatörünün tanımlı olabilmesi için metrik tensörünün olması gereklidir. Böyle bir gereklilik dış cebirdeki diğer operatörlerde yoktur. Bu dikkat açıklamasından sonra genel olarak $*$ operatörünün bazı çok kullanılan özelliklerini sıralıyoruz.

1. $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$

2. $e^a \wedge \iota_a \alpha = p\alpha$

3. $*(\alpha \wedge e_a) = \iota_a * \alpha$

4. $* * \alpha = (-1)^{p(n-p)+Ind(g)} \alpha$

Burada $\alpha, \beta \in \bigwedge^p(M)$ ve $Ind(g)$ niceliği η_{ab}'deki -1'lerin sayısıdır.

3.5 Varyasyon Hesabı

Dış cebir matematikte, mühendislikte ve fizikte farklı çalışma alanlarında kullanılan çok güçlü bir araçtır. Biz de bu tez çalışmasında kütleçekim teorisi çalışmalarımızda dış cebir kullanacağız. Bir kütleçekim teorisini iki şekilde yazarız; (i) Doğrudan bir alan denklemi ortaya atarız, (ii) Önce bir eylem integrali ortaya atarız ve ardından bunun ekstramumunu bularak alan denklemini elde ederiz. Biz ikinci yolu tercih edeceğiz. Dış cebir lisanında eylem integrali demek, n-boyutlu M manifoldu üstünde bir tane n-formun integrali demektir.

$$I = \int_M L \tag{3.7}$$

Burada I niceliğine eylem ve L niceliğine de Lagranjiyen n-formu denir. Dış cebir yerine tensör bileşenlerinin kullanıldığı formülasyonda Lagranjiyen n-formu L ile Lagranjiyen fonksiyoneli $\mathcal{L}$ arasında $L = \mathcal{L}\ dx^{\hat{0}} \wedge dx^{\hat{1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\hat{n}-\hat{1}}$ ilşikisi vardır (Tucker ve Wang 1995). Bu durumda eylem integrali aşağıdaki hali alır.

$$I = \int_M \mathcal{L}\ dx^{\hat{0}} dx^{\hat{1}} \cdots dx^{\hat{n}-\hat{1}} \tag{3.8}$$

Buradaki integral işareti n tane koordinat üzerinden hesap edilen temel matematik derslerinde kullandığımız n-katlı bir integral işlemini temsil eder. Tensör bileşeni formülasyonunda $dx^{\hat{0}}dx^{\hat{1}}$ teriminde arada $\wedge$ olmadığına dikkatinizi çekelim. Bu formülasyonda $dx^{\hat{0}}dx^{\hat{1}}$ ifadesi sadece ve basitçe iki katlı integralin diskrimnantıdır.

Eylem integralinin ekstramumunu I'nın varyasyonunu sıfıra eşitleyerek buluruz, $\delta I = 0$. Burada δ sembolü varyasyon işlemini temsil etmektedir. Bu koşulu (3.7) denkleminde kullanırsak alan denklemlerini elde etmek için $\delta L = 0$ denkleminin sağlanması gerektiğini görürüz. Özet olarak, ortaya atacağımız bir kütleçekim teorisinin alan denklemini elde etmek için önereceğimiz bir Lagranjiyen n-formunun varyasyonunu alıp, bunu sıfıra eşitleriz. Buna literatürde Hamilton ilkesi denir. Kütleçekim teorilerinde Lagranjiyen n-formu genel olarak metrik, eğrilik, burulma, nonmetrisiti gibi geometrik nicelikler ve kütle, elektromanyetik alan, spinör gibi madde nicelikleri içerir. Bölüm 2'de eğrilik, burulma ve nonmetrsiti gibi geometrik niceliklerin metrik ve bağlantı ile ifade edildiklerini görmüştük, bkz denklem (2.23). O halde, elimizdeki bağımsız geometrik değişkenler $\eta_{ab}, e^a, \omega^a{}_b$ cinsinden L'yi şöyle yazıyoruz.

$$L = L[\eta_{ab}, e^a, \omega^a{}_b, \psi] \tag{3.9}$$

Burada η_{ab} Minkowski metriğidir, e^a ortonormal koçerçevedir, $\omega^a{}_b$ ortonormal bağlantı 1-formudur ve ψ niceliği de madde alanlarını temsil etmektedir. δL hesap edilirken L'nin bu bağımsız değişkenlere göre varyasyonu yapılır.

$$\delta L = \delta\eta_{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial \eta_{ab}} + \delta e^a \wedge \frac{\partial L}{\partial e^a} + \delta\omega_{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial \omega_{ab}} + \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

Ancak ortonormal bazda η_{ab} metrik bileşeni, sadece $0, +1, -1$ sayılarından oluştuğu için varyasyonu sıfırdır, $\delta\eta_{ab} = 0$. Sonuçta, genelliği kaybetmeden $L[\eta_{ab}, e^a, \omega^a{}_b, \psi]$ Lagranjiyen n-formunun varyasyonunu şöyle yazabiliriz.

$$\delta L = \delta e^a \wedge \frac{\partial L}{\partial e^a} + \delta\omega_{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial \omega_{ab}} + \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} \tag{3.10}$$

Çalışmalarımızda $\partial L/\partial e^a$ niceliğine enerji-momentum $(n-1)$-formu diyeceğiz ve $\partial L/\partial e^a := \tau_a[\eta_{ab}, e^a, \omega^a{}_b, \psi]$ olarak göstereceğiz. Benzer olarak $\partial L/\partial \omega_{ab}$ niceliğine açısal momentum $(n-1)$-formu diyeceğiz ve $\partial L/\partial\omega_{ab} := \Sigma^{ab}[\eta_{ab}, e^a, \omega^a{}_b, \psi]$ ile göstereceğiz.

Kütleçekim teorilerinde Lagranjiyen n-formları sıklıkla $\alpha\wedge*\beta$ türünde terimler içerir. Burada hem α hem de β birer p-formdur. Dolayısıyla, $\alpha\wedge*\beta$ niceliği bir n-formdur. Buradaki $*$ operatöründen dolayı varyasyon hesabı sıradan basit bir işlem değildir. Bu nedenle aşağıda bu terimin varyasyanonu ayrıntılı olarak yapacağız.

$$\delta(\alpha\wedge*\beta) = (\delta\alpha)\wedge*\beta + \alpha\wedge(\delta*\beta) \tag{3.11}$$

Sağ taraftaki ikinci terimde detaylı bir hesap yapacağız.

$$\begin{aligned}\alpha\wedge(\delta*\beta) &= \alpha\wedge\delta\left(\frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p} * e^{i_1\cdots i_p}\right)\\ &= \alpha\wedge\frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\cdots i_p}) * e^{i_1\cdots i_p} + \alpha\wedge\frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}(\delta * e^{i_1\cdots i_p})\end{aligned}$$

İlk terimde $\theta\wedge*\gamma = \gamma\wedge*\theta$ özdeşliğini kullanalım, burada θ ve $\gamma\in\bigwedge^p(M)$.

$$\alpha\wedge(\delta*\beta) = \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\cdots i_p})e^{i_1\cdots i_p}\wedge*\alpha + \alpha\wedge\frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}(\delta * e^{i_1\cdots i_p}) \tag{3.12}$$

Sağ taraftaki ilk terimi biraz daha farklı yazmak için $\delta\beta$'yı açıkça hesap edelim.

$$\begin{aligned}\delta\beta &= \delta\left(\frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}e^{i_1\cdots i_p}\right)\\ &= \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\cdots i_p})e^{i_1\cdots i_p} + (\delta e^{i_1})\wedge\frac{1}{(p-1)!}\beta_{i_1\cdots i_p}e^{i_2\cdots i_p}\\ &= \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\cdots i_p})e^{i_1\cdots i_p} + (\delta e^{i_1})\wedge(\iota_{i_1}\beta)\end{aligned}$$

Bu eşitliği yeniden düzenliyoruz.

$$\frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\cdots i_p})e^{i_1\cdots i_p} = \delta\beta - (\delta e^a)\wedge(\iota_a\beta) \tag{3.13}$$

Şimdi de (3.12) denkleminin sağındaki ikinci terimi daha dersli toplu yazmak için aşağıdaki işlemi yapıyoruz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}(\delta * e^{i_1\cdots i_p}) &= \frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}\delta\left[\frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{i_{p+1}\cdots i_n}e^{i_{p+1}\cdots i_n}\right]\\ &= (\delta e^{i_{p+1}})\wedge\left[\frac{1}{p!(n-p-1)!}\epsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{i_{p+1}\cdots i_n}\beta_{i_1\cdots i_p}e^{i_{p+2}\cdots i_n}\right]\\ &= (\delta e^a)\wedge(\iota_a*\beta)\end{aligned} \tag{3.14}$$

Son iki denklemi (3.12) denkleminde yerlerine yerleştiriyouz.

$$\alpha \wedge \delta * \beta = [\delta\beta - (\delta e^a) \wedge (\iota_a\beta)] \wedge *\alpha + \alpha \wedge [(\delta e^a) \wedge (\iota_a * \beta)] \,. \tag{3.15}$$

Bu sonucu da (3.11) denkleminde kullanarak aşağıdaki genel sonucu elde ediyoruz.

$$\begin{aligned} \delta(\alpha \wedge *\beta) &= \delta\alpha \wedge *\beta + \delta\beta \wedge *\alpha \\ &\quad -\delta e^a \wedge [(\iota_a\beta) \wedge *\alpha - (-1)^p \alpha \wedge (\iota_a * \beta)] \end{aligned} \tag{3.16}$$

Burada α ve $\beta \in \bigwedge^p(M)$ olduğunu tekrar hatırlatalım.

4. İKİ BOYUTTA Q^2, R^2 ve DIRAC ALANI İÇEREN YENİ BİR KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

4.1 Ayar Yaklaşımı

Kütleçekim teorisi için bir Lagranjiyen yazmak istediğimizde nasıl bir Lagranjiyen yazacağımıza karar vermek kolay değildir. Bunun için bir rehberimiz olmalıdır. Örneğin Eisntein, önce genel görelilik teorisinin denklemini yazmıştır. Daha sonra bu denklemi veren Lagranjiyen elde edilmiştir. Einstein denklemini veren Lagranjiyen ifadesine Hilber-Einstein Lagranjiyen n-formu denir. Biz genişletilmiş bir kütleçekim teorisi yazacağız. Bunu yaparken de genel görelilik teorisinde izlenen yolun tersine önce bir Lagranjiyen yazıp onun varyasyonel denklemlerini elde edeceğiz. Teorimizin Lagranjiyen yapısına karar vermek için mikroskopik dünyayı çok iyi tarif eden elektrozayıf teoriden ve standart modelenden esinleniyoruz. Elektrozayıf teori doğadaki dört temel kuvvetten ikisi olan elektromanyetik teori ile zayıf çekirdek teorisini birleştirmiştir ve bu bileşik teori matematiksel olarak $U(1) \times SU(2)$ ayar teorisidir. Diğer taraftan, ıki temel kuvveti birleştiren elektrozayıf teoriye üçüncü temel kuvvet olan şiddetli çekirdek kuvveti katılırsa, elde edilen teoriye standart model denir ve bu da matematiksel olarak $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ayar teorisidir (Griffiths 1987). O halde, dördüncü temel kuvvet olan kütleçekim kuvveti için yeni bir alternatif teori yazarken araç olarak ayar yaklaşımını benimseyebiliriz.

