T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

BAZI ÖZEL MATRİSLER VE KOMBİNASYONEL ÖZDEŞLİKLER

Fatma Sidre OĞLAKKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman

Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Konya- 2010

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

öğrencinin	Adı Soyadı	Fatma Sidre OĞLAKKAYA	
	Numarası	078201011006	
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı	
	Programı	Tezli Yüksek Lisans☒	Doktor☐
	Tezin Adı	Bazı Özel Matrisler ve Kombinasyonel Özdeşlikler	

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma Sidre OĞLAKKAYA

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

öğrencinin	Adı Soyadı	Fatma Sidre OĞLAKKAYA
	Numarası	078201011006
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Ana Bilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Süleyman Solak
	Tezin Adı	Bazı Özel Matrisler ve Kombinasyonel Özdeşlikler

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan Bazı özel Matrisler ve Kombinasyonel Özdeşlikler başlıklı bu çalışma 02/ 07/ 2010 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Doç. Dr. Süleyman SOLAK	Danışman	
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR	Üye	
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR	Üye	

ÖNSÖZ

Matematiğin gelişiminde belli bir kurala göre elde edilen sayı dizileri önemli bir yer işgal etmektedir. Geçmişte Fibonacci, Lucas, Pascal, Stirling, Lah, Bell, Catalan ve bunlar gibi bir çok matematikçi kendi isimleri ile anılan sayı dizilerini elde etmişler bunların kendi içlerinde ve diğer sayı dizileri ile olan ilişkilerini incelemişlerdir.

Bu sayı dizilerinin elemanları ile oluşturulan matris formlarının incelenmesi matris teorisi açısından büyük bir etki ve öneme sahiptir. Bu sayı dizilerinden elde edilen özel matrisler ve bunların genelleştirilmiş halleri ile ilgili literatürde birçok kaynak bulmak mümkündür. Ayrıca bu özel matrislerin birbirleri ile olan özdeşlik ve eşitsizlik durumları da ilginç ve güzel ilişkilerin ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

Bu çalışma; Gwang- Yeon Lee, Jin- Soo Kim ve Seong- Hoon Cho isimli matematikçilerin " Some Combinatorial Identities via Fibonacci Numbers" başlıklı çalışmaları üzerine kurulmuş olup, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Süleyman SOLAK yönetiminde hazırlanarak Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez konusu tespiti ve tezin hazırlanması sırasında yardımlarından dolayı saygıdeğer hocam Doç. Dr. Süleyman SOLAK'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca bana her zaman destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Fatma Sidre OĞLAKKAYA

Temmuz- 2010

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

öğrencinin	Adı Soyadı	Fatma Sidre OĞLAKKAYA	
	Numarası	078201011006	
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Ana Bilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı	
	Programı	Tezli Yüksek Lisans☒	Doktora☐
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Süleyman SOLAK	
	Tezin Adı	Bazı Özel Matrisler ve Kombinasyonel Özdeşlikler	

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak Fibonacci, Pascal, Stirling ve Bell sayıları tanıtılmıştır. Daha sonra bu sayılarla oluşan matrisler tanımlanmış ve son olarak ta bu matrisler ile bazı kombinasyonel özdeşlikler üretilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci matrisi, Pascal matrisi, Stirling matrisleri, Bell matrisi, kombinasyonel özdeşlikler.

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

öğrencinin	Adı Soyadı	Fatma Sidre OĞLAKKAYA	
	Numarası	078201011006	
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Ana Bilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı	
	Programı	Tezli Yüksek Lisans☒	Doktora☐
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Süleyman SOLAK	
	Tezin İngilizce Adı	Some Special Matrices and Combinatorial Identities	

SUMMARY

In this study, initially the definations of Fibonacci, Pascal, Stirling and Bell numbers are given. Afterwards matrices composed via this numbers are identified and ultimately some combinatorial identities are generated by this matrices.

Key Words: Fibonacci matrix, Pascal matrix, Stirling matrices, Bell matrix, combinatorial identity.

SEMBOLLER

F_n	:	*n*. Fibonacci Sayısı
$n \times n$	:	n Sayıda Satır ve n Sayıda Sütundan Oluşan Matris
$\mathscr{F}_n$	:	n Boyutlu Fibonacci Matrisi
f_{ij}	:	Verilen Matriste *i*. Satır ve *j*. Sütuna Ait Olan Eleman
$\det(S_n)$	:	Verilen Matrisin Determinantı
$\sum$	:	Toplam Sembolü
!	:	Faktöriyel Sembolü
$[1]$	:	Birim Matris
$\oplus$	:	Direk Toplam Sembolü

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları; Fibonacci olarak adlandırılan Pisalı Leonardo tarafından bulunmuş bir dizinin elemanlarıdır. Günlük hayatta gözle görebileceğimiz birçok örneği vardır. (Kozalak ve ayçiçeğinin spiralleri, yaprakların dalda çıkış sırası gibi). Literatürde Fibonacci sayı ve dizileri ile ilgili birçok kaynak bulunmaktadır [1- 3].

Fibonacci' nin ününün nedeni Liber Abaci (Abaküs Kitabı) adlı kitabında alıştırma olarak sorduğu şu sorudur: Biri erkek biri dişi bir çift tavşanımız var, bir aylıkken çok genç oldukları için üreyemiyorlar, ama 2. ayın sonunda ergenleşip üremeye başlıyorlar. Her ay her ergen çiftin biri erkek biri dişi olmak üzere yeni bir çift yavru ürettiğini varsayalım, tavşanlar bu şekilde üremeye devam ederse bir yıl sonunda kaç çift tavşanımız olur? Sorunun devamı bu sorunun genelleştirilmiş halidir; n ay sonunda kaç çift tavşanımız olur? [1, 2].

Çözüm: Birinci ay bir çift, ikinci ay üremedikleri için yine bir çift, bir sonraki ay iki çift… Her ay kaç çift erişkin tavşan olduğunu hesaplarsak şu diziyi buluruz:

n : Ay sayısı, F_n :Tavşan çifti sayısı olmak üzere;

n :	0	1	2	3	4	5	…
F_n:	0	1	1	2	3	5	…

Görüldüğü üzere 3' ten itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. Bu diziye Fibonacci dizisi; dizinin terimlerine de Fibonacci sayıları adı verilmiştir. Fibonacci sayıları bir matrisin elemanları biçiminde yazılırsa yeni bir matris formu elde edilmiş olur. Bu yeni matris formuna Fibonacci matrisi adı verilir.

Tablo 1: Pascal Üçgeni

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Tablo 1 deki sayı üçgeninde, üçgenin her sayısı, üst sağ ve üst sol kısmında yer alan sayıların toplamı ile elde edilir. Bu sayı üçgenine " Pascal Üçgeni" denir.

Pascal Üçgeni; 1261' in başlarında Çin'de biliniyordu ve 11. yüzyılın başlarında bizim şuan kullandığımız şekliyle kullanılıyordu. İlk milenyumdan beri var olduğu görülmesine rağmen 11. yüzyıla kadar kuadratik ve kübik denklemlerin çözümünde kullanılmamıştır. Bu dönemde Jia Xian bugün bilinen Pascal üçgenini düzenledi, böylece kare ve küp köklerin özelliklerini yüksek köklere uygulayarak geliştirdi. Ayrıca herhangi bir dereceden polinom denklemini çözmek için kullanılabilir hale getirdi. Benzer bir çalışma 11. yy başlarında Arap gökbilimci, şair ve matematikçi Ömer Hayyam tarafından yapıldı. Tahminlere göre sayı üçgeni Çin'den, Avrupa'ya Arabistan aracılığıyla geçmiştir [14].

Blaise Pascal Avrupa'da binom katsayılar üzerine ilk çalışan kişi değildir. Pascal kendi aritmetik üçgenini 1653 yılında çalışmıştır. Fakat çalışması ilk kez 1665' te ölümünden sonra yayınlanmıştır.

17. yy' da bu aritmetik üçgen üç matematik konusunun gelişmesinde kilit nokta olmuştur. Bunlar sonsuz serilerin araştırılması, sonlu diferansiyellerin hesaplanması ve olasılık teoridir. Ayrıca bunların yanı sıra Pascal üçgeni; istatistik, bazı fizik uygulamaları ve biyolojideki uygulamalarda kullanılmaktadır [17].

