T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Nihat AKGÜNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Konya–2010

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	Nihat AKGÜNEŞ
	Numarası	085202031004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Öğrencinin imzası
(İmza)

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin

Adı Soyadı	Nihat AKGÜNEŞ
Numarası	085202031004
Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi / Matematik Eğitimi
Programı	Tezli Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐
Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Tezin Adı	Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan ...Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma... başlıklı bu çalışma ..14../..07../.2010 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI	Danışman	[imza]
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR	Üye	[imza]
Yrd. Doç. Dr. İbrahim Yalçınkaya	Üye	İYalçınkaya.

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI yönetiminde hazırlanarak Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI' ya ve çalışmalarımda maddi manevi yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya ve Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca Yüksek Lisans öğrenimim boyunca sağladığı bursla maddi anlamda büyük sıkıntılarımı gideren Türkiye'de Bilimin en büyük destekçisi Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nihat AKGÜNEŞ

Konya, 2010

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Nihat AKGÜNEŞ
	Numarası	085202031004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fark denklem sistemleri üzerine yapılmış literatürde bulunan bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde ise fark denklemleri hakkındaki genel tanım ve teoremler ele alındı.

Üçüncü bölümde, Sun ve Xi' nin 2006 yılında çalışmış oldukları $x_{n+1} = f\left(x_n, y_{n-k}\right)$, $y_{n+1} = f\left(y_n, x_{n-k}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $x_{n+1} = f\left(y_{n-q}, x_{n-s}\right)$, $y_{n+1} = g\left(x_{n-t}, y_{n-p}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ fark denklem sistemleri geliştirilerek,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}) \\ y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}) \\ z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$$

fark denklem sistemi tanımlandı ve pozitif çözümlerinin hangi koşullar altında tek denge noktasına yakınsayacağı belirlendi.

Dördüncü bölümde ortaya atılan teoriyi pekiştirmek üzere somut örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklem Sistemleri, Global Asimptotik Kararlılık, Çözümler.

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Nihat AKGÜNEŞ
	Numarası	085202031004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora ☐
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
	Tezin İngilizce Adı	A Study on Stability of Some Difference Equation Systems

SUMMARY

This study consists of four sections. In the first section, information from the relevant literature about some difference equation systems is given.

In the second section; however, general definitions and theorems about difference equations are dealt with.

In the third section, developed on the difference equation system defined by Sun and Xi (2006), $x_{n+1} = f\left(x_n, y_{n-k}\right)$, $y_{n+1} = f\left(y_n, x_{n-k}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$ and $x_{n+1} = f\left(y_{n-q}, x_{n-s}\right)$, $y_{n+1} = g\left(x_{n-t}, y_{n-p}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ following difference equation system was defined and the conditions under which the positive solutions that this system converges to a unique equilibrium were designated:

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}) \\ y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}), \ n \in \mathbb{N}_0 \text{ and } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N} \\ z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}) \end{cases}$$

In the fourth section, in order to confirm our theory, concrete examples are given.

Key Words: Difference Equation Systems, Global Asymptotic Stability, Solutions.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bu tezde;

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-a_1},\, y_{n-b_1}) \\ y_n = g(y_{n-b_2},\, z_{n-c_1}) \\ z_n = h(z_{n-c_2},\, x_{n-a_2}) \end{cases} ,\quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ve } a_1,\, b_1,\, c_1,\, a_2,\, b_2,\, c_2 \in \mathbb{N}$$

tipindeki fark denklem sistemlerinin çözümlerinin davranışları ve global asimptotik karalılığı incelendi. Bu tipten fark denklem sistemlerinin belirli koşullar altında global asimptotik kararlılığı hakkında genellemelere ulaşıldı. Teorinin ispatı somut ve genel örneklerle pekiştirildi. Bu genellemelere ulaşırken bugüne kadar çalışılmış olan fark denklemleri ve fark denklemleri sistemleri inceleyip onların ışığından faydalanıldı.

1. BÖLÜM
FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Schinas (1997), yapmış olduğu çalışmada $x_{n+1}=\dfrac{x_n+1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denge noktasından hareketle

$$x_{n+1}=\frac{ay_n+A}{x_{n-1}},\qquad y_{n+1}=\frac{bx_n+A}{y_{n-1}},\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$x_{n+1}=\frac{a_ny_n+A}{x_{n-1}},\qquad y_{n+1}=\frac{b_nx_n+A}{y_{n-1}},\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_ny_n,A\}}{x_{n-1}},\qquad y_{n+1}=\frac{\max\{b_nx_n,A\}}{y_{n-1}},\ n=0,\ 1,\ 2,\ ...$$

denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denge noktalarını ve çözümlerinin periyodikliğini inceledi. Çalışma sonucunda; çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etti. Ayrıca bazı fark denklem sistemlerinin de çözümlerinin periyodikliğini inceledi.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), p ve q pozitif tamsayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan, $x_{n+1}=\dfrac{A+y_n}{x_{n-p}}$, $y_{n+1}=\dfrac{A+x_n}{y_{n-q}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlı davranışını ve sınırlılığını incelediler. Ayrıca bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalıştılar. Bu çalışmada fark denklem sisteminin denge noktasının $(c, c) = (1+A, 1+A)$ olduğunu elde ettiler ve sisteminin çözümlerinin $A \in (0,\ \infty)$ için bu noktada salınımlı olduğunu gördüler. Aynı şartlarda sistemin çözümlerinin alt ve üst sınırlarını elde ettiler. $A \rangle 1$ için de pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu elde ettiler.

Grove ve arkadaşları (2001), *a*, *b*, *c* ve *d* reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{a}{x_n} + \dfrac{b}{y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{c}{x_n} + \dfrac{d}{y_n}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ fark denklem sisteminin, her $n \geq 0$ için iyi tanımlı olduğu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırdılar. Bu fark denklem sisteminde, $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denklemine ulaştılar ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle *a*, *b*, *c* ve *d* reel sayıları için şartlar elde ettiler, yani denklemin good küme ve forbidden kümesine ulaştılar. Denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemelere gittiler.

Clark ve Kulenovic (2002), *a*, *b*, *c* ve *d* pozitif sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{a + cy_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{b + dx_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışını incelediler.

Papaschinopoulos ve Schinas (2002), A_i, B_i , $i \in \{0,\ 1,\ ...,\ k\}$, x_i, y_i $i = -k,\ -k+1,\ ...\ ,\ 0$ pozitif sayılar ve p_i, q_i, $i = 0,\ 1,\ ...,\ k$ pozitif sabitler olmak üzere, $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{A_i}{y_{n-i}^{p_i}}$, $y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{B_i}{x_{n-i}^{q_i}}$ fark denklem sistemini çalıştılar. Çalışmalarında, pozitif çözümlerin sınırlılığını ve sürekliliğini elde ettiler. Daha sonra sistemin bir pozitif denge noktasının var ve tek olduğunu gösterip bu denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelediler. Son olarak da sistemin pozitif denge noktasında salınım göstermeyen çözümlerine ulaştılar.

