T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI

HERON ÜÇGENLERİNİN İÇ VE DIŞ TEĞET ÇEMBERLERİNİN YARIÇAPLARI İLE $x^2+2y^2=z^2$ DİOPHANTİNE DENKLEMİ ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Yasemin YAVUZ EŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

KONYA – 2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI

HERON ÜÇGENLERİNİN İÇ VE DIŞ TEĞET ÇEMBERLERİNİN YARIÇAPLARI İLE $x^2 + 2y^2 = z^2$ DİOPHANTİNE DENKLEMİ ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Yasemin YAVUZ EŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

Konya - 2010

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Yasemin YAVUZ EŞEN
	Numarası	075201011004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans☒ Doktora☐
	Tezin Adı	Heron Üçgenlerinin İç ve Dış Teğet Çemberlerinin Yarıçapları ile $x^2+2y^2=z^2$ Diophantine Denklemi Arasındaki İlişki Üzerine Bir Araştırma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Yasemin YAVUZ EŞEN

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	Yasemin YAVUZ EŞEN
	Numarası	075201011004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Anabilim Dalı/ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Yrd.Doç.Dr. Ahmet CİHANGİR
	Tezin Adı	Heron Üçgenlerinin İç ve Dış Teğet Çemberlerinin Yarıçapları ile $x^2 + 2y^2 = z^2$ Diophantine Denklemi Arasındaki İlişki Üzerine Bir Araştırma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan Heron Üçgenlerinin İç ve Dış Teğet Çemberlerinin Yarıçapları ile $x^2 + 2y^2 = z^2$ Diophantine Denklemi Arasındaki İlişki Üzerine Bir Araştırma başlıklı bu çalışma 09 / 07 / 2010 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd.Doç.Dr. Ahmet CİHANGİR	Danışman	
Yrd.Doç.Dr. Emine Gökçen ALPTEKİN	Üye	
Yrd.Doç.Dr. Saadet ARSLAN	Üye	

ÖNSÖZ

Matematiğin gelişmesini hızlandıran önemli etkenlerden birisi de, geometri ile sayılar teorisi arasındaki karşılıklı etkileşimdir. Geometrinin kurulması ve gelişmesinde; üçgen ile çember, diğer geometrik şekillerimizden daha fazla bir etki ve öneme sahiptir. Üçgenler içerisinde de dik üçgenler ve Heron üçgenleri daha ayrıcalıklıdır. Heron üçgenlerinin iç teğet ve dış teğet çemberleri üzerinde yapılan çalışmalar, sayılar teorisi ile geometri arasında güzel bir ilişkiyi ortaya çıkarmıştır.

Geçmişte; Pythagorean, Heron, Brahmagupta, Bhaskara, Hoppe, Aubry ve Rath başta olmak üzere birçok matematikçi, geometri ile sayılar teorisinin cazibesine kapılmışlardır. Diophantine denklemlerinin çözümleri ve geometriye uygulamaları üzerine birçok araştırma yapılmış ve halen de yapılmaya devam edilmektedir. Bunun sonucunda; matematiğin bu iki alt dalı arasında, ilginç ve zarif ilişkiler ortaya çıkmıştır.

Ayrıca; literatürde, Diophantine denklemlerinin özel hali olan Pythagorean denklemleri ve onların tam sayı çözümleri olan Pythagorean üçgenleri üzerinde birçok çalışma mevcuttur. Günümüzde ise Beauregard, Suryanarayan, Fasler, Sastry, Yiu, Zelator başta olmak üzere birçok matematikçinin Pythagorean denkleminin çözümleri ile geometri arasındaki ilişkiler üzerindeki çalışmaları devam etmektedir.

Bu çalışma; Konstantine Zelator'un "Heron isosceles Triangles with İntegral External Radii $\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma$" başlıklı çalışması üzerine kurulmuştur.

"Heron Üçgenlerinin İç ve Dış Teğet Çemberlerinin Yarıçapları İle $x^2 + 2y^2 = z^2$ Diophantine Denklemi Arasındaki İlişki Üzerine Bir Araştırma" adlı tez konusunun tespitinde ve tezin hazırlanması sırasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca bana her zaman destek olan eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Yasemin YAVUZ EŞEN

Temmuz – 2010

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Yasemin YAVUZ EŞEN
	Numarası	075201011004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Anabilimdalı / Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans☒ Doktora☐
	Tez Danışmanı	Yrd.Doç.Dr. Ahmet CİHANGİR
	Tezin Adı	Heron Üçgenlerinin İç ve Dış Teğet Çemberlerinin Yarıçapları ile $x^2+2y^2=z^2$ Diophantine Denklemi Arasındaki İlişki Üzerine Bir Araştırma

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak, α, β, γ kenarlı bir ABC üçgeninin kenar uzunluklarına bağlı olarak $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ yarıçaplarının alternatif basit formülleri bulundu. Bunu yaparken, kosinüs teoremi ve trigonometrik özdeşlikler kullanıldı. Sonra Pythagorean üçgenleri için $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ yarıçap formülleri verildi. Ayrıca tamsayı kenar uzunluklu ve tamsayı alanlı bütün ikizkenar üçgenlerin ailesi incelendi. Son olarak da $x^2+y^2=2z^2$ şeklindeki Diophantine denklemlerinin tüm çözüm ailesini tanımlayan parametrik formüller belirtildi ve bu denklemin genel çözümü elde edildi.

Anahtar Kelimeler: İkizkenar Heron Üçgeni, Dış Yarıçap, İç Yarıçap, Pythagorean Üçgeni, Diophantine Denklemi.

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Yasemin YAVUZ EŞEN
	Numarası	075201011004
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İlköğretim Anabilimdalı / Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans☒ Doktora☐
	Tez Danışmanı	Yrd.Doç.Dr. Ahmet CİHANGİR
	Tezin İngilizce Adı	A Research On The Relations Between Heron Triangles Which Internal And External Radius with $x^2+2y^2=z^2$ Diophantine Equation

SUMMARY

By this study, firstly, we present an alternative simple derivation of the formulas for the radii $\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma$; in terms of triangle ABC 's side lengths $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. To do so, we employ the Law of Cosines and two simple trigonometric identities. Than, This we do, in order to give formulas for the radii $\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma$, for triangles which are Pythagorean. In addıtıon to we examine the family of all isosceles triangles with integer side lengths and integral area. Finally, we state the parametric formulas which describe the entire family of solutions of the diophantine equation $x^2+y^2=2z^2$ and as well as a brief sketch of a derivation of the general solution of this equation.

Key Words: Heron Isosceles Triangles, Pythagorean Triangles, External Radius, Internal Radius, Diophantine Equation.

SEMBOLLER

$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel Sayılar Kümesi
$b\,\vert\,a$	:	*b* böler *a*
$m(B\hat{A}C)$	:	Üçgendeki A açısı
|AB|	:	AB doğru parçasının uzunluğu
s	:	Üçgenin Çevre Uzunluğunun Yarısı
$a \equiv b$ (mod m)	:	*a, b* ye *m* modülüne göre kongrüenttir
A(ABC)	:	ABC üçgenin alanı
ρ	:	Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı
ρ_α	:	Üçgenin α kenarına ait dış teğet çemberinin yarıçapı
$\in$	:	Elemanıdır

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Geometride, özellikle de düzlemsel geometride, üçgenler özel bir öneme sahiptir. Çünkü üçgenler, diğer çokgenlerin incelenmesinde kullanılan en önemli araçlardandır. Euclides düzlemindeki her bir üçgen için, dört karakteristik çember vardır. Bunlardan biri üçgenin iç teğet çemberi, diğer üç tanesi ise dış teğet çemberleridir. Bu dış teğet çemberlerinin her biri üçgenin kenarlarından birine teğettir ve aynı zamanda bu çemberlerin her biri, kenarların kendisine olmasa da diğer iki kenarı içeren doğruların uzantısına da teğettir. Bu üç çemberin her birinin merkezleri, üçgenin iki dış açıortayları ile bir iç açısının açıortayının kesim noktasıdır. Bell tarafından son zamanlarda yayınlanan çalışmalarda; α, β, γ kenarlı bir ABC üçgeninin, sırasıyla **y**arıçapları $\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma$ olan dış teğet çemberlerinin birçok özelliği araştırılmıştır (Bell,2006: 1-2). Aynı zamanda Hansen'in çalışmalarında üçgenin dik açılı olması durumunda bu yarıçaplara ait sonuçlar verilmiştir (Hansen, 2003: 358).

Bu çalışmanın iki amacı vardır. Birinci amaç; α, β, γ kenarlı bir ABC üçgeninin kenar uzunluklarına bağlı olarak $\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma$ yarıçaplarının alternatif basit formüllerini ortaya koymaktır. Bunu yaparken, kosinüs teoremi ve iki basit trigonometrik özdeşlik kullanılacaktır (Yiu, 2001: 9). Ayrıca, tamsayı kenar uzunluklu ve tamsayı alanlı bütün ikizkenar üçgenlerin ailesini inceleyeceğiz. Bu çalışmanın ikinci amacı ise; $\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma$ yarıçapları tam sayı olan bütün ikizkenar Heron üçgenlerinin ailesini parametrik olarak (üç tam sayı değerli parametreler olarak) bulmaktır. Ayrıca ikizkenar bir Heron üçgeninin eşkenar olamayacağı da açıktır. Çünkü eşkenar bir üçgenin tamsayı kenar uzunlukları $\alpha = \beta = \gamma$ olacağından, bu üçgenin alanı $E = \dfrac{\alpha^2.\sqrt{3}}{4}$ olur ki alan irrasyonel bir sayıdır. Dolayısıyla bir eşkenar üçgen Heron üçgeni olamaz.

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; ön bilgiler ve kaynak araştırması verildi.

İkinci Bölümde; ikizkenar Heron üçgenlerinin ailesi parametrik olarak elde edildi. Burada parametrik olarak ikizkenar Heron üçgenlerinin bir S alt kümesi oluşturuldu ki bu ikizkenar Heron üçgenleri için ρ_α, ρ_β, ρ_γ değerleri de tamsayılardır. Bu bölüm, bu üçgenlerle ilgili sayısal örnekleri içeren iki tablo ile bitirildi.

Üçüncü Bölümde; bir üçgenin çapları $2\rho, 2\rho_\alpha$, $2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ olan iç ve dış teğet çemberleri incelendi. Bir ABC üçgeninin, A köşesindeki açısı 90º olan bir dik üçgen olduğu zaman

$$2\rho = \beta + \gamma - \alpha, 2\rho_\alpha = \alpha + \beta + \gamma, 2\rho_\beta = \alpha + \beta - \gamma, 2\rho_\gamma = \alpha + \gamma - \beta$$

olduğu gösterildi (bu durumda α, hipotenüs uzunluğudur). Devamında, çalışmamızın esas konusu olan Pythagorean üçgenleri verildi. Sonra Pythagorean üçgenlerinin ailesindeki $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ ifadeleri m ve n parametrelerine bağlı olarak verildi. Ayrıca $(x, y) = 1$ olan $x^2 + 2y^2 = z^2$ şeklindeki Diophantine denkleminin tüm çözümlerini üreten parametrik formüller verildi. Bir dik kenarı bir tamsayının karesi olan sonsuz sayıda primitif Pythagorean üçgeninin mevcut olduğu belirtildi. Buradan hareketle; bir kenar uzunluğu tam sayının karesi olan Pythagorean üçgenlerinde $2\rho, 2\rho_\alpha$, $2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ şeklindeki dört tam sayıdan hangisi veya hangilerinin kare olacağı sorusuna cevap arandı. Ayrıca konuyla ilgili, sayısal örneklere de yer verildi. Son olarak bölüm, $x^2 + y^2 = 2z^2$ Diophantine denkleminin genel çözümünün verilmesiyle kapatıldı.

Dördüncü bölümde; ikinci ve üçüncü bölümde elde edilenler özetlendi.

1.1 Kaynak Araştırması

Bu kesimde konumuza ilişkin, geçmişten günümüze araştırmacıların yapmış oldukları çalışmaların bir kısmının özetleri verilmiştir.

Dickson (1971)' ın eserinde; sayılar teorisinin özellikle Diophantine denklemleri ve geometrik uygulamaları ve çalışmalar özetlenmiştir. Ayrıca pythagorean üçgenleri ile rasyonel dik üçgenler için verilen genel bilgiler ve

Diophantine denklemlerine de yer verilmiştir. Bu kitap sayılar teorisi için temel teşkil edecek konuların yer aldığı önemli bir eserdir. Tarihsel olarak $x^2 + y^2 = 2z^2$ Diophantine denklemi, kareleri aritmetik dizi olan üç tamsayıyı bulma probleminin bir sonucu olarak incelenmiştir. Bu problemin çözümü için çok sayıda farklı teknikler ve yöntemler kullanılarak, birçok çözüm ailesi veya özel çözümler bulunmuştur. Ancak genel bir çözüm ailesi henüz elde edilememiştir. Literatürde bu problemin anlaşılması ve çözülmesi ile uğraşan yirmi veya daha fazla araştırmacı da mevcuttur. Bu araştırmacılardan sadece beş tanesinden bahsedeceğiz.

Diophantus (M.S.150 – M.S.250), bu denklemin kareleri aritmetik dizi olan kısmi veya özel çözümlerini bulmuştur.

13. Yüzyılda Jordanus Nemorarius; c çift olmak üzere b ile c tamsayılarına bağlı olarak,

$$x = b^2 - \frac{c^2}{2},\ y = b^2 + 2bc + \frac{c^2}{2},\ z = b^2 + bc + \frac{c^2}{2}$$

biçiminde bir özel çözüm ailesini bulmuştur.

17. yüzyılda Fermat,

$$x = r^2 - 2s^2,\ y = r^2 + 4rs + 2s^2,\ z = r^2 + 2rs + 2s^2$$

biçiminde bir çözüm ailesi bulmuştur.

Daha sonra, Jones (1918) çalışmasında “her bir üçlünün, üç sayının karesi olacak şekilde aritmetik bir dizi oluşturduğunu ve bu üçlüden herhangi ikisinin de bir kare olduğunu” göstermiştir.

Nihayet, 19. yüzyılın sonunda Desboves, $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)z^2$ şeklindeki daha genel Diophantine denklemine ilişkin tüm çözümleri vermiştir (Bu durumda $a = b = 1$) (Zelator, 2008b: 26).

