T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

RASYONEL FARK DENKLEMLERİ VE RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN BİLGİSAYAR UYGULAMALARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Sema ÇALIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Konya–2011

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sema ÇALIK
	Numarası	095202031001
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin Adı	Rasyonel Fark Denklemleri ve Rasyonel Fark Denklemlerinin Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sema ÇALIK
	Numarası	095202031001
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
	Tezin Adı	Rasyonel Fark Denklemleri ve Rasyonel Fark Denklemlerinin Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan “Rasyonel Fark Denklemleri ve Rasyonel Fark Denklemlerinin Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma” başlıklı bu çalışma 13/05/2011 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	Danışman	
Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR	Üye	
Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	Üye	

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Fark Denklemleri Uygulamalı Matematiğin yeni çalışma alanlarından olup bu alanda oldukça açık problem bulunmaktadır. Son yıllarda bilim insanları bu denklemlere oldukça ilgi duymuş ve bu sayede Fark Denklemleriyle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Genel olarak Fark Denklemleri uygulamada önemli bir yer tutmaktadır. Yüksek Lisans tezimi bu verileri referans alarak hazırladım.

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya ve yüksek lisans eğitimim boyunca zengin bakış açısıyla beni aydınlatan değerli hocam Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışmamı, beni bu günlere getiren, her anlamda destekleyen, mutluluk kaynağım olan, hayatımdaki en değerli iki insan: "Sevgili Annem Cemile Şule ÇALIK'a ve Sevgili Babam Talip ÇALIK" a ithaf ediyorum.

Sema ÇALIK

Konya–2011

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sema ÇALIK
	Numarası	095202031001
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
	Tezin Adı	Rasyonel Fark Denklemleri ve Rasyonel Fark Denklemlerinin Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Fark Denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

İkinci bölümde, Fark Denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

Üçüncü bölümde, Fark Denklemlerinin bazı uygulamalarından bahsettik.

Dördüncü bölümde, $A \in (-\infty,-1)$, k ve m pozitif tamsayılar, $k > m$ ve başlangıç şartları $x_{-k},...,x_0 \in (-\infty,0]$ olmak üzere $x_{n+1} = (1 - x_{n-m})/(A + x_{n-k})$ fark denkleminin lokal asimptotik kararlılığı, iki periyotlu çözümleri, invariant aralığı ve global çekiciliği incelenmiştir. Son olarak da bu fark denkleminin bazı özel durumları için örnekler verdik.

Anahtar kelimeler: Lokal asimptotik kararlılık; iki periyotlu çözümler; invariant aralık; global çekicilik

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sema ÇALIK
	Numarası	095202031001
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
	Tezin İngilizce Adı	A Study On Rational Difference Equations and Computer Applications of Rational Difference Equations

SUMMARY

This study consists of four sections.

In the first section, we give general definitions and theorems about difference equations.

In the second section, we give some information about some difference equations studied before.

In the third section, we give information about some applications of difference equations.

In the fourth section, we investigate the locally asymptotically stable, period-two solutions, invariant intervals and global attractivity of all negative solutions of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = (1 - x_{n-m})/(A + x_{n-k})$ where $A \in (-\infty, -1)$, k, m are positive integer, $k > m$ and initial conditions $x_{-k}, \ldots, x_0 \in (-\infty, 0]$. Finally, we give examples of this difference equation for some special cases.

Keywords: Locally asymptotically stable; period-two solution; invariant interval; global attractor

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x ' in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x ' in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y)$, $E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir.

Birinci mertebeden fark denklemi

$$a_0 y(n+1) + a_1 y(n) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden fark denklemi

$$a_0 y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = g(n)$$

şeklindedir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y ' nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Tanım 1.2. Bir fark denkleminde bağımlı değişkenler birinci dereceden ve denklem bağımlı değişkenlerin parantezine alındığında katsayılar sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa bu denkleme lineer fark denklemi denir. Örneğin,

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_n y(k) = f(k)$$

$n.$ mertebeden bir lineer fark denklemidir.

Teorem 1.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her x_{-k}, $x_{-(k-1)}, \ldots,$ $x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}), \quad n = 0,1,\ldots \tag{1.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.5. (1.1) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$ şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ ' e f 'in sabit noktası denir.

Tanım 1.6. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| + ... + |x_{-k} - \overline{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| + ... + |x_{-k} - \overline{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ise $\overline{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise $\overline{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| + ... + |x_{-k} - \overline{x}| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \overline{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.7. (1.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\overline{x}, ..., \overline{x}) y_{n-i} \tag{1.2}$$

denklemine $\overline{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, ..., \bar{x})\lambda^{k-i} = 0 \tag{1.3}$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.8. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\bar{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 1.9. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} \geq \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Teorem 1.3. (Clark Teoremi) $p, q \in R$ ve $k \in \{0,1,...\}$ olmak üzere

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0,\ n = 0,1,...,$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır.

Sonuç 1.1. $p_k \in R$, $k \in \{1,2,...\}$ olmak üzere

$$x_{n+1} + p_1 x_n + \ldots + p_k x_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{k} |p_i| < 1$ olmasıdır.

Teorem 1.4.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-k}),\ \ n = 0,1,..., \tag{1.4}$$

fark denklemini göz önünde bulunduralım. Burada $k \geq 1$' dir. $\mathrm{I} = [a,b]$ reel sayıların bir aralığı olsun ve $f : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ nin aşağıdaki özellikleri sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

(a) $f(u.v)$ fonksiyonu u'ya göre azalmayan; v'ye göre artmayan bir fonksiyondur.

(b) Eğer $(m, M) \in [a,b] \times [a,b]$

$$m = f(m, M) \text{ ve } M = f(M, m)$$

sisteminin bir çözümü ise $m = M$ dir.

Bu şartlar altında (1.4) denkleminin her çözümü $\overline{x}$ denge noktasına yakınsar.

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, fark denklemlerinin önemli çalışma alanlarından olan global asimptotik kararlılık ile ilgili literatürde yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Amleh, Grove ve Ladas (1998) yaptıkları çalışmada; $\alpha \in [0,\infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve sınırlılığını incelemişlerdir.

Devault ve Galminas (1999) yaptıkları çalışmada; $x_{-1}, x_0, A \in (0,\infty)$ ve $p > 1$ için $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$ denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Valicenti (1999) yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Gibbons ve arkadaşları (2000) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0,\infty)$ aralığında seçilmek şartıyla $y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}$ lineer olmayan fark denklemini incelemişlerdir.

Kosmola, Kulenovic, Ladas ve Teixeira (2000) yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve başlangıç koşulları ile $y_{n+1} = \dfrac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve denge noktasının global asimptotik kararlılığını belirlemişlerdir.

Aboutaleb, El-Sayed ve Hamza (2001) yaptıkları çalışmada; $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}}$ fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Amleh, Kirk ve Ladas (2001) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0,\infty)$ aralığında olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}}$ fark denklemini incelemişlerdir.

Camouzis ve Devault (2001) yaptıkları çalışmada; x_0, x_{-1}, $p > 0$ başlangıç şartları altında $x_{n+1} = p + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin periyodikliğini ve denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Zhang, Shi ve Gaı (2001) yaptıkları çalışmada; $a, b \in [0,\infty)$ için $x_{n+1} = \dfrac{a + bx_n^2}{1 + x_{n-1}^2}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global çekiciliğini incelemişlerdir.

Li, Yan ve Sun (2002) yaptıkları çalışmada; $\alpha, \beta, \gamma, A, b$ katsayıları pozitif reel sayı ve $k \in \{1,2,..\}$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - bx_{n-k}}{A - x_n}$, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-k}}$, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-k}}$ fark denklemlerin her pozitif denge noktasının global çekici olduğunu göstermişlerdir.

