T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE SALINIMI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mehmet Emre ERDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR

Konya–2011

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE SALINIMI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mehmet Emre ERDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR

Konya–2011

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	Mehmet Emre ERDOĞAN
	Numarası	095202031012
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi/ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı ve Salınımı Üzerine Bir Çalışma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	Mehmet Emre ERDOĞAN
	Numarası	095202031012
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi/ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı ve Salınımı Üzerine Bir Çalışma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan "Bazı Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı ve Salınımı Üzerine Bir Çalışma" başlıklı bu çalışma 03/01/2011 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Prof. Dr. Eşref HATIR	Üye	
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR	Danışman	
Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	Üye	

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Cengiz ÇINAR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten ve çalışmalarımda hiçbir desteği esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cengiz ÇINAR'a ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, Yrd. Doç. Dr. Abdullah KURBANLI'ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Mehmet Emre ERDOĞAN

KONYA–2011

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Mehmet Emre ERDOĞAN
	Numarası	095202031012
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi/ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı ve Salınımı Üzerine Bir Çalışma

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli temel kavramlar hakkında bilgi verdik.

Üçüncü bölümde, $x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}\right)}$, $n = 0,1,2,\ldots$ fark denkleminin p ve q değerlerinin bir olması durumuna göre global asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, β, p, q pozitif ve α, γ negatif olmayan reel sayılar ve başlangıç koşulları $x_{-2t},\ldots, x_{-2}, x_{-1}$ ve x_0 gibi negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}\right)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rasyonel Fark Denklemi, Salınımlılık, Kararlılık

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Mehmet Emre ERDOĞAN
	Numarası	095202031012
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi/ Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı ve Salınımı Üzerine Bir Çalışma

SUMMARY

This study consists of four sections:

In the first section, we give some information about some difference equations studied before.

In the second section, we give information about necessary concepts for our study.

In the third section, we investigate the global behaviour of the difference equation

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma \left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p} \right) \left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q} \right)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

when p and q parameters are equal to one,

In the fourth section, we investigate the global behaviour of the difference equation

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma \left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p} \right) \left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q} \right)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

where the parameters α,γ are non-negative and β,p,q are positive real numbers and the initial conditions $x_{-2t}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}$ and x_0 are non-negative real numbers.

Key Words: Rational Difference Equations, Oscillation, Stability

www.ebil.selcuk.edu.tr e-mail:ebil@selcuk.edu.tr
S.Ü. Meram Yerleşkesi A-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Tel: 0 322 324 7660 faks: 0 332 324 5510

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

Giriş

Fark denklemlerinin yeni çalışma alanlarından olan global asimptotik kararlılık ile ilgili literatürde son yıllarda yapılmış oldukça fazla sayıda çalışma vardır. Bunları ayrı-ayrı başlıklar altında ve tarih sırası ile özetleyelim:

Camouzıs ve Ladas (1994), $\beta \in (0,\infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\beta x_n^2}{1 + x_{n-1}^2}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Zheng (1996), yaptığı çalışmada; $\alpha \in (0,1) \cup (1,\infty)$ iken $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + x_n}{x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik olmadığını onaylamıştır.

Feuer, Janowski ve Ladas (1997), başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar ve B parametresi reel bir sayı olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{x_n + B}{x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ Lyness tipi fark denkleminin davranışını incelemişlerdir.

Amleh , Grove ve Ladas (1998), yaptıkları çalışmada; $\alpha \in [0,\infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını, sınırlı karakterini ve sınırlı doğasını incelemişlerdir.

Devault, Ladas ve Schultz (1998), $A \in (0,\infty)$ iken $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n} + \dfrac{1}{x_{n-2}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin tüm pozitif çözümlerinin iki çözümlü bir periyotta birleştiğini göstermişlerdir.

Devault, Ladas ve Schultz (1998), yaptıkları çalışmada; $A, B, p, q \in (0,\infty)$ iken pozitif parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{B}{x_{n-1}^q}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter koşulları incelemişlerdir.

Devault ve Galminas (1999), yaptıkları çalışmada; $x_{-1}, x_0, A \in (0,\infty)$ ve $p > 1$ için $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$, $n = 0,1,2,...$ denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Metwally, Grove ve Ladas (2000), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{m} \dfrac{A}{x_{n-2i}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin iki çözümlü bir periyotta birleştiğini göstermişlerdir.

Kosmala, Kulenovıc, Ladas ve Teixeira (2000), yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve başlangıç koşulları ile $y_{n+1} = \dfrac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin global kararlılığını ve periyodikliğini belirlemişlerdir.

Mishev ve Patula (2000), yaptıkları çalışmalarında; $A > 0$, $k \geq 2$ ve $n \geq 2k$ için $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n y_{n-2} \cdots y_{n-(2k-2)}}{y_{n-1} y_{n-3} \cdots y_{n-(2k-1)}}$ fark denklemini incelemişler ve bu denklemin sıfır olmayan çözümlerinin $\bar{y} = 1 + A$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Sarris (2000), yaptığı çalışmada; $a, b \geq 0$ ve $f(x) = \begin{cases} x^a, & 0 < x < 1 \\ x^b, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$ iken $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$, $n \geq 1$, $x_0, x_{-1} > 0$ fark denkleminin çözümlerinin global davranışı ile ilgilenmiştir. Tüm çözümlerin sınırlılığı, dirençliliği ve periyodikliği için gerekli ve yerli koşulları kurmuş, salınımsal davranışını incelemiştir.

El-Owaidy ve Afıfı (2000), yaptıkları çalışmada; a_n ve b_n periyodik kümeler olmak üzere $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n x_n}{x_{n-k}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Zhang, Shı ve Gaı (2001), $a, b \in [0, \infty)$ için $x_{n+1} = \frac{a + bx_n^2}{1 + x_{n-1}^2}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global çekiciliğini göstermişlerdir.

Aboutaleb, El-Sayed ve Hamza (2001), yaptıkları çalışmada; $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Yan, Li ve Sun (2001), yaptıkları çalışmada; $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$, $k \geq 1$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-k}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Grove, Ladas, Predescu ve Radın (2002), tarafından yapılan çalışmada; tüm parametreler $\alpha, \gamma, \delta, A, k, l$ ve başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-(2k+1)} + \delta x_{n-2l}}{A + x_{n-2l}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin global kararlılığı, sınırlılığı ve periyodik karakteri gösterilmiştir.

Mestel (2002), yaptığı çalışmada; $f \in C^1([0,\infty),[0,\infty))$ ve her $n \in Z$ için $x_n \in (0,\infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ İkinci mertebeden fark denklemini incelemiştir. $p \leq 5$ olma durumunda tüm çözümlerin p periyoduna sahip olması için f 'e ait gerek ve yeter koşulları bulmuştur.

Yan ve Li (2002), yaptıkları çalışmada; $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Patula ve Voulov (2002), $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-2}}{x_{n-3}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin tüm pozitif çözümlerinin iki çözümlü bir periyotta birleştiğini göstermişlerdir.