Stirling sayıları; ilk defa 18. yüzyılda James Stirling tarafından tanımlanmıştır. Matematikte Stirling sayıları çeşitli kombinasyon problemlerinde kullanılır. 1. ve 2. Stirling sayıları olmak üzere iki çeşidi vardır. Stirling sayıları ile ilgili literatürde birçok kaynak bulunmaktadır [9, 10].

Genel soru: n kişi k tane yuvarlak masaya her masada en az bir kişi olmak koşuluyla kaç değişik biçimde yerleştirilebilir? Burada $s(n,k)$ ile gösterilen sayılara 1. Stirling sayıları adı verilir [9].

Özel durumlar:

a) Eğer 0 kişi varsa, bu 0 kişinin hepsi birden 0 tane masaya tek bir biçimde oturabilir. Kimse hiçbir masaya yerleştirilemez. Buradan $s(0,0)=1$ olur.

b) Eğer en az bir kişi varsa, bu kişiler 0 masaya yerleştirilemez. Buradan $n>0$ ise $s(n,0)=0$ olur.

c) Eğer sadece bir tek masa varsa, yani $k=1$ ise herkes bu tek masaya yerleştirilecektir. Bir numaralı kişi masanın her hangi bir yerine yerleştirilir, geri kalan $n-1$ kişi $(n-1)!$ değişik şekilde yerleştirilebilir. Buradan $s(n,1)=(n-1)!$ olur.

d) Eğer $k = n$ ise yani masa sayısı kişi sayısına eşit ise o zaman her masaya bir kişi yerleştirilir. Masalar arasında ayrım gözetilmediğinden tek bir yerleşim vardır. Buradan $s(n,n) = 1$ olur.

e) Eğer masa sayısı kişi sayısından bir eksik olursa, yani n kişi ve $n-1$ masa olsun. $n > 1$ olduğunda masalardan birine iki kişi oturacak diğer masalara da birer kişi yerleştirilecektir. Öncelikle aynı masaya oturacak iki kişi belirlenmelidir. Bunu $s(n,n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$ değişik biçimde yapabiliriz.

Genel durum: n kişi birbirinden farksız n masaya kaç değişik biçimde oturabilir?

Birinci cevap: n kişi bir masaya $s(n,1)$, iki masaya $s(n,2)$ ve genel olarak $1 \le k \le n$ için k masaya $s(n,k)$ farklı şekilde oturabilir. Öyleyse doldurdukları masa sayısını göz önünde tutarak; n kişi n masaya $\sum_{k=1}^{n} s(n,k)$ değişik biçimde yerleştirilebilir.

İkinci cevap: Masalar birbirinden ayırt edilemediği için birinci kişinin tek bir hamlesi var; herhangi bir masaya oturmak. 2. kişi ya boş masalardan birine yerleşecek yada birinci kişinin oturduğu masaya diyelim ki soluna yerleşecek. Demek ki 2. kişinin iki değişik hamlesi vardır. 3. kişinin yapabileceği hamleleri sayarsak; ya boş bir masaya geçecek, ya birincinin hemen soluna oturacak yada ikincinin hemen soluna oturacak demek ki 3. kişinin toplam üç hamlesi var. 4. kişi boş bir masaya geçebilir, yada birincinin hemen soluna geçebilir, yada ikincinin hemen soluna geçebilir yada üçüncünün hemen soluna geçebilir. 4. kişinin toplam dört hamlesi vardır. Genel olarak *k*. kişinin *k* hamlesi vardır.

Demek ki n kişi n masaya $n!$ değişik biçimde oturabilir. Burada yukarıda bulunan iki cevabı eşleyerek $\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$ elde edilir.

Genel olarak 2. Stirling sayılarını bulabilmek için aşağıdaki probleme çözüm aramak gerekir. Bu problemin çözümü bize sonsuz sayıda 2. Stirling sayılarını verecektir [9].

Genel soru: n kişi her grupta en az bir kişi olacak şekilde k gruba ayrılmak isteniyor. Buna göre kaç grup oluşturulabilir? [9].

Özel durumlar:

a) Eğer kimse yoksa bu kişileri tek bir biçimde 0 gruba ayırabiliriz, ama eğer $n > 0$ ise $S(n,0) = 0$ olur.

b) Eğer $k = 1$ ise tek bir parçalanış vardır. Herkes tek grupta toplanır. Burada $S(n,1) = 1$ olur.

c) Eğer $k = n$ ise yine tek bir parçalanış vardır. Her grup bir kişiden oluşur. $S(n,n) = 1$ olur.

d) Eğer $k > n$ ise parçalayan kümelerden en az bir boş küme olmak zorundadır. Buradan $S(n,k) = 0$ olur.

e) Grup sayısının kişi sayısından bir eksik olduğu durumu düşünürsek; $S(n,n-1)$ değerini hesaplayalım. $n-1$ kümeden birinde iki eleman, diğerlerinde birer eleman olmalı; n eleman arasında aynı gruba düşecek o iki eleman seçilmelidir. Bu $S(n,n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$ değişik biçimde yapılabilir.

f) $S(n,2)$ hesaplamak için parçalayan kümelerden birini seçmek yeterlidir. Nitekim eğer parçalayan kümelerden birisi A ise diğeri A nın tümleyeni olan A^T kümesi olmak zorundadır. Ama burada A boşküme ya da kümenin kendisi olamaz. n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesi olduğundan A için $2^n - 2$ seçenek vardır. Yalnız dikkat edilmesi gereken (A, A^T) parçalanışı ile (A^T, A) parçalanışı aynı parçalanışlardır. Öyleyse buradan $2^n - 2$ ikiye bölünmelidir. Sonuç: $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$

.

Bell sayıları; adını dizinin ilk derin incelemesini yapan Eric Temple Bell' den almıştır. Bell'in onuruna B_n' i ilk kullanan matematikçi John Riordan'dır. Bell sayıları ile ilgili literatürde birçok kaynak bulunmaktadır [5, 14- 16].

Kombinasyonel matematikte *n.* Bell sayısı *n* üyeli bir kümenin parçalanma sayısıdır. B_0=B_1=1 ile başlayarak ilk birkaç Bell sayısı aşağıdaki gibidir.

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, …

Genel olarak B_n, *n* elemanlı bir kümenin parçalanış sayısıdır. Bir *S* kümesinin parçalanışı, *S* nin boş olmayan, ayrık ikili grup, birleşimleri *S* olan alt kümelerinin kümesi olarak tanımlanır. Örneğin B_3=5 dir, çünkü 3- elemanlı küme $\{a,b,c\}$; 5 farklı şekilde parçalanabilir.

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\};\ \{\{a\},\{b,c\}\};\ \{\{b\},\{a,c\}\};\ \{\{c\},\{a,b\}\};\ \{\{a,b,c\}\}$$

B_0=1'dir çünkü boş kümenin kesinlikle bir parçalanışı vardır. Bundan dolayı boş küme kendisinin yegane parçalanışıdır. Yukarıdaki gösterimde ortaya konduğu gibi ne parçalanışların derecesi ne de her bir parçalanışın içindeki elemanların derecesi dikkate alınmaz. Bu demektir ki aşağıdaki parçalanışların tamamının özdeş olduğu düşünülmüştür.

$$\{\{b\},\{a,c\}\};\ \{\{a,c\},\{b\}\};\ \{\{b\},\{c,a\}\};\ \{\{c,a\},\{b\}\}$$

Bell sayıları ayrıca *n* ayırt edilebilir topu bir veya daha fazla farklı olmayan kutulara yerleştirmekte mümkün olan farklı yolların sayısı olarak gösterilebilir. Örneğin; varsayalım $n=3$ olsun. *a, b* ve *c* olarak isimlendireceğimiz 3 topumuz ve 3 kutumuz var. Eğer kutular birbirinden ayırt edilemiyorsa; topları kutuya yerleştirmenin 5 farklı yolu vardır.

- Her bir top kendi kutusuna gider.
- Bütün toplar bir kutuya gider. Kutular isimlendirilmediği zaman bu bir kere dikkate alınır ve bir kombinasyondur.
- *a* bir kutuya, *b* ve *c* başka bir kutuya;
- *b* bir kutuya, *a* ve *c* başka bir kutuya;

- c bir kutuya, a ve b başka bir kutuya gider.

Bell sayıları; Bell üçgeni aracılığıyla kurulabilir. Sütun 1 sayısı ile başlar. Sonrasında her bir sütun önceki satırın son elemanı ile başlar ve her bir sayı üstündeki sayı ile toplanır; sayı sağa yazılarak satır devam eder. Bu işlem tekrarlanarak Bell üçgeni oluşturulur.