Ayar yaklaşımında başlıca izlenen adımlar şunlardır. İlk olarak kütleçekimini temsil eden bir nicelik gerekir. Einstein'ın genel görelilik teorisinden feyz alarak kütleçekim alanını metrik tensörüyle (daha doğrusu koordinat bazında metrik bileşeniyle, $g_{\alpha\beta}(x)$ temsil ediyoruz. İkinci olarak, bu gerçek alanın türevinden (kinetik terim) artı karesinden (kütle terimi) oluşan bir lagranjiyen yazarız.

$$L_0 = \nu dg_{\alpha\beta} \wedge *dg^{\alpha\beta} + M * 1 \tag{4.1}$$

Burada ν bağlanma sabiti ve M kütle sabittir. Kütle terimi $M * 1 = \frac{M}{4} g_{\alpha\beta} \wedge *g^{\alpha\beta}$

şeklinde de yazılabilir. Üçüncü adımda, bu Lagranjiyenin gerçek alan üzerinde tanımlanan aşağıdaki gibi bir dönüşüm kuralı altında invaryant olup olmadığına (aynı kalıp kalmadığına) bakarız.

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha'\beta'} L^{\beta'}{}_{\beta} L^{\alpha'}{}_{\alpha} \\ g^{\alpha\beta} &= L^{\beta}{}_{\beta'} L^{\alpha}{}_{\alpha'} g^{\alpha'\beta'} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Burada $g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta}$ olduğu için dönüşüm elemanları arasında $L^{\beta}{}_{\beta'} L^{\beta'}{}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ ve $L^{\beta'}{}_{\beta} L^{\beta}{}_{\alpha'} = \delta^{\beta'}_{\alpha'}$ ilişkisi vardır. Dönüşüm elemanları koordinatlara bağlı değilse, $dL^{\beta'}{}_{\beta} = 0$ olur ve bu dönüşüme global ayar dönüşümü denir. Global ayar dönüşümü altında L_0 Lagranjiyen n-formu invaryant kalır. Dördüncü adımda, dönüşümün yerel olması istenir ki bu durumda $dL^{\beta'}{}_{\beta} \neq 0$ olduğu için L_0 Lagranjiyen ifadesi invaryant kalmaz. İnvaryantlığı bozan şey içerdiği türevden dolayı kinetik terimdir. Beşinci adımda, invaryantlığı bozan terimi yok edecek şekilde teoriye yeni bir alan ekleriz. Bu yeni alana ayar alanı denir. Biz burada yeni alan olarak bağlantı 1-formunu, $\omega^{\alpha\beta}$, kullanacağız. Yukarıdaki dönüşüm elemanlarının, $L^{\beta'}{}_{\beta}$, gerçek alanı nasıl dönüştüreceğine karar verdiğimiz gibi bu yeni alanı nasıl dönüştüreceğine de karar veririz. Öyle bir dönüşüm kuralı yazmalıyız ki L_0'a ekleyeceğimiz $\omega^{\alpha\beta}$ terimleriyle birlikte yeni Lagranjiyen ifademiz invaryant olsun. Bu işi yapacak dönüşüm kuralı aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} = L^{\alpha}{}_{\alpha'} \omega^{\alpha'}{}_{\beta'} L^{\beta'}{}_{\beta} + L^{\alpha}{}_{\alpha'} dL^{\alpha'}{}_{\beta} \tag{4.3}$$

Şimdi (4.2) ve (4.3) dönüşüm kuralları altında aşağıdaki düzeltilmiş Lagranjiyen ifademiz invaryanttır.

$$L_1 = \frac{\nu}{4} \left(dg_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha} \right) \wedge * \left(dg^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} + \omega^{\beta\alpha} \right) + M * 1 \tag{4.4}$$

Burada parantez içindeki ifadeleri nonmetrisiti 1-formları cinsinden yazabiliriz; $Q_{\alpha\beta} := -\frac{1}{2} Dg_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(dg_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha} \right)$ ve $Q^{\alpha\beta} := +\frac{1}{2} Dg^{\alpha\beta} = +\frac{1}{2} \left(dg^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} + \omega^{\beta\alpha} \right)$. Şimdi L_1'i daha derli toplu yeniden yazalım.

$$L_1{}' = \nu Q_{\alpha\beta} \wedge * Q^{\alpha\beta} + M * 1 \tag{4.5}$$

Burada bir tane eksi işareti farkı çıkıyor, fakat bağlanma sabitini yeniden adlandırarak bu eksiden kurtuluyoruz. L_1 Lagranjiyen ifadesine bakarsak, ayar alanı olarak ortaya attığımız $\omega_{\alpha\beta}$ niceliğinin kendisi var, fakat türevi yoktur. Altıncı adımda, ayar alanının dinamik olması istenir. Bunu için de $\omega_{\alpha\beta}$'nın türevinden oluşan bir terimi L_1 Lagranjiyen ifadesine ekleriz. İlk akla gelen ayar alanının kinetik terimi olarak $d\omega_{\alpha\beta} \wedge *d\omega^{\alpha\beta}$ teriminin eklenmesidir. Ancak tek başına bu yeni terim Lagranjiyen ifademizin yukarıdaki iki dönüşüm kuralı altında invaryantlığını bozar. O zaman biz de eğrilik 2-formunu hatırlar, $R^{\alpha}{}_{\beta}; = d\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}{}_{\beta}$ ve buradaki $d\omega^{\alpha}{}_{\beta}$ terimlerinden faydalanırız. Sonuç olarak aşağıdaki Lagranjiyen n-formunu düşünürüz (Pala 2019).

$$L_2 = \nu Q_{\alpha\beta} \wedge *Q^{\alpha\beta} + \mu R^{\alpha}{}_{\beta} \wedge *R^{\beta}{}_{\alpha} + M * 1 \tag{4.6}$$

Burada μ bağlanma sabitidir. Sonuçta, L_2 Lagranjiyen n-formu ayar invaryanttır ve buradaki dönüşüm elemanlarının oluşturduğu grup 2.3 başlığı altında anlatılan nedenlerden ötürü $SO(1, n-1)$ Lorentz grubudur.

4.2 Teorimiz

Bu tez çalışmasında yukarıda anlattığımız nedenlerden ötürü aşağıdaki Lagranjiyen 2-formuyla verilen bir kütleçekim teorisi çalışılacaktır.

$$L = L_{EH} + L_{R^2} + L_{Q^2} + \lambda_a \wedge T^a + L_D \tag{4.7}$$

Burada L_{EH} Einstein-Hilbert terimidir,

$$L_{EH} = \kappa R^{a}{}_{b} \wedge *e_a{}^{b} \tag{4.8}$$

L_{R^2} niceliği kuadratik eğrilik terimidir,

$$L_{R^2} = \mu R^{a}{}_{b} \wedge *R^{b}{}_{a} \tag{4.9}$$

L_{Q^2} niceliği kuadratik nonmetrisiti terimidir,

$$L_{Q^2} = \nu Q_{ab} \wedge *Q^{ab} \tag{4.10}$$

ve $\lambda_a \wedge T^a$ niceliği burulmayı sıfır yapan kısıtlama terimidir ve L_D niceliği de 4.7 altbaşlığı altında ayrıntılı olarak verilecek Dirac terimidir. Yukarıda κ, μ, ν sabitlerine çiftlenim (ya da bağlanma) sabitleri, λ_a sıfır-formuna da Lagrange çarpanı denir. Birinci mertebe formülasyonda λ_a niceliği, Lagranjiyen 2-formunun bağımsız bir değişkeni gibi ele alınır ve L'nin λ_a'ya göre varyasyonu $T^a = 0$ verir. Einstein-Hilbert teriminde ${e_a}^b := e_a \wedge e^b$ kısaltması kullanılmıştır. Diğer bir ayrıntı da şudur. (4.7) ile verilen toplam Lagranjiyen ifadesinde madde terimi L_D'yi geometrik terimlere doğrudan toplam olarak ekledik. Buna Dirac alanının kütleçekim alanına minimal bağlanması denir. Alternatif kütleçekim teorimizi temsil eden (4.7) denklemi ile verilen Lagranjiyen ifademizin varyasyonu şöyle yazılır.

$$\delta L = \delta L_{EH} + \delta L_{R^2} + \delta L_{Q^2} + \delta(\lambda_a \wedge T^a) + \delta L_D \tag{4.11}$$

4.3 L_{EH} Varyasyonu

Yukarıda (4.8) ile verilen Einstein-Hilbert Lagranjiyen 2-formunun varyasyonunu alalım.

$$\delta L_{EH} = \kappa[(\delta {R^a}_b) \wedge *(e_a \wedge e^b) + \kappa {R^a}_b \wedge \delta * (e_a \wedge e^b)]\,. \tag{4.12}$$

İlk olarak ikinci terime bakalım.

$${R^a}_b \wedge \delta * (e_a \wedge e^b) = {R^a}_b \wedge (\delta {\epsilon_b}^a) = 0 \tag{4.13}$$

Burada ${\epsilon_b}^a$ tensörü sadece $0, +1, -1$ sabitlerinden oluştuğu için varyasyonu sıfırdır. Sadece iki boyutta $\delta * (e_a \wedge e^b) = 0$ olur, ikiden yüksek boyutlarda genel olarak $\delta * (e_a \wedge e^b) \neq 0$ çıkar. Şimdi, birinci terimi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} (\delta {R^a}_b) \wedge *{e_a}^b &= \delta(d{\omega^a}_b + {\omega^a}_c \wedge {\omega^c}_b) \wedge *{e_a}^b \\ &= d\delta{\omega^a}_b \wedge *{e_a}^b + \underbrace{\delta{\omega^a}_c \wedge {\omega^c}_b \wedge *{e_a}^b}_{b \leftrightarrow c} + \underbrace{{\omega^a}_c \wedge \delta{\omega^c}_b \wedge *{e_a}^b}_{a \leftrightarrow c} \\ &= d\delta{\omega^a}_b \wedge *{e_a}^b + \delta{\omega^a}_b \wedge {\omega^b}_c \wedge *{e_a}^c - \delta{\omega^a}_b \wedge {\omega^c}_a \wedge *{e_c}^b \end{aligned} \tag{4.14}$$

Birinci satırdan ikinci satıra geçerken $\delta d = d\delta$ kullandık. İkinciden üçüncüye geçerken indisleri yeniden adlandırdık ve son terimde ilk iki çarpanın sırasını değiştirdik.