Stevıc (2002), k pozitif bir tamsayı, $i = 0,...,k$ iken $a_i, p_i \in (0,\infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1},...,x_0$ keyfi pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{a_i}{x_{n-i}^{p_i}}$, $n = 0,1,2,...$ şeklindeki fark denklemini üzerine bir inceleme yapmıştır.

Yan ve Li (2003), yaptıkları çalışmada; α ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları keyfi reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \alpha - \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını, global çekiciliğini, sınırlı karakterini, periyodik doğasını ve karmaşık davranışını incelemişlerdir. Beklendiği gibi $\alpha < -1$, $\alpha = -1$, $-1 < \alpha \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $2 < \alpha < 3$ ve $\alpha > 3$ alarak 6 durumda denklemin çözümlerinin farklı hareketinin meydana geldiğini göstermişlerdir.

Abu-Sarıs ve Al-Jubourı (2003), yaptıkları çalışmada; $f(0,\infty) \subseteq (0,\infty)$ ve x_{-1}, x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yang, Lai, Evans ve Megson (2003), yaptıkları çalışmada; $a, b \geq 0$, $c, d > 0$ için $x_n = \dfrac{a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2}{d - x_{n-2}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin negatif olmayan denge noktasının global çekici olduğunu göstermişlerdir.

Afıfı (2003), yaptığı çalışmada; negatif olmayan parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin global karakterini incelemiştir.

Berg (2004), yaptığı çalışmada; parametreler ve başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+2} = \dfrac{\alpha + \beta x_{n+1} + \gamma x_n}{A + Bx_{n+1} + Cx_n}$, $n = 0,1,2,...$ ikinci mertebeden fark denkleminin salınım serilerini incelemiştir.

Afıfı ve Ahmed (2003), yaptıkları çalışmada; $a \in [0,\infty)$, $a \in (0,\infty)$ ve $k \in \{1,2,...\}$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{a + \alpha x_n + \alpha x_{n-1} + ... + \alpha x_{n-k+2}}{x_{n-k+1}}$, $n = k-1,k,...$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin değişmez ilişkilerini, sınırlılığını, dirençliliğini, tam salınımlı ve yarı dönmeli olabilme durumunu incelemişlerdir.

Angelis (2003), yaptığı çalışmada; $b_n > 0, x_0 > 0, x_1 > 0$ iken $x_{n+1} = \dfrac{x_n + b_n}{x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ otonom olmayan Lyness denkleminin çözümlerinin sıfırdan uzakta sınırlı olduğunu ve b_n kümesi monoton ise sonsuzluğunu belirlemişlerdir.

Camouzıs, De Vault ve Kosmala (2003), yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları ve p parametresi pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{p + x_{n-2}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişler ve şu çıkarımları elde etmişlerdir. p parametresinin tüm pozitif değerleri için tek denge noktası olan $\bar{x}$ ye ait $\bar{x}^2 = \bar{x} + p$ eşitliği vardır. $0 < p < 1$ veya $p \geq 2$ ise denklemin tüm pozitif sınırlı çözümleri pozitif denge noktası $\bar{x}$ de birleşir. $0 < p < 1$ iken sınırsız çözümler vardır. $p \geq 2$ iken pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır. Çalışmada son olarak $1 < p < 2$ iken pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu varsayımında bulunulmuştur.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa (2003), α, β, γ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Chatterjee, Grove, Kostrov ve Ladas (2003), tarafından yapılan çalışmada; tüm parametreler α, γ, A, B ve başlangıç koşulları x_{-2}, x_{-1}, x_0 negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin global kararlılığı, sınırlılığı ve periyodik karakteri gösterilmiştir.

Kalabusıc ve Kulenovıc (2003), yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-2}}{Cx_{n-1} + Dx_{n-2}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global karakterini incelemişlerdir.

Chang ve Stevıc (2003), α, β negatif olmayan reel sayılar, $g(x)$; $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{\beta x_{n-1}}{1 + g(x_n)}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin negatif olmayan çözümlerinin sınırlı karakterini, salınımlı ve periyodik doğasını ve global çekiciliğini incelemişlerdir.

Cıma, Gasull ve Manosas (2004), tarafından yapılan çalışmada; negatif olmayan katsayılar alınmak üzere k mertebesinden fark denklemlerinin periyodikliği incelenmiştir. Ayrıca $k \leq 5$ ve $k = 7, 9, 11$ iken denklemin periyodikliği üzerine sonuçlar verilmiştir.

Taıxıang (2004), yaptığı çalışmada; $k \in \{2,3,...\}$, p parametresi ve başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = p + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin salınımsız çözümlerinin varlığı sorusunu incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Shınas (2004), yaptıkları çalışmada; k bir tek sayı, p_n, $n = 0,1,2,...$ (k+1) periyodunun pozitif ardışıklığı olmak üzere $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$,

$n = 0,1,2,...$ otonom olmayan fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, periyodikliğini ve çekiciliğini, ayrıca $k = 3$ için denklemin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Fan, Wang ve Li (2004), yaptıkları çalışmada; bazı kesin kabuller altında $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-k}),\ n = 1,2,...$ şeklindeki yüksek mertebeden fark denklemini düşünerek sınırlı yarı dönmelerinin k'dan küçük veya eşit uzunluğa sahip olduğunu elde etmişlerdir. Bunu yanı sıra bazı özel koşullar sağlandığında fark denkleminin sürekli olduğu sonucuna varmışlardır. Ve denklemin global asimptotik kararlılığı için yeterli olacak koşullar verilmiştir. Bu sonuçlar $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-k}}{x_n},\ \ n = 0,1,2,...$ fark denklemine uygulandığında denklemin global asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter olan koşullar elde edilmiştir.

Kulenovıc, Ladas ve Overdeep (2004), yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları pozitif ve p_n parametresi pozitif değerli ardışık iki kümeyi ifade etmek üzere $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodik doğasını, sınırlı karakterini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Kalabusıc, Kulenovıc ve Overdeep (2004), yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{\beta x_{n-1} + \delta x_{n-k}}{Bx_{n-1} + Dx_{n-k}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global karakterini incelemişlerdir.

Gıbbons ve Overdeep (2004), yaptıkları çalışmada; iki ardışık periyoda sahip ve pozitif değerli parametreler ve pozitif başlangıç koşulları alınmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{a_n + \gamma_n x_{n-1}}{A_n + B_n x_n},\ n = 0,1,2,...$ fark denkleminin üçe bölünmüş davranışını ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Hoag (2004), yaptığı çalışmada; Eğer bir fark denkleminin saddle nokta olan denge noktası varsa o denge noktasında birleşebilen çözümlerininde var olduğunu, ikinci mertebeden bir denklemin bu çözümlerinin monoton olması için gerekliliklerini belirtmiştir. Bu sonuçları kullanarak saddle nokta olan denge noktasına sahip rasyonel fark denklemlerini analiz etmiştir.

Yang, Evans ve Megson (2004), tarafından yapılan çalışmada; Sarıs ve De Vault tarafından ileri sürülen, $x_{n+1} = \frac{a_n x_n}{x_{n-1}}$, ($n = 0,1,2,...$ için $a_n \neq 0$ ve $x_{-1} \neq 0$, $x_0 \neq 0$ alınmak koşulu ile) fark denklemi hakkındaki, iki açık probleme cevap verilmiştir.