Tablo 2: Bell Üçgeni

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 2 & 3 & 5 & & \\ 5 & 7 & 10 & 15 & \\ 15 & 20 & 27 & 37 & 52 \\ 52 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} 1 & ile & başlar & & & & \\ 1 & ile & başlar & 1+1=2 & & & \\ 2 & ile & başlar & 2+1=3 & 3+2=5 & & \\ 5 & ile & başlar & 5+2=7 & 7+3=10 & 10+5=15 & \\ 15 & ile & başlar & 15+5=20 & 20+7=27 & 27+10=37 & 37+15=52 \\ 52 & ile & başlar & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

şeklindedir.

Vajda, S. (1987), Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili temel kavramları ve teoremleri ele almış, Fibonacci ve Lucas sayılarının özellikleri ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki dönüşüm bağıntılarını incelemiştir.

Ayber, N. (2003), Gerçel sayı kümesinde tanımlanmış bir işlemin Fibonacci sayılarına uygulanması adlı çalışmanın bir bölümüne yer vermiş; Fibonacci sayıları ile ilgili temel kavramları ve özellikleri incelemiştir.

Lee, G- Y. , Kim, J- S. ve Cho S-H. (2003), Pascal matrisi, 1. ve 2. Stirling matrisleri ve Fibonacci matrislerinin, matris gösterimlerinden yararlanarak bunlar arasındaki kombinasyonel özdeşlikleri incelemişlerdir.

Wang, W. ve Wang, T. (2008), Bell matrisi ve Fibonacci matrisi arasındaki ilişkileri incelemişler, bazı alt üçgen matrislerin (1. ve 2. Stirling matrisleri, Lah matrisi ve genelleştirilmiş Pascal matrisi) benzerleştirilmelerini sağlama üzerine çalışmışlar ve çeşitli özdeşlikler türetmişlerdir.

Tang, Z. ve Duraiswami, N. (2004), Pascal matrislerinin literatürde önemli yer tutan bazı özel matrislerle olan ilişkilerini incelemişlerdir.

Edelman, A. ve Strang, G. (1993), Pascal matrisi ile ilgili kavramları ve teoremleri, Pascal matrisinin özelliklerini ayrıca Pascal matrisinin formlarını ve birbirleriyle olan ilişkilerini ifade etmişlerdir. Aynı zamanda Pascal matrislerinin kuvvetlerini, terslerini, logaritmalarını ve özdeğerlerini incelemişlerdir.

Çam, Ş. (2005), 1. ve 2. Stirling sayıları ve özelliklerini ele almış ayrıca bu iki tip Striling sayıları arasındaki bağıntıları incelemiştir.

Cheon, G- S. ve Kim, J- S. (2001) çalışmalarında 1. ve 2. Stirling sayılarından Pascal- tip matris elde etmeye çalışmışlar, bu matrislerin Pascal matrisleri aracılığıyla çarpanlarına ayrılabilir olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Stirling sayılarının matris gösteriminden bazı iyi tanımlı kombinasyonel özdeşlikleri elde etmişlerdir.

Bu çalışmada ilk olarak Fibonacci sayıları, Fibonacci matrisleri, Pascal üçgeni, Pascal matrisleri, Stirling sayıları, Stirling matrisleri ve Bell sayıları, Bell matrisleri tanıtılmıştır. Fibonacci sayılarının özellikleri üzerinde durulmuş Fibonacci matrislerinin; Pascal matrisi, Stirling matrisleri ve Bell matrisi ile arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Ayrıca bu matrisler aracılığıyla bazı kombinasyonel özdeşlikler ve eşitsizlikler üretilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fibonacci Matrisi

Tanım 2.1.1. Fibonacci sayıları lineer rekürans bağıntısı kullanılarak; $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleri ile $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde tanımlanır [1].

Örnek 2.1.1. Fibonacci dizisinin ilk 5 terimini rekürans bağıntısından yararlanarak bulalım.

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = F_1 + F_o = 1+0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$,
$F_4 = F_3 + F_2 = 2+1 = 3$, $F_5 = F_4 + F_3 = 3+2 = 5$.

Fibonacci sayıları arasında birçok bağıntı vardır. Bunlardan bazıları;

- $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$,
- $f^2{}_1 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$,
- $f_{m-n} = (-1)(f_m f_{n+1} - f_{m+1} f_n)$ (D' ocogne Özdeşliği),
- $f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}$ (Horsberger Formülü),
- $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$,
- $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ (Cassini ya da Simpson Eşitliği),
- $f_{n-r} f_{n+r} - f_n^2 = (-1)^{n-r+1} f_r^2$ (Catalan eşitliği) [1, 3].

Fibonacci sayıları matris teoride önemli yer işgal etmektedir. Bu kısımda Fibonacci matrisleri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.2. F_n ; *n*. Fibonacci sayısı ve

$$f_{ij} = \begin{cases} F_{i-j+1}, & i-j+1 \geq 0 \\ 0 \ , & i-j+1 < 0 \end{cases}$$

olmak üzere; Fibonacci matrisi $\mathscr{F}_n = \left(f_{ij}\right)$ şeklinde tanımlanır [4]. Bu matrisin açık yazılımı;

$$\mathscr{F}_n = \begin{pmatrix} F_1 & F_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_2 & F_1 & F_0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_3 & F_2 & F_1 & F_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n & F_{n-1} & F_{n-2} & F_{n-3} & \ldots & F_1 \end{pmatrix}.$$

Örnek 2.1.2. Tanım 2.1.2.' den $n=4$ için $\mathscr{F}_4$ Fibonacci matrisi;

$$\mathscr{F}_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi de tersi Fibonacci matrisi olan özel S_n matrisini tanımlayalım.

Tanım 2.1.3. $n\times n$ alt üçgen S_n matrisi;

$$s_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ -1, & i-2\le j\le i-1 \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases} \quad ;\ i,j=1,2,\dots,n, \tag{2.1.3}$$

olmak üzere $S_n=\left(s_{ij}\right)$ şeklinde tanımlıdır[5]. S_n matrisinin açık olarak yazılımı;

$$S_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

S_n matrisinin tersi;

$$S_n^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \dots & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup bu matris sütunları Fibonacci dizisinden oluşan Fibonacci matrisidir yani;

$$\mathscr{F}_n=S_n^{-1}.$$

Örnek 2.1.3. Tanım 2.1.3.' ten $n=4$ için S_4 matrisi;

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Satır ve sütun işlemleri yapılarak S_4 matrisinin tersi;

$$S_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathscr{F}_4$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.1.1. $\mathscr{F}_n$ Fibonacci matrisi ve

$$f_{ij}^{'} = \begin{cases} 1, & i=j \\ -1, & i-2 \le j \le i-1 \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases} \quad ;\ (i,j=0,1,2,...,n) \qquad (2.1.1)$$

olmak üzere;

$$\mathscr{F}_n^{-1} = \left(f_{ij}^{'}\right)$$

$$= S_n \quad [\ 4].$$

Örnek 2.1.4. Teorem 2.1.1.' den $n=4$ için $\mathscr{F}_4^{-1}$ matrisi;

$$\mathscr{F}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Pascal Matrisi

Pascal üçgeninden elde edilen sayılar bir kurala bağlı olarak bir matrisin elamanları biçiminde yazılırsa yeni bir matris formu elde edilmiş olur. Bu yeni matris formuna Pascal Matrisi adı verilir. Bu matris formunun üç farklı biçimi bulunmaktadır [6].