Sierpinski (1964), bu eserinde tamsayı kenarlı üçgenlerin özel çeşidi olan Pythagorean üçgenlerini genel özelliklerine göre incelemiştir. Ayrıca bu; Pythagorean üçgenleri ile ilgili olarak yazılmış önemli eserlerdendir.

Mordell (1969)’in bu yapıtı Diophantine denklemleri üzerine yazılmış en kapsamlı ve temel eserlerden biridir. Çalışmamızdaki bir sayının karesi ile başka bir sayının karesinin iki katının toplamının bir kareye eşit olması formülleri bu eserde verilmiştir. Ayrıca, çok farklı türde Diophantine denklemleri tanıtılmış ve çözümlerine de değinilmiştir.

Sierpinski (1988), sayılar teorisi ile ilgili eserinin ikinci bölümünde Diophantine denklemlerin analizini ele aldı. Burada özel olarak Pythagorean üçlülerinin tanımları ve örnekleri ele alınıp, çalışma konumuz geniş bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca kare toplamları da verilmiştir.

Dunham (1990), eserinde üçgenlerin alanları için heron formülleri kullanmış ve matematiğin ünlü teoremleri üzerinde durmuştur. Sayılar teorisinin konuları üzerinde duran yazar farklı genellemelere ulaşmıştır.

Rosen (1993), bu eserde Pythagorean üçgenleri üzerinde durmuştur. Ayrıca verilen bir teoremde Pythagorean teoreminden yola çıkarak oluşturulan denklemler için kök bulma yöntemini ifade etmiştir. Böylelikle Diophantine denklemlerine çözüm yollarını araştırmıştır.

Guy (1994), önce ve sonra baskıları olan bu eserinde; sayılar teorisinin çözülememiş problemlerine ve bu problemlerle ilgili yayınlar ve özetlerine geniş yer vermiştir. Özellikle bu çalışmanın Diophantine Equations isimli bölümünde Heron üçgenleri ile ilgili çözülememiş problemler de bulunmaktadır.

Yiu (2001), bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı üzerinde durmuş ve bu çemberlerle ilgili bağıntılar vermiştir.

Sastry (2001), çalışmasında Heron üçgenleri üzerinde durmuş ve bu üçgenlerle ile ilgili hesaplamalara ve örneklere geniş yer vermiştir.

Hansen (2003), bir dik üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberleri ile çevrel çemberi arasındaki ilişkileri incelemiştir. Ayrıca Heron formülünü, üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberlerinin yarıçaplarına bağlı olarak yeniden elde etmiştir.

MacLeod (2005), kenarları ile çevrel çemberinin yarıçapı tamsayı olan R ile iç teğet çemberin yarıçapı olan r nin oranı $\frac{R}{r} = N$ biçiminde tamsayı olan üçgenlerin oldukça az sayıda olduğunu ortaya koymuş ve üçgenle çevrel çember arasındaki ilişkiler üzerinde durmuştur.

Zelator (2005), dik üçgende Pythagorean teoremi üzerinde durmuştur. Ayrıca $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ Diophantine denklemlerinin pozitif tam sayı çözümlerinden yola çıkarak $x^2 + 2y^2 = z^2$ için genel çözümlerden bahsetmiştir. Ayrıca üçgenin iç teğet çemberinin ve dış teğet çemberinin yarıçaplarının her ikisinin de rasyonel veya her ikisinin de irrasyonel olduğunu göstermiştir.

Bell (2006), çalışmasında bir dik üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberlerinin yarıçapları ile Hansen'ın teoremi arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Zelator (2006), Pythagorean teoreminin ifadesi olan $x^2 + y^2 = z^2$ üzerinden, bunun k $\geq$ 2 için genellemesi olan $x^2 + ky^2 = z^2$ Diophantine denkleminin tam sayı çözümleri üzerinde durmuştur ve tam sayı kenarlı üçgenlere yer vermiştir. Ayrıca sayılar teorisinde belli başlı durumları farklı notlar halinde listeleyerek açıklamalar yapmıştır.

Zelator (2008a), Pythagorean üçgenlerinden yola çıkarak Diophantine denklemlerine geçiş yapmış ve çözümleri için genellemelere ulaşmıştır. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde Kosinüs Teoremi ve üçgen eşitsizliğinden faydalanarak Pythagorean üçgenleri ile bağlantı kurmuş ve özel üçgenler tanımlamıştır. Heron üçgenlerinden bahsetmiş ve bütün ikizkenar Heron üçgenlerinin ailesini incelemiştir. Daha sonra Pythagorean üçgenlerinin ya da üçlüsünün tanımlanan bütün ailesi için Pythagorean'un ünlü formülüne yer vermiş ve bu Pythagorean üçgenlerinde ρ_α, ρ_β, ρ_γ dış yarıçap formüllerini üçgenleri üreten parametrelere bağlı olarak elde etmiştir. Son olarakta; $x^2 + 2y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tam sayılardaki çözümlerine yer vermiştir**.**

Zelator (2008b), Pythagorean üçgenlerini bu çalışmanın odağı haline getirmiştir. Pythagorean üçgenleri üzerinde bulunan sonuçları genelleyerek diğer üçgenlere de uygulamıştır. Primitif Pythagorean üçgenler ailesinden üretilen parametrelerle $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ için basit formüller elde etmiştir. Bu çalışmanın esas sorusu; "Kenar uzunlukları bir tam sayının karesi olan Pythagorean üçgenleri hakkında ne söyleyebiliriz ve $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ tam sayılarından biri de tam kare midir?" biçiminde özetlenebilir. Cevap olarak ise bir dik kenarı bir tamsayının karesi olan sonsuz sayıda primitif Pythagorean üçgeninin mevcut olduğunu belirtmiştir. Son olarak $(x, y) = 1$ olan $x^2 + y^2 = 2z^2$ şeklindeki Diophantine denklemlerinin tüm çözüm ailesini tanımlayan parametrik formülleri vermiş ve bu denklemin genel çözümünü elde etmiştir.

1.2 Ön Bilgiler

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.2.1 Eğer, a, b tam sayılar olmak üzere $a = b.c$ olacak şekilde bir c tam sayısı varsa b, a yı *böler* denir ve $b|a$ biçiminde gösterilir (Şenay, 2007: 25).

Teorem 1.2.1 a, b, c tamsayılar olsun. Eğer a, $b.c$ çarpımının bir böleni ve a ile b aralarında asal ise, o zaman a, c nin bir bölenidir.

İspat. a ile b aralarında asal ise $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ için $ax + by = 1$ olur. Bu eşitliğin her iki yanını c ile çarpalım. $acx + bcy = c$ elde edilir. 1 den büyük her tam sayı ya asal ya da asalların çarpımı olduğundan a, $a.c$ nin bir bölenidir ve teoremden a, $b.c$ nin böleni olup, buradan a, $acx + bcy = c$ nin bir böleni olduğu elde edilir ki böylece ispat tamamlanır (Şenay, 2007: 49). □

Tanım 1.2.2 Pozitif bir p tamsayısına eğer

i) $p > 1$ ise,

ii) p, kendisinden ve 1 den başka bir bölene sahip değilse

asaldır denir (Şenay, 2007: 46).

Tanım 1.2.3 $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) $d|a$ ve $d|b$ ise d ye a ile b nin bir *ortak böleni* denir.

ii) d, a *ile* b nin bir ortak böleni olsun. Eğer a ile b nin her c ortak böleni için $c|d$ ise, d ortak bölenine, *a ile b nin en büyük ortak böleni* (ebob) denir ve ebob(a, b) veya (a, b) ile gösterilir (Şenay, 2007: 33).

Tanım 1.2.4 Kenar uzunlukları a, b, c tamsayıları ve alanı da tamsayı olan ABC üçgenine *Heron üçgeni,* (a, b, c) üçlüsüne de *Heron üçlüsü* denir (Sastry, 2001: 17).

Tanım 1.2.5 Bir *ABC* üçgeninde $0 < \theta < \pi$ olmak üzere θ açısının hem sinüsü hem de kosinüsü rasyonel sayı ise bu θ açısına *Heron açısı* denir (Sastry, 2001: 17).

Teorem 1.2.2 (Heron Formülü) Kenar uzunlukları *a, b, c* ve yarı çevre uzunluğu da $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ olan bir *ABC* üçgenin alanı *A(ABC)* ile gösterilir ve

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formül Yunan matematikçi Heron of Alexandria tarafından bulunduğu için *Heron alan formülü* olarak bilinir (Dickson, 1971: 123).

Tanım 1.2.6 Fermat'ın son teoremi olarak bilinen "$n \geq 3$ ve n tamsayı olmak üzere $a^n + b^n = c^n$ denklemini sağlayan hiçbir (*a, b, c*) tamsayı üçlüsü yoktur" biçimindeki ifadenin $n=2$ için özel hali olan

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1.1)$$

ifadesine *Pythagorean denklemi* adı verilir. $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan *a* ve *b* kenarlı, *c* hipotenüslü dik üçgene *Pythagorean üçgeni* denir. $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan *a, b* ve *c* doğal sayılarının oluşturduğu (*a, b, c*) üçlüsüne *Pythagorean üçlüsü* denir. Pythagorean üçgeni üzerindeki çalışmalar; (1.1) denkleminin tamsayı çözümlerinin bulunmasına eşdeğerdir.

Eğer bu üçgenin *a, b* dik kenarları $a > b > 0$, $a + b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ *a* ile *b* aralarında asal olma şartlarını sağlıyorsa, o zaman üçgene *primitif Pythagorean üçgeni*, (*a, b, c*) üçlüsüne *primitif Pythagorean üçlüsü* denir.

Pythagorean üçgeninin bütün kenarları bir doğal sayı ile çarpılırsa, o zaman yine kenarları doğal sayı olan benzer bir dik üçgen elde edilir ki bu üçgende Pythagorean üçgenidir. Bundan dolayı $k = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere verilen bir (*a, b, c*) Pythagorean üçgeninden sonsuz çoklukta benzer (*ka, kb, kc*) Pythagorean üçgenleri elde edilir (Sierpinski, 1964: 75).

Teorem 1.2.3 Tüm benzer Pythagorean üçgenleri arasında bir en küçüğü vardır ki bu en küçük (*a, b, c*) Pythagorean üçgeninin *a, b, c* kenarları aralarında asaldır (Sierpinski, 1964: 70).

Teorem 1.2.4 *m* ile *n* aralarında asal, *m>n* ve *m* ile *n* tamsayıları biri tek iken diğeri çift olmak üzere, *b* si çift olan tüm primitif (*a, b, c*) Pythagorean üçgenleri

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn \;\; c = m^2 + n^2$$

formüllerinden elde edilir ki bu tip (*a, b, c*) primitif Pythagorean üçgeni yalnız bu yolla bulunur (Sierpinski, 1988: 52).

Teorem 1.2.5 *d* kare çarpan ihtiva etmeyen bir tamsayı olmak üzere $x^2 + dy^2 = z^2$ Diophantine denkleminin bütün *x, y, z* tamsayı çözümleri; aralarında asal *m* ile *n* tamsayıları için

$$x = m^2 - dn^2, \quad y = 2mn, \;\; z = m^2 + dn^2$$

formüllerinden elde edilir (Şenay, 2007: 246).

Tanım 1.2.7 Sabit ve sıfırdan farklı bir *m* tamsayısı, *a* ve *b* gibi herhangi iki tamsayısının *a – b* farkını bölüyorsa (yani $m|a-b$ ise); *a, b* ye *m* modülüne göre *kongrüenttir* denir ve bu durum $a \equiv b$ (mod m) biçimde belirtilir. (Şenay, 2007: 101)

Tanım 1.2.8 Herhangi İki kenar uzunluğu eşit olan üçgenlere *ikizkenar üçgen* denir (Şahin ve Arkadaşları,1997: 32).

Tanım 1.2.9 Bir çokgenin tüm kenarlarını teğet kabul eden çembere *iç teğet çemberi* denir. Doğal olarak bu çember çokgenin içindedir ve merkezi çokgenin tüm kenarlarına eşit uzaklıktadır. Bu uzaklığın ölçümü iç teğet çemberinin yarıçapını verir. Her üçgenin bir iç teğet çemberi vardır ve merkezi üç açıortayının kesim noktasıdır (Şahin ve Arkadaşları,1997: 63).

Tanım 1.2.10 İki açının dış açıortayı ile üçüncü açının iç açıortayının kesim noktasını merkez kabul eden ve üçgenin bir kenarına dıştan teğet olan çembere üçgenin *Dış teğet çemberi* denir (Şahin ve Arkadaşları,1997: 64).

Tanım 1.2.11 Geometri de açıyı ortadan iki eş parçaya bölen doğru parçasına veya ışına o açının *Açıortayı* denir (Şahin ve Arkadaşları,1997: 25).

Tanım 1.2.12 Bir ABC üçgeni verildiğinde; A, B, C harfleri, ya bir üçgendeki üç iç açıyı ya da üçgenin köşe noktalarını gösterirler. Sözgelimi bir ABC üçgenindeki A açısı dediğimiz zaman, her zaman o üçgendeki A köşesindeki iç açıyı kast edeceğiz ve o anlamda kullanacağız. Başka bir deyişle $m(B\hat{A}C) = m(C\hat{A}B)$ dir.

Doğru parçaları genel olarak [AB] şeklinde gösterilecektir. [AB]; A ve B noktaları ile bu noktaları birleştiren düz bir doğru parçasını gösterir. Kenar uzunlukları ise küçük harflerle gösterilecektir. Örneğin, bir ABC üçgeninin üç kenar uzunluğunu $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ile gösterirsek;

$$\alpha = |BC| = |CB|,\ \beta = |AC| = |CA|,\ \gamma = |AB| = |BA|$$

dir.

Üçgenler için iyi bilinen durumları şöyle verebiliriz. Bir üçgenin açılarının derece cinsinden ölçümleri A, B, C; kenarlarının uzunlukları da $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ise, o zaman (genelliği bozmaksızın)

$$0^\circ < A \le B \le C < 180^\circ,\ A + B + C = 180^\circ$$

ve (bu sıralamaya uyacak şekilde), $0 < \alpha \le \beta \le \gamma$ dır, ayrıca üçgen eşitsizliklerinden $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$ ve $\gamma < \alpha + \beta$ dır. (Eğer üç reel sayı, bu üç üçgen eşitsizliğini sağlarsa, o zaman bu reel sayıların hepsinin pozitif olması gerektiğine dikkat ediniz (Zelator, 2008b: 2).