Zeng, Shi ve Zhang (2004), $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $g(x)$; $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global davranışını incelemişlerdir.

El-Owaidy, Ahmed ve Elsady (2004), $\alpha, \beta, \gamma > 0$ için $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy, Ahmed ve Elsady (2004), $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $k = 1,2,...$ için $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-k}}{\gamma + x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Stevıc (2005), $k \in N$ için $x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{1 + x_n + ... + x_{n-k+1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin pozitif çözümleri üzerine çalışmıştır.

Stevıc (2005), tüm katsayılar negatif değilken $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$, $n = 0,1,2,...$ şeklindeki fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global çekiciliğini, salınımını ve asimptotik periyodikliğini incelemiştir.

Su, Li ve Stevic (2005), yaptıkları çalışmada; a, b, A, B pozitif reel sayılar, $k \geq 1$ pozitif bir tamsayı ve başlangıç koşulları x_{-k} veya x_0 pozitif reel sayı olacak şekilde $x_{-k},...,x_{-1},x_0$ negatif olmayan reel sayılar iken $x_{n+1}=\dfrac{a-bx_n}{Ax_n-Bx_{n-k}}$, $n=0,1,2,...$ fark denkleminin global çekiciliğini, değişmez aralıklarını, periyodik ve salınımlı karakterini incelemişlerdir. Ayrıca tek pozitif denge noktasının global çekici olduğunu belirlemişlerdir.

Dehghan ve Douraki (2005), yaptıkları çalışmada; $B, C, \alpha, \beta, \gamma$ pozitif parametreler $k \in \{1,2,3,...\}$ ve negatif olmayan başlangıç koşulları $x_{-2k+1},...,x_{-1},x_0$ ile $x_{n+1}=\dfrac{\alpha+\beta x_{n-k+1}+\gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1}+Cx_{n-2k+1}}$, $n=0,1,2,...$ lineer olmayan yüksek mertebeden fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Douraki, Dehghan ve Razzaghi (2005), yaptıkları çalışmada; p, q negatif olmayan parametreler $k \in \{1,2,3,...\}$ ve negatif olmayan başlangıç koşulları $x_{-k},...,x_{-1},x_0$ ile $x_{n+1}=\dfrac{p+qx_{n-k}}{1+x_n}$, $n=0,1,2,...$ fark denkleminin çözümlerinin global karakterini incelemişlerdir. Ayrıca denklemin periyodikliğini, yarı dönmelerinin karakterini, global kararlılığını ve sınırsızlığını belirlemişlerdir.

El-Owaidy, Ahmed ve Youssef (2005), başlangıç koşulları ve parametreler negatif olmayan reel sayılardan seçildiğinde $x_{n+1}=\dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta+\gamma x_{n-2}^{p}}$, $n=0,1,2,...$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Devault, Kocıc ve Stutson (2005), yaptıkları çalışmada; $\{p_n\}$ pozitif, sınırlı bir küme ve başlangıç koşulları pozitif olmak üzere $x_{n+1}=p_n+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ otonom olmayan fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik davranışını incelemişler, çözümlerin sınırlı ve dirençli olması ve sınırsız çözümlerin olabilmesi için yeterli olan koşulları elde etmişlerdir. Ayrıca global çekicilikle ilgili olarak bazı sonuçları elde etmişler ve bu sonuçları $\{p_n\}$'in temel periyodu k iken periyodik olma durumunda uygulamışlardır.

Hamza (2005), yaptığı çalışmada; α ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları negatif reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global kararlılığını, sürekliliğini ve salınım karakterini incelemiştir.

Saleh ve Aloqeili (2005), yaptıkları çalışmada; $A < 0$, $k \in \{1,2,3,...\}$ ve başlangıç koşulları $y_{-k}, ..., y_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere $y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin tek negatif denge noktası $\overline{y} = 1 + A$ 'nın global asimptotik kararlılığı için sağlanması gereken şartları araştırmışlardır.

Yan, Li ve Zuhao (2005), yaptıkları çalışmada; α, x_{-1}, x_0 keyfi reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin tüm negatif ve pozitif çözümlerinin periyodik doğasını, global asimptotik karalılığını, global çekiciliğini ve sınırlı karakterini incelemişlerdir.

Su ve Li (2005), yaptıkları çalışmada; $p, q, r \in [0,\infty)$, $k \geq 1$ ve başlangıç koşulları $y_{-k},...,y_{-1}$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $y_{n+1} = \frac{p + qy_n}{1 + y_n + ry_{n-k}}$, $n = 0,1,2,...$ lineer olmayan fark denkleminin global çekiciliğini incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Sun ve Xi (2006), yaptıkları çalışmada; başlangıç değerleri $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ alınarak $x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ pozitif çözümlerinin $\overline{x} = 2$ pozitif denge noktasında birleştiğini göstemişlerdir.

Thomas, Clark ve Wılken (2006), yaptıkları çalışmada; sürekli ve muhtemelen bölünmüş değişmezliği kabul edilen $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin kısa bir geometrik ispatını sunmuşlardır.

Berenhaut ve Stevıc (2006), $p, A \in (0,\infty)$, $p \neq 1$ ve $x_{-2}, x_{-1} \in (0,\infty)$ iken $x_n = A + \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\right)^p$, $n = 0,1,2,...$ denkleminin çözümlerinin sınırlılığı, global asimptotik kararlılığı ve periyodikliği üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmada; $p \leq \min\{1,(A+1)/2\}$ iken denklemin tüm çözümlerinin denklemin tek denge noktası olan $\overline{x} = A+1$ noktasında birleştiği, $(A+1)/2 < p < 1$ iken denklemin tüm çözümlerinin iki çözümlü bir periyotta birleştiği ve $p > 1$ iken sınırsız çözümlerinin var olduğu belirtilmiştir.

Berenhaut ve Stevıc (2006), tarafından yapılan çalışmada; $\alpha > -1$, $p > 0$ ve $k \in N$ iken $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}^p}{x_n^p}$, $n = 0,1,2,...$ denkleminin tek pozitif denge noktası olan $\overline{x} = \alpha + 1$ noktasında birleşen pozitif çözümlerinin salınımsız olduğu belirlenmiştir.

Dehghan ve Sebdani (2006), yaptıkları çalışmada; α ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar, $k \in \{1,2,...\}$, $l \in \{0,1,...\}$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-2k+1}}{x_{n-2k+1} + \alpha x_{n-2l}}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını incelemişlerdir. Ayrıca çalışmada $\alpha > 1$ iken denklemin çözümlerinin … ,0,1,0,1,0,1, …şeklindeki iki dönme ile birleştiği ve $\alpha < 1$ iken $\overline{x} = \frac{1}{x+1}$ pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir.

Camouzis, Chatterjee ve Ladas (2007), yapılan çalışmada; $x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}}$ fark denkleminin global kararlılığını pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları altında incelemişlerdir. Ve buna bağlı olarak denklemin bütün çözümlerinin de sınırlı olduğunu da göstermişlerdir.

