T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

TOPOLOJİK UZAYLARDA VE FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER

Berrak BİLİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

KONYA- 2010

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı:	Berrak BİLİK
	Numarası:	085202032001
	Ana Bilim / Bilim Dalı:	ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI/MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin Adı	TOPOLOJİK UZAYLARDA VE FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Öğrencinin imzası

(İmza)

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin

Adı Soyadı	Berrak BİLİK
Numarası	085202032001
Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik A. Eğitimi A.B.D / Matematik Öğretmenliği
Programı	Tezli Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Saziye YÜKSEL
Tezin Adı	Topolojik Uzaylarda ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Genelleştirilmiş Süreklilikler

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan ....Topolojik Uzaylarda ve Fuzzy Topolojik uzaylarda Genelleştirilmiş Süreklilikler.......... başlıklı bu çalışma ..21../..05../2010.. tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd. Doç. Dr. Yusuf Beceren (üye)		
Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN (üye)		
Prof. Dr. Saziye YÜKSEL (Danışman)		

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlikle ve dikkatle takip ederek çalışmamın her aşamasında bilgi ve desteğiyle hep yanımda olan sayın hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca sayın Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e, çalışmam boyunca bana destek olan sevgili arkadaşım Dr. Eser GÜRSEL ÇAYLAK'a teşekkür ederim.

Berrak BİLİK

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin

Adı Soyadı	Berrak BİLİK	
Numarası	085202032001	
Ana Bilim / Bilim Dalı	ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI/MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ	
Programı	Tezli Yüksek Lisans ■	Doktora ☐
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	
Tezin Adı	TOPOLOJİK UZAYLARDA VE FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER	

ÖZET

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; üstten na-sürekli çoğul değerli fonksiyon ve alttan na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni sürekli fonksiyon çeşidi tanımlayıp, temel özelliklerini verdik. Bilinen bazı sürekli çoğul değerli fonksiyon çeşitleriyle karşılaştırmasını yaparak gerekli ters örnekleri verip bir diagram oluşturduk.

İkinci bölümde; üstten pre strong na-sürekli fonksiyon ve alttan pre strong na-sürekli fonksiyon, üstten semi strong na-sürekli fonksiyon ve alttan semi strong na-sürekli fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni sürekli çoğul değerli fonksiyon çeşitleri tanımladık. Üstten pre strong na-sürekli fonksiyon ve alttan pre strong na-sürekli çoğul değerli fonksiyon çeşitinin temel özelliklerini verdik. Bilinen bazı

sürekli çoğul değerli fonksiyon çeşitleriyle karşılaştırmasını yaparak gerekli ters örnekleri verip bir diagram oluşturduk.

Üçüncü bölümde; fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon ve fuzzy β-α-I-sürekli fonksiyon olarak adlandırdığımız iki yeni sürekli fonksiyon çeşiti tanımlayıp, bilinen bazı fuzzy sürekli fonksiyon çeşitleriyle karşılaştırmasını yaparak gerekli ters örnekleri verip bir diagram oluşturduk. Fuzzy α-I-kompakt uzay, fuzzy pre-I-kompakt uzay kavramlarını tanımladık ve fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon ile karşılaştırmasını yaptık.

Dördüncü bölümde; fuzzy R-I-açık küme, fuzzy R-I-kapalı küme, fuzzy $A_{R\text{-}I}$ küme, fuzzy cη-kapalı küme, fuzzy rη-kapalı küme, fuzzy cη-küme, fuzzy rη-küme fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme… olarak adlandırdığımız yeni küme kavramlarını elde ettik. Daha sonra fuzzy $A_{R\text{-}I}$ sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli fonksiyon… olarak adlandırdığımız yeni birçok sürekli fonksiyon kavramlarını ve fuzzy I-submaximal uzay ve fuzzy P-I-disconnected uzay kavramlarını verdik.

Anahtar Kelimeler: üstten (alttan) na-sürekli çoğul değerli fonksiyon, fuzzy $A_{R\text{-}I}$ küme, fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme, **fuzzy α-I-kompakt uzay fuzzy I-submaximal uzay , fuzzy P-I-disconnected uzay.**

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Berrak BİLİK
	Numarası	085202032001
	Ana Bilim / Bilim Dalı	ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI/MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
	Tezin İngilizce Adı	GENERALIZED CONTINUITIES IN TOPOLOGİCAL SPACES AND FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

SUMMARY

This study consists of four sections. In the first section; we defined a new type of continuous multifunction named upper na-continuous multifunction and lower na-continuous multifunction and compared this new type of continous function with some known types of continuity. Then we gave the required opposite examples and formed a diagram.

In the second section; we defined new types of continuous multifunction named upper pre strong na-continuous multifunction, lower pre strong na-continuous multifunction, upper semi strong na-continuous multifunction, lower semi strong na-continuous multifunction and compared these new types of continous function with some known types of continuity. Then we gave the required opposite examples and formed a diagram.

some known types of continuity. Then we gave the required opposite examples and formed a diagram.

In the third section; we defined two new types of continuous function named as fuzzy pre α-I-continuous function and fuzzy β-α-I continuous function and compared these new types of continous function with some known types of continuity. Then we gave the required opposite examples and formed a diagram. We defined fuzzy α-I-compact space, fuzzy pre-I-compact space and compared with fuzzy pre α-I-continuous function.

In the fourth section; we defined new sets named as fuzzy R-I-open set, fuzzy R-I-closed set, fuzzy $A_{R\text{-}I}$ set, fuzzy cη–closed set, fuzzy rη-closed set, fuzzy cη-set, fuzzy rη-set, fuzzy $\alpha_1 N_5$-set …Then we defined a lot of new continuous functions named as fuzzy $A_{R\text{-}I}$ continuous function, fuzzy $\alpha_1 N_5$-continuous function… and fuzzy I-submaximal space and fuzzy P-I-disconnected space.

Key Words: upper (lower) na-cotinuous multifunction, fuzzy $A_{R\text{-}I}$ set, fuzzy $\alpha_1 N_5$-set, **fuzzy α-I-compact space, fuzzy pre-I-compact space, fuzzy I-submaximal space , fuzzy P-I-disconnected space.**

SİMGELER

$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$\emptyset$	: Boş küme
$\neq$	: Eşit değil
$=$	: Eşit
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
X	: Evrensel küme
$P(X)$	: X kümesinin güç kümesi
$A \cap B$	: A kümesi kesişim B kümesi
$A \cup B$	: A kümesi birleşim B kümesi
$A \subset B$	: B kümesi A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	: B kümesi A kümesini kapsamaz
$A - B$	: A fark B kümesi
$X - A$	: A kümesinin tümleyeni
$A \times B$	: A kümesi kartezyen çarpım B kümesi
G_f	: f fonksiyonunun grafiği
$f_{/A}$	: f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanması
τ	: Topolojik yapı
(X,τ)	: Topolojik uzay
τ_A	: $A \subset X$ olmak üzere X kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi
(A,τ_A)	: Alt topolojik uzay
$\vartheta_{(x)}$	: (X,τ) topolojik uzayındaki x noktasının komşuluklar ailesi

$N_{(x)}$	: (X,τ) topolojik uzayındaki x noktasının açık komşuluklar ailesi
(x)	: (X,τ) topolojik uzayındaki x noktasının komşuluklar tabanı
$X = \prod_{i \in I} X_i$	: Çarpım kümesi
$\preccurlyeq$	: Yönlendirme bağıntısı
$\left(x_\lambda\right)$	: Ağ
F	: (X,τ) topolojik uzayındaki süzgeç
B	: (X,τ) topolojik uzayındaki süzgeç tabanı
1_x	: X kümesindeki en büyük sabit fuzzy küme
0_x	: X kümesindeki en küçük sabit fuzzy küme
$\alpha \vee \beta$	: α fuzzy kümesi birleşim β fuzzy kümesi
$\alpha \wedge \beta$	: α fuzzy kümesi kesişim β fuzzy kümesi
$\alpha \leq \beta$	: β fuzzy kümesi kapsar α fuzzy kümesini
$1_x - \alpha$	: α fuzzy kümesinin tümleyeni
τ_x	: X kümesindeki fuzzy topolojik yapı
(X,τ_x)	: Fuzzy topolojik uzay
(X,τ_x,I)	: Fuzzy ideal topolojik uzay
x_λ	: Fuzzy nokta
$x_\lambda \, q \, \alpha$	: x_λ fuzzy noktası ile α fuzzy kümesi çakışığımsıdır
$\alpha \, q \, \beta$	: α fuzzy kümesi ile β fuzzy kümesi çakışığımsıdır
$N_q(x_\lambda)$	: (X,τ_x) fuzzy topolojik uzayındaki x_λ fuzzy noktasının q komşuluklar ailesi

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Topolojik uzaylarda, 1960 yılından günümüze kadar çeşitli küme, fonksiyon ve uzay kavramları verildi. Levine (1963), Njåstad (1965), Mashhour ve ark. (1982) , Velicko (1968), Maheshwari ve Tapi (1979) tarafından sırasıyla, semi-açık küme, α-açık küme, preaçık küme, δ-açık küme, feebly açık küme kavramları tanımlandı. Topolojistler için 1960 yılından günümüze kadar süreklilik çeşitleri de önemli bir çalışma konusu oldu.

Çoğul değerli fonksiyonların süreklilikleri, türevlenebilirlikleri, ölçülebilirlikleri… gibi birçok özellikleri, 1930 yılından günümüze kadar değişik araştırmacılar tarafından verilmiştir.

Fuzzy topolojinin temelleri 1965 yılında Zadeh'in "Fuzzy Sets" adlı makalesiyle ortaya konmuştur. Daha sonra birçok matematikçi bu kuramı kullanmış, geliştirmiş ve günümüze kadar çalışmalar devam etmiş ve hala da devam etmektedir.

Sarkar (1997) fuzzy topolojik uzayda genel topolojidekine benzer şekilde fuzzy ideal kavramını vererek fuzzy lokal fonksiyonu tanımladı ve özelliklerini inceledi. Ayrıca fuzzy lokal fonksiyon kavramından yararlanarak yeni bir kapanış işlemi tanımladı ve yeni bir topoloji oluşturdu. Bu konu ile ilgili günümüze kadar çeşitli çalışmalar yapıldı. Hatır ve Jafari (2007) , Nasef ve Hatır (2009) ,Yuksel ve ark. (2009) tarafından sırasıyla, fuzzy semi-I-açık küme, fuzzy pre-I-açık küme, fuzzy α-I-açık küme ve fuzzy β-I-açık küme kavramlarını ve bu kavramlardan yararlanarak sırasıyla fuzzy semi-I-sürekli fonksiyon, fuzzy pre-I-sürekli fonksiyon, fuzzy α-I-sürekli fonksiyon ve fuzzy β-I-sürekli fonksiyon çeşitlerini tanımladılar.

Bu tezin ikinci bölümünde; Chae ve arkadaşlarının (1986) tanımladığı na-sürekli fonksiyon kavramını çoğul değerli fonksiyonlara genişletip, üstten ve alttan na-sürekli çoğul değerli fonksiyonların temel özelliklerini inceledik.

Tezin üçüncü bölümünde; Nasef ve Noiri (2001) tarafından tanımlanan strong na-presürekli fonksiyon kavramını, Mahmoud ve arkadaşları (1989) tarafından tanımlanan strong na-süreklilik kavramını çoğul değerli fonksiyonlara genişletip üstten ve alttan pre strong na-sürekli çoğul değerli fonksiyonların temel özelliklerini, üstten ve alttan semi strong na-sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramını verdikten sonra bu fonksiyonların bazı çoğul değerli sürekli fonksiyonlarla karşılaştırmalarını yaptık.

Tezin dördüncü bölümünde; fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon ve fuzzy β-α-I-sürekli fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni sürekli fonksiyon kavramlarını verdik. Bilinen bazı fuzzy sürekli fonksiyon çeşitleriyle karşılaştırmalarını yaptık ve fuzzy α-I-kompakt uzay, fuzzy pre-I-kompakt uzay olarak adlandırdığımız yeni uzay kavramlarını verdik.

Tezin beşinci bölümünde; fuzzy R-I-açık küme, fuzzy R-I-kapalı küme, fuzzy A_{R-I} küme (fuzzy cη-kapalı küme, fuzzy rη-kapalı küme, fuzzy cη-küme, fuzzy rη-küme, fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme, fuzzy $S_1 N_5$-küme, fuzzy $P_1 N_5$-küme, fuzzy $\beta_1 N_5$-küme, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-küme, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-küme, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-küme, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-küme) olarak adlandırdığımız yeni küme kavramlarını, fuzzy A_{R-I} sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli fonksiyon (fuzzy $S_1 N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $P_1 N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\beta_1 N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon) kavramlarını elde ettik. Ayrıca, fuzzy $\alpha_1 N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $S_1 N_5$-irresolute fonksiyon (fuzzy $P_1 N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\beta_1 N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon) olarak adlandırdığımız yeni sürekli fonksiyon kavramlarını ve fuzzy I-submaximal uzay ve fuzzy P-I-disconnected uzay kavramlarını da verdik.

Bu tezin içeriğinde geçen (X,τ) topolojik uzayı, (X,τ_X) fuzzy topolojik uzayı, (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı; üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır. (X,τ) topolojik uzayında ki herhangi bir $A\subset X$ alt kümesinin kapanışı ve içi, sırasıyla A^{-} $\left(\overline{A}\right)$ ve A° sembolleri ile; benzer şekilde (X,τ_X) fuzzy topolojik uzayı ve (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayındaki herhangi bir $A\leq X$ fuzzy alt kümesinin fuzzy kapanışı, fuzzy içi, fuzzy lokal fonksiyonu ve fuzzy yıldız kapanışı da sırasıyla A^{-} $\left(\overline{A}\right)$, A°, A^{*} ve A^{-*} $\left(\overline{A}^{*}\right)$ sembolleri ile gösterilecektir.

2. NA-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Bu bölüm üç ayrı kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda; bu bölüm ve üçüncü bölüm için gerekli topolojik uzaydaki temel kavramları verdik.

İkinci kısımda; çoğul değerli fonksiyonun temel kavramlarını verdik.

Üçüncü kısımda; na-sürekli çoğul değerli fonksiyonun özelliklerini inceleyip, bazı süreklilik çeşitleri ile karşılaştırmalarını yaparak gerekli karşıt örnekleri verdik.

2.1. Topolojik Uzaylarla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(i) $A = A^{-\circ}$ ise**;** A kümesine **regüler açık küme** ,

(ii) $A = A^{\circ -}$ ise**;** A kümesine **regüler kapalı küme** (Stone 1937) denir.

Tanım 2.1.2. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin kapsadığı tüm regüler açık kümelerin birleşimine A kümesinin δ-içi (Velicko 1968) denir ve A_δ° ile gösterilir. Eğer $A = A_\delta^\circ$ ise, A kümesine **δ-açık küme** denir. Başka bir deyişle δ-açık küme tüm regüler açık kümelerin birleşiminden oluşur. Bir δ-açık kümenin tümleyenine δ-kapalı küme denir.

Tanım 2.1.3. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi için,

$$\overline{A_\delta} = \left\{ x \in X : A \cap \overset{\circ}{\overline{U}} \neq \varnothing, U \in \tau, x \in U \right\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye, A kümesinin δ-kapanış kümesi (Velicko 1968) denir. Eğer $A = \overline{A_\delta}$ ise, A kümesine **δ-kapalı küme** denir.

Tanım 2.1.4. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi için, $A \subset A^{o-}$ ise A kümesine **semi-açık küme** (Levine 1963) denir. Bir semi-açık kümenin tümleyenine semi-kapalıdır denir. A kümesini kapsayan tüm semi-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin semi-kapanışı (Crossley ve ark. 1971) denir ve $\overline{A_s}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi için, $B \subset A \subset \overline{B_s}$ olacak şekilde bir $B \subset X$ açık kümesi varsa bu takdirde A kümesine **feebly açık küme** (Maheshwari ve Tapi 1979) denir. Bir feebly açık kümenin tümleyenine feebly kapalı küme denir. A kümesini kapsayan tüm feebly kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin feebly kapanışı denir ve $\overline{A_f}$ ile gösterilir. Eğer $A = \overline{A_f}$ ise A kümesine **feebly kapalı küme** denir.

Tanım 2.1.6. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi için, $A \subset A^{-o}$ ise kümesine **preaçık küme** (Mashhour ve ark. 1982) denir. Bir preaçık kümenin tümleyenine prekapalıdır denir. A kümesini kapsayan tüm prekapalı kümelerin kesişimine A kümesinin prekapanışı (Mashhour ve ark. 1983) denir ve $\overline{A_p}$ ile gösterilir. Eğer $A = \overline{A_p}$ ise A kümesine **prekapalı küme** denir.

Tanım 2.1.7. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi için, $A \subset A^{o-o}$ ise kümesine **α-açık küme** (Njåstad 1965) denir.

(X,τ) topolojik uzayındaki bütün α-açık kümelerinin ailesi $\tau^\alpha = \alpha(X,\tau)$, semi-açık kümelerinin ailesi $SO(X,\tau)$, preaçık kümelerinin ailesi $PO(X,\tau)$, δ-açık kümelerin ailesi $\delta O(X,\tau)$, regüler açık kümelerin ailesi $RO(X,\tau)$, feebly açık kümelerin ailesi FO(X,τ), prekapalı kümelerin ailesi PC(X,τ), δ-kapalı kümelerin ailesi δC(X,τ), feebly kapalı kümelerin ailesi FC(X,τ), sembolü ile gösterilecektir.

Uyarı 2.1.1. Bir $x \in X$ noktasını içeren tüm α-açık kümelerin (preaçık kümelerin, semi-açık kümelerin, regüler açık kümelerin, δ-açık kümelerin, feebly açık kümelerin) ailesini α(X,x) (PO(X,x), SO(X,x), RO(X,x), δO(X,x), FO(X,x)) sembolleri ile göstereceğiz.

Aşağıdaki lemmada α-açık küme ve feebly açık küme kavramlarının aynı anlamda kullanıldığı ifade edilmiştir.

Lemma 2.1.1. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin α-açık küme olması için gerek ve yeter şart A kümesinin feebly açık küme olmasıdır (Noiri 1988).

Tanım 2.1.8. Bir Λ kümesi üzerinde "≼" bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlarsa, "≼" bağıntısına Λ kümesini yönlendiriyor ve Λ kümesine de **"≼" bağıntısı ile yönlenmiş küme** denir.

(i) Her $\lambda \in \Lambda$ için, $\lambda \preccurlyeq \lambda$

(ii) Her $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ için, $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3$ ise $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3$

(iii) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için, $\exists \lambda_3 \in \Lambda \ni \lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3$ vardır.

Tanım 2.1.9. Herhangi bir X kümesi ve bir (Λ,≼) yönlenmiş kümesi verilsin. Bu takdirde $f : \Lambda \to X$ fonksiyonu, her $\lambda \in \Lambda$ için, $f(\lambda) = x_\lambda$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonuna ya da $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ alt kümesine, X kümesi içinde bir **ağ** denir, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ ya da (x_λ) biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.10. X kümesi içinde bir (x_λ) ağı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer ağın her elemanı A kümesi içinde ise, bu ağ A kümesi içinde bir ağ olacaktır. Eğer (x_λ) ağının elemanları belli bir indisten sonra A kümesi içindeyse, yani;

$$\exists\, \lambda_0 \in \Lambda \ni \forall\, \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \text{ için } x_\lambda \in A$$

sağlanıyorsa, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağına "**sonunda A kümesi içinde kalıyor**" ya da $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı, sonunda A kümesi içinde bir ağdır denir.

Tanım 2.1.11. (X,τ) topolojik uzayı içinde bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı verilsin. Eğer $x\in X$ noktasının her V komşuluğu, sonunda (x_λ) ağını içeriyorsa, $\boldsymbol{(x_\lambda)}$ **ağı** $\boldsymbol{x\in X}$ **noktasına yakınsıyor** denir ve kısaca

$$x_\lambda \to x \text{ ya da } \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$$

şeklinde gösterilir. Eğer (x_λ) ağı $x\in X$ noktasına yakınsıyorsa, $x\in X$ noktasına $\boldsymbol{(x_\lambda)}$ **ağının limiti** denir.

Teorem 2.1.1. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun bir $x\in X$ noktasında sürekli olması için **gerek ve yeter şart** her (x_λ) ağı için,

$$x_\lambda \to x \text{ ise } f(x_\lambda)\to f(x)$$

olmasıdır.

Şimdi, ağlardan daha genel olan süzgeç kavramını verelim.

Tanım 2.1.12. Bir X kümesi ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa, $\mathcal{F}$ ailesine X kümesi üzerinde bir **süzgeç** denir:

s$_1$] Boş küme $\mathcal{F}$ ailesinin elemanı değildir: $\varnothing\notin\mathcal{F}$

s$_2$] $\mathcal{F}$ ailesine ait herhangi iki kümenin arakesiti, yine $\mathcal{F}$ ailesine aittir: .her A, $B \in\mathcal{F}$ için, $A \cap B \in\mathcal{F}$

s$_3$] $\mathcal{F}$ ailesine ait herhangi bir kümeyi kapsayan her küme, yine $\mathcal{F}$ ailesine aittir: her $A \in\mathcal{F}$ ve $A \subset B$ ise $B\in\mathcal{F}$.

X kümesi üzerindeki bu $\mathcal{F}$ süzgeci, X kümesi üzerinde bir yapıdır. Bu yapıya **süzülmüş yapı** ve X kümesine de $\mathcal{F}$ süzülmüş yapısı ile **süzülmüş küme** denir.

Tanım 2.1.13. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesine, X kümesi üzerinde bir **süzgeç tabanı** denir.

b1] $\mathcal{B} \neq \varnothing$ ve $\varnothing \notin \mathcal{B}$ dir,

b2] $\forall\ B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için, $\exists\ B \in \mathcal{B} \ni B \subset B_1 \cap B_2$ dir.

Tanımdan her süzgecin bir süzgeç tabanı olduğu açıktır, ancak bir süzgeç tabanının süzgeç olması gerekmez.

Teorem 2.1.2. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{B}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise, $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \subset Y | B \in \mathcal{B}\}$ ailesi de Y kümesi üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

Uyarı 2.1.2. $\mathcal{B}$ ailesi bir süzgeç dahi olsa, $f(\mathcal{B})$ görüntüsü bir süzgeç tabanıdır, fakat süzgeç değildir. $f(\mathcal{B})$ ailesinin ürettiği süzgece, $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği **süzgecin görüntüsü** denir.

Teorem 2.1.3. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{B}$ ailesi Y kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. Bu takdirde,

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subset X \mid B \in \mathcal{B}\}$$

ailesinin X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter şart her $B \in \mathcal{B}$ kümesi için, $f^{-1}(B) \neq \varnothing$ olmasıdır.

Uyarı 2.1.3. $\mathcal{B}$ ailesi bir süzgeç dahi olsa, $f^{-1}(\mathcal{B})$ ters görüntüsü, genelde bir süzgeç tabanıdır, fakat süzgeç değildir. $f^{-1}(\mathcal{B})$ ailesinin ürettiği süzgece, $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği süzgecin, f fonksiyonuna göre ters görüntüsü denir. Ayrıca, $f{:}X \to Y$ fonksiyonu örten ve $\mathcal{F}$ ailesi, Y kümesi üzerinde bir süzgeç ise, $f^{-1}(\mathcal{F})$ ailesi de X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

Tanım 2.1.14. (X,τ) topolojik uzayı ve $\mathcal{F}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer $\mathcal{F}$ süzgeci, bir $x \in X$ noktasının her $\vartheta(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince ise, $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor, x noktasına da $\mathcal{F}$ **süzgecinin limiti** ya da **limit noktası**dır denir ve $\mathcal{F} \to x$ ya da lim $\mathcal{F} = x$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.15. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $\mathcal{B}$ süzgeç tabanının doğurduğu $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor ise, $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı, x noktasına yakınsıyor denir ve $\mathcal{B} \to x$ ya da lim $\mathcal{B} = x$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.4. (X,τ) topolojik uzayı ve $x \in X$ noktası verilsin. Bir $\mathcal{B}$ süzgeç tabanının x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\forall\ W \in \mathfrak{S}(x) \text{ için, } \exists\ B \in \mathcal{B} \ni B \subset W$$

olmasıdır.

Tanım 2.1.16. (X,τ) topolojik uzayı ve $\mathcal{F}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer her $A \in \mathcal{F}$ kümesi ve her $V \in \vartheta(x)$ komşuluğu için, $A \cap V \neq \varnothing$ ise, $x \in X$ noktasına $\mathcal{F}$ süzgecinin kapanış noktası denir.

Tanım 2.1.17. (X,τ) topolojik uzayı ve $\mathcal{B}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. Eğer her $B \in \mathcal{B}$ kümesi ve her $V \in \vartheta(x)$ komşuluğu için, $B \cap V \neq \varnothing$ ise, $x \in X$ noktasına $\mathcal{B}$ süzgeç tabanının kapanış noktası denir.

Teorem 2.1.5. $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonunun bir $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart X kümesi üzerindeki her $\mathcal{F}$ süzgeci için, $\mathcal{F} \to x$ olduğunda, (Y,υ) uzayı üzerinde $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ olmasıdır.

2.2. Çoğul Değerli Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. Herhangi iki X ve Y kümeleri verilsin**.** $F: X \to \mathcal{P}(Y) - \varnothing$ fonksiyonuna X kümesinden Y kümesine tanımlı küme değerli ya da çoğul değerli fonksiyon denir ve $F: X \to Y$ biçiminde gösterilir.

