T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN SINIRLILIĞI, DİRENÇLİLİĞİ, ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mücahit YALÇIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

Konya-2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin

Adı Soyadı	Mücahit YALÇIN
Numarası	075202031010
Ana Bilim / Bilim Dalı	Orta öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi/Matematik Eğitimi
Programı	Tezli Yüksek Lisans ☐ Doktora ☐
Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Sınırlılığı, Dirençliliği, Asimptotik Kararlılığı ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

Ek- 8: Yüksek Lisans Tezi Kabul Formu

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin

Adı Soyadı	Mücahit YALÇIN
Numarası	075202031010
Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi / Matematik Eğitimi
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK
Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Sınırlılığı, Dirençliliği, Asimptotik Kararlılığı ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan Bazı Fark Denklemlerinin Sınırlılığı Dirençliliği, Asimptotik Kararlılığı ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma başlıklı bu çalışma 24/11/2010 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	Danışman	[signature]
Prof. Dr. Eşref HATIR	Üye	[signature]
Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	Üye	[signature]

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Dağıstan Şimşek yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK' e, çalışmam sırasında çeşitli konularda desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya ve bana maddi manevi destek olan eşime teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Mücahit YALÇIN

Konya, 2010

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Mücahit YALÇIN
	Numarası	075202031010
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Orta öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi/Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ☐ Doktora ☐
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Dağıstan Şimşek
	Tezin Adı	Fark Denklemlerinin Sınırlılığı, Dirençliliği, Asimptotik Kararlılığı ve Global Asimptotik Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli temel kavramlar hakkında bilgi verdik.

Üçüncü bölümde, $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-4}^q}$ $(n = 0,1,2,...)$ fark denklemini $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartlarını kullanarak sınırlılığı, dirençliliği, asimptotik kararlılığı ve global asimptotik kararlılığını inceledik.

Dördüncü bölümde ise çalışmamız ile ilgili sayısal örnekler verdik.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi,sınırlılık,dirençlilik,asimptotik kararlılık

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Mücahit YALÇIN
	Numarası	075202031010
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Orta öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi/Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ☐ Doktora ☐
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Dağıstan Şimşek
	Tezin İngilizce Adı	A Study On The Boundedness, Persistance, Asymptotic Behaviour And Global Asymptotic Behaviour Of Difference Equations

SUMMARY

This study consists of four sections. In the first section, we give information about some difference equations studied before

In the second section, we give information about necessary consepts for our study.

In the third section, we studied difference equation $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-4}^q}$ $(n = 0,1,2,...)$ and $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ investigated boundedness, persistance, asymptotic behaviour and global asymptotic behaviour of the positive solutions.

In the fourth section, we give information about results and recommendations.

Key Words: boundedness, persistance, asymptotic behaviour

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bu çalışmada $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{B}{x_{n-4}^q}$ $(n = 0,1,2,...)$ fark denkleminin, $x_{-4},\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartları altında çözümlerinin davranışları araştırıldı. $pq \le 1$ için bu fark denkleminin çözümlerinin sınırlı ve dirençli olduğu gösterildikten sonra yine $pq \le 1$ için de denge noktasında asimptotik kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı incelendi. Ayrıca $pq > 1$ olduğunda sınırsız ve dirençsiz çözümlerinin varlığı gösterildi. Yapılan ispatlar nümerik örneklerle pekiştirildi. İspatlar yapılırken bugüne kadar çalışılmış birçok çalışma incelenip, bu çalışmalarda kullanılan çözüm metotlarından faydalanıldı.

1. BÖLÜM

1.1. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Kocic ve Ladas (1993), $x_{n+1}=\dfrac{A}{x_n^p}+\dfrac{B}{x_{n-1}^q}$, $A,B,p,q,x_{-1},x_0\in(0,\infty)$ denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını araştırmışlardır.

Philos ve arkadaşları (1994), Global Çekimli Lineer Olmayan Fark Denklemleri ile ilgili yaptıkları çalışmada $x_{n+1}=\dfrac{A}{x_n^p}+\dfrac{B}{x_{n-1}^q}$, $A,B,p,q,x_{-1},x_0\in(0,\infty)$ denkleminde p = q = 1 durumunu incelemiş ve denklemin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Devault ve arkadaşları (1995), yaptıkları çalışmada $x_{n+1}=\dfrac{A}{x_n^p}+\dfrac{B}{x_{n-1}^q}$ $A,B,p,q,x_{-1},x_0\in(0,\infty)$ denkleminde $pq\le 1$ durumunu incelemişlerdir. Bu çalışmada denklemin pozitif yarı dönmelerinin iki, negatif yarı dönmelerinin bir uzunluğunda olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca $pq\le 1$ olduğunda denkleminin çözümlerinin sınırlı ve dirençli, $pq>1$ olduğunda ise denklemin sınırsız ve dirençsiz çözümlere sahip olduğunu göstermişlerdir.

Amleh ve arkadaşları (1999), yaptıkları çalışmada $x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}x_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}}$, $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}+x_nx_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}}$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}x_{n-2}}{x_nx_{n-2}+x_{n-1}}$, fark denklemlerinin pozitif başlangıç şartları altında, pozitif denge noktaları olan $\bar{x}=1$’ de global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca sıra değişikliği olmak üzere pozitif yarı dönmelerinin bir veya iki terimli, negatif yarı dönmelerinin ise bir veya üç terimli olduğunu göstermişlerdir.

Devault ve Galminas (1999), yaptıkları çalışmada $x_{-1}, x_0, A \in (0,\infty)$, $p>1$ için $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2000), yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{B}{x_{n-1}^q} + \dfrac{C}{x_{n-2}^s}$ denklemini $A, B, p, q, s, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ ve $c \in [0,\infty)$ şartları altında aşağıdaki durumları incelemişlerdir. İlk olarak $p,q,s \in (0,1]$, $x_{-2}, x_{-1}, x_0, A \in (0,\infty)$ ve $c \geq 0$ için denklemin sınırlı ve dirençli olduğunu buna bağlı olarak $x_{-2}, x_{-1}, x_0, A \in (0,\infty)$ ve $c \geq 0$ başlangıç şartları ile $p=2,\ q=\dfrac{1}{2},\ s=1$ alarak denklemin sınırlı ve dirençli olduğunu göstermişlerdir. İkinci olarak $ps>1$ ve $q^2 = ps$ için denklemin sınırsız ve dirençsiz çözümlerinin olduğunu, buradan hareketle $A, C \geq 1$, $p,q,s > \sqrt{2}$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, \in (0,\infty)$ için denklemin sınırsız ve dirençsiz çözümlerinin olduğunu bulmuşlardır. Son olarak denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu gösterdikten sonra $p_i \in (0,1]$, $i=1,2,...$ ve $x_{-k},...,x_0, A \in (0,\infty)$, $c \leq 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^{p_1}} + \dfrac{1}{x_{n-1}^{p_2}} + ... + \dfrac{1}{x_{n-k+2}^{p_{k-1}}} + \dfrac{C}{x_{n-k+1}^{p_k}}$ denkleminin $\bar{x}$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu genellemesine ulaşmışlardır.

Papaschinopoulos ve Schinas (2000), fark denklemleri ile ilgili yaptıkları çalışmada, $k \in \{1,2,...\}$, $p_i \in \{0,1,...,\mathrm{k}\}$, $A_i \in \{0,\infty\}$, $i \in \{0,...,\mathrm{k}\text{-}1\}$ ve $x_{-k},...,x_0$ değerleri rastgele pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1}\left(\dfrac{A_i}{x_{n-i}^{pi}}\right) + \left(\dfrac{1}{x_{n-k}^{pk}}\right)$ genel fark denkleminin denge noktasının $1 < \bar{x} < \sum_{i=0}^{k-1} A_i + 1$ şartını sağladığını göstermişlerdir.