Mazrooei-Sebdani ve Dehghan (2007), yaptıkları çalışma ile; $x_n = \frac{x_{n-2k+1}}{x_{n-2k+1} + x_{n-2k}}$ fark denkleminin bütün pozitif çözümleri için global kararlılığını α*'nın* poztif reel sayı, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $l \in \{0, 1, \ldots\}$ ve pozitif başlangıç şartları altında incelemişlerdir. Ayrıca $\alpha < 1$ olduğunda $\overline{x} = \dfrac{1}{\alpha + 1}$ pozitif denge noktası global asimptotic kararlı, $\alpha > 1$ olduğunda fark denklemi iki salınımlı …, 0, 1, 0, 1 , … bir çözüme sahip olduğunu da incelemişlerdir.

X.Yang ve Y.Yang (2008), çalışmalarında; $x_n = \dfrac{px_{n-s} + x_{n-l}}{qx_{n-s} + x_{n-l}}, \ n = 0,1,2,...$ denklemini pozitif başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Dongmei ve Li (2009), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^{p}}$ fark denklemini pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları altında global asimptotik kararlılığını inclemişlerdir.

2.BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

x bağımsız değişkeni sürekli durumda iken, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y(x),\ y'(x),\ \ldots\ ,\ y^{(n)}(x)$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım_1: n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişkende y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y), E^2(y),\ \ldots\ ,\ E^{(n)}(y), \ldots$$

gibi farklarını içine alan bağıntılara Fark Denklemi denir. Dikkat edilirse n'nin sürekli olduğu halde Diferansiyel Denklemleri ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y(n+1) + a_1 y(n) = f(n)$$

Birinci dereceden fark denklemidir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n+3) = h(n)$$

Dördüncü dereceden fark denklemidir.

Denklem mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan nokta sayısı göz önüne alınmaktadır. Bir fark denklemi kaçıncı mertebedense o kadar başlangıç şartına ihtiyaç vardır.

Tanım_2: Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci derecedense bu denkleme lineer fark denklemi denir.

$$y(n+2) + 5y(n+1) - 2y(n) = n$$

İkinci mertebeden lineer fark denklemidir.

$$y(n+3) - 4y(n+2) - 1y(n+1) + 3y(n) = 0$$

Üçüncü mertebeden lineer fark denklemidir.

$$A_n y(n+k)+A_{n-1}y(n+k-1)+A_0 y(k)=f(n)$$

n. mertebeden lineer fark denklemidir.

$$y(n+1)-2y(n)+ny(n+1)y(n)=0$$

Birinci dereceden lineer olmayan fark denklemidir.

Tanım_3: I reel sayıların bir alt aralığı olmak üzere; $f: I\times I\to I$ tanımlı sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall\, x_{-1}, x_0 \in I$ için

$$x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1}),\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım_4: Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x},\bar{x})=\bar{x}$ ise $\bar{x}$'e f'nin denge noktası denir. Eğer $\forall\, n\geq 0$ için $x_n=\bar{x}$ ise $\bar{x}$'e f 'nin sabit noktası denir.

Tanım_5: $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere;

a) Her $\varepsilon>0$ sayısı için eğer $x_{-1}, x_0\in I$ iken $|x_0-\bar{x}|+|x_{-1}-\bar{x}|<\delta$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa $\forall\, n\geq -1$ için $|x_n-\bar{x}|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa denklemin $\bar{x}$ denge noktasına kararlıdır denir.

b) $\bar{x}$ denge noktası kararlı olsun. Eğer $x_{-1}, x_0\in I$ iken $|x_0-\bar{x}|+|x_{-1}-\bar{x}|<\gamma$ olacak şekilde $\gamma>0$ sayısı varsa ve $\lim_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$ oluyorsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

c) Her $x_{-1}, x_0\in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktasına global çekici denir.

d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekici ise $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise $\bar{x}$ denge noktasına kararsızdır denir.

f) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\left|x_0 - \bar{x}\right| + \left|x_{-1} - \bar{x}\right| < r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa ve $\left|x_N - \bar{x}\right| \geq r$ olacak şekilde bir $N \geq -1$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım_6: Herhangi bir fark denkleminin karakterini inceleyebilmek için o denklemin denge noktasındaki kısmi türevleri ile oluşturduğumuz yeni denkleme karakteristik denklem denir. (2.1) denklemi için:

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) = f(u, v)$ olmak üzere oluşturduğumuz

$$z_{n+1} - \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial u} z_n - \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial v} z_{n-1} = 0$$

denklemi (2.1) denkleminin karakteristik denklemidir.

Herhangi bir $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k})$ $(k \in N)$ fark denkleminin karakteristik denklemi

$$z_{n+1} - p_1 z_n - p_2 z_{n-1} - ... - p_{(k-1)} z_{n-k} = 0 \ ,$$

Eğer $\left|p_1\right| + \left|p_2\right| + ... + \left|p_{(k-1)}\right| < 1$ ise o zaman denklemin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Eğer $\left|p_1\right| + \left|p_2\right| + ... + \left|p_{(k-1)}\right| > 1$ ise o zaman denklemin $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım_7: $\bar{x}$, (2.1) denkleminin bir denge noktası olsun.

Bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\}$ çözümlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından büyük ya da eşit ve $x_{L-1} < \bar{x} \wedge x_{M+1} < \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\}$ kümesine pozitif yarı dönme denir.

Aynı denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\}$ çözümlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından küçük ve $x_{L-1} \geq \bar{x} \wedge x_{M+1} \geq \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\}$ kümesine negatif yarı dönme denir.

(burada M ve L değerleri $L \geq -1$ ve $M \leq \infty$ olacak şekilde düşünülmelidir.)

Tanım_8: $\bar{x}$, (2.1) denkleminin bir denge noktası olsun. Bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin pozitif ya da negatif yarı dönmeye sahip olduğunu varsayalım. Eğer bu dönmeyi ters yöne çeviren yani denklemin denge noktasından küçük ya da denklemin denge noktasından büyük veya eşit değere sahip en az bir tane $x_N \, (N \geq -1)$ çözümü varsa $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0,1,2,...$ denklemine salınımlıdır denir.

3.BÖLÜM

$x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}\right)}$ FARK DENKLEMİNİN İNCELENMESİ

3.1 $x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}\right)}$ Fark Denkleminin özellikleri

Bu bölümde pozitif β ve negatif olmayan α, γ gibi parametrelerin reel sayı ve başlangıç koşulları $x_{-2t},...,x_{-2},x_{-1},x_0$ pozitif sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}\right)} \qquad n = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

denkleminin karakterini inceleyeceğiz.

(3.1) denkleminde $x_n = \left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{t+1}} y_n$ değişimi yapılarak ve $\dfrac{\alpha}{\beta} = r \in R$ ile,

$$y_{n+1} = \frac{r y_{n-1}}{1 + y_{n-2}^2 y_{n-4} ... y_{n-2t} + y_{n-2} y_{n-4}^2 ... y_{n-2t} + y_{n-2} y_{n-4} ... y_{n-2t}^2} \tag{3.2}$$

denklemi elde edilir. Böylece (3.1) denklemini (3.2) fark denklemine indirgemiş olduk. (3.1) denkleminin davranışları ile (3.2) denkleminin davranışları aynı olduğundan (3.1) denklemi yerine (3.2) denklemi incelenebilir. (3.2) denkleminin davranışlarının incelenmesi için (3.2) denkleminin denge noktasını bulalım.

$$\bar{y} = \frac{r\bar{y}}{1 + \bar{y}^{t+1} + \bar{y}^{t+1} + ... + \bar{y}^{t+1}} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}\left(1 + t\bar{y}^{t+1} - r\right) = 0$$

Böylece $\bar{y}_1 = 0$ veya $\bar{y}_2 = \left(\dfrac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$ (3.2) denkleminin denge noktalarıdır.