Tek değerli bir $f: X \to Y$ fonksiyonu her $x \in X$ noktası için $\{f(x)\}$ değerini alan bir çoğul değerli fonksiyon olarak düşünülebilir. Şimdi çoğul değerli fonksiyonların bilinen özelliklerini verelim.

Tanım 2.2.2. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $B \subset Y$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde $B \subset Y$ alt kümesi için,

$$F^{+}(B) = \{ x \in X : F(x) \subset B \} \text{ ve } F^{-}(B) = \{ x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing \}$$

biçiminde tanımlanan $F^{+}(B)$ kümesine B kümesinin F fonksiyonu altındaki **üst ters görüntüsü,** $F^{-}(B)$ kümesine B kümesinin F fonksiyonu altındaki **alt ters görüntüsü** denir (Berge 1959).

$F: X \to Y$ fonksiyonunun tek değerli fonksiyon olması durumunda $F^{+}(B) = F^{-}(B) = F^{-1}(B)$ olur. Bu durumda $F^{-1}(B)$ ters görüntüsü, $F^{+}(B)$ ve $F^{-}(B)$ kümeleriyle çakışır.

Uyarı 2.2.1. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her $x \in X$ noktası için, $F(x) \neq \varnothing$ dir.

(ii) Her $A \subset X$ kümesi için, $F(A) = \bigcup \{F(x) : x \in A\}$ dır.

Önerme 2.2.1. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $B \subset Y$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

(i) $F^{+}(B) = X - F^{-}(Y - B)$

(ii) $F^{-}(B) = X - F^{+}(Y - B)$

İspat. **(i)** $F^{+}(B)=\{x\in X:F(x)\subset B\}=\{x\in X:F(x)\cap(Y\text{-}B)=\varnothing\}$ olup $F^{+}(B)=X-F^{-}(Y-B)$ elde edilir.

(ii) $F^{-}(B)=\{x\in X:F(x)\cap B\neq\varnothing\}=X-\{x\in X:F(x)\subset(Y-B)\}$ olup $F^{-}(B)=X-F^{+}(Y-B)$ elde edilir.

Tanım 2.2.3. $F:X\to Y$ ve $G:Y\to Z$ çoğul değerli iki fonksiyon verilsin. $GoF:X\to Z$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu her $x\in X$ noktası için, $(GoF)(x)=G(F(x))$ biçiminde tanımlanır.

Önerme 2.2.2. $F:X\to Y$ ve $G:Y\to Z$ çoğul değerli fonksiyonları ve herhangi iki $A,B\subset Y$ alt kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

(i) $(GoF)^{+}(A)=F^{+}(G^{+}(A))$

(ii) $(GoF)^{-}(A)=F^{-}(G^{-}(A))$

İspat. **(i)** $\Rightarrow$ Herhangi bir $x\in(GoF)^{+}(A)$ noktasını alalım. Bu takdirde $(GoF)(x)\subset A$ olur. Buradan $G(F(x))\subset A$ olup $F(x)\subset G^{+}(A)$ elde edilir. Dolayısıyla $x\in F^{+}(G^{+}(A))$ olur.

$\Leftarrow$ Herhangi bir $x\in F^{+}(G^{+}(A))$ noktasını alalım. Buradan $F(x)\subset G^{+}(A)$ olup $G(F(x))\subset A$ olur. Buna göre $(GoF)(x)\subset A$ olduğundan, $x\in(GoF)^{+}(A)$ elde edilir.

(ii) (i) ifadesine benzer şekilde ispatı yapılır.

Tanım 2.2.4. $F_1:X_1\to Y_1$ ve $F_2:X_2\to Y_2$ çoğul değerli iki fonksiyon verilsin. $F_1\times F_2:X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$ çoğul değerli çarpım fonksiyonu, her $x_1\in X_1$ ve her $x_2\in X_2$ noktaları için $(F_1\times F_2)(x_1,x_2)=F_1(x_1)\times F_2(x_2)$ olarak tanımlıdır.

Lemma 2.2.1. $F_1:X_1\to Y_1$ ve $F_2:X_2\to Y_2$ çoğul değerli fonksiyonları ve $A\subset Y_1,B\subset Y_2$ alt kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\left(F_1\times F_2\right)^+\left(A\times B\right)=F_1^+\left(A\right)\times F_2^+\left(B\right)$

(ii) $\left(F_1\times F_2\right)^-\left(A\times B\right)=F_1^-\left(A\right)\times F_2^-\left(B\right)$

İspat. (i) $\Rightarrow$ Herhangi iki $A\subset Y_1$ ve $B\subset Y_2$ alt kümelerini ve herhangi bir $\left(x_1,x_2\right)\in\left(F_1\times F_2\right)^+\left(A\times B\right)$ noktasını alalım. Buna göre $\left(F_1\times F_2\right)\left(x_1,x_2\right)\subset A\times B$ olup Tanım 2.2.4 gereği, $F_1\left(x_1\right)\times F\left(x_2\right)\subset A\times B$ olup $F_1\left(x_1\right)\subset A$ ve $F_2\left(x_2\right)\subset B$ olur. Buradan $x_1\subset F_1^+\left(A\right)$ ve $x_2\subset F_2^+\left(B\right)$ olup $\left(x_1,x_2\right)\in F_1^+\left(A\right)\times F_2^+\left(B\right)$ elde edilir.

$\Leftarrow$ Herhangi iki $A\subset Y_1$ ve $B\subset Y_2$ alt kümelerini ve herhangi bir $\left(x_1,x_2\right)\in F_1^+\left(A\right)\times F_2^+\left(B\right)$ noktasını alalım. Buna göre $x_1\in F_1^+\left(A\right)$ ve $x_2\in F_2^+\left(B\right)$ olup $F_1\left(x_1\right)\subset A$ ve $F_2\left(x_2\right)\subset B$ olur. Buradan $F_1\left(x_1\right)\times F_2\left(x_2\right)\subset A\times B$ olup Tanım 2.2.4 gereği, $\left(F_1\times F_2\right)\left(x_1,x_2\right)\subset A\times B$ elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_1,x_2\right)\in\left(F_1\times F_2\right)^+\left(A\times B\right)$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ Herhangi iki $A\subset Y_1$ ve $B\subset Y_2$ alt kümelerini ve herhangi bir $\left(x_1,x_2\right)\in\left(F_1\times F_2\right)^-\left(A\times B\right)$ noktasını alalım. Buna göre $\left(F_1\times F_2\right)\left(x_1,x_2\right)\subset A\times B$ olup

$$\varnothing\neq\left(F_1\times F_2\right)\left(x_1,x_2\right)\cap\left(A\times B\right)=\left(F_1\left(x_1\right)\times F_2\left(x_2\right)\right)\cap\left(A\times B\right)$$

$$\varnothing\neq\left(F_1\left(x_1\right)\cap A\right)\times\left(F_2\left(x_2\right)\cap B\right)$$

olur. Buradan $F_1\left(x_1\right)\cap A\neq\varnothing$ ve $F_2\left(x_2\right)\cap B\neq\varnothing$ olup $x_1\in F_1^-\left(A\right)$ ve $x_2\in F_2^-\left(B\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_1,x_2\right)\in F_1^-\left(A\right)\times F_2^-\left(B\right)$ olur.

$\Leftarrow$ Herhangi iki $A\subset Y_1$ ve $B\subset Y_2$ alt kümelerini ve herhangi bir $\left(x_1,x_2\right)\in F_1^-\left(A\right)\times F_2^-\left(B\right)$ noktasını alalım. Buradan $x_1\in F_1^-\left(A\right)$ ve $x_2\in F_2^-\left(B\right)$ olup $F_1\left(x_1\right)\cap A\neq\varnothing$ ve $F_2\left(x_2\right)\cap B\neq\varnothing$ olur. Buna göre

$$\varnothing\neq\left(F_1\left(x_1\right)\cap A\right)\times\left(F_2\left(x_2\right)\cap B\right)=\left(F_1\left(x_1\right)\times F_2\left(x_2\right)\right)\cap\left(A\times B\right)$$

olup Tanım 2.2.4. gereği $\varnothing\neq\left(\left(F_1\times F_2\right)\left(x_1,x_2\right)\right)\cap\left(A\times B\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_1,x_2\right)\in\left(F_1\times F_2\right)^-\left(A\times B\right)$ olur.

Tanım 2.2.5. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonunun $G_F : X \to X \times Y$ grafik fonksiyonu her $x \in X$ noktası için $G_F(x) = \{x\} \times F(x)$ biçiminde tanımlıdır. $\{\{x\} \times F(x) : x \in X\} \subset X \times Y$ kümesine F çoğul değerli fonksiyonunun grafiği denir ve $G(F)$ şeklinde gösterilir (Smithson 1978).

Önerme 2.2.3. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi iki $A \subset X$ ve $B \subset Y$ kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $G_F^+(A \times B) = A \cap F^+(B)$

(ii) $G_F^-(A \times B) = A \cap F^-(B)$ (Noiri ve Popa 1993).

2.3. Na-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $x \in F^+(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^+(V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi varsa, bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten na-sürekli fonksiyon**,

2) $x \in F^-(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^-(V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi varsa, bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan na-sürekli fonksiyon**,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan na-sürekli hem de üstten na-sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **na-sürekli fonksiyon** denir.

Teorem 2.3.1. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1) F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli fonksiyondur.

2) Herhangi bir $x \in X$ noktasında $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi vardır.

3) Herhangi bir $x \in X$ noktasında $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde $U \in RO(X, x)$ kümesi vardır.

4) Her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $F^{+}(V) \in \delta O(X)$

5) Her $F \in FC(Y)$ kümesi için, $F^{-}(V) \in \delta C(X)$

6) Her $A \subset X$ kümesi için, $F\left(\overline{A_{\delta}}\right) \subset \overline{\left(F(A)\right)}_{f}$

7) Her $B \subset Y$ kümesi için, $\overline{\left(F^{-}(B)\right)}_{\delta} \subset F^{-}\left(\overline{B_{f}}\right)$

İspat. **1)$\Rightarrow$2)** Tanım 2.3.1. gereği açıktır.

2)$\Rightarrow$3) Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{+}(V)$ olacak şekilde herhangi bir $V \in FO(Y)$ kümesi verilsin. 2) ifadesi gereği, $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \delta O(X, x)$ kümesi vardır. Her $\lambda \in \Lambda$ için, $U_{\lambda} \in RO(X)$ olsun. Bu durumda δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, $U = \cup\{U_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ olur. Buradan $U_{\lambda_0} \subset U$ olacak şekilde bir $U_{\lambda_0} \in RO(X, x)$ kümesi vardır ve $U_{\lambda_0} \subset F^{+}(V)$ olur.

3)$\Rightarrow$4) Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{+}(V)$ olacak şekilde herhangi bir $V \in FO(Y)$ kümesi verilsin. 3) ifadesi gereği, $U_{x} \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U_{x} \in RO(X, x)$ kümesi vardır. Her $x \in X$ noktası için, $F^{+}(V) = \bigcup\{U_{x} : x \in F^{+}(V)\}$ olup δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, $F^{+}(V) \in \delta O(X)$ elde edilir.

4)$\Rightarrow$5). Herhangi bir $F \in FC(Y)$ kümesi verilsin. Buradan $Y - F \in FO(Y)$ olur. 4) ifadesi gereği, $F^{+}(Y - F) \in \delta O(X)$ olur. Buradan $F^{+}(Y - F) = X - F^{-}(F)$ olduğundan, $X - F^{-}(F)$ kümesi X uzayında δ-açık kümedir. Dolayısıyla $F^{-}(F)$ kümesi, X uzayında δ-kapalı kümedir.

5)⇒6) Herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. $\overline{F(A)}_f$ kümesi, $F(A)$ kümesini kapsayan en küçük feebly kapalı kümedir. Buradan $F(A) \subset \overline{F(A)}_f$ olup 5) ifadesi gereği, $A \subset F^-\left(\overline{F(A)}_f\right) \in \delta C(X)$ olur. Buradan,

$$\overline{A}_\delta \subset \overline{\left(F^-\left(\overline{F(A)}_f\right)\right)}_\delta = F^-\left(\overline{(F(A))}_f\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $F\left(\overline{A}_\delta\right) \subset \overline{(F(A))}_f$ olur.

6)⇒7) Herhangi bir $B \subset Y$ kümesi verilsin. Buna göre $F^-(B) \subset X$ olup 6) ifadesi gereği $F\left(\overline{(F^-(B))}_\delta\right) \subset \overline{\left(F\left(F^-(B)\right)\right)}_f \subset \overline{B}_f$ olur. Buradan $\overline{(F^-(B))}_\delta \subset F^-\left(\overline{B}_f\right)$ elde edilir.

7)⇒1) Herhangi bir $V \in FO(Y)$ kümesi verilsin. Buradan $Y - V \in FC(Y)$ olur. Bu takdirde 7) ifadesi gereği $\overline{(F^-(Y-V))}_\delta \subset F^-\left(\overline{(Y-V)}_f\right) = F^-(Y-V)$ olup $F^-(Y-V) \in \delta C(X)$ elde edilir. Buradan $F^-(Y-V) = X - F^+(V)$ olduğundan $F^+(V) \in \delta O(X)$ olur. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 2.3.2. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Buna göre aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1) F çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyondur.

2) Herhangi bir $x \in X$ noktasında $x \in F^-(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^-(V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi vardır.

3) Herhangi bir $x \in X$ noktasında $x \in F^-(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^-(V)$ olacak şekilde $U \in RO(X, x)$ kümesi vardır.

4) Her $V \in FO(Y)$ kümesi için, $F^-(V) \in \delta O(X)$

5) Her $F \in FC(Y)$ kümesi için, $F^+(V) \in \delta C(X)$

6) Her $A \subset X$ kümesi için, $F\left(\overline{A}_\delta\right) \subset \overline{(F(A))}_f$

7) Her $B \subset Y$ kümesi için, $\overline{\left(F^{+}(B)\right)}_{\delta} \subset F^{+}\left(\overline{B_f}\right)$

İspat. Teorem 2.3.1 dekine benzer şekilde yapılır.

Lemma 2.3.1. (X,τ) topolojik uzayında yoğun ya da açık bir A kümesi verilsin. Eğer U kümesi (X,τ) topolojik uzayında regüler açık küme ise bu takdirde $A \cap U$ kümesi, (A,τ_A) alt uzayında regüler açık kümedir (Chae ve Noiri 1986).

Teorem 2.3.3. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon ve $A \subset X$ alt kümesi açık bir küme ise bu takdirde $F/_A : (A,\tau_A) \to Y$ çoğul değerli kısıtlanmış fonksiyonu da üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x \in A \subset X$ noktası ile $x \in (F/_A)^{+}(V)$ $\left(x \in (F/_A)^{-}(V)\right)$ olacak şekilde herhangi bir $V \in FO(Y)$ kümesini alalım. Hipotez gereği, F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon olduğundan, Teorem 2.3.1. (Teorem 2.3.2) gereği, $U \subset F^{+}(V)$ $\left(U \subset F^{-}(V)\right)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X,x)$ kümesi vardır. δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan her $\lambda \in \Lambda$ için $U_\lambda \in RO(X)$ olmak üzere $U = \bigcup\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ olur. Lemma 2.3.1. gereği, A kümesi açık bir küme olduğundan, $U_\lambda \cap A$ kümesi A alt uzayında regüler açık kümedir. Bu durumda δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, $x \in A$ noktasını kapsayan $\bigcup\{U_\lambda \cap A : \lambda \in \Lambda\}$ ailesi A alt uzayında δ-açık kümedir.

$$\bigcup\{U_\lambda \cap A : \lambda \in \Lambda\} = F^{+}(V) \cap A = (F/_A)^{+}(V)$$

$$\bigcup\{U_\lambda \cap A : \lambda \in \Lambda\} = F^{-}(V) \cap A = (F/_A)^{-}(V)$$

olup $(F/_A)^{+}(V) \in \delta O(A)$ $\left((F/_A)^{-}(V) \in \delta O(A)\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $F/_A : (A,\tau_A) \to Y$ çoğul değerli kısıtlanmış fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 2.3.4. $F_1 : X \to Y$ ve $F_2 : Y \to Z$ çoğul değerli fonksiyonları verilsin. Eğer F_1 ve F_2 çoğul değerli fonksiyonları üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde $F_2 o F_1 : X \to Z$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu da üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V \in FO(Z)$ kümesi verilsin. Hipotez gereği F_2 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon olduğundan $F_2^+(V) \in \delta O(Y)$ $\left(F_2^-(V) \in \delta O(Y)\right)$ olur. δ-açık küme, açık küme ve açık küme, feebly açık küme olduğundan $F_2^+(V) \in FO(Y)$ $\left(F_2^-(V) \in FO(Y)\right)$ olur. Hipotez gereği, F_1 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon olduğundan,

$$(F_2 o F_1)^+(V) = F_1^+(V) o F_2^+(V) = F_1^+\left(F_2^+(V)\right) \in \delta O(X)$$

$$\left((F_2 o F_1)^-(V) = F_1^-(V) o F_2^-(V) = F_1^-\left(F_2^-(V)\right) \in \delta O(X)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $F_2 o F_1 : X \to Z$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

Lemma 2.3.2. $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uzay ailesi ve $i = 1, 2, ..., n$ için, X_{λ_i} uzayındaki bir U_{λ_i} alt kümesi verilsin. $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayındaki $U = \prod_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$ kümesinin δ-açık (feebly açık) küme olması için gerek ve yeter şart $i = 1, 2, ..., n$ için $U_{\lambda_i} \in \delta O\left(X_{\lambda_i}\right)$ $\left(U_{\lambda_i} \in FO\left(X_{\lambda_i}\right)\right)$ olmasıdır (Chae ve ark. 1986).

Teorem 2.3.5. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. $G_F : X \to X \times Y$ grafik fonksiyonu üstten na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $F(x) \subset V$ olacak şekilde herhangi bir $V \in FO(Y)$ kümesini alalım. Lemma 2.3.2 gereği, $X \times V$ kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında feebly açık kümedir ve $\{x\} \times F(x) \subset X \times V$ olup $G_F(x) \subset X \times V$ olur. G_F çoğul değerli grafik fonksiyonu üstten na-sürekli fonksiyon olduğundan, Teorem

2.3.1. gereği, $U \subset G_F^+(X \times V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi vardır. $U \subset G_F^+(X \times V) = X \cap F^+(V) = F^+(V)$ olduğundan, $U \subset F^+(V)$ elde edilir. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu, $x \in X$ noktasında üstten na-sürekli fonksiyon olur.

Teorem 2.3.6. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. $G_F: X \to X \times Y$ grafik fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^-(V)$ olacak şekilde herhangi bir $V \in FO(Y)$ kümesini alalım. Lemma 2.3.2 gereği, $X \times V$ kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında feebly açık kümedir.

$$G_F(x) \cap (X \times V) = (\{x\} \times F(x)) \cap (X \times V) = \{x\} \times (F(x) \cap V) \neq \varnothing$$

olur. G_F grafik fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyon olduğundan Teorem 2.3.2. gereği $U \subset G_F^-(X \times V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi vardır. Buradan $U \subset G_F^-(X \times V) = X \cap F^-(V) = F^-(V)$ olduğundan, $U \subset F^-(V)$ elde edilir. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu $x \in X$ noktasında alttan na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 2.3.7. (X, τ) topolojik uzayı ve her $\alpha \in J$ için (X_α, τ_α) topolojik uzayları verilsin. $F: X \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çoğul değerli fonksiyon ve her $\alpha \in J$ için $P_\alpha((x_\alpha)) = \{x_\alpha\}$ olarak tanımlanan $P_\alpha: \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$ fonksiyonu izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde $P_\alpha o F: X \to X_\alpha$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu her $\alpha \in J$ için üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

İspat. $\alpha_0 \in J$ ile $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$ uzayında V_{α_0} feebly açık kümesi verilsin. Bu takdirde

$$\left(P_{\alpha_0}oF\right)^+\left(V_{\alpha_0}\right)=F^+\left(P^+_{\alpha_0}\left(V_{\alpha_0}\right)\right)=F^+\left(V_{\alpha_0}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_0}X_\alpha\right)$$

$$\left(\left(P_{\alpha_0}oF\right)^-\left(V_{\alpha_0}\right)=F^-\left(P^-_{\alpha_0}\left(V_{\alpha_0}\right)\right)=F^-\left(V_{\alpha_0}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_0}X_\alpha\right)\right)$$

olduğundan, Lemma 2.3.2 gereği, $V_{\alpha_0}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_0}X_\alpha$ kümesi feebly açık kümedir. Hipotez gereği, F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon olduğundan $F^+\left(V_{\alpha_0}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_0}X_\alpha\right)\left(F^-\left(V_{\alpha_0}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_0}X_\alpha\right)\right)$ kümesi X uzayında δ-açık kümedir. Buradan $P_\alpha oF$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon olur. Dolayısıyla her $\alpha\in J$ için $P_\alpha oF:X\to X_\alpha$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 2.3.8. Her $\alpha\in J$ için $\left(X_\alpha,\tau_\alpha\right)$ ve $\left(Y_\alpha,\upsilon_\alpha\right)$ iki topolojik uzay olsun. $F:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in J}Y_\alpha$ çoğul değerli fonksiyonu, her $F\left(\left(x_\alpha\right)\right)=\prod_{\alpha\in J}F_\alpha\left(x_\alpha\right)$ çoğul değerli fonksiyonu, her $\left(x_\alpha\right)\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ için, $F\left(\left(x_\alpha\right)\right)=\prod_{\alpha\in J}F_\alpha\left(x_\alpha\right)$ olarak tanımlansın ve $F_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon ise her $\alpha\in J$ için F_α fonksiyonu da üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $\alpha\in J$ için $V_\alpha\in FO\left(Y_\alpha\right)$ kümesi verilsin. Bu takdirde Lemma 2.3.2 gereği, $V=V_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\beta$ kümesi $\prod Y_\alpha$ çarpım uzayında feebly açık kümedir. F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyon olduğundan,

$$F^+\left(V\right)=F^+\left(V_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\beta\right)=F^+_\alpha\left(V_\alpha\right)\times F^+\left(\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\beta\right)=F^+_\alpha\left(V_\alpha\right)\times\prod_{\alpha\neq\beta}X_\beta$$

$$(F^-\left(V\right)=F^-\left(V_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\beta\right)=F^-_\alpha\left(V_\alpha\right)\times F^-\left(\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\beta\right)=F^-_\alpha\left(V_\alpha\right)\times\prod_{\alpha\neq\beta}X_\beta)$$

olup $F^{+}(V)\left(F^{-}(V)\right)$ kümesi $\prod X_{\alpha}$ çarpım uzayında δ-açık kümedir. Buradan Lemma 2.3.2 gereği $F_{\alpha}^{+}(V_{\alpha})$ $\left(F_{\alpha}^{-}(V_{\alpha})\right)$ kümesi δ-açık küme olur. Dolayısıyla F_{α} çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

Tanım 2.3.2. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. $\mathcal{B}=\{B_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. Eğer $V\in RO(X)$ kümesi için, $B_{\lambda}\subset V$ olacak şekilde x noktasını kapsayan $B_{\lambda}\in\mathcal{B}$ kümesi varsa bu takdirde $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı, x noktasına δ-yakınsıyor denir (Joseph 1976).

Teorem 2.3.9. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonunun $x\in X$ noktasında alttan na-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart X kümesi üzerinde x noktasına δ-yakınsayan her $\mathcal{F}$ süzgeç tabanı için $F(\mathcal{F})\to F(x)$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $V\in FO(Y)$ kümesi verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyon olduğundan Teorem 2.3.1. gereği, $F^{-}(V)\in\delta O(X,x)$ olur. δ-açık küme, regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, $W\subset F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $W\in RO(X,x)$ kümesi vardır. Hipotezden X kümesi üzerindeki $\mathcal{F}$ süzgeç tabanı x noktasına δ-yakınsadığından Tanım 2.3.2. gereği, $x\in U\subset W$ olacak şekilde $U\in\mathcal{F}$ kümesi vardır. Buna göre $F(U)\subset F(W)\subset V$ olup $F(\mathcal{F})\to F(x)$ elde edilir.

$\Leftarrow$ Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $V\in FO(Y)$ kümesi verilsin. X kümesi üzerinde x noktasını içeren tüm regüler açık kümelerden oluşan $\aleph_{x}$ süzgeç tabanının doğurduğu $\Im$ süzgeci, x noktasına δ-yakınsasın. Hipotez gereği $F(\mathcal{F})\to F(x)$ olduğundan, $F(U)\subset V$ olacak şekilde $F(\aleph_{x})$ kümesinin $F(U)$ elemanı vardır. $U\in\aleph_{x}$ olduğundan, $U\in RO(X,x)$ olur. Teorem 2.3.2 gereği F çoğul değerli fonksiyonu, $x\in X$ noktasında alttan na-sürekli fonksiyondur

Tanım 2.3.3. (X,τ) topolojik uzayı içinde bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı verilsin. Eğer her $V\in RO(X,x)$ kümesi, sonunda (x_λ) ağını içeriyorsa (x_λ) ağı $x\in X$ noktasına δ-yakınsıyor denir (Chae ve ark. 1986).

Teorem 2.3.10. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer F çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde $x\in X$ noktası ile x noktasına δ-yakınsayan (x_λ) ağı ve $x\in F^-(V)$ olacak şekilde bir $V\in FO(Y)$ kümesi için, (x_λ) ağı sonunda $F^-(V)$ kümesi içinde kalır.