Ardından denklemin her yarı dönmesinin $k+1$ uzunluğunda ve salınımlı olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra $p_i p_{k-i} \leq 1,\ i \in \left\{0,1,\ldots,\frac{k-r}{2}\right\}$ olmak üzere denklemin her pozitif çözümünün sınırlı ve dirençli olduğunu bulmuşlardır. Yine $p_i p_{k-i} > 1$, $i \in \left\{0,1,\ldots,\frac{k-r}{2}\right\}$ için denklemin pozitif çözümlerinin sınırlı ve dirençli olmadığını göstermişlerdir. Son olarak denklemin denge noktasında lokal asimptotik kararlı ve global asimptotik kararlı olduğunu bulmuşlardır.

Mishev ve Patula (2000), yaptıkları çalışmada, A>0, $k \geq 2,\ n \geq 2k$ için, $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n y_{n-2} \cdots y_{n-(2k-2)}}{y_{n-1} y_{n-3} \cdots y_{n-(2k-1)}}$ fark denkleminin denge noktasının $\bar{y} = 1 + A$ şeklinde olduğunu gösterdikten sonra sıfır olmayan çözümlerinin denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2002), yaptıkları çalışmada $a \in [0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$ ve $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ şartları altında $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1^p}}{x_{n^p}}$ fark denklemi için aşağıdaki durumları incelemişlerdir. Denklemin denge noktasını $\bar{x} = a+1$ olarak bulmuşlardır. $a > 2p-1$ için denklemin denge noktasının lokal asimptotik kararlı ve $0 \leq a < 2p-1$ için de kararsız olduğunu göstermişlerdir. $\bar{x} = a+1$ için denklemin tek yarı dönmelerinin monoton olduğunu göstermişlerdir. Son olarak $0 \leq a < 1$ alındığında denklemin çözümlerinin $0 < x_{-1} \leq 1$ ve $x_0 \geq \dfrac{1}{(1-a)^{\frac{1}{p}}}$ için $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$ eşitliklerinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

Yan ve Li (2003), yaptıkları iki çalışmanın birincisinde $a \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{a + \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini, değişmez aralığını ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir. İkinci çalışmada ise $a \geq 0$, $\beta,\gamma > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{a - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin $a \geq 0$, $\beta,\gamma > 0$, $\beta < \gamma$ ve $0 < a < \beta(\gamma - \beta)$ şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Çinar (2004), yaptığı çalışmasında; $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + a x_{n-1} x_n}$ fark denkleminin çözümlerini, başlangıç şartlarını $x_0 > 0,\ x_{-1} > 0,\ a > 0$ seçerek elde etmiş ve ispatını tümevarım yöntemiyle göstermiştir.

Çinar ve arkadaşları (2004), yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n \sum_{i=1}^{k} x_{n-i}}{x_n + x_{n-1} + x_n \sum_{i=2}^{k} x_{n-i}}$ fark denklem ailesinde $k \in N$ için denklemlerin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2004), yaptıkları çalışmalarında $k = 1, 2, ...$ ve $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_{-1}, x_0$ pozitif başlangıç şartları altında, $i \neq j$, $j - 1$ ve $j = 1, 2, ..., k$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\sum_{i=0}^{k} x_{n-i} + x_{n-j+1} x_{n-j} + 1}{\sum_{i=0}^{k} x_{n-i}}$ fark denklem ailesinin pozitif çözümlerinin salınımlı olduğunu ve $\bar{x} = 1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada a, β, γ ve başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{a x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^{p}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Yan ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmalarında $a \in R$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları rastgele reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = a - \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}}$ fark denkleminin sınırlılığını, periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Stevic (2005), yaptığı çalışmada pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = a + \dfrac{x_{n-1}^{p}}{x_n^{p}}$ fark denkleminin sınırlılığını, global asimptotik kararlılığını ve salınımlılığını incelemiştir.

Saleh ve Aloqeili (2005), yaptıkları iki çalışmanın birinde $y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots,$ $y_0 \in (0,\infty)$, $A < 0$ ve $k = 1,2,\ldots$ için, $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denklemi üzerine yaptıkları çalışmada fark denkleminin negatif denge noktası olan $\bar{y} = 1 + A$ nın global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Diğer çalışmada da $y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots, y_0, A \in (0,\infty)$ ve $k = 2,3,\ldots$ için $y_{n+1} = A + \dfrac{y_{n-k}}{y_n}$ fark denklemini incelemişlerdir. $A > 1$ için denklemin pozitif denge noktası olan $\bar{y} = 1 + A$ nın global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Hamza (2006), yaptığı çalışmasında $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin $\alpha < 0, x_0, x_{-1} < 0$ başlangıç şartları altında, global asimptotik kararlılığını ve salınımlılığını incelemiştir.

Hamza (2008), yaptığı çalışmada $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n^{k}}$ fark denkleminin $\alpha \in (0,\infty)$ ve $k \in (0,\infty)$ şartları altında, sınırlı, global asimptotik kararlı, salınımlı, çözümlerinin iki periyotlu ve yarı dönmelerinin bir uzunluğunda olduğunu göstermiştir.

Yalçınkaya (2008), yaptığı çalışmada $a, k \in (0,\infty)$ ve a, k rastgele pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = a + \dfrac{x_{n-m}}{x_n^{k}}$ genel fark denkleminin denge noktasının $\bar{x} > 1$ şeklinde olduğunu göstermiştir. Ardından eğer $k(k+1)^{(1-k)/k} < a$ ise denklemin $\bar{x}$ denge noktasında lokal asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir. Daha sonra $a \neq 1$ ise denklemin her çözümünün sınırlı olduğunu ve $a > k^{1/k} \geq 1$ ise denklemin $\bar{x}$

denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir. Son olarak m tek sayı olmak üzere denklemin ilk çözümlerinin $m+1$ periyotlu olduğunu göstermiştir.

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanımlar verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, *y(x)* bağımlı değişkeninin değişimi, $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak *x*'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde *x'*in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve *y* de *n*'e bağlı bağımlı değişken olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile birlikte bağımsız değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını ihtiva eden denklemlere Fark Denklemi denir. n'nin sürekli olduğu durumlarda diferansiyel denklemler ile benzerlik gösterir.

Birinci dereceden bir fark denklemi genel olarak

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci dereceden bir fark denklemi ise

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir.

Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $x_{-k},\ x_{-(k-1)},\ ...,\ x_0,\ \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n,\ x_{n-1},\ ...,\ x_{n-k}), \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2. (2.1) denkleminde

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x})$$

şartını sağlayan $\overline{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 2.3. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $n \geq -k$ olmak üzere her n tamsayısı için

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı var ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük p pozitif tam sayısına ise esas periyot denir.

Tanım 2.4. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak biçimde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine sınırlı ve dirençlidir denir.

Tanım 2.6. (2.1) denkleminden elde edilen

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}\left(\overline{x},\ \overline{x},\ ...,\ \overline{x}\right)$$

denkleminde $f\left(u_0,\ u_1,\ ...,\ u_k\right)$ dönüşümü ile elde edilen

$$z_{n+1} = a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + ... + a_k z_{n-k} \tag{2.2}$$

denklemine $\overline{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\overline{x},\ ...\ ,\overline{x}) \lambda^{k-i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Tanım 2.7. $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve x_{-k}, $x_{-(k-1)}$, ..., x_0, $\in I$ olmak üzere:

(i) Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \overline{x}\right| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $\left|x_n - \overline{x}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(ii) $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ olacak şekilde,

$$\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| + ... + \left|x_{-k} - \overline{x}\right| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ise $\overline{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\overline{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(vi) Eğer

$$|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| + \ldots + |x_{-k} - \overline{x}| < r$$

ve bazı $N \geq -1$ sayıları için

$$|x_N - \overline{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktasına repeller denir.