Teorem_3.1: (3.2) denkleminin $\bar{y}_1$ ve $\bar{y}_2$ denge noktaları ile ilgili aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. Eğer $r < 1$ ise o zaman $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer $r > 1$ ise o zaman $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası saddle noktasıdır.

iii. Eğer $r > 1$ ise o zaman $\bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$ denge noktası kararsızdır.

İspat_3.1: $\bar{y}_1 = 0$ için (3.2) denkleminin lineer denkleminin katsayıları

$f(y_{n-1},...y_{n-2t}) = \dfrac{ry_{n-1}}{1 + y_{n-2}^2 y_{n-4}...y_{n-2t} + y_{n-2}y_{n-4}^2...y_{n-2t} + y_{n-2}y_{n-4}...y_{n-2t}^2}$ 'den

$$\frac{\partial f(\bar{y},...,\bar{y})}{\partial y_{n-1}} = r$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},...,\bar{y})}{\partial y_{n-2}} = 0$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},...,\bar{y})}{\partial y_{n-4}} = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial f(\bar{y},...,\bar{y})}{\partial y_{n-2t}} = 0$$

olur. Bu durumda (3.2) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ için lineer denklemi

$$z_{n+1} = rz_{n-1},$$

(3.2) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ için karakteristik denklemi

$$\lambda^{2t+1} - r\lambda^{2t-1} = 0$$

$$\lambda^{2t-1}\left(\lambda^2 - r\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2,...,2t-1} = 0 \ \wedge \ \lambda_{2t} = \sqrt{r} \ \wedge \ \lambda_{2t+1} = -\sqrt{r}$$

olur. $r<1$ için karakteristik denklemin her kökü $|\lambda|<1$ olacağından $\bar{y}_1=0$ asimptotik kararlıdır. Yine $r>1$ için $\lambda_{1,2,\ldots,2t-1}=0$ ve $|\lambda_{2t,2t+1}|>1$ olduğundan $\bar{y}_1=0$ saddle noktasıdır. Böylece (i) ve (ii) ispatlanmış olur.

(3.2) denkleminin $\bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$ için lineer denkleminin katsayıları

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-1}}=1$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-2}}=-\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-4}}=-\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-2t}}=-\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}$$

olarak bulunur.

$\bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$ için (3.2) denkleminin lineer denklemi

$$z_{n+1}-z_{n-1}+\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}z_{n-2}+\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}z_{n-4}+\ldots+\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}z_{n-2t}=0,$$

ve karakteristik denklemi;

$$\lambda^{2t+1}-\lambda^{2t-1}+\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}\lambda^{2t-2}+\ldots+\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}=0$$

olarak yazılır. Son denklemin katsayılarından

$$|-1|+\left|\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}\right|+\left|\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}\right|+\ldots+\left|\frac{(t+1)}{t}\frac{(r-1)}{r}\right|>1$$

olacağından karakteristik denklemin λ_i köklerinden en az biri için $|\lambda| > 1$ olur. Böylece $\bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$ denge noktası $r > 1$ için kararsızdır.

Teorem_3.2: $\{y_n\}_{n=-2t}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü ve $r > 1$ olsun. Eğer

$$y_{-2t},\dots,y_{-2},y_0 \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\dots,y_{-1} < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \tag{1}$$

veya

$$y_{-2t},\dots,y_{-2},y_0 < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\dots,y_{-1} \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \tag{2}$$

ise o zaman $\{y_n\}_{n=-2t}^{\infty}$ çözümleri $\bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$ civarında salınımlıdır ve yarı dönmesi bir uzunluğundadır.

İspat_3.2:

$$y_{-2t},\dots,y_{-2},y_0 \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\dots,y_{-1} < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman;

$$y_1 = \frac{ry_{-1}}{1 + y_{-2}^2 \dots y_{-2t} + y_{-2} \dots y_{-2t}^2} < \frac{r\bar{y}_2}{1 + t\bar{y}_2^{\,t+1}} = \frac{r\bar{y}_2}{1 + r - 1} = \bar{y}_2 \qquad y_1 < \bar{y}_2$$

$$y_2 = \frac{ry_0}{1 + y_{-1}^2 \dots y_{-2t+1} + y_{-1} \dots y_{-2t+1}^2} \geq \frac{r\bar{y}_2}{1 + t\bar{y}_2^{\,t+1}} = \frac{r\bar{y}_2}{1 + r - 1} = \bar{y}_2 \qquad y_2 \geq \bar{y}_2$$

olur. Böylece işlemler devam ettirilirse

$$y_1 < \bar{y}_2, \quad y_2 \geq \bar{y}_2, \quad y_3 < \bar{y}_2, \quad y_4 \geq \bar{y}_2, \quad \dots$$

olur. Bu da yarı dönmelerin bir uzunluğunda olduğunu gösterir. Benzer olarak

$$y_{-2t},\dots,y_{-2},y_0 < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\dots,y_{-1} \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$$

olduğunu kabul edersek

$$y_1 = \frac{ry_{-1}}{1 + y_{-2}^2 \ldots y_{-2t} + y_{-2} \ldots y_{-2t}^2} \geq \frac{r\overline{y}_2}{1 + t\overline{y}_2^{\,t+1}} = \frac{r\overline{y}_2}{1 + r - 1} = \overline{y}_2 \qquad y_1 \geq \overline{y}_2$$

$$y_2 = \frac{ry_0}{1 + y_{-1}^2 \ldots y_{-2t+1} + y_{-1} \ldots y_{-2t+1}^2} < \frac{r\overline{y}_2}{1 + t\overline{y}_2^{\,t+1}} = \frac{r\overline{y}_2}{1 + r - 1} = \overline{y}_2 \qquad y_2 < \overline{y}_2$$

olur. Böylece,

$$y_1 \geq \overline{y}_2, \ \ y_2 < \overline{y}_2, \ \ y_3 \geq \overline{y}_2, \ \ y_4 < \overline{y}_2, \ \ldots$$

şeklinde olur. Bu da çözümlerin bir uzunluğunda olduğunu gösterir.