İspat. Herhangi bir $x\in X$ noktası ile x noktasına δ-yakınsayan (x_λ) ağını ve $x\in F^-(V)$ $(x\in F^+(V))$ olacak şekilde bir $V\in FO(Y)$ kümesini alalım. F çoğul değerli fonksiyonu alttan (üstten) na-sürekli fonksiyon olduğundan, $U\subset F^-(V)$ $(U\subset F^+(V))$ olacak şekilde Teorem 2.3.1 (Teorem 2.3.2) gereği $U\in RO(X,x)$ kümesi vardır. (x_λ) ağı, $x\in X$ noktasına δ-yakınsadığından Tanım 2.3.3. gereği (x_λ) ağı, sonunda $U\in RO(X,x)$ kümesi içinde kalır. Dolayısıyla $U\subset F^-(V)$ $(U\subset F^+(V))$ olduğundan (x_λ) ağı sonunda $F^-(V)(F^+(V))$ kümesi içinde kalır.

Teorem 2.3 10’a benzer şekilde üstten na-sürekli fonksiyon içinde gösterilir.

Tanım 2.3.4. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x\in X$ noktası verilsin.

1) $x\in F^+(V)$ koşulunu sağlayan her $V\subset Y$ açık kümesi için $U\subset F^+(V)$ olacak şekilde $x\in U\subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x\in X$ noktasında **üstten sürekli** fonksiyon,

2) $x\in F^-(V)$ koşulunu sağlayan her $V\subset Y$ açık kümesi için $U\subset F^-(V)$ olacak şekilde $x\in U\subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x\in X$ noktasında **alttan sürekli** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan sürekli hem de üstten sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **sürekli fonksiyon** denir. (Noiri ve Popa 2000).

Tanım 2.3.5. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \subset Y$ açık kümesi için, $\overset{o}{\overline{U}} \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten süper sürekli** fonksiyon,

2) $x \in F^{-}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \subset Y$ açık kümesi için, $\overset{o}{\overline{U}} \subset F^{-}(V)$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan süper sürekli** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan süper sürekli hem de üstten süper sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **süper sürekli** fonksiyon denir (Akdağ 2003).

Tanım 2.3.6. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin.

1) Her $V \subset Y$ alt kümesi için, $F^{-}(V) \subset X$ kümesi hem açık hem de kapalı küme ise F çoğul değerli fonksiyonuna **üstten strongly sürekli** fonksiyon,

2) Her $V \subset Y$ alt kümesi için, $F^{-}(V) \subset X$ kümesi hem açık hem de kapalı küme ise F çoğul değerli fonksiyonuna **alttan strongly sürekli** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu hem alttan strongly sürekli hem de üstten strongly sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **strongly sürekli** fonksiyon denir (Akdağ 2007).

Tanım 2.3.1, Tanım 2.3.4, Tanım 2.3.5. ve Tanım 2.3.6. gereği çoğul değerli fonksiyonlar için aşağıdaki diagramı elde ederiz.

Üstten (alttan) strongly süreklilik $\longrightarrow$ **Üstten(alttan) na süreklilik** $\longrightarrow$ Üstten(alttan) süper süreklilik $\longrightarrow$ Üstten(alttan) süreklilik

Diagram 2.3.1.

Uyarı 2.3.1. Diagram 2.3.1'de verdiğimiz geçişlerin karşıtlarının genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek 2.3.1. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau_X=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ topolojisi ile (X,τ) topolojik uzayı, $Y=\{p,q,r,s\}$ kümesi üzerinde $\upsilon=\{Y,\varnothing,\{p,q,r\}\}$ topolojisi ile (Y,υ) topolojik uzayı verilsin. $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a)=\{p,q\}, F(b)=\{q,r,s\}$ ve $F(c)=\{r\}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli bir fonksiyondur ancak üstten strongly sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) Y uzayındaki tüm α-açık kümeler $Y,\varnothing,\{p,q,r\}$ kümeleri olur. Buna göre $\{p,q,r\}$ kümesi için, $F(a)\subset\{p,q,r\}$ ve $F(c)\subset\{p,q,r\}$ olup $F^+(A)=\{a,c\}$ bulunur.

(2) $Y,\varnothing$ kümeleri için, $F^+(Y)=X$ ve $F^+(\varnothing)=\varnothing$ bulunur.

X uzayındaki tüm regüler açık kümeler $X,\varnothing,\{a\}$ ve $\{c\}$ kümeleri olduğundan $X,\varnothing,\{a,c\}\in\delta O(X)$ bulunur.

(1) ve (2) gereği F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli fonksiyondur.

Ancak $\{a,c\}$ kümesi X uzayında açık küme olup kapalı küme olmadığından, F çoğul değerli fonksiyonu üstten strongly sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 2.3.2. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a,b\},\{c\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ile (X,τ) topolojik uzayı, $Y=\{p,q,r,s\}$ kümesi üzerinde $\upsilon=\{Y,\varnothing,\{p\},\{p,q\}\}$ topolojisi ile (Y,υ) topolojik uzayı verilsin. $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a)=F(b)=\{p\},F(c)=\{r\}$ ve

$F(d)=\{q,s\}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonu üstten süper sürekli bir fonksiyondur ancak üstten na-sürekli bir fonksiyon değildir.

X uzayındaki tüm regüler açık kümeler; $X,\varnothing,\overline{\{a,b\}}^{\circ}=\{a,b\}$ ve $\overline{\{c\}}^{\circ}=\{c\}$ kümeleridir. Buna göre,

(1) $\{p\}\in\upsilon$ kümesi için, $F^{+}(\{p\})=\{a,b\}$ olup, $\{a,b\}\in\delta O(X)$ bulunur.

(2) $\{p,q\}\in\upsilon$ kümesi için, $F^{+}(\{p,q\})=\{a,b\}$ olup, $\{a,b\}\in\delta O(X)$ bulunur.

(3) $Y,\varnothing$ kümeleri için, $F^{+}(Y)=X$ ve $F^{+}(\varnothing)=\varnothing$ olup, $X,\varnothing\in\delta O(X)$ bulunur.

(1) ve (2) gereği F çoğul değerli fonksiyonu üstten süper sürekli fonksiyondur.

$A=\{p,q,s\}$ kümesi için, $\left(\overline{A^{\circ}}\right)^{\circ}=\left(\overline{\{p,q\}}\right)^{\circ}=Y$ olup, A kümesi X uzayında α-açık kümedir. Ancak $F^{+}(A)=\{a,b,d\}$ olup $\{a,b,d\}\notin\delta O(X)$ olduğundan F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli bir fonksiyon değildir.

Tanım 2.3.7. Bir topolojik uzayda regüler açık kümeler topoloji tabanını oluşturuyorsa, bu topolojik uzaya **semiregüler uzay** denir (Stone 1937).

(X,τ) topolojik uzay ve $RO(X,\tau)$ regüler açık kümelerin bir ailesi olsun. $RO(X,\tau)$ ailesi X uzayı üzerindeki τ topolojisinden daha kaba olan bir topoloji için tabandır. Bu topoloji τ_s ile gösterilirse bu takdirde (X,τ_s) topolojik uzayına (X,τ) topolojik uzayının **semiregülerizasyonu** denir.

$FO(X)$ feebly açık kümelerin bir ailesi olsun. Bu aile X uzayında bir topolojidir ve $(X,FO(X))$ topolojik uzaydır (Chae ve ark. 1986).

Teorem 2.3.11. $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

a) $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyondur,

b) $F:(X,\tau)\to(Y,FO(Y))$ çoğul değerli fonksiyonu alttan süper sürekli fonksiyondur,

c) $F:(X,\tau_s)\to(Y,FO(Y))$ çoğul değerli fonksiyonu alttan sürekli fonksiyondur,

İspat. a)$\Rightarrow$b) Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^-(V)$ olacak şekilde $(Y,FO(Y))$ topolojik uzayında bir V açık kümesi verilsin. Buna göre $V\in FO(Y,\upsilon)$ olur. F çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyon olduğundan $F^-(V)\in\delta O(X)$ olur. Dolayısıyla (Akdağ 2003 Teorem1) gereği, $F:(X,\tau)\to(Y,FO(Y))$ çoğul değerli fonksiyonu alttan süper sürekli bir fonksiyondur.

b)$\Rightarrow$c) Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^-(V)$ olacak şekilde $(Y,FO(Y))$ topolojik uzayında bir V açık kümesi verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu alttan süper sürekli fonksiyon olduğundan (Akdağ 2003, Teorem 1) gereği $F^-(V)\in\delta O(X,\tau)$ olur. δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan $F^-(V)$ kümesi (X,τ_s) topolojik uzayında açık bir kümedir. Buna göre F çoğul değerli fonksiyonu alttan sürekli bir fonksiyondur.

c)$\Rightarrow$a) Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^-(V)$ olacak şekilde (Y,υ) topolojik uzayında bir V feebly açık kümesi verilsin. Bu takdirde V kümesi $(Y,FO(Y))$ topolojik uzayında açık bir küme olur. F çoğul değerli fonksiyonu alttan sürekli bir fonksiyon olduğundan, $F^-(V)$ kümesi (X,τ_s) topolojik uzayında açık bir kümedir. Buradan $F^-(V)\in\delta O(X,\tau)$ elde edilir. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu alttan na-sürekli fonksiyondur.

3. PRE STRONG NA-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Bu bölüm iki ayrı kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda; pre strong na-sürekli çoğul değerli fonksiyonun bazı özelliklerini inceledik.

İkinci kısımda ise; pre strong na-sürekli çoğul değerli fonksiyonun bazı süreklilik çeşitleri ile karşılaştırmalarını yaparak gerekli karşıt örnekleri verdik.

3.1. Pre Strong Na-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonun Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.1. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in PO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U \in RO(X, x)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten pre strong na-sürekli** fonksiyon,

2) $x \in F^{-}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in PO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $U \in RO(X, x)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan pre strong na-sürekli** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan pre strong na-sürekli hem de üstten pre strong na-sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **pre strong na-sürekl**i fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonunun üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $x \in X$ noktası ve $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in PO(Y)$ kümesi için $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \delta O(X, x)$ kümesinin olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan bir $V \in PO(Y)$ kümesi verilsin. Hipotez gereği, F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan $U_x \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U_x \in RO(X,x)$ kümesi vardır. δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, her $x \in X$ noktası için $U = \bigcup\{U_x : U_x \in RO(X,x)\}$ kümesi X uzayında δ-açık kümedir ve $U \subset F^{+}(V)$ olur.

$\Leftarrow$ Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $V \in PO(Y)$ kümesi verilsin. (2) ifadesi gereği, $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \delta O(X,x)$ kümesi vardır. Bu takdirde δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, her $\lambda \in \Lambda$ için $U_\lambda \in RO(X)$ küme olmak üzere $U = \bigcup\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ olur. Buradan $U_{\lambda_x} \subset U$ olacak şekilde bir $U_{\lambda_x} \in RO(X,x)$ kümesi vardır. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.1.2. $F : X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir:

(1) F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyondur.

(2) Her $V \in PO(Y)$ kümesi için, $F^{+}(V) \in \delta O(X)$

(3) Her $F \in PC(Y)$ kümesi için, $F^{-}(F) \in \delta C(X)$

(4) Her $A \subset X$ kümesi için, $F\left(\overline{A_\delta}\right) \subset \overline{\left(F(A)\right)}_p$

(5) Her $B \subset Y$ kümesi için, $\overline{\left(F^{-}(B)\right)}_\delta \subset F^{-}\left(\overline{B}_p\right)$

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$ Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $V \in PO(Y)$ kümesi verilsin. (1) ifadesi gereği, F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan, $U_x \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U_x \in RO(X,x)$ kümesi vardır. Her $x \in X$ noktası için

$F^{+}(V)=\cup\{U_x : x\in F^{+}(V)\}$ olup δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, $F^{+}(V)\in\delta O(X)$ elde edilir.

$(\mathbf{2})\Rightarrow(\mathbf{3})$ Herhangi bir $F\in PC(Y)$ kümesi verilsin. Bu takdirde $Y-F\in PO(Y)$ olur. (2) ifadesi gereği, $F^{+}(Y-F)\in\delta O(X)$ elde edilir. $F^{+}(Y-F)=X-F^{-}(F)$ olduğundan, $F^{-}(F)$ kümesi, X uzayında δ-kapalı küme olur.

$(\mathbf{3})\Rightarrow(\mathbf{4})$ Herhangi bir $A\subset X$ kümesi verilsin. $\overline{F(A)}_p$ kümesi, Y uzayında prekapalı kümedir. $F(A)\subset\overline{F(A)}_p$ ve (3) ifadesi gereği, $A\subset F^{-}\left(\overline{F(A)}_p\right)\in\delta C(X)$ olup $\overline{A}_\delta\subset\overline{\left(F^{-}\left(\overline{F(A)}_p\right)\right)}_\delta=F^{-}\left(\overline{F(A)}_p\right)$ elde edilir. Buradan $F\left(\overline{A}_\delta\right)\subset\overline{\left(F(A)\right)}_p$ olur.

$(\mathbf{4})\Rightarrow(\mathbf{5})$ Herhangi bir $B\subset Y$ kümesi verilsin. Buradan $F^{-}(B)\subset X$ olup (4) ifadesi gereği $F\left(\overline{\left(F^{-}(B)\right)}_\delta\right)\subset\overline{\left(F\left(F^{-}(B)\right)\right)}_p\subset\overline{B}_p$ olur. Buna göre $\overline{\left(F^{-}(B)\right)}_\delta\subset F^{-}\left(\overline{B}_p\right)$ elde edilir.

$(\mathbf{5})\Rightarrow(\mathbf{1})$ Herhangi bir $V\in PO(Y)$ kümesi verilsin. Buradan $Y-V\in PC(Y)$ olur. Buna göre (5) ifadesi gereği $\overline{\left(F^{-}(Y-V)\right)}_\delta\subset F^{-}\left(\overline{(Y-V)}_p\right)=F^{-}(Y-V)$ olup $F^{-}(Y-V)\in\delta C(X)$ elde edilir. Buradan $F^{-}(Y-V)=X-F^{+}(V)$ olduğundan, $F^{+}(V)\in\delta O(X)$ olur. Bu takdirde δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan, $U\subset F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U\in RO(X)$ kümesi vardır. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.1.3. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonunun alttan pre strong na-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $x\in X$ noktası ve $x\in F^{-}(V)$ koşulunu sağlayan her $V\in PO(Y)$ kümesi için, $U\subset F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $U\in\delta O(X,x)$ kümesinin olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.1. dekine benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 3.1.4. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

1) F çoğul değerli fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyondur,

2) Her $V\in PO(Y)$ kümesi için, $F^{-}(V)\in\delta O(X)$

3) Her $F\in PC(Y)$ kümesi için, $F^{+}(F)\in\delta C(X)$

4) Her $A\subset X$ kümesi için, $F\left(\overline{A_{\delta}}\right)\subset\overline{\left(F(A)\right)}_{p}$

5) Her $B\subset Y$ kümesi için, $\overline{\left(F^{+}(B)\right)}_{\delta}\subset F^{+}\left(\overline{B}_{p}\right)$ sağlanır.

İspat. Teorem 3.1.2. dekine benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.1.5. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon ve $A\subset X$ kümesi açık bir küme ise $F/_{A}:(A,\tau_{A})\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu da üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V\in PO(Y)$ kümesini alalım. F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan ve Teorem 3.1.2 (Teorem 3.1.4) gereği $F^{+}(V)\in\delta O(X)$ $\left(F^{-}(V)\in\delta O(X)\right)$ olur. Buradan δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan ve Lemma 2.3.1. gereği,

$$(F/_{A})^{+}(V)=F^{+}(V)\cap A\quad\left((F/_{A})^{-}(V)=F^{-}(V)\cap A\right)$$

kümesi, (A,τ_{A}) alt uzayında δ-açık kümedir. Dolayısıyla $F/_{A}:(A,\tau_{A})\to Y$ çoğul değerli kısıtlanmış fonksiyonu, üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Lemma 3.1.1. $\{X_{\lambda}:\lambda\in\Lambda\}$ uzay ailesi ve $i=1,2,...,n$ için X_{λ_i} uzayındaki bir U_{λ_i} alt kümesi verilsin. $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_{\lambda}$ çarpım uzayındaki $U=\prod_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}\times\prod_{\lambda\neq\lambda_i}X_{\lambda}$ kümesinin preaçık küme olması için gerek ve yeter şart $i=1,2,...,n$ için $U_{\lambda_i}\in PO\left(X_{\lambda_i}\right)$ olmasıdır (Mashhour ve ark. 1983).

Teorem 3.1.6. $F:X\rightarrow Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. $G_F:X\rightarrow X\times Y$ çoğul değerli grafik fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonu da üstten pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x\in X$ noktası ve $x\in F^{+}(V)$ olacak şekilde $V\in PO(Y)$ kümesi verilsin. Lemma 3.1.1. gereği $X\times V$ kümesi, $X\times Y$ çarpım uzayında preaçık kümedir ve $G_F(x)\subset X\times V$ olur. G_F grafik fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan, Teorem 3.1.2. gereği, $U\subset G_F^{+}(X\times V)$ olacak şekilde $U\in\delta O(X,x)$ kümesi vardır. Buradan $U\subset G_F^{+}(X\times V)=X\cap F^{+}(V)=F^{+}(V)$ olduğundan, $U\subset F^{+}(V)$ elde edilir. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu $x\in X$ noktasında üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olur.

Teorem 3.1.7. $F:X\rightarrow Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. $G_F:X\rightarrow X\times Y$ çoğul değerli grafik fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonu da alttan pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^{-}(V)$ olacak şekilde $V\in PO(Y)$ kümesini alalım. Lemma 3.1.1. gereği, $X\times V$ kümesi, $X\times Y$ çarpım uzayında preaçık kümedir.

$$G_F(x)\cap(X\times V)=(\{x\}\times F(x))\cap(X\times V)=\{x\}\times(F(x)\cap V)\neq\varnothing$$

olur. G_F grafik fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan, Teorem 3.1.4. gereği $U\subset G_F^{-}(X\times V)$ olacak şekilde $U\in\delta O(X,x)$ kümesi vardır. Buradan $U\subset G_F^{-}(X\times V)=X\cap F^{-}(V)=F^{-}(V)$ olduğundan, $U\subset F^{-}(V)$ elde edilir. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu $x\in X$ noktasında alttan pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.1.8. $F_1:X\rightarrow Y$ ve $F_2:Y\rightarrow Z$ çoğul değerli iki fonksiyon verilsin. Eğer F_1 ve F_2 fonksiyonları üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde $F_2oF_1:X\rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu da üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V \in PO(Z)$ kümesi verilsin. Hipotez gereği F_2 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan, Teorem 3.1.2. gereği, $F_2^+(V) \in \delta O(Y)$ $\left(F_2^-(V) \in \delta O(Y)\right)$ olur. δ-açık küme açık küme ve açık küme preaçık küme olup $F_2^+(V) \in PO(Y)$ $\left(F_2^-(V) \in PO(Y)\right)$ olur. Hipotez gereği F_1 fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan,

$$(F_2oF_1)^+(V) = F_1^+\left(F_2^+(V)\right) \in \delta O(X) \quad \left((F_2oF_1)^-(V) = F_1^-\left(F_2^-(V)\right) \in \delta O(X)\right)$$

olur. Dolayısıyla $F_2oF_1 : X \to Z$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.1.9. (X,τ) topolojik uzayı ve her $\alpha \in J$ için, (X_α, τ_α) topolojik uzayları verilsin. $F : X \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ çoğul değerli fonksiyon ve her $\alpha \in J$ için $P_\alpha\left((x_\alpha)\right) = \{x_\alpha\}$ olarak tanımlanan $P_\alpha : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$ fonksiyonu izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer F çoğul değerli fonksiyonu üstten(alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon ise bu takdirde $P_\alpha oF$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu her $\alpha \in J$ için üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $\alpha_0 \in J$ indisi ve $\left(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0}\right)$ uzayında V_{α_0} preaçık kümesi verilsin.

$$\left(P_{\alpha_0}oF\right)^+\left(V_{\alpha_0}\right) = F^+\left(P_{\alpha_0}^+\left(V_{\alpha_0}\right)\right) = F^+\left(V_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha\right)$$

$$\left(\left(P_{\alpha_0}oF\right)^-\left(V_{\alpha_0}\right) = F^-\left(P_{\alpha_0}^-\left(V_{\alpha_0}\right)\right) = F^-\left(V_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha\right)\right)$$

olduğundan, Lemma 3.1.1. gereği, $V_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$ kümesi preaçık kümedir ve F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan Teorem 3.1.2 (Teorem 3.1.4) gereği $F^+\left(V_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha\right)$ $\left(F^-\left(V_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha\right)\right)$

kümesi X uzayında δ-açık kümedir. Böylece $P_\alpha oF$ bileşke fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon olur. Dolayısıyla her $\alpha \in J$ için, $P_\alpha oF$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.1.10. Her $\alpha \in J$ için (X_α, τ_α) topolojik uzayı, $(Y_\alpha, \upsilon_\alpha)$ topolojik uzayı verilsin. $F: \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ çoğul değerli fonksiyonu, her $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in J} x_\alpha$ için $F((x_\alpha)) = \prod_{\alpha \in J} F_\alpha(x_\alpha)$ olarak tanımlansın ve $F_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer F fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon ise her $\alpha \in J$ için, F_α fonksiyonu da üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi $\alpha \in J$ için $V_\alpha \in PO(Y_\alpha)$ kümesi verilsin. Bu takdirde Lemma 3.1.1. gereği $V = V_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta$ kümesi, $\prod Y_\alpha$ çarpım uzayında preaçık kümedir. F fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan,

$$F^+(V) = F^+\left(V_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta\right) = F_\alpha^+(V_\alpha) \times F^+\left(\prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta\right) = F_\alpha^+(V_\alpha) \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta$$

$$(F^-(V) = F^-\left(V_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta\right) = F_\alpha^-(V_\alpha) \times F^-\left(\prod_{\alpha \neq \beta} Y_\beta\right) = F_\alpha^-(V_\alpha) \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta)$$

olup $F^+(V)$ $(F^-(V))$ kümesi, $\prod X_\alpha$ çarpım uzayında δ-açık kümedir. Buradan Lemma 2.3.2. gereği $F_\alpha^+(V_\alpha)$ $(F_\alpha^-(V_\alpha))$ kümesi X_α uzayında δ-açık küme olur. Dolayısıyla F_α fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

3.2. Pre Strong Na-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonun Bazı Süreklilik Çeşitleriyle Karşılaştırılması

Tanım 3.2.1. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $F(x) \subset V$ koşulunu sağlayan her $V \in SO(Y)$ kümesi için, $F(U) \subset V$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten strongly-semi-irresolute** fonksiyon,

2) $F(x) \cap V \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan her $V \in SO(Y)$ kümesi için, her $u \in U$ noktası ile $F(u) \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan strongly-semi-irresolute** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan strongly-semi-irresolute hem de üstten strongly-semi-irresolute fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **strongly-semi-irresolute** fonksiyon denir (Noiri ve Popa 2000).

Tanım 3.2.2. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $F(x) \subset V$ koşulunu sağlayan her $V \in PO(Y)$ kümesi için, $F(U) \subset V$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten strongly M-presürekli** fonksiyon,

2) $F(x) \cap V \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan her $V \in PO(Y)$ kümesi için, her $u \in U$ noktası ile $F(u) \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan strongly M-presürekli** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan strongly M-presürekli hem de üstten strongly M-presürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **strongly M-presürekli** fonksiyon denir (Noiri ve Popa 2000).

Tanım 3.2.3. $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $F(x) \subset V$ koşulunu sağlayan her $V \in \alpha(Y)$ kümesi için, $F(U) \subset V$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten strongly α-irresolute** fonksiyon,

2) $F(x) \cap V \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan her $V \in \alpha(Y)$ kümesi için, her $u \in U$ noktası ile $F(u) \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ açık kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan strongly α-irresolute** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan strongly α-irresolute hem de üstten strongly α-irresolute fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **strongly α-irresolute** fonksiyon denir (Noiri ve Popa 2000).

Tanım 3.2.4. $F : X \rightarrow Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin.

1) $x \in F^{+}(V)$ koşulunu sağlayan her $V \in SO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^{+}(V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **üstten semi strong na-sürekli** fonksiyon,

2) $F(x) \cap V \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan her $V \in SO(Y)$ kümesi için, $U \subset F^{-}(V)$ olacak şekilde $U \in \delta O(X, x)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna $x \in X$ noktasında **alttan semi strong na-sürekli** fonksiyon,

3) F çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında hem alttan strongly na-sürekli hem de üstten strongly na-sürekli fonksiyon ise F çoğul değerli fonksiyonuna **strong na-sürekli** fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımlardan ve Tanım 2.3.1 gereği, çoğul değerli fonksiyonlar için aşağıdaki diagramı elde ederiz.

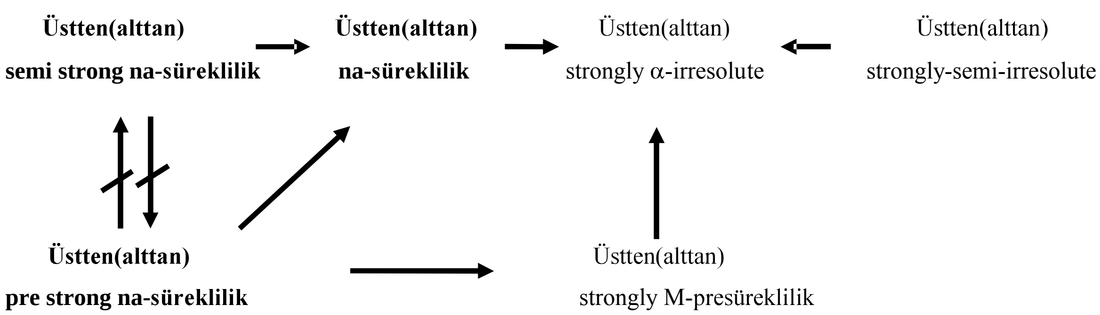

Diagram 3.2.1.