Eşitliğin sağındaki ilk terimde d'yi $*e_a{}^b$ çarpanının önüne almaya çalışalım. Bunun için aşağıdaki eşitliği yazıyoruz.

$$d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) = (d\delta\omega^a{}_b) \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_b \wedge (d * e_a{}^b) \tag{4.15}$$

Varyasyon hesaplarında tam türevli terim, varyasyonel alan denklemine katkı yapmaz. Bunu Stokes teoeriminden görebiliriz.

$$\int_M d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) = \int_{\partial M} \delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b \tag{4.16}$$

Burada ∂M niceliği n boyutlu M manifoldunun $(n-1)$ boyutlu sınırıdır. Varyasyon hesabında kural şudur; sınırda varyasyon sıfır olur, yani $\delta\omega^a{}_b = 0$. Böylece $\int_M d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) = 0$ olur. Genel olarak bütün tam türevli terimleri $mod(d)$ olarak yazarız. O halde, aşağıdaki eşitliği kullanabiliriz.

$$d\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b = \delta\omega^a{}_b \wedge *de_a{}^b + mod(d) \tag{4.17}$$

Bu sonucu (4.14) denkleminde yerleştirelim.

$$\begin{aligned}(\delta R^a{}_b) \wedge *e_a{}^b &= \delta\omega^a{}_b \wedge [d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b] + mod(d) \\ &= \delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b + mod(d)\end{aligned} \tag{4.18}$$

Bu sonucu ve (4.13) denklemini (4.12) denkleminde kullanarak

$$\delta L_{EH} = \delta\omega^a{}_b \wedge \kappa D * e_a{}^b + mod(d) \tag{4.19}$$

sonucuna ulaşıyoruz. (2.39) özdeşlikleri iki boyutta aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}D * e_a &= -Q \wedge *e_a + *e_{ab} \wedge T^b \\ D * e_{ab} &= -Q \wedge *e_{ab}\end{aligned} \tag{4.20}$$

Burada $Q = \eta^{ab}Q_{ab} = Q^a{}_a = \omega^a{}_a$. Bu özdeşliği kullanarak δL_{EH}'yi yeniden yazacağız.

$$\begin{aligned}
\delta L_{EH} &= \delta\omega^a{}_b \wedge \kappa(D * e_a{}^b) + mod(d) \\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge \kappa D(\eta^{bc} * e_{ac}) + mod(d) \\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge \kappa[(D\eta^{bc}) \wedge *e_{ac} + \eta^{bc} D * e_{ac}] + mod(d) \\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge \kappa[2Q^{bc} \wedge *e_{ac} - \eta^{bc} Q \wedge *e_{ac}] + mod(d) \\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge \kappa[2Q^{bc} \wedge *e_{ac} - Q \wedge *e_a{}^b] + mod(d) \\
&= \delta\omega_{ab} \wedge \kappa[2Q^{bc} \wedge *e^a{}_c - Q \wedge *e^{ab}] + mod(d) \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

4.4 L_{Q^2} Varyasyonu

$$\delta L_{Q^2} = \nu\delta(Q_{ab} \wedge *Q^{ab}) \qquad (4.22)$$

varyasyonu (3.11) ile verilen türde bir varyasyon hesabıdır. Ohalde, (3.16) ile verilen genel sonuçta $p = 1$, $\alpha \to Q_{ab}$ ve $\beta \to Q^{ab}$ yazarak şu sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\delta L_{Q^2} &= \nu\delta Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + \nu\delta Q^{ab} \wedge *Q_{ab} \\
&\quad -\nu\delta e^a \wedge [(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} + Q_{bc} \wedge (\iota_a * Q^{bc})] \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Buarada $Q_{ab} \wedge *Q^{ab} = Q^{ab} \wedge *Q_{ab}$ olduğundan bu denklemi aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned}
\delta L_{Q^2} &= 2\nu\delta Q^{ab} \wedge *Q_{ab} \\
&\quad -\nu\delta e^a \wedge [(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} + Q_{bc} \wedge (\iota_a * Q^{bc})] \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Sağdaki ilk terimi $\delta\omega^{ab}$ cinsinden yazalım.

$$\begin{aligned} 2\delta Q^{ab}\wedge *Q_{ab} &= 2\left[\delta\frac{1}{2}(\omega^{ab}+\omega^{ba})\right]\wedge *Q_{ab} \\ &= \delta\omega^{ab}\wedge *Q_{ab}+\underbrace{\delta\omega^{ba}\wedge *Q_{ab}}_{a\leftrightarrow b} \\ &= \delta\omega^{ab}\wedge *Q_{ab}+\delta\omega^{ab}\wedge *Q_{ba} \\ &= \delta\omega^{ab}\wedge *Q_{ab}+\delta\omega^{ab}\wedge *Q_{ab} \\ &= \delta\omega^{ab}\wedge 2*Q_{ab} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Üçüncü satırdan dördüncü satıra geçerken sağdaki son terimde nonmetrisiti 1-formunun simetrik olmasını, $Q_{ba}=Q_{ab}$, kullandık. Bu sonucu yerine yazarak L_{Q^2} varyasyonu şöyle olur.

$$\begin{aligned} \delta L_{Q^2} &= 2\nu\delta\omega^{ab}\wedge *Q_{ab} \\ &\quad -\nu\delta e^a\wedge[(\iota_a Q^{bc})\wedge *Q_{bc}+Q_{bc}\wedge(\iota_a * Q^{bc})] \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.5 L_{R^2} Varyasyonu

$$\delta L_{R^2}=\mu\delta(R^b{}_c\wedge *R^c{}_b) \tag{4.27}$$

varyasyonu da (3.11) ile verilen türde bir varyasyondur. Bu nedenle (3.16) ile verine genel sonuçta $p=2$, $\alpha\to R^b{}_c$ ve $\beta\to R^c{}_b$ yazarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned} \delta L_{R^2} &= \mu\underbrace{\delta R^b{}_c\wedge *R^c{}_b}_{b\to a,\ c\to b}+\mu\underbrace{\delta R^c{}_b\wedge *R^b{}_c}_{c\to a} \\ &\quad -\mu\delta e^a\wedge[(\iota_a R^c{}_b)\wedge *R^b{}_c-R^b{}_c\wedge(\iota_a * R^c{}_b)] \end{aligned} \tag{4.28}$$

Sağ tarafta ilk iki terimde indisleri yeniden adlandırırsak iki terimin aynı olduğu görülür. Bundan başka sağ tarafta son terimde $R^c{}_b$ çarpanı eğrilik tensör 2-formudur, iki boyutlu uzayzamanda $*R^c{}_b$ niceliği 0-form olur, sıfır-formun iç çarpımı da sıfırdır. Böylece kalan terimleri aşağıdaki gibi yazıyoruz.

$$\delta L_{R^2}=2\mu\delta R^a{}_b\wedge *R^b{}_a-\mu\delta e^a\wedge(\iota_a R^c{}_b)\wedge *R^b{}_c \tag{4.29}$$

İlk terimde içerisinde $\delta\omega^a{}_b$ barındırıyor, bunu açığa çıkaralım.

$$\begin{aligned}
\delta R^a{}_b \wedge *R^b{}_a &= \delta(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge *R^b{}_a \qquad (4.30)\\
&= d\delta\omega^a{}_b \wedge *R^b{}_a + \underbrace{\delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *R^b{}_a}_{b \leftrightarrow c} + \underbrace{\omega^a{}_c \wedge \delta\omega^c{}_b \wedge *R^b{}_a}_{c \leftrightarrow a}\\
&= d\delta\omega^a{}_b \wedge *R^b{}_a + \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge *R^c{}_a - \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a \wedge *R^b{}_c
\end{aligned}$$

Birinci satırdan ikinci satıra geçerken sağ tarafta ilk terimde $\delta d = d\delta$ kullandık, ikinciden üçüncüye geçerken de son iki terimde indislerin adlarını yeniden düzenledik ve en son terimde ilk iki çarpanın sırasını değiştirdik. Son eşitliğin sağındaki ilk terimde $\omega^a{}_b$ çarpanının önünden $*R^b{}_a$ çarpanının önüne alalım.

$$d(\delta\omega^a{}_b \wedge *R^b{}_a) = (d\delta\omega^a{}_b) \wedge *R^b{}_a - \delta\omega^a{}_b \wedge (d * R^b{}_a) \qquad (4.31)$$

Buradaki tam form, $d(\delta\omega^a{}_b \wedge *R^b{}_a)$, yine varyasyonel alan denklemlerine katkı vermeyeceği için onu $mod(d)$ olarak göstereceğiz. Bu sonucu yukarıda yerine yerleştirelim.

$$\begin{aligned}
\delta R^a{}_b \wedge *R^b{}_a &= \delta\omega^a{}_b \wedge d * R^b{}_a + \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge *R^c{}_a - \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a \wedge *R^b{}_c + mod(d)\\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge (d * R^b{}_a + \omega^b{}_c \wedge *R^c{}_a - \omega^c{}_a \wedge *R^b{}_c) + mod(d)\\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge D * R^b{}_a + mod(d) \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

Bu sonucu (4.29) denklemine yerleştirerek aşağıdaki sonuca ulaşıyoruz.

$$\delta L_{R^2} = \delta\omega^a{}_b \wedge 2\mu D * R^b{}_a - \mu\delta e^a \wedge (\iota_a R^c{}_b) \wedge *R^b{}_c + mod(d) \qquad (4.33)$$

İlk terimde $\delta\omega^a{}_b$ yukarıda görülen a indisini aşağı indrmek istersek (4.21) denkleminde yaptığımız gibi metrik kullanmalıyız. D'nin altındaki metrik her seferinde nonmetrisiti tensörü üretecektir.

