T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Atiye AYYILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç.Dr.Süleyman SOLAK

Konya–2011

ii

Bilimsel Etik Sayfası

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin

Adı Soyadı:Atiye AYYILDIZ

Numarası:085202031005

Ana Bilim / Bilim Dalı:Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi

Programı: Matematik Öğretmenliği — Tezli Yüksek Lisans ☑ — Doktora ☐

Tezin Adı:Hankel Dönüşümleri ve Özellikleri

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Öğrencinin imzası
(İmza)

iii

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	
	Adı Soyadı: Atiye AYYILDIZ
	Numarası:085202031005
	Ana Bilim / Bilim Dalı:Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitim
	Programı:Matematik Öğretmenliği Tezli Yüksek Lisans ☑ Doktora ☐
	Tez Danışmanı:Doç. Dr. Süleyman SOLAK
	Tezin Adı:Hankel Dönüşümleri ve Özellikleri

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan Hankel Dönüşümleri ve Özellikleri **başlıklı bu çalışma 14/03/2011 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.**

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman veÜyeler	İmza
Doç. Dr	Süleyman SOLAK (Danışman)	
Yrd. Doç. Dr.	Erhan ERTEKİN (Üye)	
Yrd. Doç. Dr.	İbrahim YALÇINKAYA (Üye)	

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisans öğrenimim boyunca bana ders veren, cebiri sevdiren, matematiksel çalışmalara yönlendiren, yüksek lisans yapma isteği uyandıran değerli hocalarım Prof. Dr. Hasan ŞENAY, Doç. Dr. Cengiz ÇINAR, Yrd. Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana destek veren, sabırla sorularımı cevaplayan, uzakta öğretmenlik mesleğini yürüttüğüm için yeterli zamanı ayıramasamda yardımcı olarak bu açığı kapatmamı sağlayan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Süleyman SOLAK' a teşekkür ediyorum.

Gerektiğinde kendilerinden fedakarlık edip bugünlere gelmemi sağlayan, beni okutan, her kararımda beni destekleyen anneme, babama, hırslanarak sabırla mücadele ederek ilerlememi sağlayan abime ve kardeşime teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans yaptığım süre içinde yüksek lisans bursu vererek işte çalışma gerekliliğini ortadan kaldırıp tamamen tez çalışmalarıma yoğunlaşmamı sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu' na teşekkür ediyorum.

Türkçe Özet Formu

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin			
	Adı Soyadı:Atiye AYYILDIZ		
	Numarası:085202031005		
	Ana Bilim / Bilim Dalı:Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi		
	Programı: Matematik Öğretmenliği	Tezli Yüksek Lisans ☒	Doktora ☐
	Tez Danışmanı: Doç.Dr.Süleyman SOLAK		
	Tezin Adı: Hankel Dönüşümleri ve Özellikleri		

ÖZET

HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu çalışmada ilk olarak; elemanları $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$ tamsayılar dizisinden alınan ve $h_{i,j}=a_{i+j-1}$ ile tanımlanan Hankel matrislerinin Hankel determinantları ve Hankel dönüşümleri verilmiştir. Ayrıca Hankel dönüşümün, İnvert dönüşüm altında invaryant olduğu tarafımızdan farklı bir şekilde ispatlanmıştır. Daha sonra Hankel dönüşüm ile ilgili olarak invert ve binomial dönüşümler verilmiş ve bu dönüşümler ile ilgili bazı özel yapıda diziler incelenmiştir.

İngilizce Özet Formu

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı: Atiye AYYILDIZ
	Numarası:085202031005
	Ana Bilim / Bilim Dalı: Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi
	Programı: Matematik Öğretmenliği Tezli Yüksek Lisans☒ Doktora ☐
	Tez Danışman:Doç.Dr.Süleyman SOLAK
	Tezin İngilizce Adı:The Hankel Transform and Some Of Its Properties

SUMMARY

THE HANKEL TRANSFORMS AND SOME OF ITS PROPERTIES

In this study, firstly Hankel determinants and Hankel transforms of Hankel matrices are given such that the elements $h_{i,j} = a_{i+j-1}$ of Hankel matrices are taken from integer sequences $A=\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$. Also, Hankel transform is invariant under the invert transform has been proven by us with a different method. Then invert and binomial transforms are given which are related to Hankel transforms. On the other hand, the some sequences of special structure which related to this transforms are examined.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bu çalışmada bazı dönüşümler ve bağıntılardan bahsedilecektir. Burada öncelikle çalışmamızda geçen bazı kavramların tanımlarını verelim. Genel olarak $n \times n$ tipinde Hankel matrisi $H_n = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$ ile tanımlıdır. Bu matrisi açık olarak yazarsak,

$$H_n = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

Hankel matrislerinin genel özellikleri ile ilgili çalışmalar literatürde çok sayıda mevcuttur. Ancak Hankel dönüşümleri ile ilgili çalışmalar literatürde oldukça yeni olup 'Hankel dönüşüm' kavram olarak literatüre 2001 yılında Layman tarafından girilmiştir.

Bu çalışmada elemanları $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ tamsayılar dizisinden alınan ve $h_{i,j} = a_{i+j-1}$ ile tanımlanan Hankel matrislerinin Hankel determinantlarını ve bazı dönüşümleri ele alacağız.

Tanım 1.1. $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ tamsayılar dizisi olmak üzere $h_{i,j} = a_{i+j-1}$ elemanları ile tanımlı A'nın sonsuz mertebeli Hankel matrisi

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır (Layman, 2001).

Biz bu çalışmada H'nin $n \times n$ alt matrisini H_n ve H_n matrisinin determinantınıda h_n ile göstereceğiz yani, $h_n = \det(H_n)$ olarak gösterilecektir.

Örnek 1.1. $\{1,1,2,3,5,...\}$ Fibonacci dizisinin elemanları ile tanımlı 4×4 tipinde Hankel matrisi

$$H_4=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&5\\2&3&5&8\\3&5&8&13\end{pmatrix}$$

olup Hankel determinantları sırasıyla;

$\det(H_1)=h_1=1,\ \det(H_2)=h_2=1,\ \det(H_3)=h_3=0$ ve $\det(H_4)=h_4=0$ 'dır.

Tanım 1.2. $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$ tamsayılar dizisi olsun. A'nın Hankel determinantlarından oluşan $\{h_n\}=\{h_1,h_2,h_3,...\}$ tamsayılar dizisine A'nın Hankel dönüşümü denir (Layman, 2001).

Örnek 1.2. $\{1,1,2,5,14,42,132,...\}$ dizisinin elemanları Catalan sayıları olarak tanımlı olup, bu dizi ile tanımlı 4×4 tipinde Hankel matrisi

$$H_4=\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&2&5&14\\2&5&14&42\\5&14&42&132\end{pmatrix}$$

olur ki bu matrisin Hankel determinantları $h_1=h_2=h_3=h_4=1.$

Dolayısıyla bu dizinin Hankel dönüşümü $\{1,1,1,\ldots\}$ olur.

Örnek 1.3. $D_n=\{1,0,1,2,9,44,265,...\}$ dizisi kuralsız (derangement) sayılar dizisi olarak bilinir. Bu dizinin 4×4 tipinde Hankel matrisi

$$H_4=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&9\\1&2&9&44\\2&9&44&265\end{pmatrix}$$

ve Hankel determinantları da

$$\det(H_1)=1,\qquad \det(H_2)=1,\qquad \det(H_3)=4,$$

$$\det(H_4)=h_4=(0!)^2(1!)^2(2!)^2(3!)^2=144$$

olup dizinin Hankel dönüşümü

$$\{h_n\} = \{h_1, h_2, h_3, h_4\} = \{1,1,4,144\}$$

olur ki bu dönüşüm $\prod_{i=0}^{n} (n!)^2$ formülü ile elde edilir (Spivey ve Steil 2006).

Tanım 1.3. $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ tamsayılar dizisi olsun. $b_0 = 1$ ve $b_j = \sum_{m=1}^{j} a_m b_{j-m}$ olmak üzere $B(A) = \{b_j\}$ dizisine A dizisinin İnvert dönüşümü denir.

Tanım 1.4. $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ tamsayılar dizisi olsun. $b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i$ olmak üzere $B(A) = \{b_n\}$ dizisine A dizisinin binomial dönüşümü denir (Spivey ve Steil, 2006).

Tanım 1.5. $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ tamsayılar dizisi olsun. $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} a_i$ olmak üzere $B(A) = \{c_n\}$ dizisine A dizisinin binomial dönüşümünün tersi denir (Spivey ve Steil, 2006).

Özellik 1.1. $k \in Z^+$ için $B^k(A) = B(B(B(...B(A)...)$ gösterimi binomial dönüşümün k kez uygulandığını gösterir. Benzer şekilde $k \in Z^-$ için $B^k(A) = B(B(B(...B(A)...)$ gösterimi de binomial dönüşümün tersinin k kez uygulandığını gösterir (Spivey ve Steil, 2006).

Tanım 1.6. $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ tamsayılar dizisi olsun.

$$w_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^n a_i, & k \neq 0 \text{ veya } n \neq 0 \\ a_0, & k = 0, n = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $W(A,k) = \{w_n\}$ dizisine, A dizisinin k-binomial dönüşümü denir (Spivey ve Steil, 2006).