Uyarı 3.2.1. Diagram 3.2.1'de verdiğimiz geçişlerin karşıtlarının genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek 3.2.1. $X=\{p,q,r,s\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{p,q\},\{r\},\{p,q,r\}\}$ topolojisi ile (X,τ) topolojik uzayı verilsin. $F:(X,\tau)\to(X,\tau)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(p)=F(q)=\{p\}$, $F(r)=\{r\}$, $F(s)=\{s\}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli bir fonksiyon ancak üstten pre strong na-sürekli bir fonksiyon değildir ve üstten semi strong na-sürekli bir fonksiyon değildir.

X uzayındaki tüm α-açık kümeler ve regüler açık kümeler, $X,\varnothing,\{r\},\{p,q\},\{p,q,r\}$ kümeleridir. Buna göre,

(1) $F^{+}(\{r\})=\{r\}\in\delta O(X)$, $F^{+}(\{p,q\})=\{p,q\}\in\delta O(X)$, $F^{+}(\{p,q,r\})=\{p,q,r\}\in\delta O(X)$ bulunur.

(2) $X,\varnothing$ kümeleri için, $F^{+}(X)=X$ ve $F^{+}(\varnothing)=\varnothing$ olup, $X,\varnothing\in\delta O(X)$ bulunur.

(1) ve (2) gereği F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli bir fonksiyondur.

Ancak $\overline{\overset{\circ}{\{q,r,s\}}}=X$ olup $\{q,r,s\}\in PO(X)$ ve $\overline{\{r,s\}}^{\circ}=\{r,s\}$ olup $\{r,s\}\in SO(X)$ için, $F^{+}(\{q,r,s\})=\{r,s\}\notin\delta O(X)$ ve $F^{+}(\{r,s\})=\{r,s\}\notin\delta O(X)$ olduğundan F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli bir fonksiyon değildir ve üstten semi strong na-sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 3.2.2. $X=\{-1,0,1\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{-1\},\{-1,0\},\{-1,1\}\}$ topolojisi ile (X,τ) topolojik uzayı, X kümesi üzerinde $\upsilon=\{X,\varnothing,\{-1\},\{-1,0\}\}$ topolojisi ile (X,υ) topolojik uzayı verilsin. $F:(X,\tau)\to(X,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu her $x\in X$ noktası için, $F(x)=\{x\}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde;

(1) F çoğul değerli fonksiyonu üstten strongly-semi-irresolute bir fonksiyondur ancak üstten semi strong na-sürekli bir fonksiyon değildir.

(2) F çoğul değerli fonksiyonu üstten strongly α-irresolute bir fonksiyondur ancak üstten na-sürekli bir fonksiyon değildir.

(3) F çoğul değerli fonksiyonu üstten strongly M-presürekli bir fonksiyondur ancak üstten pre strong na-sürekli bir fonksiyon değildir.

(X,υ) topolojik uzayındaki tüm α-açık kümeler, preaçık kümeler ve semi-açık kümeler: $X,\varnothing,\{-1\},\{-1,0\},\{-1,1\}$ kümeleridir. Buna göre,

(1) $F^{+}(\{-1\})=\{-1\}\in\tau$, $F^{+}(\{-1,1\})=\{-1,1\}\in\tau$, $F^{+}(\{-1,0\})=\{-1,0\}\in\tau$ bulunur.

(2) $X,\varnothing$ kümeleri için, $F^{+}(X)=X$ ve $F^{+}(\varnothing)=\varnothing$ olup, $X,\varnothing\in\tau$ bulunur.

(1) ve (2) gereği F çoğul değerli fonksiyonu üstten strongly M-presürekli fonksiyon, üstten strongly α-irresolute bir fonksiyon ve üstten strongly-semi-irresolute bir fonksiyondur.

Ancak $\{-1,0\}\notin\delta O(X,\tau)$ olduğundan F çoğul değerli fonksiyonu üstten na-sürekli bir fonksiyon değildir, üstten pre strong na-sürekli bir fonksiyon değildir ve üstten semi strong na-sürekli bir fonksiyon değildir.

(X,τ) topolojik uzayı için τ_p topolojisi, X uzayındaki tüm preaçık kümeleri kapsayan en küçük topoloji olsun. Bu takdirde $\tau\subset PO(X)\subset\tau_p$ olur. Buna göre aşağıdaki iki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1. $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

a) $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyondur,

b) $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon_p)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan süper sürekli fonksiyondur,

c) $F:(X,\tau_s)\to(Y,\upsilon_p)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan sürekli fonksiyondur,

d) $F:(X,\tau_s)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan strongly M-presürekli fonksiyondur.

İspat. **a)$\Rightarrow$b)** Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{-}(V)$ olacak şekilde (Y, υ_p) topolojik uzayında bir V açık kümesi verilsin. Buna göre $V \in PO(Y, \upsilon)$ olur. F çoğul değerli fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan $F^{-}(V) \in \delta O(X)$ olur. Dolayısıyla (Akdağ,2003 Teorem1 gereği) F çoğul değerli fonksiyonu alttan süper sürekli bir fonksiyondur.

b)$\Rightarrow$c) Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{-}(V)$ olacak şekilde (Y, υ_p) topolojik uzayında bir V açık kümesi verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu alttan süper sürekli fonksiyon olduğundan (Akdağ 2003 Teorem1 gereği) $F^{-}(V) \in \delta O(X, \tau)$ olur. δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan $F^{-}(V)$ kümesi, (X, τ_s) topolojik uzayında açık bir kümedir. Buna göre F çoğul değerli fonksiyonu alttan sürekli bir fonksiyondur.

c)$\Rightarrow$d) Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{-}(V)$ olacak şekilde (Y, υ) topolojik uzayında bir V açık kümesi verilsin. Bu takdirde $V \in PO(Y, \upsilon_p)$ olur. F çoğul değerli fonksiyonu alttan sürekli bir fonksiyon olduğundan, $F^{-}(V)$ kümesi (X, τ_s) topolojik uzayında açık bir küme olur. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu alttan strongly M-presürekli fonksiyondur.

d)$\Rightarrow$a) Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in F^{-}(V)$ olacak şekilde $V \in PO(Y, \upsilon)$ kümesi verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu alttan strongly M-presürekli fonksiyon olduğundan, $F^{-}(V)$ kümesi, (X, τ_s) topolojik uzayında açık bir kümedir. Buna göre $F^{-}(V)$ kümesi, (X, τ) topolojik uzayında regüler açık bir küme olur. Buradan F çoğul değerli fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Tanım 3.2.5. Bir (X, τ) topolojik uzayı verildiğinde, eğer X uzayının her yoğun alt kümesi X uzayında açık küme ise (X, τ) topolojik uzayına **submaximal uzay** denir (Bourbaki 1966).

Teorem 3.2.2. $F:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. (X,τ) topolojik uzayı submaximal uzay olsun. F çoğul değerli fonksiyonunun alttan pre strong na-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart F çoğul değerli fonksiyonunun alttan strongly M-presürekli fonksiyon olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ Teorem 3.2.1. gereği açıktır**.**

$\Leftarrow$ (X,τ) topolojik uzayı submaximal uzay olduğundan $PO(X,\tau)=\tau$ (Rose ve Mahmoud 1994) olur. Hipotez gereği F çoğul değerli fonksiyonu alttan strongly M-presürekli fonksiyon olduğundan herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F^{-}(V)$ olacak şekilde $V\in PO(Y,\upsilon)$ kümesi için, $U\subset F^{-}(V)$ olacak şekilde $x\in U\subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $U\in RO(X,x)$ olur. Dolayısıyla F çoğul değerli fonksiyonu alttan pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Teorem 3.2.3. $F_1:X\to Y$ ve $F_2:Y\to Z$ çoğul değerli iki fonksiyon verilsin. Eğer F_1 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) süper sürekli fonksiyon ve F_2 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) strongly M-presürekli fonksiyon ise bu takdirde $F_2oF_1:X\to Z$ çoğul değerli bileşke fonksiyonuda üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $x\in F_2^{+}(V)$ $\left(x\in F_2^{-}(V)\right)$ olacak şekilde $V\in PO(Z)$ kümesi verilsin. Hipotez gereği, F_2 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) strongly M-presürekli fonksiyon olduğundan, Tanım 3.2.2. gereği, $U\subset F_2^{+}(V)$ $\left(U\subset F_2^{-}(V)\right)$ olacak şekilde $x\in U\subset X$ açık kümesi vardır. F_1 çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) süper sürekli fonksiyon olduğundan ve (Akdağ 2003 Teorem1) gereği, $F_1^{+}(U)\in\delta O(X)$ $\left(F_1^{-}(U)\in\delta O(X)\right)$ olur. Buna göre $F_1^{+}(U)\subset F_1^{+}\left(F_2^{+}(V)\right)$ $\left(F_1^{-}(U)\subset F_1^{-}\left(F_2^{-}(V)\right)\right)$ elde edilir. δ-açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olduğundan $W\subset F_1^{+}(U)\left(W\subset F_1^{-}(U)\right)$ olacak şekilde bir $W\in RO(X,x)$ kümesi vardır. Buradan $W\subset F_1^{+}\left(F_2^{+}(V)\right)=\left(F_2oF_1\right)^{+}(V)$

$\left(W \subset F_1^{-}\left(F_2^{-}(V)\right)=\left(F_2 o F_1\right)^{-}(V)\right)$ olur. Dolayısıyla $F_2 o F_1 : X \rightarrow Z$ çoğul değerli bileşke fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

Tanım 3.2.6. Bir (X,τ) topolojik uzayı verildiğinde, eğer X uzayının her açık alt kümesinin kapanışı X uzayında açık küme ise (X,τ) topolojik uzayına **extremally disconnected uzay** denir (Njåstad 1965).

Aşağıdaki teorem; (X,τ) topolojik uzayının submaximal ve extremally disconnected uzay olması halinde $\tau = \tau^{\alpha} = SO(X,\tau) = PO(X,\tau)$ (Janković 1983, Nasef ve Noiri 1998) olması gerçeğinden elde edilir.

Teorem 3.2.4. $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer (Y,υ) topolojik uzayı submaximal ve extremally disconnected uzay ise bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1) $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) pre strong na-sürekli fonksiyondur.

2) $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) semi strong na-sürekli fonksiyondur.

3) $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) na-sürekli fonksiyondur.

4) $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) süper sürekli fonksiyondur.

Tanım 3.2.7. (X,τ) topolojik uzayı verilsin.

1) Eğer X uzayının her preaçık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse bu takdirde X uzayına **strongly kompakt uzay** (Mashhour ve ark 1984),

2) Eğer X uzayının her regüler açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse bu takdirde X uzayına **nearly kompakt uzay** (Singal ve Mathur 1969) denir.

Teorem 3.2.5. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli ve örten fonksiyon, her $x\in X$ noktası için $F(x)$ strongly kompakt uzay olmak üzere X uzayı nearly kompakt uzay ise bu takdirde Y uzayı strongly kompakt uzaydır.

İspat. $\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ ailesi Y uzayının herhangi bir preaçık örtüsü olsun. Hipotez gereği, $x\in X$ noktası için $F(x)$ strongly kompakt küme olduğundan $F(x)\subset\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ olacak şekilde Λ kümesinin $\Lambda(x)$ sonlu alt kümesi vardır. $V(x)=\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda(x)\}$ olsun. F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan, $F(U(x))\subset V(x)$ olacak şekilde $U(x)\in RO(X,x)$ kümesi vardır. Bu takdirde $\{U(x):x\in X\}$ ailesi X uzayının regüler açık bir örtüsüdür. X uzayı nearly kompakt uzay olduğundan $X=\bigcup\{U(x_i):i=1,2,...,n\}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1,x_2,...,x_n\in X$ vardır. F çoğul değerli fonksiyonu örten fonksiyon olduğundan $Y=F(X)$ olur. Buradan,

$$Y=F(X)=F\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{U(x_i)\}\right)=\bigcup_{i=1}^{n}F(U(x_i))\subset\bigcup_{i=1}^{n}V(x_i)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\lambda\in\Lambda(x_i)}V_\lambda$$

elde edilir. Dolayısıyla Y uzayı strongly kompakt uzaydır.

Tanım 3.2.8. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayı, boş olmayan herhangi iki ayrık preaçık kümenin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa bu takdirde X uzayına **prebağlantılı** uzay denir (Popa 1987).

Teorem 3.2.6. $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli ve örten fonksiyon, her $x\in X$ noktası için $F(x)$ bağlantılı olmak üzere X uzayı bağlantılı uzay ise bu takdirde Y uzayı prebağlantılı uzaydır.

İspat. Varsayalım ki Y uzayı prebağlantılı uzay olmasın. Bu takdirde Tanım 3.2.8. gereği, $U\cap V=\varnothing$ ve $U\cup V=Y$ olacak şekilde boş olmayan $U,V\subset Y$ preaçık kümeleri vardır. Hipotez gereği, $x\in X$ noktası için $F(x)$ kümesi bağlantılı küme olduğundan $F(x) \subset U$ ya da $F(x) \subset V$ olur. $x \in F^{+}(U \cup V)$ ise $F(x) \subset U \cup V$ olup $x \in F^{+}(U) \cup F^{+}(V)$ elde edilir. F çoğul değerli fonksiyonu örten fonksiyon olduğundan, $F(x_1) \subset U$ ve $F(x_2) \subset V$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır ve $x_1 \in F^{+}(U)$ ve $x_2 \in F^{+}(V)$ olur. Hipotezden F çoğul değerli fonksiyonu üstten pre strong na-sürekli fonksiyon olduğundan $F^{+}(U), F^{+}(V) \subset X$ kümeleri Teorem 3.1.2. gereği δ-açık kümelerdir. $X = F^{+}(U) \cup F^{+}(V)$, $F^{+}(U) \cap F^{+}(V) = \varnothing, F^{+}(U) \neq \varnothing$ ve $F^{+}(V) \neq \varnothing$ olup X uzayı bağlantılı uzay değildir.

4. FUZZY PRE α-I-SÜREKLİ VE FUZZY β-α-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölüm dört ayrı kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda bu bölüm için gerekli fuzzy topolojinin temel kavramlarını verdik.

İkinci kısımda; fuzzy ideal topolojik uzay ile ilgili temel kavramlarını verdik.

Üçüncü kısımda; fuzzy kümenin fuzzy α-I-kapanışını ve fuzzy α-I-içini tanımladık. Daha sonra; bunların özelliklerini verip bazı kriterler oluşturduk.

Dördüncü kısımda ise; fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon ve fuzzy β-α-I-sürekli fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni sürekli fonksiyon kavramlarını ve fuzzy α-I-kompakt uzay, fuzzy pre-I-kompakt uzay olarak adlandırdığımız yeni uzay kavramlarını verdik. Daha sonra yeni sürekli fonksiyon kavramlarının diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırmalarını yaptık. Ayrıca fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyonunun karakterizasyonunu ve sağladığı özellikleri elde edip, fuzzy α-I-kompakt uzay ve fuzzy pre-I-kompakt uzay ile ilgili bir karşılaştırmasını yaptık.

4.1. Fuzzy Topolojik Uzaylarla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 4.1.1. X boştan farklı bir küme ve $I=[0,1]$ birim kapalı aralığı olsun. Tüm $\alpha : X \to I$ fonksiyonlarının kümesi I^X (ya da $\wp(X)$ şeklinde gösterilir (Sarkar 1997)) olarak gösterilir. I^X kümesinin her elemanına da, **X kümesinin bir fuzzy kümesi** denir (Zadeh 1965).

Bir α fuzzy kümesinin $x \in X$ noktasındaki değeri $\alpha(x)$ ile gösterilir. Her $x \in X$ için, $1 \in [0,1]$ değerini alan sabit fuzzy kümesi 1_X; her $x \in X$ için, $0 \in [0,1]$ değerini alan sabit fuzzy kümesi de 0_X ile gösterilir. Kümeler için kullanılan kapsama, birleşim ve kesişim sembolleri yerine fuzzy kümeler için sırasıyla $\leq$, $\vee$, $\wedge$ sembolleri kullanılır. Bir α fuzzy kümesinin tümleyeni de $(1_X - \alpha)$ ile gösterilir.

Bu bölüm boyunca X kümesinin herhangi bir α fuzzy kümesini $\alpha \leq X$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.2. Herhangi $\alpha, \beta \leq X$ fuzzy kümeleri için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\alpha(x) \leq \beta(x)$

(ii) $\alpha = \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\alpha(x) = \beta(x)$

(iii) $\mu = \alpha \vee \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\mu(x) = \mathrm{Max}\{\alpha(x), \beta(x)\}$

(iv) $\gamma = \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\gamma(x) = \mathrm{Min}\{\alpha(x), \beta(x)\}$

(v) $\alpha' = 1_X - \alpha \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\alpha'(x) = 1_X(x) - \alpha(x)$ (Zadeh 1965).

Tanım 4.1.3. X kümesinin fuzzy kümelerinin bir ailesi $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $\mu = \underset{j \in J}{\vee} \alpha_j \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\mu(x) = \sup\{\alpha_j \mid j \in J\}$

(ii) $\beta = \underset{j \in J}{\wedge} \alpha_j \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için, $\beta(x) = \inf\{\alpha_j \mid j \in J\}$ (Chang 1968).

Tanım 4.1.4. $x \in X$ ve $\lambda \in (0,1]$ olsun.

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, & y = x \quad \text{ise} \\ 0, & y \neq x \quad \text{ise} \end{cases}$$

yukardaki şekilde tanımlanan X kümesindeki x_λ fuzzy kümesine X kümesinde bir **fuzzy nokta** denir. x_λ fuzzy noktasının sıfırdan farklı değer aldığı $x \in X$ noktasına **x_λ fuzzy noktasının dayanağı** ve $\lambda \in (0,1]$ sayısına da **x_λ fuzzy noktasının değeri** denir (Pao-Ming ve Ying-Ming 1980).

Tanım 4.1.5. $\alpha, \beta \leq X$ olsun. $\alpha(x) + \beta(x) > 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa **α ile β fuzzy kümeleri çakışığımsıdır** denir ve $\alpha \; q \; \beta$ şeklinde gösterilir (Pao-Ming ve Ying-Ming 1980).

Tanım 4.1.6. $\alpha \leq X$ ve x_λ fuzzy nokta olsun. $\lambda + \alpha(x) > 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa **α fuzzy kümesi ile x_λ fuzzy noktası çakışığımsıdır** denir ve $x_\lambda \; q \; \alpha$ şeklinde gösterilir (Pao-Ming ve Ying-Ming 1980).

Tanım 4.1.7. X kümesinin fuzzy kümelerinin bir ailesi τ_X olsun. Eğer τ_X ailesi,

(i) $0_X, 1_X \in \tau_X$

(ii) $\alpha, \beta \in \tau_X$ ise, $\alpha \wedge \beta \in \tau_X$

(iii) Her $j \in J$ için, $\alpha_j \in \tau_X$ ise, $\underset{j \in J}{\vee} \alpha_j \in \tau_X$

yukardaki şartları sağlıyorsa; τ_X ailesine, X kümesinde bir **fuzzy topoloji**, (X, τ_X) ikilisine **fuzzy topolojik uzay**, τ_X ailesinin her elemanına **fuzzy açık küme** ve fuzzy açık kümenin tümleyenine de **fuzzy kapalı küme** denir (Chang 1968).

Tanım 4.1.8. (X, τ_X) fuzzy topolojik uzay, $\alpha \leq X$ ve x_λ fuzzy nokta olsun. Eğer $x_\lambda \; q \; \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\beta \in \tau_X$ fuzzy açık kümesi varsa; α fuzzy kümesine **x_λ fuzzy noktasının bir q-komşuluğu** denir ve x_λ fuzzy noktasının tüm q-komşuluklarının ailesi $N_q(x_\lambda)$ ile gösterilir (Pao-Ming ve Ying-Ming 1980).

Tanım 4.1.9. (X, τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun.

$$\alpha^o = \vee \{\beta \mid \beta \leq \alpha, \beta \in \tau_X\}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanan α^o fuzzy kümesine, **α fuzzy kümesinin içi** denir (Chang 1968).

Teorem 4.1.1. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun. α fuzzy kümesinin açık küme olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha^{o}$ olmasıdır (Chang 1968).

Teorem 4.1.2. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha,\beta \leq X$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\alpha^{o} \leq \alpha$

(2) $\alpha^{oo} = \alpha^{o}$

(3) $(\alpha \wedge \beta)^{o} = \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$

(4) $\underset{j\in J}{\vee} \alpha_j^{o} \leq \left(\underset{j\in J}{\vee} \alpha_j\right)^{o}$

(5) $\alpha \leq \beta$ ise $\alpha^{o} \leq \beta^{o}$

(6) $1_X^{o} = 1_X$ ve $0_X^{o} = 0_X$ (Azad 1981).

Tanım 4.1.10. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun.

$$\overline{\alpha} = \{\beta \mid \alpha \leq \beta, (1_X - \beta) \in \tau_X\}$$

yukarıda ki şekilde tanımlanan $\overline{\alpha}$ fuzzy kümesine, **α fuzzy kümesinin kapanışı** denir (Chang 1968).

Teorem 4.1.3. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun. α fuzzy kümesinin fuzzy kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \overline{\alpha}$ olmasıdır (Chang 1968).

Teorem 4.1.4. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha,\beta \leq X$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\alpha \leq \overline{\alpha}$

(2) $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}$

(3) $\overline{\alpha \vee \beta} = \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$

(4) $\overline{\underset{j\in J}{\wedge} \alpha_j} \leq \underset{j\in J}{\wedge} \overline{\alpha_j}$

(5) $\alpha \le \beta$ ise $\overline{\alpha} \le \overline{\beta}$

(6) $\overline{1_X} = 1_X$ ve $\overline{0_X} = 0_X$ (Azad 1981).

Teorem 4.1.5. $X \times Y$ fuzzy çarpım uzayı olacak şekilde (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) fuzzy topolojik uzaylar olsun. Herhangi $A \le X$, $B \le Y$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

(2) $(A \times B)^{o} = A^{o} \times B^{o}$ (Azad 1981).

4.2. Fuzzy İdeal Topolojik Uzaylar

Öncelikle, fuzzy ideal topolojik uzay için gerekli bazı kavramları verelim:

Tanım 4.2.1. Boş olmayan bir X kümesi verilsin. I^X kümesi, X kümesindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset I^X$ ailesi,

(i) $A \in I$ ve $B \le A$ ise, $B \in I$ (kalıtımsallık özelliği)

(ii) $A, B \in I$ ise, $(A \vee B) \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği)

koşullarını sağlıyorsa; I ailesine, **X kümesi üzerinde bir fuzzy idealdir** denir (Sarkar 1997).

$I = \{0_X\}$ ve $I = \wp(X)$ aileleri X kümesindeki en basit fuzzy ideallerdir (Sarkar 1997).

Tanım 4.2.2. (X, τ_X) fuzzy topolojik uzayı ve bir $A \le X$ fuzzy kümesi verilsin. Ayrıca; I ailesi, X kümesi üzerinde bir fuzzy ideal olsun. Bu taktirde, $A^*(I, \tau_X)$ kümesi; $\mu \in N_q(x_\lambda)$ ve $E \in I$ iken bir $y \in X$ noktası vardır öyleki $\mu(y) + A(y) - 1 > E(y)$ olacak şekildeki x_λ fuzzy noktalarının birleşimidir.

$A^*(I,\tau_2)$ kümesine A kümesinin I ideali ve τ_X fuzzy topolojisine bağlı fuzzy lokal fonksiyonu denir (Sarkar 1997).

Bu bölüm boyunca, karışıklığa neden olmadıkça; $A^*(I,\tau_X)$ sembolü yerine, A^* sembolünü kullanacağız. A^* sembolü ile, A fuzzy kümesinin fuzzy lokal fonksiyonundan bahsetmiş olacağız.

Lemma 4.2.1. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzayı, X kümesi üzerinde I_1 ve I_2 fuzzy idealleri ile $A,B \le X$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu taktirde; aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Eğer $A \le B$ ise; $A^* \le B^*$

(ii) $I_1 \subset I_2$ ise; $A^*(I_2,\tau_X) \le A^*(I_1,\tau_X)$

(iii) $A^* = \overline{A^*} \le \overline{A}$

(iv) $A^{**} \le A^*$

(v) $(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$

(vi) $(A \wedge B)^* \le A^* \wedge B^*$

(vii) Eğer $U \in I_1$ ise; $(U \vee A)^* = A^*$ (Sarkar 1997).

Tanım 4.2.3. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. Herhangi bir $A \le X$ fuzzy kümesi için, $\alpha : \wp(X) \to \wp(X)$ fonksiyonu,

(i) $\alpha(0_X) = 0_X$

(ii) $A \in \wp(X)$ ise; $A \le \alpha(A)$

(iii) $A,B \in \wp(X)$ ise; $\alpha(A \vee B) = \alpha(A) \vee \alpha(B)$

(iv) $A \in \wp(X)$ ise; $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

yukarıda ki şartları sağlasın. Bu takdirde, α fonksiyonuna **fuzzy kapanış operatörü** ve $K = \{A \in \wp(X) \mid A = \alpha(A)\}$ ailesine de X kümesi üzerindeki fuzzy topolojiye göre **fuzzy kapalılar ailesi** denir (Lowen 1976).