4.6 $\lambda_a \wedge T^a$ Varyasyonu

Şimdi de Lagrange çarpanının olduğu terimin varyasyonunu hesap edelim.

$$\begin{aligned}
\delta(\lambda_a \wedge T^a) &= (\delta\lambda_a) \wedge T^a + \lambda_a \wedge (\delta T^a) \\
&= \delta\lambda_a \wedge T^a + \lambda_a \wedge \delta(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) \\
&= \delta\lambda_a \wedge T^a + d\delta e^a \wedge \lambda_a + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b - \underbrace{\delta e^b \wedge \omega^a{}_b \wedge \lambda_a}_{a\leftrightarrow b} \\
&= \delta\lambda_a \wedge T^a + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b + \delta e^a \wedge (d\lambda_a - \omega^b{}_a \wedge \lambda_b) + mod(d) \\
&= \delta\lambda_a \wedge T^a + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b + \delta e^a \wedge D\lambda_a + mod(d) \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Üçüncü satırda $\delta d = d\delta$ özelliğini ve $\omega^a{}_b \wedge \delta e^b = -\delta e^b \wedge \omega^a{}_b$ sıradeğiştirmesini kullandık ve toplam indisinde yeniden adlandırma yaptık. Dördüncü satırda $d(\delta e^a \wedge \lambda_a) = d\delta e^a \wedge \lambda_a - \delta e^a \wedge d\lambda_a$ tam formunu açtık. Son satırda $D\lambda_a = d\lambda_a - \omega^b{}_a \wedge \lambda_b$ kovaryant dış türevini yazdık.

4.7 L_D Varyasyonu

Bu başlık altında nonmetrisiti tensörünün sıfırdan faklı olduğu iki boyutlu Riemannsal olmayan bir uzayzamanda Dirac lagranjiyenini yazıp varyasyon hesabı yapacağız. Bu da bu tez çalışmasının özgün kısmı olacak. Ama öncesinde tarihsel oluş sırasına göre dört boyutlu Minkowski uzayzamanda Dirac denklemini ve ilgili nicelikleri gözden geçireceğiz. P.A. Dirac kendisi $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$ izini kullanmasına karşın biz bu çalışmada $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ izini kullanacağız.

4.7.1 Dört Boyutlu Minkowski Uzayzamanında Dirac Denklemi

Bu kısımda, 4-boyutlu Minkowski uzayzamanında Dirac denklemi kartezyen koordinatlarda yazacağız, $x^\mu = (ct, x, y, z) := (ct, x_1, x_2, x_3)$ ve $\partial_\mu = (\partial/c\partial t, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. Klasik kuantum mekaniği teorisinde en sade haliyle Schrödinger denklemi, manyetizma ve özel görelilik olayları haricinde bütün atomik olayları tanımlar. Kütlesi m ve potansiyel enerjisi W olan düşük hızlı spinsiz bir parçacık için Schrödinger denklemi şöyle yazılır.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + W\right]\psi \tag{4.35}$$

Burada h Planck sabiti, $\hbar := h/2\pi$ ve ψ dalga fonksiyonu ve $\vec{\nabla} := (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ gradyen operatörüdür. Somut bir durum olarak elektrik alan ve manyetik alan içinde hareket eden düşük hızlı bir elektronu spinini ihmal ederek düşünelim. Bu elektron için Schrödinger denklemi şu hali alır.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 - eV\right]\psi \tag{4.36}$$

Burada V skaler elektromanyetik potansiyel ve $\vec{A}$ vektör elektromanyetik potansiyeldir. Bu denkleme elektronun spinini de dahil edersek Pauli-Schrödinger denklemine ulaşırız.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}\left[(-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 - e\hbar(\vec{\sigma}.\vec{B})\right] - eV\right\}\psi \tag{4.37}$$

Burada $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ manyetik alan ve $\vec{\sigma}$ niceliği Pauli spin matrisleridir.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

σ matrislerinin üçünün de hermitsel ve izlerinin sıfır olduğuna dikkat ediniz. Pauli-Schrödinger denkleminde Pauli matrisleri 2×2 matrisler oldukları için ψ dalga fonksiyonu artık skaler fonksiyon değildir, iki-bileşenli Pauli spinörüdür.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

Burada ψ_1 ve ψ_2 kompleks skaler dalga fonksiyonlarıdır. Literatürde $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ niceliğine spin operatörü ismi verilir (Silenko ve Teryaev 2005). Toplam enerjiye gelen spin katkısı, $\vec{S}$ cinsinden $\frac{e\hbar}{2m}(\vec{\sigma}.\vec{B}) = \frac{e}{2m}(2\vec{S}.\vec{B})$ olarak yazılır. $(2\vec{S}.\vec{B})$ parantezindeki 2 çarpanına elektron için Lande g-faktörü denir. Pauli spinöründeki ψ_1 fonksiyonu spin-yukarı elektronu temsil ederken, ψ_2 spin-aşağı elektronu temsil eder. Schrödinger-Pauli denklemiyle şimdi elektronun spinini, elektrik alanı ve manyetik alanı dahil ettik, ama hala özel görelilik etkileri dışarıdadır.

Pauli-Schrödinger denkleminde zamana göre türev birinci mertebe, fakat uzay koordinatlarına göre türev ikinci mertebedir. Diğer taraftan, özel görelilik teorisindeki Lorentz dönüşümleri uzayzaman koordinatlarının hepsinde lineer olduğu için Pauli-Dirac denklemi kesinlikle özel görelilik teorisiyle uyumlu değildir. Bu durumda özel görelilik teorsiyle uyum içinde olan bir dalga denklemi yazmak için başka bir arayışta olmalıyız.

Özel görelilik etkisi, yüksek bir $\vec{v}$ hızıyla hareket eden durgun kütlesi m olan bir parçacığın göreli enerji denkleminden $-\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2c^2$ başlayarak teoriye dahil edilebilir. Enerji ve momentum operatörlerini bu denkleme yerleştirerek, zaman ve uzayı eşit bir temelde ele alan Klein-Gordon denklemini elde ederiz, $E \to i\hbar\partial/\partial t$, $p_x \to -i\hbar\partial/\partial x_1$, $p_y \to -i\hbar\partial/\partial x_2$, $p_z \to -i\hbar\partial/\partial x_3$.

$$\hbar^2 \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} \right) \psi = m^2c^2\psi \,. \tag{4.40}$$

Bu denklemi kovaryant biçimde şöyle de yazabiliriz.

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \tag{4.41}$$

Klein-Gordon denkleminde uzayzaman koordinatlarının hepsine göre ikinci mertebeden türevler olduğuna dikkat ediniz. Özellikle zamana göre türevin ikinci mertebe olması dalga fonksiyonun mutlak karesinin olasılık yorumunda bazı sorunlar çıkarmıştır.

Bu sorunları ortadan kaldırmak için P.A. Dirac 1928'de Klein-Gordon denklemini birinci mertebeden türevler cinsinden yazmıştır. Bu işleme literatürde Dirac, Klein-Gordon denkleminin karekökünü almıştır da denir [Kiefer (1987)].

$$\hbar \left(-\gamma_0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \psi = mc\psi \tag{4.42}$$

Burada γ_μ parametrelerinin yapısı hakkında henüz bir şey bilmiyoruz. Ama (4.42) Dirac denkleminin karesini alırsak yukarıdaki (4.40) Klein-Gordon denklemini vermelidir. Bu koşul γ_μ katsayıları arasında aşağıdaki denklemleri verir.

$$\gamma_0^2 = -1 \,, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = +1 \,, \quad \mu \neq \nu \quad \text{için} \quad \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu \tag{4.43}$$

Dirac, bu bağıntıları sağlayan 4×4 bir matris kümesi buldu. Bunlara *Dirac matrisleri* denir.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Dirac denklemindeki γ_μ katsayıları 4×4 matrisler olduğu için ψ dalga fonksiyonu artık 4-bileşenli sütun spinörüdür.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

Burada $\alpha = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere ψ_α kompleks değerli skaler fonksiyonlardır. Dirac denklemi özel görelilik etkisini ve spini hesaba katar; elektron, kuark vs gibi spin-$\frac{1}{2}$ parçacıkları tanımlar. Dirac denklemi ilk defa anti-parçacıkların varlığını ortaya atmıştır. Elektronun antisine pozitron denir. Buna göre Dirac spinöründeki ψ_1 bileşeni spin-yukarı elektronu, ψ_2 bileşeni spin-aşağı elektronu, ψ_3 bileşeni spin-yukarı pozitronu ve ψ_4 bileşeni spin-aşağı pozitronu temsil eder.

Dirac matrislerini, (4.38) denklemi ile verilen Pauli spin-matrisleri σ_k (burada $k = 1, 2, 3$) cinsinden de ifade edebiliriz.

$$\gamma_0 = -\gamma^0 = \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & +iI \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_k \\ -i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

Burada I niceliği 2×2 birim matristir. (4.43) denklemi ile verilen koşulları sağlayan tek bir matris kümesi yoktur. Gama matrislerini burada olduğu gibi reel ve kompleks sayılardan oluşturursak Dirac temsili, sadece reel sayılardan oluşturursak Majarona temsilleri denir. Parçacık fiziğinde, parçacık ile bunun anti-parçacığı farklı ise Dirac temsilleri, fakat parçacık ile bunun anti-parçacığı aynı ise Majarona temsilleri kullanılır. Yukarıda (4.42) ile verilen Dirac denklemini kovaryant biçimde aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc\psi = 0 \tag{4.47}$$

Bu denklem m kütleli ve spini $1/2$ olan serbest bir parçacığın (biz elektron diyelim) hareketini tarif eder. Bu elektron, $A^{\mu} = \left(\frac{1}{c}V, A^1, A^2, A^3\right)$ elektromanyetik potansiyel 4-vektörü ile temsil edilen elektrik alan ve manyetik alan olan bir bölge içindeyse, elektron elektrik yükünden dolayı bu elekromanyetik alanla etkileşecektir. Bu etkileşimi de $\hbar\partial^{\mu} \to \hbar\partial^{\mu} + ieA^{\mu}$ yer değiştirmesi ile hesaba katarız.

$$\gamma_{\mu}(\hbar\partial^{\mu} + ieA^{\mu})\psi - mc\psi = 0 \tag{4.48}$$

Bu denklemin düşük hız ve zayıf elektromanyetik alan limiti alındığında (4.37) ile verilen Pauli-Schrödinger denklemine ulaşılır.