Tanım 2.2.1. $0 \le i, j \le n-1$ için $s_{ij} = \binom{i+j}{i}$ olmak üzere $S_n = (s_{ij})_{n\times n}$ matrisine simetrik Pascal matrisi denir [7]. Bu matrisin açık olarak yazılımı;

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{n-1}^{0} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & C_{n}^{1} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & C_{n+1}^{2} \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & C_{n+2}^{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^{0} & C_{n}^{1} & C_{n+1}^{2} & C_{n+2}^{3} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Örnek 2.2.1. Tanım 2.2.1. ile verilen S_n simetrik Pascal matrisi n=4 için;

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.2.

$$u_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i}, & j \ge i \\ 0 \ , & i > j \end{cases} \qquad ; \ (i, j = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

olmak üzere; $U_n = (u_{ij})_{n\times n}$ matrisine üst üçgen Pascal matrisi denir [7]. Bu matrisin açık olarak yazılımı;

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{n-1}^{0} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & C_{n-1}^{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & C_{n-1}^{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & C_{n-1}^{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Örnek 2.2.2. Tanım 2.2.2. ile verilen U_n üst üçgen Pascal matrisinde n=4 için;

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tanım 2.2.3.

$$p_{ij} = \begin{cases} \dbinom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0 \quad , & i < j \end{cases} \; ; \; (i, j = 0,1,\ldots,n)$$

olmak üzere; $P_n = (p_{ij})_{n\times n}$ matrisine alt üçgen Pascal matrisi denir [7]. Bu matrisin açık olarak yazılımı;

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \ldots & C_n^n \end{pmatrix}_{n\times n} .$$

Örnek 2.2.3. Tanım 2.2.3. ile verilen P_n alt üçgen Pascal matrisinde n=4 için;

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pascal matrislerinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir. S_n simetrik Pascal matrisini, U_n üst üçgen Pascal matrisini, P_n alt üçgen Pascal matrisini göstermek üzere;

1. $\det(S_n)=1$, $\det(U_n)=1$, $\det(P_n)=1$,

2. $U_n = P_n^T$ ve $P_n = U_n^T$,

3. $S_n = U_n P_n$ ve $S_n = P_n U_n$ [8].

2.3. Stirling Matrisleri

Tanım 2.3.1. $n,k \geq 0$ ve $n,k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$P_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

polinomunda x^k nın katsayılarına birinci Stirling sayıları denir ve $s(n,k)$ ile gösterilir [9].

Örnek 2.3.1. 4 kişi 2 yuvarlak masaya kaç değişik biçimde yerleştirilebilir?

4 kişi 2 yuvarlak masaya $s(4,2)$ değişik biçimde yerleştirilebilir. Bu yerleştirmeler sırasıyla;

(1)	(2 3 4)	(3)	(1 2 4)	(1 2)	(3 4)
(1)	(2 4 3)	(3)	(1 4 2)	(1 3)	(2 4)
(2)	(1 3 4)	(4)	(1 2 3)	(1 4)	(2 3)
(2)	(1 4 3)	(4)	(1 3 2)		

şeklinde olur ki; sonuç olarak $s(4,2) = 11$ bulunur.

Teorem 2.3.1. $n \geq k \geq 1$ ise;

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k) \text{ dir [9].}$$

Bu eşitlik sayesinde değerini bildiğimiz 1. Stirling sayılarını kullanarak yenilerini hesaplayabiliriz.

Tablo 3: $n=9$ için 1. Stirling Sayıları;

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$s(0,k);$	1									
$s(1,k);$	0	1								
$s(2,k);$	0	1	1							
$s(3,k);$	0	2	3	1						
$s(4,k);$	0	6	11	6	1					
$s(5,k);$	0	24	50	35	10	1				
$s(6,k);$	0	120	274	225	85	15	1			
$s(7,k);$	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
$s(8,k);$	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
$s(9,k);$	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Örnek 2.3.2. $s(5,3)$ hesaplayalım.

Teorem 2.3.1.' den $s(5,3)=s(4,2)+4s(4,3)=11+4.\dfrac{4.3}{2}=11+24=35$.

Tanım 2.3.2. n ve k tamsayıları için $n \geq k \geq 0$ ve

$$[x]_n = \begin{cases} x(x-1)\ldots(x-n+1) & eğer \quad n \geq 1 \\ 1 & eğer \quad n=0 \end{cases}$$

olmak üzere; $x^n=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$ polinomunda x değişkeninin katsayılarına 2. Stirling sayıları denir ve $S(n,k)$ ile gösterilir [9]. Ayrıca $S(n,k)$ için;

$$S(n,k)=\sum_{l=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{l}S(l,k-1) \tag{2.3.2}$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek 2.3.3. Dört elemanlı bir kümeyi, iki ayrık ve boş olmayan kümeye kaç farklı şekilde parçalayabiliriz?

$\{1,2,3,4\}$ dört elemanlı küme olmak üzere; $S(4,2)$ ' i bulalım:

$\{1\}\quad\{2,3,4\}$
$\{1,2\}\quad\{3,4\}$
$\{1,3\}\quad\{2,4\}$
$\{1,4\}\quad\{2,3\}$

$\{1,2,3\}\quad\{4\}$
$\{1,2,4\}\quad\{3\}$
$\{1,3,4\}\quad\{2\}$

buna göre $S(4,2)=7$.

Teorem 2.3.2. $n \geq k \geq 1$ için;

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k.S(n-1,k) \text{ dir [9].}$$

Bu eşitlik 2. Stirling sayıları için tümevarımsal bir ilişkidir ve bu ilişki 2. Stirling sayılarını küçüklerinden başlayarak teker teker hesaplamamızı sağlar.

Tablo 4: $n=9$ için 2. Stirling sayıları;

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$S(0,k)$;	1									
$S(1,k)$;	0	1								
$S(2,k)$;	0	1	1							
$S(3,k)$;	0	1	3	1						
$S(4,k)$;	0	1	7	6	1					
$S(5,k)$;	0	1	15	25	10	1				
$S(6,k)$;	0	1	31	90	65	15	1			
$S(7,k)$;	0	1	63	301	350	140	21	1		
$S(8,k)$;	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
$S(9,k)$;	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Örnek 2.3.4. $S(5,3)$ hesaplayalım.

5 elemanlı bir kümeyi ayrık ve boş olmayan 3 kümeye parçalayalım. Teorem 2.3.2.' den $S(5,3)=S(4,2)+3\cdot S(4,3)=7+3\cdot\dfrac{4\cdot 3}{2}=7+18=25$.

Şimdi de Stirling sayılarından yararlanarak Stirling matrislerini elde edelim.

Tanım 2.3.3. Stirling sayıları $s(i,j)$ ve $S(i,j)$ olmak üzere, sırasıyla 1. ve 2. Stirling sayıları için $n \times n$ 1. ve 2. Stirling matrislerinin elemanları;

$$s_{ij} = \begin{cases} s(i,j), & i \geq j \\ 0 \quad , & \textit{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

.
$$S_{ij} = \begin{cases} S(i,j), & i \geq j \\ 0 \quad , & \textit{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (2.3.4)$$

ile tanımlıdır [11].

Örnek 2.3.5. Tanım 2.3.3.' ten yararlanarak $n=4$ için 1. Stirling matrisi ve 2. Stirling matrisi;

$$\mathscr{S}_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathscr{S}_4(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Bell Matrisi

Tanım 2.4.1. Bell sayıları lineer rekürans bağıntıları kullanılarak; $B_0 = 1$ başlangıç değeri ile $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n-1}{k}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.4.1. Tanım 2.4.1.' den $n=4$ için Bell sayıları;

$B_1 = B_0 = 1;$ $\quad B_2 = B_0 + B_1 = 1+1 = 2;$ $\quad B_3 = B_0 + 2B_1 + B_2 = 1+2.1+2 = 5;$

$B_4 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 = 1+3.1+3.2+5 = 15.$

Bell sayıları arasında bir çok bağıntı vardır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

- Her bir Bell sayısı ikinci tip Stirling sayıları toplamıdır yani;

  $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ [15].

- Bell sayıları, $f(x) = e^{e^x}$ fonksiyonunun Mc Lauren açılımının katsayılarıdır yani;

  $e^{e^x} = e\left(1 + \frac{1x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \dots\right)$ [15].

Tanım 2.4.2. B_n ; n. Bell sayısı ve

$$b_{ij} = \begin{cases} B_{i-j}\,, & i-j \geq 0 \\ 0\ , & i-j < 0 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

olmak üzere; Bell matrisi $\mathscr{B}_n = (b_{ij})$ şeklinde tanımlanır ki bu matris açık olarak;

$$\mathscr{B}_n = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1} & B_{n-2} & B_{n-3} & B_{n-4} & \dots & B_0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Örnek 2.4.2. Tanım 2.4.2.' den $n = 4$ için Bell matrisi;

$$\mathscr{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

3. FIBONACCI MATRİSİ İLE PASCAL MATRİSİ, STIRLING MATRİSLERİ VE BELL MATRİSİ ARASINDAKİ KOMBİNASYONEL ÖZDEŞLİKLER

3.1. Fibonacci Matrisi ve Pascal Matrisi ile Elde Edilen Kombinasyonel Özdeşlikler

Tanım 3.1.1. $L_n = \left(l_{ij}\right)$ matrisinin elemanları;

$$l_{ij} = \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-2}{j-1} - \binom{i-3}{j-1} \qquad (3.1.1)$$

olmak üzere; $l_{11} = 1$; $j \geq 2$ için $l_{1j} = 0$, $l_{21} = 0$, $l_{22} = 1$; $j \geq 3$ için $l_{2j} = 0$; $i \geq 3$ için $l_{i1} = -1$ ve $i, j \geq 2$ için $l_{ij} = l_{i-1,j-1} + l_{i-1,j}$ dir [4].