Teorem 1.2.6 (Sinüs Teoremi). Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c*; iç açıları *A, B, C* ve çevrel çemberinin yarıçapı da *R* ise;

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R$$

dir (Ayres, 1954: 42).

Teorem 1.2.7 (Kosinüs Teoremi). Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c* ve iç açıları da *A, B, C* ise;

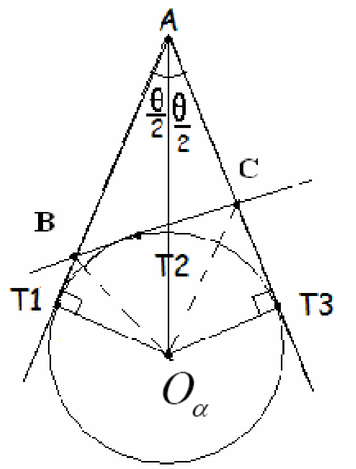
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA,\ b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

dir (Ayres, 1954: 33).

2. DIŞ YARIÇAPLARI ρ_α, ρ_β, ρ_γ TAM SAYILARI OLAN İKİZKENAR HERON ÜÇGENLERİ

Bu bölümde α, β, γ kenarlı bir ABC üçgeninin kenar uzunluklarına bağlı olarak ρ_α, ρ_β, ρ_γ dış teğet çemberlerinin yarıçaplarının basit formülleri bulundu. Bunu yaparken, kosinüs teoremi ve trigonometrik özdeşlikler kullanıldı. Pythagorean üçgenleri için ρ_α, ρ_β, ρ_γ yarıçap formülleri verildi. Ayrıca tamsayı kenar uzunluklu ve tamsayı alanlı bütün ikizkenar üçgenlerin ailesi incelendi.

2.1 Kosinüs Teoremi ve İki Trigonometrik Özdeşlik



$$|AB| = \gamma, |BC| = \alpha, |AC| = \beta$$
$$|O_\alpha T_1| = |O_\alpha T_3| = \rho_\alpha$$

Şekil 2.1. Bir Üçgenin Dış Teğet Çemberinin Merkezi

Şekil 2.1 ile verilen ABC üçgeninde A iç açısını θ ile gösterirsek, Teorem 1.2.7 de verilen kosinüs teoreminden

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma.\cos\theta$$

olur. Buradan,

$$\cos\theta = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \tag{2.1}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğundan hareketle;

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \tag{2.2}$$

bulunur. Yine **Şekil 2.1** ile verilen ABC üçgeninin yarı çevresi s olsun. O zaman

$$2s=\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow\ s=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

dir. Eğer (2.1) ifadesi (2.2) denkleminde yerine yazılır ve $s=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ kullanılırsa,

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-\beta)(s-\gamma)}{s(s-\alpha)}} \tag{2.3}$$

bulunur.

2.2 *ABC* Üçgeninin $\rho_{\alpha},\rho_{\beta},\rho_{\gamma}$ Dış Yarıçapları İçin Formüller

Yukarıda verilen **Şekil 2.1** de;

$$|AB|=\gamma, |BC|=\alpha, |AC|=\beta, |O_{\alpha}T_1|=\rho_{\alpha}=|O_{\alpha}T_3|$$

olsun ve ABC üçgeninin bir dış teğet çemberinin değme noktaları da sırasıyla T_1, T_2, T_3 ile gösterilsin. Burada

$$x=|BT_1|=|BT_2| \text{ ve } y=|T_2C|=|CT_3|$$

olsun. Yukarıda $|AT_1|=|AT_3|$ olduğundan, $\gamma+x=\beta+y$ veya eşdeğeri

$$x-y=\beta-\gamma \tag{2.4}$$

olarak bulunur. Fakat aynı zamanda $|BT_2|+|T_2C|=|BC|$ olduğundan

$$x+y=\alpha \tag{2.5}$$

dır. (2.4) ve (2.5) den

$$x=\frac{\beta-\gamma+\alpha}{2},\ y=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \tag{2.6}$$

olur ki bu ifadelerden ve $O_{\alpha}T_1A$ dik açısından,

$$\rho_{\alpha}=|AT_1|.\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.7}$$

olarak buluruz. Burada

$$|AT_1|=\gamma+x=\frac{\gamma+\beta+\alpha}{2}=s$$

olup (2.7) den

$$\rho_\alpha = s\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.8}$$

olarak bulunur. (2.8) ifadesinde (2.3) ifadesini kullanırsak;

$$\rho_\alpha = \sqrt{\frac{s(s-\beta)(s-\gamma)}{(s-\alpha)}} \tag{2.9}$$

formülüne ulaşırız.

Bir ABC üçgeninin E alanının; α, β, γ kenar uzunluklarına bağlı olarak E = $\sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}$ Heron alan formülü ile verildiğini Teorem 1.2.2 den biliyoruz.

Eğer, Heron alan formülünü ve (2.9) u kullanırsak,

$$\rho_\alpha = \frac{E}{s-\alpha}$$

denklemini elde ederiz. Benzer şekilde ρ_β ve ρ_γ yı da

$$\rho_\beta = \frac{E}{s-\beta},\ \rho_\gamma = \frac{E}{s-\gamma}$$

olarak buluruz. ABC üçgeni, θ = 90º olan bir dik açılı üçgen olduğunda (2.8) den kolaylıkla $\rho_\alpha = s$ olarak bulunur. Bu durumda $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ olacağından, alan da $E = \frac{\beta\gamma}{2}$ olur. Burada *E* değeri yukarıdaki ρ_α, ρ_β, ρ_γ da yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\rho_\beta = \frac{\beta-\gamma+\alpha}{2} \quad \text{ve} \quad \rho_\gamma = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \tag{2.10}$$

olarak elde edilir.

Tersi de doğrudur. Yani, $\rho_\alpha = s$ ise, o zaman $\theta = 90^\circ$ dir.

Böylece "$\rho_\alpha = s$ olması için gerek ve yeter şart $\theta = 90^\circ$ olmasıdır." ifadesini ispat etmiş oluruz (Bell, 2006: 341).

2.3 ABC Üçgeninin Pythagorean Üçgeni Olması Durumu

Her Pythagorean üçgeni, bir dik açılı Heron üçgenidir. ABC bir Pythagorean üçgeni olduğu zaman, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ olacak şekilde α, β, γ pozitif tamsayıları vardır. Dolayısıyla $\theta = 90^\circ$ ve aynı zamanda

$$\beta = \delta(2mn)\,,\ \gamma = \delta(m^2 - n^2)\,,\ \alpha = \delta(m^2 + n^2) \qquad (2.11)$$

olmasını veya alternatif olarak $\beta = \delta(m^2 - n^2)$, $\gamma = \delta(2mn)$ olmasını gerektirir. Burada *m, n,* δ pozitif tamsayılar, $m > n$, $(m, n) = 1$ (yani *m* ve *n* aralarında asal) ve $m + n \equiv 1$ (*mod 2*) şartları sağlanmalıdır (Rosen, 1993: 58; Beiler, 1966: 45).

Yukarıdaki parametrik formüllerin tüm Pythagorean üçgenleri ailesini tanımladığı iyi bilinmektedir (Sierpinski, 1964: 73).

2.4 Bir Pythagorean Üçgeninin $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ Dış Yarıçapları

ABC bir Pythagorean üçgeni olduğu zaman (2.10) ve (2.11) den

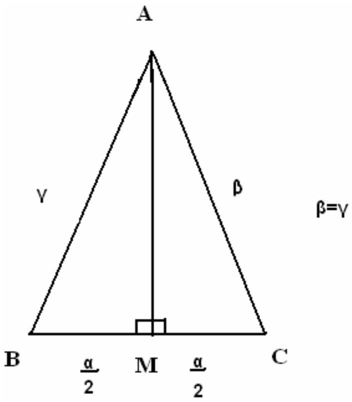
$$\rho_\alpha = \delta m(n+m)\,, \quad \rho_\beta = \delta n(m+n)\,, \quad \rho_\gamma = \delta m(m-n) \qquad (2.12)$$

olarak bulunur.

2.5 İkizkenar Heron Üçgenlerinin Durumu

Bu kesimde, üçgenlerin ikizkenar Heron üçgenleri olması durumunu inceliyoruz. Bu üçgenlerin β, γ, α kenarları; $\beta = \gamma \neq \alpha$ olacak şekilde tamsayılar ve E alanı da tamsayı olan üçgenlerdir. Böyle üçgenleri tanımlayabilmek için, aşağıda verilip ispatlanacak olan Önerme 2.1 den faydalanacağız. Önerme 2.1 i kurmak için, aşağıdaki sonuca ihtiyacımız vardır.

Sonuç 2.1. Bir *t* pozitif tamsayısının, bir pozitif *r* rasyonel sayısının *l* –inci kuvveti (*l* bir pozitif tamsayı) olması için gerek ve yeter şart *r* nin bir tamsayı olmasıdır ($r^l = t \Leftrightarrow r = \sqrt[l]{t}$). Denk olarak; bir *t* pozitif tamsayısının *l* – inci kökü, ya bir tamsayı veya bir irrasyonel sayıdır. Özel olarak; *t* nin karekökü yani $\sqrt{t}$ ya bir tamsayı ya da bir irrasyonel sayıdır (Sierpinski, 1964: 94; Rosen, 1993: 23).



Şekil 2.2. İkizkenar Üçgenin Yüksekliği

Önerme 2.1. ABC, kenar uzunlukları $\gamma = |AB| = \beta = |AC| \neq \alpha = |BC|$ olan bir ikizkenar üçgen olsun. ABC ikizkenar üçgeninin; E alanı ile α ve $\beta = \gamma$ kenarlarının her biri pozitif tamsayılar olarak verilsin. Ayrıca A köşesinden $|BC|$ kenarına inilen yükseklik h olsun. O zaman α bir çift tamsayı ve h bir tamsayıdır (Zelator, 2008a: 7).

İspat. Alan formülünden $E = \dfrac{h.\alpha}{2} \Leftrightarrow h = \dfrac{2E}{\alpha}$ ve E ile α nın her ikisi de tamsayı olduğundan, h bir rasyonel sayı olur. Bu durumda h yi aralarında asal M ile N pozitif tamsayıları için $h = \dfrac{M}{N}$ olarak alalım. ABM ile AMC eş dik üçgenler olduklarından bunların herhangi birinden (Şekil 2.2),

$$h^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \beta^2$$

veya eşdeğer olarak,

$$4m^2 + \alpha^2 n^2 = 4n^2 \beta^2 \qquad (2.13)$$

bulunur. (2.13) den; 4 ün, $\alpha^2 n^2 = (\alpha n)^2$ ifadesini bölmesi gerektiği ve dolayısıyla 2 nin de αn yi bölmesi gerektiği açıktır. Başka bir deyişle; αn, bir tamsayı olması gerektiğinden α ile n lerden en az birinin çift olması gerekir. Eğer n çift ise, bir pozitif n_1 tamsayısı için $n = 2n_1$ olur. O zaman (2.13) den,

$$m^2 + \alpha^2 n_1^2 = 4n_1^2 \beta^2 \qquad (2.14)$$

elde edilir.

m ile *n* aralarında asal ve *n* çift olduğu için, *m* nin tek olması gerektiği ortaya çıkar. Fakat bu durumda (2.14) den $\alpha^2 n_1^2 = (\alpha n_1)^2$ tamsayısının tek olması, dolayısıyla $\alpha.n_1$ in tek olması gerektiği ortaya çıkar. Sonra; "herhangi bir tek sayının karesi 8 modülüne göre 1 e kongrüent olduğundan, 4 modülüne göre de 1 e kongrüent" olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$m^2 \equiv (\alpha n_1)^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \Rightarrow m^2 + \alpha^2 n_1^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$$

olur ki bu ifade 4 ün bir katı olmadığından dolayı (2.14) ile çelişir. Böylece *n* çift sayı olamayacağından ve $\alpha.n$ çift olduğundan, α nın çift olması gelir. α çift olduğundan, pozitif α_1 sayısı için $\alpha = 2\alpha_1$ olur. $h^2 + \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \beta^2$ den $h^2 = \beta^2 - \alpha_1^2$, bir pozitif tamsayı olur. Böylece *h* rasyonel sayı olduğundan ve Sonuç 2.1 den; *h* nin tamsayı olması gerektiği ortaya çıkar. Böylece ispat tamamlanır. □□

Aşağıdaki önerme, bütün ikizkenar Heron üçgenlerinin ailesini ifade etmektedir. Ayrıca; her bir ikizkenar Heron üçgeninin, iki eş Pythagorean üçgenini birbirine yapıştırarak (üçgenlerin dik kenarlarından biri ortak olacak şekilde) elde edilebileceğini göstermektedir.

Önerme 2.2. Kenarları $\gamma = |AB| = \beta = |AC| \neq \alpha = |BC|$ olacak şekildeki bir ABC ikizkenar üçgeninde; α, β, γ kenar uzunlukları ve E alanı tamsayı olsun. Ayrıca A köşesinden $|BC|$ kenarına inilen yükseklik *h* olsun. O zaman

$$\alpha = 2\delta(m^2 - n^2),\ h = \delta(2mn),\ \gamma = \beta = \delta(m^2 + n^2)$$

veya alternatifi

$$\alpha = 4\delta mn,\ h = \delta(m^2 - n^2),\ \gamma = \beta = \delta(m^2 + n^2)$$

olur ki burada $m > n$, $(m, n) = 1$ (yani *m* ile *n* aralarında asal) ve $m + n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ (yani *m* ve *n*'nin birisi tek diğeri çift) olacak şekilde δ, m, n tamsayılardır.

Karşıt olarak; $m > n$ olacak şekilde bazı δ, m, n tamsayıları için bir ABC üçgeninin α, β, γ kenar uzunlukları yukarıdaki formüllerden birini sağlarsa o zaman sırasıyla

$h = \delta(2mn)$ veya $h = \delta(m^2 - n^2)$

olur ve *E* bir tam sayıdır (Zelator, 2008a: 9).

Not: Burada $(m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1 \pmod 2$ şartları, karşıt durumun geçerli olması için gerekli değildir.