Sarkar (1997); önce Tanım 4.2.4.'de verildiği gibi $d:\wp(X)\to\wp(X)$ fonsiyonunu tanımladı ve bu fonksiyonun fuzzy kapanış operatörü olduğunu gösterdi. Daha sonra $*:\wp(X)\to\wp(X)$ şeklinde tanımlı fuzzy lokal fonksiyonunun Tanım 4.2.4.'deki $d:\wp(X)\to\wp(X)$ fonksiyonunun şartlarını sağladığını göstererek Tanım 4.2.5.'de verildiği gibi $Cl^*:\wp(X)\to\wp(X)$ fonksiyonun fuzzy kapanış operatörü olduğunu gösterdi. Böylece tanımladığı bu fonksiyon yardımıyla yeni bir topoloji elde etti.

Şimdi sırayla bu kavramları verelim:

Tanım 4.2.4. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideali verilsin. Herhangi bir $A\leq X$ fuzzy kümesi için, $d:\wp(X)\to\wp(X)$ fonksiyonu,

(i) $d(0_X)=0_X$

(ii) $A,B\in\wp(X)$ ise; $d(A\vee B)=d(A)\vee d(B)$

(iii) $A\in\wp(X)$ ise; $d(d(A))\leq d(A)$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde, $d(A)=A\vee d(A)$ şeklinde tanımlanan $d:\wp(X)\to\wp(X)$ fonksiyonu **fuzzy kapanış operatörü**dür (Sarkar 1997).

Tanım 4.2.5. (X,τ_X) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideali verilsin. Herhangi bir $A\leq X$ fuzzy kümesi için, $Cl^*(A)=A\vee A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^*:\wp(X)\to\wp(X)$ fonksiyonu bir **fuzzy kapanış operatörü**dür (Sarkar 1997).

Bu bölüm boyunca; $Cl^*(A)$ sembolü yerine, $\overline{A}^*$ sembolünü kullanacağız. Bununla beraber (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayında $\left(^{-*}\right)$ işleminin tümleyenini $\left(^{\circ*}\right)$ işlemi ile sembolize edeceğiz.

Tanım 4.2.6. (X, τ_X) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideali verilsin. Bu taktirde,

$$\tau_X^*(I) = \left\{ U \le X \middle| \overline{1_X - U}^* = 1_X - U \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau_X^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir fuzzy topoloji belirtir. Bu topoloji, τ_X fuzzy topolojisinden daha ince bir topolojidir (Sarkar 1997).

Sarkar (1997) önce; $I_1 = \{0_X\}$ ve $I_2 = \wp(X)$ fuzzy ideallerini kullanılarak $\tau_X^*(\wp(X))$ ve $\tau_X^*(\{0_X\})$ fuzzy topolojilerini elde etti. Daha sonra; diğer fuzzy idealler, bu iki ideal arasında yer aldığından, onlara karşılık gelen $\tau_X^*(I)$ fuzzy topolojileri ile ilgili aşağıdaki sonuçları verdi:

(i) $I_1 = \{0_X\}$ için, $A^* = \overline{A}$ ve $\overline{A}^* = \overline{A}$ olduğundan $\tau_X^*(\{0_X\}) = \tau_X$,

(ii) $I_2 = \wp(X)$ için, $A^* = 0_X$ ve $\overline{A}^* = A$ olduğundan; $\tau_X^*(\wp(X)) = \wp(X)$ elde edilir.

(i) ve (ii) ifadelerinden faydalanarak, şu sonuçlar verildi (Sarkar 1997):

(X, τ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. X kümesi üzerindeki her I fuzzy ideali için, $\{0_X\} \subset I \subset \wp(X)$ olduğundan;

$$\tau_X = \tau_X^*(\{0_X\}) \subset \tau_X^*(I) \subset \tau_X^*(\wp(X)) = \wp(X)$$

olduğu görüldü. Üstelik (X, τ_X) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde, $I \subset J$ olacak şekilde I ve J gibi iki fuzzy ideal verildiğinde; $\tau_X^*(I) \subset \tau_X^*(J)$ bağıntısı elde edildi.

Sarkar (1997), fuzzy topolojik uzay ve fuzzy ideal kavramlarını kullanarak, yeni bir kavramı aşağıdaki şekilde tanımladı:

Tanım 4.2.7. (X, τ_X) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I fuzzy ideali verilsin. I fuzzy ideali ile birlikte (X, τ_X) fuzzy topolojik uzayına, **fuzzy ideal topolojik uzay** denir ve (X, τ_X, I) şeklinde gösterilir.

Lemma 4.2.2. X kümesi üzerinde $\tau_1 \subset \tau_2$ olacak şekilde τ_1, τ_2 fuzzy topolojileri ve I fuzzy ideali verilsin. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her $A \in I$ için, $A^*(I,\tau_2) \leq A^*(I,\tau_1)$

(ii) $\tau_1^*(I) \subset \tau_2^*(I)$ (Sarkar 1997).

4.3. Fuzzy α-I-açık Kümeler

Tanım 4.3.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı ve herhangi $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(i) $A \leq \left(\overline{A^o}^*\right)^o$ ise; A kümesine **fuzzy α-I-açık küme** (Yuksel ve ark. 2009),

(ii) $A \leq \overline{A^o}^*$ ise; A kümesine **fuzzy semi-I-açık küme** (Hatır ve Jafari 2007),

(iii) $A \leq \left(\overline{A}^*\right)^o$ ise; A kümesine **fuzzy pre-I-açık küme** (Nasef ve Hatır 2009),

(iv) $A \leq \overline{\left(\overline{A}^*\right)^o}$ ise; A kümesine **fuzzy β-I-açık küme** (Yuksel ve ark. 2009)

denir.

(X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayındaki bütün fuzzy pre-I-açık (fuzzy pre-I-kapalı) kümelerin, fuzzy semi-I-açık (fuzzy semi-I-kapalı) kümelerin, fuzzy α-I-açık (fuzzy α-I-kapalı) kümelerin, fuzzy β-I-açık (fuzzy β-I-kapalı) kümelerin aileleri sırasıyla $FPIO(X,\tau_X)$ $(FPIC(X,\tau_X))$, $FSIO(X,\tau_X)$ $(FSIC(X,\tau_X))$, $F\alpha IO(X,\tau_X)$ $(F\alpha IC(X,\tau_X))$, $F\beta IO(X,\tau_X)(F\beta IC(X,\tau_X))$ sembolleri ile gösterilecektir

Önerme 4.3.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $A,B \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ise bu takdirde $A \wedge B \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olur.

$(\mathbf{ii})$ Her $j \in J$ için $A_j \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ise bu takdirde $\underset{j\in J}{\vee} A_j \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olur (Yuksel ve ark.2009).

Sonuç 4.3.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay olsun. τ_α, X uzayındaki fuzzy α-açık kümelerin ailesi ve $\tau \le F\alpha IO(X) \le \tau_\alpha$ olmak üzere $F\alpha IO(X,\tau_X)$ ailesi X uzayı için bir topolojidir(Yuksel ve ark.2009).

Önerme 4.3.2. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B \le X$ fuzzy kümeleri verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Her $j \in J$ için $A_j \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ ise, $\underset{j\in J}{\wedge} A_j \in F\alpha IC(X,\tau_X)$

(ii) $A,B \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ ise, $A \vee B \in F\alpha IC(X,\tau_X)$.

İspat. (i) Her $j \in J$ için $A_j \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ olsun. $1_X - A_j \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olur. Önerme 4.3.1 (ii) ifadesi gereği,

$$\underset{j\in J}{\vee}\left(1_X - A_j\right) = 1_X - \underset{j\in J}{\wedge} A_j \in F\alpha IO(X,\tau_X)$$

olur. Buradan $1_X - \left(1_X - \underset{j\in J}{\wedge} A_j\right) = \underset{j\in J}{\wedge} A_j \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ elde edilir.

(ii) Herhangi iki $A,B \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ fuzzy kümelerini alalım. Buradan $1_X - A,\ 1_X - B \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olur. Önerme 4.3.1 (i) ifadesi gereği, $(1_X - A) \wedge (1_X - B) = 1_X - (A \vee B) \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olur. Buradan $1_X - (1_X - (A \vee B))$ $= A \vee B \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ elde edilir.

Teorem 4.3.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. $X \times Y$ fuzzy çarpım uzayı olacak şekilde (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayında X ve Y kümeleri verilsin. Herhangi $A \le X$ ve $B \le Y$ fuzzy α-I-açık kümeleri verilsin. Bu takdirde $A \times B$ kümesi, $X \times Y$ fuzzy çarpım uzayında fuzzy α-açık kümedir.

İspat. Herhangi $A \leq X$ ve $B \leq Y$ fuzzy kümeleri, fuzzy α-I-açık kümeler olsun. Bu takdirde Tanım 4.3.1 (i) gereği, $A \leq \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}$ ve $B \leq \left(\overline{B^{o}}^{*}\right)^{o}$ olur. Cl^{*}-kapanış operatörü (Sarkar 1997) tanımı ve Teorem 3.4 (Sarkar 1997) ifadelerinden,

$$A \times B \leq \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o} \times \left(\overline{B^{o}}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{A^{o}}^{*} \times \overline{B^{o}}^{*}\right)^{o}$$

$$\leq \left(\overline{A^{o}} \times \overline{B^{o}}\right)^{o} = \left(\overline{A^{o} \times B^{o}}\right)^{o} = \left(\overline{(A \times B)^{o}}\right)^{o}$$

olur. Böylece $A \times B$ kümesi, $X \times Y$ fuzzy çarpım uzayında fuzzy α-açık kümedir.

Tanım 4.3.2. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve $A \leq X$ herhangi bir fuzzy küme olsun.

$$Int_{\alpha-I}(A) = \vee\{B : B \leq A, B \in F\alpha IO(X, \tau_X)\}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanan $Int_{\alpha-I}(A)$ fuzzy kümesine, **A fuzzy kümesinin $\boldsymbol{\alpha}$-I-içi** denir.

Bu bölüm boyunca; $Int_{\alpha-I}(A)$ sembolü yerine, $A^{o}_{\alpha-I}$ sembolünü kullanacağız.

Önerme 4.3.3. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi iki $A, B \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $A^{o}_{\alpha-I} \leq A$

(ii) $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesi, (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayında fuzzy α-I-açık kümedir.

(iii) $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesi, A kümesinin kapsadığı en büyük fuzzy α-I-açık kümedir.

(iv) A kümesinin fuzzy α-I-açık küme olması için gerek ve yeter şart $A^{o}_{\alpha-I} = A$ olmasıdır.

(v) $A^{o}_{\alpha-I} = \left(A^{o}_{\alpha-I}\right)^{o}_{\alpha-I}$

(vi) $A \leq B$ ise $A^{o}_{\alpha\text{-}I} \leq B^{o}_{\alpha-I}$

İspat. (i) Tanım 4.3.2. gereği, sonuç açıktır.

(ii) Tanım 4.3.2 ve Önerme 4.3.1 (ii) gereği, $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesi fuzzy α-I-açık kümedir.

(iii) Tanım 4.3.2. gereği, A kümesinin kapsadığı bütün fuzzy α-I-açık kümeler, $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesinin birer alt kümeleridir. (ii) ifadesi gereği, $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesi fuzzy α-I-açık kümedir. Dolayısıyla $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesi, A kümesinin kapsadığı en büyük fuzzy α-I-açık kümedir.

(iv) A kümesi fuzzy α-I-açık küme olsun. O zaman $A \in F\alpha IO(X)$ olur. (iii) ifadesinden $A \le A^{o}_{\alpha-I}$ ve (i) ifadesinden $A^{o}_{\alpha-I} \le A$ olduğundan, $A^{o}_{\alpha-I} = A$ elde edilir.

(v) $A^{o}_{\alpha-I} = B$ diyelim. (i) ifadesi gereği, B kümesi fuzzy α-I-açık küme ve (iv) ifadesinden $B^{o}_{\alpha-I} = B$ dir. Buradan $A^{o}_{\alpha-I} = \left(A^{o}_{\alpha-I}\right)^{o}_{\alpha-I}$ elde edilir.

(vi) (i) ifadesi gereği, $A^{o}_{\alpha-I} \le A$ dir. $A \le B$ olduğundan, $A^{o}_{\alpha-I} \le A \le B$ olur. $A^{o}_{\alpha-I}$ kümesi, B kümesinin kapsadığı herhangi bir fuzzy α-I-açık küme ve (iii) ifadesinden $B^{o}_{\alpha-I}$ kümesi, B kümesinin kapsadığı en büyük fuzzy α-I-açık küme olup buradan $A^{o}_{\alpha\text{-}I} \le B^{o}_{\alpha-I}$ elde edilir.

Teorem 4.3.2. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi bir $A \le X$ fuzzy kümesi verilsin. A kümesinin fuzzy α-I-açık küme olması için gerek ve yeter şart $B \le A \le \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}$ olacak şekilde bir B fuzzy açık kümesinin olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ Herhangi $A \in F\alpha IO(X, \tau_X)$ fuzzy kümesini alalım. Buna göre Tanım 4.3.1 (i) gereği, $A^{o} \le A \le \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}$ olur. $B = A^{o}$ olsun. Buradan $B \le A \le \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}$ elde edilir. Böylece $B = A^{o}$ kümesi, fuzzy açık kümedir.

$\Leftarrow$ $B \le A \le \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}$ olacak şekilde $B \le X$ kümesi fuzzy açık küme olsun. Buradan $B = B^{o} \le A \le \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}$ olur. Teorem 4.1.2 (5) gereği, $B = B^{o} \le A^{o} \le \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}$ ve Lemma 4.2.1 (i) ve (vi) gereği, $\overline{B}^{*} \le \overline{A^{o}}^{*} \le \overline{\left(\overline{B}^{*}\right)^{o}}^{*} \le \overline{\overline{B}^{*}}^{*} \le \overline{B}^{*}$ olup, $\overline{A^{o}}^{*} = \overline{B}^{*}$ elde edilir. Teorem 4.1.2 (5) gereği de $A \le \left(\overline{B}^*\right)^o = \left(\overline{A^o}^*\right)^o$ olup $A \in F\alpha IO(X, \tau_X)$ elde edilir.

Tanım 4.3.3. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı ve herhangi $A \le X$ fuzzy kümesi verilsin.

$$Cl_{\alpha-I}(A) = \wedge\{B : A \le B, B \in F\alpha IC(X, \tau_X)\}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanan $Cl_{\alpha-I}(A)$ fuzzy kümesine, **A fuzzy kümesinin α-I-kapanışı** denir.

Bu bölüm boyunca; $Cl_{\alpha-I}(A)$ sembolü yerine, $\overline{A_{\alpha-I}}$ sembolünü kullanacağız.

Önerme 4.3.4. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B \le X$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $A \le \overline{A_{\alpha-I}}$

(ii) $\overline{A_{\alpha-I}}$ kümesi, (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayında fuzzy α-I-kapalı kümedir.

(iii) $\overline{A_{\alpha-I}}$ kümesi, A fuzzy kümesini kapsayan en küçük fuzzy α-I-kapalı kümedir.

(iv) A kümesinin fuzzy α-I-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $\overline{A_{\alpha-I}}$=A olmasıdır.

(v) $\overline{A_{\alpha-I}} = \overline{\left(\overline{A_{\alpha-I}}\right)_{\alpha-I}}$

(vi) $A \le B$ ise $\overline{A_{\alpha\text{-}I}} \le \overline{B_{\alpha-I}}$

İspat. (i) Tanım 4.3.3 gereği sonuç açıktır.

(ii) Tanım 4.3.3 ve Önerme 4.3.2 (i) gereği, $\overline{A_{\alpha-I}}$ kümesi fuzzy α-I-kapalı kümedir.

(iii) Tanım 4.3.3 gereği, A fuzzy kümesini kapsayan bütün fuzzy α-I-kapalı kümeler, $\overline{A_{\alpha-I}}$ fuzzy kümesinide kapsar. (ii) ifadesi gereği, $\overline{A_{\alpha-I}}$ kümesi fuzzy α-I-kapalı kümedir. Dolayısıyla $\overline{A_{\alpha-I}}$ kümesi, A fuzzy kümesini kapsayan en küçük fuzzy α-I-kapalı kümedir.

(iv) $A \leq X$ kümesi fuzzy α-I-kapalı küme olsun. (iii) ifadesi gereği $\overline{A_{\alpha-I}} \leq A$ ve (i) ifadesinden $A \leq \overline{A_{\alpha-I}}$ olup $A = \overline{A_{\alpha-I}}$ elde edilir.

(v) $\overline{A_{\alpha-I}} = B$ diyelim. (ii) ifadesi gereği, B kümesi fuzzy α-I-kapalı kümedir ve (iv) ifadesi gereği de $\overline{B_{\alpha-I}} = B$ olur. Böylece $\overline{A_{\alpha-I}} = \overline{\left(\overline{A_{\alpha-I}}\right)_{\alpha-I}}$ elde edilir.

(vi) (i) ifadesi gereği, $B \leq \overline{B_{\alpha-I}}$ olup, hipotez gereği $A \leq B$ olduğundan $A \leq \overline{B_{\alpha-I}}$ olur. $\overline{B_{\alpha-I}}$ kümesi, A kümesini kapsayan herhangi bir fuzzy α-I-kapalı kümedir. Böylece (iii) ifadesi gereği, $\overline{A_{\alpha-I}}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük fuzzy α-I-kapalı küme olduğundan, $\overline{A_{\alpha\text{-}I}} \leq \overline{B_{\alpha-I}}$ elde edilir.

Teorem 4.3.3. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $A \in F\alpha IC(X)$;

(ii) $\overline{\left(\left(\overline{A}\right)^{\circ_*}\right)} \leq A$;

(iii) $\overline{\left(B^{\circ_*}\right)} \leq A \leq B$ olacak şekilde en az bir B fuzzy kapalı kümesi vardır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir $A \in F\alpha IC(X,\tau_X)$ fuzzy kümesini alalım. Bu takdirde $1_X - A \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olur. Tanım 4.3.1 (i) gereği, $1_X - A \leq \left(\overline{\left(1_X - A\right)^{\circ}}^{*}\right)^{\circ}$ olup $\overline{\left(\left(\overline{A}\right)^{\circ_*}\right)} \leq A$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) (ii) ifadesi gereği, $\overline{\left(\left(\overline{A}\right)^{o_*}\right)} \leq A$ olur. Teorem 4.1.4 (1) gereği, $A \leq \overline{A}$ olduğundan, $\overline{\left(\left(\overline{A}\right)^{o_*}\right)} \leq A \leq \overline{A}$ elde edilir. $\overline{A} = B$ diyelim. Buradan $\overline{\left((B)^{o_*}\right)} \leq A \leq B$ olur. Bu takdirde $B = \overline{A}$ kümesi, fuzzy kapalı kümedir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\overline{\left(B^{o_*}\right)} \leq A \leq B$ olacak şekilde $B \leq X$ fuzzy kapalı kümesini alalım. Buradan $1_x - B \leq 1_x - A \leq \left(\overline{1_X - B}^*\right)^o$ olur. $1_X - B$ kümesi fuzzy açık küme olup Teorem 4.3.2 gereği, $1_X - A$ kümesi fuzzy α-I-açık kümedir. Dolayısıyla $A \in F\alpha IC(X, \tau_X)$ elde edilir.

4.4. Fuzzy Pre α-I-Sürekli Fonksiyon Kavramı ve Özellikleri

Şimdi fuzzy ideal topolojik uzayda bilinen bazı süreklilik çeşitlerini verelim:

Tanım 4.4.1. f:$(X,\tau_X,I) \rightarrow (Y,\upsilon_Y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \upsilon_Y$ fuzzy kümesi için,

(i) $f^{-1}(V) \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ise; f fonksiyonuna **fuzzy α-I-sürekli fonksiyon** (Yüksel ve ark. 2009),

(ii) $f^{-1}(V) \in FPIO(X,\tau_X)$ ise; f fonksiyonuna **fuzzy pre-I-sürekli fonksiyon** (Nasef ve Hatır 2009),

(iii) $f^{-1}(V) \in F\beta IO(X,\tau_X)$ ise; f fonksiyonuna **fuzzy β-I-sürekli fonksiyon** (Yüksel ve ark. 2009) denir.

Tanım 4.4.2. $f:(X,\tau_X,I_1) \rightarrow (Y,\upsilon_Y,I_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in F\alpha IO(Y,\upsilon_Y)$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(V) \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ise f fonksiyonuna **fuzzy α-I-irresolute fonksiyon denir** (Hatır 2009).

Şimdi fuzzy ideal topolojik uzayda **yeni** süreklilik çeşitlerini verelim:

Tanım 4.4.3. $f:(X,\tau_X,I_1)\to(Y,\tau_Y,I_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V\in F\alpha IO(Y,\tau_Y)$ fuzzy kümesi için,

(i) $f^{-1}(V)\in FPIO(X,\tau_X)$ ise; f fonksiyonuna **fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon,**

(ii) $f^{-1}(V)\in F\beta IO(X,\tau_X)$ ise; f fonksiyonuna **fuzzy β-α-I-sürekli fonksiyon,**

denir.

Tanım 4.4.1., Tanım 4.4.2. ve Tanım 4.4.3'den yararlanarak aşağıdaki diagram elde edilir:

$$
\begin{tikzcd}
\text{fuzzy } \alpha\text{-I-irresolute} \arrow[r] \arrow[d] & \textbf{fuzzy pre } \boldsymbol{\alpha}\textbf{-I süreklilik} \arrow[r] \arrow[d] & \textbf{fuzzy } \boldsymbol{\beta}\textbf{-}\boldsymbol{\alpha}\textbf{-I süreklilik} \arrow[d] \\
\text{fuzzy } \alpha\text{-I-süreklilik} \arrow[r] & \text{fuzzy pre-I- süreklilik} \arrow[r] & \text{fuzzy } \beta\text{-I-süreklilik}
\end{tikzcd}
$$

Diagram 4.4.1.

Uyarı 4.4.1. Diagram 4.4.1'de verdiğimiz geçişlerin karşıtlarının genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek 4.4.1. $X=\{x,y\}$ kümesinde $\tau_X=\{0_X,1_X,A\}$ fuzzy topolojisi ve $I=\wp(X)$ fuzzy ideali ile birlikte (X,τ_X,I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve $\upsilon_X=\{0_X,1_X,B\}$ fuzzy topolojisi ile (X,υ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A,B\leq X$ fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(x)=0.5$, $A(y)=0.4$

$B(x)=0.5$, $B(y)=0.6$

$f:(X,\tau_X,I)\to(X,\upsilon_X,I)$ fonksiyonu, birim fonksiyon olarak tanımlansın. f fonksiyonu fuzzy β-α-I sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy pre-I sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) Herhangi bir $D\le X$ fuzzy kümesi için, $\left(\overline{D^o}^*\right)^o=\left(D^o\right)^o=D^o\in\upsilon_X$ olur. Buradan $\upsilon_X=F\alpha IO(X,\upsilon_X)$ elde edilir. Bu durumda $B\le X$ fuzzy açık kümesi için, $B\in F\alpha IO(X,\upsilon_X)$ olur. $f^{-1}(B)=B$ olup $\overline{\left(\overline{B}^*\right)^o}=\overline{B^o}=\overline{A}=1_X-A=B$ olduğundan, $B\le\overline{\left(\overline{B}^*\right)^o}$ bulunur. Buna göre $B\in F\beta IO(X,\tau_X)$ olur.

(2) $1_X,0_X\in\upsilon_X$ fuzzy kümeleri için, $1_X,0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy α-I-açık kümeler olup $f^{-1}(1_X)=1_X$, $f^{-1}(0_X)=0_X$ için $1_X,0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy β-I-açık kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy β-α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak $\left(\overline{B}^*\right)^o=B^o=A$ ve $A\le B$ olup, B kümesi fuzzy pre-I-açık küme değildir. Bu durumda f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 4.4.2. X={x,y,z} kümesinde $\tau_X=\{0_X,1_X,A,B,A\wedge B,A\vee B\}$ fuzzy topolojisi ve I={0_X} fuzzy ideali ile birlikte (X,τ_X,I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve $\upsilon_X=\{0_X,1_X,B\}$ fuzzy topolojisi ile (X,υ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A,B,C\le X$ fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(x)=0.3$, $A(y)=0.3$, $A(z)=0.5$

$B(x)=0.7$, $B(y)=0.6$, $B(z)=0.4$

$C(x)=0.7$, $C(y)=0.7$, $C(z)=0.6$

$f:(X,\tau_X,I)\to(X,\upsilon_X)$ fonksiyonu, birim fonksiyon olarak tanımlansın. f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy β-α-I sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $B \in \upsilon_X$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(B) = B$ olur. $\left(\overline{B^*}\right)^o = \left(\overline{B}\right)^o = (1_X - A)^o = A \vee B$ ve $B \leq \left(\overline{B^*}\right)^o$ olup $B \in FPIO(X, \tau_X)$ elde edilir.