Kulenovic ve Nurkanovic 2003 yılında altmışıncı yaş günü vesilesi ile Profesör Allan Peterson'a ithaf ettikleri çalışmalarında A ile B katsayıları $(0, \infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere $x_{n+1} = Ax_n \dfrac{y_n}{1+y_n}$, $y_{n+1} = By_n \dfrac{x_n}{1+x_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

Çinar ve Yalçınkaya (2004), literatürde üç değişkenli fark denklem sistemleri üzerine yapılan ilk çalışmalardan olan makalelerinde, $x_{n+1} = \dfrac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Çinar ve Yalçınkaya (2004), çalışmalarında; $x_{n+1} = \dfrac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n-1}}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelediler ve $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004), çalışmalarında; pozitif başlangıç şartlar altında $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{y_{n-m}}$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{y_n}{x_{n-m}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Sun ve Xi (2005), yaptıkları çalışmada $x_{n+1}=f\left(x_{n-s},\, x_{n-t}\right),\ n\in\mathbb{N}_0$ ve $s<t\ \ s,\, t\in\mathbb{N}$ olmak üzere lineer olmayan fark denkleminin tüm pozitif çözümlerinin tek denge noktasına yakınsaması için yeterli şartları ortaya koymuştur.

Sun ve Xi (2006), $x_{n+1}=f\left(x_n,\, y_{n-k}\right),\ y_{n+1}=f\left(y_n,\, x_{n-k}\right),\ n\in\mathbb{N}_0$ rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin, pozitif başlangıç şartları altında global asimptotik kararlılığını göstermiş ve pozitif çözümlerin bir denge noktasına yakınsadıklarını ispat etmişlerdir.

Sun ve Xi, (2006) yılındaki diğer bir çalışmalarında yukarıdaki teorilerini daha da geliştirmişler ve $x_{n+1}=f\left(y_{n-q},\, x_{n-s}\right),\quad y_{n+1}=g\left(x_{n-t},\, y_{n-p}\right),\ n\in\mathbb{N}$, ayrıca $p,\, q,\, s,\, t\in\mathbb{N}_0,\ \ s\geq t,\, p\geq q$ ve başlangıç şartları pozitif olmak üzere genel fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktasının belirli koşullar altında global çekici olduğunu göstermişlerdir.

Özban (2006) çalışmasında, tüm başlangıç şartları ve parametreler pozitif olmak üzere $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{y_{n-k}},\quad y_{n+1}=1+\dfrac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$ fark denklem sistemini çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Iricanin ve Stevic (2006) çalışmalarında aşağıdaki iki fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini çalışmışlardır:

$$x_{n+1}^{(1)}=\frac{1+x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}},\quad x_{n+1}^{(2)}=\frac{1+x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}},\ \ldots,\quad x_{n+1}^{(k)}=\frac{1+x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}}$$

$$x_{n+1}^{(1)}=\frac{1+x_n^{(2)}+x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}},\ x_{n+1}^{(2)}=\frac{1+x_n^{(3)}+x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}},\ \ldots,\ x_{n+1}^{(k)}=\frac{1+x_n^{(1)}+x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}}\qquad k\in\mathrm{N}.$$

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2007), yaptıkları çalışmada, $a_i,\ b_i\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ pozitif sabitler, $k \geq 3$ tamsayı ve bütün başlangıç şartları pozitif olmak üzere

$$x_1(n+1)=\frac{a_k x_k(n)+b_k}{x_{k-1}(n-1)},$$
$$x_2(n+1)=\frac{a_1 x_1(n)+b_1}{x_k(n-1)}, \qquad i=3,\ 4,\ \ldots,\ k$$
$$x_i(n+1)=\frac{a_{i-1} x_{i-1}(n)+b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)},$$

denklem sistemini çözümlerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2008), çalışmada $z_{n+1}=\dfrac{t_n z_{n-1}+a}{t_n+z_{n-1}},\ t_{n+1}=\dfrac{z_n t_{n-1}+a}{z_n+t_{n-1}}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı için bir yeterli koşulun olduğunu göstermişlerdir.

Şimşek ve ark. (2009), yaptıkları çalışmada, pozitif başlangıç değerleri için $x_{n+1}=\max\left\{\dfrac{A}{x_n},\ \dfrac{y_n}{x_n}\right\},\ \ y_{n+1}=\max\left\{\dfrac{A}{y_n},\ \dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y),\ E^2(y),\ E^3(y),\ ...,\ E^n(y),\ ...$$

gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

Fark denklemlerinin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise $x_{-k},\ x_{-(k-1)},\ \dots,\ x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n,\ x_{n-1},\ \dots,\ x_{n-k}), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2. (2.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 2.3. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $x_{-k},\ x_{-(k-1)}, \dots,\ x_0 \in I$ olmak üzere:

(i) Her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(**ii**) $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde,

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(**iii**) Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(**iv**) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(**v**) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(**vi**) Eğer

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$$

ve bazı $N \geq -1$ sayıları için

$$|x_N - \bar{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 2.4. (2.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, \ \ldots \ , \ \bar{x}) y_{n-i} \qquad (2.2)$$

denklemine, $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, \ldots, \bar{x}) \lambda^{k-i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(i) Eğer (2.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 2.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\bar{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde bu çözümlere salınımlı değildir denir.

Tanım 2.6. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir.

Tanım 2.7. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $l=-k$ veya $l>-k$ için $x_{l-1}\geq \bar{x}$ ve $m=\infty$ veya $m<\infty$ için $x_{m+1}\geq \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l,\, x_{l+1},\, \dots,\, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 2.8. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $n\geq -k$ olmak üzere her n tamsayısı için

$$x_{n+p}=x_n$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı var ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük p pozitif tam sayısına ise esas periyot denir.

Tanım 2.9. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p}=x_n$$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

Tanım 2.10. Sıkıştırma Teoremi. Eğer a noktasının bir delinmiş komşuluğundaki bütün x ler için $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa ve

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=k$$

oluyor ise $\lim_{x\to a} f(x)=k$ dır.

3. BÖLÜM

$x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}),\ y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}),\ z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}),\ n \in \mathbb{N}_0$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}) \\ y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}), \ n \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathbb{N} \\ z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}) \end{cases} \tag{3.1}$$

denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı için gerekli şartları ortaya koyup bir genellemeye ulaşacağız.

(3.1) denklem sisteminin başlangıç şartları

$$a = \max\{a_1,\ a_2\},\ b = \max\{b_1,\ b_2\} \text{ ve } c = \max\{c_1,\ c_2\}$$

olmak üzere

$$x_{-a},\ x_{-a+1},\ \ldots,\ x_0,\ y_{-b},\ y_{-b+1},\ \ldots,\ y_0,\ z_{-c},\ z_{-c+1},\ \ldots,\ z_0 \in \mathbb{R}^+$$

dir.

Şimdi teorilerimizin ispatında gerekli olan ve $f,\ g,\ h$ fonksiyonlarının sağlayacağı koşulları sıralayalım. Bu koşullar (3.1) fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığını sağlamaya yardımcı olacak koşullardır:

(K1) $E \in \{[d,\ +\infty),\ (d,\ +\infty) : d > 0\}$ olmak üzere $f,\ g,\ h : E \times E \to E$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, ayrıca

$$\alpha = \inf_{(u,v)\in E\times E} f(u,\ v) = \inf_{(u,v)\in E\times E} g(u,\ v) = \inf_{(u,v)\in E\times E} h(u,\ v) \tag{3.2}$$

ve başlangıç şartları ise $x_{-a}, x_{-a+1}, \dots, x_{-1}, \ y_{-b}, y_{-b+1}, \dots, y_{-1}, \ z_{-c}, z_{-c+1}, \dots, z_{-1} \in E$ olsun.