Tanım 1.7. $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ tamsayılar dizisi olsun.

$$r_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i a_i, & k \neq 0 \\ a_0, & k = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $R(A,k)=\{r_n\}$ dizisine, A dizisinin artan *k*-binomial dönüşümü denir (Spivey ve Steil, 2006).

Tanım 1.8. $A=\{a_0,a_1,a_2,...\}$ tamsayılar dizisi olsun.

$$f_n=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}a_i, & k\neq 0\\ a_n, & k=0\end{cases}$$

olmak üzere $F(A,k)=\{f_n\}$ dizisine, A dizisinin azalan *k*-binomial dönüşümü denir (Spivey ve Steil, 2006).

Tanım 1.9.(LU-ayrışımı) $A=(a_{ij})$ $n\times n$ tipinde matris, $L=(l_{ij})$ esas köşegen elemanları 1 olan alt üçgen ve $U=(u_{ij})$ bir üst üçgen matris olsun. Her n-kare matrisi

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}u_{kj}\quad (1\leq i,j\leq n)$$

olacak şekilde $A=LU$ olarak yazılabilir (Bozkurt ve ark., 2007).

Özellik 1.2. (a) A tamsayılar dizisinin Hankel matrisinin LU-ayrışımı $H=LU$ ise U matrisinin esas köşegeni A'nın Hankel dönüşümünü verir,

(b) A'nın binomial veya invert dönüşümünün Hankel matrisi olan H^*'ın LU-ayrışımı $H^*=L^*U^*$ olsun. Burada U ve U^*'ın esas köşegenleri aynıdır (Layman, 2001).

Örnek 1.4. $A=\{1,1,2,5,14,...\}$ Catalan sayılarını alırsak 3×3 tipinde Hankel matrisini

$$H=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\2&5&14\end{pmatrix}$$

ve bu matrisin $LU-$ayrışımını

$$H=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\2&5&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=LU$$

olarak elde ederiz.U'nun esas köşegen elemanları

$u_{11}=h_1\qquad u_{22}=h_2\qquad u_{33}=h_3,$

$\{1,1,1,...\}$ Hankel dönüşümünü verir.

H^*, A' nın binomial dönüşümü B' nin Hankel matrisi olmak üzere

$$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 51 \end{pmatrix}$$

matrisinin $LU -$ayrışımını

$$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L^* U^*$$

olarak elde ederiz. Sonuç olarak U ve U^*'ın esas köşegen elemanlarının aynı olduğu görülür.

2. HANKEL DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI DÖNÜŞÜMLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Layman(2001) çalışmasında, Hankel dönüşümün hem binomial dönüşüm hemde invert dönüşüm altında invaryant olduğunu ispatlamış ve Hankel dönüşümün invaryant olduğu başka dönüşümler var mı sorusunu sormuştur. Spivey ve Steil (2006) ise Hankel dönüşümün binomial dönüşüm altında invaryant olduğunun yeni bir ispatını vermiştir. Yine bu çalışmalarda Laymanın sorusu ile ilgili olarak Hankel dönüşümün azalan *k*-binomial dönüşümü altında invaryant ve *k*-binomial dönüşüm ile artan *k*-binomial dönüşümleri altında invaryant olmadığını göstermişlerdir.

Teorem 2.1. A tamsayılar dizisi ve B onun binomial dönüşümü ise A ve B aynı Hankel dönüşümüne sahiptir. Yani Hankel dönüşümü binomial dönüşüm altında invaryanttır(Layman, 2001).

İspat: $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$ tamsayılar dizisi ve A'nın binomial dönüşümü $B=\{b_1,b_2,b_3,...\}$ olsun.

Elem $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ anları

$$r_{i,j}=\begin{cases} 0, & i<j \\ \binom{i-1}{j-1}, & i\geq j, \end{cases} \qquad h_{k,m}=a_{k+m-1} \qquad \text{ve} \qquad c_{i,j}=\begin{cases} 0, & i>j \\ \binom{j-1}{i-1}, & i\leq j \end{cases}$$

şeklinde olan matrisler

$$H=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ve

$$C=\begin{pmatrix} 1 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \cdots \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın ve $H^*=RHC$ olsun. Dolayısıyla H^*'ın elemanları

$$h^*_{i,j}=\sum_{k=1}^{i}\sum_{m=1}^{j} r_{ik}h_{km}c_{mj}=\sum_{k=1}^{i}\sum_{m=1}^{j}\binom{i-1}{k-1}a_{k+m-1}\binom{j-1}{m-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{m=0}^{j-1}\binom{i-1}{k}\binom{j-1}{m}a_{k+m+1}$$

şeklinde olup bu toplam Vandermonde konvolüsyon formülü ile

$$h^*_{i,j}=\sum_{s=1}^{i+j-1}\binom{i+j-2}{s-1}a_s$$

şekline dönüşür ki bu matris açık olarak,

$$H^*=\begin{pmatrix} a_1 & \binom{1}{0}a_1+\binom{1}{1}a_2 & \binom{2}{0}a_1+\binom{2}{1}a_2+\binom{2}{2}a_3 & \cdots \\ \binom{1}{0}a_1+\binom{1}{1}a_2 & \binom{2}{0}a_1+\binom{2}{1}a_2+\binom{2}{2}a_3 & \binom{3}{0}a_1+\binom{3}{1}a_2+\binom{3}{2}a_3+\binom{3}{3}a_4 & \cdots \\ \binom{2}{0}a_1+\binom{2}{1}a_2+\binom{2}{2}a_3 & \binom{3}{0}a_1+\binom{3}{1}a_2+\binom{3}{2}a_3+\binom{3}{3}a_4 & \binom{4}{0}a_1+\binom{4}{1}a_2+\binom{4}{2}a_3+\binom{4}{3}a_4+\binom{4}{4}a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır.

A'nın Hankel dönüşümü $\det(H_n)$, B'nın Hankel dönüşümü $\det(R_nH_nC_n)$ sayılarından oluşur. Burada R_n ve C_n esas köşegen elemanları 1 olan üçgen matrislerdir. Bu yüzden $\det(R_n)=1$ ve $\det(C_n)=1$ olur ki $\det(H_n)=\det(R_nH_nC_n)$. Dolayısıyla A ve B'nin Hankel dönüşümleri aynıdır (Layman 2001).

Şimdi de bu teoremin ispatını Layman'dan farklı bir şekilde ispatlayan Spivey ve Steil'in ispatını verelim, öncelikli olarak bunun için gerekli olan T üçgenini açıklayalım:

Lemma 2.1(*T* üçgeni). $A=\{a_0, a_1, a_2,...\}$ iken T üçgenini oluşturan sayıları aşağıdaki kurala göre bulalım.

1. Üçgenin solundaki sayılar A'nın elemanlarıyla oluşturulur,

2. Üçgendeki herhangi bir sayı, solundaki sayı ile solundaki sayının üstündeki sayının toplamıdır,

T üçgeninin sağ köşegenindeki sayılar *A*' nın binomial dönüşümünü verir (Spivey ve Steil, 2006).

İspatı vermeden önce örneğin $A=\{1,0,1,2,9,44\}$ olmak üzere *T* üçgeni

Şekil 2.1: *T* üçgeni

$$
\begin{array}{c}
1\\
0 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad 2\\
2 \quad 3 \quad 4 \quad 6\\
9 \quad 11 \quad 14 \quad 18 \quad 24\\
44 \quad 53 \quad 64 \quad 78 \quad 96 \quad 120
\end{array}
$$

(Kaynak: Spivey ve Steil,2006)

şeklindedir. Bu üçgenin sağındaki sayılar $\{1,1,2,6,24,120\}$ olup *A*' nın binomial dönüşümünü verir.

İspat: A dizisinin $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisini sadece satır ve sütunları toplama işlemini kullanarak *B(A)*'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisine dönüştüreceğiz, bunun için:

1. $A=\{a_0, a_1, a_2,...\}$ dizisine Lemma 2.1 deki kuralı uygulayarak T üçgenini oluşturalım, $T_{i,j}$ üçgendeki (i,j) elemanını göstersin.

2. T_n üçgenin sol köşegenindeki sayılardan (A 'nın elemanları) oluşan aşağıdaki matris olsun, yani

$$T_n = \begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,0} & T_{2,0} & \cdots & T_{n,0} \\ T_{1,0} & T_{2,0} & T_{3,0} & \cdots & T_{n+1,0} \\ T_{2,0} & T_{3,0} & T_{4,0} & \cdots & T_{n+2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,0} & T_{n+1,0} & T_{n+2,0} & \cdots & T_{2n,0} \end{pmatrix}$$

Burada $a_i = T_{i,0}$ alındığında T_n, A'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir.

3. Satır ve sütun indeksleri 0 ile başlamak üzere aşağıdaki dönüşümleri uygulayalım,

(a) $i = 1,2,...,n$ olsun, $\forall j \geq i$ satırı için $j-1$. satırı j. satıra ekleyerek j. satırın yerine yazalım,

(b) $i = 1,2,...,n$ olsun, $\forall j \geq i$ sütunu için $j-1$. sütunu j. sütuna ekleyerek j. sütunun yerine yazalım.