Bu tez çalışmasında biz dış cebir kullandığımız için (4.48) denklemini dış cebir lisanında yeniden ifade ediyoruz.

$$*\gamma \wedge \left(d + i\frac{e}{\hbar}A\right)\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi * 1 = 0 \tag{4.49}$$

Burada $\gamma := \gamma_{\mu}dx^{\mu}$ olarak tanımlanan 1-formdur ve $A = A_{\mu}dx^{\mu}$ Maxwell potansiyel 1-formudur. Bu denklem, spin-1/2 olan $q = -e$ elektrik yüklü bir elektronun bulunduğu bölgedeki elektromanyetik alanla etkileşimini tarif etmektedir ve aşağıda tanımlanan dönüşümler altında ivaryanttır.

$$\psi \to \exp\left(-i\frac{e}{\hbar}f\right)\psi\,, \qquad A \to A + df \tag{4.50}$$

Bu dönüşümler altında $F = dA$ olarak tanımlanan Maxwell elektromanyetik 2-formu da invaryant kalır. Bu dönüşümlere ayar dönüşümleri ve f'ye de ayar fonksiyonu denir. Buradaki $\exp(-i\frac{e}{\hbar}f)$ dönüşüm elemanından dolayı ayar grubuna $U(1)$ (bir parametreli üniter grup) adı verilir. Son bir not olarak şunu da belirtelim. Minkowski uzayzamanında kartezyen koordinatlar yerine eğrisel koordinatlarda (örneğin küresel koordinatlar) çalışırsak (4.49) denkleminde $d \to D$ ve $\gamma_{\mu} \to \gamma_a$ yer değiştirmelerini yapmak yeterlidir. Fakat, Dirac spinörünün kovaryant dış türevinin, yani $D\psi$, nasıl yazıldığını bilmek önemlidir. Bunu sonraki altbaşlıkta tanımlayacağız.

4.7.2 Bilineer kovaryantlar

(4.43) ile verilen koşulları sağlayan matrislerden oluşan $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ kümesi $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ Cifford cebirini üretir.

$$\gamma_0^2 = -1\,, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = +1\,, \quad a \neq b \quad \text{için} \quad \gamma_a\gamma_b = -\gamma_b\gamma_a \tag{4.51}$$

Bu çarpım kurallarını antikomütatör, Minkowski metriği ve 4×4 birim matris cinsinden tek bir ifade olarak yazabiliriz.

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} := \gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab}I \tag{4.52}$$

Bu kısımda koordinat sisteminden bağımsız bir formülasyon geliştirceğimiz için indisleri Latin harfleri ile gösteriyoruz.[1] Bu cebirdeki her hangi bir elemanı şu şekilde gösteriyoruz, $u \in \mathcal{C}\ell_{1,3}$.

$$u = \langle u\rangle_0 + \langle u\rangle_1 + \langle u\rangle_2 + \langle u\rangle_3 + \langle u\rangle_4 \tag{4.53}$$

Burada $\langle u\rangle_0$ skaler (veya sıfır-vektör) terimi, $\langle u\rangle_1$ vektör (veya bir-vektör) terimini, $\langle u\rangle_2$ iki-vektör terimini, $\langle u\rangle_3$ üç-vektör terimini ve $\langle u\rangle_4$ dört-vektör terimini temsil eder. Her bir terimin bazlarını Tablo 4.1'de özetliyoruz. Buradaki bazları farklı bir biçimde yazmak için aşağıdaki nicelikleri tanımlıyoruz.

$$\sigma_{ab} := \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b] \tag{4.54}$$

$$\gamma_5 := \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{4.55}$$

Burada σ_{ab} niceliğine $SO_+(1,3)$ özel ortokronus Lorentz grubunun[2] üreticileri denir ve $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ Clifford cebirinin $\langle u\rangle_2$ elamının bazı olarak kullanılabilir (Cornwell 1997). γ_5

[1] Koordinat dönüşümlerinde komleks cebirdeki sanal birim i'nin hep aynı kaldığını unutmayalım. Benzer olarak, koordinat dönüşümlerinde $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ cebirinin bazlarını oluşturan γ_a'lar da aynı kalır.

[2] Özel Lorentz grubu $SO(1,3)$ iki tane bileşene sahiptir. Birim eleman I ile bağlantılı olan bileşen $SO_+(1,3)$ ile gösterilir ve özel ortokronus Lorentz grubu adı verilir. Bu bileşen hem uzayın hem de zamanının yönünü korur. Diğer bileşen $SO(1,3)\backslash SO_+(1,3)$ hem uzayın hem de zamanın yönünü tersine çevirir.

Tablo 4.1: $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ Clifford cebirinin bazları

k-vektör	Bazlar	Baz sayısı
Skaler	I	1
Vektör	γ_0 , γ_1 , γ_2 , γ_3	4
2-vektör	$\gamma_0\gamma_1$, $\gamma_0\gamma_2$, $\gamma_0\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$	6
3-vektör	$\gamma_0\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_0\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_0\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	4
4-vektör	$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	1

niceliği ise $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ Clifford cebirinin $\langle u\rangle_4$ elamının bazıdır ve aynı zamanda k-vektörü $(4-k)$-vektöre eşleştiren bir dualite operatörüdür. Yani, $a \neq b \neq c$ için $\gamma_a\gamma_b\gamma_c$ bazını $\gamma_5\gamma_d$ olarak da yazabiliriz. Sonuçta, $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ Clifford cebirinin 16 tane bazını $\{I, \gamma_a, \sigma_{ab}, \gamma_5\gamma_a, \gamma_5\}$ kümesiyle gösteriyoruz.

Kuantum mekaniği teorsinin temel varsayımlarından biri dalga fonksiyonun mutlak karesinin olasılık yoğunluğu olarak yorumlanmasıdır. Olasılık yoğunluğu tanım gereği kesinlikle pozitif olmalıdır. Bunu sağlamak için dört bileşenli sütun matrisiyle temsil ettiğimiz ψ Dirac spinörünün Dirac eşleniğini aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

$$\overline{\psi} := \psi^{\dagger}\gamma_0 = \begin{pmatrix} -i\psi_1^{\star} & -i\psi_2^{\star} & i\psi_3^{\star} & i\psi_4^{\star} \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Burada * kompleks eşlenikliği, † hermitsel eşlenikliği gösterir. Şimdi elimizdeki $\{I, \gamma_a, \sigma_{ab}, \gamma_5\gamma_a, \gamma_5\}$ kümesi, ψ Dirac spinörü ve bunun Dirac eşleniği $\overline{\psi}$ ile aşağıdaki bilineer kovaryantları yazıyoruz.

$$\Omega_1 = \overline{\psi}\psi \tag{4.57}$$

$$J^a = \overline{\psi}\gamma^a\psi \tag{4.58}$$

$$S^{ab} = \overline{\psi}\sigma^{ab}\psi \tag{4.59}$$

$$K^a = \overline{\psi}\gamma_5\gamma^a\psi \tag{4.60}$$

$$\Omega_2 = \overline{\psi}\gamma_5\psi \tag{4.61}$$

Bunlara bilineer denmesinin sebebi hem soldaki $\overline{\psi}$ niceliğinde hem de sağdaki ψ niceliğinde lineer olmalarındandır.

$$(c_1\overline{\varphi} + c_2\overline{\chi})\psi = c_1(\overline{\varphi}\psi) + c_2(\overline{\chi}\psi) \tag{4.62}$$

$$\overline{\psi}(c_1\varphi + c_2\chi) = c_1(\overline{\psi}\varphi) + c_2(\overline{\psi}\chi) \tag{4.63}$$

Burada $c_1,\ c_2$ kompleks sabitlerdir ve $\psi,\ \varphi,\ \chi$ dört bileşenli sütun Dirac spinörleridir. Kovaryant denmesinin sebebi de (2.47) denklemi ile verilen $e' = L^{-1}e$ dönüşüm kuralı altında Ω_1 ile Ω_2 niceliklerinin bir skaler gibi, J^a ile K^a niceliklerinin vektör gibi ve S^{ab} niceliğinin de $(2,0)$-tipi tensör gibi, yani kovaryant olarak, dönüşmelerindendir.

$$\begin{array}{rcll} e & \rightarrow & e' = L^{-1}e & \text{ortonormal koçerçeve} \\ J & \rightarrow & J' = L^{-1}J & \text{vektör} \\ S & \rightarrow & S' = L^{-1}L^{-1}S & \text{tensör} \\ K & \rightarrow & K' = L^{-1}K & \text{psüdovektör} \\ \Omega_2 & \rightarrow & \Omega_2' = \Omega_2 & \text{psüdoskaler} \end{array} \tag{4.64}$$

Burada L özel ortokronus Lorentz grubunun elamanıdır, $L \in SO_+(1,3)$. Diğer yandan, parite operatörü altında Ω_1 ile Ω_2 zıt işaretli dönüştüğü için Ω_1 skaler, Ω_2 psüdoskaler olarak adlandırılır. Aynı nedenle J^a vektör, K^a psüdovektör olarak tanımlanır. (4.64) denklemleri ile verilen dönüşüm kurallarını aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\begin{array}{rcl} e & \rightarrow & e' = ses^{-1} \\ \Omega_1 & \rightarrow & {\Omega_1}' = \Omega_1 \\ J & \rightarrow & J' = sJs^{-1} \\ S & \rightarrow & S' = ssSs^{-1}s^{-1} \\ K & \rightarrow & K' = sKs^{-1} \\ \Omega_2 & \rightarrow & {\Omega_2}' = \Omega_2 \end{array} \tag{4.65}$$

Ayrıca Dirac spinörü şöyle göre dönüşür.

$$\psi' = s^{-1}\psi \quad \text{ve} \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi}s \tag{4.66}$$

Burada dönüşüm elemanı s zaman ve uzay yönünü koruyan $Spin_+(1,3)$ grubunun elemanıdır, $s \in Spin_+(1,3)$. Ayrıca (4.64) ve (4.65) denklemleri ile verilen eşdeğer dönüşüm kurallarına bakınca s ile $-s$ elemanlarının L elamının yaptığı işi yaptığını görürüz. Yani $Spin_+(1,3)$ grubunun iki elemanı $SO_+(1,3)$ grubunun bir elemanının yaptığını yapıyor. Buna $Spin_+(1,3)$ grubu $SO_+(1,3)$ grubunun iki katlı örtenidir denir.