(2) $1_X, 0_X \in \upsilon_X$ fuzzy kümeleri için, $1_X, 0_X$ sabit fuzzy kümeleri açık kümeler olduğundan $f^{-1}(1_X) = 1_X, f^{-1}(0_X) = 0_X$ için $1_X, 0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy pre-I-açık kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak $\left(\overline{C^{o}}^{*}\right)^o = \left(\overline{C^o}\right)^o = \left(\overline{B}\right)^o = 1_X^o = 1_X$ olup $C \in F\alpha IO(X, \upsilon_X)$ olur. Buna göre $f^{-1}(C) = C$ kümesi için, $\overline{\left(\overline{C^*}\right)^o} = \overline{\left(\overline{C}\right)^o} = \overline{(1_X - (A \wedge B))^o} = \overline{A \vee B} = 1_X - A$ ve $1_X - A \leq C$ olup, C kümesi fuzzy β-I-açık küme değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu, fuzzy β-α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 4.4.3. X={x,y,z} kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, B\}$ fuzzy topolojisi ve $I = \{0_X\}$ fuzzy ideali ile birlikte (X, τ_X, I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve $\upsilon_X = \{0_X, 1_X, A\}$ fuzzy topolojisi ile (X, υ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. $A \leq X$ fuzzy kümesi ve $B \leq X$ fuzzy kümesi aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(x) = 0.7$, $A(y) = 0.8$, $A(z) = 0.7$

$B(x) = 0.3$, $B(y) = 0.2$, $B(z) = 0.5$

$f : (X, \tau_X, I) \to (X, \upsilon_X, I)$ fonksiyonu birim fonksiyon olarak tanımlansın. f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $0_X < \mu < A$ ve $A < \delta < 1_X$ olacak şekilde $\mu, \delta \leq X$ fuzzy kümelerini alalım. Bu durumda $\mu^o = 0_X$ olup $0_X < \mu$ olduğundan, μ fuzzy kümesi fuzzy α-I-açık küme değildir. $\left(\overline{\delta^{o}}^{*}\right)^o = \left(\overline{\delta^o}\right)^o = \left(\overline{A}\right)^o = 1_X^o = 1_X$ olup $\delta \leq \left(\overline{\delta^{o}}^{*}\right)^o$ elde edilir. Böylece (X, υ_X, I) fuzzy topolojik uzayındaki tüm fuzzy α-I-açık kümeler, $0_X, 1_X, A$ ve δ

fuzzy kümeleridir. $f^{-1}(A)=A$ olup, $\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{A}\right)^{o}=1_X^{o}=1_X$ olduğundan, $A\leq\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}$ ve $f^{-1}(\delta)=\delta$ olup, $\left(\overline{\delta}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{\delta}\right)^{o}=1_X^{o}=1_X$ olduğundan $\delta\leq\left(\overline{\delta}^{*}\right)^{o}$ bulunur. Bu durumda $A,\delta\in FPIO(X,\tau_X)$ olur.

(2) $1_X,0_X\in\upsilon_X$ fuzzy kümeleri için, $1_X,0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy α-I-açık kümeler olduğundan $f^{-1}(1_X)=1_X, f^{-1}(0_X)=0_X$ için $1_X,0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy pre-I-açık kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak $f^{-1}(A)=A$ fuzzy kümesi için, $\left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{A^{o}}\right)^{o}=\left(\overline{B}\right)^{o}=(1_X-B)^{o}=B$ ve $B\leq A$ olup A kümesi fuzzy α-I-açık küme değildir. Böylece f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 4.4.4. X={x,y,z} kümesinde $\tau_X=\{0_X,1_X,A,B\}$ fuzzy topolojisi ve $I=\{0_X\}$ fuzzy ideali ile birlikte (X,τ_X,I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve $\upsilon_X=\{0_X,1_X,B\}$ fuzzy topolojisi ile (X,υ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A\leq X$ fuzzy kümesi, $B\leq X$ fuzzy kümesi ve $C\leq X$ fuzzy kümesi aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(x)=0.3$, $A(y)=0.4$, $A(z)=0.5$

$B(x)=0.4$, $B(y)=0.6$, $B(z)=0.5$

$C(x)=0.6$, $C(y)=0.6$, $C(z)=0.5$

$f:(X,\tau_X,I)\to(X,\upsilon_X)$ fonksiyonu, birim fonksiyon olarak tanımlansın. f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $B\in\upsilon_X$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(B)=B$ olur. $\left(\overline{B^{o}}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{B^{o}}\right)^{o}=\left(\overline{B}\right)^{o}=(1_X-A)^{o}=B$ olup, B kümesi fuzzy α-I-açık kümedir.

(2) $1_X, 0_X \in \upsilon_X$ fuzzy kümeleri için; $0_X, 1_X$ sabit fuzzy kümeleri, fuzzy açık kümeler olduğundan, $f^{-1}(1_X) = 1_X, f^{-1}(0_X) = 0_X$ için, $0_X, 1_X$ sabit fuzzy kümeleri, fuzzy α-I-açık kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak $\left(\overline{C^{o}}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{C^{o}}\right)^{o} = \left(\overline{B}\right)^{o} = 1_X^{o} = 1_X$ olup $C \in F\alpha IO(X, \upsilon_X)$ olur. $f^{-1}(C) = C$ kümesi için, $\left(\overline{C}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{C}\right)^{o} = (1_X - A)^{o} = B$ ve $B \le C$ olup, C kümesi fuzzy pre-I-açık küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

Teorem 4.4.1. $f:(X, \tau_X, I_1) \to (Y, \upsilon_Y, I_2)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir;

(i) f fonksiyonu, fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyondur;

(ii) $\upsilon_{\alpha-I}$ ailesi, Y uzayındaki fuzzy α-I-açık kümelerin ailesi olmak üzere $f:(X, \tau_X, I_1) \to (Y, \upsilon_{\alpha-I}, I_2)$ fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli fonksiyondur;

(iii) Her $x_\lambda \in X$ fuzzy noktası ve $f(x_\lambda)$ noktasını içeren Y uzayındaki her V fuzzy α-I-açık kümesi için, $f(U) \le V$ olacak şekilde x_λ fuzzy noktasını içeren X uzayında bir $U \le X$ fuzzy pre-I-açık kümesi vardır;

(iv) Her $V \in F\alpha IO(Y, \upsilon_Y)$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(V) \in$ FPIO(X, τ_X);

(v) Her $F \in F\alpha IC(Y, \upsilon_Y)$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(F) \in$ FPIC(X, τ_X);

(vi) Her $B \le Y$ fuzzy kümesi için, $\overline{\left(\left(f^{-1}(B)\right)^{o_*}\right)} \le f^{-1}\left(F\alpha IC(B)\right)$;

(vii) Her $A \le X$ fuzzy kümesi için $f\left(\overline{A^{o_*}}\right) \le F\alpha IC\left(f(A)\right)$ olmasıdır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir $V \le Y$ fuzzy açık kümesini alalım. Fuzzy açık küme fuzzy α-I-açık küme olduğundanş $V \in F\alpha IO(Y, \upsilon_Y)$ olur. Hipotez gereği f fonksiyonu fuzzy pre-α-I-sürekli fonksiyon olduğundan Tanım 4.4.3 (i) gereği, $f^{-1}(V) \in$ FPIO(X, τ_X) olur. Bu takdirde $f:(X, \tau_X, I_1) \to (Y, \upsilon_Y, I_2)$ fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli fonksiyondur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Herhangi bir $x_\lambda \in X$ fuzzy noktasını ve $f(x_\lambda)$ noktasını içeren bir $V \leq Y$ fuzzy açık kümesini alalım. Fuzzy açık küme fuzzy α-I-açık küme olduğundan, $V \in F\alpha IO(Y, \upsilon_Y)$ olur. Hipotez gereği f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli fonksiyon olduğundan, Tanım 4.4.3(i) gereği, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi, x_λ fuzzy noktasını içeren fuzzy pre-I-açık bir kümedir. $U = f^{-1}(V)$ diyelim. Bu takdirde U kümesi $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ fuzzy noktasını içeren, X uzayının fuzzy pre-I-açık kümesidir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Herhangi bir $V \in F\alpha IO(Y, \upsilon_Y)$ fuzzy kümesi alalım ve $x_\lambda \in f^{-1}(V)$ olsun. Hipotez gereği, $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ fuzzy noktasını içeren bir $U \leq X$ fuzzy pre-I-açık kümesi vardır. Böylece $x_\lambda \in U \leq \left(\overline{U^*}\right)^o \leq \left(\overline{f^{-1}(V)^*}\right)^o$ ve $f^{-1}(V) \leq \left(\overline{f^{-1}(V)^*}\right)^o$ olup $f^{-1}(V) \in$ FPIO(X, τ_X) elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Herhangi bir $F \in F\alpha IC(Y, \upsilon_Y)$ fuzzy kümesini alalım. $V = 1_X - F$ diyelim. Bu takdirde $V \in F\alpha IO(Y, \upsilon_Y)$ olur. (iii) ifadesi gereği, $f^{-1}(V) \in$ FPIO(X, τ_X) elde edilir. Buradan $f^{-1}(F) = 1_X - f^{-1}(V)$ olduğundan $f^{-1}(F) \in$ FPIC(X, τ_X) elde edilir.

(v)$\Rightarrow$(vi) Herhangi bir $B \leq Y$ alt kümesini alalım. $F\alpha IC(B)$ kümesi, Y uzayının fuzzy α-I-kapalı kümesi olduğundan, $f^{-1}(F\alpha IC(B)) \leq X$ kümesi (v) ifadesi gereği, fuzzy pre-I-kapalı kümedir. Buradan $1_X - f^{-1}(F\alpha IC(B))$ kümesi, X uzayında fuzzy pre-I-açık kümedir. Böylece,

$$1_X - f^{-1}(F\alpha IC(B)) \leq \left(\overline{1_X - f^{-1}(F\alpha IC(B))}^*\right)^o = 1_X - \overline{\left(f^{-1}(F\alpha IC(B))\right)^{o_*}}$$

elde edilir. Buradan $\overline{\left(f^{-1}(B)\right)^{o_*}} \leq \overline{\left(f^{-1}(F\alpha IC(B))\right)^{o_*}} \leq f^{-1}(F\alpha IC(B))$ olur.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Herhangi bir $A \le X$ fuzzy kümesini alalım. $A \le f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$ olduğundan ve (vi) ifadesi gereği, $\overline{A^{\circ *}} \le \overline{\left(f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)\right)^{\circ *}} \le f^{-1}\left(F\alpha IC\left(f\left(A\right)\right)\right)$ olur. Buradan $f\left(\overline{A^{\circ *}}\right) \le F\alpha IC\left(f\left(A\right)\right)$ elde edilir.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Herhangi bir $V \in F\alpha IO\left(Y, \upsilon_Y\right)$ fuzzy kümesini alalım. Bu takdirde $1_X - V$ kümesi, Y uzayında fuzzy α-I-kapalı kümedir. (vii) ifadesi gereği, $f\left(\overline{\left(f^{-1}\left(1_X - V\right)\right)^{\circ *}}\right) \le F\alpha IC\left(f\left(f^{-1}\left(1_X - V\right)\right)\right) \le F\alpha IC\left(1_X - V\right) = 1_X - V$ olur. Buna göre $\overline{\left(f^{-1}\left(1_X - V\right)\right)^{\circ *}} \le f^{-1}\left(1_X - V\right)$ olup $f^{-1}\left(1_X - V\right) = 1_X - f^{-1}\left(V\right)$ ve $\overline{\left(f^{-1}\left(1_X - V\right)\right)^{\circ *}} = 1_X - \left(\overline{f^{-1}\left(V\right)}^{*}\right)^{\circ}$ olduğundan, $1_X - \left(\overline{f^{-1}\left(V\right)}^{*}\right)^{\circ} \le 1_X - f^{-1}\left(V\right)$ elde edilir. Buradan $f^{-1}\left(V\right) \le \left(\overline{f^{-1}\left(V\right)}^{*}\right)^{\circ}$ olup $f^{-1}\left(V\right) \in FPIO\left(X, \tau_X\right)$ elde edilir. Dolayısıyla Tanım 4.4.3 (i) gereği, f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyondur.

Uyarı 4.4.2. Aşağıdaki teoremde gof bileşke fonksiyonunun fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon olması için, f ve g fonksiyonlarının hangi özellikleri sağlaması gerektiği verilmiştir.

Teorem 4.4.2. $f:\left(X, \tau_X, I_1\right) \to \left(Y, \tau_Y, I_2\right)$ ve $g:\left(Y, \tau_Y, I_2\right) \to \left(Z, \tau_Z, I_3\right)$ iki fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon ve g fonksiyonu fuzzy α-I-irresolute bir fonksiyon ise, $gof:\left(X, \tau_X, I_1\right) \to \left(Z, \tau_Z, I_3\right)$ bileşke fonksiyonu da fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V \in F\alpha IO\left(Z, \tau_Z\right)$ fuzzy kümesini alalım. Hipotez gereği g fonksiyonu fuzzy α-I-irresolute fonksiyon olduğundan, $g^{-1}\left(V\right) \in F\alpha IO\left(Y, \tau_Y\right)$ olur. Hipotez gereği, f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon olduğundan $\left(gof\right)^{-1}\left(V\right) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(V\right)\right)$ kümesi, X uzayının fuzzy pre-I-açık bir kümesi olur.

Böylece gof bileşke fonksiyonunun Tanım 4.4.3 (i) gereği, fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 4.4.3. $f:(X,\tau_X,I_1)\rightarrow(Y,\tau_Y,I_2)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $V\leq Y$ fuzzy açık kümesi ve herhangi bir $y_\lambda \in Y$ fuzzy noktası için $y_\lambda \in \left(\overline{V}^*\right)^o$ olmak üzere $f^{-1}\left(V\vee\{y_\lambda\}\right)$ kümesinin, X uzayında fuzzy pre-I-açık küme olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$ $V\leq Y$ herhangi bir fuzzy açık küme ve herhangi bir $y_\lambda \in Y$ fuzzy noktası için $y_\lambda \in \left(\overline{V}^*\right)^o$ olsun. Fuzzy açık küme, fuzzy pre-I-açık küme olduğundan, V kümesi Y uzayında fuzzy pre-I-açık kümedir. Bu durumda Tanım 4.3.1 (iii) gereği, $V\leq\left(\overline{V}^*\right)^o$ olur. Buradan $V\leq V\vee\{y_\lambda\}\leq\left(\overline{V}^*\right)^o$ elde edilir. Teorem 4.3.2 gereği, $V\vee\{y_\lambda\}$ kümesi Y uzayında fuzzy α-I-açık kümedir. Hipotez gereği de, f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon olduğundan, $f^{-1}\left(V\vee\{y_\lambda\}\right)$ kümesi X uzayında fuzzy pre-I-açık kümedir.

$\Leftarrow$ V kümesi, Y uzayının herhangi bir fuzzy α-I-açık kümesi olsun. Teorem 4.3.2 gereği, $B\leq V\leq\left(\overline{B}^*\right)^o$ olacak şekilde $B\leq Y$ fuzzy açık kümesi vardır. Hipotez gereği de, $y_\lambda \in Y$ fuzzy noktası için $f^{-1}\left(B\vee\{y_\lambda\}\right)$ kümesi, X uzayında fuzzy pre-I-açık kümedir. Dolayısıyla $f^{-1}(V)=\vee\left\{f^{-1}\left(B\vee\{y_\lambda\}\right):y_\lambda\in Y\right\}$ kümesi X uzayında fuzzy pre-I-açık kümedir (Nasef ve Hatır 2009). Böylece f fonksiyonunun fuzzy pre-α-I-sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 4.4.4. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı ve herhangi $U\leq X$ açık kümesi verilsin. Eğer $B\in FPIO(X,\tau_X)$ ise, $U\wedge B\in FPIO\left(U,\tau_X/_U,I/_U\right)$ olur (Nasef ve Hatır 2009).

Teorem 4.4.5. Eğer $f:(X,\tau_X,I_1)\to(Y,\tau_Y,I_2)$ fonksiyonu fuzzy pre α-I sürekli fonksiyon ve her $V\in F\alpha IO(Y)$ fuzzy kümesi için $f^{-1}(V)\le U\le X$ olmak üzere U kümesi açık bir küme ise, bu takdirde $f/_U:(U,\tau_X/_U,I_1/_U)\to(Y,\tau_Y,I_2)$ kısıtlanmış fonksiyonu fuzzy pre α-I sürekli fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V\in F\alpha IO(Y)$ fuzzy kümesini ve $f^{-1}(V)\le U\le X$ olacak şekilde U açık kümesini alalım. Hipotez gereği, f fonksiyonu fuzzy pre α-I sürekli fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(V)\le X$ kümesi fuzzy pre-I-açık kümedir. Buradan Teorem 4.4.5 gereği, $U\wedge f^{-1}(V)\in FPIO(U,\tau_X/_U,I/_U)$ elde edilir. $(f/_U)^{-1}(V)=U\wedge f^{-1}(V)$ olup $(f/_U)^{-1}(V)\in FPIO(U,\tau_X/_U,I/_U)$ elde edilir. Böylece $f/_U:(U,\tau_X/_U,I/_U)\to(Y,\tau_Y,I_2)$ fonksiyonu fuzzy pre α-I sürekli fonksiyondur.

Tanım 4.4.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X uzayının fuzzy pre-I-açık (fuzzy α-I-açık) kümelerinin her örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise X uzayına **fuzzy pre-I-kompakt (fuzzy α-I-kompakt) uzay** denir.

Sonuç 4.4.1. Her fuzzy α-I-kompakt uzay, fuzzy pre-I- kompakt uzaydır.

İspat. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve $\{A_{\Lambda_0}:\Lambda_0\in\Lambda\}$ ailesi, X uzayının fuzzy α-I-açık örtüsü olsun. X uzayı fuzzy α-I-kompakt uzay olduğundan Tanım 4.4.1 gereği, en az bir $\Lambda_1\le\Lambda$ sonlu alt kümesi için

$$X=\vee\{A_{\Lambda_0}:\Lambda_0\in\Lambda_1\}\le\vee\left\{\left(\overline{A_{\Lambda_0}}^{*}\right)^{o}:\Lambda_0\in\Lambda_1\right\}$$

olur. Bu takdirde X uzayı fuzzy pre-I-kompakt uzaydır.

Teorem 4.4.6. $f:(X,\tau_X,I_1)\to(Y,\upsilon_Y,I_2)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli ve örten fonksiyon, X uzayı fuzzy pre-I- kompakt uzay ise bu takdirde Y uzayı da fuzzy α-I-kompakt uzaydır.

İspat. $\{V_\lambda : \lambda \in \wedge\}$ kümesi, Y uzayının herhangi bir fuzzy α-I-açık örtüsü olsun. Hipotezden, f fonksiyonu fuzzy pre α-I-sürekli fonksiyon olduğundan, $\{f^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \wedge\}$ ailesi X uzayının fuzzy pre-I-açık örtüsüdür. X uzayı fuzzy pre-I-kompakt uzay olduğundan, Tanım 4.4.1 gereği, $X = \vee\{f^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \lambda_0\}$ olacak şekilde $\wedge$ nın $\wedge_0$ sonlu alt kümesi vardır. Hipotez gereği, f fonksiyonu örten fonksiyon olduğundan, $Y = \vee\{V_\lambda : \lambda \in \lambda_0\}$ elde edilir. Böylece Y uzayının fuzzy α-I-kompakt uzay olduğu görülür.

5.FUZZY A_{R-I} KÜMELER VE FUZZY A_{R-I} KÜMELERİN ZAYIF FORMLARI

Bu bölüm iki ayrı kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda; fuzzy R-I-açık küme, fuzzy R-I-kapalı küme, fuzzy A_{R-I} küme, fuzzy $c\eta$ -kapalı küme, fuzzy $r\eta$-kapalı küme, fuzzy $c\eta$-küme, fuzzy $r\eta$-küme fuzzy $\alpha_I N_5$-küme, fuzzy $S_I N_5$-küme, fuzzy $P_I N_5$-küme fuzzy $\beta_I N_5$-küme, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-küme, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-küme, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-küme, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-küme, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-küme olarak adlandırdığımız yeni küme kavramlarını verdik. Daha sonra; bu kümeleri bazı küme çeşitleriyle karşılaştırarak gerekli karşıt örnekleri verip diagram oluşturduk. Ayrıca, fuzzy I-submaximal uzay ve fuzzy P-I-disconnected uzay kavramlarını verdik.

İkinci kısımda ise; fuzzy A_{R-I} sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_I N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $S_I N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $P_I N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\beta_I N_5$ -sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-sürekli fonksiyon kavramlarını verdik. Ayrıca, fuzzy $\alpha_I N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $S_I N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $P_I N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\beta_I N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-irresolute fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni sürekli fonksiyon kavramlarını verip, bazı süreklilik çeşitleriyle karşılaştırmalarını yaptık.

5.1. Fuzzy $A_{R\text{-}I}$ Kümeler

Şimdi fuzzy ideal topolojik uzayda bilinen bazı küme kavramlarını verelim:

Tanım 5.1.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(i) $A = \overline{A}^*$ ise; A kümesine **fuzzy τ^*-kapalı küme** (Mahmoud 1997),

(ii) $\overline{A}^* = X$ ise; A kümesine **fuzzy τ^*-I-yoğun küme** (Gürsel 2009),

denir.

Şimdi fuzzy ideal topolojik uzayda **yeni** küme kavramlarını verelim:

Tanım 5.1.2. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(i) $\left(\overline{A}^*\right)^o = A$ ise; A kümesine **fuzzy R-I-açık küme**,

(ii) $\overline{A^o}^* = A$ ise; A kümesine **fuzzy R-I-kapalı küme** denir.

Tanım 5.1.3. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(i) $U \in \tau_X$ ve $V = \overline{V^o}^*$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $A_{R\text{-}I}$ küme,**

(ii) $U \in \tau_X$ ve $A \leq U$ olmak üzere $\overline{A}^* \leq U$ ise; A kümesine **fuzzy cη-kapalı küme**,

(iii) $U = \left(\overline{U}^*\right)^o$ ve $A \leq U$ olmak üzere $\overline{A}^* \leq U$ ise; A kümesine **fuzzy rη-kapalı küme**,

(iv) $U \in \tau_X$ ve V fuzzy cη-kapalı küme olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy cη-küme**,

(v) $U \in \tau_X$ ve V fuzzy rη-kapalı küme olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy rη-küme** denir.

(X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayındaki bütün fuzzy R-I-kapalı kümelerin, fuzzy cη-kapalı kümelerin, fuzzy rη-kapalı ve fuzzy τ^*-kapalı kümelerin aileleri sırasıyla $FRIC(X, \tau_X)$, $F_{c\eta}IC(X, \tau_X)$, $F_{r\eta}IC(X, \tau_X)$ ve $F\tau^*C(X, \tau_X)$ sembolleri ile gösterilecektir.

Önerme 5.1.1. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır;

(i) A kümesi fuzzy τ^*-kapalı küme ise, fuzzy cη-kapalı kümedir.

(ii) A kümesi fuzzy rη-kapalı küme ise, fuzzy cη-kapalı kümedir.

İspat. **(i)** Herhangi bir $A \in F\tau^*C(X, \tau_X)$ fuzzy kümesini ve $A \leq U$ olacak şekilde $U \in \tau_X$ fuzzy kümesini alalım. Bu takdirde Tanım 5.1.1 (i) gereği, $A = \overline{A}^*$ olup $\overline{A}^* \leq U$ elde edilir. Böylece, A kümesi Tanım 5.1.3 (ii) gereği, fuzzy cη-kapalı kümedir.

(ii) Herhangi bir $A \leq X$ fuzzy rη-kapalı kümesini alalım. Tanım 5.1.3 (iii) gereği, $A \leq U$ $A \leq U$ olacak şekilde $U = \left(\overline{U}^*\right)^o$ fuzzy kümesi için, $\overline{A}^* \leq U$ olur. Buradan $U^o = \left(\left(\overline{U}^*\right)^o\right)^o = \left(\overline{U}^*\right)^o = U$ olup $U \in \tau_X$ elde edilir. Dolayısıyla Tanım 5.1.3 (ii) gereği, A kümesi fuzzy cη-kapalı kümedir.

Uyarı 5.1.1. Önerme 5.1.1(i)'nin karşıtının genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 5.1.1. X={a,b,c} kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, B\}$ fuzzy topolojisi ve $I=\{0_X\}$ fuzzy ideali ile (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X kümesinin A,B fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A(a)=0.3$, $A(b)=0.2$, $A(c)=0.1$

$B(a)=0.5$, $B(b)=0.5$, $B(c)=0.5$

A kümesi fuzzy cη-kapalı kümedir. Ancak A kümesi fuzzy τ^*-kapalı küme değildir.

A fuzzy kümesi için, I={0_x} olduğundan, $\overline{A}^* = \overline{A} = 1_X - B = B$ olur. $B \in \tau_X$ olduğundan, $A \leq B$ olmak üzere $\overline{A}^* \leq B$ elde edilir. Buradan A kümesinin fuzzy cη-kapalı küme olduğu görülür.

Ancak $\overline{A}^* = B$ ve $B \neq A$ olup, A kümesi fuzzy τ^*-kapalı küme değildir.

Tanım 5.1.4. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Eğer A kümesi için;

(i) $U \in F\alpha IO(X, \tau_X)$ ve $V \in F\tau^*C(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $\alpha_1 N_5$**-k**üme**,

(ii) $U \in FSIO(X, \tau_X)$ ve $V \in F\tau^*C(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $S_1 N_5$-küme,**

(iii) $U \in FPIO(X, \tau_X)$ ve $V \in F\tau^*C(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $P_1 N_5$-küme**,

(iv) $U \in F\beta IO(X, \tau_X)$ ve $V \in F\tau^*C(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $\beta_1 N_5$-küme,**

(v) $U \in F\alpha IO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fc\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-küme,**

(vi) $U \in FSIO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fc\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $S_{c\eta} N_5$-küme**,

(vii) $U \in FPIO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fc\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $P_{c\eta} N_5$-küme**,

(viii) $U \in F\beta IO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fc\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$ -küme**,

(ix) $U \in F\alpha IO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fr\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy** $\boldsymbol{\alpha_{r\eta}N_5}$**-küme**,

(x) $U \in FSIO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fr\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy** $\mathbf{S_{r\eta}N_5}$**-küme**,

(xi) $U \in FPIO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fr\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy** $\mathbf{P_{r\eta}N_5}$**-küme**,

(xii) $U \in F\beta IO(X, \tau_X)$ ve $V \in Fr\eta IC(X, \tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ ise; A kümesine **fuzzy** $\boldsymbol{\beta_{r\eta}N_5}$**-küme** denir.