(K2) $f(u, v)$, $g(u, v)$ ve $h(u, v)$ fonksiyonları her v için u değişkenine göre kesin azalan, her u için v değişkenine göre kesin artandır. Ayrıca $\dfrac{f(\alpha, x)}{x}$, $\dfrac{g(\alpha, x)}{x}$ ve $\dfrac{h(\alpha, x)}{x}$, $(\alpha, +\infty)$ aralığında artmayan fonksiyonlar olsun.

(K3) Sadece bir $\beta \in (\alpha, +\infty)$ noktası için

$$f(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) = \beta$$

eşitliği gerçekleşsin.

(K4) $\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(y, z) \\ z = h(z, x) \end{cases}$ denklem sistemi $(x = \overline{x}, y = \overline{y}, z = \overline{z})$ tek çözümüne sahiptir.

Burada $\overline{x} \in [f(\beta, \alpha), \beta]$, $\overline{y} \in [g(\beta, \alpha), \beta]$, $\overline{z} \in [h(\beta, \alpha), \beta]$ dır.

Lemma 3.1. $\{x_n\}_{n=-a}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=-b}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=-c}^{\infty}$ dizileri,

$$x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}),\ y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}),\ z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2})$$

koşulunu sağlayan sınırlı diziler olsun. f, g, h fonksiyonları (K1) ve (K2) koşullarını sağlayan fonksiyonlar ise

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le f\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{n-a_1}, \overline{\lim_{n\to\infty}} y_{n-b_1}\right), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \ge f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_{n-a_1}, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_{n-b_1}\right) \tag{3.3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le g\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_{n-b_2}, \overline{\lim_{n\to\infty}} z_{n-c_1}\right), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \ge g\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_{n-b_2}, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, z_{n-c_1}\right) \tag{3.4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} z_n \le h\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, z_{n-c_2}, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_{n-a_2}\right), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, z_n \ge h\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} z_{n-c_2}, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{n-a_2}\right) \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri gererlidir.

İspat.

$$x_i = \inf_{n \geq p} \{x_n\} = \inf_{n \geq p} \{x_p,\, x_{p+1},\, ...\}, \quad x_s = \sup_{n \geq p} \{x_n\} = \sup_{n \geq p} \{x_p,\, x_{p+1},\, ...\} \tag{3.6}$$

$$y_i = \inf_{n \geq p} \{y_n\} = \inf_{n \geq p} \{y_p,\, y_{p+1},\, ...\}, \quad y_s = \sup_{n \geq p} \{y_n\} = \sup_{n \geq p} \{y_p,\, y_{p+1},\, ...\} \tag{3.7}$$

$$z_i = \inf_{n \geq p} \{z_n\} = \inf_{n \geq p} \{z_p,\, z_{p+1},\, ...\}, \quad z_s = \sup_{n \geq p} \{z_n\} = \sup_{n \geq p} \{z_p,\, z_{p+1},\, ...\} \tag{3.8}$$

gösterimlerini kullanalım ve bu eşitliklerden yararlanıp lemmayı ispatlayalım:

(3.6) eşitliği ve (K2) koşulundan yararlanarak (3.3) eşitsizliğini gösterelim.

$$x_s = \sup_{n \geq p} \{x_n\} = \sup_{n \geq p} \left\{ f(x_{n-a_1},\, y_{n-b_1}) \right\} \leq f\left(\inf_{n \geq p} \left\{ x_{n-a_1} \right\},\, \sup_{n \geq p} \left\{ y_{n-b_1} \right\} \right) = f\left(x_i,\, y_s \right) \tag{3.9}$$

$$x_i = \inf_{n \geq p} \{x_n\} = \inf_{n \geq p} \left\{ f(x_{n-a_1},\, y_{n-b_1}) \right\} \geq f\left(\sup_{n \geq p} \left\{ x_{n-a_1} \right\},\, \inf_{n \geq p} \left\{ y_{n-b_1} \right\} \right) = f\left(x_s,\, y_i \right) \tag{3.10}$$

f fonksiyonu sürekli olduğundan (3.9) ve (3.10) eşitsizliklerinin her iki yanında limite geçilirse (3.9) dan

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} x_n \leq f\left(\underline{\lim_{n \to \infty}}\, x_{n-a_1},\, \overline{\lim_{n \to \infty}} y_{n-b_1} \right)$$

eşitsizliği ve (3.10) dan da

$$\underline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n \geq f\left(\overline{\lim_{n \to \infty}} x_{n-a_1},\, \underline{\lim_{n \to \infty}}\, y_{n-b_1} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde

$$y_s = \sup_{n \geq p} \{y_n\} = \sup_{n \geq p} \left\{ g(y_{n-b_2},\, z_{n-c_1}) \right\} \leq g\left(\inf_{n \geq p} \left\{ y_{n-b_2} \right\},\, \sup_{n \geq p} \left\{ z_{n-c_1} \right\} \right) = g(y_i,\, z_s) \tag{3.11}$$

$$y_i = \inf_{n \geq p} \{y_n\} = \inf_{n \geq p} \left\{ g(y_{n-b_2},\, z_{n-c_1}) \right\} \geq g\left(\sup_{n \geq p} \left\{ y_{n-b_2} \right\},\, \inf_{n \geq p} \left\{ z_{n-c_1} \right\} \right) = g(y_s,\, z_i) \tag{3.12}$$

g fonksiyonu sürekli olduğundan (3.11) ve (3.12) eşitsizliklerinin her iki yanında limite geçilirse (3.11) den

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} y_n \leq g\left(\underline{\lim_{n \to \infty}}\, y_{n-b_2},\, \overline{\lim_{n \to \infty}} z_{n-c_1} \right)$$

eşitsizliği ve (3.12) den de

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n \geq g\left(\varlimsup_{n\to\infty} y_{n-b_2},\ \varliminf_{n\to\infty} z_{n-c_1}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer yöntemle

$$z_s = \sup_{n\geq p}\{z_n\} = \sup_{n\geq p}\left\{h(z_{n-c_2},\ x_{n-a_2})\right\} \leq h\left(\inf_{n\geq p}\{z_{n-c_2}\},\ \sup_{n\geq p}\{x_{n-a_2}\}\right) = h(z_i,\ x_s) \quad (3.13)$$

$$z_i = \inf_{n\geq p}\{z_n\} = \inf_{n\geq p}\left\{h(z_{n-c_2},\ x_{n-a_2})\right\} \leq h\left(\sup_{n\geq p}\{z_{n-c_2}\},\ \inf_{n\geq p}\{x_{n-a_2}\}\right) = h(z_s,\ x_i) \quad (3.14)$$

h fonksiyonu sürekli olduğundan (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinin her iki yanında limite geçilirse (3.13) ten

$$\varlimsup_{n\to\infty} z_n \leq h\left(\varliminf_{n\to\infty} z_{n-c_2},\ \varlimsup_{n\to\infty} x_{n-a_2}\right)$$

eşitsizliği ve (3.14) ten de

$$\varliminf_{n\to\infty} z_n \geq h\left(\varlimsup_{n\to\infty} z_{n-c_2},\ \varliminf_{n\to\infty} x_{n-a_2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece Lemma 3.1 in ispatını bitirmiş oluruz.