İspat. Karşıt durumun ispatı açıktır. Böylece ABC, $\beta = \gamma \neq \alpha$ kenarlı bir ikizkenar Heron üçgen olur. Önerme 2.1 den, α nın çift, h nin ise bir tamsayı olduğu ortaya çıkar. Böylece $\frac{\alpha}{2}$ bir tamsayı olacağından, **Şekil 2.2** deki her iki eş AMB ve AMC dik üçgenleri hipotenüs uzunlukları $\beta = \gamma$ olan Pythagorean üçgenleridir. Buradan (2.11) e göre; 78

$$\alpha = 2\delta(m^2 - n^2), h = \delta(2mn), \gamma = \beta = \delta(m^2 + n^2)$$

veya alternatifi olarak;

$$\alpha = 4\delta mn, h = \delta(m^2 - n^2), \gamma = \beta = \delta(m^2 + n^2)$$

olur ki ispat tamamlanır. □

Bu önermemiz ile ilgili sayısal örnekler aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 2.1(a) Önerme 2.2 de $\alpha = 2\delta(m^2 - n^2), h = \delta(2mn), \gamma = \beta = \delta(m^2 + n^2)$ ile ilgili örnekler

m	n	δ	α	β=γ	h
2	1	1	6	5	4
3	2	1	10	13	12
4	3	2	28	50	48
5	2	1	42	29	20
4	1	1	30	17	8

Tablo 2.1(b) Önerme 2.2 de $\alpha = 4\delta mn, h = \delta(m^2 - n^2), \gamma = \beta = \delta(m^2 + n^2)$ ile ilgili örnekler

m	n	δ	α	β=γ	h
2	1	1	16	5	3
3	2	1	48	13	5
4	3	2	192	50	14
5	2	1	80	29	21
4	1	1	32	17	15

Şimdi bütün ikizkenar Heron üçgenlerinin tam bir parametrik tanımlaması mevcut olduğuna göre, buradan hareketle böyle üçgenlerin ρ_α, ρ_β, ρ_γ dış teğet çemberlerinin yarıçaplarının da tamsayılar olduğunu verebiliriz. Bu aşağıdaki teoremle verilmiştir (Bu teoremin ön koşulu olarak Teorem 1.2.1 verilmiştir).

Teorem 2.1. Bütün ikizkenar Heron üçgenlerinin kümesi S olsun. Yani bütün ABC üçgenlerinin kenarları; $\gamma = |AB| = \beta = |AC| \neq \alpha = |BC|$ olacak şekildeki α, β, γ lar tamsayılar ve E alanı da tamsayı olsun. Ayrıca ρ_α, ρ_β, ρ_γ dış teğet çemberlerinin yarıçapları da tamsayılar olarak verilsin. O zaman S aşağıdaki iki ailenin birleşimidir. Bu aileler;

$$S_1 : \beta = \gamma = Kn(m^2 + n^2), \quad \alpha = 2Kn(m^2 - n^2)$$

ve bu ailede yarıçaplar

$$\rho_\alpha = Km(m^2 - n^2), \quad \rho_\beta = \rho_\gamma = 2Kmn^2$$

biçiminde veya

$$S_2 : \beta = \gamma = L(m-n)(m^2 + n^2), \quad \alpha = 4L(m-n)mn$$

ve bu ailede ise yarıçaplar

$$\rho_\alpha = 2Lmn(m+n), \quad \rho_\beta = \rho_\gamma = L(m+n)(m-n)^2$$

olarak verilir. Burada *K* ile *L* keyfi seçilen pozitif tamsayılar ve *m* ile *n* tamsayıları aralarında asal (*m* ile *n* biri tek iken diğeri çift) olup, $m > n$ dir (Zelator, 2008a: 10).

İspat. S kümesinin tanımından ve S_1 ile S_2 parametrik formüllerinden, eğer bir Heron üçgeni S_1 veya S_2 ye aitse o zaman bu Heron üçgeninin S ye ait olması gerektiği açıktır.

Şimdi tersini ispatlayalım. Yani eğer bir üçgen S nin elemanı ise, o zaman bu üçgen S_1 veya S_2 ile verilmelidir. Önerme 2.2 den biliyoruz ki; ABC, $\beta = \gamma \neq \alpha$ olan bir ikizkenar Heron üçgeni ise o zaman;

$$\alpha = 2\delta(m^2 - n^2), h = \delta(2mn), \beta = \gamma = \delta(m^2 + n^2) \tag{2.15a}$$

veya

$$\alpha = 4\delta mn, h = \delta(m^2 - n^2), \beta = \gamma = \delta(m^2 + n^2) \tag{2.15b}$$

olmalıdır. Burada *m* ile *n*; $(m, n) = 1$, $m + n \equiv 1$ (*mod 2*) ve $m > n$ olacak şekildeki pozitif tamsayılardır.

Aynı zamanda (2.10) dan,

$$\rho_\alpha = \frac{E}{s-\alpha} \text{ ve } \rho_\beta = \rho_\gamma = \frac{E}{s-\beta} \text{ (} \beta = \gamma \text{ olduğu için)}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$E = \frac{\alpha}{2}.h, \quad s = \frac{2\beta+\alpha}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2}$$

olduğundan

$$\rho_\alpha = \frac{\alpha h}{2\beta - \alpha} \text{ ve } \rho_\beta = \rho_\gamma = h \tag{2.16}$$

elde edilir. Eğer (2.15a) dikkate alınırsa (2.16) dan doğrudan hesaplamayla,

$$\rho_\alpha = \frac{\delta(m^2-n^2)m}{n} \text{ ve } \rho_\beta = \rho_\gamma = h = \delta(2mn) \tag{2.17}$$

olarak bulunur.

m ile n aralarında asal olduklarından, n ile $(m^2 - n^2)m$ çarpımı aralarında asal olmaları gerekir ki bunun ispatı açıktır. Ayrıca burada $(m,n)=1$ olması $(n, (m^2 - n^2)m) = 1$ olmasını gerektirmesine rağmen, $m + n \equiv 1 \pmod 2$ olması şartına gerek yoktur. Öte yandan (2.17) den açık olarak görülür ki; ρ_α nın tamsayı olabilmesi için gerek ve yeter şart n nin, $\delta(m^2-n^2)m$ çarpımının bir böleni olmasıdır. Ancak n ile $(m^2-n^2)m$ çarpımı aralarında asal olduğundan ve Teorem 1.2.1 den dolayı n, δ nın bir böleni olması gerekir. Dolayısıyla bir K pozitif tamsayısı için $\delta = Kn$ olur. (2.15*a*) ve (2.17) de $\delta = Kn$ konulursa,

$$\alpha = 2Kn(m^2-n^2), \quad \beta = \gamma = Kn(m^2+n^2), \quad \rho_\alpha = Km(m^2-n^2)$$

ve

$$\rho_\beta = \rho_\gamma = h = 2Kmn^2$$

bulunur. Öte yandan eğer (2.15b) geçerli olursa, o zaman (2.15b) ile (2.16) nın birleştirilmesiyle,

$$\rho_\alpha = \frac{\delta(2mn)(m+n)}{m-n} \text{ ve } \rho_\beta = \rho_\gamma = h = \delta(m^2-n^2) \tag{2.18}$$

elde edilir. Yukarıda da verildiği üzere; ρ_α nın bir tamsayı olması için gerek ve yeter şart $(m-n)$ nin δ nın bir böleni olması gerektiğini görürüz. Bu duruma; Teorem 2.1 den ve $(m-n)$ pozitif tamsayısı ile $2mn(m + n)$ çarpımının aralarında asal olmasından ulaşılır. Bu son sonuçtan, $(m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1$ $(mod\ 2)$ şartlarının sağlanması gerektiği açıktır. Bu durumda, m ile n nin aralarında asal olmalarının yeterli olmadığını; yani, m ile n nin birisi çiftken diğerinin tek olmasının da gerektiğini görürüz. Bir L pozitif tamsayısı için $\delta = L(m-n)$ olarak alalım. (2.15b) ile (2.18) birleştirilirse,

$$\beta = \gamma = L(m-n)(m^2+n^2), \quad \alpha = 4L(m-n)mn$$

ve

$$\rho_\alpha = 2Lmn(m+n), \quad \rho_\beta = \rho_\gamma = L(m+n)(m-n)^2 = h$$

ifadelerine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Parametreler için $1 \leq n < m \leq 6$, $L = K = 1$, $(m, n) = 1$ ve $m + n \equiv 1$ $(mod\ 2)$ kısıtlamaları altında; yarıçapları $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ tamsayıları olan ikizkenar Heron üçgenlerinin S_1 ailesi için bazı örnekler Tablo 2.2 ile S_2 ailesi için bazı örnekleri ise Tablo 2.3 ile verilmiştir.

Tablo 2.2 S_1 ailesinin *m* ve *n* elemanları için bazı sayısal örnekler

K	n	m	α	$\beta=\gamma$	$\rho_\beta=\rho_\gamma$	ρ_α	K	n	m	α	$\beta=\gamma$	$\rho_\beta=\rho_\gamma$	ρ_α
1	1	2	6	5	4	6	1	2	5	84	58	40	105
1	1	4	30	17	8	60	1	3	4	42	75	72	28
1	1	6	70	37	12	210	1	4	5	72	164	160	45
1	2	3	20	26	24	15	1	5	6	110	305	300	66

Tablo 2.3 S_2 ailesinin *m* ve *n* elemanları için bazı sayısal örnekler

L	n	m	α	$\beta=\gamma$	$\rho_\beta=\rho_\gamma$	ρ_α	L	n	m	α	$\beta=\gamma$	$\rho_\beta=\rho_\gamma$	ρ_α
1	1	2	8	5	3	12	1	2	5	120	87	63	140
1	1	4	48	51	45	40	1	3	4	48	25	7	168
1	1	6	120	185	175	84	1	4	5	80	41	9	360
1	2	3	24	13	5	60	1	5	6	120	61	11	660

3. BİR ÜÇGENİN İÇ TEĞET VE DIŞ TEĞET ÇEMBERLERİNİN ÇAPLARINI İÇEREN PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİNİN BELİRLİ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde; çalışmamızın esas konusu olan Pythagorean üçgenlerinin ailesini üreten *m* ile *n* tamsayı parametrelerine bağlı iç ve dış teğet çemberlerinin çapları olan $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ ifadeleri için basit formüller verildi. Sonra, bir dik kenarı bir tamsayının karesi olan sonsuz sayıda primitif Pythagorean üçgeninin mevcut olduğu belirtildi. Sonra $(x, y) = 1$ olan $x^2 + y^2 = 2z^2$ şeklindeki Diophantine denklemlerinin tüm çözüm ailesini tanımlayan parametrik formülleri ifade edildi. Ayrıca bu denklemin genel çözümünün elde edilmesiyle ilgili bir taslak verilerek bölüm kapatıldı.

3.1 Üçgenlerin Genel Özellikleri

Üç pozitif α, β, γ tam sayıları verildiğinde, iki boyutlu Öklit düzleminde, üç kenar, $\alpha + \beta > \gamma, \alpha + \gamma > \beta, \beta + \gamma > \alpha$ üçgen eşitsizliklerini sağladığı sürece, kenarları α, β, γ olan üçgenler mevcut olacaktır. Buradan hareketle, α, β, γ tam sayılarına bağlı olarak; cetvel, pergel ve bazı diğer aletler kullanılarak böyle bir temsili üçgen (eş üçgenler ailesi denilen) oluşturulabilir. Böyle bir üçgen; cetvel veya pergel gibi geleneksel araçları kullanarak yapılamasa bile, kuşkusuz matematiksel anlamda var olacaktır.

Bir kenar uzunluğu bir tam sayının karesi olan ve $\alpha + \beta + \gamma(\text{çevre}), -\alpha + \beta + \gamma,\ \alpha - \beta + \gamma,\ \alpha + \beta - \gamma$ şeklindeki dört pozitif tamsayıdan birisi de bir tam sayının karesi olan tam sayı kenarlı sonsuz sayıda üçgen olduğunu görmek de kolaydır. Gerçekten, herhangi bir *k* pozitif tamsayısı için $\alpha = k^2$ ve bir *l* pozitif tamsayısı için $\alpha + \beta + \gamma = l^2$ olsun. Buradan $l >$ k ve $\beta + \gamma = l^2 - k^2 > k^2$ olacak şekilde β ve γ sayıları seçilebilir. Böylece *l* ve *k* pozitif tamsayılarının $\ell > k\sqrt{2} \Leftrightarrow \ell^2 > 2k^2$ şartını sağlaması gerektiği ve $-k^2 < \beta - \gamma < k^2$ veya eşdeğer şekilde $|\beta - \gamma| < k^2$ olması gerektiği ortaya çıkar. Kolayca görüleceği üzere; her bir $t = -k^2 + 1, -k^2 + 2, ..., 0, 1, 2, ..., k^2 - 2, k^2 - 1$ değeri için

$$\alpha = k^2, \beta = \frac{\ell^2 - k^2 + t}{2}, \quad \gamma = \frac{\ell^2 - k^2 - t}{2}$$

ifadelerinden, kenar uzunlukları tam sayılar olan üçgenleri oluşturulur ki burada üç üçgen eşitsizliğinin her biri sağlanır.

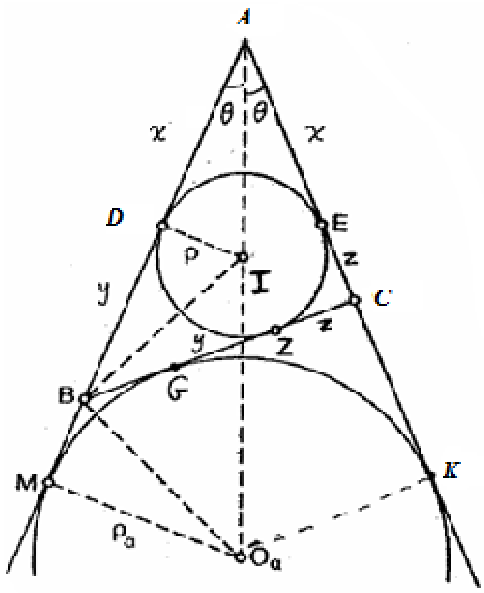
Dört tane $\alpha+\beta+\gamma, -\alpha+\beta+\gamma, \alpha-\beta+\gamma, \alpha+\beta-\gamma$ reel sayıları, üçgenin alanı için Heron Formülü'ndeki köklü ifade altında çarpanlar olarak belirlenir.