Teorem_3.3: Eğer $r < 1$ ise o zaman (3.2) denkleminin $\overline{y}_1 = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat_3.3: $\overline{y}_1 = 0$'ın global asimptotik kararlı olduğunu göstermek için lokal asimptotik kararlı ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}_1 = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Teorem_3.1_(i)'de $r < 1$ için $\overline{y}_1 = 0$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu göstermiştik. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}_1 = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$0 < y_{n-2}^2 y_{n-4} \ldots y_{n-2t} + y_{n-2} y_{n-4}^2 \ldots y_{n-2t} + y_{n-2} y_{n-4} \ldots y_{n-2t}^2$$

olduğundan

$$0 \leq y_{n+1} = \frac{ry_{n-1}}{1 + y_{n-2}^2 \ldots y_{n-2t} + y_{n-2} \ldots y_{n-2t}^2} < ry_{n-1}$$

olarak yazılabilir. $n = 0, 2, 4, \ldots$ için

$$0 \leq y_1 < ry_{-1}$$

$$0 \leq y_3 < y_1 < r^2 y_{-1}$$

$$\vdots$$

$$0 \leq y_{2n+1} < r^{n+1} y_{-1}$$

olur. Son eşitsizlikte her iki tarafın limitini alırsak;

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} < \lim_{n\to\infty} r^{n+1} y_{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = 0$$

olur. Benzer olarak $n = 1, 3, 5, \ldots$ için

$$0 \le y_2 < r y_0$$

$$0 \le y_4 < y_2 < r^2 y_0$$

$$0 \le y_{2n} < r^n y_0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} y_{2n} < \lim_{n\to\infty} r^n y_0$$

eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} y_{2n} = 0$ olur. Bu da Teorem_3.3'ün ispatıdır.

Teorem_3.4: $a > 0$ olmak üzere (3.2) denklemin $a, 0, a, 0, \ldots$ gibi bir periyotlu iki çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $r = 1$ olmasıdır. Ayrıca (3.2) denkleminin tüm çözümleri bir periyotlu iki çözümden birine yakınsar.

İspat_3.4: $a, b, a, b, \ldots$ (3.2) denkleminin bir periyotlu iki çözümü olsun. Bu halde

$$a = \frac{ra}{1 + b^2 \ldots b + b \ldots b^2} \quad \wedge \quad b = \frac{rb}{1 + a^2 \ldots a + a \ldots a^2}$$

olur. Cebirsel işlemlerden

$$ra = a\left(1 + tb^{t+1}\right)$$

$$rb = b\left(1 + ta^{t+1}\right)$$

$$(r-1)(a-b) = tab\left(b^t - a^t\right)$$

$$\frac{(r-1)(a-b)}{\left(b^t - a^t\right)} = tab \ge 0$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Son eşitsizlikten $r - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad r \le 1$

olur.

Eğer $r < 1$ ise o zaman $a < 0$ ya da $b < 0$ olur. Bu ise $a > 0$ ve $b > 0$ olması ile çelişir. Bu yüzden $r = 1$ olmak zorundadır.

Şimdi a ve b 'den birinin sıfır olması gerektiğini ispatlayalım:

$r=1$ için,

$$y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{1+y_{n-2}^{2}\cdots y_{n-2t}+y_{n-2}\cdots y_{n-2t}^{2}}$$

olur.

$$y_{n+1}-y_{n-1}=\frac{-y_{n-1}y_{n-2}^{2}\cdots y_{n-2t}-y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_{n-2t}^{2}}{1+y_{n-2}^{2}\cdots y_{n-2t}+y_{n-2}\cdots y_{n-2t}^{2}}\leq 0$$

olduğundan tek ve çift terimler azalarak $a\geq 0 \;\wedge\; b\geq 0$ 'a yakınsar. İlk eşitsizliğin limiti alınırsa;

$$a=\frac{a}{1+tb^{t+1}} \quad \wedge \quad b=\frac{b}{1+ta^{t+1}}$$

olur. Bu iki eşitlikten $tab^{t+1}=0 \;\wedge\; ta^{t+1}b=0$ olur. Buradan a ve b'den biri sıfır olmak zorundadır. Bu da teoremin ispatıdır.

Teorem_3.5: Eğer $r>1$ ise o zaman (3.2) denklemi sınırsız çözüme sahiptir.

İspat_3.5: Teorem_3.2 'den

$$y_{2n-1}<\bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}} \quad \wedge \quad y_{2n}\geq \bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{t+1}}$$

olarak yazılabilir. Yine

$$y_{2n+2}=\frac{ry_{2n}}{1+y_{2n-1}^{2}\cdots y_{2n-2t+1}+y_{2n-1}\cdots y_{2n-2t+1}^{2}}>\frac{ry_{2n}}{1+\frac{r-1}{t}+\dots+\frac{r-1}{t}}=y_{2n}$$

$$y_{2n+3}=\frac{ry_{2n+1}}{1+y_{2n}^{2}\cdots y_{2n-2t+2}+y_{2n}\cdots y_{2n-2t+2}^{2}}<\frac{ry_{2n+1}}{1+\frac{r-1}{t}+\dots+\frac{r-1}{t}}=y_{2n+1}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Limit alırsak;

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1}=0$$

olur.

4.BÖLÜM

$x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}\right)}$ FARK DENKLEMİNİN İNCELENMESİ

4.1 $x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}\right)}$ Fark Denkleminin özellikleri

Bu bölümde pozitif β,p,q ve negatif olmayan α, γ gibi parametrelerin reel sayı ve başlangıç koşulları $x_{-2t},...,x_{-2},x_{-1},x_0$ pozitif sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}\right)} \quad , \quad n = 0,1,2,... \tag{4.1}$$

denkleminin karakterini inceleyeceğiz.

(4.1) denkleminde $x_n = \left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{qt+p}} y_n$ değişimi yapılarak ve $\dfrac{\alpha}{\beta} = r \in R$ ile;

$$y_{n+1} = \frac{r y_{n-1}}{1 + y_{n-2}^{q+p} y_{n-4}^{q} ... y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q} y_{n-4}^{q+p} ... y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q} y_{n-4}^{q} ... y_{n-2t}^{q+p}} \tag{4.2}$$

denklemi elde edilir. Böylece (4.1) denklemini (4.2) fark denklemine indirgemiş olduk. (4.1) denkleminin davranışları ile (4.2) denkleminin davranışları aynı olduğundan (4.1) denklemi yerine (4.2) denklemi incelenebilir. (4.2) denkleminin davranışlarının incelenmesi için (4.2) denkleminin denge noktasını bulalım.

$$\bar{y} = \frac{r\bar{y}}{1 + \bar{y}^{qt+p} + \bar{y}^{qt+p} + ... + \bar{y}^{qt+p}} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}\left(1 + t\bar{y}^{qt+p} - r\right) = 0$$

Böylece $\bar{y}_1 = 0$ veya $\bar{y}_2 = \left(\dfrac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$ (4.2) denkleminin denge noktalarıdır.

Teorem_4.1: (4.2) denkleminin $\bar{y}_1$ ve $\bar{y}_2$ denge noktaları ile ilgili aşağıdaki ifadeler doğrudur.

iv. Eğer $r < 1$ ise o zaman $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

v. Eğer $r > 1$ ise o zaman $\bar{y}_1 = 0$ denge noktası saddle noktasıdır.

vi. Eğer $r > 1$ ise o zaman $\bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$ denge noktası kararsızdır.