Lemma 3.2. $f,\ g,\ h$ fonksiyonları için (K2) ve (K3) koşulları geçerli ise;

a) Eğer $y_{n-b_1} \leq \beta$ ise $x_n \leq \beta$, eğer $y_{n-b_1} > \beta$ ise $x_n \leq y_{n-b_1}$ $\left(n \geq \max\{a_1,\ b_1\}\right)$

b) Eğer $z_{n-c_1} \leq \beta$ ise $y_n \leq \beta$, eğer $z_{n-c_1} > \beta$ ise $y_n \leq z_{n-c_1}$ $\left(n \geq \max\{b_2,\ c_1\}\right)$

c) Eğer $x_{n-a_2} \leq \beta$ ise $z_n \leq \beta$, eğer $x_{n-a_2} > \beta$ ise $z_n \leq x_{n-a_2}$ $\left(n \geq \max\{a_2,\ c_2\}\right)$

dir.

İspat. a) $n \geq \max\{a_1,\ b_1\}$ için $x_n = f(x_{n-a_1},\ y_{n-b_1}) \leq f(\alpha,\ y_{n-b_1})$, olduğunu biliyoruz (K2) ve (K3) özelliklerinden β için

Eğer $y_{n-b_1} \leq \beta$ ise $x_n \leq f(\alpha,\, y_{n-b_1}) \leq f(\alpha,\, \beta) = \beta$ sağlanır. Dolayısıyla $y_{n-b_1} \leq \beta$ iken $x_n \leq \beta$ olduğunu $n \geq \max\{a_1,\, b_1\}$ için göstermiş oluruz.

Eğer $y_{n-b_1} > \beta$ ise $\dfrac{f(\alpha,\, y_{n-b_1})}{y_{n-b_1}} \leq \dfrac{f(\alpha,\, \beta)}{\beta} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{f(\alpha,\, y_{n-b_1})}{y_{n-b_1}} \leq 1$ elde ederiz böylece $x_n \leq f(\alpha,\, y_{n-b_1}) \leq y_{n-b_1}$ olur. Bu durumda $y_{n-b_1} > \beta$ iken $x_n \leq y_{n-b_1}$ olduğunu $n \geq \max\{a_1, b_1\}$ için elde ederiz.

b) $n \geq \max\{b_2,\, c_1\}$ için $y_n = g(y_{n-b_2},\, z_{n-c_1}) \leq g(\alpha,\, z_{n-c_1})$ eşitsizliği sağlanır (K2) ve (K3) ü kullanırsak

$z_{n-c_1} \leq \beta$ ise $y_n \leq g(\alpha,\, z_{n-c_1}) \leq g(\alpha,\, \beta) \leq \beta$ olur. Yani $z_{n-c_1} \leq \beta$ iken $y_n \leq \beta$ elde edilir.

Eğer $z_{n-c_1} > \beta$ ise $\dfrac{g(\alpha,\, z_{n-c_1})}{z_{n-c_1}} \leq \dfrac{g(\alpha,\, \beta)}{\beta} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{g(\alpha,\, z_{n-c_1})}{z_{n-c_1}} \leq 1$ olur. Buradan $y_n \leq g(\alpha,\, z_{n-c_1}) \leq z_{n-c_1}$ elde edilir.

c) $n \geq \max\{a_2,\, c_2\}$ için $z_n = h(z_{n-c_2},\, x_{n-a_2}) \leq h(\alpha,\, x_{n-a_2})$ eşitsizliği sağlanır. (K2) ve (K3) özelliklerinden,

eğer $x_{n-a_2} \leq \beta$ ise $z_n \leq h(\alpha,\, x_{n-a_2}) \leq h(\alpha,\, \beta) \leq \beta \;\Rightarrow z_n \leq \beta$ olduğu görülür.

Eğer $x_{n-a_2} > \beta$ ise;

$$\frac{h(\alpha,\, x_{n-a_2})}{x_{n-a_2}} \leq \frac{h(\alpha,\, \beta)}{\beta} = 1 \Rightarrow \frac{h(\alpha,\, x_{n-a_2})}{x_{n-a_2}} \leq 1 \;\Rightarrow z_n \leq h(\alpha,\, x_{n-a_2}) \leq x_{n-a_2}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Böylece Lemma nın ispatını tamamlanmış olur.

Lemma 3.3. Her $t \in \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, a_2 + b_1 + c_1 - 1\}$ için öyle bir $\eta_t \in \mathbb{N}$ vardır ki; $\forall n > \eta_t$ için $x_{n(a_2+b_1+c_1)+t} \leq \beta$, $y_{n(a_2+b_1+c_1)+t} \leq \beta$ ve $z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2+t} \leq \beta$ sağlanır.

İspat. Lemmayı ispatlamak için lemmanın gerçekleşmediğini varsayıp çelişki elde etmeye çalışalım. Kabul edelim ki hiç bir $t \in \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ a_2+b_1+c_1-1\}$ Lemma 3.3 ü sağlamasın. Yani

$$x_{n(a_2+b_1+c_1)+t} > \beta\ ,\ y_{n(a_2+b_1+c_1)+t} > \beta \text{ ve } z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2+t} > \beta$$

olsun. Lemma 3.2 yi kullanırsak

$$\begin{aligned} &\beta < x_{(n+1)(a_2+b_1+c_1)+t} \le x_{n(a_2+b_1+c_1)+t} \\ &\beta < y_{(n+1)(a_2+b_1+c_1)+t} \le y_{n(a_2+b_1+c_1)+t} \qquad ,\ n \in \mathbb{N} \\ &\beta < z_{(n+1)(a_2+b_1+c_1)+a_2+t} \le z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2+t} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n(a_2+b_1+c_1)+t} = \xi_t\ ,\ \lim_{n\to\infty} y_{n(a_2+b_1+c_1)+t} = \psi_t\ ,\ \lim_{n\to\infty} z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2+t} = \zeta_t$$

olduğunu kabul edelim.

Buradan $\xi_t \ge \beta$, $\psi_t \ge \beta$ ve $\zeta_t \ge \beta$ olur. Lemma 3.2 den $\{x_n\}_{n=-a}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=-b}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=-c}^{\infty}$ sınırlı dizilerdir dolayısıyla limitleri mevcuttur.

$$\phi_t = \lim_{n\to\infty} x_{n(a_2+b_1+c_1)-a_1+t}\ ,\ \varphi_t = \lim_{n\to\infty} y_{n(a_2+b_1+c_1)-b_2+t} \text{ ve } \gamma_t = \lim_{n\to\infty} z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2-c_2+t}$$

olduğunu kabul edelim. Açıktır ki $\phi_t \ge \alpha$, $\varphi_t \ge \alpha$ ve $\gamma_t \ge \alpha$ dir. (3.1) sisteminden

$$\begin{cases} x_{n(a_2+b_1+c_1)+t} = f\left(x_{n(a_2+b_1+c_1)-a_1+t},\ y_{n(a_2+b_1+c_1)-b_1+t}\right) \\ y_{n(a_2+b_1+c_1)+t} = g\left(y_{n(a_2+b_1+c_1)-b_2+t},\ z_{n(a_2+b_1+c_1)-c_1+t}\right) \\ z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2+t} = h\left(z_{n(a_2+b_1+c_1)+a_2-c_2+t},\ x_{n(a_2+b_1+c_1)+t}\right) \end{cases}$$

olduğu görülür. Lemma 3.1 i kullanırsak;

$$\xi_t \le f(\phi_t,\ \psi_t) \le f(\alpha,\ \psi_t) = \psi_t \frac{f(\alpha,\ \psi_t)}{\psi_t} \le \psi_t \frac{f(\alpha,\ \beta)}{\beta} = \psi_t$$

$$\psi_t \le g(\varphi_t,\ \zeta_t) \le g(\alpha,\ \zeta_t) = \zeta_t \frac{g(\alpha,\ \zeta_t)}{\zeta_t} \le \zeta_t \frac{g(\alpha,\ \beta)}{\beta} = \zeta_t$$

$$\zeta_t \le h(\gamma_t,\ \xi_t) \le h(\alpha,\ \xi_t) = \xi_t \frac{h(\alpha,\ \xi_t)}{\xi_t} \le \xi_t \frac{h(\alpha,\ \beta)}{\beta} = \xi_t$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerden;

$$\xi_t \le \psi_t \le \zeta_t \le \xi_t \;\Rightarrow \xi_t = \psi_t = \zeta_t$$

olduğu yazılır. (K2) ve (K4) özelliklerinden

$$\xi_t = \psi_t = \zeta_t = \beta \text{ ve } \phi_t = \varphi_t = \gamma_t = \alpha$$

eşitlikleri elde edilir.