Bu çalışmanın 2. kesiminde göreceğimiz gibi; eğer üçgenin alanını, her bir $\alpha+\beta+\gamma,\ -\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha-\beta+\gamma,\ \alpha+\beta-\gamma$ sayısı ile iki kez bölersek, sırasıyla $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ değerlerini elde ederiz. Bunlar dört önemli çemberin çaplarıdır. Bu çemberler; biri üçgenin içinde veya içine çizilen çember ve diğer üç çemberin her biri ise, bir kenara ve diğer iki kenarı içeren doğruların uzantısına teğet olan (fakat diğer iki kenarın kendisine teğet olmayan) çemberlerdir. Bu üç dış çemberin merkezlerinin her birisi, bir iç açıortay ve iki dış açıortayın kesim noktasıdır.

3.2 Bir ABC Üçgeninin α, β, γ Kenar Uzunlukları Cinsinden, $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ Çapları İçin Formüller

Bir ABC üçgenine ilişkin bilgiler aşağıda Şekil 3.1 ve ekinde verilmiştir.

$|AB| = \gamma, |BC| = \alpha, |CA| = \beta$
$|AD| = x = |AE|$
$|BD| = y = |BZ|$
$|CZ| = z = |CE|$
$|DI| = |IZ| = |IE| = \rho$
$|O_\alpha M| = \rho_\alpha$



Şekil 3.1 Bir ABC Üçgenin İç Teğet ve Dış Teğet Çemberlerinin Yarıçapları

Şekil 3.1 den

$$\left.\begin{array}{l} A(\overset{\Delta}{ABI}) = \dfrac{1}{2}\rho\gamma \\ A(BIC) = \dfrac{1}{2}\rho\alpha \\ A(AIC) = \dfrac{1}{2}\rho\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A(ABC) = \frac{1}{2}\rho(\alpha+\beta+\gamma)$$

dir. Aynı zamanda,

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=\gamma \\ y+z=\alpha \\ z+x=\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \\ y = \dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \\ z = \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \end{array}\right\}$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz.

Sonra $|AM| = |AK|$ dan (*M* ve *K*, [*AM*] ve [*AK*] nın uzantılarının O_α merkezli çemberin teğet noktalarıdır) $\gamma + |BM| = \beta + |CK|$ olur. Aynı zamanda $|BG| = |BM|$ ve $|CG| = |CK|$ dır. Burada $|BG| + |CG| = \alpha$ olduğundan $|BM| + |CK| = \alpha$ çıkar. Bunu $|BM| - |CK| = \beta - \gamma$ ile birleştirerek,

$$|BM| = \frac{\beta+\alpha-\gamma}{2} \text{ ve } |CK| = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$$

olarak elde edilir. Üstelik *IDA* dik üçgeninde $\tan\theta = \rho / x$ olduğundan hareketle

$$\tan\theta = \frac{\rho_\alpha}{|AM|} = \frac{\rho_\alpha}{(\beta+\alpha+\gamma)/2}$$

bulunur. Yukarıdan

$$|AM| = \gamma + |BM| = \gamma + \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

olur ve bu sonucu ADI üçgeninden de elde ederiz. Böylece

$$\frac{\rho_\alpha}{(\beta+\alpha+\gamma)/2} = \frac{\rho}{x}$$

olarak bulunur. Burada

$$x = \frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} \text{ ve } \rho = \frac{2.A(ABC)}{\alpha+\beta+\gamma}$$

olması durumunu kullanarak,

$$2\rho_\alpha = \frac{4.A(ABC)}{-\alpha+\beta+\gamma}$$

ifadesine varırız. Benzer şekilde diğer iki çap için de

$$2\rho_\beta = \frac{4.A(ABC)}{\alpha-\beta+\gamma},\ 2\rho_\gamma = \frac{4.A(ABC)}{\alpha+\beta-\gamma}$$

ifadelerine ulaşırız. Böylece dört çap için

$$2\rho = \frac{4.A(ABC)}{\alpha+\beta+\gamma},\ 2\rho_\alpha = \frac{4.A(ABC)}{\beta+\gamma-\alpha},\ 2\rho_\beta = \frac{4.A(ABC)}{\alpha-\beta+\gamma},\ 2\rho_\gamma = \frac{4.A(ABC)}{\alpha+\beta-\gamma} \tag{3.1}$$

formüllerini elde ederiz.

3.3 Dik Üçgenlerin Durumu

Eğer ABC bir dik üçgen ve A köşe açısının ölçümü 90º ise, o zaman α kenarı hipotenüs, β ile γ da diğer iki dik kenar olur. Buradan

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow 2\beta\gamma = (\beta+\alpha+\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)$$

bulunur. Ayrıca dik üçgende alandan

$$4.A(ABC) = 2\beta\gamma$$

olacağından dolayı ve (3.1) deki ilk iki formül birleştirildiği zaman

$$2\rho = \beta+\gamma-\alpha \text{ ve } 2\rho_\alpha = \alpha+\beta+\gamma$$

elde edilir. Burada $2\rho_\alpha$ nın dik üçgenin çapına eşit olduğu açıktır.

Benzer şekilde, cebirsel işlemler sonucunda

$$2\beta\gamma = (\beta+\alpha-\gamma)\left[\alpha-(\beta-\gamma)\right];$$

bulunur.

$$4.A(ABC) = 2\beta\gamma$$

olduğundan ve (3.1) deki son iki formül birleştirildiği zaman

$$2\rho_\beta = \alpha+\beta-\gamma \text{ ve } 2\rho_\gamma = \alpha+\gamma-\beta$$

yı elde ederiz. Bu sonuçlar birleştirilirse,

$$2\rho = \beta+\gamma-\alpha,\ 2\rho_\alpha = \alpha+\beta+\gamma,\ 2\rho_\beta = \alpha+\beta-\gamma,\ 2\rho_\gamma = \alpha-\beta+\gamma \tag{3.2}$$

olarak buluruz.

3.4 Pythagorean Üçgenlerinin Durumu

Pythagorean üçgenlerinin veya üçlülerinin tüm ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$) ailesi, iyi bilinen

$$\alpha = \delta(m^2 + n^2),\ \beta = \delta(2mn),\ \gamma = (m^2 - n^2) \tag{3.3}$$

parametrik formülleri ile verilir ki burada m, n, δ pozitif tamsayılar, $(m, n) = 1$, $m > n$ ve $m + n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ olacak şekilde pozitif tamsayılardır (yani m ve n nin birisi çift iken diğeri tek olmak üzere).

$\delta = 1$ için (3.3) ifadesi

$$\alpha = m^2 + n^2,\quad \beta = 2mn,\ \gamma = m^2 - n^2$$

olur ki burada

$$(m,n) = 1,\ m + n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2),\ m,n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } m > n \tag{3.4}$$

olacağından bu ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$) Pythagorean üçgeninin veya üçlüsünün Tanım 1.2.6 ya göre primitif olduğu açıktır (Zelator, 2008b: 8).

Eğer ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$) bir primitif Pythagorean üçlüsüyse, (3.2) ve (3.4) formüllerinin birlikte uygulanmasıyla $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ çapları

$$2\rho = 2n(m-n),\quad 2\rho_\alpha = 2m(n+m),\ 2\rho_\beta = 2n(m+n),\quad 2\rho_\gamma = 2m(m-n) \tag{3.5}$$

olarak verilir.

Örnek 3.5.1 $m = 2, n = 1 \Rightarrow \alpha = 5,\ \beta = 4, \gamma = 3$ ve $2\rho = 2,\ 2\rho_\alpha = 12,\ 2\rho_\beta = 6,$ $2\rho_\gamma = 4$ olur.

3.5 Sayılar Teorisinden Bazı Sonuçlar

Bu kesimde sayılar teorisi ile ilgili konumuz için gerekli olan bazı sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 3.1. $x^2 + 2y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tamsayılarda $(x,\ y) = 1$ olan bütün (x, y, z) çözümlerinin kümesi parametrik olarak;

$$x = \left|k^2 - 2\lambda^2\right|, y = 2k\lambda, z = k^2 + 2\lambda^2$$

biçiminde verilir ki burada k ile λ parametreleri aralarında asal olan pozitif tamsayılar ($k, \lambda \in \mathbb{Z}^+$ $(k,\ \lambda) = 1$) ve k tek ($k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)$) olur. Bu durumda x ile z nin her ikisi de tektir (Dickson, 1971: 225).

Sonuç 3. 2. $x^2+y^2=2z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tamsayılarda $(x, y) = 1$ olan bütün (x, y, z) çözümlerinin kümesi parametrik olarak;

$$x = \left|k^2 + 2k\lambda - \lambda^2\right|, y = \left|-k^2 + 2k\lambda + \lambda^2\right|,\ z = k^2 + \lambda^2$$

olarak verilir (simetriden dolayı, eğer (x, y, z) bir çözümse, böylece (y, x, z) nin de bir çözüm olduğu açıktır). Burada k ile λ; $(k, \lambda) = 1$, $k + \lambda \equiv 1 (\text{mod } 2)$ olacak şekilde pozitif tam sayılardır (Böylece, $(x, y) = 1$ olan herhangi bir çözümdeki x, y, z tamsayıları tek olmalıdır) (Dickson,1971: 250).

Sonuç 3. 3. $a,b \in Z,\ ab \neq 0$ ve $(a,b) = 1$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

(i) Eğer $c \in Z$ ve $a \mid bc$ ise o zaman $a \mid c$ dir.

(ii) Eğer p asal, $c_1, c_2, \ldots c_k$ lar tamsayılar olmak üzere, $p \mid c_1c_2\ldots c_k$ ise, o zaman p; $c_1, c_2, \ldots c_k$, tamsayılarından en az birini böler.

(iii) Eğer $a \equiv b \equiv 1 (\text{mod } 2)$ ise, o zaman $(a-b, a+b) = 2$ veya $a - b \equiv 0 \ (\text{mod } 4)$ ve $a + b \equiv 2 (\text{mod } 4)$ veya aksine $a - b \equiv 2 \ (\text{mod } 4)$ ve $a - b \equiv 0 \ (\text{mod } 4)$ olur.

(iv) Eğer $a+b \equiv 1 \ (\text{mod } 2)$ ise, o zaman işaretlerin dört kombinasyonunun herhangi birisi için $(a^2 \pm 2ab \pm b^2, a^2 + b^2) = 1$ dir. Ayrıca eğer $a \equiv b \equiv 1 (\text{mod } 2)$ ise, o zaman, herhangi bir işaret kombinasyonu için $(a^2 \pm 2ab \pm b^2, a^2 + b^2) = 2$ olur (Rosen, 1993: 35; Sierpinski, 1988: 79).

Sonuç 3. 4. $a,b,c \in Z^+$, $(a, b) = 1$ ve $ab = c^n$ ise, o zaman $c_1, c_2 \in Z^+$ ve $(c_1, c_2) = 1$ için $a = c_1^n$, $b = c_2^n$ ve $c_1c_2 = c$ olur (Rosen, 1993: 38; Sierpinski, 1988: 80).

Sonuç 3.4 e dayanılarak, aşağıdaki sonuç kolaylıkla ispatlanabilir.

Sonuç 3. 5. Eğer p asal ve $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$, $(a, b) = 1$ için $ab = pc^n$ ise, o zaman $(c_1, c_2) = 1$ olacak şekildeki $c_1, c_2 \in Z^+$ için ya $a = pc_1^n$, $b = c_2^n$ veya alternatif olarak $a = c_1^n$, $b = pc_2^n$ ve $c_1c_2 = c$ dir (Zelator, 2008b: 10)

İspat. Sonuç 3.4 ve 3.3(ii) den yararlanırsak, Sonuç 3.5 in ispatı kolaydır.

Gerçekten, Sonuç 3.3(ii) den; p nin, a veya b den en azından birisini bölmesi gerektiğini biliyoruz. O zaman, herhangi bir $d \in \mathbf{Z}^+$ için, $a = pd$ vardır. Bu ifadeyi $ab = pc^n$ ifadesinde kullanırsak $pdb = pc^n \Rightarrow db = c^n$ olur. d, a nın bir böleni ve $(a,b) = 1$ olduğundan, $(d, b) = 1$ olacağı açıktır. Sonuç 3.4 den $(c_1, c_2) = 1$ için

$d = c_1^n, b = c_2^n$ ve $c_1c_2 = c$ olarak buluruz. Böylece $a = pc_1^n$ ve $b = pc_2^n$ olur. Diğer durum olan $p \mid b$ olması durumunda $a = c_1^n$ ve $b = pc_2^n$ elde edilir. □

Sonuç 3.6. (*i*) Eğer p asal, $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ için $(a, b) = 1$ ve $pab = c^n$ ise o zaman $(c_1, c_2) = 1$ olacak şekildeki c_1, c_2 pozitif tamsayıları için $a = p^{n-1}c_1^n, b = c_2^n$ ya da $a = c_1^n, b = p^{n-1}c_2^n$ ve $c_1c_2 = c$ olur.

(*ii*) (*i*) de $n = 2$ olduğu zaman ya $a = pc_1^2$ ya da $b = c_2^2$ ye; ya da alternatif olarak $a = c_1^2$ ve $b = pc_2^2$ olur (Rosen,1993: 58).

İspat. Sonuç 3.6 nın ispatı kolaydır. Burada ispatın bir taslağını veriyoruz. Sonuç 3.3 (*ii*) nin uygulanmasıyla, p asalının c yi bölmesi gerektiği sonucuna varız. Burada; $(a, b) = 1$ hipotezinin ve p^{n-1} in bir asal kuvveti olduğu gerçeğinin kullanılmasıyla ve 3.3(*i*) nin birleştirilmesiyle, p^{n-1} in a yı ya da b yi bölmesi gerektiği sonucuna ulaşırız. Son olarak, Sonuç 3.4 ün kullanılmasıyla ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.7. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ve $a^n \mid b^n$ ise o zaman $a \mid b$ dir.

Bu sonuç şu şekilde de ifade edilebilir. Eğer bir pozitif tamsayının n inci kuvveti, başka bir pozitif tamsayının n inci kuvvetini bölerse, o zaman ilk pozitif tamsayı, ikinci pozitif tamsayıyı böler. Bu iyi bilinen bir sonuçtur (Rosen,1993: 61).