Örnek 3.1.1. Tanım 3.1.1.' den L_n matrisinde $n = 4$ için L_4;

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{F}_n$; Tanım 2.1.2. ile verilen Fibonacci matrisi; P_n; Tanım 2.2.3. ile verilen Pascal matrisi ve L_n; Tanım 3.1.1. ile verilen matris olmak üzere P_n, $\mathscr{F}_n$ ve L_n matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.1.1. P_n; Pascal matrisi, $\mathscr{F}_n$; Fibonacci matrisi ve L_n; Tanım 3.1.1. ile verilen matris olmak üzere;

$$P_n = \mathscr{F}_n L_n \text{ [4].}$$

İspat: İspat için $\mathscr{F}_n^{-1} P_n = L_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Teorem 2.1.1.' den Fibonacci matrisinin terslenebilir olduğunu ve $\mathscr{F}_n^{-1} = \left(f'_{ij}\right)$ nin $\mathscr{F}_n$ in tersi olduğunu biliyoruz. $j \geq 2$ için $f'_{1j} = 0$ olduğunda $f'_{11} p_{11} = 1$ ve $l_{11} = 1 = \sum_{k=1}^{n} f'_{1k} p_{k1}$.

$j \geq 2$ için $p_{1j} = 0$ ve $f'_{1j} = 0$ olduğunda $j \geq 2$ için $\sum_{k=1}^{n} f'_{1k} p_{kj} = 0 = l_{1j}$. $j \geq 3$ için $f'_{2j} = 0$ olduğunda $f'_{21} = -1$, $f'_{22} = 1$ ve $\sum_{k=1}^{n} f'_{2k} p_{k1} = 0 = l_{21}$. (2.1.1) den $i = 3, 4, \ldots, n$ için $\sum_{k=1}^{n} f'_{ik} p_{k1} = l_{i1}$. $i \geq 3$ ve $j \geq 2$ için (2.1.1) aracılığıyla ve l_{ij} nin rekürans bağıntısından $\sum_{k=1}^{n} f'_{ik} p_{kj} = l_{ij}$. Buradan $\mathscr{F}_n^{-1} P_n = L_n$.

Örnek 3.1.2. $\mathscr{F}_4$ matrisi Örnek 2.1.2. ; P_4 matrisi Örnek 2.2.3. ve L_4 matrisi Örnek 3.1.1.' deki matrisler olmak üzere Teorem 3.1.1.' i

$$\mathscr{F}_4 L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_4$$

şeklinde doğrularız.

Sonuç 3.1.1. $1 \leq r \leq n$ için;

$$\binom{n-1}{r-1} = \sum_{k=r}^{n} F_{n-k+1} \frac{(k-3)!\left(r(k-1) - 2(r-1) - (k-r)^2\right)}{(r-1)!(k-r)!} \tag{3.1.2}$$

ve özellikle, $r = 1$ için $F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-2} = F_n - 1$ [4].

İspat: $F_1 = F_2 = 1$ ve $i \leq j+1$ için $l_{ij} = 0$ ve Tanım 2.2.3.' ten $p_{nr} = \binom{n-1}{r-1}$. $P_n = \mathscr{F}_n L_n$ matris çarpımından;

$$\binom{n-1}{r-1} = p_{nr} = \sum_{k=1}^{n} f_{nk} l_{kr} = f_{n1} l_{1r} + f_{n2} l_{2r} + \ldots + f_{n,n-2} l_{n-2,r} + f_{n,n-1} l_{n-1,r} + f_{nn} l_{nr}$$

bulunur. Tanım 2.1.2.' den yararlanarak özdeşliği düzenlersek;

$$\binom{n-1}{r-1} = p_{nr} = \sum_{k=1}^{n} F_{n-k+1} l_{kr} = F_n l_{1r} + F_{n-1} l_{2r} + \ldots + F_3 l_{n-2,r} + F_2 l_{n-1,r} + F_1 l_{nr}$$ elde edilir.

$l_{rr}=1$, $l_{r+1,r}=r-1$ ve $k\geq r+2$ için;

$$l_{kr}=\binom{k-1}{r-1}-\binom{k-2}{r-1}-\binom{k-3}{r-1}=\frac{(k-1)!}{(k-r)!(r-1)!}-\frac{(k-2)!}{(k-r-1)!(r-1)!}-\frac{(k-3)!}{(k-r-2)!(r-1)!}$$

gerekli düzenlemeler sırası ile yapıldığında ve

$$l_{kr}=\frac{(k-3)!\left(r(k-1)-2(r-1)-(k-r)^2\right)}{(r-1)!(k-r)!}$$

olur ki (3.1.2) özdeşliği elde edilmiş olur. Özel olarak $r=1$ olduğu zaman $l_{11}=1$, $l_{21}=0$ ve $i=3,4,\ldots,n$ için $l_{i1}=-1$.

Dolayısıyla;

$$1=p_{n1}=F_nl_{11}+F_{n-1}l_{21}+F_{n-2}l_{31}+\ldots+F_3l_{n-2,1}+F_2l_{n-1,1}+F_1l_{n1}$$

$$1=p_{n1}=F_n1+F_{n-1}0+F_{n-2}(-1)+\ldots+F_3(-1)+F_2(-1)+F_1(-1),$$

bu ifadeyi düzenlediğimiz zaman;

$$F_1+F_2+F_3+\ldots+F_{n-2}=F_n-1$$

bağıntısı elde edilir.

Tanım 3.1.2. L_n matrisinin tersi; $L_n^{-1}=\left(l'_{ij}\right)$ şeklinde olup burada

$$l'_{ij}=\sum_{k=j}^{i}(-1)^k\binom{i-1}{k-1}F_{k-j+1} \tag{3.1.3}$$

biçimindedir [4].

$j\geq 2$ için $l'_{ij}=l'_{i-1,j-1}-l'_{i-1,j}$ ve $i\geq 3$ için $l'_{i1}=(-1)^{i+1}F_{i-2}$. $\mathscr{T}_n=P_nL_n^{-1}$ özdeşliğinden;

$$F_n=\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}F_{k-1} \text{ [4].}$$

Burada (3.1.2) ve (3.1.3)' ten aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.2. F_n , *n*. Fibonacci sayısı olmak üzere $n\geq 3$ için;

$$F_n=1+\sum_{j=3}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j-1}F_{j-2}=2^{n-2}-\sum_{k=1}^{n-3}F_k2^{n-k-3} \text{ [4].}$$

İspat: $\mathscr{F}_n = \left(f_{ij} \right) = P_n L_n^{-1}$ ve $f_{n1} = F_n$. $l'_{11} = 1,\ l'_{21} = 0$ ve $j \geq 3$ için $l'_{j1} = (-1)^{j+1} F_{j-2}$ olduğunda;

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} p_{nj} l'_{j1} = p_{n1} l'_{11} + p_{n2} l'_{21} + \sum_{j=3}^{n} p_{nj} l'_{j1} = 1 + \sum_{j=3}^{n} p_{nj} l'_{j1}$$

$$= 1 + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{j+1} p_{nj} F_{j-2} = 1 + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j-1} F_{j-2}$$

bulunur. Şimdi özdeşliğin ikinci kısmını ispatlayalım; $E_n = \left(1,1,...,1\right)^T$ olmak üzere $P_n = \mathscr{F}_n L_n$ özdeşliğinin her iki tarafı E_n ile sağdan çarpılırsa;

$$P_n E_n = \mathscr{F}_n L_n E_n .$$

Öncelikle L_n ve E_n çarpımında $n \geq 4$ için $l_{n1} + l_{n2} + l_{n3} + l_{n4} + ... + l_{nn} = 2^{n-3}$ ifadesi elde edilir. Bulduğumuz ifadeyi $\mathscr{F}_n$ ile çarparak $n \geq 4$ için;

$$F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \sum_{k=4}^{n} F_{k-3} 2^{n-k+1}$$

elde edilir. Bu ifadeyi düzenlediğimizde $F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \sum_{k=1}^{n-3} F_k 2^{n-k-2}$ elde edilir.