Abu-Saris ve Devault (2003) yaptıkları çalışmada; $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denkleminin çözümlerini $y_{-k}, y_{-(k-1)}, ..., y_0$, $A > 0$, $k \in \{2,3,4,...\}$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerekli olan şartları elde etmişlerdir.

El-Afifi (2004) yaptığı çalışmada; negatif olmayan katsayılar ve pozitif başlangıç koşulları altında $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu denklemin pozitif ve negatif yarı dönmeleri ile invariant aralığını incelemiştir.

Camouzis, Devault ve Kosmala (2003) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları ve p parametresi pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{p + x_{n-2}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişler ve şu çıkarımları elde etmişlerdir: p parametresinin tüm pozitif değerleri için tek denge noktası olan $\overline{x}$ ye ait $\overline{x}^2 = \overline{x} + p$ eşitliği vardır. $0 < p < 1$ veya $p \geq 2$ ise denklemin tüm pozitif sınırlı çözümleri pozitif denge noktası $\overline{x}$ de birleşir. $0 < p < 1$ iken sınırsız çözümler vardır. $p \geq 2$ iken pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır. Çalışmada son olarak $1 < p < 2$ iken pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu varsayımında bulunulmuştur.

Chatterjee, Grove, Kostrov ve Ladas (2003) yaptıkları çalışmada; tüm parametreler α, γ, A, B ve başlangıç koşulları x_{-2}, x_{-1}, x_0 negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığı, periyodik karakteri ve denge noktasının global asimptotik kararlılığı gösterilmiştir.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa (2003) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0, \infty)$ aralığında olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}$ fark denklemini incelemişlerdir.

Kalabusic ve Kulenovic (2003) yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-2}}{Cx_{n-1} + Dx_{n-2}}$ fark denkleminin global karakterini incelemişlerdir.

Mestel (2003) yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Yang, Lai, Evans ve Megson (2003) yaptıkları çalışmada; $a, b \geq 0$, $c, d > 0$ için $x_n = \dfrac{a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2}{d - x_{n-2}}$ fark denkleminin negatif olmayan denge noktasının global çekici olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004) yaptıkları çalışmada; $\alpha \in [1,\infty)$, $k = 0, 1, 2, ...$ için ve pozitif reel sayılar olan başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik karakterli ve bu çözümlerin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004) yaptıkları çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreleri $(0,\infty)$ aralığında seçilmek şartıyla $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$ lineer olmayan fark denkleminin global çekiciliğini incelemişlerdir.

Kalabusic, Kulenovic ve Overdeep (2004) yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1} + \delta x_{n-k}}{Bx_{n-1} + Dx_{n-k}}$ fark denkleminin global karakterini incelemişlerdir.

Dehghan ve Douraki (2005) yaptıkları çalışmada; $B, C, \alpha, \beta, \gamma$ pozitif parametreler, $k \in \{1,2,3,...\}$ ve negatif olmayan başlangıç koşulları $x_{-2k+1},...,x_{-1},x_0$ ile $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-k+1} + \gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1} + Cx_{n-2k+1}}$ lineer olmayan yüksek mertebeden fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

El-Owaidy, Ahmed ve Youssef (2005) yaptıkları çalışmada $p \in (0,\infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$ fark denklemini incelemişlerdir.

Li (2005) yaptığı çalışmada; $a,b,A\in(0,\infty)$, k pozitif bir tamsayı ve $x_{-k},...,x_0$ keyfi pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1}=\dfrac{a+bx_n}{A+x_{n-k}}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve tek pozitif denge noktasının global çekici olduğunu elde etmiştir.

Stevic (2005) yaptığı çalışmada; $x_{n+1}=\alpha+\dfrac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$ fark denkleminin çözümlerinin $s,l\in N$ başlangıç şartları altında asimptotikliğini, periyodikliğini, salınımlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Su ve Li (2005) yaptıkları çalışmada; $p,q,r\in[0,\infty)$, $k\geq 1$ ve başlangıç koşulları $y_{-k},...,y_{-1}$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $y_{n+1}=\dfrac{p+qy_n}{1+y_n+ry_{n-k}}$ lineer olmayan fark denkleminin global çekiciliğini incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Su, Li ve Stevic (2005) yaptıkları çalışmada; a,b,A,B pozitif reel sayılar, $k\geq 1$ ve başlangıç koşulları x_{-k} veya x_0 pozitif reel sayı olacak şekilde $x_{-k},...,x_{-1},x_0$ negatif olmayan reel sayılar iken $x_{n+1}=\dfrac{a-bx_n}{Ax_n-Bx_{n-k}}$ fark denkleminin global çekiciliğini, değişmez aralıklarını, periyodik ve salınımlı karakterini incelemişlerdir. Ayrıca tek pozitif denge noktasının global çekici olduğunu belirlemişlerdir.

Yan ve arkadaşları (2005) yaptıkları çalışmada; $\alpha,\ x_{-1},\ x_0$ başlangıç şartlarını reel sayı alarak $x_{n+1} = \alpha - \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ fark denkleminin bütün pozitif ve negatif çözümlerinin asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışmada $x_{-k},\ x_{-(k-1)},...,\ x_0 > 0,\ A > 0$ ve k herhangi pozitif bir tamsayı olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-k}}{a + x_{n-k}x_n}$ fark denkleminin çözümlerini ve kararlılığını incelemiştir.

Hamza (2006) yaptığı çalışmada; α negatif bir sayı ve x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları negatif sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin global kararlılığını, sürekliliğini ve salınımlılığını incelemiştir.

Saleh ve Aloqeili (2006) yaptıkları çalışmada; $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denkleminin $y_{-k},\ y_{-(k+1)},...,\ y_0,\ A > 0$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Şimşek, Çinar ve Yalçınkaya (2006) yaptıkları çalışmada; $x_{-i} \in (0,\infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}$ denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Şimşek, Çinar ve Yalçınkaya (2008) yaptıkları çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(5k+9)}}{1 + x_{n-4}x_{n-9}...x_{n-(5k+9)}}$ fark denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Zhou ve Zhang (2008) yaptıkları çalışmada; $x_n = \dfrac{px_{n-s} + x_{n-t}}{qx_{n-s} + x_{n-t}}$ denklemini pozitif başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve salınımlılığını incelemişlerdir.

Dongmei ve Li (2009) yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-1}^{p}}$ fark denklemini pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları altında global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

3. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİNİN BAZI UYGULAMALARI

Matematik, Fizik, Biyoloji, Ekonomi, Mühendislik ve diğer bilim dallarında ortaya çıkan çeşitli problemler fark denklemlerinin kullanımı ile formüle edilebilir. Bu bölümde, literatürde var olan bu uygulamaların bazılarını ele alacağız.

3.1. Fark Denklemlerinin Biyolojiye Uygulanması (Fibonacci Dizisi)

Bu problem şu şekilde ifade edilebilir: Her bir çift (dişi-erkek) tavşanın doğduktan iki ay sonra yetişkin olacağı ve bundan sonra her ay yeni bir çift tavşan doğurmaya başlayacağı düşünülürse, bir çift yetişkin tavşan bir yılda kaç çift yavru dünyaya getirir?

Tablo-3.1: Tavşan' ın Popülasyon Büyüklüğü

Ay	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Çiftler	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Birinci çift ilk ayın sonunda, bir çift yavruya sahiptir ve bu durumda 2 çift elde ederiz. İkinci ayın sonunda, sadece birinci çift yavru sahibi olacaktır ve bu durumda 3 çift elde ederiz. Üçüncü ayın sonunda, ilk ve ikinci çiftler yavru sahibi olacaktır ve böylece beş çiftimiz olacaktır. Bu şekilde devam edilirse, Tablo-3.1. yi elde edilir. Eğer $F(n)$, n ay sonundaki tavşan çiftlerinin sayısı ise, bu modeli temsil eden bağıntı ikinci mertebeden lineer fark denklemi ile ifade edilebilir.