3.6 Bir Dik Kenarının Uzunluğu Kare Olan Sonsuz Sayıdaki Primitif Pythagorean Üçgenleri

Bir Pythagorean üçgeninin kenar uzunluklarından sadece bir dik kenarının tam kare olabileceği daha önce verilmişti. Öte yandan Fermat tarihte, sonsuz iniş yöntemini ilk kullanan matematikçidir (Zelator, 2008b: 11). Fermat; bu yöntemi $x^4 + y^4 = z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü olmadığını göstermek için kullanmıştır. Bu, birçok sayılar teorisi kitabında bulunabilen ve iyi bilinen bir sonuçtur. Öte yandan; "her iki dik kenar uzunluğu da bir tam sayının karesi olan Pythagorean üçgenlerinin bulunmadığı", bu çözümün doğal bir sonucudur. Aşağıda, bir dik kenar uzunluğu kare olan tüm Pythagorean üçgenlerinin elde ediliş yöntemi iki farklı yolla verilmiştir.

Teorem 3.1. (i) β dik kenarı çift ve kare olan sonsuz sayıda (α, β, γ) primitif Pythagorean üçgenleri veya üçlüleri vardır. Bu sonsuz aile parametrik olarak,

$$\alpha = m^2 + n^2, \ \beta = 2mn, \ \gamma = m^2 - n^2$$

biçiminde verilir. Burada β nın tam kare olabilmesi için $(t_1, t_2) = 1$ olacak şekilde t_1 ve t_2 tamsayılarına bağlı olarak $m = 2t_1^2$ ve $n = t_2^2$ veya $m = t_1^2$ ve $n = 2t_2^2$ olur. Ayrıca ilk durumda t_2 nin, ikinci durumda t_1 in tek olacağı ve aynı zamanda yazılış sırasıyla $2t_1^2 > t_2^2$ veya $t_1^2 > 2t_2^2$ olması gerektiği açıktır.

(ii) γ dik kenarı tek ve kare olan sonsuz sayıda (α, β, γ) primitif Pythagorean üçgenleri veya üçlüleri vardır. Bu sonsuz aile parametrik olarak,

$$\alpha = m^2 + n^2, \ \beta = 2mn, \ \gamma = m^2 - n^2$$

biçiminde verilir. Burada γ nın tam kare olabilmesi için t_1 ve t_2; $(t_1, t_2) = 1$, t_1 ile t_2 nin birisi tek diğeri çift (Yani $t_1 + t_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$) ve $t_1 > t_2$ olacak şekildeki tamsayılar için $m = t_1^2 + t_2^2$, $n = 2t_1t_2$ olur (Bu $t_1 > t_2$ kabulü (α, β, γ) üçlüsünün tekrarlanmamasını garantiler) (Zelator, 2008b: 12).

İspat. (i) Eğer, α, β, γ hipotezdeki gibi verilirse, o zaman, β nın bir kare ve (α, β, γ) nın primitif bir Pythagorean üçgeni olduğu kolayca hesaplanır.

Şimdi, tersine olarak β nın bir kare ve (α, β, γ) nın primitif bir Pythagorean üçgeni olduğunu varsayalım. Bazı $(m, n) = 1$, $m + n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ve $m>n$ olacak şekilde m, n, c pozitif tamsayıları için, $\alpha = m^2 + n^2, \beta = 2mn, \ \gamma = m^2 - n^2$ ve $\beta = c^2$ olarak bulmalıyız. $2mn = c^2$ ve $p = 2$ için Sonuç 3.6 dan ya $m = 2t_1^2$ ve $n=t_2^2$ veya $m = t_1^2$ ve $n = 2t_2^2$ çıkar.

İlk durumda, $m = 2t_1^2$, $n = t_2^2$ idi. Sonra, $(m, n) =1$ ve $m + n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ olduğundan, kolaylıkla t_2 nin tek ve $(t_1, t_2) = 1$ olması gerektiği ortaya çıkar. İkinci durumda $m = t_1^2$ ve $n = 2t_2^2$ idi. Yine de, $(m, n) =1$ ve $m + n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ olduğundan, t_1 in tek, $(t_1, t_2) = 1$ ve $t_1^2 > 2t_2^2$ olması gerektiği çıkar.

(ii) İspatın ilk kısmı hemen hemen (i) deki gibidir. Diğer yandan, γ dik kenar uzunluğu bir tek kare ve (α, β, γ) nın primitif bir Pythagorean üçgeni olduğunu varsayalım. Bazı $(m, n) = 1$, $m + n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ve $m > n$ olacak şekilde m, n, c pozitif tamsayıları için, $\alpha = m^2 + n^2$, $\beta = 2mn$, $\gamma = m^2 - n^2$ ve $\gamma = c^2$ olarak bulmalıyız. Buradan $\gamma = c^2 \Leftrightarrow m^2 = n^2 + c^2$ olur. $(m, n) = 1$ olduğundan hareketle son denklemde $(m,c) = 1 = (n,c)$ olduğu kolaylıkla bulunur. Diğer bir deyimle (m, n, c), hipotenüs uzunluğu m olan bir primitif Pythagorean üçlüsü olur. Dolayısıyla m tek olur ki burada $m + n \equiv 1 (mod\ 2)$ olması gerektiğinden, n nin çift olması gerektiği sonucunu çıkarırız. Sonuç olarak, $(t_1, t_2) = 1$, $t_1 + t_2 \equiv 1 (mod 2)$ ve $t_1 > t_2$ olacak şekilde $t_1, t_2, c \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$m = t_1^2 + t_2^2,\ n = 2t_1t_2,\ c = t_1^2 - t_2^2$$

olur. □

Teorem 3.1 (i) için sayısal örnekler Tablo 3.1 de, Teorem 3.1 (ii) için sayısal örnekler Tablo 3.2 de verilmiştir.

Tablo 3.1 Teorem 3.1 (i) için sayısal örnekler

t_1	t_2	m	n	α	β	γ
1	1	2	1	5	4	3
2	1	8	1	65	16	63
3	1	18	1	325	36	323
4	1	32	1	1025	64	1023
4	3	32	9	1105	576	943

$(m = 2t_1^2, n = t_2^2)$

t_1	t_2	m	n	α	β	γ
2	1	4	2	20	16	12
3	1	9	2	85	36	77
3	2	9	8	145	144	17
5	3	25	18	949	900	301
5	2	25	8	689	400	561

$(m = t_1^2, n = 2t_2^2)$

Tablo 3.2 Teorem 3.1 (ii) de $m = 2t_1^2, n = t_2^2$ için sayısal örnekler

t_1	t_2	m	n	α	β	γ	t_1	t_2	m	n	α	β	γ
2	1	5	4	41	40	9	5	2	29	20	1241	1160	441
4	3	25	24	1201	1200	49	5	4	41	40	3281	3280	81
3	2	13	12	313	312	25	6	1	37	12	1513	888	1225
4	1	17	8	353	272	225	6	3	45	36	3321	3240	729
10	1	101	20	10601	4040	9801	6	5	61	60	7321	7320	121

3.7 Bir Dik Kenar Uzunluğu ve $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ Çaplarından Birisi Kare Olan Primitif Pythagorean Üçgenleri

Eğer (α, β, γ) üçlüsü; $(m, n) = 1$, $m + n \equiv 1 (mod 2)$ ve $m > n$ şartlarını sağlayan m, n pozitif tamsayıları için

$\alpha = m^2 + n^2$, $\beta = 2mn$, $\gamma = m^2 - n^2$

olacak şekildeki bir primitif Pythagorean üçlüsü ise, o zaman bu pythagorean üçgeninde bir dik kenar uzunluğu ile dört çapından birisi de kare olacak şekilde aşağıda verilen tam olarak sekiz kombinasyon vardır.

Kombinasyon 1: β nın bir kare, 2ρ nun bir kare olması

Kombinasyon 2: β nın bir kare, $2\rho_\alpha$ nın bir kare olması

Kombinasyon 3: β nın bir kare, $2\rho_\beta$ nın bir kare olması

Kombinasyon 4: β nın bir kare, $2\rho_\gamma$ nın bir kare olması

Kombinasyon 5: γ nın bir kare, 2ρ nun bir kare olması

Kombinasyon 6: γ nın bir kare, $2\rho_\alpha$ nın bir kare olması

Kombinasyon 7: γ nın bir kare, $2\rho_\beta$ nın bir kare olması

Kombinasyon 8: γ nın bir kare, $2\rho_\gamma$ nın bir kare olması

Aşağıda Teorem 3.2 de görüleceği üzere, 6 ve 8 kombinasyonları gerçekte gerçekleşemez. Yine Teorem 3.3 de verileceği üzere, geri kalan kombinasyonlar gerçekleşir ve her bir durumda (kombinasyonda) her bir üçlünün tüm ailesi, parametrik olarak tanımlanır.

Teorem 3.2 *(i)* γ dik kenar uzunluğu bir tek sayının karesi ve $2\rho_\alpha$ çapı (aynı zamanda üçgenin çevresi) da kare olan hiçbir Pythagorean üçgeni yoktur.

(ii) Tek sayılı γ kenar uzunluğu bir tek sayının karesi ve $2\rho_\gamma$ çapı da kare olan hiçbir Pythagorean üçgeni yoktur (Zelator, 2008b: 15).

İspat. (*i*) Teorem 3.1 (*ii*) den, eğer bir (α, β, γ) üçlüsü mevcutsa $(t_1, t_2) = 1$ ve $t_1 + t_2 \equiv 1 \pmod 2$ olacak şekildeki t_1, t_2 $\epsilon\, Z^+$ için, $m = t_1^2 + t_2^2$, $n = 2t_1t_2$ olmak üzere

$\alpha = m^2 + n^2$, $\beta = 2mn$, $\gamma = m^2 - n^2$

olmalıdır.

Ek olarak, pozitif K tamsayısı için, $2\rho_\alpha = K^2$ olur. (3.5) den $2\rho_\alpha = 2m(m+n)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $2(t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2) = K^2$ elde edilir. Ancak $t_1 + t_2 \equiv 1 \pmod 2$ olarak verildiğinden sol taraf 2 ye kongruent olmasına rağmen, sağ taraf mod 4 e göre sadece 0 veya 1 e kongruent olabileceğinden bu bir çelişkidir. Yani $2\rho_\gamma$ bir tam kare olamaz.

(ii) (i) de olduğu gibi, eğer bir (α,β,γ) üçlüsü mevcutsa, $m = t_1^2 + t_2^2$, $n = 2t_1t_2$, $(t_1,t_2) = 1, t_1 + t_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ olacak şekildeki $t_1, t_2 \in Z^+$ için

$$\alpha = m^2 + n^2, \beta = 2mn, \gamma = m^2 - n^2$$

olmalıdır. Ek olarak, bazı $N \in \mathbb{Z}^+$ için, $2\rho_\gamma = N^2$ dir. Ayrıca (3.5) den $2\rho_\gamma = 2m(m-n)$ dir. Sonuçta,

$$2(t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2) = N^2 \Rightarrow 2(t_1^2 + t_2^2)(t_1 - t_2)^2 = N^2$$

bulunur ki yine mod 4 e göre; sağ taraf 0 veya 1 kongruent olabilirken, sol taraf 2 ye kongruent olacağından bu bir çelişkidir. □

Teorem 3.3 (i) β dik kenar uzunluğu bir çift sayının karesi ve $2\rho_\alpha$ çapı (aynı zamanda üçgenin çevresi) da kare olan primitif $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ Pythagorean üçlüleri tam olarak aşağıda F_1 ailesi ile verilir.

Yani $\kappa \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $(\kappa,\lambda) = 1$ olacak şekildeki $\kappa, \lambda \in Z^+$ için $t_2 = \left|\kappa^2 - 2\lambda^2\right|$, $t_1 = 2\kappa\lambda$ olmak üzere

$$\alpha = m^2 + n^2, \beta = 2mn,\ \gamma = m^2 - n^2 \ ve\ m = 2t_1^2, n = t_2^2,\ 2t_1^2 > t_2^2$$

olarak bulunur ve F_1 ailesi ile temsil edilir.

(ii) β dik kenar uzunluğu bir çift sayının karesi ve $2\rho_\beta$ çapının da kare olduğu primitif $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ Pythagorean üçlüleri, tam olarak aşağıdaki F_2 ailesi ile verilir.

Yani $\kappa \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $(\kappa,\lambda) = 1$ olacak şekildeki $\kappa, \lambda \in Z^+$ için $t_1 = |\kappa^2 - 2\lambda^2|$, $t_2 = 2\kappa\lambda$ olmak üzere

$$\alpha = m^2 + n^2, \beta = 2mn,\ \gamma = m^2 - n^2 \text{ ve } m = t_1^2, n = 2t_2^2,\ t_1^2 > 2t_2^2$$

olarak bulunur ve F_2 ailesi ile temsil edilir.

(iii) β dik kenar uzunluğu bir çift sayının karesi ve $2\rho_\gamma$ çapının da kare olduğu primitif $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ Pythagorean üçlüleri, tam olarak aşağıdaki F_3 ailesi ile verilir.

Yani $\kappa+\lambda\equiv 1(\mathrm{mod}\,2), (\kappa,\lambda)=1$ olacak şekildeki $\kappa,\lambda\in Z^{+}$ için $t_1=\kappa^2+\lambda^2$, $t_2=|-\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2|$ olmak üzere

$$\alpha=m^2+n^2, \beta=2mn, \gamma=m^2-n^2 \text{ ve } m=2t_1^2, n=t_2^2, 2t_1^2>t_2^2$$

olarak bulunur ve F_3 ailesi ile temsil edilir.

(*iv*) γ dik kenar uzunluğu bir tek sayının karesi ve 2ρ iç çapının (aynı zamanda üçgenin çevresi) da kare olduğu primitif (α, β, γ) Pythagorean üçlüleri, tam olarak aşağıdaki F_4 ailesi ile verilir.

Yani $(\kappa,\lambda)=1, \kappa+\lambda\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ olacak şekildeki $\kappa,\lambda\in Z^{+}$ için $t_1=\kappa^2, t_2=\lambda^2$, $t_1>t_2$ olmak üzere

$$\alpha=m^2+n^2, \beta=2mn, \gamma=m^2-n^2 \text{ ve } m=t_1^2+t_2^2, n=2t_1t_2$$

olarak bulunur ve F_4 ailesi ile temsil edilir.

(*v*) γ dik kenar uzunluğu bir tek sayının karesi ve $2\rho_\beta$ çapının da kare olduğu primitif (α, β, γ) Pythagorean üçlüleri, tam olarak (*iv*). şıktaki F_4 ailesinin elemanları ile verilir. İspatta da kolaylıkla görüleceği gibi, γ kare olduğundan dolayı, 2ρ nın bir kare olabilmesi için gerek ve yeter şart $2\rho_\beta$ nın da bir kare olmasıdır.