3(a) satırlara uygulandıktan sonra matrisin m. satırı

$$m \leq i \quad \text{için} \quad \begin{pmatrix} T_{m,m} & T_{m+1,m} & \cdots & T_{m+n,m} \end{pmatrix},$$

$$m > i \quad \text{için} \quad \begin{pmatrix} T_{m,i} & T_{m+1,i} & \cdots & T_{m+n,i} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

$i = 0$ için iddianın doğru olduğu açıktır. $i = k-1$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım. $i = k$ için doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $i = k$ için sadece $k+1, k+2,...,n+1$ satırları değişir. $m \geq k$ için m. satıra $m-1$. satırla m. satırın toplamını yazarız. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} T_{m,k-1} + T_{m-1,k-1} & T_{m+1,k-1} + T_{m,k-1} & \cdots & T_{m+n,k-1} + T_{m+n-1,k-1} \end{pmatrix}$$

$$T_{i,j} + T_{i-1,j} = T_{i,j+1} \qquad (T \text{ üçgenini oluşturan kuraldan})$$

olduğundan m. satır

$$\begin{pmatrix} T_{m,k} & T_{m+1,k} & \cdots & T_{m+n,k} \end{pmatrix}$$

şeklini alır.

Bu işlem tüm satırlara uygulandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,0} & T_{2,0} & \cdots & T_{n,0} \\ T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} & \cdots & T_{n+1,1} \\ T_{2,2} & T_{3,2} & T_{4,2} & \cdots & T_{n+2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,n} & T_{n+1,n} & T_{n+2,n} & \cdots & T_{2n,n} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrise 3(b) yi uygularsak matrisin herhangi *m*. sütunu

$$m \leq i \quad \text{için} \quad \left(T_{m,m} \quad T_{m+1,m+1} \quad \cdots \quad T_{m+n,m+n}\right)^T$$

$$m > i \quad \text{için} \quad \left(T_{m,i} \quad T_{m+1,i+1} \quad \cdots \quad T_{m+n,i+n}\right)^T$$

şeklinde olur.

$i = 0$ için iddianın doğru olduğu açıktır. $i = k-1$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım. $i = k$ için doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $i = k$ için sadece $k+1, k+2, ..., n+1$ sütunları değişir. $m \geq k$ için *m.* sütuna *m-1.* sütunla *m.* sütunun toplamını yazarız. Bu durumda

$$\left(T_{m,k-1} + T_{m-1,k-1} \quad T_{m+1,k} + T_{m,k} \quad \cdots \quad T_{m+n,k+n-1} + T_{m+n-1,k+n-1}\right)^T$$

$$T_{i,j} + T_{i-1,j} = T_{i,j+1} \quad (T \text{ üçgenini oluşturan kuraldan})$$

olduğundan *m.* sütun

$$\left(T_{m,k} \quad T_{m+1,k+1} \quad \cdots \quad T_{m+n,k+n}\right)^T$$

olarak elde edilir. Bu işlem tüm satırlara uygulandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{n,n} \\ T_{1,1} & T_{2,2} & T_{3,3} & \cdots & T_{n+1,n+1} \\ T_{2,2} & T_{3,3} & T_{4,4} & \cdots & T_{n+2,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,n} & T_{n+1,n+1} & T_{n+2,n+2} & \cdots & T_{2n,2n} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris *B(A)'* nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. T_n matrisine matris işlemlerinden sadece bir satırı diğer satıra ekleme ve bir sütunu diğer sütuna ekleme işlemlerini kullandığımızdan matrisin determinantı bu işlemler altında değişmez. A 'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantı ile *B(A)'*nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantı eşittir. Dolayısıyla A ve B 'nin Hankel dönüşümleri aynıdır (Spivey ve Steil 2006).

Teorem 2.2. A tamsayılar dizisi ve B onun invert dönüşümü ise A ve B aynı Hankel dönüşümüne sahiptir. Yani Hankel dönüşümü invert dönüşüm altında invaryanttır (Layman, 2001).

İspat: $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$ tamsayılar dizisi ve A'nın invert dönüşümü $B=\{b_1,b_2,b_3,...\}$ olsun. Elemanları

$$r_{i,k}=\begin{cases}0, & k>i\\ b_{i-k}, & k\le i\end{cases}, \qquad h_{k,m}=a_{k+m-1} \qquad \text{ve} \qquad c_{m,j}=\begin{cases}0, & j<m\\ b_{j-m}, & j\ge m\end{cases}$$

şeklinde olan matrisler sırasıyla

$$R=\begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0\\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots\\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots\\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots\\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

ve

$$C=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1}\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2}\\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-3}\\ 0 & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0\end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

Burada $b_0=1$ olarak tanımlansın ve $H^*=RHC$ olsun. Dolayısıyla H^*'ın $(i,j-1)$ elemanı

$$
\begin{aligned}
h^{*}{}_{i,j-1} &= \sum_{k=1}^{i}\sum_{m=1}^{j-1} r_{ik}h_{km}c_{mj-1} = \sum_{k=1}^{i}\sum_{m=1}^{j-1} b_{i-k}\,a_{k+m-1}b_{j-m-1} \\
&= \sum_{k=2}^{i}\sum_{m=1}^{j-1} b_{i-k}\,a_{k+m-1}b_{j-m-1} + b_{i-1}\sum_{m=1}^{j-1} a_m b_{j-m-1} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{m=1}^{j-1} b_{i-1-k}\,a_{k+m}b_{j-m-1} + b_{i-1}\left[\sum_{m=1}^{j-2} a_m b_{j-m-1} + a_{j-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{m=2}^{j} b_{i-1-k}\,a_{k+m-1}b_{j-m} + b_{i-1}b_{j-1} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{m=1}^{j} b_{i-1-k}\,a_{k+m-1}b_{j-m} - b_{j-1}\sum_{k=1}^{i-1} b_{i-1-k}\,a_k + b_{i-1}b_{j-1} \qquad \left(b_j = \sum_{m=1}^{j} a_m b_{j-m}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{m=1}^{j} b_{i-1-k}\,a_{k+m-1}b_{j-m} \qquad \text{(Matris çarpımının tanımından)} \\
&= h^{*}{}_{i-1,j}
\end{aligned}
$$

$$
h^{*}{}_{1,j} = \sum_{k=1}^{1}\sum_{m=1}^{j} b_{1-k}\,a_{k+m-1}b_{j-m} = a_0\sum_{m=1}^{j} a_m b_{j-m} = b_j
$$

olup $h^{*}{}_{i,j} = b_{i+j-1}$ eşitliğinin sağlandığını gösterir ki H^{*}, B'nin Hankel matrisidir. R ve C esas köşegen elemanları 1 olan üçgen matrisler olduğundan $\det(R) = 1$ ve $\det(C) = 1$. Dolayısıyla $\det(H_n) = \det(RHC) = \det(H^{*}{}_n)$ olduğundan A ve B' nin Hankel dönüşümleri aynıdır.

Şimdi de bu teoremin tarafımızdan yapılan farklı bir ispatını verelim:

İspat: $A = \{a_1, a_2, a_3 ..., a_n\}$ tamsayılar dizisi ve $B = \{b_1, b_2, b_3 ..., b_n\}$ onun invert dönüşümü olmak üzere aşağıdaki S tablosunu $A = \{a_1, a_2, a_3 ..., a_n\}$ dizisinin elemanları ile $\{1, b_1, b_2, b_3 ..., b_n\}$ dizisinin elemanlarını çarparak oluşturalım.

$\cdot$	1	b_1	b_2	$\cdots$
a_1	a_1	$a_1\,b_1$	$a_1\,b_2$	$\cdots$
a_2	a_2	$a_2\,b_1$	$a_2\,b_2$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\cdot$	$S_{0,0}$	$S_{1,1}$	$S_{2,2}$	$\cdots$
$S_{1,0}$	$S_{1,0}$	$S_{2,1}$	$S_{3,2}$	$\cdots$
$S_{2,0}$	$S_{2,0}$	$S_{3,1}$	$S_{4,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$S_{a,0}S_{c,d} = S_{a+c,d}$$

S_n, matrisi $A=\{a_1,a_2,a_3...,a_n\}$ dizisinin elemanlarından oluşsun. $S_{i,0}=a_i$ olarak alındığında S_n matrisi A dizisinin Hankel matrisidir.

$$S_n = \begin{pmatrix} S_{1,0} & S_{2,0} & S_{3,0} & \cdots & S_{n,0} \\ S_{2,0} & S_{3,0} & S_{4,0} & \cdots & S_{n+1,0} \\ S_{3,0} & S_{4,0} & S_{5,0} & \cdots & S_{n+2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n,0} & S_{n+1,0} & S_{n+2,0} & \cdots & S_{2n-1,0} \end{pmatrix}.$$

(a) $i=1,2,...,n-1$ olsun, $\forall j=1,2,...,n-i$ satırını b_i ile çarpıp *(j+i).* satıra ekleyelim,

(b) $i=1,2,...,n-1$ olsun, *i.* sütunu $\forall j=1,2,...,n-i$ için a_j ile çarpıp *(j+i).* sütuna ekleyelim.

(a) satırlara uygulandıktan sonra matrisin *m.* satırı

$m \le i$ için

$$\left(S_{m,0}+S_{m,1}+...S_{m,m-1} \quad S_{m+1,0}+S_{m+1,1}+...S_{m+1,m-1} \quad \cdots \quad S_{m+n-1,0}+S_{m+n-1,1}+...S_{m+n-1,m-1}\right),$$

$m > i$ için

$$\left(S_{m,0}+S_{m,1}+...S_{m,i} \quad S_{m+1,0}+S_{m+1,1}+...S_{m+1,i} \quad \cdots \quad S_{m+n-1,0}+S_{m+n-1,1}+...S_{m+n-1,i}\right)$$

şeklinde olur.