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad F(0) = 1, \quad F(1) = 2, \quad 0 \le n \le 10$$

Bu örnek aşağıda verilen Fibonacci dizisinin özel bir durumudur. Fibonacci dizisi;

$$F(n+2)=F(n+1)+F(n),\ \ F(0)=0,\ \ F(1)=1,\ \ n\geq 0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. İlk 13 terim 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ve 377 olarak verilmiştir ve tavşan probleminde belirtilmiştir.

(3.1) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2-\lambda-1=0$$

olur ve böylelikle kökleri

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olarak elde edilir.

(3.1) denkleminin genel çözümü $n\geq 1$ için

$$F(n)=a_1\lambda_1^n+a_2\lambda_2^n$$

$$F(n)=a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olarak elde edilir. Başlangıç değerleri olan $F(0)=1$ ve $F(1)=2$ yardımıyla a_1 ve a_2 katsayıları

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ a_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

olarak bulunur. (3.1) denkleminin genel çözümü

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n-\lambda_2^n\right),\ n\geq 1$$

şeklindedir.

3.2. Fark Denklemlerinin Olasılığa Uygulanması (Kumarbazın İflası)

Bir kumarbaz, $0\leq q\leq 1$ iken herhangi bir oyunda \$1.00 kazanma olasılığının q bilinen değeri ve \$1.00 kaybetme olasılığının $1-q$ bilinen değeri olduğu bir dizi oyunu rakibine karşı oynamaktadır. N dolar para elde etme amacına ulaşırsa veya tüm parasını kaybederse kumar oynamayı bırakacaktır. Eğer kumarbazın parası biterse iflas ettiğini söyleyeceğiz. Kumarbazın n dolar paraya sahip olması durumunda iflas etme olasılığı $p(n)$ olsun. Kumarbaz iki şekilde iflas ettirilebilir. İlk olarak, bir sonraki oyunu kazandığında, bu olayın olasılığı q dur, bu durumda serveti $n+1$ olacaktır ve iflas etme olasılığı $p(n+1)$ olacaktır. İkinci olarak, bir sonraki oyunu kaybettiğinde, bu olayın olasılığı $1-q$ dur ve iflas etme olasılığı $p(n-1)$ olacaktır. Dolayısıyla, toplam olasılık teoremi uygulanarak

$$p(n)=qp(n+1)+(1-q)p(n-1)$$

elde edilir. n yerine $n+1$ yazıp düzenlersek

$$p(n+2)-\frac{1}{q}p(n+1)+\frac{(1-q)}{q}p(n)=0,\ n=0,1,\ldots,N,$$

olarak bulunur. $p(0)=1$ ve $p(N)=0$ ile karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0$$

şeklinde elde edilir ve karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1}{2q} + \frac{1-2q}{2q} = \frac{1-q}{q}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2q} - \frac{1-2q}{2q} = 1$$

şeklindedir. Bu durumda $q \neq \frac{1}{2}$ olmak üzere genel çözüm

$$p(n) = a_1 + a_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^n$$

olarak elde edilir. $p(0)=1$, $p(N)=0$ başlangıç şartları kullanılarak

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 + a_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^N = 0$$

elde edilir. Böylece

$$a_1 = \frac{-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$$

ve

$$a_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$$

olarak bulunur. Buradan

$$p(n) = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^n - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N} \tag{3.2}$$

elde edilmiş olur. $q = \frac{1}{2}$ olduğu zamanki özel durum ayrı olarak çözülmelidir; çünkü bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tekrarlanan kökleri elde ederiz. Adil bir oyun olduğu zaman bu durum kesinlikle gerçekleşir. Bu durumda genel çözüm

$$p(n) = c_1 + c_2 n$$

şeklinde ifade edilir ve başlangıç koşullarını kullandığımız zaman

$$p(n) = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N} \tag{3.3}$$

denklemini elde ederiz.

Örneğin eğer birisi \$4 ile oyuna başlarsa, 1 dolar kazanma olasılığı 0.3 tür, parası biterse ya da toplam \$10 para kazanırsa kumar oynamayı bırakacaktır. Böylelikle $n = 4$, $q = 0.3$ ve $N = 10$ iken iflas etme olasılığı;

$$p(4) = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^4 - \left(\frac{7}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{7}{3}\right)^{10}} = 0.994$$

olarak bulunur.

Öte yandan eğer $q = 0.5$, $N = \$100.00$ ve $n = 20$ ise o zaman (3.3) denkleminden

$$p(20) = 1 - \frac{20}{100} = 0.8$$

elde edilir. O halde $q \leq 0.5$ ve $N \to \infty$ ise (1.2) ve (1.3) formüllerinin her ikisinde de $p(n)$ olasılığı 1'e yaklaşmaktadır ve kumarbazın iflas etmesi kesindir.

Kumarbazın kazanma olasılığı

$$\tilde{p}(n) = 1 - p(n) = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^{N}} & q \neq 0.5 \\ \dfrac{n}{N} & q = 0.5 \end{cases}$$

olarak verilmektedir.

3.3. Fark Denklemlerinin Ekonomiye Uygulanması (Milli Gelir)

Kapitalist bir ülkede belirli n zaman dilimindeki milli gelir $Y(n)$

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n), \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir.

$C(n)$: Tüketim mallarının satın alınması için yapılan tüketici harcamaları

$I(n)$: Sermaye malzemelerini satın almak için yapılan (milli gelirdeki artış sebebi ile sağlanan) özel yatırım artışı

$G(n)$: Kamu harcamalarını göstermektedir.

n genellikle yıl olarak hesaplanmaktadır.

Şimdi ekonomistler tarafından yaygın olarak kabul edilen bazı varsayımları inceleyelim:

1. Tüketici harcamaları olan $C(n)$, bir önceki $n-1$ yılındaki milli gelir $Y(n-1)$ ile orantılıdır.

$$C(n) = \alpha Y(n-1) \tag{3.5}$$

Burada genellikle $\alpha > 0$ marjinal tüketim eğilimi adını alır.

2. Özel yatırım artışı $I(n)$, tüketimdeki artış $C(n) - C(n-1)$ ile orantılıdır.

$$I(n) = \beta[C(n) - C(n-1)] \tag{3.6}$$

Burada $\beta > 0$ fonksiyonel bağıntı katsayısıdır.

3. Son olarak, kamu harcamaları $G(n)$, yıllar boyunca sabittir ve bu sabit birimi

$$G(n) = 1 \tag{3.7}$$

olarak alırız. (1.5), (1.6) ve (1.7) denklemlerini (1.4) denkleminde yerine koyduğumuzda ikinci dereceden fark denklemi elde edilir. Bu denklem

$$Y(n) - \alpha(1+\beta)Y(n-1) + \alpha\beta Y(n-2) = 1$$

şeklindedir ve düzenleme yapılarak

$$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \alpha\beta Y(n) = 1, \quad n \in \mathrm{Z}^{+} \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemin tek denge noktası vardır. Bu denge noktası

$$\overline{Y} = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1$$

olarak bulunur. Bu denge noktasının asimptotik kararlı olması ancak ve ancak aşağıdaki koşullar altında gerçekleşir

$$\alpha < 1\ , \quad 1 + \alpha + 2\alpha\beta > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha\beta < 1 \tag{3.9}$$

2. eşitsizlik her zaman sağlamaktadır; çünkü α ve β pozitif sayılardır. Bu durumda milli gelirin denge noktası olan $\overline{Y}$, ancak ve ancak (1.9) da belirtilen koşullar altında lokal asimptotik kararlı olur. Ayrıca milli gelir olan $Y(n)$

$$\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \tag{3.10}$$

şartı sağlandığı zaman denge durumu olan $\overline{Y}$ etrafında salınımlıdır. Bu demektir ki (1.8) denkleminin karakteristik denklemi olan

$$\lambda^2 - \alpha(1+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0,$$

denkleminin hiçbir kökü pozitif reel sayı değildir.