Bilineer kovaryantların uzayın bir bölgesi üzerinden integralleri, bazı fiziksel gözlenebilen niceliklerin beklenen değerlerini verir. Örneğin, J^a'nın sıfırıncı bileşenini düşünelim, $J^0 = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma_0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0$. Buna olasılık yoğunluğu denir ve ρ ile gösterilir, $J^0 := c\rho \geq 0$. Bunun uzaysal bir bölge üzerinden integrali, elektronun o bölgede bulunma olasılığını verir. J^a'nın uzay bileşenleri $J^k = \overline{\psi}\gamma^k\psi$ (burada $k = 1,2,3$) olasılık akımını verir, $\vec{J} = \gamma_k J^k$. Olasılık yoğunluğu ve olasılık akımı aşağıdaki süreklilik denklemini sağlar.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J^k}{\partial x^k} = 0 \tag{4.67}$$

Bu denkleme olasılık korunumu da denir ve daha sıkışık biçimde $\partial_a J^a = 0$ olarak ifade edilir. Dirac akımı $\mathbf{J} = J^a\gamma_a$ gelecek-yönlü bir vektördür, çünkü $\mathbf{J}^2 = J^a J_a = -(J^0)^2 + (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 \leq 0$. Ayrıca $\mathbf{J}^2 \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{u} = \mathbf{J}/\sqrt{-\mathbf{J}^2}$ olarak tanımlanan zamansal birim, $\mathbf{u}^2 = -1$, vektörün zaman bileşeni elektronun muhtemel hızını verir, $u^0 = \gamma^0 \cdot u = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ki burada $\vec{J} = \rho\vec{v}$ kullanılmıştır. $\mathbf{S} = \frac{1}{2}S^{ab}\sigma_{ab}$ iki-vektörü genellikle elektromanyetik moment yoğunluğu olarak yorumlanır, ama aslında elektronun elektromanyetik momentinin olasılık yoğunluğunu verir. $\mathbf{K} = K^a\gamma_a$ uzaysal bir vektördür ve $\mathbf{K^2} = -\mathbf{J^2} \geq 0$ özelliğini sağlar, ayrıca $\mathbf{J}$'ye diktir, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{J} = 0$. İlavaten, $\mathbf{K}$ vektörü elektronun spininin yönünü verir. Burada $\mathbf{K^2} \neq 0$ için spin vektörü $\frac{1}{2}\hbar\mathbf{K}/\sqrt{\mathbf{K^2}}$ şeklindedir. Son olarak bilineer kovaryantların ilki ve sonuncusu de Broglie tarafından tek bir nicelikte birleştirilmiştir.

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \gamma_5 \tag{4.68}$$

Bu altbaşlığı, (4.49) denklemi ile verilen serbest elektron (yani $A = 0$) için Dirac denklemini Riemannsal geometride yazarak bitiriyoruz.

$$*\gamma \wedge \tilde{D}\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi * 1 = 0 \tag{4.69}$$

Burada $\tilde{D}\psi$ ile ψ spinörünün $\tilde{\omega}^{ab}$ Levi-Civita bağlantı 1-formuna göre kovaryant dış türevini gösterir.

$$\tilde{D}\psi = d\psi + \frac{1}{2}\tilde{\omega}^{ab}\sigma_{ab}\psi \tag{4.70}$$

Burada tanımları gereği hem σ_{ab} niceliği hem de $\tilde{\omega}^{ab}$ niceliği antisimetriktir.

4.7.3 İki Boyutta Dirac Lagranjiyeni

İki boyutlu M_2 manifolduyla ilişkili bir spinör ψ, Lorentz grubu $SO(1,1)$'in iki katlı örteninin bir temsilini taşıyan kompleks bir vektör olarak tanımlanır. M_2 manifoldunun ortonormal çerçevesiyle ilişkili olan $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ Clifford cebirinin üretecileri, γ_a, aşağıdaki anti-komütatör bağıntısını sağlar.

$$\{\gamma_a\,,\gamma_b\} = 2\eta_{ab} I\,, \quad a = 0\,,1 \tag{4.71}$$

Buarada I niceliği 2×2 birim matristir ve iki boyutta Minkowski metriği $\eta_{ab} = diag(-1,+1)$ halini alır. Bu anti-komütatör bağıntısını sağlayan γ_a üreticilerinin bir temsilini aşağıdaki 2×2 matrisler ile veriyoruz.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

Bu temsili kullanırsak ψ spinörünü de iki bileşenli sütun matrisiyle temsil ederiz.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

Burada ψ_1 ve ψ_2 kompleks-değerli fonksiyonlardır. Bu γ_a matrisleri şu özellikleri sağlar:

$$\gamma_0^\dagger = -\gamma_0\,, \quad \gamma_1^\dagger = \gamma_1\,, \quad \gamma_0\gamma_a^\dagger\gamma_0 = \gamma_a\,. \tag{4.74}$$

Burada † sembolü Hermitsel eşlenikliği gösterir. İki boyutta ψ ile bunun Dirac eşleniğini $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ ve $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ cebirinin bazlarını, $\{I, \gamma^a, \sigma^{ab}\}$, kullanılarak aşağıdaki bilineer kovaryant nicelikler oluşturulur.

$\overline{\psi}\psi$	skaler
$\overline{\psi}\gamma^a\psi$	vektör
$\overline{\psi}\sigma^{ab}\psi$	tensör

Burada $\overline{\psi}I\psi = \overline{\psi}\psi$ kullandık ve $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a\,, \gamma^b]$ niceliğine $SO_+(1\,,1)$ özel ortokronus Lorentz grubunun üreticisi denir ve iki boyutta yalnızca bir tane üretici vardır.

$$\sigma^{ab} := \sigma^{01} = \frac{1}{4}[\gamma^0\,, \gamma^1] = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

$\left\{I\,, \gamma^a\,, \sigma^{ab}\right\}$ kümesi $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ Clifford cebirinin baz elemanlarını da oluşturur. Bu bilgiler ışığında ψ spinörünün kovaryant dış türevinin aşağıdaki biçimde olması gerektiğini öne sürüyoruz.

$$D\psi = d\psi + \frac{1}{2}\omega^{[ab]}\sigma_{ab}\psi + b\eta_{ab}\omega^{ab}I\psi \tag{4.76}$$

Burada b katsayısı reel sayı veya kompleks sayı olabilir. Bunu daha sonra belirleyeceğiz. σ_{ab} niceliğinin indisleri antisimetrik olduğundan dolayı $D\psi$ ifadesinin içinde ortonormal koteğet demetinin ω^{ab} tüm bağlantı 1-formunun $\omega^{[ab]}$ antisimetrik parçası $\left\{I\,, \gamma^a\,, \sigma^{ab}\right\}$ kümesinin σ_{ab} elemanıyla ve $\eta_{ab}\omega^{ab}$ parçası da I elemanıyla bağlanabilmiştir. Fakat γ^a elemanı ω^{ab}'nın hiç bir parçasıyla bağlanamamıştır. Başka çalışmalarda bu problemin ele alınması planlanmaktadır. Ayrıca, $\eta_{ab}\omega^{ab} = Q$ şeklinde nonmetrisitinin iz 1-formu cinsinden yazarak ve $I\psi = \psi$ kullanarak (4.76) denklemini yeniden yazıyoruz.

$$D\psi = d\psi + \frac{1}{2}\omega^{[ab]}\sigma_{ab}\psi + bQ\psi \tag{4.77}$$

Bunun Dirac eşleniğini alırsak, Dirac eşlenik spinörün kovaryant dış türevini hesap ederiz.

$$\begin{aligned} D\overline{\psi} &:= (D\psi^\dagger)\gamma_0 \\ &= \left[d\psi^\dagger + \frac{1}{2}\omega^{[ab]}(\sigma_{ab}\psi)^\dagger + b^\star Q\psi^\dagger\right]\gamma_0 \\ &= d(\psi^\dagger\gamma_0) + \frac{1}{2}\omega^{[ab]}\psi^\dagger I\sigma_{ab}^\dagger\gamma_0 + b^\star Q(\psi^\dagger\gamma_0) \\ &= d\overline{\psi} + \frac{1}{2}\psi^+(-\gamma_0\gamma_0)\sigma_{ab}^\dagger\gamma_0\omega^{[ab]} + b^\star Q\overline{\psi} \\ &= d\overline{\psi} - \frac{1}{2}\overline{\psi}(\gamma_0\sigma_{ab}^\dagger\gamma_0)\omega^{[ab]} + b^\star Q\overline{\psi} \\ &= d\overline{\psi} - \frac{1}{2}\overline{\psi}\sigma_{ab}\omega^{[ab]} + b^\star Q\overline{\psi} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Burada $I = -\gamma_0\gamma_0$ niceliği 2×2 birim matristir. Ayrıca σ_{ab} niceliği 2×2 matris iken ω^{ab} niceliği bir tane 1-formdur. Yani, ω^{ab} niceliği ψ'nin, $\psi^\dagger$'ın ve σ_{ab}'nin sağına ve soluna serbestçe geçebilir. Ayrıca, $b^\star$ niceliği b'nin kompleks eşleniğidir. Bu bilgiler ışığında Dirac lagranjiyen 2-formunu yazıyoruz.

$$L_D = Her\left(i\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi\right) + Her\left(i\frac{mc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * 1\right) \tag{4.79}$$

Burada $\gamma = \gamma_a e^a$ niceliği $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ değerli 1-formdur. En genelde bir $\hat{A}$ operatörünün hermitsel kısmı şöyle tanımlanır.

$$Her(\hat{A}) = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) \tag{4.80}$$

O halde, L_D şöyle hesap edilir.

$$\begin{aligned} L_D &= \frac{1}{2}[i\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi + (\overline{\psi}\underbrace{i}_{i^\dagger=-i}\gamma_a\underbrace{*e^a}_{1-form}\wedge\underbrace{D\psi}_{1-form})^\dagger] + \frac{mc}{2\hbar} * 1[i\overline{\psi}\psi + (i\overline{\psi}\psi)^\dagger] \\ &= \frac{i}{2}[\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi + (\overline{\psi}\gamma_a D\psi \wedge *e^a)^\dagger] + \frac{imc}{2\hbar} * 1[\overline{\psi}\psi - \psi^\dagger(\overline{\psi})^\dagger] \end{aligned}$$

Burada $(\overline{\psi})^\dagger = (\psi^\dagger\gamma_0)^\dagger = \gamma_0^\dagger(\psi^\dagger)^\dagger = \gamma_0^\dagger\psi = -\gamma_0\psi$ olduğundan L_D şu hale gelir.

$$\begin{aligned} L_D &= \frac{i}{2}[\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi + (D\psi^\dagger)\gamma_a^\dagger(\overline{\psi})^\dagger \wedge *e^a] + \frac{imc}{2\hbar} * 1[\overline{\psi}\psi + \psi^\dagger\gamma_0\psi] \\ &= \frac{i}{2}[\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi - (D\psi^\dagger)I\gamma_a^\dagger\gamma_0\psi \wedge *e^a] + \frac{imc}{\hbar} * 1\overline{\psi}\psi \end{aligned}$$

Burada yine $-\gamma_0\gamma_0 = I$ birim matrisi araya yerleştirdik. Artık, $\gamma_0\gamma_a^\dagger\gamma_0 = \gamma_a$ özelliğini kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} L_D &= \frac{i}{2}[\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi + (D\overline{\psi})\gamma_a\psi \wedge *e^a] + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * 1 \\ &= \frac{i}{2}[\overline{\psi} * \gamma \wedge D\psi + (D\overline{\psi}) \wedge \underbrace{\gamma_a * e^a}_{*\gamma}\psi] + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * 1 \end{aligned}$$

Sonuçta Dirac lagranjiyen 2-formunu aşağıdaki gibi elde ediyoruz.

$$L_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi} * \gamma \wedge (D\psi) + (D\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi\right] + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * 1 \qquad (4.81)$$

Artık, bunun $e^a\,, \omega^a{}_b\,, \overline{\psi}$ varyasyonlarını hesaplayabiliriz.