Teorem 2.2. (Clark Teoremi) (2.1) denkleminin asimptotik kararlı olması için (2.2) denkleminde $\sum_{i=0}^{k} |a_i| < 1$ olmalıdır.

Tanım 2.8. $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $\mathrm{m} < \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} < \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \overline{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde $l \geq -k$, $\mathrm{m} < \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} \geq \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \overline{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

3. BÖLÜM

$x_{n+1}=\frac{A}{x_n^p}+\frac{B}{x_{n-4}^q}$, FARK DENKLEMİNİN SINIRLILIĞI, DİRENÇLİLİĞİ, ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, A, B, p, q, \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{A}{x_n^p}+\frac{B}{x_{n-4}^q} \tag{3.1}$$

fark denkleminin sınırlılığı, dirençliliği, denge noktasının asimptotik kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

(3.1) denklemi

$$x_{n+1}=\frac{A}{x_n^p}+\frac{B}{x_{n-4}^q}=B\left(\frac{A/B}{x_n^p}+\frac{1}{x_{n-4}^q}\right)$$

şeklinde düzenlenirse $x_{n+1}=\frac{A}{x_n^p}+\frac{B}{x_{n-4}^q}$ denklemini incelemekle $x_{n+1}=B\left(\frac{A/B}{x_n^p}+\frac{1}{x_{n-4}^q}\right)$ eşitliğinde $\frac{A/B}{x_n^p}+\frac{1}{x_{n-4}^q}$ ifadesini incelemek aynıdır. Bu yüzden $\frac{A}{B}=A$ kabul ederek çalışmamızın bundan sonraki kısmını

$$x_{n+1}=\frac{A}{x_n^p}+\frac{1}{x_{n-4}^q} \tag{3.2}$$

denklemi üzerinde yapacağız. (3.2) denkleminin denge noktası bulunurken

$$x_{n+1}=\frac{A}{x_n^p}+\frac{1}{x_{n-4}^q}$$

denkleminde x_{n+1}, x_n, x_{n-4} ifadelerinin yerine $\bar{x}$ yazılırsa

$$\bar{x} = \frac{A}{\bar{x}^{p}} + \frac{1}{\bar{x}^{q}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $p = q$ alınırsa

$$\bar{x} = \frac{A}{\bar{x}^{p}} + \frac{1}{\bar{x}^{p}}$$

$$\bar{x}^{p+1} = A+1$$

$$\bar{x} = \left(A+1\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

bulunur. Bulunan $\left(A+1\right)^{\frac{1}{p+1}}$ ifadesi $\left(A+1\right)$' den küçüktür. Böylece

$$\bar{x} < \left(A+1\right) \qquad (3.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n^{p}} + \frac{1}{x_{n-4}^{q}}$$

eşitliğinde x_{n+1}, $\frac{A}{x_n^{p}}$ ve $\frac{1}{x_{n-4}^{q}}$ terimlerinin her birinden büyüktür. Buradan

$$x_{n+1} > \frac{1}{x_{n-4}^{q}}$$

olup x_{n+1} ve x_{n-4} yerine $\bar{x}$ yazılırsa

$$\bar{x} > \frac{1}{\bar{x}^{q}}$$

$$\bar{x}^{q+1} > 1$$

$$\bar{x} > 1 \qquad (3.4)$$

bulunur. (3.3) ve (3.4) ten

$$1 < \bar{x} < A+1$$

elde edilir.

Aşağıdaki iki Lemma (3.2) denkleminin yarı dönmeleri hakkında önemli bilgiler verir.

Lemma 3.1. (3.2) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) (3.2) denkleminin bir uzunluğunda yarı dönmeleri vardır.

b) Bazı $N \geq 0$ için $x_N \leq \left(\dfrac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ ise $x_{N+1} > \bar{x}$ dir.

c) Bazı $N \geq 0$ için $x_N \leq \bar{x}$ ise $x_{N+1} > \dfrac{A}{(A+1)^p}$ dir.

d) Bazı $N \geq 1$ için $x_N \leq \min\left\{\dfrac{A}{(A+1)^p}, \left(\dfrac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$ ise $x_{N-3} > \bar{x}$, $x_{N-1} > \bar{x}$ ve $x_{N+1} > \bar{x}$ dir.

İspat.

a) (3.2) denkleminde bazı $N \geq 0$ için $x_{N-4} < \bar{x}$, $x_{N-3} > \bar{x}$, $x_{N-2} < \bar{x}$, $x_{N-1} > \bar{x}$, $x_N < \bar{x}$ şeklinde seçelim. Bu durumda

$$x_{N+1} = \frac{A}{x_N^p} + \frac{1}{x_{N-4}^q} > \frac{A}{\bar{x}^p} + \frac{1}{\bar{x}^q} = \bar{x}, \quad x_{N+1} > \bar{x}$$

$$x_{N+2} = \frac{A}{x_{N+1}^p} + \frac{1}{x_{N-3}^q} < \frac{A}{\bar{x}^p} + \frac{1}{\bar{x}^q} = \bar{x}, \quad x_{N+2} < \bar{x}$$

$$x_{N+3} = \frac{A}{x_{N+2}^p} + \frac{1}{x_{N-2}^q} > \frac{A}{\bar{x}^p} + \frac{1}{\bar{x}^q} = \bar{x}, \quad x_{N+3} > \bar{x}$$

$$x_{N+4}=\frac{A}{x_{N+3}^{p}}+\frac{1}{x_{N-1}^{q}}<\frac{A}{\overline{x}^{p}}+\frac{1}{\overline{x}^{q}}=\overline{x}\,,\quad x_{N+4}<\overline{x}$$

$$x_{N+5}=\frac{A}{x_{N+4}^{p}}+\frac{1}{x_{N}^{q}}>\frac{A}{\overline{x}^{p}}+\frac{1}{\overline{x}^{q}}=\overline{x}\,,\ x_{N+5}>\overline{x}$$

olur. Böylece (3.2) denkleminin bir uzunluğunda yarı dönmelere sahip olduğu gösterilmiş olur.

b) Bazı $N\geq 0$ için $x_N\leq\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$x_{N+1}=\frac{A}{x_{N}^{p}}+\frac{1}{x_{N-4}^{q}}$$

eşitliğinde x_{N+1}, $\frac{A}{x_N^p}$ ve $\frac{1}{x_{N-4}^q}$ terimlerinin her birinden büyüktür. Buradan

$$x_{N+1}>\frac{A}{x_{N}^{p}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte x_N yerine kendisine eşit veya kendisinden daha büyük olan $\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesi yazılırsa

$$x_{N+1}>\frac{A}{\left(\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p}}=A+1$$

$1<\overline{x}<A+1$ eşitsizliğinden dolayı $A+1$ yerine kendisinden daha küçük olan $\overline{x}$ yazılırsa eşitsizlik bozulmaz. Böylece

$$x_{N+1}>\overline{x}$$

elde edilir.

c) Bazı $N \geq 0$ için $x_N \leq \overline{x}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$x_{N+1} = \frac{A}{x_N^p} + \frac{1}{x_{N-4}^q}$$

eşitliğinde x_{N+1}, $\frac{A}{x_N^p}$ ve $\frac{1}{x_{N-4}^q}$ terimlerinin her birinden büyüktür.