Örneğin $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ olsun, o halde $\overline{Y} = 2$ ($\overline{Y} = 2 \times G(n)$) olacaktır. Bu durumda (3.9) ve (3.10) koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla milli gelir $Y(n)$, başlangıç geliri olan $Y(0)$ ve $Y(1)$ değerlerine bakılmaksızın her zaman $\overline{Y} = 2$ denge noktasına salınımlı biçimde yaklaşmaktadır.

3.4. Fark Denklemlerinin İletişime Uygulanması (Bilginin Aktarımı)

Bir sinyal sisteminin telgraftaki nokta ve çizgiler gibi s_1 ve s_2 şeklinde 2 sinyale sahip olduğunu varsayalım. Mesajlar ilk olarak bu iki sinyalin karakter dizisi ya da serisine kodlanması ile gönderilmektedir. s_1 in tam olarak aktarımının yapılabilmesi için, n_1 birimlerine, s_2 nin de n_2 birimlerine ihtiyaç duyduğunu kabul edelim. $M(n)$ de n süresi boyunca olası mesaj serilerinin sayısı olsun. n ya s_1 ya da s_2 sinyali ile sonlanmaktadır. Eğer mesaj s_1 ile biterse son sinyal $n-n_1$ de başlamalıdır. Böylelikle son s_1 in eklenebileceği $M(n-n_1)$ kadar olası mesaj bulunmaktadır. Yani s_1 ile biten n süresinde $M(n-n_1)$ mesaj bulunmaktadır. Benzer şekilde s_2 ile biten n süresinde $M(n-n_2)$ mesaj bulunduğu sonucuna ulaşılabilir. Sonuç olarak n süresinde $M(n)$ mesajların toplam sayısı olmak üzere

$$M(n) = M(n-n_1) + M(n-n_2)$$

şeklinde verilebilir. Eğer $n_1 \geq n_2$ ise o zaman yukarıdaki denklem n_1' inci dereceden benzer şekliyle yazılabilir.

$$M(n+n_1) - M(n+n_1-n_2) - M(n) = 0$$

Diğer taraftan eğer $n_1 \leq n_2$ ise o zaman n_2' inci dereceden denklem elde ederiz. Denklem ise

$$M(n+n_2) - M(n+n_2-n_1) - M(n) = 0$$

şeklindedir. $n_1 = 1$ ve $n_2 = 2$ olarak alındığında özel bir durum ortaya çıkmaktadır. Bu durumda

$$M(n+2) - M(n+1) - M(n) = 0$$

veya

$$M(n+2) = M(n+1) + M(n)$$

elde edilir ve bu bir Fibonacci dizisidir.

Genel çözüm

$$M(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 0,1,2,...,$$

şeklinde verilir.

4. BÖLÜM

$x_{n+1} = \dfrac{1-x_{n-m}}{A+x_{n-k}}$ RASYONEL FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE BİLGİSAYAR UYGULAMALARI

Bu bölümde $A \in (-\infty,-1)$, k ve m pozitif tamsayılar, $k > m$ ve $x_{-k},...,x_0 \in (-\infty,0]$ şartları altında

$$x_{n+1} = \frac{1-x_{n-m}}{A+x_{n-k}}\ ,\ n = 0,1,... \tag{4.1}$$

fark denkleminin negatif çözümlerinin lokal asimptotik kararlılığı, 2 periyotlu çözümleri, invariant aralığı ve denge noktasının global çekiciliği incelenmiştir.

(4.1) denkleminin karakterinin incelenmesi için tek negatif denge noktasını elde edelim:

$$\bar{x} = \frac{1-\bar{x}}{A+\bar{x}} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x}A + \bar{x}^2 = 1-\bar{x} \\ \bar{x}^2 + (A+1)\bar{x} - 1 = 0 \end{array}$$

olduğundan

$$\bar{x} = \frac{-(A+1) - \sqrt{(A+1)^2+4}}{2} \tag{4.2}$$

elde edilir.

(4.1) denkleminin karakteristik denklemi elde edelim:

$$f(u,v)=\frac{1-u}{A+v} \tag{4.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}&=-\frac{1}{A+v}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}\left(\bar{x},\bar{x}\right)=-\frac{1}{A+\bar{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial v}&=\frac{u-1}{(A+v)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}\left(\bar{x},\bar{x}\right)=-\frac{1-\bar{x}}{\left(A+\bar{x}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\bar{x}A+\bar{x}^2=1-\bar{x}$$

$$\bar{x}\left(A+\bar{x}\right)=1-\bar{x}$$

$$\frac{1-\bar{x}}{A+\bar{x}}=\bar{x}\Rightarrow-\frac{1-\bar{x}}{\left(A+\bar{x}\right)^2}=-\frac{\bar{x}}{A+\bar{x}}$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\bar{x},\bar{x}\right)=-\frac{\bar{x}}{A+\bar{x}}$$

elde edilir. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklem

$$y_{n+1}+\frac{1}{A+\bar{x}}y_{n-m}+\frac{\bar{x}}{A+\bar{x}}y_{n-k}=0 \tag{4.5}$$

şeklindedir. Tanım 1.6 ve Teorem 1.3 den karakteristik denklemin

$$\lambda^{k+1} + \frac{1}{A+\overline{x}}\lambda^{k-m} + \frac{\overline{x}}{A+\overline{x}} = 0 \tag{4.6}$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.1. $A < -1$ ise (4.1) fark denkleminin negatif denge noktası olan $\overline{x} = \dfrac{-(1+A) - \sqrt{(1+A)^2 + 4}}{2}$ lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. (4.5) denkleminde $p = \dfrac{1}{A+\overline{x}}$, $q = \dfrac{\overline{x}}{A+\overline{x}}$ dir. Ayrıca

$$\left|\frac{1}{A+\overline{x}}\right| + \left|\frac{\overline{x}}{A+\overline{x}}\right| = \frac{-1+\overline{x}}{A+\overline{x}} < 1$$

olduğundan Teorem 1.3 e göre (4.1) fark denkleminin negatif denge noktası lokal asimptotik kararlı olur.

Teorem 4.2. (4.1) fark denkleminin 2 periyotlu negatif çözümleri yoktur.

İspat. (4.1) fark denkleminin çözümlerinin ϕ ve φ şeklinde 2 periyotlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda düşünülmesi gereken dört durum vardır:

(a) Eğer k ve m tek ise bu durumda $x_{n+1} = x_{n-k} = x_{n-m}$ dır. Ayrıca (4.1) fark denkleminde n yerine $2n$ yazılırsa

$$x_{2n+1} = \frac{1 - x_{2n-m}}{A + x_{2n-k}}$$

eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x_{2n-m}}{A+x_{2n-k}}\right)$$

$$\phi = \frac{1-\phi}{A+\phi} \text{ ya da } \varphi = \frac{1-\varphi}{A+\varphi}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \phi A + \phi^2 &= 1-\phi \\ \varphi A + \varphi^2 &= 1-\varphi \end{aligned} \Rightarrow (\phi-\varphi)(A+\phi+\varphi+1)=0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte ikinci çarpan sıfır olamayacağı için $\phi = \varphi$ dir ve kabulümüzle çelişir. Yani (4.1) fark denkleminin k ve m tek sayı iken iki periyotlu negatif çözümü yoktur.