Kabul edelim ki;

$$\Phi_t = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_{n(a_2+b_1+c_1)-2a_1+t} \;,\; \Psi_t = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_{n(a_2+b_1+c_1)-a_1-b_1+t} \text{ ve } \Phi_t,\ \Psi_t \ge \alpha$$

olsun. Bu bağıntılarda

$$x_{n(a_2+b_1+c_1)-a_1+t} = f\left(x_{n(a_2+b_1+c_1)-2a_1+t},\, y_{n(a_2+b_1+c_1)-a_1-b_1+t}\right)$$

eşitliği ve Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\alpha \ge f\left(\Phi_t,\ \Psi_t\right) > f\left(\Phi_t + 1,\ \Psi_t\right) \ge \alpha$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde varsayımımız yanlıştır ki dolayısıyla bu yanlış Lemma 3.3 ü ispatlar.

Lemma 3.4. (3.1) denklem sistemi (K1), (K2), (K3) ve (K4) koşullarını sağlasın. O halde bir $\eta \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$f(\beta,\ \alpha) \le x_n \le \beta \,,\ g(\beta,\ \alpha) \le y_n \le \beta \,,\ h(\beta,\ \alpha) \le z_n \le \beta \,,\ n > \eta$$

dir.

İspat. Lemma 3.3 ü kullanırsak

$$\eta = \max_{0\le t\le a_2+b_1+c_1} \{\eta_t\}.(a_2+b_1+c_1) + \max_{i=1,2}\{a_i,\ b_i,\ c_i\} + a_2$$

ise

$$x_{n-a_i} \le \beta \,,\ y_{n-b_i} \le \beta \text{ ve } z_{n-c_i} \le \beta \;,\ i = 1,\ 2\ \ \forall n > \eta$$

sağlanır. (3.1) Denklem sistemi ve (K4) gösterir ki; $\forall n > \eta$ için

$$x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}) \geq f(\beta, \alpha)$$
$$y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}) \geq g(\beta, \alpha)$$
$$z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}) \geq h(\beta, \alpha)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de teoremimizin ispatında yardımcı olacak önemli bir koşulu verelim:

$$\textbf{K5)} \begin{cases} M = f(m, L), \quad m = f(M, l) \\ L = g(l, K), \quad l = g(L, k) \\ K = h(k, M), \quad k = h(K, m) \end{cases} \tag{3.15}$$

(3.15) sistemi $M, m \in [f(\beta, \alpha), \beta]$; $L, l \in [g(\beta, \alpha), \beta]$; $K, k \in [h(\beta, \alpha), \beta]$ olmak üzere $M = m$, $L = l$, $K = k$ tek çözümüne sahiptir.

Teorem 3.1. (3.1) denklem sistemi (K1) - (K5) koşullarını gerçekleştirirse bütün pozitif (x_n, y_n, z_n) çözümler tek $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktasına yakınsar.

İspat. $\{m_i\}_{i=-a}^{\infty}$, $\{M_i\}_{i=-a}^{\infty}$, $\{l_i\}_{i=-b}^{\infty}$, $\{L_i\}_{i=-b}^{\infty}$, $\{k_i\}_{i=-c}^{\infty}$, $\{K_i\}_{i=-c}^{\infty}$ şeklinde altı dizi tanımlayalım. Bu diziler aşağıdaki (3.16) ve (3.17) koşulları sağlasın.

$$\begin{aligned} M_i &= f(m_{i-a_1}, L_{i-b_1}); \; m_i = f(M_{i-a_1}, l_{i-b_1}) \\ L_i &= g(l_{i-b_2}, K_{i-c_1}) \;\; ; \; l_i = g(L_{i-b_2}, k_{i-c_1}) \\ K_i &= h(k_{i-c_2}, M_{i-a_2}); \; k_i = h(K_{i-c_2}, m_{i-a_2}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

ve

$$\begin{aligned} m_j &= f(\beta, \alpha); \; M_j = \beta, j \in \{-a, -a+1, \ldots, -1\} \\ l_j &= g(\beta, \alpha); \;\; L_j = \beta, \; j \in \{-b, -b+1, \ldots, -1\} \\ k_j &= h(\beta, \alpha); \;\; K_j = \beta, \; j \in \{-c, -c+1, \ldots, -1\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Bu özellikler bize açıkça

$$\begin{aligned} &m_{j-1} \le m_j;\ M_j \le M_{j-1},\ j \in \{-a,\ -a+1,\ \ldots,\ -1\} \\ &l_{j-1} \le l_j;\quad L_j \le L_{j-1},\quad j \in \{-b,\ -b+1,\ \ldots,\ -1\} \\ &k_{j-1} \le k_j;\ K_j \le K_{j-1},\quad j \in \{-c,\ -c+1,\ \ldots,\ -1\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

bağıntılarının gerçekleştiğini gösterir.

$$\begin{aligned} &m_{j-1} \le m_j \le \beta;\ f(\beta,\ \alpha) \le M_j \le M_{j-1},\ -a+1 \le j \le t \\ &l_{j-1} \le l_j \le \beta;\quad g(\beta,\ \alpha) \le L_j \le L_{j-1},\quad -b+1 \le j \le t \quad (t \ge -1) \\ &k_{j-1} \le k_j \le \beta;\ h(\beta,\ \alpha) \le K_j \le K_{j-1},\quad -c+1 \le j \le t \end{aligned}$$

olduğunu kabul edelim. O halde (K2) den $j = t+1$ için aşağıdaki bağıntıları elde ederiz.

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= f(M_{t-a_1+1},\ l_{t-b_1+1}) \ \ge f(M_{t-a_1},\ l_{t-b_1}) = m_t \\ M_{t+1} &= f(m_{t-a_1+1},\ L_{t-b_1+1}) \le f(m_{t-a_1},\ L_{t-b_1}) = M_t \\ l_{t+1} &= g(L_{t-b_2+1},\ k_{t-c_1+1}) \quad \ge g(L_{t-b_2},\ k_{t-c_1}) = l_t \\ L_{t+1} &= g(l_{t-b_2+1},\ K_{t-c_1+1}) \quad \le g(l_{t-b_2},\ K_{t-c_1}) = L_t \\ k_{t+1} &= h(K_{t-c_2+1},\ m_{t-a_2+1}) \ \ge h(K_{t-c_2},\ m_{t-a_2}) = k_t \\ K_{t+1} &= h(k_{t-c_2+1},\ M_{t-a_2+1}) \le h(k_{t-c_2},\ M_{t-a_2}) = K_t \end{aligned}$$

Yukarıdaki elde ettiğimiz bağıntılar gösterir ki;

$\{m_i\}_{i=-a}^{\infty}$, $\{l_i\}_{i=-b}^{\infty}$, $\{k_i\}_{i=-c}^{\infty}$ dizileri azalmayan ve üstten β ile sınırlı , $\{M_i\}_{i=-a}^{\infty}$, $\{L_i\}_{i=-b}^{\infty}$, $\{K_i\}_{i=-c}^{\infty}$ dizileri de artmayan ve sırasıyla alttan $f(\beta,\ \alpha),\ g(\beta,\ \alpha),\ h(\beta,\ \alpha)$ ile sınırlıdır.