$i=0$ için iddianın doğru olduğu açıktır. $i=k-1$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım. $i=k$ için doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $i=k$ için sadece $k+1,k+2,...,n$ satırları değişir. $m \ge k$ için $(S_{m-k,0} \quad S_{m-k+1,0} \quad ... \quad S_{m-k+n-1,0})$ olan $m-k$ satırını $b_k = S_{k,k}$ ile çarpıp *m.* satıra ekleyelim. Bu durumda

$$S_{k,k}(S_{m-k,0} \quad S_{m-k+1,0} \quad ... \quad S_{m-k+n-1,0}) = (S_{m,k} \quad S_{m+1,k} \quad ... \quad S_{m+n-1,k})$$

$$\left(S_{m,0}+S_{m,1}+\ldots S_{m,k-1} \quad S_{m+1,0}+S_{m+1,1}+\ldots S_{m+1,k-1} \quad \ldots \quad S_{m+n-1,0}+S_{m+n-1,1}+\ldots S_{m+n-1,k-1}\right)$$

olduğundan m. satır

$$\left(S_{m,0}+S_{m,1}+\ldots S_{m,k} \quad S_{m+1,0}+S_{m+1,1}+\ldots S_{m+1,k} \quad \ldots \quad S_{m+n-1,0}+S_{m+n-1,1}+\ldots S_{m+n-1,k}\right)$$

şeklini alır.

Bu işlem tüm satırlara uygulandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{2,0} & S_{3,0} & \cdots & S_{n,0} \\ S_{2,2} & S_{3,0}+S_{3,1} & S_{4,0}+S_{4,1} & \cdots & S_{n+1,0}+S_{n+1,1} \\ S_{3,3} & S_{4,0}+S_{4,1}+S_{4,2} & S_{5,0}+S_{5,1}+S_{5,2} & \cdots & S_{n+2,0}+S_{n+2,1}+S_{n+2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n,n} & S_{n,0}+S_{n,1}+\ldots+S_{n,n-2} & S_{n+1,0}+S_{n+1,1}+S_{n+1,n-2} & \cdots & S_{2n-1,0}+S_{2n-1,1}+S_{2n-1,n-2} \end{pmatrix}$$

(b) sütunlara uygulandıktan sonra m. sütun

$m \le i$ için

$$\left(S_{m,m} \quad S_{m+1,m+1} \quad \ldots \quad S_{m+n-1,m+n-1}\right)^T$$

$m > i$ için

$$\left(S_{m,0}+S_{m,1}+\ldots S_{m,i} \quad S_{m+1,0}+S_{m+1,1}+\ldots S_{m+1,i+1} \quad \ldots \quad S_{m+n-1,0}+S_{m+n-1,1}+\ldots S_{m+n-1,i+n-1}\right)^T$$

şeklinde olur.

$i=0$ için iddianın doğru olduğu açıktır. $i=k-1$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım. $i=k$ için doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $i=k$ için sadece $k+1, k+2, \ldots, n$ sütunları değişir. $i=k$ için

$$\left(S_{k,k} \quad S_{k+1,k+1} \quad \ldots \quad S_{k+n-1,k+n-1}\right)^T$$

olan k sütununu

$$a_{m-k} = S_{m-k,0}$$

ile çarpıp m. sütuna eklersek

$$S_{m-k,0}\left(S_{k,k} \quad S_{k+1,k+1} \quad \ldots \quad S_{k+n-1,k+n-1}\right)^T = (S_{m,k} \quad S_{m+1,k+1} \quad \ldots \quad S_{m+n-1,k+n-1})^T$$

$$\left(S_{m,0}+S_{m,1}+\ldots S_{m,k-1} \quad S_{m+1,0}+S_{m+1,1}+\ldots S_{m+1,k} \quad \ldots \quad S_{m+n-1,0}+S_{m+n-1,1}+\ldots S_{m+n-1,k+n-2}\right)^T$$

ve

$$\left(S_{m,0} + S_{m,1} + ...S_{m,k} \quad S_{m+1,0} + S_{m+1,1} + ...S_{m+1,k+1} \quad \cdots \quad S_{m+n-1,0} + S_{m+n-1,1} + ...S_{m+n-1,k+n-1}\right)^T$$

elde edilir ki $i=k$ için doğruluğu tümevarımla ispatlanmış olur.

Bu işlem tüm sütunlara uygulandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{2,2} & \cdots & S_{n,n} \\ S_{2,2} & S_{3,3} & \cdots & S_{n+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n,n} & S_{n+1,n+1} & \cdots & S_{2n-1,2n-1} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir ki bu matris *A*'nın invert dönüşümü *B(A)*'nın $n \times n$ Hankel matrisidir.

S_n matrisine matris işlemlerinden herhangi bir satırı b_i ile çarpıp diğer satıra ekleme ve herhangi bir sütunu a_j ile çarpıp diğer sütuna ekleme işlemlerini kullandık. Bu işlemler matrisin determinantını değiştirmez. *A*'nın $n \times n$ Hankel matrisinin determinantı *B(A)*'nın $n \times n$ Hankel matrisinin determinantına eşittir.

Teorem 2.3. $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ tamsayılar dizisi olmak üzere;

1. *T* üçgenini oluşturalım. *T* üçgeninin solundaki sayılar *A* 'nın elemanlarından oluşsun. Herhangi bir sayıyı solundaki sayı ile solundaki sayının üzerindeki sayının toplamını *k* ile çarparak bulalım. *T* üçgeninin sağındaki sayılar *A*' nın *k*-binomial dönüşümü *W(A,k)* yı verir,

2. *T* üçgenini oluşturalım. *T* üçgeninin solundaki sayılar *A* 'nın elemanlarından oluşsun. Herhangi bir sayıyı solundaki sayının *k* ile çarpımıyla solundaki sayının üzerindeki sayıyı toplayarak bulalım. *T* üçgeninin sağındaki sayılar *A*' nın artan *k*-binomial dönüşümü *R(A,k)* yı verir,

3. *T* üçgenini oluşturalım. *T* üçgeninin solundaki sayılar *A* 'nın elemanlarından oluşsun. Herhangi sayıyı solundaki sayı ile solundaki sayının üzerindeki sayının *k* ile çarpımını toplayarak bulalım. *T* üçgeninin sağındaki sayılar *A*' nın azalan *k*-binomial dönüşümü *F(A,k)* yı verir (Spivey ve Steil, 2006).

Örnek 2.2. $\{1,0,1,2,9,44,...\}$ dizisini alalım.

Şekil 2.2: 2-binomial dönüşümün *T* üçgeni

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 8 & & \\ & 2 & & 6 & & 16 & & 48 & \\ 9 & & 22 & & 56 & & 144 & & 384 \end{array} \qquad W(A,2)=\{1,2,8,48,384\}$$

(Kaynak:Spivey ve Steil,2006)

Şekil 2.3: Artan 2-binomial dönüşümün *T* üçgeni

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 5 & & \\ & 2 & & 5 & & 12 & & 29 & \\ 9 & & 20 & & 45 & & 102 & & 233 \end{array} \qquad R(A,2)=\{1,1,5,29,233\}$$

(Kaynak:Spivey ve Steil, 2006)

Şekil 2.4: Azalan 2-binomial dönüşümünün *T* üçgeni

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 1 & & 5 & & \\ & 2 & & 4 & & 6 & & 16 & \\ 9 & & 13 & & 21 & & 33 & & 65 \end{array} \qquad F(A,2)=\{1,2,5,16,65\}$$

(Kaynak:Spivey ve Steil,2006)

şeklinde elde ederiz.

Teorem 2.4. Hankel dönüşümü azalan *k*-binomial dönüşüm altında invaryanttır (Spivey ve Steil, 2006).

İspat: T üçgenini Teorem 2.3 ün (3). kuralını uygulayarak oluşturalım. T üçgeninin sağındaki sayılar *F(A,k)* dizisinin elemanlarından oluşur.