(b) Eğer k ve m çift ise bu durumda $x_n = x_{n-k} = x_{n-m}$ dır. Ayrıca (4.1) fark denkleminde n yerine $2n$ yazılırsa

$$x_{2n+1} = \frac{1-x_{2n-m}}{A+x_{2n-k}}$$

eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x_{2n-m}}{A+x_{2n-k}}\right)$$

$$\phi = \frac{1-\varphi}{A+\varphi} \text{ ya da } \varphi = \frac{1-\phi}{A+\phi}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\phi A + \phi\varphi &= 1-\varphi \\ \varphi A + \phi\varphi &= 1-\phi\end{aligned} \Rightarrow (\phi-\varphi)(A-1)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde, yukarıdaki eşitlikte ikinci çarpan sıfır olamayacağı için $\phi = \varphi$ dir ve bu da kabulümüzle çelişir. Yani (4.1) fark denkleminin k ve m çift sayı iken iki periyotlu negatif çözümü yoktur.

(c) Eğer k çift, m tek ise bu durumda $x_n = x_{n-k}$, $x_{n+1} = x_{n-m}$ dır. Ayrıca (4.1) fark denkleminde n yerine $2n$ yazılırsa

$$x_{2n+1} = \frac{1-x_{2n-m}}{A+x_{2n-k}}$$

eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x_{2n-m}}{A+x_{2n-k}}\right)$$

$$\phi = \frac{1-\phi}{A+\varphi} \text{ ya da } \varphi = \frac{1-\varphi}{A+\phi}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\phi A + \phi\varphi &= 1-\phi \\ \varphi A + \phi\varphi &= 1-\varphi\end{aligned} \Rightarrow (\phi-\varphi)(A+1)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde yukarıdaki eşitlikte ikinci çarpan sıfır olamayacağı için $\phi = \varphi$ dir ve bu da kabulümüzle çelişir. Yani (4.1) fark denkleminin k çift ve m tek sayı iken iki periyotlu negatif çözümü yoktur.

(d) Eğer k tek, m çift ise bu durumda $x_{n+1} = x_{n-k}$, $x_n = x_{n-m}$ dır. Ayrıca (4.1) fark denkleminde n yerine $2n$ yazılırsa

$$x_{2n+1} = \frac{1 - x_{2n-m}}{A + x_{2n-k}}$$

eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - x_{2n-m}}{A + x_{2n-k}}\right)$$

$$\phi = \frac{1-\varphi}{A+\phi} \text{ ya da } \varphi = \frac{1-\phi}{A+\varphi}$$

olur. Buradan

$$\begin{matrix} \phi A + \phi^2 = 1-\varphi \\ \varphi A + \varphi^2 = 1-\phi \end{matrix} \Rightarrow (\phi-\varphi)(A+\phi+\varphi-1) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde yukarıdaki eşitlikte ikinci çarpan sıfır olamayacağı için $\phi = \varphi$ dir ve bu da kabulümüzle çelişir. Yani (4.1) fark denkleminin k tek ve m çift sayı iken iki periyotlu negatif çözümü yoktur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1. $A < -1$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $-1 < \bar{x} = \dfrac{-(1+A) - \sqrt{(1+A)^2 + 4}}{2} < 0$ dır.

(b) Eğer $u, v \in (-\infty, 0]$ ise o zaman $f(u,v)$ fonksiyonu u'ya göre kesin artan, v'ye göre kesin azalan bir fonksiyondur.

İspat.

(a) $A < -1$ için $-1 < \overline{x} < 0$ olduğu açıktır.

$$f(u,v) = \frac{1-u}{A+v} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{A+v} > 0$$

(b)

$$f(u,v) = \frac{1-u}{A+v} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u-1}{(A+v)^2} < 0$$

olduğundan $f(u,v)$ fonksiyonunun u'ya göre kesin artan, v'ye göre kesin azalan olduğu açıktır.

Lemma 4.2. $A \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ olsun. Eğer $i = -k, -k+1, \ldots, -m-1$ için $x_i \in (-\infty, 0]$, ve $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-m} \in [A, 0]$ ise o zaman $n = 1, 2, \ldots$ için $A \le x_n < 0$ dır.

İspat. $A \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ olduğundan

$$A \le \frac{1-A}{A}$$

yazılabilir. Buradan

$$A \le \frac{1-A}{A} \le \frac{1-A}{A+x_{-k}} \le x_1 = \frac{1-x_{-m}}{A+x_{-k}} \le \frac{1}{A+x_{-k}} < 0$$

$$A \le \frac{1-A}{A} \le \frac{1-A}{A+x_{-k+1}} \le x_2 = \frac{1-x_{-m+1}}{A+x_{-k+1}} \le \frac{1}{A+x_{-k+1}} < 0$$

$$\vdots$$

$$A \le \frac{1-A}{A} \le \frac{1-A}{A+x_{-k+(m-1)}} \le x_m = \frac{1-x_{-1}}{A+x_{-k+(m-1)}} \le \frac{1}{A+x_{-k+(m-1)}} < 0$$

$$A \le \frac{1-A}{A} \le \frac{1-A}{A+x_{-k+m}} \le x_{m+1} = \frac{1-x_0}{A+x_{-k+m}} \le \frac{1}{A+x_{-k+m}} < 0$$

$$\vdots$$

$$A \le \frac{1-A}{A} \le \frac{1-A}{A+x_{-1}} \le x_k = \frac{1-x_{-m+(k-1)}}{A+x_{-1}} \le \frac{1}{A+x_{-1}} < 0$$

$$A \le \frac{1-A}{A} \le \frac{1-A}{A+x_0} \le x_{k+1} = \frac{1-x_{-m+k}}{A+x_0} \le \frac{1}{A+x_0} < 0$$

elde edilir. Bu durumda (4.1) fark denkleminin çözümlerinin $n = 1, 2, ...$ için $A \le x_n < 0$ şeklinde olduğu görülür.

Teorem 4.3. $A \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ ise (4.1) fark denkleminin invariant aralığı $[A, 0]$ dır.

İspat. $x_{-k},...,x_{-1},x_0 \in [A,0]$ olsun. Lemma 4.1 den $f(u,v)$ fonksiyonunun $u,v \in (-\infty,0]$ için u'ya göre kesin artan, v'ye göre kesin azalan olduğu açıktır. O halde

$$x_1 = \frac{1-x_{-m}}{A+x_{-k}} = f(x_{-m},x_{-k}) < f(0,A) = \frac{1}{2A} < 0$$

$$\Rightarrow x_1 \in [A,0]$$

$$x_1 = \frac{1-x_{-m}}{A+x_{-k}} = f(x_{-m},x_{-k}) > f(A,0) = \frac{1-A}{A} \geq A$$

$$x_2 = \frac{1-x_{-m+1}}{A+x_{-k+1}} = f(x_{-m+1},x_{-k+1}) < f(0,A) = \frac{1}{2A} < 0$$

$$\Rightarrow x_2 \in [A,0]$$

$$x_2 = \frac{1-x_{-m+1}}{A+x_{-k+1}} = f(x_{-m+1},x_{-k+1}) > f(A,0) = \frac{1-A}{A} \geq A$$

$$\vdots$$

$$x_k = \frac{1-x_{-m+(k-1)}}{A+x_{-1}} = f(x_{-m+(k-1)},x_{-1}) < f(0,A) = \frac{1}{2A} < 0$$

$$\Rightarrow x_k \in [A,0]$$

$$x_k = \frac{1-x_{-m+(k-1)}}{A+x_{-1}} = f(x_{-m+(k-1)},x_{-1}) > f(A,0) = \frac{1-A}{A} \geq A$$

$$x_{k+1} = \frac{1-x_{k-1}}{A+x_0} = f(x_{k-1},x_0) < f(0,A) = \frac{1}{2A} < 0$$

$$\Rightarrow x_{k+1} \in [A,0]$$

$$x_{k+1} = \frac{1-x_{k-1}}{A+x_0} = f(x_{k-1},x_0) > f(A,0) = \frac{1-A}{A} \geq A$$

Böylece iterasyon yardımıyla (4.1) fark denkleminin tüm çözümlerinin $n \geq 1$ için $x_n \in [A,0]$ aralığında olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 4.4. $A \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ ise (4.1) fark denkleminin tek negatif denge noktası $S = [A,0]^{k+1}$ kümesinde global çekicidir.