Özdeşliğin diğer tarafında $P_n E_n = \left(1, 2, 4, 8, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right)^T$. Binom katsayılar arasındaki ilişkiden;

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} \ ; \ P_n E_n = \left(1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}\right)^T$$

elde edilir. Sonuç 3.1.1. ve Sonuç 3.1.2. ile $\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}$ kombinasyonel özdeşliğinden $\left\{F_n\right\}$ Fibonacci dizisinin ilk *n* teriminin toplamı;

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{j=3}^{n+2} (-1)^{j+1} \binom{n+1}{j-1} F_{j-2} = 2^n - \sum_{k=1}^{n-1} F_k 2^{n-k-1} - 1 \ .$$

3.2. Fibonacci Matrisi ve 2. Stirling Matrisi ile Elde Edilen Kombinasyonel Özdeşlikler

Tanım 3.2.1. $M_n = (m_{ij})$ matrisinin elemanları

$$m_{ij} = S(i,j) - S(i-1,j) - S(i-2,j) \tag{3.2.1}$$

ile tanımlansın. Burada $m_{11} = 1$, $j \geq 2$ için $m_{1j} = 0$; $m_{21} = 0$, $m_{22} = 1$; $j \geq 3$ için $m_{2j} = 0$; $i \geq 3$ için $m_{i1} = -1$; $i, j \geq 2$ için $m_{ij} = m_{i-1,j-1} + j.m_{i-1,j}$ [4].

Örnek 3.2.1. Tanım 3.2.1. de M_n matrisi $n = 4$ için;

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{F}_n$; Tanım 2.1.2. ile verilen Fibonacci matrisi; $\mathscr{S}_n(2)$; (2.3.4) ile verilen 2. Stirling matrisi ve M_n; Tanım 3.2.1. ile verilen matris olmak üzere; $\mathscr{S}_n(2)$, $\mathscr{F}_n$ ve M_n matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.2.1. $\mathscr{S}_n(2)$; 2. Stirling matrisi, $\mathscr{F}_n$; Fibonacci matrisi ve M_n Tanım 3.2.1. ile verilen matris ise o zaman;

$$\mathscr{S}_n(2) = \mathscr{F}_n.M_n \text{ [4]}.$$

İspat: İspat için $\mathscr{F}_n^{-1}.\mathscr{S}_n(2) = M_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Teorem 2.1.1.' den Fibonacci matrisinin terslenebilir olduğunu ve $\mathscr{F}_n^{-1} = (f_{ij}^{'})$ nin $\mathscr{F}_n$ in tersi olduğunu biliyoruz. $j \geq 2$ için $f_{1j}^{'} = 0$ olduğunda $f_{11}^{'}S_{11} = 1 = m_{11}$; $j \geq 2$ için $S_{1j} = 0$ ve $f_{1j}^{'} = 0$ olduğunda, $j \geq 2$ için $\sum_{k=1}^{n} f_{1k}^{'}S_{kj} = 0 = m_{1j}$; $j \geq 3$ için $f_{21}^{'} = -1$ ve $f_{22}^{'} = 1$ olduğunda $\sum_{k=1}^{n} f_{2k}^{'}S_{k1} = m_{21}$. Böylece (2.1.1) den $i = 3,4,...,n$ için $\sum_{k=1}^{n} f_{ik}^{'}S_{k1} = m_{i1}$ elde edilir.

Sonra $i \geq 3$ ve $j \geq 2$ için (2.1.1) ve (2.3.4) aracılığıyla $\sum_{k=1}^{n} f_{ik}^{'} S_{kj} = m_{ij}$ bulunur.

Bundan dolayı $M_n = \mathscr{F}_n^{-1} \mathscr{S}_n(2)$, yani $\mathscr{S}_n(2) = \mathscr{F}_n M_n$.

Örnek 3.2.2. $\mathscr{F}_4$ matrisi Örnek 2.1.2. ; $\mathscr{S}_4(2)$ matrisi Örnek 2.3.5. ve M_4 matrisi Örnek 3.2.1. ile verilen matrisler olmak üzere Teorem 3.2.1.' i

$$\mathscr{F}_4 M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \mathscr{S}_4(2)$$

şeklinde doğrularız.

$S_{nk} = S(n,k) = \sum_{r=1}^{n} f_{nr} m_{rk}$ ve $i \geq 3$ için

$$m_{ik} = \frac{1}{k!} \sum_{0 \leq l \leq k} (-1)^l \binom{k}{l} ((k-l)^i - (k-l)^{i-1} - (k-l)^{i-2})$$

olduğunda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1. $1 \leq k \leq n$ için;

$$S(n,k) = \sum_{i=k}^{n} F_{n-i+1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{0 \leq l \leq k} (-1)^l \binom{k}{l} ((k-l)^i - (k-l)^{i-1} - (k-l)^{i-2}) \right) \text{ [4].}$$

Örnek 3.2.3. F_n ; Tanım 2.1.2 ile verilen Fibonacci sayısı ve $S(n,k)$ Tanım 2.3.2. ile verilen 2. Stirling sayısı olmak üzere $n = 4$ ve $k = 3$ için Sonuç 3.2.1. ifadesinden;

$$\sum_{i=3}^{4} F_{4-i+1} \left(\frac{1}{3!} \sum_{0 \leq l \leq 3} (-1)^l \binom{3}{l} ((3-l)^i - (3-l)^{i-1} - (3-l)^{i-2}) \right)$$

$$= F_2 \left(\frac{1}{3!} ((-1)^0 \binom{3}{0} (3^3 - 3^2 - 3) + (-1) \binom{3}{1} (2^3 - 2^2 - 2) + \binom{3}{2} (1-1-1)) \right)$$

$$+F_1\left(\frac{1}{3!}((-1)^0\binom{3}{0}(3^4-3^3-3^2)+(-1)\binom{3}{1}(2^4-2^3-2^2)+\binom{3}{2}(1-1-1))\right)$$

$$=\frac{1}{6}(15-6-3)+\frac{1}{6}(45-12-3)=1+5=S(4,3)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1. $\mathscr{S}_{n-1}(2)$; $(n-1)\times(n-1)$ boyutlu 2. Stirling matrisi; L_n Tanım 3.1.1. ile verilen matris ve M_n Tanım 3.2.1. ile verilen matris olmak üzere;

$$M_n = L_n\left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}(2)\right) \text{ [4].}$$

İspat: $i\geq j\geq 1$ ile her bir i ve j için (i,j) başlangıç değeri olduğunda $[1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}(2)$; $S(i-1,j-1)$. $B_n=\left(b_{ij}\right)=L_n\left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}(2)\right)$. (3.1.1) ve (3.2.1) den $l_{11}=1=m_{11}$, $l_{21}=0=m_{21}$ ve $l_{22}=S(1,1)=1=m_{22}$ olduğunda $i=1,2$ için $b_{ij}=m_{ij}$. $i\geq 3$ için

$$b_{ij}=\sum_{k=j-1}^{i-1}\left[\binom{i-1}{k}S(k,j-1)-\binom{i-2}{k}S(k,j-1)-\binom{i-3}{k}S(k,j-1)\right]$$

olduğunda ve (2.3.2) ile (3.2.1) den $b_{ij}=S(i,j)-S(i-1,j)-S(i-2,j)=m_{ij}$ olur. Buradan $M_n=L_n\left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}(2)\right)$.

Örnek 3.2.4. $n=4$ için $[1]\oplus\mathscr{S}_3(2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}$ ve L_4, Örnek 3.1.1.' deki matris olmak üzere;

$$L_4\cdot\left([1]\oplus\mathscr{S}_3(2)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\-1&0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\-1&3&5&1\end{pmatrix}=M_4.$$

Aşağıda verilen Sonuç 3.2.2. , Lemma 3.2.1.' in doğrudan sonucudur.