Bu durumda bu diziler yakınsaktır.

$$\begin{matrix} m = \lim\limits_{i\to\infty} m_i \\ M = \lim\limits_{i\to\infty} M_i \end{matrix},\quad \begin{matrix} l = \lim\limits_{i\to\infty} l_i \\ L = \lim\limits_{i\to\infty} L_i \end{matrix} \ \text{ve}\ \begin{matrix} k = \lim\limits_{i\to\infty} k_i \\ K = \lim\limits_{i\to\infty} K_i \end{matrix} \tag{3.19}$$

olsun. Açıkça görülür ki;

$$M,\ m \in [f(\beta,\ \alpha),\ \beta];\ L,\ l \in [g(\beta,\ \alpha),\ \beta];\ K,\ k \in [h(\beta,\ \alpha),\ \beta]$$

dir.

$f,\ g,\ h$ fonksiyonlarının sürekliliğini göz önünde bulundurur, (3.16) bağıntılarının her iki tarafında limite geçilirse

$$M = f(m,\ L),\ \ m = f(M,\ l)$$
$$L = g(l,\ K),\ \ l = g(L,\ k)$$
$$K = h(k,\ M),\ \ k = h(K,\ m)$$

elde edilir.

(K4) ve (K5) özelliklerinden $M = m = \overline{x},\ L = l = \overline{y},\ K = k = \overline{z}$ olur.

$\{x_n\}_{n=-a}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=-b}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=-c}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun. Lemma 3.4 ten bir $H \in \mathbb{N}$ vardır ki;

$$j \geq H - a \text{ lar için,} \quad f(\beta,\ \alpha) \leq x_n \leq \beta,$$
$$j \geq H - b \text{ ler için,} \quad g(\beta,\ \alpha) \leq y_n \leq \beta,$$
$$j \geq H - c \text{ ler için,} \quad h(\beta,\ \alpha) \leq z_n \leq \beta,$$

dir. (3.16) ve (3.17) den

$$m_{j-H} \leq x_j \leq M_{j-H},\ H - a \leq j \leq H - 1$$
$$l_{j-H} \leq y_j \leq L_{j-H},\ \ H - b \leq j \leq H - 1$$
$$k_{j-H} \leq z_j \leq K_{j-H},\ \ H - c \leq j \leq H - 1$$

elde edilir.

Eğer

$$m_{j-H} \leq x_j \leq M_{j-H},\ H - a \leq j \leq n - 1$$
$$l_{j-H} \leq y_j \leq L_{j-H},\ \ H - b \leq j \leq n - 1$$
$$k_{j-H} \leq z_j \leq K_{j-H},\ \ H - c \leq j \leq n - 1$$

$n \geq H$ için sağlanırsa;

$$x_n = f(x_{n-a_1},\ y_{n-b_1}) \geq f(M_{n-H-a_1},\ l_{n-H-b_1}) = m_{n-H}$$
$$x_n = f(x_{n-a_1},\ y_{n-b_1}) \leq f(m_{n-H-a_1},\ L_{n-H-b_1}) = M_{n-H}$$
$$y_n = g(y_{n-b_2},\ z_{n-c_1}) \geq g(L_{n-H-b_2},\ k_{n-H-c_1}) = l_{n-H}$$
$$y_n = g(y_{n-b_2},\ z_{n-c_1}) \leq g(l_{n-H-b_2},\ K_{n-H-c_1}) = L_{n-H}$$
$$z_n = h(z_{n-c_2},\ x_{n-a_2}) \geq h(K_{n-H-c_2},\ m_{n-H-a_2}) = k_{n-H}$$
$$z_n = h(z_{n-c_2},\ x_{n-a_2}) \leq h(k_{n-H-c_2},\ M_{n-H-a_2}) = K_{n-H}$$

olur. Bu matematiksel düşünce ile devam edilirse yukarıdaki bağıntılardan

$$\begin{aligned} m_{n-H} &\le x_n \le M_{n-H} \\ l_{n-H} &\le y_n \le L_{n-H} \\ k_{n-H} &\le z_n \le K_{n-H} \end{aligned} \qquad n \ge H \text{ için bulunur.}$$

$M = m = \overline{x},\ L = l = \overline{y},\ K = k = \overline{z}$ ve Sıkıştırma Teoremi bize gösterir ki;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x},\ \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y},\ \lim_{n\to\infty} z_n = \overline{z}$$

olur. Böylece çözümler denge noktasına yakınsar.

Dolayısıyla (3.1) denklemi global asimptotik kararlıdır.

4. BÖLÜM
NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde teorimizi pekiştirecek birkaç örnek vereceğiz. Bu örnekleri çözerken yukarıdaki genel metotlardan faydalanacağız.

Örnek 4.1. Başlangıç şartları $x_i,\ y_j,\ z_k \in (0,\ +\infty)$, $-a \le i \le -1$, $-b \le j \le -1$, $-c \le k \le -1$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_n = 2 + \dfrac{y_{n-b_1}}{x_{n-a_1}} \\ y_n = 2 + \dfrac{z_{n-c_1}}{y_{n-b_2}} \quad a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathbb{N} \\ z_n = 2 + \dfrac{x_{n-a_2}}{z_{n-c_2}} \end{cases} \tag{4.1}$$

denklem sisteminin global asimptotik kararlılığını araştıralım.

Çözüm. $f,\ g,\ h$ fonksiyonlarını

$$f(x,\ y) = g(x,\ y) = h(x,\ y) = 2 + \frac{y}{x} \qquad x,\ y \in \mathbb{R}^+$$

biçiminde tanımlayalım. Açıkça görürüz ki; $f,\ g,\ h$ fonksiyonları (K1), (K2), (K3) ve (K4) koşullarını sağlamaktadır.

Burada

$$\alpha = 2\,,\ \beta = 4 \text{ ve } \overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 3$$

olduğu aşikardır. Bu durumda aşağıdaki denklem sisteminin $M = m,\ L = l,\ K = k$ tek çözümüne sahip olduğunu göstermemiz teoremin koşullarını sağlatmak için yeterlidir.

$$\begin{cases} M = 2 + \dfrac{L}{m},\ L = 2 + \dfrac{K}{l},\ K = 2 + \dfrac{M}{k} \\ m = 2 + \dfrac{l}{M},\ l = 2 + \dfrac{k}{L},\ \ k = 2 + \dfrac{m}{K} \end{cases}$$

Temel matematiksel işlemlerle denklem sistemi aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{cases} 2(M-m)=L-l \\ 2(L-l)=K-k \\ 2(K-k)=M-m \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklini alır. (4.2) sistemi ise ancak ve ancak $M=m,\ L=l,\ K=k$ için sağlanır.