4.7.4 İki Boyutta Dirac Lagranjiyeninin Varyasyonu

Önce Dirac lagranjiyen 2-formunun (4.81) koçerçeveye göre varyasyonunu hesap ediyoruz.

$$\delta_e L_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}(\delta * \gamma) \wedge (D\psi) + (D\overline{\psi}) \wedge (\delta * \gamma)\psi\right] + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi(\delta * 1) \qquad (4.82)$$

Burada $\delta * \gamma = \delta(\gamma_a * e^a) = \gamma_a(\delta * e^a)$ şeklindedir. Genel olarak $\delta * e^a$'yı hesap edelim.

$$\delta * e^a = \delta(\epsilon^a{}_b e^b) = \epsilon^a{}_b \delta e^b = *(e^a \wedge e_b)\delta e^b = \delta e^b \wedge *e^a{}_b \qquad (4.83)$$

O halde,

$$\begin{aligned} \delta * \gamma &= \underbrace{\gamma_a \delta e^b \wedge *e^a{}_b}_{a\leftrightarrow b} = \delta e^a \gamma_b \wedge *(e^b \wedge e_a) \\ &= \delta e^a \wedge *(\gamma_b e^b \wedge e_a) = \delta e^a \wedge *(\gamma \wedge e_a) \qquad (4.84) \end{aligned}$$

Şimdi de $\delta * 1$'i hesap edelim.

$$\begin{aligned} \delta * 1 &= \delta\left(\frac{1}{2}\epsilon_{ab}e^{ab}\right) = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\delta e^a \wedge e^b + \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_{ab}e^a \wedge \delta e^b}_{a\leftrightarrow b} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\delta e^a \wedge e^b + \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon_{ba}}_{-\epsilon_{ab}}\underbrace{e^b \wedge \delta e^a}_{-\delta e^a \wedge e^b} \\ &= \epsilon_{ab}\delta e^a \wedge e^b = \delta e^a \wedge (\epsilon_{ab}e^b) = \delta e^a \wedge *e_a \qquad (4.85) \end{aligned}$$

Sonuç olarak L_D'nin koçerçeveye göre varyasyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
\delta_e L_D &= \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\delta e^a \wedge *(\gamma \wedge e_a) \wedge (D\psi) + \underbrace{(D\overline{\psi}) \wedge \delta e^a}_{-\delta e^a \wedge (D\overline{\psi})} \wedge *(\gamma \wedge e_a)\psi\right] \\
&\quad + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi\delta e^a \wedge *e_a \\
&= \delta e^a \wedge \left\{\frac{i}{2}\left[\overline{\psi} * (\gamma \wedge e_a) \wedge (D\psi) - (D\overline{\psi}) \wedge *(\gamma \wedge e_a)\psi\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * e_a\right\}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

İkinci olarak (4.81) ile verilen Dirac lagranjiyeninin bağlantı 1-formuna göre varyasyonunu hesap edelim.

$$\delta_\omega L_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi} * \gamma \wedge (\delta_\omega D\psi) + (\delta_\omega D\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi\right] + 0 \tag{4.87}$$

Bu aşamada $Q = \eta_{ab}\omega^{ab} = \eta_{ab}\omega^{(ab)}$ olduğunu hatırlayarak buradaki iki terimi de ayrı ayrı hesap edelim.

$$\begin{aligned}
\overline{\psi} * \gamma \wedge (\delta_\omega D\psi) &= \overline{\psi} * \gamma \wedge \delta_\omega(d\psi + \frac{1}{2}\omega^{[ab]}\sigma_{ab}\psi + b\eta_{ab}\omega^{(ab)}\psi) \\
&= \overline{\psi} * \gamma \wedge \left(\frac{1}{2}\delta\omega^{[ab]}\sigma_{ab}\psi + b\eta_{ab}\delta\omega^{(ab)}\psi\right) \\
&= \underbrace{\overline{\psi} * \gamma \wedge \delta\omega^{ab}}_{-\delta\omega^{ab}\wedge\overline{\psi}*\gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ab} + b\eta_{ab}\right)\psi \\
&= -\delta\omega^{ab} \wedge \overline{\psi}\gamma_c * e^c\left(\frac{1}{2}\sigma_{ab} + b\eta_{ab}\right)\psi \\
&= \delta\omega^{ab} \wedge *e^c\overline{\psi}\left(-\frac{1}{2}\gamma_c\sigma_{ab} - b\gamma_c\eta_{ab}\right)\psi
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Şimdi de ikinci terimi hesap edelim.

$$\begin{aligned}
\left(\delta_\omega D\overline{\psi}\right) \wedge *\gamma\psi &= \delta_\omega\left(d\overline{\psi} - \frac{1}{2}\overline{\psi}\sigma_{ab}\omega^{[ab]} + b^\star\eta_{ab}\omega^{(ab)}\overline{\psi}\right) \wedge \gamma_c * e^c\psi \\
&= \left(-\frac{1}{2}\overline{\psi}\sigma_{ab}\delta\omega^{[ab]} + b^\star\eta_{ab}\delta\omega^{(ab)}\overline{\psi}\right) \wedge \gamma_c * e^c\psi \\
&= \delta\omega^{ab} \wedge \left(-\frac{1}{2}\overline{\psi}\sigma_{ab} + b^\star\eta_{ab}\overline{\psi}\right)\gamma_c * e^c\psi \\
&= \delta\omega^{ab} \wedge *e^c\overline{\psi}\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ab}\gamma_c + b^\star\eta_{ab}\gamma_c\right)\psi
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Bu iki terimin sonuçlarını birleştirelim.

$$\delta_\omega L_D = \delta\omega^{ab} \wedge *e^c \frac{i}{2}\overline{\psi} \left[-\frac{1}{2}(\gamma_c\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma_c) + (b^\star - b)\eta_{ab}\gamma_c \right] \psi \tag{4.90}$$

Burada iki-boyuta özel olarak $\gamma_c\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma_c = 0$ özdeşliğini kullanırsak sonucumuz şu hale gelir.

$$\delta_\omega L_D = \delta\omega^{ab} \wedge \frac{i(b^\star - b)}{2}\eta_{ab}\overline{\psi} * \gamma\psi \tag{4.91}$$

Burada eğer b reel ise bu terimin sıfır olduğuna, saf sanal ise sıfırdan farklı olduğuna dikkat ediyoruz.

Son olarak (4.81) denklemi ile verilen Dirac lagranjiyeninin $\overline{\psi}$'ye göre varyasyonunu hesap edelim.

$$\delta_{\overline{\psi}} L_D = \frac{i}{2}\left[\delta\overline{\psi} * \gamma \wedge (D\psi) + \delta_{\overline{\psi}}(D\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi\right] + \delta\overline{\psi}\left(\frac{imc}{\hbar}\right)\psi * 1 \tag{4.92}$$

İlk terim ve son terim olduğu gibi kalacaklar, ama ikinci terimle biraz oynamamız gerekiyor.

$$\begin{aligned}
X &:= \delta_{\overline{\psi}}(D\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi \\
&= \delta_{\overline{\psi}}(d\overline{\psi} - \frac{1}{2}\overline{\psi}\sigma_{ab}\omega^{ab} + \overline{\psi}b^\star Q) \wedge *\gamma\psi \\
&= (d\delta\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi - \frac{1}{2}\delta\overline{\psi}\sigma_{ab}\omega^{ab} \wedge \gamma_c * e^c\psi + \delta\overline{\psi}\, b^\star \underbrace{Q \wedge *\gamma}_{-(*\gamma)\wedge Q}\psi \\
&= (d\delta\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi - \frac{1}{2}\delta\overline{\psi}\underbrace{\sigma_{ab}\gamma_c}_{-\gamma_c\sigma_{ab}}\omega^{ab} \wedge *e^c\psi - \delta\overline{\psi} * \gamma \wedge b^\star Q\psi \\
&= (d\delta\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi + \frac{1}{2}\delta\overline{\psi}\gamma_c\sigma_{ab}\underbrace{\omega^{ab} \wedge *e^c}_{-(*e^c)\wedge\omega^{ab}}\psi - \delta\overline{\psi} * \gamma \wedge b^\star Q\psi \\
&= (d\delta\overline{\psi})\gamma^a\psi \wedge *e_a - \frac{1}{2}\delta\overline{\psi} * \gamma \wedge \omega^{ab}\sigma_{ab}\psi - \delta\overline{\psi} * \gamma \wedge b^\star Q\psi
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Dördüncü satırdan beşinci satıra geçerken Dirac matrisleri arasında aşağıdaki özdeşliklerden faydalandık.

$$\gamma_c\sigma_{ab} = \frac{1}{2}(\eta_{ac}\gamma_b - \eta_{bc}\gamma_a) \tag{4.94}$$

$$\sigma_{ab}\gamma_c = \frac{1}{2}(-\eta_{ac}\gamma_b + \eta_{bc}\gamma_a) \tag{4.95}$$

Üç ve daha yüksek boyutlarda bu özdeşliklerin sağ tarafına γ_5'li bir terim daha gelir. İki boyutta bu terimi görmeyiz. Şimdi yukarıda bulduğumuz sonuçtaki ilk terimi tam türev olarak yazalım.

$$\begin{aligned} d\left[(\delta\overline{\psi}\gamma_a\psi) * e^a\right] &= D(\delta\overline{\psi}\gamma_a\psi) \wedge *e^a + (\delta\overline{\psi}\gamma_a\psi) D * e^a \\ &= \left[d(\delta\overline{\psi}\gamma_a\psi) - \omega^b{}_a(\delta\overline{\psi}\gamma_b\psi)\right] \wedge *e^a + \delta\overline{\psi}\gamma_a\psi D * e^a \\ &= (d\delta\overline{\psi})\gamma_a\psi \wedge *e^a + \delta\overline{\psi}\gamma_a d\psi \wedge *e^a - \delta\overline{\psi}\omega^b{}_a \wedge *e^a\gamma_b\psi \\ &\quad +\delta\overline{\psi}\gamma_a\psi D * e^a \end{aligned} \tag{4.96}$$