Sonuç 3.2.2. $\mathscr{S}_n(2)$; 2. Stirling matrisi, $\mathscr{F}_n$; Fibonacci matrisi, L_n (3.1.1) ile verilen matris olmak üzere $n \geq 2$ için;

$$\mathscr{S}_n(2) = \mathscr{F}_n L_n \left([1] \oplus \mathscr{S}_{n-1}(2)\right) \text{ [4].}$$

İspat: Teorem 3.1.1.' den $\mathscr{F}_n L_n = P_n$. Buradan $n \times n$ Pascal matrisi P_n için;

$$\mathscr{S}_n(2) = P_n \left([1] \oplus \mathscr{S}_{n-1}(2)\right).$$

$i \geq j \geq 1$ olmak üzere her bir i ve j için (i, j) başlangıç değeri olduğunda $[1] \oplus \mathscr{S}_{n-1}(2)$; $S(i-1, j-1)$. Matris çarpımı tanımından ve (2.3.2) den;

$$\left(P_n\left([1] \oplus \mathscr{S}_{n-1}(2)\right)\right)_{ij} = \sum_{l=j-1}^{i-1} p_{i,l+1} S(l, j-1)$$

$$= \sum_{l=j-1}^{i-1} \binom{i-1}{l} S(l, j-1) = S(i, j) = \mathscr{S}_n(2).$$

Örnek 3.2.5. $n = 4$ için $[1] \oplus \mathscr{S}_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ve P_4; Örnek 2.2.3.' teki Pascal matrisi olmak üzere;

$$P_4\left([1] \oplus \mathscr{S}_3(2)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \mathscr{S}_4(2) \text{dir.}$$

$k \times k$ Pascal matrisi P_k için; $n \times n$ $\overline{P_k}$ matrisi; I_{n-k}; $(n-k)$. dereceden birim matris olduğunda $\overline{P_k} = I_{n-k} \oplus P_k$ ile tanımlanır. Yani;

$$\overline{P_k} = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & P_k \end{pmatrix}.$$

Buradan $\overline{P_n} = P_n$ ve $\overline{P_1} = I_n$ olur [11].

Aşağıda verilen Sonuç 3.2.3. , Sonuç 3.2.2.’ nin doğrudan sonucudur.

Sonuç 3.2.3. $\mathscr{S}_n(2)$; 2. Stirling matrisi ve $\overline{P_k}$; $n\times n$ Pascal matrisi olmak üzere $\mathscr{S}_n(2)$; $\overline{P_k}$ aracılığıyla;

$$\mathscr{S}_n(2) = \overline{P_n}\,\overline{P_{n-1}}\cdots\overline{P_2}\,\overline{P_1}$$

şeklinde üretilir.

Örnek 3.2.6. $\mathscr{S}_n(2)$; 2. Stirling matrisi ve $\overline{P_k}$; $n\times n$ Pascal matrisi olmak üzere $n=4$ için Sonuç 3.2.3. ifadesini

$$\overline{P_4}\,\overline{P_3}\,\overline{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathscr{S}_4(2)$$

şeklinde örneklendirmiş oluruz.

$\mathscr{F}_k$; $k\times k$ Fibonacci matrisi ve L_k; (3.1.1) ile verilen $k\times k$ matris olmak üzere $n\times n$, $\overline{\mathscr{F}_k L_k}$ matrisi $\overline{\mathscr{F}_k L_k} = I_{n-k} \oplus \mathscr{F}_k L_k$ ile tanımlanır, yani;

$$\overline{\mathscr{F}_k L_k} = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & \mathscr{F}_k L_k \end{pmatrix}.$$

Buradan $\overline{\mathscr{F}_n L_n} = \mathscr{F}_n L_n$ ve $\overline{\mathscr{F}_1 L_1} = I_n$ olup;

$$\mathscr{S}_n(2) = \left(\overline{\mathscr{F}_n L_n}\right)\left(\overline{\mathscr{F}_{n-1} L_{n-1}}\right)\cdots\left(\overline{\mathscr{F}_1 L_1}\right)$$

elde edilir[4].

3.3. Fibonacci Matrisi ve 1. Stirling Matrisi ile Elde Edilen Kombinasyonel Özdeşlikler

Tanım 3.3.1. $Q_n=\left(q_{ij}\right)$ matrisinin elemanları;

$$q_{ij}=s(i,j)-s(i,j+1)-s(i,j+2) \tag{3.3.1}$$

ile tanımlansın; $q_{11}=1$, $j\geq 2$ için $q_{1j}=0$; $q_{21}=0$, $q_{22}=1$ ve $j\geq 3$ için $q_{2j}=0$; $i,j\geq 2$ için $q_{ij}=q_{i-1,j-1}+(i-1)q_{i-1,j}$ [4].

Örnek 3.3.1. Tanım 3.3.1.' den Q_n matrisinde $n=4$ için;

$$Q_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{F}_n$; Tanım 2.1.2. ile verilen Fibonacci matrisi, $\mathscr{S}_n(1)$; (2.3.3) ile verilen 1. Stirling matrisi ve Q_n; Tanım 3.3.1. ile verilen matris olmak üzere $\mathscr{F}_n$, $\mathscr{S}_n(1)$ ve Q_n matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.3.1. $\mathscr{S}_n(1)$; 1. Stirling matrisi ve $\mathscr{F}_n$; Fibonacci matrisi olmak üzere;

$$\mathscr{S}_n\left(1\right)=Q_n\mathscr{F}_n$$

dir [4].

İspat: İspat için $\mathscr{S}_n\left(1\right)\mathscr{F}_n^{-1}=Q_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $i\geq 1$ ve $j=1,2,\ldots,n-2$ olduğunda $\sum_{k=1}^{n} s_{ik}f'_{kj}=q_{ij}$. $j=n-1$ için $\sum_{k=1}^{n} s_{ik}f'_{k,n-1}=q_{i,n-1}$ ve $j=n$ için $\sum_{k=1}^{n} s_{ik}f'_{kn}=s_{in}=s\left(i,n\right)=q_{in}$. Bundan dolayı $\mathscr{S}_n\left(1\right)\mathscr{F}_n^{-1}=Q_n$ yani $\mathscr{S}_n\left(1\right)=Q_n\mathscr{F}_n$ olur.

Örnek 3.3.2. $\mathscr{F}_4$ matrisi Örnek 2.1.2., $\mathscr{S}_4(1)$ matrisi Örnek 2.3.5. ve Q_4 matrisi Örnek 3.3.1.' deki matrisler olmak üzere Teorem 3.3.1.' den

$$Q_4\mathscr{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \mathscr{S}_4(1).$$

Teorem 3.3.1.' den $\mathscr{S}_n(1) = Q_n\mathscr{F}_n$ olduğunu biliyoruz $\mathscr{S}_n(1)E_n = Q_n\mathscr{F}_nE_n$ olduğunda aşağdaki özdeşliği elde ederiz;

$$n! = \sum_{k=1}^{n}\left(s(n,k) - s(n,k+1) - s(n,k+2)\right)\left(F_{k+2} - 1\right).$$

$\mathscr{S}_n^{-1}(1)$; 1. Stirling matrisinin tersi, $\mathscr{S}_n^{-1}(2)$; 2. Stirling matrisinin tersi ve P_n^{-1}; Pascal matrisinin tersi olmak üzere;

$$\mathscr{S}_n^{-1}(2) = \left((-1)^{i-j}s_{ij}\right) \text{ veya } \mathscr{S}_n^{-1}(1) = \left((-1)^{i-j}S_{ij}\right),$$

$$P_n^{-1} = \left((-1)^{i-j}\binom{i-1}{j-1}\right) \text{ iken } \mathscr{S}_n(1) = \left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}(1)\right)P_n \ ,$$

$$P_n = \mathscr{S}_n(2)\left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}^{-1}(2)\right) \text{ veya } P_n = \left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}^{-1}(1)\right)\mathscr{S}_n(1).$$

Buradan hareketle aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.2. $\mathscr{F}_n$; Fibonacci matrisi, $\mathscr{S}_n(1)$; 1. Stirling matrisi ve L_n; (3.1.1) ile verilen matris olmak üzere;

$$\mathscr{S}_n(1) = \left([1]\oplus\mathscr{S}_{n-1}(1)\right)\mathscr{F}_nL_n = \overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_n} \text{ dir [4].}$$

Örnek 3.3.3. $n=4$ için $[1]\oplus\mathscr{S}_3(1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&3&1\end{pmatrix}$ ve $\mathscr{F}_4$; Örnek 2.1.2. ; L_4 ;

Örnek 3.1.1. $\mathscr{S}_4(1)$; Örnek 2.3.5.' teki matrisler olmak üzere Teorem 3.3.2.' den

$$\left([1]\oplus\mathscr{S}_3(1)\right)\mathscr{F}_4L_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&1&1&0\\3&2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\-1&0&2&1\end{pmatrix}=$$

$$\overline{P_2}\,\overline{P_3}\,\overline{P_4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&3&1&0\\6&11&6&1\end{pmatrix}=\mathscr{S}_4(1).$$

3.4. Fibonacci Matrisi ve Bell Matrisi ile Elde Edilen Kombinasyonel Özdeşlikler

Tanım 3.4.1. b_{ij} Tanım 2.4.2. ile verilen Bell matrisinin elemanları ve $i, j = 1, 2, ..., n$ için;

$$q_{ij} = b_{ij} - b_{i-1,j} - b_{i-2,j} \tag{3.4.1}$$

$$p_{ij} = b_{ij} - b_{i,j+1} - b_{i,j+2} \tag{3.4.2}$$

olmak üzere; $N_n = (q_{ij})$ ve $M_n = (p_{ij})$ matrisleri tanımlansın.