İspat_4.1: $\bar{y}_1 = 0$ için (4.2) denkleminin lineer denkleminin katsayıları

$$f(y_{n-1},\ldots,y_{n-2t}) = \frac{ry_{n-1}}{1 + y_{n-2}^{q+p}y_{n-4}^{q}\ldots y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q}y_{n-4}^{q+p}\ldots y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q}y_{n-4}^{q}\ldots y_{n-2t}^{q+p}}\text{'den}$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-1}} = r$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-2}} = 0$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-4}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-2t}} = 0$$

olur. Bu durumda (4.2) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ için lineer denklemi

$$z_{n+1} = rz_{n-1},$$

(4.2) denkleminin $\bar{y}_1 = 0$ için karakteristik denklemi

$$\lambda^{2t+1} - r\lambda^{2t-1} = 0$$

$$\lambda^{2t-1}\left(\lambda^2 - r\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2,\ldots,2t-1} = 0 \;\wedge\; \lambda_{2t} = \sqrt{r} \;\wedge\; \lambda_{2t+1} = -\sqrt{r}$$

olur. $r<1$ için karakteristik denklemin her kökü $|\lambda|<1$ olacağından $\bar{y}_1=0$ asimptotik kararlıdır. Yine $r>1$ için $\lambda_{1,2,\ldots,2t-1}=0$ ve $|\lambda_{2t,2t+1}|>1$ olduğundan $\bar{y}_1=0$ saddle noktasıdır. Böylece (i) ve (ii) ispatlanmış olur.

(4.2) denkleminin $\bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$ için lineer denkleminin katsayıları

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-1}}=1$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-2}}=-\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-4}}=-\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f(\bar{y},\ldots,\bar{y})}{\partial y_{n-2t}}=-\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}$$

olarak bulunur.

$\bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$ için (4.2) denkleminin lineer denklemi

$$z_{n+1}-z_{n-1}+\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}z_{n-2}+\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}z_{n-4}+\ldots+\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}z_{n-2t}=0$$

ve karakteristik denklemi;

$$\lambda^{2t+1}-\lambda^{2t-1}+\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}\lambda^{2t-2}+\ldots+\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}=0$$

olarak yazılır. Son denklemin katsayılarından

$$|-1|+\left|\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}\right|+\left|\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}\right|+\ldots+\left|\frac{(qt+p)}{t}\frac{(r-1)}{r}\right|>1$$

olacağından karakteristik denklemin λ_i köklerinden en az biri için $|\lambda| > 1$ olur. Böylece $\bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$ denge noktası $r > 1$ için kararsızdır.

Teorem_4.2: $\{y_n\}_{n=-2t}^{\infty}$, (4.1) denkleminin bir çözümü ve $r > 1$ olsun. Eğer

$$y_{-2t},\ldots,y_{-2},y_0 \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\ldots,y_{-1} < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \tag{1}$$

veya

$$y_{-2t},\ldots,y_{-2},y_0 < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\ldots,y_{-1} \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \tag{2}$$

ise o zaman $\{y_n\}_{n=-2t}^{\infty}$ çözümleri $\bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$ civarında salınımlıdır ve yarı dönmesi bir uzunluğundadır.

İspat_4.2:

$$y_{-2t},\ldots,y_{-2},y_0 \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\ldots,y_{-1} < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman;

$$y_1 = \frac{ry_{-1}}{1 + y_{-2}^{q+p}\ldots y_{-2t}^{q} + y_{-2}^{q}\ldots y_{-2t}^{q+p}} < \frac{r\bar{y}_2}{1 + t\bar{y}_2^{\,qt+p}} = \frac{r\bar{y}_2}{1 + r - 1} = \bar{y}_2 \qquad y_1 < \bar{y}_2$$

$$y_2 = \frac{ry_0}{1 + y_{-1}^{q+p}\ldots y_{-2t+1}^{q} + y_{-1}^{q}\ldots y_{-2t+1}^{q+p}} \geq \frac{r\bar{y}_2}{1 + t\bar{y}_2^{\,qt+p}} = \frac{r\bar{y}_2}{1 + r - 1} = \bar{y}_2 \qquad y_2 \geq \bar{y}_2$$

olur. Böylece işlemler devam ettirilirse

$$y_1 < \bar{y}_2, \quad y_2 \geq \bar{y}_2, \quad y_3 < \bar{y}_2, \quad y_4 \geq \bar{y}_2, \quad \ldots$$

olur. Bu da çözümlerin bir uzunluğunda olduğunu gösterir. Benzer olarak

$$y_{-2t},\ldots,y_{-2},y_0 < \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \quad \wedge \quad y_{-2t+1},\ldots,y_{-1} \geq \bar{y}_2 = \left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$$

olduğunu kabul edersek

$$y_1 = \frac{ry_{-1}}{1 + y_{-2}^{q+p} ... y_{-2t}^{q} + y_{-2}^{q} ... y_{-2t}^{q+p}} \geq \frac{r\overline{y}_2}{1 + t\overline{y}_2^{\,qt+p}} = \frac{r\overline{y}_2}{1 + r - 1} = \overline{y}_2 \qquad y_1 \geq \overline{y}_2$$

$$y_2 = \frac{ry_0}{1 + y_{-1}^{q+p} ... y_{-2t+1}^{q} + y_{-1}^{q} ... y_{-2t+1}^{q+p}} < \frac{r\overline{y}_2}{1 + t\overline{y}_2^{\,qt+p}} = \frac{r\overline{y}_2}{1 + r - 1} = \overline{y}_2 \qquad y_2 < \overline{y}_2$$

olur. Böylece,

$$y_1 \geq \overline{y}_2,\ \ y_2 < \overline{y}_2,\ \ y_3 \geq \overline{y}_2,\ \ y_4 < \overline{y}_2,\ \ldots$$

şeklinde olur. Bu da yarı dönmelerin bir uzunluğunda olduğunu gösterir.

Teorem_4.3: Eğer $r < 1$ ise o zaman (4.2) denkleminin $\overline{y}_1 = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat_4.3: $\overline{y}_1 = 0$'ın global asimptotik kararlı olduğunu göstermek için lokal asimptotik kararlı ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}_1 = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Teorem_1_(i)'de $r < 1$ için $\overline{y}_1 = 0$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu göstermiştik. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}_1 = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$0 < y_{n-2}^{q+p} y_{n-4}^{q} ... y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q} y_{n-4}^{q+p} ... y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q} y_{n-4}^{q} ... y_{n-2t}^{q+p}$$

olduğundan

$$0 \leq y_{n+1} = \frac{ry_{n-1}}{1 + y_{n-2}^{q+p} ... y_{n-2t}^{q} + y_{n-2}^{q} ... y_{n-2t}^{q+p}} < ry_{n-1}$$

olarak yazılabilir. $n = 0, 2, 4, ...$ için

$$0 \leq y_1 < ry_{-1}$$

$$0 \leq y_3 < y_1 < r^2 y_{-1}$$

$$\vdots$$

$$0 \leq y_{2n+1} < r^{n+1} y_{-1}$$

olur. Son eşitsizlikte her iki tarafın limitini alırsak;

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} < \lim_{n\to\infty} r^{n+1} y_{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = 0$$

olur. Benzer olarak $n = 1,3,5,...$ için

$$0 \le y_2 < ry_0$$

$$0 \le y_4 < y_2 < r^2 y_0$$

$$0 \le y_{2n} < r^n y_0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} y_{2n} < \lim_{n\to\infty} r^n y_0$$

eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n} = 0$ olur. Bu da Teorem_4.3'ün ispatıdır.