Buradan

$$x_{N+1} > \frac{A}{x_N^p}$$

elde edilir. Ayrıca, $x_N \leq \overline{x}$ ve $\overline{x} < A+1$ olup $x_N < A+1$ olur. x_N yerine kendisinden daha büyük olan $A+1$ ifadesi yazılırsa

$$x_{N+1} > \frac{A}{(A+1)^p}$$

elde edilir.

d) Bazı $N \geq 1$ için $x_N \leq \min\left\{\frac{A}{(A+1)^p}, \left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$x_{N+1} = \frac{A}{x_N^p} + \frac{1}{x_{N-4}^q}$$

eşitliğinde x_{N+1}, $\frac{A}{x_N^p}$ ve $\frac{1}{x_{N-4}^q}$ terimlerinin her birinden büyüktür. Buradan

$$x_{N+1} > \frac{A}{x_N^p}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte x_N yerine kendisinden daha büyük veya kendisine eşit olan $\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesi yazılırsa

$$x_{N+1} > \frac{A}{\left[\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p} = A+1$$

bulunur. $1 < \bar{x} < A+1$ eşitsizliğinden dolayı $A+1$ yerine kendisinden daha küçük olan $\bar{x}$ yazılırsa eşitsizlik bozulmaz. Böylece

$$x_{N+1} > \bar{x}$$

elde edilir. Ayrıca **(a)** şıkkında başlangıç şartları

$$x_{N-3} > \bar{x} \text{ ve } x_{N-1} > \bar{x}$$

şeklinde seçilmişti. Böylece $x_{N-3} > \bar{x}$, $x_{N-1} > \bar{x}$ ve $x_{N+1} > \bar{x}$ elde edilmiş olur.

Şimdi aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$f(x) = \frac{A}{(Ax^q+1)^p} + \frac{1}{(A+x^p)^q}, \; x \geq 0$$

$f^{'}(x)$, $f(x)'$ in türevi olmak üzere

$$f^{'}(x) = \frac{-Ap(Ax^q+1)^{-p-1}(qAx^{q-1})}{(Ax^q+1)^{2p}} - \frac{q(A+x^p)^{-q-1}px^{p-1}}{(A+x^p)^{2q}}$$

olur. $A, p, q, x \in (0,\infty)$ olduğundan $f^{'}(x) < 0$ olduğu açıktır. Bu durumda $f(x)$ pozitif tanımlı azalan bir fonksiyondur. Ayrıca $f(0) = A+1 > \bar{x} > 1$ olup $f(0) > 1$ olduğundan herhangi bir pozitif *k* sayısı için $f(k) = 1$ olur. Diğer taraftan

$$(f(x)-1)(x-k) < 0, \; x \in (0,k) \cup (k,\infty)$$

yazılabilir.

Lemma 3.2. $pq \leq 1$ ve $m = \min\left\{k, \left(\dfrac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}, \dfrac{A}{(A+1)^p}, \dfrac{1}{(A+1)^{\frac{1}{q}}}\right\}$ olmak üzere (3.2) denkleminin $\{x_n\}_{n=-4}^{\infty}$ çözümleri için, $x_N \leq m$ ve bazı N 'ler için $N \geq 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda x_{N-3}, x_{N-1}, x_{N+1}, x_{N+3}, $x_{N+5} \in (\overline{x}, \infty)$ ve $x_N < x_{N+6} < \overline{x}$ dir.

İspat. Lemma 3.1. (d)' den x_{N-3}, x_{N-1}, $x_{N+1} \in (\overline{x}, \infty)$ dir. Ayrıca

$$x_{N+5} = \frac{A}{x_{N+4}^p} + \frac{1}{x_N^q}$$

eşitliğinde x_{N+5}, $\dfrac{A}{x_{N+4}^p}$ ve $\dfrac{1}{x_N^q}$ ifadelerinin her birinden büyüktür. Buradan

$$x_{N+5} > \frac{1}{x_N^q}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte x_N yerine kendisinden daha büyük ya da kendisine eşit olan $\dfrac{1}{(A+1)^{\frac{1}{q}}}$ ifadesi yazılırsa

$$x_{N+5} > \frac{1}{\left(\dfrac{1}{(A+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^q} = A+1$$

elde edilir. Burada $1 < \overline{x} < A+1$ eşitsizliğinden dolayı $A+1$ yerine kendisinden daha küçük olan $\overline{x}$ yazılırsa eşitsizlik bozulmaz. Böylece

$$x_{N+5} > \overline{x}$$

bulunur. Şimdi

$$x_{N-4}^{q} \le 1 \text{ ve } x_{N+4}^{p} \le 1$$

olmak üzere

$$x_{N+1} = \frac{A}{x_N^p} + \frac{1}{x_{N-4}^q} < \frac{A}{x_N^p} + 1 = \frac{A + x_N^p}{x_N^p}$$

$$x_{N+5} = \frac{A}{x_{N+4}^p} + \frac{1}{x_N^q} < A + \frac{1}{x_N^q} = \frac{Ax_N^q + 1}{x_n^q}$$

olur. Ayrıca

$$x_{N+6} = \frac{A}{x_{N+5}^p} + \frac{1}{x_{N+1}^q}$$

eşitliğinde x_{N+5} yerine kendisinden daha büyük olan $\dfrac{Ax_N^q + 1}{x_N^q}$ ifadesi ve x_{N+1} yerine de kendisinden daha büyük olan $\dfrac{A + x_N^p}{x_N^p}$ ifadesi yazılırsa

$$x_{N+6} = \frac{A}{x_{N+5}^p} + \frac{1}{x_{N+1}^q} > \frac{A}{\left(\dfrac{Ax_N^q + 1}{x_N^q}\right)^p} + \frac{1}{\left(\dfrac{A + x_N^p}{x_N^p}\right)^q}$$

$$x_{N+6} > \frac{Ax_N^{pq}}{(Ax_N^q + 1)^p} + \frac{x_N^{pq}}{(A + x_N^p)^q}$$

$$x_{N+6} > x_N^{pq}\left(\frac{A}{(Ax_N^q + 1)^p} + \frac{1}{(A + x_N^p)^q}\right)$$

$$x_{N+6} > x_N^{pq} f(x_N)$$

elde edilir. Diğer taraftan $x_N \le m$ ve $m \le k$ ise $x_N \le m \le k$ olur. Buradan $x_N - k \le 0$ ve $(f(x_N) - 1)(x_N - k) < 0$ ise $f(x_N) - 1 > 0$ olup $f(x_N) > 1$ olur. Böylece elde edilen

$$x_{N+6} > x_N^{pq} f(x_N)$$

eşitsizliğinde $f(x_N)$ yerine kendisinden daha küçük olan 1 yazılırsa

$$x_{N+6} > x_N^{pq} \tag{3.5}$$

elde edilir. Ayrıca $m = \min\left\{ k, \left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}}, \frac{A}{(A+1)^p}, \frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{q}}} \right\}$ eşitliğinde m, parantez içindeki terimlerin her birinden küçüktür veya en fazla bu terimlerin en küçüğüne eşit olabilir. $m \le k$ olsun. Diğer taraftan $\mathrm{A} \in (0,\infty)$ olduğundan

$$\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}} < 1, \quad \frac{A}{(A+1)^p} < 1 \text{ ve } \frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{q}}} < 1$$

olduğu açıktır. Böylece k bu terimlerin en küçüğü olduğundan

$$m \le k < 1$$

elde edilir. $x_N \le m$ ve $m \le k < 1$ olduğundan $x_N < 1$ bulunur. Buradan $x_N < 1$ ve $pq \le 1$ ise $x_N^{pq} > x_N$ eşitsizliği bulunur. (3.5) eşitsizliğinde x_N^{pq} yerine kendisinden daha küçük olan x_N ifadesi kullanılırsa eşitsizlik bozulmaz. Böylece

$$x_{N+6} > x_N \tag{3.6}$$

elde edilir. Ayrıca

$$x_{N+6} = \frac{A}{x_{N+5}^p} + \frac{1}{x_{N+1}^q}$$

eşitliğinde Lemma 3.1. (a)'dan $x_{N+1} > \overline{x}$ ve $x_{N+5} > \overline{x}$ eşitsizlikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik

$$x_{N+6} = \frac{A}{x_{N+5}^p} + \frac{1}{x_{N+1}^q} < \frac{A}{\overline{x}^p} + \frac{1}{\overline{x}^q} = \overline{x}$$

$$x_{N+6} < \overline{x} \tag{3.7}$$

elde edilir. Böylece (3.6) ve (3.7)' den

$$x_N < x_{N+6} < \overline{x}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ispatta $x_{N-4}^q > 1$ ve $x_{N+4}^p > 1$ olarak seçilirse

$$x_{N+1} = \frac{A}{x_N^p} + \frac{1}{x_{N-4}^q} > \frac{A}{x_N^p} + 1 = \frac{A + x_N^p}{x_N^p}$$

$$x_{N+5} = \frac{A}{x_{N+4}^p} + \frac{1}{x_N^q} > A + \frac{1}{x_N^q} = \frac{Ax_N^q + 1}{x_n^q}$$

olur. Buradan

$$x_{N+6} = \frac{A}{x_{N+5}^p} + \frac{1}{x_{N+1}^q} < \frac{A}{\left(\frac{Ax_N^q + 1}{x_N^q}\right)^p} + \frac{1}{\left(\frac{A + x_N^p}{x_N^p}\right)^q}$$

$$x_{n+6} < \frac{Ax_N^{pq}}{(Ax_N^q + 1)^p} + \frac{x_N^{pq}}{(A + x_N^p)^q}$$

$$x_{n+6} < x_N^{pq}\left(\frac{A}{(Ax_N^q + 1)^p} + \frac{1}{(A + x_N^p)^q}\right)$$

$$x_{N+6} < x_N^{pq} f(x_N)$$

elde edilir. Bu ise Lemma'nın ifadesi ile çelişir. Dolayısıyla $x_{N-4}^q \leq 1$ ve $x_{N+4}^p \leq 1$ olmalıdır.

Teorem 3.1. $pq \leq 1$ ise (3.2) denkleminin çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

İspat.

m Lemma 3.2'de tanımlandığı gibi

$$m=\min\left\{k,\left(\frac{A}{A+1}\right)^{\frac{1}{p}},\frac{A}{(A+1)^{p}},\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{q}}}\right\}$$

olmak üzere

$$M=\frac{A}{m^{p}}+\frac{1}{m^{q}} \quad \text{ve} \quad c=\min\left\{m,\frac{A}{M^{p}}+\frac{1}{M^{q}}\right\}$$

olsun. Bu durumda (3.2) denkleminin çözümleri için l bir alt sınır olarak seçilirse

$$L=\frac{A}{l^{p}}+\frac{1}{l^{q}}$$

bir üst sınır olduğu açıktır. Böylece $\{x_n\}_{n=-4}^{\infty}$ çözümlerinin sınırlı olduğunu göstermek yeterli olur.

$\{x_n\}_{n=-4}^{\infty}$ çözümleri için c bir alt sınırdır ya da $x_N<c$ olacak şekilde bir $N\geq 0$ sayısı vardır. Bu durumda x_N in $n\geq N$ için $\{x_n\}_{n=-4}^{\infty}$ çözümlerinin alt sınırı olduğunu göstermeliyiz. Aksi halde $n\geq N$ için x_N ' den daha küçük çözümler ortaya çıkar. Bu durumdaki ilk terim x_K olsun. $K>N$ iken $x_K<x_N$ 'dir. Şimdi $x_{K-5},x_{K-1}\in(m,M)$ olsun. Lemma 3.2. den $x_{K-5}>m$ ve $x_{K-1}>m$ dir. O halde $x_{K-5}<M$ ve $x_{K-1}<M$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de $x_{K-8}>m$ ve $x_{K-6}>m$ olduğunu göstermeliyiz. $x_{K-6}\leq m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_K>x_{K-6}\geq x_N$ eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.2.' ye göre bu mümkün değildir. O halde $x_{K-6}>m$ 'dir. Benzer şekilde $x_{K-8}\leq m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_{K-2}>x_{K-8}\geq x_N$ eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.2.' ye göre bu mümkün değildir. O halde $x_{K-8}>m$ ' dir. Buradan

$$x_N>x_K>\frac{A}{M^{p}}+\frac{1}{M^{q}}\geq c>x_N$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $pq \leq 1$ durumunda (3.2) denkleminin çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

Teorem 3.2. $pq > 1$ ise (3.2) denkleminin sınırsız ve dirençsiz çözümleri vardır.

İspat. x_0 başlangıç şartı

$$x_0 < \left(\frac{A^q}{A^{q+1} + 1} \right)^{\frac{1}{pq-1}}$$

şeklinde olsun. (3.2) denkleminde $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{A}{x_0^p} + \frac{1}{x_{-4}^q}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte x_1, $\frac{A}{x_0^p}$ ve $\frac{1}{x_{-4}^q}$ terimlerinin her birinden daha büyüktür. Böylece

$$x_1 > \frac{A}{x_0^p}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.2) denkleminde $n = 4$ için

$$x_5 = \frac{A}{x_4^p} + \frac{1}{x_0^q}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte x_5, $\frac{A}{x_4^p}$ ve $\frac{1}{x_0^q}$ terimlerinin her birinden daha büyüktür. Böylece

$$x_5 > \frac{1}{x_0^q}$$

elde edilir. Şimdi (3.2) denkleminde $n = 5$ için elde edilen

$$x_6 = \frac{A}{x_5^p} + \frac{1}{x_1^q}$$

eşitliğinde x_1 yerine kendisinden daha küçük olan $\frac{A}{x_0^p}$ ifadesi ve x_5 yerine de kendisinden daha küçük olan $\frac{1}{x_0^q}$ ifadesi yazılırsa

$$x_6 < \frac{A}{\left(\frac{1}{x_0^q}\right)^p} + \frac{1}{\left(\frac{A}{x_0^p}\right)^q}$$

$$x_6 < \frac{A^{q+1}x_0^{pq} + x_0^{pq}}{A^q} = x_0^{pq}\left(\frac{A^{q+1}+1}{A^q}\right)$$

$$x_6 < x_0 x_0^{pq-1}\left(\frac{A^{q+1}+1}{A^q}\right)$$

olur. Böylece

$$x_6 < x_0 x_0^{pq-1}\left(\frac{A^{q+1}+1}{A^q}\right) \tag{3.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$x_0 < \left(\frac{A^q}{A^{q+1}+1}\right)^{\frac{1}{pq-1}}$$

eşitsizliğinde her iki tarafın $\frac{1}{pq-1}$ ’inci kuvveti alınırsa

$$x_0^{pq-1} < \frac{A^q}{A^{q+1}+1}$$

elde edilir. (3.9) eşitsizliğinde x_0^{pq-1} yerine kendisinden daha büyük olan $\dfrac{A^q}{A^{q+1}+1}$ ifadesi yazılırsa

$$x_6 < x_0\left(\frac{A^q}{A^{q+1}+1}\right)\left(\frac{A^{q+1}+1}{A^q}\right)$$

olup

$$x_6 < x_0$$

elde edilir. İterasyonla $n \geq 0$ için $x_{6n+6} < x_{6n}$ bulunur. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} x_{6n} = L \geq 0$ limiti mevcuttur. Ayrıca bu limitin varlığı aşağıdaki gibi de gösterilebilir

$$x_{6n+6} = \frac{A}{x_{6n+5}^p} + \frac{1}{x_{6n+1}^q}\,.$$

Eşitliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+6} = \frac{A}{\lim_{n\to\infty} x_{6n+5}^p} + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_{6n+1}^q}$$

bulunur.