İspat. $(x_{-k},...,x_{-1},x_0) \in S$ olsun. Açıkça görülmektedir ki (4.3) de tanımlanan sürekli fonksiyon $[A,0]$ invariant aralığında u'ya göre artan v'ye göre azalan bir fonksiyondur. $m, M \in \mathrm{I}$

$$m = f(m,M) = \frac{1-m}{A+M} \ , \ M = f(M,m) = \frac{1-M}{A+m}$$

sistemin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1-m &= m(A+M) \\ 1-M &= M(A+m) \end{aligned} \Rightarrow (m-M)(A+1) = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada $A+1<0$ olduğundan $m=M$ elde edilir ve Teorem 1.4 den $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olduğu sonucuna varılır ki bu da (4.1) fark denkleminin negatif denge noktasının global çekici olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.5. $A \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ ise (4.1) fark denkleminin tek negatif denge noktası $S = (-\infty,0]^k \times [A,0]$ kümesinde global çekicidir.

İspat. $(x_{-k},...,x_{-1},x_0) \in S$ olsun. Lemma 4.2 den $n = 1,2,...,k,k+1,...$ için $x_n \in [A,0]$ ve Teorem 4.4 den $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = \bar{x}$ olduğunu biliyoruz. (4.1) fark denkleminin çözümleri incelendiğinde

$$A < x_1 = \frac{1 - x_{-m}}{A + x_{-k}} < 0$$

$$A < x_2 = \frac{1 - x_{-m+1}}{A + x_{-k+1}} < 0$$

$$\vdots$$

$$A < x_m = \frac{1 - x_{-1}}{A + x_{-k+(m-1)}} < 0$$

$$A < x_{m+1} = \frac{1 - x_0}{A + x_{-k+m}} < 0$$

$$\vdots$$

$$A < x_k = \frac{1 - x_{-m+(k-1)}}{A + x_{-1}} < 0$$

$$A < x_{k+1} = \frac{1 - x_{-m+k}}{A + x_0} < 0$$

şeklindedir. (4.1) fark denkleminin çözümleri Lemma 4.2 de gösterildiği gibi $[A,0]$ invariant aralığındadır. Ayrıca $n \geq k+1$ için

$$A < x_{k+2} = \frac{1 - x_{-m+(k+1)}}{A + x_1} < 0$$

$$A < x_{k+3} = \frac{1 - x_{-m+(k+2)}}{A + x_2} < 0$$

$$A < x_{k+4} = \frac{1 - x_{-m+(k+3)}}{A + x_3} < 0$$

$$A < x_{k+5} = \frac{1 - x_{-m+(k+4)}}{A + x_4} < 0$$

$$\vdots$$

elde edilir. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = \overline{x}$ olduğundan açıkça $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

.

Örnek 4.1.1. (4.1) fark denkleminin negatif denge noktası olan $\overline{x}$, Lemma 4.1 şartları altında $-1 < \overline{x} < 0$ dır.

Tablo-4.1

A	$\overline{x}$	A	$\overline{x}$
-1.1	-0.95125	-31.1	-0.03319
-3.1	-0.4	-33.1	-0.03112
-5.1	-0.2309	-35.1	-0.0293
-7.1	-0.15975	-37.1	-0.02768
-9.1	-0.12163	-39.1	-0.02623
-11.1	-0.09806	-41.1	-0.02492
-13.1	-0.08209	-43.1	-0.02374
-15.1	-0.07057	-45.1	-0.02266

-17.1	-0.06187	-47.1	-0.02168
-19.1	-0.05508	-49.1	-0.02078
-21.1	-0.04963	-51.1	-0.01995
-23.1	-0.04516	-53.1	-0.01919
-25.1	-0.04142	-55.1	-0.01848
-27.1	-0.03826	-57.1	-0.01782
-29.1	-0.03554	-59.1	-0.01721

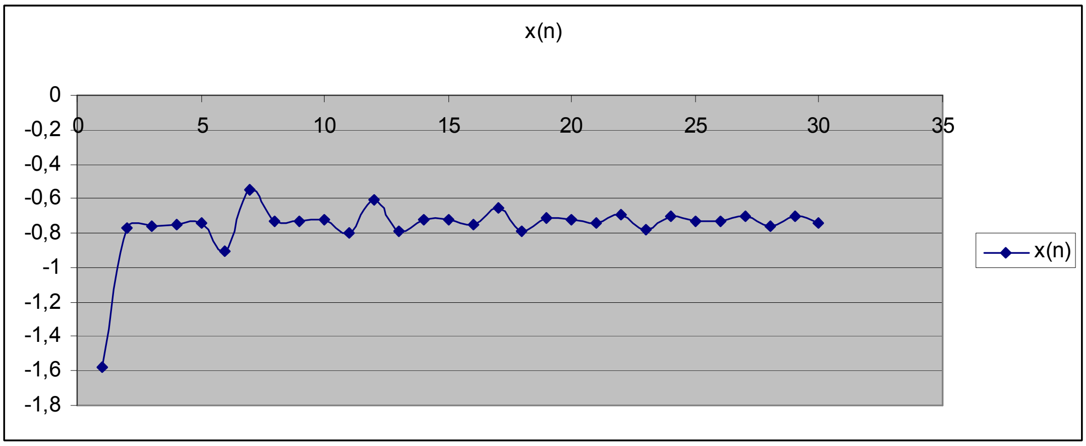
Örnek 4.1.2. (4.1) fark denkleminde $m=4$, $k=5$ ve $A=-1.65$ olması durumunda başlangıç şartları $x_{-5}=0$, $x_{-4}=-1.6$, $x_{-3}=-1.5$, $x_{-2}=-1.4$, $x_{-1}=-1.3$ ve $x_0=-1.2$ iken elde edilen fark denkleminin çözümleri Lemma 4.2 şartları altında $n=1,2,...$ için $A \le x_n < 0$ olur. Bu durum Şekil- 4.1 de açıkça görülmektedir.