T_n, üçgenin solundaki sayılardan (A 'nın elemanları) oluşan aşağıdaki matris olsun, yani

$$T_n = \begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,0} & T_{2,0} & \cdots & T_{n,0} \\ T_{1,0} & T_{2,0} & T_{3,0} & \cdots & T_{n+1,0} \\ T_{2,0} & T_{3,0} & T_{4,0} & \cdots & T_{n+2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,0} & T_{n+1,0} & T_{n+2,0} & \cdots & T_{2n,0} \end{pmatrix}.$$

Burada $a_i = T_{i,0}$ alındığında T_n, A'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. Satır ve sütun indeksleri 0 ile başlamak üzere aşağıdaki dönüşümleri uygulayalım,

(a) $i = 1,2,...,n$ olsun, $\forall j \geq i$ satırı için $j-1$. satırı k ile çarpıp *j*. satıra ekleyerek *j*. satırın yerine yazalım,

(b) $i = 1,2,...,n$ olsun, $\forall j \geq i$ sütunu için $j-1$. sütunu k ile çarpıp *j*. sütuna ekleyerek *j*. sütunun yerine yazalım,

(a) satırlara uygulandıktan sonra matrisin *m*. satırı

$$m \leq i \qquad \text{için} \qquad \begin{pmatrix} T_{m,m} & T_{m+1,m} & \cdots & T_{m+n,m} \end{pmatrix}$$

$$m > i \qquad \text{için} \qquad \begin{pmatrix} T_{m,i} & T_{m+1,i} & \cdots & T_{m+n,i} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

$i = 0$ için iddianın doğru olduğu açıktır. $i = k-1$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım. $i = k$ için doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $i = k$ için sadece $k+1, k+2,...,n+1$ satırları değişir. $m \geq k$ için $m-1$. satırın k ile çarpımıyla *m*. satırın toplamını *m*. satıra yazarız ki

$$\begin{pmatrix} T_{m,k-1} + kT_{m-1,k-1} & T_{m+1,k-1} + kT_{m,k-1} & \cdots & T_{m+n,k-1} + kT_{m+n-1,k-1} \end{pmatrix},$$

$$T_{i,j} + kT_{i-1,j} = T_{i,j+1} \qquad (T \text{ üçgenini oluşturan kuraldan})$$

olduğundan *m*. satır

$$\begin{pmatrix} T_{m,k} & T_{m+1,k} & \cdots & T_{m+n,k} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bu işlem tüm satırlara uygulandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,0} & T_{2,0} & \cdots & T_{n,0} \\ T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} & \cdots & T_{n+1,1} \\ T_{2,2} & T_{3,2} & T_{4,2} & \cdots & T_{n+2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,n} & T_{n+1,n} & T_{n+2,n} & \cdots & T_{2n,n} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrise (b) yi uyguladıktan sonra *m*. sütun

$$m \le i \text{ için} \qquad \left(T_{m,m} \quad T_{m+1,m+1} \quad \dots \quad T_{m+n,m+n}\right)^T$$

$$m > i \text{ için} \qquad \left(T_{m,i} \quad T_{m+1,i+1} \quad \dots \quad T_{m+n,i+n}\right)^T$$

şeklini alır.

$i = 0$ için iddianın doğru olduğu açıktır. $i = k-1$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım. $i = k$ için doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $i = k$ için sadece $k+1, k+2, ..., n+1$ sütunları değişir. $m \ge k$ için *m.* sütuna $m-1.$ sütunun k ile çarpımıyla *m.* sütunun toplamını yazarız. Bu durumda

$$\left(T_{m,k-1} + kT_{m-1,k-1} \quad T_{m+1,k} + kT_{m,k} \quad \dots \quad T_{m+n,k+n-1} + kT_{m+n-1,k+n-1}\right)^T$$

$$T_{i,j} + kT_{i-1,j} = T_{i,j+1} \qquad (T \text{ üçgenini oluşturan kuraldan})$$

olduğundan *m.* sütun

$$\left(T_{m,k} \quad T_{m+1,k+1} \quad \dots \quad T_{m+n,k+n}\right)^T$$

olarak elde edilir.

Bu işlem tüm sütunlara uygulandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{n,n} \\ T_{1,1} & T_{2,2} & T_{3,3} & \cdots & T_{n+1,n+1} \\ T_{2,2} & T_{3,3} & T_{4,4} & \cdots & T_{n+2,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,n} & T_{n+1,n+1} & T_{n+2,n+2} & \cdots & T_{2n,2n} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris *A*'nın azalan *k*-binomial dönüşümü *F(A,k)*'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. T_n matrisine matris işlemlerinden sadece bir satırı *k* ile çarpıp diğer satıra ekleme ve bir sütunu *k* ile çarpıp diğer sütuna ekleme işlemlerini kullandığımızdan matrisin determinantı bu işlemler altında değişmez.

A'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantı ile *F(A,k)*'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantı eşittir. *A* ve *B* 'nin Hankel dönüşümleri aynıdır.

Teorem 2.5. $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ tamsayılar dizisi verilsin. $H(A) = \{h_n\}$ olsun. Bu durumda $H(R(A,0)) = \{a_0, 0, 0, ..., 0\}$ $k \ne 0$ ise $H(R(A,k)) = \{k^{n(n+1)} h_n\}$ dir (Spivey ve Steil, 2006).

İspat: $k=0$ ise $R(A,k)=\{a_0,a_0,...,a_0\}$ dır. H_n, tüm elemanları a_0 olan $(n+1)\times(n+1)$ tipinde matristir. Dolayısıyla $\det(H_0)=a_0$ ve $n>0$ için $\det(H_n)=0$ 'dır.

$k\neq 0$ olduğunu varsayalım. T üçgenini Teorem 2.3 ün (2). kuralını uygulayarak oluşturalım. T üçgeninin sağındaki sayılar *R(A,k)* dizisinin elemanlarından oluşur. T_n, üçgenin solundaki sayılardan (A 'nın elemanları) oluşan aşağıdaki matris olsun.

$$T_n=\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,0} & T_{2,0} & \cdots & T_{n,0} \\ T_{1,0} & T_{2,0} & T_{3,0} & \cdots & T_{n+1,0} \\ T_{2,0} & T_{3,0} & T_{4,0} & \cdots & T_{n+2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,0} & T_{n+1,0} & T_{n+2,0} & \cdots & T_{2n,0} \end{pmatrix}.$$

Burada $a_i=T_{i,0}$ alındığında T_n, A'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. Satır ve sütun indeksleri 0 ile başlamak üzere aşağıdaki dönüşümleri uygulayalım,

(a) $i=1,2,...,n$ olsun, $\forall j\geq i$ satırı için $j-1$. satırı *j*. satırın *k* ile çarpımına ekleyerek *j*. satırın yerine yazalım.

(b) $i=1,2,...,n$ olsun, $\forall j\geq i$ sütunu için $j-1$. sütunu *j*.sütunun *k* ile çarpımına ekleyerek *j*. sütunun yerine yazalım ve Teorem 2.4 ün ispatında kullandığımız metodu sadece $kT_{i,j}+T_{i-1,j}=T_{i,j+1}$ eşitliğini değiştirerek uygulayalım. (a) tüm satırlara ve (b) tüm sütunlara uygulandıktan sonra bulunan matrisler Teorem 2.4'ün ispatında bulduğumuz matrislerle aynıdır.

Uygulamalardan sonra

$$\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{n,n} \\ T_{1,1} & T_{2,2} & T_{3,3} & \cdots & T_{n+1,n+1} \\ T_{2,2} & T_{3,3} & T_{4,4} & \cdots & T_{n+2,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,n} & T_{n+1,n+1} & T_{n+2,n+2} & \cdots & T_{2n,2n} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris *A'* nın artan *k*-binomial dönüşümü *R(A,k)*' nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. Burada uygulanan işlemleri açıklarsak:

1. Herhangi bir satırı $k \neq 0$ ile çarpmak, determinantı k katına çıkarır.

2. Herhangi bir satırı $k \neq 0$ ile çarpıp diğer bir satıra ekleme determinantı değiştirmez.

Aynı durum sütun işlemleri içinde geçerlidir.

Hankel dönüşümün artan *k*-binomial dönüşümü altında nasıl değiştiğini bulmak için satır ve sütunların kaç kez k ile çarpıldığını belirlemek gerekir.

i. satır k ile i kez çarpılır.

1\. satır $\rightarrow 0$

2\. satır $\rightarrow 1$

$\vdots$

(*n*+*1*). satır $\rightarrow n$ kez k ile çarpılır.

Determinant; satırlar için $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, sütunlar için $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ kez k ile çarpılır. Toplam $n(n+1)$ kez k ile çarpılmış olur. Sonuç olarak *A*'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantını $k^{n(n+1)}$ ile çarparsak *R(A,k)'nın* $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantını verir.

Teorem 2.6. $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ tamsayılar dizisi verilsin. $H(A) = \{h_n\}$ olsun. $H(W(A,0)) = \{a_0, 0, 0, ..., 0\}$, $k \neq 0$ ise $H(W(A,k)) = \{k^{n(n+1)} h_n\}$ dır (Spivey ve Steil, 2006).

İspat: $k = 0$ ise $W(A,k) = \{a_0, 0, 0, ..., 0\}$

H_n, ilk elemanı a_0 diğer tüm elemanları 0 olan $(n+1)\times(n+1)$ tipinde matristir. Dolayısıyla $\det(H_0) = a_0$ ve $n > 0$ için $\det(H_n) = 0$ olur.

$k \neq 0$ olduğunu varsayalım. *T* üçgenini Teorem 2.3 ün (1). kuralını uygulayarak oluşturalım. *T* üçgeninin sağ köşegeni *W(A,k)* dizisinin elemanlarından oluşur.

T_n, üçgenin solundaki sayılardan (*A* 'nın elemanları) oluşan aşağıdaki matris olsun, yani

$$T_n = \begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,0} & T_{2,0} & \cdots & T_{n,0} \\ T_{1,0} & T_{2,0} & T_{3,0} & \cdots & T_{n+1,0} \\ T_{2,0} & T_{3,0} & T_{4,0} & \cdots & T_{n+2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,0} & T_{n+1,0} & T_{n+2,0} & \cdots & T_{2n,0} \end{pmatrix}.$$

Burada $a_i = T_{i,0}$ alındığında T_n, A'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. Satır ve sütun indeksleri 0 ile başlamak üzere aşağıdaki dönüşümleri uygulayalım.