Lemma 3.1. (a) dan $x_{n+1},\ x_{n+5}\ \in (\overline{x},\infty)$ olup $n \to 6n$ yazılırsa $x_{6n+1},\ x_{6n+5}\ \in (\overline{x},\infty)$ elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{6n+5} = \infty$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+6} = L \geq 0$$

elde edilir. Buradan kolaylıkla $L = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+i} = \infty \quad (i = 1,5.)$$

elde edilir. Bu da (3.2) denkleminin $pq > 1$ için sınırsız ve dirençsiz olduğunun ispatıdır.

Sonuç 3.1. (3.2) denkleminin çözümleri ancak ve ancak $pq \leq 1$ iken sınırlı ve dirençlidir.

Teorem 3.3. $x_{-4},\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ A \in (0,\infty)$ ve $p,\ q \in (0,1)$ ise (3.2) denkleminin denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{1}{x_{n-4}^q}$ denkleminin $\overline{x}$ denge noktası civarında lineer denklemi aşağıdaki gibi,

$$f(u,v) = \frac{A}{u^p} + \frac{1}{v^q} = Au^{-p} + v^{-q}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = A(-p)u^{-p-1} = -\frac{Ap}{u^{p+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x},\overline{x}) = -\frac{Ap}{\overline{x}^{p+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -qv^{-q-1} = -\frac{q}{v^{q+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{x}) = -\frac{q}{\overline{x}^{q+1}}$$

bulunur. Buradan

$$z_{n+1} + \frac{pA}{\overline{x}^{p+1}} z_n + 0.z_{n-1} + 0.z_{n-2} + 0z_{n-3} + \frac{q}{\overline{x}^{q+1}} z_{n-4} = 0$$

lineer denklemi elde edilir. Diğer taraftan

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-4}^q}$$

eşitliğinde x_{n+1}, x_n, x_{n-4} ifadelerinin yerine $\overline{x}$ yazılırsa

$$\overline{x}=\frac{A}{\overline{x}^{p}}+\frac{1}{\overline{x}^{q}}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\overline{x}$ 'ye bölünürse

$$1=\frac{A}{\overline{x}^{p+1}}+\frac{1}{\overline{x}^{q+1}}$$

bulunur. Şimdi $\frac{A}{\overline{x}^{p}}$ 'nin pay ve paydası p ile ve $\frac{1}{\overline{x}^{q}}$ 'nin pay ve paydası q ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir. Elde edilen

$$\frac{pA}{\overline{x}^{p+1}}<\frac{A}{\overline{x}^{p+1}},\ p\in(0,1)$$

$$\frac{q}{\overline{x}^{q+1}}<\frac{1}{\overline{x}^{q+1}},\ q\in(0,1)$$

eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{pA}{\overline{x}^{p+1}}+\frac{q}{\overline{x}^{q+1}}<\frac{A}{\overline{x}^{p+1}}+\frac{1}{\overline{x}^{q+1}}=1$$

elde edilir. Dolayısıyla Clark Teoremine göre (3.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.4. x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, $A\in(0,\infty)$ ve $p,\ q\in(0,1)$ ise (3.2) denkleminin denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. (3.2) denkleminin denge noktası $1<\overline{x}<A+1$ şartını sağlar.

$$p<1,\ q<1$$

olmak üzere

$$S=\lim_{n\to\infty} sup x_n \quad \text{ve} \quad I=\lim_{n\to\infty} inf x_n$$

olsun. Bu durumda

$$S \le \frac{A}{I^p} + \frac{1}{I^q} \text{ ve } \frac{A}{S^p} + \frac{1}{S^q} \le I$$

olur. Buradan

$$SI \le \frac{AI}{I^p} + \frac{I}{I^q} \quad \text{ve} \quad \frac{AS}{S^p} + \frac{S}{S^q} \le SI$$

$$SI \le AI^{1-p} + I^{1-q} \quad \text{ve} \quad AS^{1-p} + S^{1-q} \le SI$$

olup

$$AS^{1-p} + S^{1-q} \le AI^{1-p} + I^{1-q}$$

elde edilir. Aşağıdaki fonksiyon alt limit ve üst limitin eşitliğini göstermek için yeterlidir. $g^{'}(x)$, $g(x)$ 'in türevi olmak üzere;

$$g(x) = Ax^{1-p} + x^{1-q} \text{ fonksiyonu } p<1,\ q<1 \text{ için}$$

$$g^{'}(x) = (1-p)Ax^{-p} + (1-q)x^{-q}$$

$$= \frac{(1-p)A}{x^p} + \frac{1-q}{x^q}$$

$1-p>0$, $1-q>0$, $A>0$, $x^p>0$, $x^q>0$ olduğundan $g^{'}(x)>0$ olup $g(x)$ artan bir fonksiyondur. Buradan; $S=I$ olup $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ olur. Böylece (3.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası çekim noktasıdır. Teorem 3.3.' e göre (3.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Buradan (3.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası global asimptotik kararlı olur.

4. BÖLÜM

NÜMERİK ÖRNEKLER

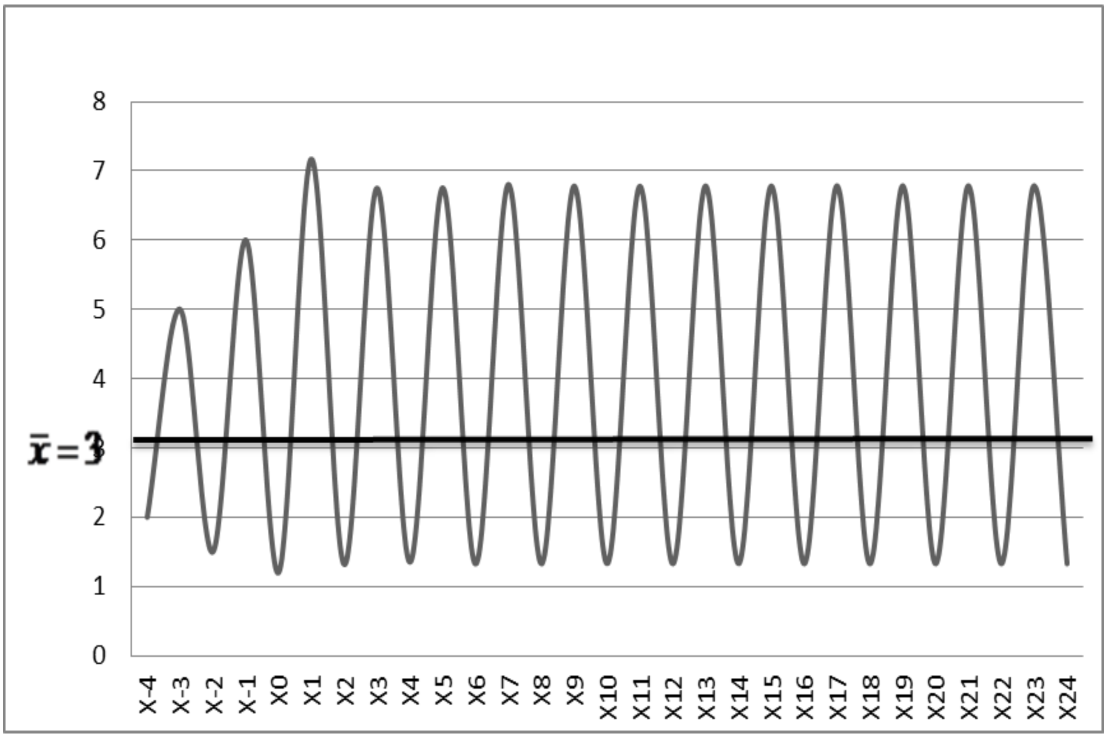
Bu bölümde (3.2) denklemi için bazı nümerik örnekler verilmiştir. Verilen örneklerde üç farklı durum incelenmiştir.