Böylece $f,\ g,\ h$ fonksiyonları teoremin koşullarında yer alan (K5) i de sağlar. Dolayısıyla (4.1) sisteminin tüm pozitif çözümleri tek denge noktasına yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} = 3,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y} = 3,\ \lim_{n\to\infty} z_n = \bar{z} = 3$$

olur. Bu da bize gösterir ki (4.1) sistemi global asimptotik kararlıdır.

Not: Yukarıdaki denklemde 2 yerine $A>1$ olmak şartıyla $\forall A \in \mathbb{R}$ getirilebilir.

Örnek 4.2. $0<s<t<s+1,\ s+1>1$ ve tüm başlangıç şartları $x_i,\ y_j,\ z_k \in (\frac{s}{t},\ +\infty)$, $-a \le i \le 0,\ -b \le j \le 0,\ -c \le k \le 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{ty_{n-b_1}}{s+x_{n-a_1}} + \dfrac{x_{n-a_1}}{s+x_{n-a_1}} \\ y_n = \dfrac{tz_{n-c_1}}{s+y_{n-b_2}} + \dfrac{y_{n-b_2}}{s+y_{n-b_2}} \quad a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathbb{N} \\ z_n = \dfrac{tx_{n-a_2}}{s+z_{n-c_2}} + \dfrac{z_{n-c_2}}{s+z_{n-c_2}} \end{cases} \tag{4.3}$$

denklem sisteminin global asimptotik kararlılığını araştıralım.

Çözüm. $f,\ g,\ h$ fonksiyonlarını

$$f(x,\ y) = g(x,\ y) = h(x,\ y) = \frac{ty}{s+x} + \frac{x}{s+x} \qquad x,\ y \in \mathbb{R}^+$$

biçiminde tanımlayalım. Açıkça görürüz ki; $f,\ g,\ h$ fonksiyonları (K1), (K2), (K3) ve (K4) koşullarını sağlamaktadır.

Burada

$$\alpha = 1, \ \beta = \frac{1}{s-t+1} \text{ ve } \overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = t - s + 1$$

dır. Böylece teoremin koşullarını sağlatmak için;

$$\begin{cases} M = \dfrac{tL}{s+m} + \dfrac{m}{s+m}, \quad L = \dfrac{tK}{s+l} + \dfrac{l}{s+l}, \quad K = \dfrac{tM}{s+k} + \dfrac{k}{s+k} \\ m = \dfrac{tL}{s+M} + \dfrac{M}{s+M}, \ l = \dfrac{tK}{s+L} + \dfrac{L}{s+L}, \ k = \dfrac{tm}{s+K} + \dfrac{K}{s+K} \end{cases} \tag{4.4}$$

denklem sisteminin tek çözümünün $M = m,\ L = l,\ K = k$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Kolay matematiksel işlemlerle denklem sistemi aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{cases} (s-1)(M-m) = t(L-l) \\ (s-1)(L-l) = t(K-k) \\ (s-1)(K-k) = t(M-m) \end{cases} \tag{4.5}$$

(4.5) sistemi ise ancak ve ancak $M = m,\ L = l,\ K = k$ için sağlanır.

Böylece $f,\ g,\ h$ fonksiyonları teoremin koşullarında yer alan (K5) i de sağlar. Dolayısıyla (4.3) sisteminin tüm pozitif çözümleri denge noktasına yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} = t - s + 1, \ \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y} = t - s + 1, \ \lim_{n\to\infty} z_n = \overline{z} = t - s + 1$$

olur. Bu da bize gösterir ki (4.3) sistemi global asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.3. $t \in (0,1)$ ve tüm başlangıç şartları pozitif olmak üzere

$$\begin{cases} x_n = 1 + t y_{n-b_1} + \dfrac{1}{x_{n-a_1}} \\ y_n = 1 + t z_{n-c_1} + \dfrac{1}{y_{n-b_2}} \quad a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathbb{N} \\ z_n = 1 + t x_{n-a_2} + \dfrac{1}{z_{n-c_2}} \end{cases} \tag{4.6}$$

denklem sisteminin global asimptotik kararlılığını araştıralım.

Çözüm. $f,\ g,\ h$ fonksiyonlarını

$$f(x,\ y)=g(x,\ y)=h(x,\ y)=1+ty+\frac{1}{x} \qquad x,\ y\in\mathbb{R}^{+}$$

şeklinde alalım. Açıkça görürüz ki; $f,\ g,\ h$ fonksiyonları (K1), (K2), (K3) ve (K4) koşullarını sağlamaktadır.

Burada

$$\alpha=1,\ \beta=\frac{2}{1-t} \text{ ve } \bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\frac{1+\sqrt{1+4(1-t)}}{2(1-t)}$$

dir. Böylece teoremin koşullarını gerçekleyebilmek için;

$$\begin{cases} M=1+tL+\frac{1}{m},\ m=1+tl+\frac{1}{M} \\ L=1+tK+\frac{1}{l},\ l=1+tk+\frac{1}{L} \\ K=1+tM+\frac{1}{k},\ k=1+tm+\frac{1}{K} \end{cases} \tag{4.7}$$

denklem sisteminin tek çözümünün $M=m,\ L=l,\ K=k$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Bir kaç matematiksel işlemden sonra denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{cases} (M-m)(1-\frac{1}{Mm})=t(L-l) \\ (L-l)(1-\frac{1}{Ll})=t(K-k) \\ (K-k)(1-\frac{1}{Kk})=t(M-m) \end{cases} \tag{4.8}$$

$$M,\ m\in\left[f(\beta,\ \alpha),\ \beta\right];\ L,\ l\in\left[g(\beta,\ \alpha),\ \beta\right];\ K,\ k\in\left[h(\beta,\ \alpha),\ \beta\right]$$

olduğunu kullanırsak

$$f(\beta,\alpha)=1+t\frac{2}{1-t}+1=2+\frac{2t}{1-t} \text{ ise}$$

$$M,\ m\in\left[2+\frac{2t}{1-t},\ \frac{2}{1-t}\right];\ L,\ l\in\left[2+\frac{2t}{1-t},\ \frac{2}{1-t}\right];\ K,\ k\in\left[2+\frac{2t}{1-t},\ \frac{2}{1-t}\right]$$

olur. Dolayısıyla (4.8) sistemi ise ancak ve ancak $M = m,\ L = l,\ K = k$ için sağlanır.

Böylece $f,\ g,\ h$ fonksiyonları teoremin bütün koşullarını sağlar. Dolayısıyla (4.6) sisteminin tüm pozitif çözümleri denge noktasına yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} = \frac{1+\sqrt{1+4(1-t)}}{2(1-t)},\ \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y} = \frac{1+\sqrt{1+4(1-t)}}{2(1-t)},\ \lim_{n\to\infty} z_n = \overline{z} = \frac{1+\sqrt{1+4(1-t)}}{2(1-t)}$$

olur. Bu da bize gösterir ki (4.6) sistemi global asimptotik kararlıdır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada;

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-a_1},\ y_{n-b_1}) \\ y_n = g(y_{n-b_2},\ z_{n-c_1}),\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathbb{N} \\ z_n = h(z_{n-c_2},\ x_{n-a_2}) \end{cases}$$

tipindeki tüm başlangıç şartları pozitif reel sayılar olan bazı fark denklem sistemlerinin hangi koşullar altında global asimptotik kararlı olacağını gösterdik. Bu problem fark denklemleri için önemli sorun teşkil etmektedir. Bizde literatürdeki kaynaklardan faydalanıp bazı şartları sağlayanlar için bir genellemeye ulaştık.