Burada $\delta\overline{\psi}\gamma_a\psi$ niceliği vektör-değerli bir 0-formdur. Yukarıda yaptıklarımızı biraz düzenlersek denklem (4.96)'in ilk terimini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} (d\delta\overline{\psi}) \wedge \gamma_a * e^a\psi &= -\delta\overline{\psi}\gamma_a d\psi \wedge *e^a + \delta\overline{\psi}\omega^b{}_a \wedge *e^a\gamma_b\psi - \delta\overline{\psi}\gamma_a D * e^a\psi \\ &\quad +mod(d) \end{aligned} \tag{4.97}$$

Bundan sonraki hesaplar için $\gamma_0 = -2\gamma^1\sigma_{01}$ ve $\gamma_1 = 2\gamma^0\sigma_{01}$ eşitlikleri ile aşağıdaki özdeşliği kullanmak faydalı olacaktır.

$$\begin{aligned} D * e^a &= D(\eta^{ab} * e_b) \\ &= 2Q^{ab} \wedge *e_b + \eta^{ab}(-Q \wedge *e_b + *e_{bc} \wedge T^c) \\ &= 2Q^{ab} \wedge *e_b - Q \wedge *e^a \end{aligned} \tag{4.98}$$

Modelimzde burulmayı sıfır yaptığımız çin ikinci satırda $T^c = 0$ aldık. O halde, denklem (4.97)'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
(d\delta\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi &= \delta\overline{\psi} * \gamma \wedge d\psi + \delta\overline{\psi}\left[\omega^{ab} \wedge *e_b\gamma_a\psi - 2Q^{ab} \wedge *e_b\gamma_a\psi\right. \\
&\quad \left. + Q \wedge *e^a\gamma_a\psi\right] + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi + \omega^{[ab]} \wedge *e_{[b}\gamma_{a]}\psi + \omega^{(ab)} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi \\
&\quad -2\omega^{(ab)} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi + \underbrace{Q \wedge *\gamma}_{-(*\gamma)\wedge Q}\psi\} + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi + \omega^{[ab]} \wedge *e_{[b}\gamma_{a]}\psi - \omega^{(ab)} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi - *\gamma \wedge Q\psi\} \\
&\quad + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi + \frac{1}{2}\omega^{[ab]} \wedge (*e_b\gamma_a - *e_a\gamma_b)\psi - Q^{ab} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi \\
&\quad - * \gamma \wedge Q\psi\} + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi + \omega^{[01]} \wedge (*e_1 \underbrace{\gamma_0}_{=-2\gamma^1\sigma_{01}} - * e_0 \underbrace{\gamma_1}_{=2\gamma^0\sigma_{01}})\psi \\
&\quad -Q^{ab} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi - *\gamma \wedge Q\psi\} + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi - \underbrace{\omega^{[01]} \wedge (*e_1\gamma^1 + *e_0\gamma^0)(2\sigma_{01})}_{\omega^{ab}\wedge*\gamma\sigma_{ab}}\psi \\
&\quad -Q^{ab} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi - *\gamma \wedge Q\psi\} + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi - \underbrace{\omega^{ab} \wedge *\gamma}_{-(*\gamma)\wedge\omega^{ab}}\sigma_{ab}\psi - Q^{ab} \wedge *e_{(b}\gamma_{a)}\psi - *\gamma \wedge Q\psi\} \\
&\quad + mod(d) \\
&= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi + *\gamma \wedge \omega^{ab}\sigma_{ab}\psi - *\gamma \wedge Q\psi - Q^{ab} \wedge *e_{(a}\gamma_{b)}\psi\} \\
&\quad + mod(d)
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Burada oval parantez simetrizasyonu, köşeli parantez antisimetrizasyonu göstermektedir. Bulduğumuz bu sonucu (4.93) denkleminde yerine yerleştirelim.

$$\begin{aligned}
X &= \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge d\psi + \frac{1}{2} * \gamma \wedge \omega^{ab}\sigma_{ab}\psi - *\gamma(1 + b^\star) \wedge Q\psi \\
&\quad -Q^{ab} \wedge *e_{(a}\gamma_{b)}\psi\} + mod(d)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Şimdi de (4.77) denklemini kullanarak bunu yeniden yazıyoruz.

$$X = \delta\overline{\psi}\{*\gamma \wedge [D\psi - (1 + b^\star + b)Q\psi] - Q^{ab} \wedge *e_{(a}\gamma_{b)}\psi\} + mod(d) \tag{4.101}$$

Son olarak bu sonucu da (4.92) denklemine yerleştiriyoruz.

$$\begin{aligned}
\delta_{\overline{\psi}} L_D &= \delta\overline{\psi}\Big\{ i * \gamma \wedge D\psi + \frac{imc}{\hbar}\psi * 1 \\
&\quad + \frac{i}{2}\gamma_{(a} * e_{b)} \wedge Q^{ab} - \frac{i(1+b+b^{\star})}{2} * \gamma \wedge Q\psi \Big\} + mod(d)
\end{aligned} \tag{4.102}$$

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Einstein'ın kütleçekim teorisi olan genel görelilik teorisinin yazıldığı pseudo-Riemansal geometriden farklı olarak burulmanın sıfır, fakat nonmetrisiti ve eğriliğin sıfırdan farklı olduğu Riemannsal olmayan bir geometride çalışılmıştır. İlk önce eylem integrali belirlenip sonrasında varyasyon hesabıyla alan denklemlerini bulma yoluna gidilmiştir. Standart model, $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ayar teorisi sayesinde zayıf kuvvet, elektromanyetik kuvvet ve şiddetli çekirdek kuvvetini birleştirebildiği için, bu çalışmada dördüncü temel kuvvet olan kütleçekim kuvveti için ayar yaklaşımı kullanılmıştır. Kuantum mekaniği ve özel görelilik ile uyumlu olan Dirac denklemi, Rimensal olmayan eğriliği ve nonmetrisitisi olan uzayzaman için iki boyutta yeniden yazılmıştır. Hesaplar uzun ve karmaşık olduğundan daha az matematiksel ayrıntı daha çok fiziksel yorum görebilmek için teorimizi iki boyutta formülleştirdik. Varyasyonel alan denklemlerini elde edebilmek için Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalan aşağıdaki lagranjiyen 2-formunu tanımladık.

$$
\begin{aligned}
L = \kappa R^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \mu R^a{}_b \wedge *R^b{}_a + \nu Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + \lambda_a \wedge T^a \\
+\frac{i}{2}\left[\overline{\psi} * \gamma \wedge (D\psi) + (D\overline{\psi}) \wedge *\gamma\psi\right] + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * 1
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Ardından bunun lagrange çarpanına, ortonormal koçerçeveye, tüm bağlantı 1-formuna ve spinörün Dirac eşleniğine göre bağımsız varyasyonları yapıldı. Çıkan denklemler sırasıyla aşağıdadır.

$$
T^a = 0 \tag{5.2}
$$

$$
\begin{aligned}
-\nu[(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} + Q_{bc} \wedge (\iota_a * Q^{bc})] - \mu(\iota_a R^c{}_b) \wedge *R^b{}_c + D\lambda_a \\
+\frac{i}{2}\left[\overline{\psi} * (\gamma \wedge e_a) \wedge (D\psi) - (D\overline{\psi}) \wedge *(\gamma \wedge e_a)\psi\right] + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi * e_a = 0
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa[2Q^{bc} \wedge *e_{ac} - Q \wedge *e_a{}^b] + 2\nu * Q_a{}^b + 2\mu D * R^b{}_a + \lambda_a \wedge e^b \\
+\frac{i(b^\star - b)}{2}\eta_a^b\overline{\psi} * \gamma\psi = 0
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

$$*\gamma \wedge D\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi * 1 + \frac{1}{2}\gamma_{(a} * e_{b)} \wedge Q^{ab}\psi - \frac{(1+b+b^{\star})}{2} * \gamma \wedge Q\psi = 0 \qquad (5.5)$$

Böylece Riemannsal olmayan bir kütleçekim teorisine Dirac alanı da dahil edilerek kütleçekimin kuantizasyonu için bir adım atılmış oldu. Bu denklemlere değişik çözümler aramak başlıbaşına bir problem olup daha sonraki çalışmalara bırakılmıştır.

6. KAYNAKLAR

Adak, M. and Dereli, T., "The quadratic symmetric teleparallel gravity in two dimensions", *EPL*, 82, 3-8, (2008).

Adak, M., "Gauge approach to the symmetric teleparallel gravity", *Int. J. Geomet. Meth. Modern Phys.*, 15, 185-198, (2018).

Adak, M., Kalay, M. and Sert, O., "Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity", *Int. J. Mod. Phys.*, 15, 619-634, (2006).

Arminjon, M. and Reifler, F., "Equivalent forms of Dirac equations in curved spacetimes and generalized de Broglie relations", *Braz. J. Phys.*, 43, 64–77 (2013).

Benn, I. M., Dereli, T. and Tucker, R. W., "A critical analysis of some fundamental differences in gauge approaches to gravitation", *J. Phys. A*, 15, 849-866, (1982).

Benn, I. M., Dereli, T. and Tucker, R. W., "Double-dual solutions of generalized theories of gravitation", *Gen. Relat. Gravit.*, 13, 581-589, (1981).

Cornwell, J. F., Group Theory in Physics: An Introduction, San Diego: Academic Press, (1997).

Dereli, T. and Tucker, R. W., "Non-metricity induced by dilaton gravity in two dimensions", *Class. Quantum Grav.*, 11, 2575-2584, (1994).

Griffiths, D. J., Introduction to Elementary Particles, New York: Wiley, (1987).

Hehl, F. W., McCrea, J. D., Mielke, E. W. and Ne'eman, Y., "Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance", *Physics Reports*, 258, 1-171, (1995).

Kiefer, K., Quantum Gravity, Oxford: Oxford University Press, (2012).

Pala, Ç., "İki boyutlu Riemann-Weyl geometrisinde kütleçekim ayar teorisi", Yüksek Linsans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Denizli, (2019).

Pollock, M. D., "On the Dirac equation in curved space-time", *Acta Phys.Polon.B*, 41, 1827-1846, (2010).

Silenko, A. J. and Teryaev, O. V., "Semiclassical limit for Dirac particles interaction with a gravitational field", *Physical Review D*, 71, 064016, (2005).

Tucker, R. W. and Wang, C., "Black holes with Weyl charge and non-Riemannian waves", *Class. Quantum Grav.*, 12, 2587-2606, (1995).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	ERTAN KÖK
Doğum Yeri ve Tarihi	:	ANTALYA, 07.01.1990
Lisans Üniversite	:	ORTA DOĞU TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
Yüksek Lisans Üniversite	:	PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ (Devam)
Elektronik posta	:	ekok@pau.edu.tr
İletişim Adresi	:	PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ, FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ, FİZİK BÖLÜMÜ, DENİZLİ