Örnek 4.1. (3.2) denkleminde; başlangıç şartları, $x_{-4}=2$, $x_{-3}=5$, $x_{-2}=1{,}5$, $x_{-1}=6$, $x_0=1{,}2$ ve $A=8$, $B=1$, $p=q=1$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıdaki gibidir:

$A=8, B=1, p=q=1$ ise $\bar{x}=3$				
N	x_N		N	x_N
1	7,166667		13	6,778068
2	1,316279		14	1,327877
3	6,744405		15	6,777095
4	1,352835		16	1,328068
5	6,746841		17	6,776733
6	1,325275		18	1,328044
7	6,7962		19	6,776977
8	1,325399		20	1,328023
9	6,775105		21	6,776964
10	1,329011		22	1,328033
11	6,774074		23	6,776932
12	1,328114		24	1,328034

Tablo 4.1

Tablo 4.1 deki çözümler incelendiğinde yarı dönmelerin PNPNPNPNP… şeklinde olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1

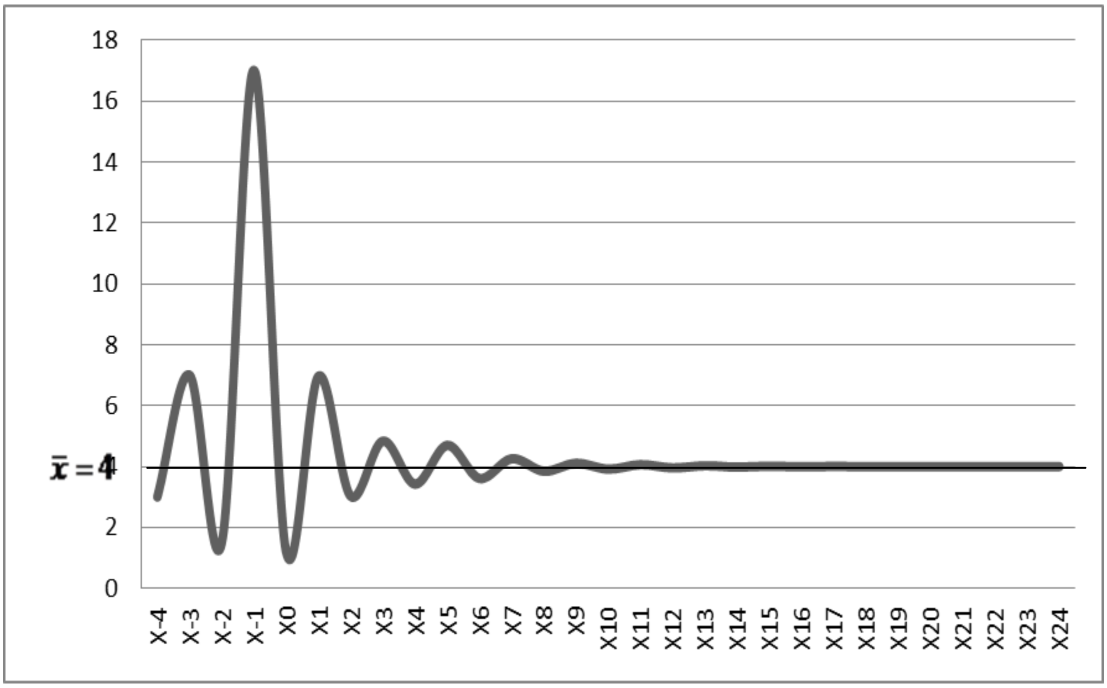
Tablo 4.1'de gösterilen çözümlerin PNPNPNP… şeklinde olduğu şekil 4.1'den de açıkça görülmektedir.

Örnek 4.2. (3.2) denkleminde başlangıç şartları, $x_{-4}=3$, $x_{-3}=7$, $x_{-2}=1,5$, $x_{-1}=17$, $x_0=1,2$ ve $A=7$, $B=1$, $p=q=\frac{1}{2}$ için $pq<1$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıdaki gibidir:

$A=7,\ B=1,\ \text{p}=\frac{1}{2},\ \text{q}=\frac{1}{2},\ pq<1$ ise $\bar{x}=4$					
N	x_N		N	x_N
1	6,9674468		13	4,0289595
2	3,0298893		14	3,9806935
3	4,837965		15	4,0139043
4	3,4250229		16	3,9899585
5	4,6952609		17	4,0071275
6	3,6093347		18	3,9950857
7	4,2590455		19	4,003363
8	3,8465321		20	3,9976628
9	4,1094796		21	4,0016517
10	3,9145623		22	3,9988327
11	4,0643529		23	4,0008182
12	3,9567367		24	3,999432

Tablo 4.2

Tablo 4.2' de çözümler incelendiğinde yarı dönmelerin PNPNPNPNP… şeklinde olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2

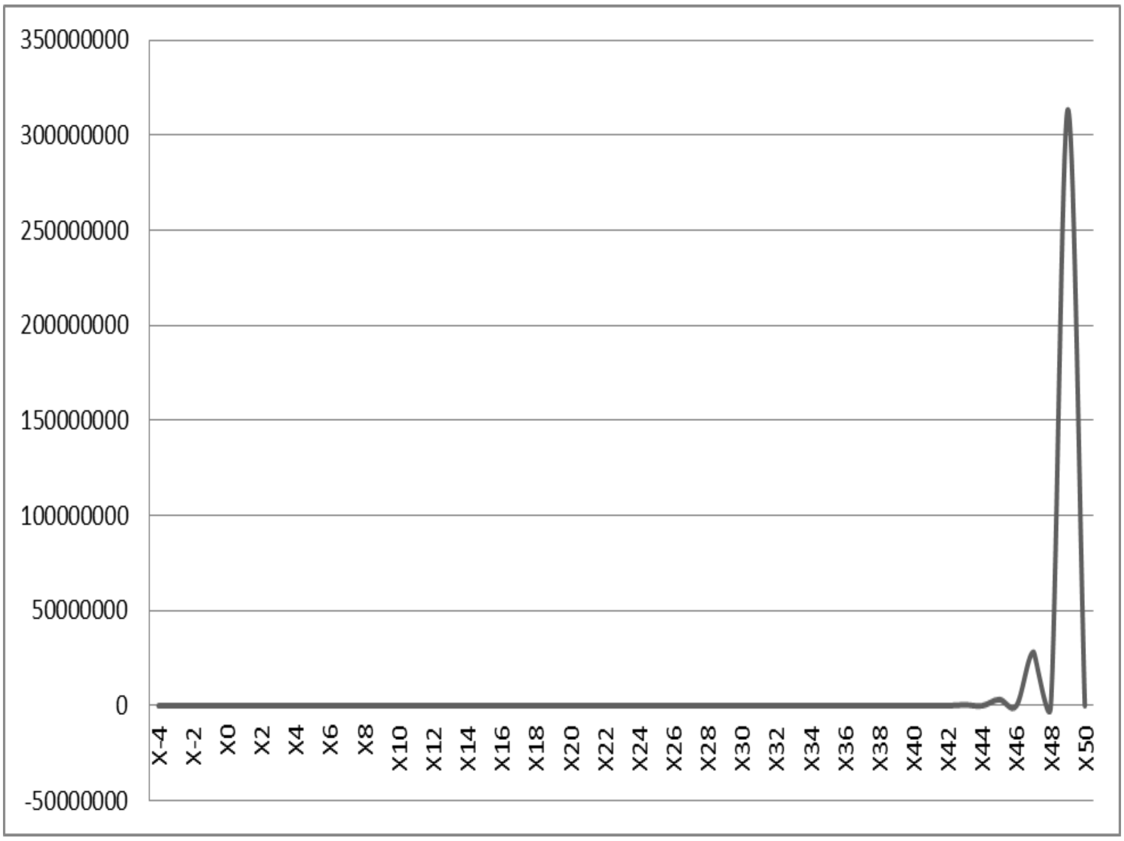
Tablo 4.2'de gösterilen çözümlerin PNPNPNP… şeklinde olduğu şekil 4.2'den de açıkça görülmektedir