(a) $i = 1,2,...,n$ olsun, $\forall j \geq i$ satırı için $j-1$. satırı j. satıra ekleyip k ile çarparak j. satırın yerine yazalım,

(b) $i = 1,2,...,n$ olsun, $\forall j \geq i$ sütunu için $j-1$. sütunu j.sütuna ekleyip k ile çarparak j. sütunun yerine yazalım ve Teorem 2.4 ün ispatında kullandığımız metodu sadece $kT_{i,j} + kT_{i-1,j} = T_{i,j+1}$ eşitliği değişir. (a) tüm satırlara ve (b) tüm sütunlara uygulandıktan sonra bulunan matrisler Teorem 2.4 de bulunan matrislerle aynıdır. Uygulamalardan sonra

$$\begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{1,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{n,n} \\ T_{1,1} & T_{2,2} & T_{3,3} & \cdots & T_{n+1,n+1} \\ T_{2,2} & T_{3,3} & T_{4,4} & \cdots & T_{n+2,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n,n} & T_{n+1,n+1} & T_{n+2,n+2} & \cdots & T_{2n,2n} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris *A'* nın *k*-binomial dönüşümü *W(A,k)*'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisidir. Burada uygulanan işlemleri açıklarsak:

1. Herhangi bir satırı önceki satıra ekleme, determinantı değiştirmez.

2. Herhangi bir satırı $k \neq 0$ ile çarpmak, determinantı k katına çıkarır.

Aynı durum sütun işlemleri içinde geçerlidir.

Hankel dönüşümün *k*-binomial dönüşümü altında nasıl değiştiğini bulmak için satır ve sütunların kaç kez k ile çarpıldığını belirlemek gerekir.

i. satır k ile i kez çarpılır.

1. satır $\rightarrow 0$

2. satır $\rightarrow 1$

$\vdots$

(*n+1*). satır $\rightarrow n$ kez k ile çarpılır.

Determinant; satırlar için $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, sütunlar için $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ kez k ile çarpılır. Toplam $n(n+1)$ kez k ile çarpılmış olur. A 'nın $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantını $k^{n(n+1)}$ ile çarparsak *W(A,k)'nın* $(n+1)\times(n+1)$ tipinde Hankel matrisinin determinantını verir.

Teorem 2.7. $k \in Z$ ise $B^k(A) = F(A,k)$ olur. Yani binomial dönüşümün k kez uygulanışı azalan k-binomial dönüşümüne eşittir. ($k \in Z^-$ ise binomial dönüşümün tersinin k kez uygulanışına eşittir) (Spivey ve Steil, 2006).

İspat: $k = 1$ için $B(A) = F(A,1)$ eşitliği tanımdan doğrudur. $1,2,3,...,m$ için teoremin doğru olduğunu varsayalım. $b_n{}^k$, $B^k(A)$ dizisindeki *n*. elemanı göstersin. $f_n{}^k$, $F(A,k)$ dizisindeki *n*. elemanı göstersin. $k = m+1$ için

$$b_n^{m+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_i^m = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f_i^m = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}m^{i-j}a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}m^{i-j}a_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}m^{i-j}a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}m^{i-j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j\sum_{l=0}^{n-j}\binom{n-j}{l}m^l$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j(m+1)^{n-j} = f_n^{m+1}$$

Burada ispat $k \in Z^+$ için yapılmıştır. $k \in Z^-$ için ispat $k = -1$ alarak aynı yolla indüksiyon metodunu kullanarak yapılır.

Teorem 2.8. $W(A,k) = F(R(A,k),k-1)$. Yani k-binomial dönüşümü, artan k-binomial dönüşümüne azalan (k-1)-binomial dönüşümü uygulayarak bulunur (Spivey ve Steil, 2006).

İspat: $k = 1$ için $B(A) = W(A,1)$ ve $F(R(A,1),0) = F(B(A),0) = B(A)$ eşitliği tanımdan doğrudur. $k = 0$ için $R(A,0) = \{a_0, a_0, ..., a_0\}$.

$F(R(A),0),-1)$ 'nin $n.$ terimi

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}a_0 = a_0\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}$$

$F(R(A),0),-1)=\{a_0,0,0,...,0\}$ dizisi $W(A,0)$ dizisidir.

$k \neq 0$ ve $k \neq 1$ için $F(R(A),k),k-1)$ 'in $n.$ terimi

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(k-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}k^j a_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(k-1)^{n-i}k^j a_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}(k-1)^{n-i}k^j a_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^j a_j\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(k-1)^{n-i}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^j a_j\sum_{l=0}^{n-j}\binom{n-j}{l}(k-1)^{n-j-l}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^j a_j k^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^n a_j$$

olup bu $W(A,k)$ 'nın $n.$ terimidir.

Teorem 2.9. H ve H^*, A tamsayılar dizisi ve onun binomial dönüşümü A^* 'ın Hankel matrisleri olsun. $H=LU$ ve $H^*=L^*U^*$, H ve H^*'ın LU-ayrışımları olsun. U ve U^* 'ın esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanları $U^*_{i,i+1}=U_{i,i+1}+iU_{i,i}$ eşitliğini sağlar (Layman, 2001).

İspat: $H=LU$ ve R ve C Teorem 2.1'in ispatındaki gibi tanımlansın. $H^*=RHC=RLUC$ alalım. Böylece $U^*=UC$ olur. Matris çarpımından

$$u^*_{i,j}=\sum_{k=1}^{j}u_{i,k}c_{k,j}=\sum_{k=1}^{j}u_{i,k}\binom{j-1}{k-1}$$

$u_{i,k}$ üst üçgensel matris olduğundan

$$u^*_{i,j}=\sum_{k=i}^{j}u_{i,k}\binom{j-1}{k-1}$$

$j=i+1$ alınırsa esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanlar

$$U^*_{i,i+1}=U_{i,i}\binom{i}{i-1}+U_{i,i+1}\binom{i}{i}=U_{i,i+1}+iU_{i,i}$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1. A, $\{1,1,1,...,1\}$ Hankel dönüşümüne sahip bir dizi iken H ve H^*, A tamsayılar dizisi ve onun binomial dönüşümü A^* ’ ın Hankel matrisleri olsun. O zaman $H = LU$ ve $H^* = L^*U^*$ eşitlikleri, H ve H^*’ın LU-ayrışımları olsun. U ve U^*’ ın esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanları $U^*_{i,i+1} = U_{i,i+1} + i$ eşitliğini sağlar (Layman, 2001).

(U’nun köşegen elemanları Hankel dönüşümüne aittir ve $u_{i,i} = 1$ olur)

Teorem 2.10. H ve H^*, A tamsayılar dizisi ve onun invert dönüşümü B ’nın Hankel matrisleri olsun. $H = LU$ ve $H^* = L^*U^*$, H ve H^*’ın LU-ayrışımları olsun. U ve U^*’ ın esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanları $u^*_{i,i+1} = u_{i,i+1} + a_1 u_{i,i}$ eşitliği ile birbirine bağlıdır (Layman, 2001).

İspat: $H=LU$ ve R ve C Teorem 2.1’in ispatındaki gibi tanımlansın. $H^* = L^*U^* = RHC = RLUC$ alalım. Buradan $U^* = UC$ elde edilir.

Matris çarpımından

$$u^*_{i,j} = \sum_{m=1}^{j} u_{i,m} b_{m,j} = \sum_{m=1}^{j} u_{i,m} b_{j-m}$$

U üst üçgensel matris olduğundan

$$= \sum_{m=i}^{j} u_{i,m} b_{j-m}$$

$i = j+1$ alınırsa

$$u^*_{i,i+1} = \sum_{m=i}^{i+1} u_{i,m} b_{i+1-m} = u_{i,i} b_1 + u_{i,i+1} b_0$$

invert dönüşümden $b_0 = 1$ $b_1 = a_1$

$$= u_{i,i+1} + a_1 u_{i,i}$$

Sonuç 2.2. A, $\{1,1,1,...,1\}$ Hankel dönüşümüne sahip bir dizi iken H ve H^*, A tamsayılar dizisi ve onun invert dönüşümü A^*'ın Hankel matrisleri olsun. $H = LU$ ve $H^* = L^*U^*$, H ve H^*'ın LU-ayrışımları olsun. U ve U^*' ın esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanları $U^*_{i,i+1} = U_{i,i+1} + 1$ eşitliğini sağlar (Layman, 2001).

($H_1 = a_1$ *ve* $H_1 = 1$ *ise* $a_1 = 1$dır. U'nun köşegen elemanları Hankel dönüşümüne aittir ve $u_{i,i} = 1$ olur)

3. HANKEL DÖNÜŞÜMÜ $\{1,1,1,...,1\}$ OLAN DİZİLER

EIS(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) listesinde $\{1,1,1,...,1\}$ Hankel dönüşümüne sahip 20 dizi bulunmuş, bunlardan 17 sinin binomial ve invert dönüşümle birbirine bağlı olduğu görülmüştür.