Tablo-4.2: x_n **Çözümleri**

n	x_n	n	x_n
1	-1.57576	16	-0.75527
2	-0.76923	17	-0.65709
3	-0.7619	18	-0.7916
4	-0.7541	19	-0.70861
5	-0.74576	20	-0.7264
6	-0.90377	21	-0.73872
7	-0.54847	22	-0.68894
8	-0.72829	23	-0.77657
9	-0.72727	24	-0.69979
10	-0.72616	25	-0.73196
11	-0.79464	26	-0.73166
12	-0.60635	27	-0.70705

13	-0.78613	28	-0.75956
14	-0.72626	29	-0.70049
15	-0.72611	30	-0.73707

Şekil- 4.1



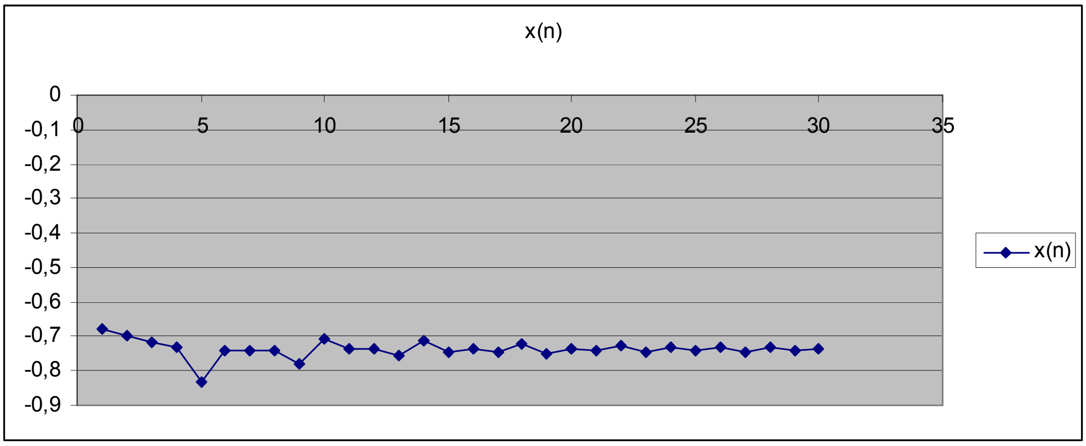
Örnek 4.1.3. (4.1) fark denkleminde $m = 3$, $k = 4$ ve $A = -1.61803$ olması durumunda başlangıç şartları $x_{-4} = 0$, $x_{-3} = -0.1$, $x_{-2} = -0.2$, $x_{-1} = -0.3$ ve $x_0 = -0.4$ iken elde edilen fark denkleminin çözümlerinin invariant aralığı Teorem 4.3 şartları altında $[A,0]$ dır. Bu durum Şekil- 4.2 de açıkça görülmektedir.

Tablo-4.3: x_n Çözümleri

n	x_n	n	x_n
1	-0.67984	16	-0.73775
2	-0.69847	17	-0.74459
3	-0.71506	18	-0.72192
4	-0.72991	19	-0.74941

5	-0.83241	20	-0.73484
6	-0.73915	21	-0.74055
7	-0.74036	22	-0.72882
8	-0.74147	23	-0.74762
9	-0.78043	24	-0.73279
10	-0.70973	25	-0.73976
11	-0.73832	26	-0.73299
12	-0.73841	27	-0.74467
13	-0.75458	28	-0.73248
14	-0.71284	29	-0.74006
15	-0.74678	30	-0.73501

Şekil- 4.2

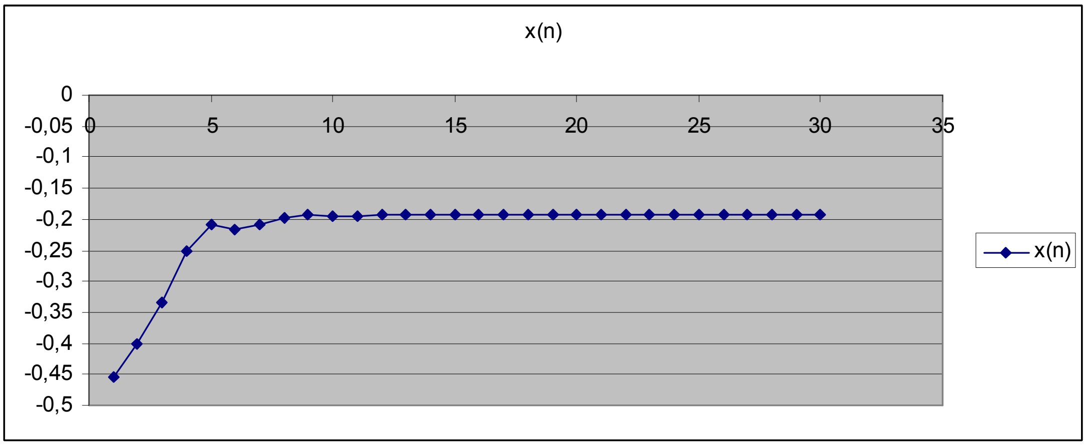


Örnek 4.1.4. (4.1) fark denkleminde $m=3$, $k=4$ ve $A=-6$ olması durumunda başlangıç şartları $x_{-4}=-5$, $x_{-3}=-4$, $x_{-2}=-3$, $x_{-1}=-2$ ve $x_0=-1$ iken elde edilen fark denkleminin tek negatif denge noktası olan $\bar{x}=-0.19258$ Teorem 4.4 şartları altında global çekicidir. Bu durum Şekil- 4.3 te açıkça görülmektedir.

Tablo-4.4: x_n **Çözümleri**

n	x_n	n	x_n
1	-0.45455	16	-0.19257
2	-0.4	17	-0.19257
3	-0.33333	18	-0.19267
4	-0.25	19	-0.19259
5	-0.20779	20	-0.19258
6	-0.2169	21	-0.19258
7	-0.20833	22	-0.1926
8	-0.19737	23	-0.19258
9	-0.19325	24	-0.19258
10	-0.19603	25	-0.19258
11	-0.19436	26	-0.19258
12	-0.19286	27	-0.19258
13	-0.19254	28	-0.19258
14	-0.19312	29	-0.19258
15	-0.19276	30	-0.19258

Şekil- 4.3



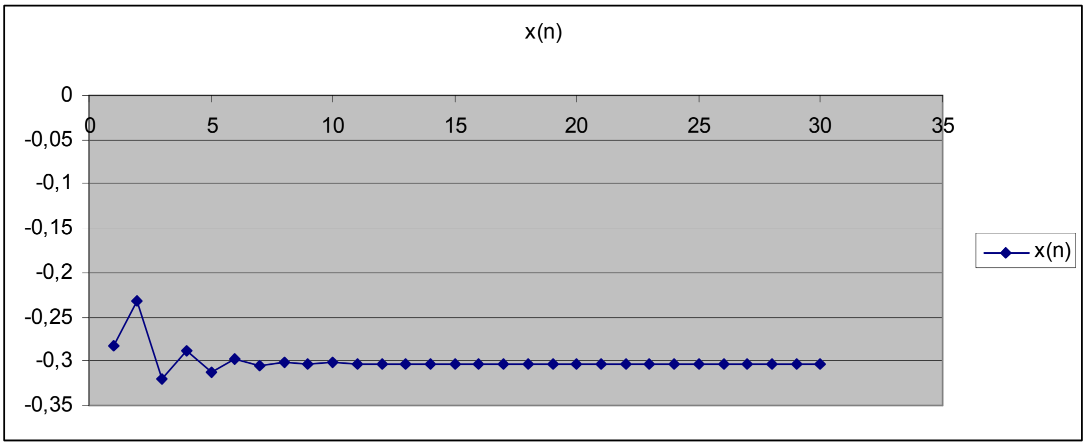
Örnek 4.1.5. (4.1) fark denkleminde $m=1$, $k=2$ ve $A=-4$ olması durumunda başlangıç şartları $x_{-2}=-0.6$, $x_{-1}=-0.3$ ve $x_0=0$ iken elde edilen fark denkleminin tek negatif denge noktası olan $\bar{x}=-0.30278$ Teorem 4.4 şartları altında global çekicidir. Bu durum Şekil- 4.4 te açıkça görülmektedir.