Tanım 5.1.3. ve Tanım 5.1.4.'den yararlanarak aşağıdaki diagram elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
\text{fuzzy açık küme} \arrow[r] \arrow[d] & \text{fuzzy } \alpha\text{-I-açık küme} \arrow[r] \arrow[d] & \text{fuzzy pre-I-açık küme} \arrow[d] \\
\textbf{fuzzy } \mathbf{A_{R\text{-}I}}\textbf{-küme} \arrow[r] & \textbf{fuzzy } \boldsymbol{\alpha_1 N_5}\textbf{-küme} \arrow[r] & \textbf{fuzzy } \mathbf{P_1 N_5}\textbf{-küme}
\end{tikzcd}$$

Diagram 5.1.1.

Uyarı 5.1.1. Diagram 5.1.1.'de verdiğimiz geçişlerin karşıtlarının genellikle doğru olmadığı Örnek 5.1.3, Örnek 5.1.4, Örnek 5.1.5 ve Örnek 5.1.6'da gösterilmiştir.

Örnek 5.1.3. $X = \{x, y\}$ kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, A\}$ fuzzy topolojisi ve $I = \{0_X\}$ fuzzy ideali ile (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X kümesinin A B fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A(x) = 0.7$, $A(y) = 0.2$

$B(x) = 0.6$, $B(y) = 0.5$

$C(x) = 0.3$, $C(y) = 0.8$

B kümesi, fuzzy pre-I-açık kümedir. Ancak B kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme değildir.

B fuzzy kümesi için, $I=\{0_X\}$ olduğundan, $\left(\overline{B}^*\right)^o = \left(\overline{B}\right)^o = 1_X^o = 1_X$ olup, $B \le \left(\overline{B}^*\right)^o$ olur. Bu durumda B kümesi fuzzy pre-I-açık kümedir.

(X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayındaki tüm fuzzy τ^*-kapalı kümeler; $1_X, 0_X, C$ fuzzy kümeleridir. $0_X < \mu < A$ ve $A < \delta < 1_X$ olacak şekilde $\mu,\delta \le X$ fuzzy kümeler olsun. Bu durumda $\mu^o = 0_X$ olup $0_X < \mu$ olduğundan μ fuzzy kümesi, fuzzy α-I-açık küme değildir. $\left(\overline{\delta^o}^*\right)^o = \left(\overline{\delta^o}\right)^o = \left(\overline{A}\right)^o = 1_X^o = 1_X$ olup X uzayındaki tüm fuzzy α-I-açık kümeler, $0_X, 1_X, A$ ve δ fuzzy kümeleridir. Ancak

$1_X \wedge A = A \ne B, 1_X \wedge \delta = \delta \ne B$

$0_X \wedge A = 0_X \ne B, 0_X \wedge \delta = 0_X \ne B$

$C \wedge A \ne B, C \wedge \delta \ne B$

$C \wedge 1_X \ne B, C \wedge 0_X \ne B$

olduğundan, B kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme değildir.

Örnek 5.1.4. $X=\{a,b,c\}$ kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, B\}$ fuzzy topolojisi ve $I=\{0_X\}$ fuzzy ideali ile (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X kümesinin A,B fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A(a)=0.5$, $A(b)=0.4$, $A(c)=0.6$

$B(a)=0.5$, $B(b)=0.6$, $B(c)=0.4$

A kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir. Ancak A kümesi fuzzy pre-I-açık küme değildir.

A fuzzy kümesi için, $I=\{0_X\}$ olduğundan, $\overline{A}^* = \overline{A} = 1_X - B = A$ olup, A kümesi fuzzy τ^*-kapalı kümedir. $1_X \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ olup $1_X \wedge \overline{A}^* = A$ bulunur. Böylece A kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir.

Ancak $\left(\overline{A}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{A}\right)^{o} = (1_X - B)^{o} = A^{o} = 0_X$ olup $\left(\overline{A}^{*}\right)^{o} \leq A$ olduğundan, A kümesi fuzzy pre-I-açık küme değildir.

Örnek 5.1.5. $X = \{a, b, c\}$ kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, B\}$ fuzzy topolojisi ve $I = \{0_X\}$ fuzzy ideali ile (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X kümesinin, A,B fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A(a) = 0.6$, $A(b) = 0.5$, $A(c) = 0.7$

$B(a) = 0.3$, $B(b) = 0.5$, $B(c) = 0.6$

A kümesi, fuzzy α-I-açık kümedir. Ancak A kümesi, fuzzy $A_{R\text{-}I}$ küme değildir. A fuzzy kümesi için, $I = \{0_X\}$ olduğundan, $\left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{A^{o}}\right)^{o} = \left(\overline{B}\right)^{o} = 1_X^{o} = 1_X$ olup, $A \leq \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}$ elde edilir. Buradan A kümesi, fuzzy α-I-açık kümedir.

$0_X < \mu_1 < B$ olacak şekilde $\mu_1 \leq X$ fuzzy kümesi için, $\overline{\mu_1^{o}}^{*} = \overline{\mu_1^{o}} = 0_X$

$B < \mu_2 < 1_X$ olacak şekilde $\mu_2 \leq X$ fuzzy kümesi için, $\overline{\mu_2^{o}}^{*} = \overline{\mu_2^{o}} = 1_X$

olup X uzayındaki fuzzy R-I-kapalı kümeler; $1_X, 0_X$ fuzzy kümeleridir. Ancak $1_X \wedge B = B \neq A$, $0_X \wedge B = 0_X \neq A$ olduğundan, A kümesi fuzzy $A_{R\text{-}I}$ küme değildir.

Örnek 5.1.6. $X = \{x, y\}$ kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, A\}$ fuzzy topolojisi ve $I = \{0_X\}$ fuzzy ideali ile (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X kümesinin A,B fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A(x) = 0.4$, $A(y) = 0.5$

$B(x) = 0.6$, $B(y) = 0.5$

B kümesi, fuzzy $A_{R\text{-}I}$ kümedir. Ancak B kümesi, fuzzy α-I-açık küme değildir.

B fuzzy kümesi için, $\overline{B^{o}}^{*} = \overline{A}^{*} = \overline{A} = 1_X - A = B$ olup, $B \in FRIC(X, \tau_X)$ olur. $1_X \in \tau_X$ olduğundan, $B = 1_X \wedge B$ elde edilir. Buradan B kümesi fuzzy $A_{R\text{-}I}$ kümedir.

Ancak $\left(\overline{B^{o}}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{B^{o}}\right)^{o}=\left(\overline{A}\right)^{o}=\left(1_X-A\right)^{o}=A$ ve $A\leq B$ olup, B kümesi fuzzy α-I-açık küme değildir.

Lemma 5.1.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B\leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Eğer $A\in Fc\eta IC(X,\tau_X)$ ve $B\in F\tau^{*}C(X,\tau_X)$ ise bu takdirde $A\wedge B\in Fc\eta IC(X,\tau_X)$ olur.

İspat. X uzayının herhangi bir fuzzy $c\eta$-kapalı A kümesini ve fuzzy τ^{*}-kapalı bir B kümesini alalım. Tanım 5.1.3.(ii) ve Tanım 5.1.1(i) gereği, $A\leq U$ olmak üzere $\overline{A}^{*}\leq U$ olacak şekilde $U\in\tau_X$ vardır ve $B=\overline{B}^{*}$ olur. $\overline{A}^{*}\wedge B=\overline{A}^{*}\wedge\overline{B}^{*}$ $\leq U\wedge\overline{B}^{*}\leq U$ ve $\overline{A\wedge B}^{*}\leq\overline{A}^{*}\wedge\overline{B}^{*}$ olduğundan, $\overline{A\wedge B}^{*}\leq U$ elde edilir. Ayrıca $A\wedge B\leq U\wedge B\leq U$ olduğu açıktır. Buradan, $A\wedge B\in Fc\eta IC(X,\tau_X)$ bulunur.

Teorem 5.1.1. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B\leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. A kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme (sırasıyla fuzzy $\alpha_{c\eta}N_5$-küme, fuzzy $\alpha_{r\eta}N_5$-küme) ve B kümesi fuzzy $c\eta$-kapalı küme (fuzzy τ^{*}-kapalı küme) ise bu takdirde $A\wedge B\leq X$ kümesi, fuzzy $\alpha_{c\eta}N_5$-kümedir.

İspat. X uzayının herhangi bir fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümesi A kümesi ve fuzzy $c\eta$-kapalı kümesi bir B kümesi olsun. Tanım 5.1.4 (i) gereği, $U\in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ve $V\in F\tau^{*}C(X,\tau_X)$ olmak üzere $A=U\wedge V$ olur. $A\wedge B=(U\wedge V)\wedge B=U\wedge(V\wedge B)$ elde edilir. Böylece Lemma 5.1.1 den $V\wedge B$ kümesi, fuzzy $c\eta$-kapalı kümedir. Dolayısıyla, $A\wedge B\leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_{c\eta}N_5$-kümedir.

Teorem 5.1.2. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B\leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. A kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme ve B kümesi fuzzy α-I-açık küme ise bu takdirde $A\wedge B\leq X$ kümesi, fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir.

İspat. X uzayının herhangi bir fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümesi A kümesi ve fuzzy α-I-açık kümesi bir B kümesi olsun. Tanım 5.1.4 (i) gereği $U \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ve $V \in F\tau^* C(X,\tau_X)$ olmak üzere $A = U \wedge V$ olur. $A \wedge B = (U \wedge V) \wedge B = (B \wedge U) \wedge V$ elde edilir. Önerme 4.3.1 (i) gereği, $B \wedge U$ kümesi fuzzy α-I-açık kümedir. V kümesi, fuzzy τ^*-kapalı küme olduğundan, $A \wedge B \leq X$ kümesi Tanım 3.1.4 (i) gereği, fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir.

Lemma 5.1.2. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Eğer $O \leq X$ fuzzy açık küme ise, bu takdirde $O \wedge \overline{A}^* \leq \overline{O \wedge A}^*$ dır.

(ii) Eğer $A \leq X_0 \leq X$ ise, bu takdirde $\overline{A_{X_0}}^* = \overline{A}^* \wedge X_0$ dır.(Yuksel ve ark.2009)

Lemma 5.1.3. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $B \leq A \leq X$, $A \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ve $B \in F\alpha IO(A,\tau_X/_A,I/_A)$ ise; o zaman $B \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ (Yuksel ve ark.2009).

(ii) $A \in FPIO(X,\tau_X)$ ve $B \in FSIO(X,\tau_X)$ ise $A \wedge B \in F\alpha IO(A,\tau_X/_A,I/_A)$

(iii) $A \in FPIO(X,\tau_X)$ ve $B \in FSIO(X,\tau_X)$ ise $A \wedge B \in FSIO(A,\tau_X/_A,I/_A)$

(iv) $A \in FPIO(X,\tau_X)$ve $B \in FSIO(X,\tau_X)$ ise $A \wedge B \in FPIO(B,\tau_X/_B,I/_B)$

(v) $A \in F\alpha IO(X,\tau_X)$ ve $B \in FSIO(X,\tau_X)$ ise $A \wedge B \in F\beta IO(A,\tau_X/_A,I/_A)$

İspat. (ii) X uzayının herhangi bir fuzzy pre-I-açık kümesi A kümesi ve fuzzy α-I-açık kümesi bir B kümesi olsun. Tanım 4.3.1 (iii),(i) gereği, $A \leq \left(\overline{A}^*\right)^o$ ve $B \leq \left(\overline{B^o}^*\right)^o$ olur. Buradan Lemma 5.1.2 (i) kullanılarak,

$$A \wedge B \leq \left(\overline{A}^*\right)^o \wedge \left(\overline{B^o}^*\right)^o = \left(\left(\overline{A}^*\right)^o \wedge \overline{B^o}^*\right)^o$$

$$\leq\left(\overline{\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}\wedge B^{o}}^{*}\right)^{o}\leq\left(\overline{\overline{A}^{*}\wedge B^{o}}^{*}\right)^{o}$$

$$\leq\left(\overline{\overline{A\wedge B^{o}}^{*}}^{*}\right)^{o}\leq\left(\overline{A\wedge B^{o}}^{*}\right)^{o}$$

$$\leq\left(\overline{A\wedge B^{o}}^{*}\right)^{o}\wedge A=\left(\left(\overline{A\wedge B^{o}}^{*}\right)^{o}\wedge A\right)_{A}$$

$$\leq\left(\overline{A\wedge B^{o}}^{*}\wedge A\right)_{A}^{o}=\left(\overline{\left(A\wedge B^{o}\right)_{A}}^{*}\right)_{A}^{o}=\left(\overline{\left(\left(A\wedge B^{o}\right)_{A}^{o}\right)_{A}}^{*}\right)_{A}^{o}$$

olup, $A\wedge B\in F\alpha IO\left(A,\tau_{X}/_{A},I/_{A}\right)$ olduğu görülür.

(iii) X uzayının herhangi bir fuzzy pre-I- açık kümesi A kümesi ve fuzzy semi-I- açık kümesi bir B kümesi olsun. Tanım 4.3.1 (iii) ve (ii) gereği, $A\leq\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}$ ve $B\leq\overline{\left(B^{o}\right)}^{*}$ olur. Buradan, Lemma 5.1.2 yi kullanarak

$$A\wedge B\leq\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}\wedge\overline{\left(B^{o}\right)}^{*}\leq\overline{\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}\wedge B^{o}}^{*}\leq\overline{\overline{A}^{*}\wedge B^{o}}^{*}$$

$$\leq\overline{\overline{A\wedge B^{o}}^{*}}^{*}\leq\overline{A\wedge B^{o}}^{*}$$

$$\leq\overline{A\wedge B^{o}}^{*}\wedge A=\overline{\left(A\wedge B^{o}\right)_{A}}^{*}=\overline{\left(\left(A\wedge B^{o}\right)_{A}^{o}\right)_{A}}^{*}$$

$$\leq\overline{\left(\left(A\wedge B\right)_{A}^{o}\right)_{A}}^{*}$$

elde edilir. Böylece $A\wedge B\in FSIO\left(A,\tau_{X}/_{A},I/_{A}\right)$ bulunur.

(iv) X uzayının herhangi bir fuzzy pre-I-açık kümesi A kümesi ve fuzzy semi-I-açık kümesi bir B kümesi olsun. Tanım 4.3.1 (iii) ve (ii) gereği, $A\leq\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}$ ve $B\leq\overline{\left(B^{o}\right)}^{*}$ olur. Buradan,

$$A\wedge B\leq\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}\wedge B=\left(\left(\overline{A}^{*}\right)^{o}\wedge B\right)_{B}^{o}$$

$$\leq \left(\left(\overline{A}^{*}\right)^{o} \wedge \overline{B^{o}}^{*} \right)^{o}_{B} \leq \left(\overline{\left(\overline{A}^{*}\right)^{o} \wedge B^{o}}^{*} \right)^{o}_{B}$$

$$\leq \left(\overline{\overline{A}^{*} \wedge B^{o}}^{*} \right)^{o}_{B} \leq \left(\overline{\overline{A \wedge B^{o}}^{*}}^{*} \right)^{o}_{B}$$

$$\leq \left(\overline{A \wedge B^{o}}^{*} \right)^{o}_{B} \leq \left(\overline{A \wedge B}^{*} \right)^{o}_{B}$$

$$\leq \left(\overline{A \wedge B}^{*} \right)^{o}_{B} \wedge B \leq \left(\overline{A \wedge B}^{*} \wedge B \right)^{o}_{B}$$

$$\leq \left(\overline{(A \wedge B)_{B}}^{*} \right)^{o}_{B}$$

elde edilir. Böylece $A \wedge B \in FPIO\left(B, \tau_X/_B, I/_B\right)$ bulunur.

(v) X uzayının herhangi bir fuzzy α-I-açık kümesi A kümesi ve fuzzy β-I-açık kümesi bir B kümesi olsun. Tanım 4.3.1 (i) ve (iv) gereği, $A \leq \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}$ ve $B \leq \overline{\left(\overline{B}^{*}\right)^{o}}$ olur. Buradan,

$$A \wedge B \leq \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o} \wedge \overline{\left(\overline{B}^{*}\right)^{o}} \leq \overline{\left(\left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o} \wedge \left(\overline{B}^{*}\right)^{o} \right)} \leq \overline{\overline{A^{o}}^{*} \wedge \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}}$$

$$\leq \overline{\overline{A^{o} \wedge \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}}^{*}} \leq \overline{\overline{A^{o} \wedge \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}}} = \overline{A^{o} \wedge \left(\overline{B}^{*}\right)^{o}} = \overline{\left(A^{o} \wedge \overline{B}^{*}\right)^{o}} \leq \overline{\left(\overline{A^{o} \wedge B}^{*}\right)^{o}}$$

$$\leq \overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o}} \wedge A \leq \overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o}} \wedge \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o} \leq \overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o} \wedge \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}}$$

$$\leq \overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o} \wedge \overline{A^{o}}^{*}} \leq \overline{\overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o} \wedge A^{o}}^{*}} \leq \overline{\overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o} \wedge A^{o}}}$$

$$\leq \overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*}\right)^{o} \wedge A^{o}} \wedge A = \overline{\left(\overline{A \wedge B}^{*} \wedge A\right)^{o}} \wedge A = \overline{\left(\overline{(A \wedge B)_{A}}^{*}\right)^{o}} \wedge A$$

$$\leq \overline{\left(\overline{(A \wedge B)_{A}}^{*} \wedge A\right)^{o}_{A}} \leq \overline{\left(\overline{(A \wedge B)_{A}}^{*}\right)^{o}_{A}}$$

$$\leq \overline{\left(\overline{(A \wedge B)_{A}}^{*}\right)^{o}_{A}} \wedge A \leq \left(\overline{\left(\overline{(A \wedge B)_{A}}^{*}\right)^{o}_{A}} \right)_{A}$$

elde edilir. Böylece $A \wedge B \in F\beta IO\left(A, \tau_X/_A, I/_A\right)$ bulunur.

Teorem 5.1.3. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $B \leq A \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Eğer A kümesi fuzzy α-I-açık küme ve B kümesi, A kümesinde fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme ise, bu takdirde B kümesi X uzayında fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir.

İspat. X uzayında herhangi bir fuzzy α-I-açık küme A kümesi ve A kümesinde herhangi bir fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme B kümesi olsun. Bu takdirde Tanım 5.1.4 (i) gereği**,** $\overline{V}_A^* = V$ olmak üzere $B = S \wedge V$ olacak şekilde A kümesinde, S fuzzy α-I-açık kümesi vardır. Buradan Lemma 5.1.2 (ii) gereği, $\overline{V}_A^* = A \wedge V$ olduğundan,

$$B = S \wedge V = S \wedge \overline{V}_A^* = S \wedge \left(A \wedge \overline{V}_A^*\right) = (S \wedge A) \wedge \overline{V}_A^*$$

elde edilir**.** Lemma 5.1.3 (i) ve Önerme 4.3.1 (i) gereği, $S \wedge A$ kümesi X uzayında fuzzy α-I-açık kümedir. Bu takdirde B kümesinin X uzayında fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme olduğu görülür.

Teorem 5.1.4. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A, B \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Eğer A kümesi fuzzy pre-I-açık küme ve B kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme (fuzzy $S_1 N_5$-küme) ise bu takdirde $A \wedge B$ kümesi, A kümesinde fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme(fuzzy $S_1 N_5$-küme)dir.

İspat. X uzayının herhangi bir fuzzy pre-I-açık kümesi A kümesi ve fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümesi (fuzzy $S_1 N_5$-kümesi) bir B kümesi olsun. Bu takdirde Tanım 5.1.4 (i) gereği, $\overline{V}^* = V$ olmak üzere $B = S \wedge V$ olacak şekilde $S \leq X$ fuzzy α-I-açık kümesi (fuzzy semi-I-açık kümesi) vardır. Buradan,

$$A \wedge B = A \wedge (S \wedge V) = (A \wedge S) \wedge (A \wedge V) = (A \wedge S) \wedge \left(A \wedge \overline{V}^*\right) = (A \wedge S) \wedge \overline{V}_A^*$$

olur. Lemma 5.1.3. (ii) ((iii)) gereği, $A \wedge S$ kümesi A kümesinde fuzzy α-I-açık (fuzzy semi-I-açık) kümedir. Buradan $A \wedge B$ kümesi, A kümesinde fuzzy $\alpha_1 N_5$-(fuzzy $S_1 N_5$-kümedir)kümedir.

Teorem 5.1.5. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzay ve herhangi $A,B \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Eğer A kümesi fuzzy semi-I-açık küme (fuzzy α-I-açık küme) ve B kümesi fuzzy P_1N_5-küme (fuzzy β_1N_5-küme) ise bu takdirde $A \wedge B$ kümesi, A kümesinde fuzzy P_1N_5-kümedir (fuzzy β_1N_5-kümedir).

İspat. X uzayının herhangi bir fuzzy semi-I-açık kümesi (fuzzy α-I-açık kümesi) A kümesi ve fuzzy P_1N_5-kümesi (fuzzy β_1N_5-kümesi) bir B kümesi olsun. Bu takdirde Tanım 5.1.4 (iii) gereği, $\overline{V}^* = V$ olmak üzere $B = S \wedge V$ olacak şekilde $S \leq X$ fuzzy pre-I-açık kümesi (fuzzy β-I-açık kümesi) vardır.

$$A \wedge B = A \wedge (S \wedge V) = (A \wedge S) \wedge (A \wedge V) = (A \wedge S) \wedge \left(A \wedge \overline{V}^*\right) = (A \wedge S) \wedge \overline{V}_A^*$$

olur**.** Lemma 5.1.3 (iv) ((v)) gereği, $A \wedge S$ kümesi A kümesinde fuzzy pre-I-açık (fuzzy β-I-açık) kümedir. Dolayısıyla $A \wedge B$ kümesi, A kümesinde fuzzy P_1N_5 (fuzzy β_1N_5) kümedir.

Tanım 5.1.5. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının her fuzzy τ^*-I-yoğun kümesi bu uzayda fuzzy açık küme oluyorsa, bu takdirde (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayına **fuzzy I-submaximal** uzay denir.

Tanım 5.1.6. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi verilsin. Her bir $A \in \tau_X$ kümesi için, $\overline{A}^* \in \tau_X$ oluyorsa, bu takdirde (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayına **fuzzy P-I-disconnected** uzay denir.

Lemma 5.1.6. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. X uzayı fuzzy P-I-disconnected uzay ise bu takdirde $F\alpha IO(X,\tau_X) = FSIO(X,\tau_X)$ olur

İspat. Fuzzy α-I-açık küme, fuzzy semi-I-açık küme olduğundan, $F\alpha IO(X,\tau_X) \leq FSIO(X,\tau_X)$ …(1) olur. Herhangi bir $A \leq X$ fuzzy kümesi, fuzzy semi-I-açık küme olsun. Tanım 4.3.1 (ii) gereği , $A \leq \overline{A^o}^*$ olur. A^o kümesi fuzzy açık küme ve X uzayı fuzzy P-I-disconnected uzay olduğundan $\overline{A^{o}}^{*} \in \tau_X$ olur. Buradan $\overline{A^{o}}^{*} = \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}$ ve $A \le \left(\overline{A^{o}}^{*}\right)^{o}$ olup $FSIO(X,\tau_X) \le F\alpha IO(X,\tau_X)$ …(2) olur. Buna göre (1) ve (2) gereği, $F\alpha IO(X,\tau_X) = FSIO(X,\tau_X)$ elde edilir.

Teorem 5.1.6. (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayı fuzzy P-I-disconnected uzay olsun. Herhangi bir $A \le X$ fuzzy kümesi verilsin. $A \le X$ fuzzy kümesinin fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme olması için gerek ve yeter şart $A \le X$ fuzzy kümesinin fuzzy $S_1 N_5$-küme olmasıdır.

İspat. Tanım 5.1.4 ve Sonuç 5.1.1 gereği ispat açıktır.

5.2. Fuzzy A_{R-I} Sürekli Fonksiyonların Zayıf Formları

Tanım 5.2.1. $f:(X,\tau_X,I) \to (Y,\tau_Y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \tau_Y$ kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında fuzzy A_{R-I} küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy A_{R-I} sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 5.2.2. $f:(X,\tau_X,I) \to (Y,\tau_Y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \tau_Y$ kümesi için,

1) $f^{-1}(V) \le X$ kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli fonksiyon,**

2) $f^{-1}(V) \le X$ kümesi fuzzy $S_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $S_1 N_5$-sürekli fonksiyon,**

3) $f^{-1}(V) \le X$ kümesi fuzzy $P_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $P_1 N_5$-sürekli fonksiyon,**

4) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\beta_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\beta_1 N_5}$-sürekli fonksiyon,**

5) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\alpha_{c\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

6) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $S_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{S_{c\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

7) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $P_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{P_{c\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

8) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\beta_{c\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

9) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\alpha_{r\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

10) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $S_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{S_{r\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

11) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $P_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{P_{r\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon,**

12) $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\beta_{r\eta} N_5}$-sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 5.2.3. $f:(X,\tau_X,I) \to (Y,\tau_Y)$ fonksiyonu verilsin.

1) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\alpha_1 N_5}$-irresolute fonksiyon,**

2) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $S_1 N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $S_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{S_1 N_5}$-irresolute fonksiyon,**

3-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $P_1 N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $P_1 N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{P_1 N_5}$-irresolute fonksiyon,**

4-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $\beta_1 N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\beta_1 N_5$ -küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\beta_1 N_5}$-irresolute fonksiyon,**

5-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\alpha_{c\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

6-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $S_{c\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $S_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{S_{c\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

7-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $P_{c\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $P_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{P_{c\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

8-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\beta_{c\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

9-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\alpha_{r\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

10-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $S_{r\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $S_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{S_{r\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

11-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $P_{r\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $P_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{P_{r\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon,**

12-) Eğer her $V \leq Y$ fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-kümesi için, $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-küme ise; f fonksiyonuna **fuzzy $\boldsymbol{\beta_{r\eta} N_5}$-irresolute fonksiyon** denir.