Örnek 4.3. (3.2) denkleminde; başlangıç şartları, $x_{-4} = 2,8$, $x_{-3} = 7$, $x_{-2} = 1,5$, $x_{-1} = 5$, $x_0 = 1,2$ ve $A = 2$, $B = 1$, $p = q = 1,2$ için $pq > 1$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıdaki gibidir:

$A = 2,\ B = 1,$ p=1,2, q=1,2, $pq > 1$ ise $\bar{x} = \sqrt[12]{3^5}$				
N	x_N		N	x_N
1	1,897664301		24	0,095685418
2	1,023987271		25	39,94380549
3	2,558650274		26	0,058747552
4	0,792720041		27	70,25647017
5	3,446426974		28	0,033190874
6	0,916685591		29	135,7817623
7	3,192019911		30	0,01749054
8	0,820647393		31	286,8483433
9	3,856840904		32	0,008329283
10	0,622415762		33	685,1416388
11	4,642947924		34	0,003548824
12	0,565249967		35	1869,941944
13	5,233583324		36	0,00136118
14	0,472389619		37	5812,40747
15	6,685375923		38	0,00045621
16	0,363021102		39	21289,63524
17	8,729964248		40	0,000131325
18	0,285757754		41	93744,27234
19	11,45096351		42	$3,25541.10^{-5}$
20	0,209549223		43	495388,8771
21	16,4197891		44	$6,69342.10^{-6}$
22	0,143861888		45	3283313,836
23	24,9835411		46	$11,109.10^{-7}$

Tablo 4.3

Çözümler incelendiğinde çözümlerin sınırsız ve dirençsiz olduğu görülmektedir. Bu durum tablo 4.3’ de de görülmektedir.



Şekil 4.3

Şekil 4.3 incelendiğinde (3.2) denkleminin sınırsız ve dirençsiz olduğu görülmektedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-4}^q}$ fark denkleminin $x_{-4},\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartları altında sınırlılığı, dirençliliği, asimptotik kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı incelenmiştir. Bu denklemin başlangıç şartları değiştirilerek farklı çözümleri bulunabilir. Yukarıdaki çözümde $pq > 1$ için $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-4}^q}$ fark denkleminin sınırsız ve dirençsiz çözümleri incelendi.

Daha yüksek mertebeden fark denklemi alınarak sınırlılığı, dirençliliği, kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı incelenebilir.

KAYNAKÇA

Amleh, A. M., Kruse, N. and Ladas, G., (1999). On a class of difference equations with strong negative feedback, *Journal of Difference Equations and Applications*, *5*, 497-515.

Amleh, A. M., Grove, E. A., Ladas, G. and Georgiou, D. A., (1999). On the Recursive Sequence $x_{n+1} = a + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233*, 790-798.

Cinar, C. **(**2004). On the positive solution of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + a x_n x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation, 158,* 809-812.

Cinar, C., Stevic, S and Yalcinkaya, İ., (2004). A note on Global Asymptotic Stability of a Family of Rational Equations, *Rostock. Math. Kolloq., 59,* 40-48.

De Vault, R., Ladas, G. and Schultz, S. W., (1995). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-1}^q}$, *Prooceeding of the Second International Conference on Difference Equations* (Veszprem, Hungary, 1995), Gordon and Breach Science Publishers.

De Vault, R., Ladas, G. and Schultz, S. W., (1998). Necesary and Sufficient Condition fort the Boundedness of $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-1}^q}$, *Journal of Difference Equations and Aplications, 3,* 259-266.

Devault, R. and Galminas, L., (1999). Global Stability of $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *231*, 459-466.

El-Owaidy, H. M., Ragab, A. A. and El-Afifi, M. M., (2000). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{B}{x_{n-1}^q} + \frac{C}{x_{n-2}^s}$, *Applied Mathematics and Computation, 112*, 277-290.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M., (2005). The Dynamics of the Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$, *Applied Mathematics Letters*, *18*, 9, 1013-1018.

Gibbons, C. H., Kulenovic, M. R. S. and Ladas, G., (2000). On the Recursive Sequence $y_{n+1} = \frac{(a + \beta y_{n-1})}{(\gamma + y_n)}$, *Mathematical Sciences Research Hot-Line, 4*, 1-11.

Hamza, A. E., **(**2006). On the Recursive Sequence $x_{n+1} = a + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 322* (2), 668-674

Hamza, A. E. and Morsy, A., (2009). On recursive sequence $x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}}{x_n^k}$, *Applied Mathematics Letter, volume. 22 no:1* 91-95.

Kocic, V. L. and Ladas, G., (1993). *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,

Kosmala, W. A., Kulenovic, M. R. S., Ladas, G. and Teixeira, C. On the Recursive Sequence $y_{n+1} = \frac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251*, 571-586.

Mishev, D. P. and Patula, W. T., (2000). Oscillation and global asymptotic stability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252,* 364 - 375.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., (2000). On the difference equation $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{A_i}{x_{n-i}^{pi}}) + (\frac{1}{x_{n-k}^{pk}})$, *Journal of Difference Equations and Applications, 6*, 75-89.

Papaschinopoulos, G. And Schinas,C.J., (2004). Global asmyptotic stability and oscillation of a family of difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *294*, 614-620.

Philos, Ch. G., Purnaras, I. K. and Sficas, Y. G., (1994). Global attractivity in a nonlinear difference equation, *Applied Mathematics and Computation, 62,* 249-258.

Saleh, M. and Aloqeili, M., (2005). On the difference equation $y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$ with $A < 0$, *Applied Mathematics and Computation*, *171* (2), 862-869.

Stevic, S., (2004). More on the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$, *Applied Mathematics E Notes*, *4*, 80-84.

Stevic, S., (2005). On the Recursive Sequence $x_{n+1} = a + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *18*(1-2), 229-234.

Yalçinkaya, İ., (2008). On the Recursive Sequence $x_{n+1} = a + \frac{x_{n-m}}{x_n^k}$, *Discrete Dynamics in Nature and Society,* Volume (2008), Article ID. 805460, 8 pages.

Yan, X. and Li, W. T., (2003). Global Attractivity in the Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{a + \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation, 138*, 415-423.

Yan, X., Li, W. T. and Zhao, Z., (2005). On the Recursive Sequence $x_{n+1} = a - \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *17*(1-2), 269-282.

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Mücahit YALÇIN	İmza:	
Doğum Yeri:	KARAKOÇAN/ELAZIĞ		
Doğum Tarihi:	19.10.1979		
Medeni Durumu:	EVLİ		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	Yeşilbelen ilkokulu İsabey ilkokulu		Karakoçan Bursa	1985-1987 1987-1989
Ortaöğretim	Hamdi Çalış İlköğretim okulu		Gürsu-Bursa	1992-1995
Lise	Özel Nilüfer Lisesi	Eşit Ağırlık	Nilüfer-Bursa	1995-1998
Lisans	Selçuk Ünv.	Eğt. Fak. Mat. Öğrt.	Meram-Konya	2000-2005
Yüksek Lisans	Selçuk Ünv.	Eğt. Bil. Ens.	Meram-Konya	2007-2010

İlgi Alanları:	Uygulamalı Matematik, Analiz
İş Deneyimi:	2005 Yılından beri özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalışıyorum.
Aldığı Ödüller:	
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	Yrd. Doç. Dr. Dağıstan Şimşek, Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
Tel:	0554 341 74 42
Adres	Şems-i Tebrizi Mah. 19 Mayıs sok. Şems apt. no:26/7 Karatay-KONYA