Tablo-4.5: x_n **Çözümleri**

n	x_n	n	x_n
1	-0.28261	16	-0.30275
2	-0.23256	17	-0.30279
3	-0.32065	18	-0.30277
4	-0.28781	19	-0.30278
5	-0.31202	20	-0.30277
6	-0.29806	21	-0.30278
7	-0.30599	22	-0.30277
8	-0.30103	23	-0.30278
9	-0.30386	24	-0.30278

10	-0.30214	25	-0.30278
11	-0.30315	26	-0.30278
12	-0.30255	27	-0.30278
13	-0.30291	28	-0.30278
14	-0.3027	29	-0.30278
15	-0.30282	30	-0.30278

Şekil- 4.4



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; $A \in (-\infty, -1)$, k ve m pozitif tamsayılar, $k > m$ ve $x_{-k}, \ldots, x_0 \in (-\infty, 0]$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_{n-m}}{A + x_{n-k}}$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlılığı, iki periyotlu çözümleri, invariant aralığı ve global çekiciliği incelenmiştir. Bu çalışmanın ışığında bu fark denkleminin katsayıları genelleştirilerek denge noktasının global asimptotik kararlılığı ve global çekiciliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aboutaleb, M. T., El-Sayed, M. A. and Hamza, A. E. (2001). Stability of the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 261,* 126-133.

Abu-Saris, R. M. and Devault, R. (2003). Global stability of $y_{n+1} = \mathrm{A} + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$. *Applied Mathematics Letters*, *16,* 173-178.

Aloqeili, M. (2006). Dynamics of a kth order rational difference equation. *Applied Mathematics and Computation*, *181*, 1328-1335.

Amleh, A. M., Grove, E. A. and Ladas, G. (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233,* 790-798.

Amleh, A. M., Kirk, V. and Ladas, G. (2001). On the dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}}$. *Mathematical Sciences Research Hot-Line, 5,* 1-15.

Camouzis, E. and Devault, R. (2001). Asymptotic behavior of solutions of $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}$. *Journal of Difference Equation and Aplications*, *7*, 477-482.

Camouzis, E., Devault, R. and Kosmala, W. (2004). On the period five trichotomy of all positive solutions of $x_{n+1} = \frac{p + x_{n-2}}{x_n}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 291,* 40-49.

Chen, D. and Li, X. (2009). Dynamics for nonlinear difference equation $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-1}^{p}}$. *Advances in Difference Equations,* 235691.

Chatterjee, E., Grove, E. A., Kostrov, Y. and Ladas, G. (2003). On the trichotomy character of $x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$. *Journal of Difference Equations and Applications, 9* (2), 1113-1128.

Dehghan, M. and Douraki, M. J. (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-k+1} + \gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1} + Cx_{n-2k+1}}$. *Applied Mathematics and Computation, 170,* 1045-1066.

Devault, R. and Galminas, L. (1999). Global stability of $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 231,* 459-466.

El-Afifi, M. M. (2004). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation, 147,* 617-628.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S. (2003). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}$. *Journal of Applied Mathematics and Computing, 145,* 747-753.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M. (2005). The dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$. *Applied Mathematics Letters, 18,* 1013-1018.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S. (2004). On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$. *Applied Mathematics and Computation*, *147*, 163-167.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Elsady, Z. (2004). Global attractivity of the recursive sequences $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *151*, 827-833.

Gibbons, C., Kulenovic, M. and Ladas, G. (2000). On the recursive sequence $y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}$. *Mathematical Sciences Research Hot-Line*, *4* (2), 1-11.

Hamza, A. E. (2006). On the recursive sequence $x_n = \alpha + x_{n-1}/x_n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 322,* 668-674.

Kalabusic, S. and Kulenovic, M. R. S. (2003). On the recursive sequence, $x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-2}}{Cx_{n-1} + Dx_{n-2}}$. *Journal of Difference Equations and Applications, 9* (8), 701-720.

Kalabusic, S. and Kulenovic, M. R. S. and Overdeep, C. B. (2002). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1} + \delta x_{n-k}}{Bx_{n-1} + Dx_{n-k}}$. *Journal of Difference Equations and Applications, 10,* 915-928.

Kosmala, W., Kulenovic, M. R. S., Ladas, G. and Teixeira, C. T. (2002). On the recursive sequence $y_{n+1} = \frac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251,* 571-586.

Li, W. T., Zhang, Y. H. and Su, Y. H. (2005). Global attractivity in a class of higher-order nonlinear difference equation. *Acta Mathematica Scientia, 25,* 59-66.

Mestel, B. D. (2003). On globally periodic solutions of the difference equation $x_{n+1} = f(x_n)/x_{n-1}$. *Journal of Difference Equations and Applications, 9* (2), 201-209.

Saleh, M. and Aloqeili, M. (2006). On the rational difference equation $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$. *Applied Mathematics and Computation*, *177,* 189-193.

Stevic, S. (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}^p / x_n^p$. *Journal of Applied Mathematics and Computing, 18* (1-2), 229-234.

Su, Y. H., Li, W. T. and Stevic, S. (2005). Dynamics of a higher order nonlinear rational difference equation. *Journal of Difference Equations and Applications, 11,* 133-150.

Su, Y. H. and Li, W. T. (2005). Global attractivity of a higher order nonlinear difference equation. *Journal of Difference Equations and Applications, 11,* 947-958.

Şimşek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ. (2006). On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-5}/(1 + x_{n-1}x_{n-3})$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 28* (1), 117-124.

Şimşek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ. (2008). On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-(5k+9)}/(1 + x_{n-4}x_{n-9}...x_{n-(5k+9)})$. *Taiwanese Journal of Mathematics, 12* (5), 1087-1099.

Valicenti, S. (1999). Periodicity and global attractivity of some difference equations. *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Yan, X. X., Li, W. and Zhao, Z. (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha - \frac{x_n}{x_{n-1}}$. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *17* (1-2), 269-282.

Yan, X. X., Li, W. T. and Sun, H. R. (2002). Global attractivity in a higher order nonlinear difference equation. *Applied Mathematics E- Notes, 2,* 51-58.

Yang, X., Lai, H., J. Evans, D. and M. Megson, G. (2003). Global asymptotic stability in a rational recursive sequence. *Applied Mathematics and Computation, 158,* 703-716.

Zhang, D. C., Shi, B. and Gaı, M. J. (2001). A rational recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{a + bx_n^2}{1 + x_{n-1}^2}$. *Computers and Mathematics with Applications, 41,* 301-306.

Zhou, X. and Zhang, W. (2008). Oscillatory and asymptotic properties of higher order nonlinear neutral difference equations $x_n = \dfrac{px_{n-s} + x_{n-t}}{qx_{n-s} + x_{n-t}}$. *Applied Mathematics and Computation, 203* (2), 679-689.

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Sema ÇALIK	İmza:	
Doğum Yeri:	Adana		
Doğum Tarihi:	01.01.1986		
Medeni Durumu:	Bekar		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlkokul	**İnkılap İlkokulu**		**Selçuklu-Konya**	**1993-1998**
Ortaokul	**Mareşal Mustafa Kemal İlköğretim Okulu**		**Selçuklu-Konya**	**1998-2001**
Lise	**Dolapoğlu Anadolu Lisesi**		**Selçuklu-Konya**	**2001-2004**
Lisans	**Selçuk Üniversitesi**	**İlköğretim Matematik Öğretmenliği**	**Meram-Konya**	**2005-2009**
Yüksek Lisans	**Selçuk Üniversitesi**	**Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans**	**Meram - Konya**	**2009-2011**

		Programı		
İlgi Alanları:	**Kitap okumak, Kişisel Gelişim Alanı, Psikoloji, Matematik Bilimi, Mantıksal Çözümlemeler**			
İş Deneyimi:	**Özel ders verme**			
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	**Prof. Dr. Eşref HATIR** **Doç. Dr. Cengiz ÇINAR** **Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA** **Yrd. Doç. Dr. A. Selçuk KURBANLI**			
Tel:	**0 555 643 95 59**			
Adres	**Melikşah Mah. Güler Sok. Yılmaz Sitesi A Blok 5/8 Meram-KONYA**			