(*vi*) β dik kenar uzunluğu bir çift sayının karesi ve 2ρ iç çapının da bir kare olduğu primitif (α, β, γ) Pythagorean üçlüleri, tam olarak aşağıdaki F_6 ailesi ile verilir.

Yani $\kappa\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\, ve\, (\kappa,\lambda)=1$ olacak şekildeki $\kappa,\lambda\in Z^{+}$ için $t_1=\kappa^2+2\lambda^2$, $t_2=2\kappa\lambda$, $t_1^2>2t_2^2$ olmak üzere

$$\alpha=m^2+n^2, \beta=2mn, \gamma=m^2-n^2 \text{ ve } m=t_1^2, n=2t_2^2$$

olarak bulunur ve F_6 ailesi ile temsil edilir (Zelator, 2008b: 16).

İspat. Önce her bir kısım içinde, ispatın bir yönünün çok açık olduğuna dikkat çekelim. (α,β,γ) üçlüsü verilen bir ailenin elemanı ise, o zaman bu, belirlenmiş bir özelliği olan bir primitif Pythagorean üçgenidir. Aşağıda, her bir şıkkın tersini ispatlıyoruz. Eğer, bir (α,β,γ) primitif Pythagorean üçgeni ise, o zaman bu üçgen belirtilen ailenin bir elemanı olmalıdır.

(i) Teorem 3.1 (i) den; $\alpha = m^2 + n^2$, $\beta = 2mn$ olması gerektiğini biliyoruz. Burada $(t_1,t_2)=1$ olacak şekildeki t_1, $t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için; ya $m=2t_1^2, n=t_2^2$ ve $t_2 \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ ya da $m=t_1^2, n=2t_2^2$ ve $t_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ olması gerekir. (3.5) de $2\rho_\alpha = 2m(n+m)$, olduğu için, hipotezden $L\in\mathbf{Z}^+$ için $2m(m+n)=L^2$ olmalıdır. Ayrıca m ve n tamsayıları için $m+n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ olmalıdır. L, çift olduğundan $L^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ olur. Burada, $m + n$ tek olduğu için, m çift olacaktır. Buradan $2m(m+n)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ bulunur. Bu nedenle yukarıdaki iki durumdan sadece ilki gerçekleşir.

Öte yandan t_1, $t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için $(t_1, t_2) = 1$ ve t_2 tek olmak üzere $m=2t_1^2$ ve $n=t_2^2$ ($2t_1^2>t_2^2$) olması gerektiğinden $2m(m+n)=L^2 \Leftrightarrow 4t_1^2(2t_1^2+t_2^2)=L^2 \Rightarrow (2t_1)^2\,|\,L^2$ $\Rightarrow 2t_1\,|\,L$ buluruz (Sonuç 3.7 den). Buradan $L_1 \in \mathbf{Z}^+$ için $L=(2t_1)L_1$ olur. Böylece $4t_1^2(2t_1^2+t_2^2)=4t_1^2L_1^2 \Rightarrow t_2^2+2t_1^2=L_1^2$ olur ki bu ise, $\{t_2\ t_1.\ L_1\}$ in, $x^2+2y^2=z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tam sayılarda bir çözümü olması demektir. Sonuç 3.1 den, $\kappa\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\,ve\,(\kappa,\lambda)=1$ olacak şekildeki $\kappa,\lambda \in \mathbf{Z}^+$ için,

$$t_1 = 2\kappa\lambda\,,\ t_2 = \left|k^2-2\lambda^2\right|$$

elde ederiz.

(ii) Bunun ispatı, (i) dekine benzer şekildedir. Gerçekten (3.5) den dolayı her hangi bir $L\in\mathbb{Z}^+$ için $2\rho_\beta = 2n(m+n)=L^2$ olması gerektiğini biliyoruz. Bu son ifade mod 4 e bir kongrüans olarak düşünüldüğünde, $m + n$ tek olduğundan n nin çift olması gerekir. Teorem 3.1 (i) ile birlikte bu ifade düşünülürse; t_1 tek, $(t_1, t_2) = 1$ ve $t_1^2 > 2t_2^2$ olacak şekildeki t_1, $t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için $m=t_1^2, n=2t_2^2$ ve $\alpha = m^2 + n^2$, $\beta = 2mn$ olur. O zaman, $2n(m+n)=L^2$ den kolayca $(2t_1)^2(t_1^2+2t_2^2)=L^2$ bulunur. Bu son ifadeye Sonuç 3.7 uygulanırsa; bir $L_1 \in \mathbf{Z}^+$ için $t_1^2+2t_2^2=L_1^2$ ifadesine ulaşırız. Böylece $x^2+2y^2=z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tam sayılarda bir $\{t_1,t_2,L_1\}$ çözümü; $(\kappa, \lambda) = 1$ ve $\kappa\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ olacak şekildeki $\kappa,\lambda \in \mathbf{Z}^+$ için,

$$t_1 = |\kappa^2-2\lambda^2|, t_2 = 2\kappa\lambda$$

olarak bulunur.

(iii) $2\rho_\gamma = 2m(m-n)$ bir kare ve m – n tek olduğundan (m+n ≡ 1(mod2) olduğundan), m nin çift olması gerekir (yine mod 4 e göre düşünülürse). Bu, Teorem 3.1 (i) ile birleştirildiğinde, t_2 tek, $(t_1, t_2) = 1$ ve $2t_1^2 > t_2^2$ olacak şekildeki $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için $m = 2t_1^2$, $n=t_2^2$ bulunur. Burada $2\rho_\gamma$ bir kare olduğundan, bir $L \in \mathbb{Z}^+$ için $(2t_2)^2(2t_1^2 - t_2^2) = L^2$ elde ederiz. Sonuç 3.7 den; $2t_2$,L nin bir böleni olur ki burada $L_1 \in \mathbf{Z}^+$ için $L = (2t_2)L_1$ olur. Böylece son denklemden $2t_1^2 - t_2^2 = L_1^2; 2t_1^2 = t_2^2 + L_1^2$ olur. Bu son ifadede t_2 tek olduğundan L_1 in de tek olması gerekir. Buradan mod 4 e göre t_1 in de tek olması gerektiği kolayca görülür.

Böylece, $\{t_2, L_1, t_1\}$, $(x, y) = 1$ olan $x^2 + y^2 = 2z^2$ Diophantine denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olur. Yukarıdaki denklemde, $(t_1,t_2) = 1$ olması $(t_2,L_1) = 1$ olmasını gerektirir. Sonuç 3.2 ye göre, $(\kappa, \lambda) = 1$, $(\kappa + \lambda) \equiv 1(\text{mod}\,4)$ olacak şekildeki $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}^+$ için,

$$t_1 = \kappa^2 + \lambda^2,\ t_2 = |-\kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2|$$

veya alternatif olarak

$$t_1 = \kappa^2 + \lambda^2,\ t_2 = |-\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2|$$

olur.

(iv) 2ρ bir kare olması gerektiğinden, (3.5) den $2\rho = 2n(m-n)$ nin bir kare olduğunu biliyoruz. Bu son ifadede m – n tek olduğundan, $2n \equiv 0$ (mod 4) olup bu da n nin çift olması gerektiği anlamına gelir. Ayrıca Teorem 3.1 (ii) den, $(t_1,t_2) = 1$, $t_1 + t_2 \equiv 1$ (mod 2) ve $t_1 > t_2$ olacak şekildeki $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için, $m = t_1^2 + t_2^2$, $n = 2t_1t_2$ olur. Böylece

$$2n\,(m - n) = kare \Leftrightarrow 4t_1t_2(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2) = L^2 \quad \Leftrightarrow t_1t_2[2(t_1 - t_2)]^2 = L^2$$

olur. Sonuç 3.7 den dolayı, bu son ifadeden $2(t_1 - t_2)$ pozitif tamsayısı, L nin bir böleni bulunur. O zaman $L_1 \in \mathbf{Z}^+$ için $L = 2(t_1 - t_2)L_1$ olur ki bunu son ifadede yerine yazarsak $t_1t_2[2(t_1 - t_2)]^2 = 4(t_1 - t_2)^2 L_1^2$; $t_1t_2 = L_1^2$ elde edilir. Burada $(t_1, t_2) = 1$ olduğundan, Sonuç 3.4 de $n = 2$ için, $(\kappa, \lambda) = 1$ olacak şekildeki $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}^+$ için

$t_1 = \kappa^2$, $t_2 = \lambda^2$ bulunur. Ayrıca $t_1 + t_2 \equiv 1 (\bmod 2)$ olduğundan $\kappa + \lambda \equiv 1 (\bmod 2)$ olmalıdır.

(*v*) Sadece γ nın kare olması gerektiğini incelememiz yeterlidir. Çünkü Teorem 3.1 (*ii*) den; $(t_1, t_2) = 1$, ve $t_1 + t_2 \equiv 1 \ (\bmod 2)$ olacak şekildeki $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için,

$$\alpha = m^2 + n^2,\ \beta = 2mn,\ \gamma = m^2 - n^2 \text{ ve } m = t_1^2 + t_2^2,\ n = 2t_1t_2,$$

$$2\rho_\beta = 2n(m+n) = 4t_1t_2(t_1 + t_2)^2 \text{ ve } 2n(m-n) = 4t_1t_2(t_1 - t_2)^2 = 2\rho$$

olması gerekir. Burada $(t_1, t_2) = 1$ olduğundan, $(\kappa, \lambda) = 1$ ve $\kappa + \lambda \equiv 1(\bmod 2)$ olacak şekildeki $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}^+$ için $2\rho_\beta = kare \Leftrightarrow 2\rho = kare \Leftrightarrow (t_1 = \kappa^2 \, ve \, t_1 = \lambda^2)$ olduğu açıktır.

(*vi*) Yukarıda (3.5) ile verilen ifadelerden, $2\rho = 2n(m-n)$ ifadesinin bir tam kare olması gerekir. Burada $m - n$ bir tek sayı olduğu için, n nin çift olması gerektiğini teoremin diğer kısımlarının ispatından biliyoruz. Fakat β kare olduğundan $t_1 \equiv 1(\bmod 2)$, $(t_1, t_2) = 1$ ve $t_1^2 > 2t_2^2$ olacak şekildeki $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$ için, $m = t_1^2$, $n = t_2^2$ olması gerekir (Teorem 3.1 (*i*) den). Böylece herhangi bir $L \in \mathbb{Z}^+$ için $2m(m-n) = L^2$ olur. Bu ifadede m ile n nin t ye bağlı yukarıdaki değerlerini kullanırsak $(2t_2)^2(t_1^2 - 2t_2^2) = L^2$ bulunur. Burada $2t_2$, L nin bir böleni olur ki o zaman bir $L_1 \in \mathbf{Z}^+$ için $L = (2t_2)L_1$ olur. Yani $(2t_2)^2.(t_1^2 - 2t_2^2) = (2t_2)^2.L_1^2 \Leftrightarrow L_1^2 + 2t_2^2 = t_1^2$ dir. Buradan, $\{L_1, t_2, t_1\}$, $(x, y) = 1$ olan $x^2 + 2y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin bir pozitif tam sayı çözümü olur ($(t_1, t_2) = 1 \Rightarrow (L_1, t_2) = 1$ olduğuna ilgi çekelim). Burada Sonuç 3.1 den, κ tek ve $(\kappa, \lambda) = 1$ olan olacak şekildeki $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}^+$ için, $t_1 = \kappa^2 + 2\lambda^2$, $t_2 = 2\kappa\lambda$ olmalıdır. Bu da, ispatı tamamlar. □

Aşağıda Teorem 3.3 ün her bir şıkkında verilen formüllere bağlı olarak üretilenler ayrı ayrı tablolarla verilmiştir.

Tablo 3.3 F_1 Ailesi için Örnekler

κ	λ	t_1	t_2	m	n	α	β	γ	$2\rho_\alpha$
1	1	2	1	8	1	65	16	63	144
3	2	12	1	288	1	82945	576	82943	166464
3	4	24	23	1152	529	1606945	1218816	1047263	3873024
5	7	70	73	9800	5329	124438241	104448400	67641759	296528400
9	4	72	49	10368	2401	113260225	49787136	101730623	264777984

Tablo 3.4 F_2 Ailesi için Örnekler

K	λ	t_1	t_2	m	n	α	β	γ	$2\rho_\beta$
1	2	7	4	49	32	3425	3136	1377	5184
5	1	23	10	529	200	319841	211600	239841	291600
3	7	89	42	7921	3528	75189025	55890576	50295457	80784144
7	2	41	28	1681	1568	5284385	5271616	367137	10188864
9	2	73	36	5329	2592	35116705	27625536	21679777	41062464

Tablo 3.5 F_3 Ailesi için Örnekler

K	λ	t_1	t_2	m	n	α	β	γ	$2\rho_\gamma$
1	2	5	7	50	49	4901	4900	99	100
2	1	5	1	50	1	2501	100	2499	4900
2	3	13	17	338	289	197765	195364	30723	33124
2	5	29	41	1682	1681	5654885	5654884	3363	3364
3	4	25	31	1250	961	2486021	2402500	638979	722500

Tablo 3.6 $F_4 = F_5$ Ailesi için Örnekler

K	λ	t_1	t_2	m	n	α	β	γ	2ρ	$2\rho_\beta$
1	2	1	4	17	8	353	272	225	144	400
2	3	4	9	97	72	14593	13968	4225	3600	24336
3	4	9	16	337	288	196513	194112	30625	28224	360000
2	5	4	25	641	200	450881	256400	370881	176400	336400
3	7	9	49	2482	882	6938248	4378248	5382400	2822400	5934096

Tablo 3.7 F_6 Ailesi için Örnekler

K	λ	t_1	t_2	m	n	α	β	γ	2ρ
1	1	3	2	9	8	145	144	17	16
1	2	9	4	81	32	7585	5184	5537	3136
3	2	17	12	289	288	166465	166464	577	576
3	4	41	24	1681	1152	4152865	3873024	1498657	1218816
5	2	33	20	1089	800	1825921	1742400	545921	462400

3.8 $x^2 + y^2 = 2z^2$ Diophantine Denklemi ve Uygulamaları

3.8.1 $(x, y) = 1$ olan $x^2 + y^2 = 2z^2$ Diophantine denkleminin genel çözümünün çıkarılması

Aşağıda iki parametreye bağlı olarak bu denklemin bütün tam sayı çözümlerinin bulunması için bir yöntem veriyoruz. Burada her hangi bir çözümü (a,b, c) olarak alalım. O zaman $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ ve $(a, b) = 1$ için,

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

olmalıdır. Burada $(a, b) = 1$ şartından dolayı, a ile b nin her ikisi de tektir veya diğer durumda onların birisi tek iken diğerinin çift olması(farklı ikili olması) gerektiği açıktır. Fakat $2c^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ veya $2c^2 \equiv 2 \ (mod\ 4)$ tür (sırasıyla, c çift veya tek için). Eğer a ile b farklı ikili olsaydı, o zaman $a^2 + b^2 \equiv 1 \ (mod\ 4)$ olurdu. Bütün bunlardan; sadece ilk durumun olabileceği, yani a ile b nin her ikisinin de tek, dolayısıyla c nin de tek olması gerektiği ortaya çıkar. Sonra, $(a, b) = 1$ koşulundan, $(a, c) = 1 = (b, c)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Burada a, b, c tamsayısından herhangi ikisinin farklı olması gerektiği kolayca görülür ($a = b = c = 1$ durumu hariç). Yukarıdaki denklem, $(\frac{a}{c})^2 + (b/c)^2 = 2$ ifadesine denk olduğundan, bu denklemi sağlayan bir $\left(a/c, b/c\right)$ noktası, iki boyutlu XY düzlemi üzerindeki (0, 0) merkezli ve $\sqrt{2}$ yarıçaplı çember üzerindedir. Yani $X^2 + Y^2 = 2$ olan çemberdir. Bu $\left(a/c, b/c\right)$ noktası, çember üzerinde rasyonel bir noktadır (Yani koordinatlarının her ikisinin de rasyonel olduğu noktadır). Bu a, b, c pozitif tam sayılarından en az birisinin 1 den büyük olduğunu varsayalım. O zaman (1, 1) noktası aynı çember üzerinde bulunur ve $\left(a/c, b/c\right)$ den farklıdır.