Bu dizilerin Hankel matrisleri LU-ayrışımıyla U üst üçgensel formuna indirgendiğinde dizilerin tümü esas köşegen doğrultusundaki elemanların lineer polinom halini ortaya koyar. Aşağıdaki tablo 17 dizi arasındaki ilişkiyi gösteriyor. Tablodaki her bir dizi kendisinin solundaki komşu sütundaki dizinin binomial dönüşümü, yukarıda verilen dizinin invert dönüşümüdür. H dizinin Hankel matrisi iken aşağıdaki EIS dizisi sayılarıyla yazılan lineer polinom LU-ayrışımındaki $H=LU$ daki U'nun esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanlarını verir. i parmetresi U'nun indeksini göstermek E, değişim operatörü dizinin ilk terimini çıkarmak için kullanılıyor. Sonuç 2.1 ve Sonuç 2.2 den binomial ve invert dönüşümlerin etkisiyle esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanların davranışına göre sabit terim baştan aşağıya her sırada 1 artar. Birinci dereceli terimin katsayısı soldan sağa her sütunda 1 artarak değişir. Aşağıda esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanları $i+2$ polinomuyla temsil edilen A054341'in binomial dönüşümü, $(E)A$005773'ün invert dönüşümü ve terimleri $\{1,3,10,34,117,...\}$ olan dizi EIS'nin listesinde bulunmaz. Ansiklopedide A059738 dizisi olarak gösteriliyor.

Tablo 3.1.

		$\frac{\{1,0\}\cup A000957}{2i-2}$	$\frac{A033321}{3i-2}$	$\frac{A033543}{4i-2}$
	$\frac{A005043}{i-1}$	$\frac{A000108}{2i-1}$	$\frac{A007317}{3i-1}$	
	$\frac{A001006}{i}$	$\frac{(E)A000108}{2i-2}$	$\frac{A002212}{3i}$	$\frac{A005572}{4i}$
$\frac{A001405}{1}$	$\frac{(E)A005773}{i+1}$	$\frac{A001700}{2i+1}$	$\frac{A026378}{3i+1}$	$\frac{A005573}{4i+1}$
$\frac{A054341}{2}$	$\frac{\{1,3,10,34,117,...\}}{i+2}$	$\frac{A049027}{2i+2}$		

(Kaynak: Layman, 2001)

Örnek 3.1. $\{1,1,2,5,14,42,132,...\}$ Catalan sayılarının Hankel matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & \cdots \\ 1 & 2 & 5 & 14 & \cdots \\ 2 & 5 & 14 & 42 & \cdots \\ 5 & 14 & 42 & 132 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ve Hankel matrisin üst üçgensel formu

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup Hankel dönüşümünün $\{1,1,1,...\}$ olduğu esas köşegene bakılarak bulunur.

Esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanların $\{1,3,5,7,...\}$ oluşturduğu polinom $2i-1$ dir.

Örnek 3.2. A000108’in binomial dönüşümünü alırsak, $A007317=\{1,2,5,15,51,...\}$ dizisinin 5×5 tipinde Hankel matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 15 & 51 \\ 2 & 5 & 15 & 51 & 188 \\ 5 & 15 & 51 & 188 & 731 \\ 15 & 51 & 188 & 731 & 2950 \\ 51 & 188 & 731 & 2950 & 12235 \end{pmatrix}$$

ve bu matrisin üst üçgensel formu

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 15 & 51 \\ 0 & 1 & 5 & 21 & 86 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Hankel dönüşümünün $\{1,1,1,...\}$ olduğu esas köşegene bakılarak bulunur.

Esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanlardan oluşan $\{2,5,8,11,...\}$ dizisinin oluşturduğu polinom $3i-1$ dir.

$A000108$'in invert dönüşümünü alırsak $(E)A000108=\{1,2,5,14,42,...\}$'in 5×5 tipinde Hankel matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 & 42 \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \\ 42 & 132 & 429 & 1430 & 4862 \end{pmatrix}$$

bu matrisin üst üçgensel formu

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 & 42 \\ 0 & 1 & 4 & 14 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Hankel dönüşümünün $\{1,1,1,...\}$ olduğu esas köşegene bakılarak bulunur. Esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanların $\{2,4,6,8,...\}$ oluşturduğu polinom $2i$.

EIS' deki diğer 3 dizi $A054391$, $A054393$, $A055879$' dır. Bu diziler $\{1,1,1,...\}$ Hankel dönüşümüne sahip olsa da Hankel matrislerinin üst üçgensel formu elde edilip esas köşegen doğrultusundaki ilk elemanlardan oluşan $\{1,3,4,5,6,...\}$, $\{1,3,5,6,7...\}$ ve $\{1,2,2,3,3,4,4,...\}$ dizilerine bakıldığında lineer polinom elde edilemez.

4. CATALAN SAYILARI, HANKEL DÖNÜŞÜMÜ VE FIBONACCI SAYILARI

Cvetkovic(2002), makalesinde ardışık iki Catalan sayısının toplamlarının oluşturduğu dizinin Hankel dönüşümünün, Fibonacci Sayılarının alt dizisi olduğunu ispatlamak için elemanları $A=\{a_0,a_1,a_2,...\}$ reel sayılar dizisinden alınan ve $H=\lfloor h_{i,j}\rfloor$ ve $h_{i,j}=a_{i+j-2}$ ile tanımlanan Hankel matrislerini kullanmıştır.

$$H=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Layman'ın makalesinden biliyoruz ki $A=\{h_0,h_1,h_2,...\}$ Hankel determinantları A'nın Hankel dönüşümünü verir.

İncelediğimiz A005807 (EIS) dizisinin elemanları iki ardışık Catalan sayısının toplamıdır.

$$a_n=c(n)+c(n+1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}+\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n)!(5\mathrm{n}+4)}{\mathrm{n}!(\mathrm{n}+2)!}$$

$$(n=0,1,2,3,...)$$

*A*005807 (EIS) dizisi; 2,3,7,19,56,174,561,…

*A*001906 (EIS) dizisi;0,1,3,8,21,55,144,377,…

*A*001519 (EIS) dizisi;1,2,5,13,34,89,233,610,…

Layman Fibonacci sayılarının ikiye ayrımının; *A*001906 ve *A*005807 dizisinin Hankel dönüşümü olan *A001519* dizilerinden oluştuğunu tespit etmiştir.

$n\geq 0$ için $a_n=2-\dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}$ ve $\beta_n=1+\dfrac{1}{F_{2n+1}{}^2}$ olmak üzere,

*A*005807=$\{a_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonunu G(x), hankel determinantını da h_n ile gösterirsek,

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{1}{x}\left(\frac{(1-\sqrt{1-4x})(1+x)}{2x}-1\right) \tag{4.1.}$$

ve

$$h_n = a_0{}^n \beta_1{}^{n-1} \beta_2{}^{n-2} \ldots \beta_{n-2}{}^2 \beta_{n-1} \tag{4.2.}$$

(Krattenthaler)

eşitlikleri elde edilir.

$\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ dizisi

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \cfrac{a_0}{1 + a_0 x - \cfrac{\beta_1 x^2}{1 + a_1 x - \cfrac{\beta_2 x^2}{1 + a_2 x - \ldots}}} \tag{4.3.}$$

dır.

Hankel matrisi $h_{1,1} = a_0 = 2$ ile başlamak üzere A005807 dizisinin Hankel dönüşümü Fibonacci sayılarının tek indisli alt dizisi olan A001519'a eşittir.

Hankel matrisi $h_{1,1} = a_1 = 3$ ile başlamak üzere A005807 dizisinin Hankel dönüşümü Fibonacci sayılarının çift indisli alt dizisi olan A001906'ya eşittir.

$A001906 \cup A001519$ = Fibonacci Sayıları

Bu iki dönüşüm (Binomial ve İnvert dönüşüm) kullanılarak A005807 dizisinden elde edilen bütün diziler burada ifade edilen Hankel dönüşüme sahiptir.

5. *k*-BİNOMİAL DÖNÜŞÜMÜN ÜRETTİĞİ TAMSAYI DİZİLERİ ve *k*-BİNOMİAL DÖNÜŞÜMÜNÜN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

k-binomial dönüşümün ürettiği bir çok dizi EIS araştırmasında listelenmiştir. Bunların birçoğunu Layman vermiştir. Layman tekrarlanan dönüşümle üretilen tamsayılar dizilerinin tablolarını da vermiştir.

Tablo 5.1., Tablo 5.2, Tablo 5.3'teki diziler *k*-binomial,azalan *k*-binomial ve artan *k*-binomial dönüşümleri tarafından üretilmiştir. Tabloda verilen ilk sütundaki *K*, dönüşüm bağıntısı için referans bulunabileceğini, *P*, referans bulunmadığını ancak ispatlanabileceğini, *C*, referans bulunmadığını ve ispatlanamadığını ifade eder.