Tanım 5.2.1. ve Tanım 5.2.2 'den yararlanarak aşağıdaki diagram elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
\text{fuzzy süreklilik} \arrow[r] \arrow[d] & \text{fuzzy } \alpha\text{-I-süreklilik} \arrow[r] \arrow[d] & \text{fuzzy pre-I- süreklilik} \arrow[d] \\
\textbf{fuzzy } \boldsymbol{A_{R-I}}\textbf{-süreklilik} \arrow[r] & \textbf{fuzzy } \boldsymbol{\alpha_1 N_5}\textbf{-süreklilik} \arrow[r] & \textbf{fuzzy } \boldsymbol{P_1 N_5}\textbf{-süreklilik}
\end{tikzcd}$$

Diagram 5.2.1

Uyarı 5.2.1. Diagram 5.2.1 'de verdiğimiz geçişlerin karşıtlarının genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir

Örnek 5.2.1. $X=\{a,b\}$ kümesinde $\tau_X=\{0_X,1_X,A,B\}$ fuzzy topolojisi ve $I=\{0_X\}$ fuzzy ideali ile birlikte (X,τ_X,I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve $Y=\{x,y\}$ kümesinde de $\tau_Y=\{0_Y,1_Y,C\}$ fuzzy topolojisi ile (Y,τ_Y) fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A\leq X$, $B\leq X$ ve $C\leq Y$ fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(a)=0{,}8$, $A(b)=0{,}9$

$B(a)=0{,}2$, $B(b)=0{,}3$

$C(x)=0{,}8$, $C(y)=0{,}7$

$f:(X,\tau_X,I)\to(Y,\tau_Y)$ fonksiyonu $f(a)=x$, $f(b)=y$ olarak tanımlanıyor. f fonksiyonu fuzzy A_{R-I} sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $C\in\tau_Y$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(C)(a)=C(f(a))=C(x)=0{,}8$, $f^{-1}(C)(b)=C(f(b))=C(y)=0{,}7$ olur. $f^{-1}(C)=D$ diyelim. $D\leq X$ olup, $D(a)=0{,}8$, $D(b)=0{,}7$, olur. Bu durumda, $\overline{D^{o}}^{*}=\overline{B}^{*}=\overline{B}=1_X-B=D$ olup, D kümesi X uzayında fuzzy R-I-kapalı küme ve $A\in\tau_X$ olduğundan, $D=A\wedge D$ elde edilir. Dolayısıyla D kümesi fuzzy A_{R-I} kümedir.

(2) $1_Y,0_Y\in\upsilon_Y$ fuzzy kümeleri için, $f^{-1}(1_Y)=1_X, f^{-1}(0_Y)=0_X$ olup, $1_Y,0_Y$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy A_{R-I} kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy A_{R-I} sürekli bir fonksiyondur. Ancak $\left(\overline{D^{o}}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{D^{o}}\right)^{o}=\left(\overline{B}\right)^{o}=(1_X-B)^{o}=B\leq D$ olup, D kümesi fuzzy α-I-açık küme değildir. Böylece f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 5.2.2. $X=\{x,y,z\}$ kümesinde $\tau_X=\{0_X,1_X,A\}$ fuzzy topolojisi, $I=\{0_X\}$ fuzzy ideali ile birlikte (X,τ_X,I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve

$\upsilon_X = \{0_X, 1_X, B\}$ fuzzy topolojisi ile (X, υ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A \le X$ fuzzy kümesi, $B \le X$ fuzzy kümesi aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$A(x) = 0,7 \;\;,\;\; A(y) = 0,5 \;\;,\;\; A(z) = 0,7$$
$$B(x) = 0,7 \;\;,\;\; B(y) = 0,6 \;\;,\;\; B(z) = 0,7$$

$f : (X, \tau_X, I) \to (X, \upsilon_X)$ fonksiyonu birim fonksiyon olarak tanımlansın.f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy A_{R-I} sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $B \in \upsilon_X$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(B) = B$ olur. Buradan $\left(\overline{B^o}^*\right)^o = \left(\overline{B^o}\right)^o = \left(\overline{A}\right)^o = 1_X^o = 1_X$ olduğundan, $B \le \left(\overline{B^o}^*\right)^o$ bulunur. Böylece B kümesi fuzzy α-I-açık kümedir.

(2) $1_X, 0_X \in \upsilon_X$ fuzzy kümeleri için, $f^{-1}(1_X) = 1_X, f^{-1}(0_X) = 0_X$ olup, $1_X, 0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy α-I-açık kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyondur. $0_X < \mu_1 < A$, $A < \mu_2 < 1_X$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2 \le X$ fuzzy kümeler olsun. Bu durumda $\overline{\mu_1^o}^* = 0_X \ne \mu_1$, $\overline{\mu_2^o}^* = \overline{A}^* = \overline{A} = 1_X \ne \mu_2$, $\overline{A^o}^* = \overline{A}^* = \overline{A} = 1_X \ne A$, olduğundan (X, τ_X, I) fuzzy topolojik uzayındaki fuzzy R-I-kapalı kümeler 0_X ve 1_X sabit fuzzy kümeleridir. Ancak $B \ne A \wedge 0_X$ ve $B \ne 1_X \wedge A$ olup B fuzzy kümesi fuzzy A_{R-I} küme değildir. Böylece f fonksiyonu fuzzy A_{R-I} sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 5.2.3. $X = \{x, y, z\}$ kümesinde $\tau_X = \{0_X, 1_X, A\}$ fuzzy topolojisi, $I = \{0_X\}$ fuzzy ideali ile birlikte (X, τ_X, I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve $\upsilon_X = \{0_X, 1_X, B\}$ fuzzy topolojisi ile (X, υ_X) fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A \le X$ fuzzy kümesi, $B \le X$ fuzzy kümesi ve $C \le X$ fuzzy kümesi aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(x)=0,7$, $A(y)=0,2$, $A(z)=0,5$
$B(x)=0,6$, $B(y)=0,5$, $B(z)=0,5$
$C(x)=0,3$, $C(y)=0,8$, $C(z)=0,5$

$f:(X,\tau_X,I)\to(X,\upsilon_X)$ fonksiyonu birim fonksiyon olarak tanımlansın. f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$ sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $B\in\upsilon_X$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(B)=B$ olur. Buradan $\left(\overline{B}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{B}\right)^{o}=1_X$ olduğundan, $B\le\left(\overline{B}^{*}\right)^{o}$ bulunur. Böylece ,B fuzzy kümesi fuzzy pre-I-açık kümedir.

(2) $1_X,0_X\in\upsilon_X$ fuzzy kümeleri için, $f^{-1}(1_X)=1_X, f^{-1}(0_X)=0_X$ olup, $1_X,0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy pre-I-açık kümelerdir. (1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy α-I-sürekli bir fonksiyondur. Ancak;

$0_X<\mu_1<A$ olacak şekilde $\mu_1\le X$ fuzzy kümesi için, $\left(\overline{\mu_1^{o}}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{\mu_1^{o}}\right)^{o}=0_X$

$A<\mu_2<1_X$ olacak şekilde $\mu_2\le X$ fuzzy kümesi için, $\left(\overline{\mu_2^{o}}^{*}\right)^{o}=\left(\overline{\mu_2^{o}}\right)^{o}=1_X$

olup (X,τ_X,I) fuzzy topolojik uzayındaki fuzzy α-I-açık kümeler $0_X,1_X,A$ ve μ_2 fuzzy kümeleridir.

$0_X\le\mu_3\le 1_X-A$ olacak şekilde $\mu_3\le X$ fuzzy kümesi için, $\overline{\mu_3}^{*}=\overline{\mu_3}=1_X-A\ne\mu_3$
$1_X-A\le\mu_4\le 1_X$ olacak şekilde $\mu_4\le X$ fuzzy kümesi için, $\overline{\mu_4}^{*}=\overline{\mu_4}=1_X\ne\mu_4$ olduğundan X uzayındaki fuzzy τ^{*}-kapalı kümeler $0_X,1_X,C$ fuzzy kümeleridir. $B\ne C\wedge A$, $B\ne C\wedge\mu_2$, $1_X\wedge A\ne B$, $1_X\wedge\mu_2\ne B$, $0_X\wedge A\ne B$, $0_X\wedge\mu_2\ne B$ olup B kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$ -küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$ -sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 5.2.4. $X=\{a,b,c\}$ kümesinde $\tau_X=\{0_X,1_X,B\}$ fuzzy topolojisi, $I=\{0_X\}$ fuzzy ideali ile birlikte (X,τ_X,I) fuzzy ideal topoloik uzayı ve

$\upsilon_X = \{0_X, 1_X, A\}$ fuzzy topolojisi ile (X, υ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayı verilsin. $A, B, C \leq X$ fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$A(a) = 0{,}5$, $A(b) = 0{,}4$, $A(c) = 0{,}5$
$B(a) = 0{,}5$, $B(b) = 0{,}6$, $B(c) = 0{,}5$
$C(a) = 0{,}6$, $C(b) = 0{,}7$, $C(c) = 0{,}5$

$f : (X, \tau_X, I) \to (X, \upsilon_X, I)$ fonksiyonu birim fonksiyon olarak tanımlansın. f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli bir fonksiyondur. Ancak f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

(1) $A \in \upsilon_X$ fuzzy kümesi için, $f^{-1}(A) = A$ olur. $\left(\overline{C^{o}}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{C^{o}}\right)^{o} = \left(\overline{B}\right)^{o} = 1_X$

olduğundan, $C \in F\alpha IO(X, \tau_X)$ olur. Ayrıca $\overline{A}^{*} = \overline{A} = 1_X - B = A$ olup $A \in F\tau^{*}C(X, \tau_X)$ olur. Buradan, $A = A \wedge C$ olup A kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir.

(2) $1_X, 0_X \in \upsilon_X$ fuzzy kümeleri için, $f^{-1}(1_X) = 1_X, f^{-1}(0_X) = 0_X$ olup, $1_X, 0_X$ sabit fuzzy kümeleri fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümelerdir.

(1) ve (2) gereği, f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli bir fonksiyondur. Ancak,

$\left(\overline{A}^{*}\right)^{o} = \left(\overline{A}\right)^{o} = (1_X - B)^{o} = 0_X$ olup $\left(\overline{A}^{*}\right)^{o} = 0_X \leq A$ olduğundan, A kümesi fuzzy pre-I-açık küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu fuzzy pre-I-sürekli bir fonksiyon değildir.

Teorem 5.2.1. $f : (X, \tau_X, I) \to (Y, \tau_Y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli (sırasıyla fuzzy $\alpha_1 N_5$-irresolute, fuzzy $S_1 N_5$-sürekli, fuzzy $S_1 N_5$-irresolute) fonksiyon ve $A \leq X$ kümesi fuzzy pre-I-açık küme ise, bu takdirde $f/_A : A \to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu da fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli(sırasıyla fuzzy $\alpha_1 N_5$-irresolute, fuzzy $S_1 N_5$-sürekli, fuzzy $S_1 N_5$-irresolute) fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V \leq X$ fuzzy açık kümesini alalım. Hipotezden f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V) \leq X$ kümesi fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir. Hipotezden $A \leq X$ kümesi, fuzzy pre-I-açık küme olduğundan ve

Teorem 5.1.4 gereği, $\left(f/_{A}\right)^{-1}(V)=A\wedge f^{-1}(V)$ kümesi, A kümesinde fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir. Dolayısıyla fuzzy $f/_{A}:A\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu da fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli fonksiyondur.

Teorem 5.2.2. $f:(X,\tau_X,I)\to(Y,\tau_Y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu fuzzy P_1N_5-sürekli (fuzzy P_1N_5-irresolute) fonksiyon ve $A\le X$ kümesi fuzzy semi-I-açık küme ise, bu takdirde $f/_{A}:A\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu da fuzzy P_1N_5-sürekli (fuzzy P_1N_5-irresolute) fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V\le Y$ fuzzy açık kümesini alalım. Hipotezden f fonksiyonu fuzzy P_1N_5-sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)\le X$ kümesi fuzzy P_1N_5-kümedir. Buradan $A\le X$ kümesi fuzzy semi-I-açık küme olduğundan ve Teorem 5.1.5 gereği, $\left(f/_{A}\right)^{-1}(V)=A\wedge f^{-1}(V)$ kümesi, A kümesinde fuzzy P_1N_5-kümedir. Böylece $f/_{A}:A\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonunun fuzzy P_1N_5-sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 5.2.3. $f:(X,\tau_X,I)\to(Y,\tau_Y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu fuzzy β_1N_5-sürekli (fuzzy β_1N_5-irresolute) fonksiyon ve $A\le X$ kümesi fuzzy α-I-açık küme ise, bu takdirde $f/_{A}:A\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu da fuzzy β_1N_5-sürekli(fuzzy β_1N_5-irresolute) fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V\le Y$ fuzzy açık kümesini alalım. Hipotezden f fonksiyonu fuzzy β_1N_5 -sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)\le X$ kümesi fuzzy β_1N_5 kümedir. Buradan $A\le X$ kümesi fuzzy α-I-açık küme olduğundan ve Teorem 5.1.5 gereği, $\left(f/_{A}\right)^{-1}(V)=A\wedge f^{-1}(V)$ kümesi, A kümesinde fuzzy β_1N_5-kümedir. Böylece $f/_{A}:A\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonunun fuzzy β_1N_5-sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 5.2.4. $f:(X,\tau_X,I)\to(Y,\tau_Y)$ ve $g:(Y,\tau_Y)\to(Z,\tau_Z)$ fonksiyonları verilsin. Eğer g fonksiyonu fuzzy sürekli fonksiyon ve f fonksiyonu fuzzy $\alpha_I N_5$-sürekli (sırasıyla fuzzy $S_I N_5$-sürekli, fuzzy $P_I N_5$-sürekli, fuzzy $\beta_I N_5$-sürekli, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-sürekli) fonksiyon ise, bu takdirde $gof:(X,\tau_X,I)\to(Z,\tau_Z)$ bileşke fonksiyonuda fuzzy $\alpha_I N_5$-sürekli (sırasıyla fuzzy $S_I N_5$-sürekli, fuzzy $P_I N_5$-sürekli, fuzzy $\beta_I N_5$-sürekli, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-sürekli, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-sürekli) fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $W \le Z$ fuzzy açık kümesini alalım. Hipotez gereği, g fonksiyonu fuzzy sürekli fonksiyon olduğundan, $g^{-1}(W) \le Y$ kümesi fuzzy açık kümedir. f fonksiyonu fuzzy $\alpha_I N_5$-sürekli fonksiyon olduğundan $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)$ kümesi X uzayında fuzzy $\alpha_I N_5$-kümedir. Buradan $gof:(X,\tau_X,I)\to(Z,\tau_Z)$ bileşke fonksiyonunun fuzzy $\alpha_I N_5$-sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 5.2.5. $f:(X,\tau_X,I_1)\to(Y,\tau_Y,I_2)$ ve $g:(Y,\tau_Y,I_2)\to(Z,\tau_Z,I_3)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f ve g fonksiyonlarının her ikisi de $\alpha_I N_5$-irresolute fonksiyon (fuzzy $S_I N_5$-irresolute, fuzzy $P_I N_5$-irresolute, fuzzy $\beta_I N_5$-irresolute, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$ -irresolute, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $S_{r\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $P_{r\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$-irresolute) ise, bu takdirde $gof:(X,\tau_X,I_1)\to(Z,\tau_Z,I_3)$ bileşke fonksiyonu da fuzzy $\alpha_I N_5$-irresolute (fuzzy $S_I N_5$-irresolute, fuzzy $P_I N_5$-irresolute, fuzzy $\beta_I N_5$-irresolute, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $S_{c\eta} N_5$-irresolute, fuzzy $P_{c\eta} N_5$-

irresolute, fuzzy $\beta_{c\eta}N_5$-irresolute, fuzzy $\alpha_{r\eta}N_5$-irresolute, fuzzy $S_{r\eta}N_5$-irresolute, fuzzy $P_{r\eta}N_5$-irresolute, fuzzy $\beta_{r\eta}N_5$-irresolute) fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $W \leq Z$ fuzzy α-I-açık kümesini alalım. Hipotez gereği, g fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$-irresolute fonksiyon olduğundan, $g^{-1}(W) \leq Y$ kümesi fuzzy α-I-açık kümedir. f fonksiyonu fuzzy $\alpha_1 N_5$-irresolute fonksiyon olduğundan $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayında fuzzy $\alpha_1 N_5$-kümedir. Buradan $gof : (X, \tau_X, I_1) \to (Z, \tau_Z, I_3)$ bileşke fonksiyonunun fuzzy $\alpha_1 N_5$-irresolute fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 5.2.6. (X, τ_X, I) fuzzy ideal topolojik uzayı P-I-disconnected uzay olsun. Bu takdirde $f : (X, \tau_X, I) \to (Y, \tau_Y)$ fonksiyonunun fuzzy $\alpha_1 N_5$-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun fuzzy $S_1 N_5$-sürekli fonksiyon olmasıdır.

İspat. Teorem 5.1.6 ve Tanım 5.2.1 gereği, ispat açıktır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

İkinci ve üçüncü bölümde; sırasıyla üstten ve alttan na sürekli çoğul değerli fonksiyon, üstten ve alttan strong na presürekli çoğul değerli fonksiyon ve üstten ve alttan strong na sürekli çoğul değerli fonksiyon türlerini tanımladık. Daha sonra üstten ve alttan na sürekli çoğul değerli fonksiyon, üstten ve alttan strong na presürekli çoğul değerli fonksiyonların özelliklerini inceleyip ayrışımlarını elde ettik. Tanımladığımız fonksiyonları ve özelliklerini ideal topolojik uzaylara uygulamaları incelenebilir.

Dördüncü bölümde; (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayında pre α-I-sürekli fonksiyon ve fuzzy β-α-I-sürekli fonksiyon türlerini tanımladık. Daha sonra bu fonksiyonların özelliklerini inceleyip ayrışımlarını elde ettik. Tanımladığımız fonksiyonlara benzer şekilde yeni fonksiyonlar tanımlanabilir.

Beşinci bölümde; (X,τ_X,I) fuzzy ideal topolojik uzayında fuzzy R-I-açık küme, fuzzy R-I-kapalı küme, fuzzy A_{R-I} küme, fuzzy $c\eta$ -kapalı küme, fuzzy $r\eta$-kapalı küme, fuzzy $c\eta$ küme, fuzzy $r\eta$ küme fuzzy $\alpha_I N_5$ -küme, fuzzy $S_I N_5$ -küme, fuzzy $P_I N_5$ -küme fuzzy $\beta_I N_5$ -küme, fuzzy $\alpha_{c\eta} N_5$ -küme, fuzzy $S_{c\eta} N_5$ -küme, fuzzy $P_{c\eta} N_5$ -küme, fuzzy $\beta_{c\eta} N_5$ -küme, fuzzy $\alpha_{r\eta} N_5$ -küme, fuzzy $S_{r\eta} N_5$ -küme, fuzzy $P_{r\eta} N_5$ -küme, fuzzy $\beta_{r\eta} N_5$ -küme olarak adlandırdığımız yeni küme kavramlarını verdik. Bu kümeleri kullanarak da çeşitli fonksiyon türleri tanımladık. Daha sonra bu fonksiyonların özelliklerini inceleyip ayrışımlarını elde ettik. Tanımladığımız kümelere benzer şekilde yeni kümeler ve fonksiyonlar tanımlanabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Akdağ M., 2003, On super continuous multifunctions, Acta Math. Hungar, 99 (1-2), 143-153.

[2] Akdağ M., 2007, Weak and strong forms of continuity of multifunctions, Chaos, Solitons and Fractals 32, 1337–1344.

[3] Azad K.K., 1981, Fuzzy semi-continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, J. Math. Anal. Appl., 82, 14-32.

[4] Berge C., 1959, Escapes Topologiques: Fonctions multivoques, Dunod, Paris.

[5] Bourbaki N., 1966, General Topology, Part 1, Addision-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., Paris.

[6] Chae G. I., Noiri T., 1986, Univ. Ulsan Rep., 17, 121-25.

[7] Chae Gyu Ihn, Noiri T., Lee Do Won, 1986, On na-continuous functions, Kyungpook Math. J.,26(1),73-79

[8] Chang C. L.,1968, Fuzzy topological space, J. Math. Anal. Appl., 24, 182-190.

[9] Crossley S.G., Hildebrand S.K., 1971, On semi closure, Texas J. Sci., 22, 99-112.

[10] Gürsel Ç.,E.,2009, Topolojik ve ideal topolojik uzaylarda süreklilik ve uzay çeşitleri üzerine bir çalışma,Doktora Tezi,Selçuk Ünvt.Fen Bil.Enst.,Konya.

[11] Hatır E., Jafari S., 2007, Fuzzy semi-I-open sets and fuzzy semi-I-continuity via fuzzy idealization, Chaos, Solitons & Fractals, 34, 1220-1224.

[12] Janković D. S., 1983, On locally irreducible spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sėr. I, 97, 59-72.

[13] Joseph J.E.,1976, Characterizations of nearly compact spaces, Boll. Un. Math. Montly,13,311-321.

[14] Keskin A., 2009, On fuzzy β-I-open sets and fuzzy β-I-continuous functions, Chaos, Solitons & Fractals, 42, 1372-1377.

[15] Levine N., 1963, Semi-open sets and semi continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70, 36-41

[16] Lowen R., 1976, Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, J. Math. Anal. Appl., 56, 621-633.

[17] Maheshwari S.N., Tapi U., 1979, Note on Some Applications on Feebly Open Sets, M.B.J. Univ. Saugar.

[18] Mashhour A.S., Abd El-Monsef M.E., El-Deeb S.N., 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53.

[19] Mashhour A.S., El-Deeb S.N., Hasanein I.A, Noiri T.,1983, On p-regular spaces, Bull. Math. Soc. Sci.Math. R.S. Roumanie, 27 (75), 311-315.

[20] Mashhour A.S., Abd El-Monsef M.E., Hasanein I.A, Noiri T., 1984, Strongly compact spaces, Delta J. Sci., 8 (1), 30-46.

[21] Mahmoud R. A., 1997, Fuzzy ideals, fuzzy local function and *-fuzzy topology, J. FuzzyMath. 5(1), 165-172.

[22] Mahmoud R.A., Monsef M.E., Nasef A.A., 1989, J.Quatar Univ. Sci. Bull., 17-25.

[23] Nasef A. A. and Noiri T., 1998, Strong forms of faint continuity, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math., 19, 21-28.

[24] Nasef A. A. and Noiri T., 2001, Strongly Na-Precontinuous Functions, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (10), 1495-1500.

[25] Nasef A. A., Mahmoud R. A., 2002, Some topological applications via fuzzy ideals, Chaos, Solitons & Fractals, 13, 825-831.

[26] Nasef A. A., Hatır E., 2009, On fuzzy pre-I-open sets and a decomposition of fuzzy-I-continuity, Chaos, Solitons & Fractals, 40, 1185-1189.

[27] Njåstad O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J.Math., 15, 961-970.

[28] Noiri T., 1988, Almost α-continuous functions, Kyungpook Math. J., 28, 71-77.

[29] Noiri T., Popa V., 1993, Almost weakly continuous multifunctions, Demonstratio Math., 26, 363-380

[30] Noiri T., Popa V., 2000, On upper and lower M-continuous multifunctions, Fılomat, 14, 73-86.

[31] Pao-Ming P., Ying-Ming L., 1980, Fuzzy Topology I. Neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, J. Math. Anal. Appl., 76, 571-599.

[32] Popa V., 1987, Properties of H-almost continuous functions, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R:S: Roumanie (N:S), 31(79), 163-168.

[33] Rose D.A., Mahmoud R.A., 1994, On Spaces Via Dense Sets and SMPC Functions, Kyungpook Math. J., 34(1), 109-116.

[34] Sarkar D., 1997, Fuzzy ideal theory fuzzy local function and generated fuzzy topology, Fuzzy Sets and Systems, 87, 117-123.

[35] Singal M.K., Mathur A., 1969, On nearly compact spaces, Bull. Un. Mat. Ital., 4 (6), 702-710.

[36] Smithson R.E.,1978, Almost and weak continuity for multifunctions, Bull. Calcutta Math. Soc., 70(6), 383-390.

[37] Stone M.H., 1937, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer.Math. Soc., 41(3), 375–481.

[38] Velicko N.V., 1968, H-closed topological spaces, Amer Math. Soc. Transl., 78, 103-118.

[39] Yuksel S., Gursel Caylak E., Acikgoz A., 2009, On fuzzy α-I-continuous and fuzzy α-I-open functions, Chaos, Solitons & Fractals, 41, 1691-1696.

[40] Yüksel Ş., 2009, Genel topoloji, 6. Baskı, Konya.

[41] Zadeh L. A., 1965, Fuzzy sets, Inform. and Control, 8, 338-353.

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Berrak BİLİK	İmza:	

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	**Kızılırmak İlköğretim** Okulu		**Avanos/Nevşehir**	
Ortaöğretim	**Kızılırmak İlköğretim** Okulu		**Avanos/Nevşehir**	
Lise	Anadolu **Öğretmen** Lisesi		**Nevşehir**	
Lisans	**Selçuk Üniversitesi**	Matematik **Öğretmenliği**	Konya	
Yüksek Lisans	**Selçuk Üniversitesi**	Matematik **Öğretmenliği**	Konya	