XY düzlemi üzerinde $\left(a/c, b/c\right)$ ve (1,1) noktalarından geçen doğruyu göz önüne alalım. Onun eğimi $s = \dfrac{b/c - 1}{a/c - 1}$ olacağından $s \neq 0$ dır. Bu $\left(a/c, b/c\right)$ noktası yukarıdaki çemberin üzerinde ve XY düzleminin birinci bölgesinde olduğundan $s < 0$

bulunur. Burada s eğimi negatif bir rasyonel sayı olduğundan, (K, λ) = 1 ve K, λ∈ $\mathbf{Z}^{+}$ için $s=-\frac{K}{\lambda}$ olarak gösterebiliriz. Böylece $s=-\frac{K}{\lambda}=\frac{b/c-1}{a/c-1}$ olarak bulunur.

Eğer, b/c yi, a/c ve K/λ cinsinden çözer ve $(a/c)^2+(b/c)^2=2$ çember denkleminde yerine koyar ve düzenlersek;

$$\left[\left(\frac{K}{\lambda}\right)^2+1\right](a/c)^2-2\left(\frac{K}{\lambda}\right)\left(\frac{K}{\lambda}-1\right)\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{K}{\lambda}\right)^2-2\left(\frac{K}{\lambda}\right)-1=0$$

bulunur. Son denklemin a/c bilinmeyenine bağlı ikinci dereceden bir denklem olduğu açıktır. Yani a/c = t dersek;

$$\left[\left(\frac{K}{\lambda}\right)^2+1\right]t^2-2\left(\frac{K}{\lambda}\right)\left(\frac{K}{\lambda}+1\right)t+\left(\frac{K}{\lambda}\right)^2+2\left(\frac{K}{\lambda}\right)-1=0$$

ikinci dereceden denklemine ulaşırız (t değişkenine bağlı). Bu ikinci dereceden deklemin köklerinden birisi a/c iken, diğeri de 1 sayısıdır. Fakat $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ikinci dereceden denkleminin iki kökünün toplamı $-\beta/\alpha$ ya eşit olmalıdır. Bu gerçeği, kökleri 1 ve a/c olan yukarıdaki ikinci dereceden denkleme uygular ve denklemi a/c için çözersek $\frac{a}{c}=\frac{K^2+2K\lambda-\lambda^2}{K^2+\lambda^2}$ elde ederiz. Üstüne üstlük, burada s eğim denklemine geri döner ve b/c için çözersek,

$$\frac{b}{c}=\frac{-K^2+2K\lambda+\lambda^2}{K^2+\lambda^2}$$

elde ederiz. Bu noktada sayılar teorisinde aşağıda verilen basit sonucu kullanabiliriz. Eğer, a_1, a_2, a_3, a_4; $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_3}{a_4}$ ve $(a_1, a_2) = 1$ olacak şekilde dört pozitif tam sayı ise, o zaman, $\delta=(a_3,a_4)$ için, $a_3 = \delta a_1$ ve $a_4 = \delta a_2$ dir (Burada a_3 ve a_4 ün en büyük ortak böleni δ olmak üzere). Bu Sonuç 3.3 (*i*) nin yardımıyla kolaylıkla ispatlanabilir.

Yukarıdaki sonuçlara tekrar dönersek,

$$\frac{a}{c}=\frac{K^2+2K\lambda-\lambda^2}{K^2+\lambda^2} \text{ ve } \frac{b}{c}=\frac{-K^2+2K\lambda+\lambda^2}{K^2+\lambda^2}$$

olarak bulmuştuk. Bu ifadelerde; *a, b, c* ve $K^2+\lambda^2$ nin hepsi pozitif olduğundan, $K^2+2K\lambda-\lambda^2$ ve $-K^2+2K\lambda+\lambda^2$ tamsayılarının her ikisinin de pozitif olması gerektiği açıktır. Ayrıca, eğer $\delta = (K^2+2K\lambda-\lambda^2, K^2+\lambda^2)$ ve, (K, λ) = 1 olduğunu hatırlarsak; buradan δ = 1 veya 2 elde edilir. Bu değerler sırasıyla K+ λ ≡ 1 (*mod* 2) veya K ≡ λ ≡ 1 (*mod* 2) durumlarına karşılık gelir.

Eğer δ = 2 ise, o zaman yukarıdaki duruma göre *a* ve *c* tamsayılarının her ikisinin de 2 nin bir katı olması gerekirdi ki bu ise *a* ve *c* nin tek kabul edilmesiyle çelişir.

δ = 1 olması durumunda da yukarıdaki düşüncelerin kullanılmasıyla; (K,λ)=1 ve K+λ ≡ 1 (*mod* 2) olmak üzere $a = K^2+2K\lambda-\lambda^2$, $b = -K^2+2K\lambda+\lambda^2$ ve $c = K^2+\lambda^2$ olarak bulunur.

Tersine olarak; eğer *a, b, c* bu parametrik formülleri sağlarsa, o zaman rutin bir hesaplamayla $a^2+b^2=2c^2$ olarak bulunur. Bununla beraber çözümlerin tekrarlanması durumu ortadan kaldırılabilir. Bu; seçilen her hangi K, λ∈ $\mathbf{Z}^+$ için yukarıdaki formüllerden $a=|K^2+2K\lambda-\lambda^2|, b=|-K^2+2K\lambda+\lambda^2|, c=K^2+\lambda^2$ olarak alınmalıdır ki bu durumda çözümlerin bazıları tekrarlanır.

Sonuçta, (*x*, *y*) = 1 olan $x^2+y^2=2z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tam sayılardaki bütün çözümleri ailesi; (K, λ) = 1 ve K + λ ≡ 1 (mod 2) olacak şekildeki K, λ∈ $\mathbf{Z}^+$ için,

$$x=|K^2+2K\lambda-\lambda^2|, y=|-K^2+2K\lambda+\lambda^2|, z=K^2+\lambda^2$$

biçiminde verilir.

{1, 1, 1} çözümü yukarıdaki formüllerden elde edilemeyen tek çözümdür.

Tablo 3.8 $x^2 + y^2 = 2z^2$ Diophantine Denkleminin Çözümleri

K	**λ**	***x***	***y***	***z***	$x^2+y^2=2z^2$
1	2	1	7	5	50
2	3	7	17	13	338
3	8	7	103	73	10658
2	5	1	41	29	1682
3	4	17	31	25	1250
2	7	17	73	53	5618
5	8	41	119	89	15842
7	10	89	191	149	44402
9	10	161	199	181	65522
4	5	31	49	41	3362
7	8	97	127	113	25538

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

α, β, γ kenarlı bir ABC Heron üçgeninin $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ yarıçapları, kosinüs teoremi ve trigonometrik özdeşlikler kullanılarak kenar uzunluklarına bağlı hesaplandı. Bu Heron üçgeninin Pythagorean üçgeni olduğu özel durumu incelendi. Bu formüller Heron olmayan üçgenlere de genellenebilir. Daha sonra, tamsayı kenar uzunluklu ve tamsayı alanlı bütün ikizkenar üçgenlerin ailesi incelendi. Ayrıca burada ikizkenar bir Heron üçgeninin eşkenar olmaması gerektiği de belirtildi. Çünkü eşkenar bir üçgenin tamsayı kenar uzunlukları $\alpha = \beta = \gamma$ olacağından, bu üçgenin alanı $E = \dfrac{\alpha^2.\sqrt{3}}{4}$ olur ki alan irrasyonel bir sayıdır. Dolayısıyla bir eşkenar üçgen Heron üçgeni olamaz.

Pythagorean üçgenlerinin ailesini üreten $2\rho, 2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$ ifadeleri m ile n tamsayı parametrelerine bağlı olarak hesaplandı. Bir dik kenarı bir tamsayının karesi olan sonsuz sayıda primitif Pythagorean üçgeninin mevcut olduğu belirtildi. $(x, y)= 1$ olan $x^2 + y^2 = 2z^2$ şeklindeki Diophantine denklemlerinin tüm çözüm ailesini tanımlayan parametrik formülleri belirtildi.

5. KAYNAKLAR

[1] Ayres, Frank (1954). Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry (1st edition). New York: Schaum Publishing.

[2] Beiler, Albert H. (1966). Recreations in the Theory of Numbers (Second Edition). New York: Dover Publications.

[3] Bell, Amy (2006). Hansen's Right Triangle Theorem, Its Converse and a Generalization, Forum Geometricorum, 6, 335-342.

[4] Casey, John (1888). A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid (6th edition). Dublin: Watchmaker Publishing.

[5] Dickson, Leonard E. (1971). History of the Theory of Numbers (5th edition). New York: AMS Chelsea Publishing.

[6] Dunham, William (1990). Heron's Formula for Triangular Areas. Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics, 5, 113-132.

[7] Guy, Richard (1994). Unsolved Problems in Number Theory (3rd edition). New York: Springer-Verlag.

[8] Hansen, David W. (2003). On Inscribed and Escribed Circles of Right Triangles, Circumscribed Triangles and the Four-square, Three-square Problem, Mathematics Teacher, 96, 358-364.

[9] Johnson, Roger A. (1960). Advanced Euclidean Geometry, Dover reprint, 96, 243-270.

[10] MacLeod, Allain (2005). Integer Triangles with R/r = N, Math. Teacher GM/0502475, 123, 1-7.

[11] Mordell, Leonard (1969). Diophantine Equations, Academic Pressıon, 30, 259.

[12] Robbins, Neville (1993). Beginning Number Theory. Company Publishers, 54, 308.

[13] Rosen, Kenneth H. (1993). Elementary Number Theory and its Applications (Third Edition). New York: Addison-Wesley Publishing Company.

[14] Sastry, Richard S. (2001). Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective, Forum Geometricorum, 1, 17-24.

[15] Sierpinski, Waclaw (1964). Elementary Theory of Numbers (2nd edition). Warsaw, Poland: Original Education.

[16] Sierpinski, Waclaw (1988). Elementary Theory of Numbers (2nd edition). Amsterdam: Published by Elsevier Publishing and distributed by North Holland.

[17] Şahin R. ve Arkadaşları (1997). Geometri 1 – 2 (1.basım). İstanbul: Sürat Yayınları.

[18] Şenay, Hasan (2007). Sayılar Teorisi Dersleri (1.baskı). Konya: Selçuk Üniversitesi Yayınları.

[19] Yiu, Paul (2001). Introduction to the Geometry of the Triangle (3rd edition). ABD: Florida Atlantic University Lecture Notes.

[20] Zelator, Konstantine (2005). Triangles With Integer Side Lengths and Rational Internal Radius *P* and External Radius *R*, Mathematics and Computer Education, 39,2, 152.

[21] Zelator, Konstantine (2006). The Diophantine $x^2 + ky^2 = z^2$ and The İntegral Triangles With a Cosine Value of $\frac{1}{n}$, Mathematics and Computer Education, 40, 3, 191-197.

[22] Zelator, Konstantine (2008a). Heron Isosceles Triangles with Integral External Radii ρ_α, ρ_β, ρ_γ, Arxiv: Math.0804.4640 (pdf).

[23] Zelator, Konstantine (2008b). Certain Properties of Pythagorean Triangles involving the interior diameter 2ρ, and the exterior diameters $2\rho_\alpha, 2\rho_\beta, 2\rho_\gamma$, Part II: The legs case, Arxiv: Math.0803.3605 (pdf).

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Yasemin YAVUZ EŞEN		İmza:	
Doğum Yeri:	KONYA			
Doğum Tarihi:	01.05.1986			
Medeni Durumu:	Evli			

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	Atatürk İ.Ö.O.	-	Konya	1992-1997
Ortaöğretim	Mareşal Mustafa Kemal İ.Ö.O	-	Konya	1997-2000
Lise	Selçuklu Atatürk Lisesi	-	Konya	2000-2003
Lisans	Selçuk Üniversitesi	İlköğretim Matematik	Konya	2003-2007
Yüksek Lisans	Selçuk Üniversitesi	Matematik Eğitimi	Konya	2007-2010

Becerileri:	Bilgisayar kullanma, İngilizce çeviri yapma
İlgi Alanları:	Matematik, Bilgisayar
İş Deneyimi:	M.E.B de Öğretmenlik
Aldığı Ödüller:	Üniversitede birincilik, Memurlukta teşekkür belgesi
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	Tayfun EŞEN (Eşim)
Tel:	506 3512449
Adres	Karakulak mah. Alacabey sok. Akköprü st. A6 No:1 Daire:19 Karatay/KONYA