Yapılan bu çalışma ışığında daha çok değişkenli ve daha çok boyutlu fark denklem sistemlerinin kararlılığı, periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı incelenebir.

KAYNAKÇA

Camouzis, E. and Papaschinopoulos, G. (2004). Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations, $x_{n+1} = 1 + x_n / y_{n-m}$, $y_{n+1} = 1 + y_n / x_{n-m}$. *Applied Mathematics Letters, vol. 17*(no. 6), 733–737.

Cinar, C. and Yalcınkaya, İ. (2004). On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1} = 1/z_n$, $y_{n+1} = 1/x_{n-1}y_{n-1}$, $z_{n+1} = 1/x_{n-1}$. *International Mathematical Journal, (Vol.5)*, no. 5

Cinar, C. and Yalcınkaya, İ. (2004). On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1} = 1/z_n$, $y_{n+1} = x_n/x_{n-1}$, $z_{n+1} = 1/x_{n-1}$. *International Mathematical Journal, (Vol.5)*, no. 5

Clark, D. and Kulenovic, M. R. S. (2002). A coupled system of rational difference equations. *Computers and Mathematics with Applications 43*, 849-867.

Clark, D., Kulenovic, M. R. S. and Selgrade, J. F. (2003). Global asymptotic behavior of a two-dimensional difference equation modelling competition. *Nonlinear Analysis 52* (7), 1765–1776.

Elaydi, S. (1995). *A Introduction to Difference Equations*. Spinger- Verlag New York.

Grove, E. A., Ladas, G., McGrath L. C. and Teixeira, C. T. (2001). Existence and behavior of solutions of a rational system. *Commun. Appl. Nonlinear Anal. 3* (1), 1-25.

Iricanin B. and Stevic, S. (2006). Some systems of nonlinear difference equations of higher order with periodic solutions. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A Mathematical Analysis, vol. 13*, 499–507.

Kulenovic, M. R. S. and Ladas, G. (2002). *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture*. Boca Raton London.

Kulenovic, M. R. S. and Nurkanovic, M. (2003). Global asymptotic behavior of a two-dimensional system of difference equations modeling cooperation. *Journal of Difference Equations and Applications, Vol.9* (1), 149 – 159 .

Özban, A. Y. (2006). On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 + x_n / y_{n-k}$, $y_{n+1} = 1 + y_n / x_{n-m} y_{n-m-k}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 323*, 126–32,.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J. (1998). On a system of two nonlinear difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219*, 415 – 426 .

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J. (2002). On the system of two difference equations $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} A_i / y_{n-i}^{p_i}$, $y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} B_i / x_{n-i}^{q_i}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 273,* 294-309.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., (2003). Global behavior of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications*, *5*(2), 237-247.

Schinas, C. J. (1997). Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216*, 164-179

Sun, F., Yang, X. and Zhang, C. (2009). On the recursive sequence $x_n = A + x_{n-k}^p / x_{n-1}^r$. *Discrete Dyn. Nat. Soc., vol. 2009*, Article ID 608976, 8 pages.

Sun, T., Xi, H. (2005). Global behavior of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t})$. *J. Math. Anal. Appl., 311*, 760-765.

Sun, T., Xi, H. (2006). On the system of rational difference equations $x_{n+1} = f(x_n, y_{n-k})$, $y_{n+1} = f(y_n, x_{n-k})$. *Advan. Differ. Equations, vol.* 2006, Article ID 16949, 7 pages.

Sun, T., Xi, H. (2006). On the system of rational difference equations $x_{n+1} = f(y_{n-q}, x_{n-s})$, $y_{n+1} = g(x_{n-t}, y_{n-p})$. *Advan. Differ. Equations, Vol.2006*, Article ID 51520, 1-8.

Şimşek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ. (2006). On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-3}/(1 + x_{n-1})$. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, *Vol.1* (no.10), 475-480.

Şimşek, D., Demir, B. and Çinar, C. (2009). On the solutions of the system of the difference equation $x_{n+1} = \max\{A / x_n, y_n / x_n\}$, $y_{n+1} = \max\{A / y_n, x_n / y_n\}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2009*, Article ID 325296, 11 pages.

Şimşek, D., Demir, B. and Kurbanlı, A. S. (2009). $x_{n+1} = \max\{1/x_n, y_n/x_n\}$, $y_{n+1} = \max\{A/y_n, x_n/y_n\}$ denklem sistemlerinin çözümleri üzerine. *Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 28,* 91-104.

Yalçınkaya, İ., Çinar, C. and Atalay, M. (2008). On the solutions of systems of difference equations. *Advances in Difference Equations*, vol.2008, Article ID 143943, 9 pages.

Yalcınkaya, İ., Cinar, C. and Simsek, D. (2008). Global asymptotic stability of a system of difference equations. *Applicable Analysis, vol. 87*(no. 6), 677–687.

Yalçınkaya, İ. and Çinar, C. (2010). Global asymptotic stability of two nonlinear difference equations $z_{n+1} = (t_n + z_{n-1})/(t_n z_{n-1} + a)$, $\mathrm{t}_{n+1} = (z_n + t_{n-1})/(z_n t_{n-1} + a)$. *Fasciculi Mathematici,*no.43, 171-180.

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Nihat AKGÜNEŞ	İmza:	
Doğum Yeri:	Doğanhisar		
Doğum Tarihi:	01.10.1985		
Medeni Durumu:	Evli		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	**Koçaş İlkokulu**		**Koçaş Köyü/Doğanhisar/KONYA**	**1996**
Ortaöğretim	**Doğanhisar Anadolu Lisesi**		**Doğanhisar/KONYA**	**2000**
Lise	**Akşehir Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi**	**Fen Bilimleri**	**Akşehir/KONYA**	**2003**
Lisans	**Cumhuriyet Üniversitesi**	**Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği**	**SİVAS**	**2008**

Yüksek Lisans				
Becerileri:	**Sayısal İşlem, Matematik, Uygulamalı Matematik.**			
İlgi Alanları:	**Uygulamalı Matematik, Analiz, Geometri.**			
İş Deneyimi:	**MEB – Derbent Lisesi Matematik Öğretmenliği (2008-2008)** **Selçuk Üniversitesi Araştırma Görevlisi(2008,-)**			
Aldığı Ödüller:	**Akşehir 2003 yılı liseler arası bilgi yarışması birinciliği (2 kez)** **Akşehir Y.D.A. Lisesi 2003 yılı okul birinciliği** **Cumhuriyet Üniversitesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölüm birinciliği** **TÜBİTAK-BİDEB 2210 Yüksek Lisans Bursu**			
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	**Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk Kurbanlı (Selçuk Üni. Öğretim Üyesi)** **Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR (Selçuk Üni. Öğretim Üyesi)** **Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA (Selçuk Üni. Öğretim Üyesi)** **Yrd. Doç. Dr. Bünyamin AYDIN (Cumhuriyet Üni. Öğretim Üyesi)** **Prof. Dr. Rauf AMİROV (Cumhuriyet Üni. Öğretim Üyesi)**			
Tel:	**0-506-328-47-52**			
Adres	**Necip Fazıl Mah. Halil Çavuş Sok. No:20/1 Meram/KONYA**			