Örnek 3.4.1. Tanım 3.4.1. ile verilen N_n ve M_n matrisleri $n = 4$ için;

$$N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{B}_n$; Tanım 2.4.2. ile verilen Bell matrisi; S_n; Tanım 2.1.3 ile verilen tersi Fibonacci matrisini veren matris ve N_n ile M_n; Tanım 3.4.1. ile verilen matrisler olmak üzere $\mathscr{B}_n$, S_n ve N_n, M_n arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma 3.4.1. $\mathscr{B}_n$; Bell matrisi, S_n; tersi Fibonacci matrisini veren matris ve N_n, M_n Tanım 3.4.1. ile verilen matrisler olmak üzere;

$$S_n \mathscr{B}_n = N_n \text{ ve } \mathscr{B}_n S_n = M_n \text{ [5].}$$

İspat: Öncelikle Tanım 3.4.1. ile verilen N_n matrisinin elemanlarını (3.4.1) bağıntısı ile belirleyelim. Buradan $q_{11} = b_{11}$, $j \geq 2$ için $q_{1j} = 0$; $q_{21} = b_{21} - b_{11}$, $q_{22} = b_{22}$ ve $j \geq 3$ için $q_{2j} = 0$ olur. Benzer şekilde M_n matrisinin elemanları (3.4.2) bağıntısı ile belirlenebilir.

Daha sonra $S_n \mathscr{B}_n = N_n$ özdeşliğinde $S_n = \mathscr{F}_n^{-1} = \left(f'_{ij}\right)$ dir. İspat için $\mathscr{F}_n^{-1} \mathscr{B}_n = N_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$f'_{11}=1$ ve $j\geq 2$ için $f'_{1j}=b_{1j}=0$ olduğunda $\sum_{k=1}^{n} f'_{1k}b_{k1}=f'_{11}b_{11}=b_{11}=q_{11}$, $j\geq 2$ için $\sum_{k=1}^{n} f'_{1k}b_{kj}=f'_{11}b_{1j}=0=q_{1j}$. $f'_{21}=-1$, $f'_{22}=1$ ve $j\geq 3$ için $f'_{2j}=0$ olduğunda $\sum_{k=1}^{n} f'_{2k}b_{k1}=f'_{21}b_{11}+f'_{22}b_{21}=b_{21}-b_{11}=q_{21}$, $\sum_{k=1}^{n} f'_{2k}b_{k2}=f'_{21}b_{12}+f'_{22}b_{22}=b_{22}=q_{22}$ ve $j\geq 3$ için $\sum_{k=1}^{n} f'_{2k}b_{kj}=f'_{21}b_{1j}+f'_{22}b_{2j}=0=q_{2j}$. $i\geq 3$ için (2.1.1) ve (2.4.2) den $\sum_{k=1}^{n} f'_{ik}b_{kj}=f'_{ii}b_{ij}+f'_{i,i-1}b_{i-1,j}+f'_{i,i-2}b_{i-2,j}=b_{ij}-b_{i-1,j}-b_{i-2,j}=q_{ij}$ olur. Buradan $S_n\mathscr{B}_n=N_n$ dir. Benzer şekilde $\mathscr{B}_nS_n=M_n$ özdeşliği de elde edilir.

Örnek 3.4.2. S_4 matrisi Örnek 2.1.3. , $\mathscr{B}_4$ matrisi Örnek 2.4.2. ve N_4 matrisi Örnek 3.4.1. ile verilen matris olmak üzere Lemma 3.4.1.' i

$$S_4\mathscr{B}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&-1&1&0\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&1&1&0\\5&2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}=N_4$$

şeklinde doğrularız.

S_n matrisinin tersi Tanım 2.1.2. ile verilen $\mathscr{F}_n$ Fibonacci matrisi olmak üzere aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 3.4.1. (2.4.2) ile verilen Bell matrisi;

$$\mathscr{B}_n=\mathscr{F}_nN_n=M_n\mathscr{F}_n$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir [5].

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci, Pascal, Stirling ve Bell matrisleri ile ilgili bazı kombinasyonel özdeşlikler incelenmiştir. Bu özel yapıdaki matrislerin çeşitli normları ve şart sayıları hesaplanabilir, ayrıca bu matrislere benzer yapıda elemanları Lucas, Harmonik, Catalan v.b. sayılar olan matrisler tanımlanarak aralarındaki ilişkiler ve yeni kombinasyonel özdeşlikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Vajda, S. (1987). Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section Theory and Applications (1st edition). West Sussex: John Wiley & Sons Publishing.

[2] http://en.Wikipedia.org/wiki/Fibonacci_Numbers

[3] Ayber, N. (2003). Fibonacci Sayıları. Matematik Dünyası Dergisi, Kış, 56- 57.

[4] Lee, G-Y. Kim, J- S. Cho, S-H. (2003). Some Combinatorial İdentities Via Fibonacci Numbers. Elsevier, Discrete Applied Mathematics, 13, 527- 534.

[5] Wang, W. Wang, T. (2008). İdentities Via Bell Matrix and Fibonacci Matrix. Elsevier, Discrete Applied Mathematics, 156, 2793- 2803.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_matrix

[7] Tang, Z. Duraiswami, R. Gumerov, N. (2004). UMIACS- TR- 08, CS- TR- 4363.

[8] Edelman, A. Strang, G. (1993). Pascal Matrices, American Mathematical Monthly, 100, 372- 376.

[9] Çam, Ş. (2005). Stirling Sayıları. Matematik Dünyası Dergisi, Bahar, 30- 34.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers

[11] Cheon, G- S. Kim, J- S. (2001). Stirling Matrix via Pascal matrix. Elsevier, Linear Algebra and Its Applications 329, 49- 59.

[12] http://myn.org/m/article/direct_sum

[13] http://wikipedia.org/wiki/direct_sum

[14] http://www.pballew.net/Bellno.html

[15] http://en.wikipedia.org/wiki/Bell-number

[16] http://mathword.wolfram.com/Bell-number.html

[17] http://milan.milanovic.org/math/english/fibo/fibo0.html

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Fatma Sidre OĞLAKKAYA		İmza:	
Doğum Yeri:	Konya			
Doğum Tarihi:	19.08.1984			
Medeni Durumu:	Bekar			
Öğrenim Durumu				
Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	Gazi Mustafa Kemal İ.Ö.O	-	Konya	1990- 1995
Ortaöğretim	Özel Diltaş Koleji	-	Konya	1995- 1999
Lise	Meram Anadolu Lisesi	-	Konya	1999- 2002
Lisans	Selçuk Üniversitesi	İlköğretim Matematik	Konya	2003- 2007
Yüksek Lisans	Selçuk Üniversitesi	Matematik Eğitimi	Konya	2007- 2010
Becerileri:	Windows Vista, Windows 7 starter, Mathtype, Mapple, İnternet, Word, Excel, Powerpoint Kullanımı, İleri Düzeyde İngilizce ve Matematik			
İlgi Alanları:	Matematik, Yağlı Boya ve Kara Kalem Resim, Genel Kültür Kitapları ve Dergileri			
İş Deneyimi:	2004- 2005 Bilim Dershanesi Stajyer Matematik Öğretmeni 2007- … Argıthanı Cumhuriyet İ.Ö.O Kadrolu Matematik Öğretmeni			
Aldığı Ödüller:	-			
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	İsmet OĞLAKKAYA (Babam) : (505) 547 32 34 Doç. Dr. Süleyman SOLAK (Danışman Hocam) : (505) 291 21 95			
Tel:	(506) 294 07 95			
Adres:	Rauf Denktaş Cd. Kılıçaslan Mah. Vehbi Sk. Gayret Sit. B blok 5/17 Selçuklu/ Konya			