Tablo 5.1:*k*-binomial dönüşümleri

	A	İsim	*k*	*W*(*A*,*k*)	İsim
	*A*000142	Factorial Sayıları	2	*A*082032	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	3	*A*097814	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	4	*A*097815	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	5	*A*097816	
P	*A*000166	Derangement Sayıları	2	*A*000165	Double Factoriel Sayıları
P	*A*000166	Derangement Sayıları	3	*A*032031	Triple Factoriel Sayıları
P	*A*000166	Derangement Sayıları	4	*A*047053	Quadruple Factoriel Sayıları
P	*A*000166	Derangement	5	*A*052562	Quintuple

		Sayıları			Factoriel Sayıları
K	*A*000354		½	*A*000142	Factoriel Sayıları
P	(*E*)*A*000354		½	*A*007680	
P	*A*000354		2	*A*047053	Quadruple Factoriel Sayılar
K	*A*000364	Euler ve Secant Sayıları	½	*A*005799	
C	*A*000609		½	*A*002078	
P	*A*001006	Motzkin Sayıları	2	*A*003645	
C	*A*001653		½	*A*007052	
P	*A*001907		½	*A*000165	Double Factoriel Sayıları
P	*A*002315		½	*A*007070	NSW Sayıları
P	*A*002426	Merkezi Trinomial Katsayıları	2	*A*059304	
C	*A*007696		½	*A*002801	
K	*A*075271		½	*A*075272	

(Kaynak:Spivey ve Steil,2006)

Tablo 5.2: Artan *k*-binomial dönüşümleri

	A	İsim	*k*	*R(A,k)*	İsim
K	*A*000032	Lucas Sayıları	2	*A*014448	Even Lucas Sayıları veya L_{3n}
K	*A*000045	Fibonacci Sayıları	2	*A*014445	Even Fibonacci Sayıları veya F_{3n}
C	(*E*)*A*000108	Catalan Sayıları	2	*A*059231	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	2	*A*010844	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	3	*A*010845	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	4	*A*056545	
P	*A*000142	Factorial Sayıları	5	*A*056546	
P	*A*000984	Merkezi Binomial Katsayıları	2	*A*084771	

(Kaynak:Spivey ve Steil,2006)

Tablo 5.3: Azalan *k*-binomial dönüşümleri

	A	İsim	*k*	*F(A,k)*	İsim
P	*A*000354		2	*A*010844	

Kaynak:Spivey ve Steil,2006

Tablo 5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3'te üretilen fonksiyonlar arasındaki bağıntının ispatlandığını göstermek için *P* kullanılır .

$A=\{a_0,a_1,a_2,...\}$ tamsayılar dizisinin üreteç fonksiyonu olan f

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2/2!+...=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i/i!$$

Teorem 5.1.Eğer *g(x), A* tamsayılar dizisinin üreteç fonksiyonu ise

1-*F(A,k)* dizisinin üreteç fonksiyonu $e^{kx}g(x)$,

2- *W(A,k)* dizisinin üreteç fonksiyonu $e^{kx}g(kx)$,

3- *R(A,k)* dizisinin üreteç fonksiyonu $e^{x}g(kx)$ (Spivey ve Steil, 2006).

İspat.*k=0* için *F(A,k)* dizisinin üreteç fonksiyonu *A*'nın üreteç fonksiyonu olan *g(x)*'tir. *W(A,k)*'nın üreteç fonksiyonu $\{a_0,0,0,0,...\}$ dizisini üreten *g(0)*'dır. *R(A,k)*'nın üreteç fonksiyonu $\{a_0,a_0,a_0...\}$ dizisini üreten $e^{x}g(0)$'dır. Bunlar *k=0* için k-binomial dönüşümlerin tanımına uygundur.

1. Eğer f herhangi $\{a_n\}$ dizisinin *h*' de herhangi $\{b_n\}$dizisinin üreteç fonksiyonu ise, *fh,* $\left\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}\right\}$ dizisinin üreteç fonksiyonudur. *F(A;k)* dizisini $\left\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{n-i}a_i\right\}$ olarak tanımlamıştık. Son iki diziden $\forall n$ için $b_n=k^n$ olur. $\{1,k,k^2,...\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu e^{kx} olduğundan, *F(A;k)* dizisinin üreteç fonksiyonu $e^{kx}g(x)$

2. Tanımdan $\{b_n\} = B(A)$ için $\mathrm{W(A;k)} = \{\mathrm{k}^{\mathrm{n}} b_n\}$ olur. 1. kısmın ispatından B(A) dizisinin üreteç fonksiyonun $e^x g(x)$ olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda tanımdan $\sum b_i x^i / i!$ olur. Böylece *W(A;k)* dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i b_i x^i / i! = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (kx)^i / i! = e^{kx} g(kx)$$

olur.

3. Daha önceki bölümlerde ispatladığımız teoremden

$$W(A;k) = F(R(A;k), k-1)$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Bu 2 dizinin üreteç fonksiyonları birbirine eşit olur. $G(x)$, *R(A;k)'*nın üreteç fonksiyonu olsun. 1. ve 2. kısımdan $e^{kx} g(kx) = e^{(k-1)x} G(x)$ eşitliği bulunur. Böylece $G(x) = e^x g(kx)$ olur.

Şimdi Teorem 5.1'i kullanarak Tablo 1'de OEIS'de varsayım olarak listelenen 3 bağıntıyı ispatlayacağız. Bu ispatların hepsi *W(A,1/2)* binomial orta dönüşümünü içerir. Tablo 5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3 te verilenlerin hepsi benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 5.1. (E)A000354 dizisinin binomial orta dönüşümü A007680 dizisidir (Spivey ve Steil, 2006).

İspat. OEIS'de A000354 dizisinin üreteç fonksiyonu $e^{-x}/(1-2x)$ olarak verilmiştir. Böylece (E)A000354 dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}/(1-2x)\right] = \frac{e^{-x}(1+2x)}{(1-2x)^2}$$

Böylece Teorem 5.1 'den (E)A000354 dizisinin binomial orta dönüşümünün üreteç fonksiyonu OEIS'de A007680 dizisinin üreteç fonksiyonu olan

$$e^{x/2}\left(\frac{e^{-x/2}(1+x)}{(1-x)^2}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

Sonuç 5.2. A001907 dizisinin binomial orta dönüşümü A000165 dizisidir(Double Factorial Sayıları) (Spivey ve Steil, 2006).

İspat. OEIS'de A001907 dizisinin üreteç fonksiyonu $e^{-x}/(1-4x)$ olarak verilmiştir. Böylece A001907 dizisinin binomial orta dönüşümünün üreteç fonksiyonu OEIS'de A000165 dizisinin üreteç fonksiyonu olarak belirtilen

$$e^{x/2}\left(\frac{e^{-x/2}}{1-2x}\right)=\frac{1}{(1-2x)}$$

Sonuç 5.3. A002315 dizisinin binomial orta dönüşümü A007070 dizisidir (Spivey ve Steil, 2006).

İspat. A002315 dizisi başlangıç değerleri $a_0=1$ ve $a_1=7$ olan bağıntı ile gösterilmiştir. Bunun anlamı A002315 dizisinin üreteç fonksiyonu olan *f*,

$$f''-6f'+f=0, \qquad f(0)=1, \qquad f'(0)=7$$

problemini sağlar. Karakteristik denklemi

$$r^2-6r+1=0$$

olan diferansiyel denklemin çözümü

$$r=3+2\sqrt{2}$$

olarak bulunur. Böylece diferansiyel denklemin çözümü ve A002315 dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x)=c_1e^{(3+2\sqrt{2})x}+c_2e^{(3-2\sqrt{2})x}$$

dır. Başlangıç değerlerini kullanarak

$$c_1=1/2+1/\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad c_2=1/2-1/\sqrt{2}$$

değerleri bulunur. A007070 dizisi için başlangıç değerleri

$$a_0=1 \ \text{ ve } \ a_1=4 \ \text{ olan bağıntı } n\geq 2 \text{ için } a_n=4a_{n-1}-2a_{n-2}$$

olarak verilmiştir. Aynı metodla üreteç fonksiyonu c_1 ve c_2 aynı değerleri almak üzere $c_1e^{(2+\sqrt{2})x}+c_2e^{(2-\sqrt{2})x}$ olarak bulunur. Bu aynı zamanda A002315 dizisinin binomial orta dönüşümünün üreteç fonksiyonudur.

$$e^{x/2}\left[c_1e^{(3/2+\sqrt{2})x}+c_2e^{(3/2-\sqrt{2})x}\right]=c_1e^{(2+\sqrt{2})x}+c_2e^{(2-\sqrt{2})x}$$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma esas olarak; elemanları tamsayılar dizisinden alınan Hankel matrisler, Hankel dönüşümler, Hankel dönüşümler ile doğrudan ilişkili olan invert ve binomial dönüşümler ve bazı sayı dizilerini içermektedir.

Bu çalışmada geçen Hankel matrislerin uygulamalı matematikte özellikle de bazı sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabileceğini tahmin ediyoruz.

Ayrıca bu çalışmada sayı dizileri ile tanımlı matrislerin bazı özellikleri (norm, özdeğer gibi) incelenebilir.

KAYNAKÇA

[1]Layman, J.W. (2001). The Hankel transform and some of its properties, Journal of Integer Sequences, 4, Article 01.1.5.

[2]Spivey M.Z. ve Steil L.L.(2006) The *k*-Binomial Transforms and the Hankel Transform Journal of Integer Sequences, Vol. 9 Article 06.1.1.

[3]Flajolet, P. (1982). On congruences and continuied fractions for some classical combinatorial quantities, Discrete Math, 41, 145-153.

[4]Bozkurt, D. ve ark. (2007). Lineer Cebir, Dizgi Ofset, Konya.

[5]Cvetkovic A., Rajkovic P. ve Ivkovic M. (2002). Catalan numbers, the Hankel transform and Fibonacci numbers, Journal of Integer Sequences, Vol. 5 Article 02.1.3.