Teorem_4.4: $a > 0$ olmak üzere (4.2) denklemin $a\ ,0\ a\ ,0\ ,...$ gibi bir periyotlu iki çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $r = 1$ olmasıdır. Ayrıca (4.2) denkleminin tüm çözümleri bir periyotlu iki çözümden birine yakınsar.

İspat_4.4: $a\ ,b\ ,a\ ,b\ ,...$ (4.2) denkleminin bir periyotlu iki çözümü olsun. Bu halde

$$a = \frac{ra}{1 + b^{q+p}...b^q + b^q...b^{q+p}} \quad \wedge \quad b = \frac{rb}{1 + a^{q+p}...a^q + a^q...a^{q+p}}$$

olur. Cebirsel işlemlerden

$$ra = a\left(1 + tb^{qt+p}\right)$$

$$rb = b\left(1 + ta^{qt+p}\right)$$

$$(r-1)(a-b) = tab\left(b^{qt+p-1} - a^{qt+p-1}\right)$$

$$\frac{(r-1)(a-b)}{\left(b^{qt+p-1} - a^{qt+p-1}\right)} = tab \ge 0$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Son eşitsizlikten $r - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad r \le 1$

olur.

Eğer $r < 1$ ise o zaman $a < 0$ ya da $b < 0$ olur. Bu ise $a > 0$ ve $b > 0$ olması ile çelişir. Bu yüzden $r = 1$ olmak zorundadır.

Şimdi a ve b 'den birinin sıfır olması gerektiğini ispatlayalım:

$r=1$ için,

$$y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{1+y_{n-2}^{q+p}...y_{n-2t}^{q}+y_{n-2}^{q}...y_{n-2t}^{q+p}}$$

olur.

$$y_{n+1}-y_{n-1}=\frac{-y_{n-1}y_{n-2}^{q+p}...y_{n-2t}^{q}-y_{n-1}y_{n-2}^{q}...y_{n-2t}^{q+p}}{1+y_{n-2}^{q+p}...y_{n-2t}^{q}+y_{n-2}^{q}...y_{n-2t}^{q+p}}\leq 0$$

olduğundan tek ve çift terimler azalarak $a\geq 0 \wedge b\geq 0$'a yakınsar. İlk eşitsizliğin limiti alınırsa;

$$a=\frac{a}{1+tb^{qt+p}} \quad \wedge \quad b=\frac{b}{1+ta^{qt+p}}$$

olur. Bu iki eşitlikten $tab^{qt+p}=0 \wedge ta^{qt+p}b=0$ olur. Buradan a ve b'den biri sıfır olmak zorundadır. Bu da teoremin ispatıdır.

Teorem_4.5: Eğer $r>1$ ise o zaman (4.2) denklemi sınırsız çözüme sahiptir.

İspat_4.5: Teorem_4.2'den

$$y_{2n-1}<\bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}} \qquad \wedge \qquad y_{2n}\geq \bar{y}_2=\left(\frac{r-1}{t}\right)^{\frac{1}{qt+p}}$$

olarak yazılabilir. Yine

$$y_{2n+2}=\frac{ry_{2n}}{1+y_{2n-1}^{q+p}...y_{2n-2t+1}^{q}+y_{2n-1}^{q}...y_{2n-2t+1}^{q+p}}>\frac{ry_{2n}}{1+\frac{r-1}{t}+...+\frac{r-1}{t}}=y_{2n}$$

$$y_{2n+3}=\frac{ry_{2n+1}}{1+y_{2n}^{q+p}...y_{2n-2t+2}^{q}+y_{2n}^{q}...y_{2n-2t+2}^{q+p}}<\frac{ry_{2n+1}}{1+\frac{r-1}{t}+...+\frac{r-1}{t}}=y_{2n+1}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Limit alırsak;

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1}=0$$

olur.

SONUÇ: Bu çalışmada $x_n = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma\left(\sum_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{p}\right)\left(\prod_{k=1}^{t} x_{n-2k}^{q}\right)}$ fark denkleminde β, p, q pozitif ve α, γ negatif olmayan reel sayı parametreleri ile başlangıç şartları $x_{-2t},\ldots, x_{-2}, x_{-1}$ ve x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere denklemin denge noktalarının global asimptotik kararlı olup olmadığı incelenmiştir.

KAYNAKLAR

<u>1. Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı:</u>

S.Kalabusıc and M.R.S.Kulenovıc, (2003). On the recursive sequence, $x_{n+1} = \dfrac{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-2}}{C x_{n-1} + D x_{n-2}}$, *Journal of difference equations and Applications*, 9(8) ,701-720.

Xiaofan Yang, Hongjian Lai, David J. Evans ve Graham M. Megson, (2003). Global asymptotic stability in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 158, 703-716.

A.M.Amleh , E.A.Grove and G.Ladas, (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233, 790-798.

A.M.Amleh, V.Kirk, G.Ladas, (2001). On the dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}}$, *Math. Sci. Res. Hot-Line,* 5, 1-15.

M.R.S.Kulenovıc, G.Ladas and C.B.Overdeep, (2004). On the dynamics of $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ with a period-two coefficient, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 905-914.

E.A.Grove, G.Ladas, M.Predescu and M.Radın, (2002). On the global character of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \gamma x_{n-(2k+1)} + \delta x_{n-2l}}{A + x_{n-2l}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(2), 171-199.

E.Chatterjee, E.A.Grove, Y.Kostrov and G.Ladas, (2003). On the trichotomy character of $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(12), 1113-1128.

J.Feuer, E.J.Janowski and G.Ladas, (1997). Lyness-type equations in the third quardrant, *Nonlineer Analysis, Theory, Methods & Applications*, 30, 1183-1189.

E.Camouzıs and G.Ladas, (1994). The rational recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\beta x_n^2}{1 + x_{n-1}^2}$, *Computers Math. Appl.* , 28, 37-43.

R.DeVault, G.Ladas and S.W.Schulltz, (1998). Necessary and sufficient conditions for the boundedness of $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{B}{x_{n-1}^q}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 259-266.

H.El-Metwally, E.A.Grove and G.Ladas, (2000). A global convergence result with applications to periodic solutions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 245, 161-170.

Kosmala, Kulenovıc, Ladas and Teixeira, (2000). On the recursive sequence $y_{n+1} = \dfrac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 571-586.

You-Huı Su, Wan-Tong Li and Stevo Stevic, (2005). Dynamics of a higher order nonlinear rational difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 133-150.

Kenneth S.Berenhaut and Stevo Stevıc, (2006). The behaviour of the solutions of the difference equation $x_n = A + \left(\dfrac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\right)^p$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 909-918.

Kenneth S.Berenhaut, J.E.Dice, J.D.Foley, B.Irıcanın, S.Stevic, (2006). Periyodic solutions of the rational difference equation $y_{n+1} = \frac{y_{n-3} + y_{n-4}}{y_{n-1}}$, *Journal of the Dfference Equations and Applications*, 183-189.

Kenneth S.Berenhaut and Stevo Stevıc, (2006). A note on positive non-oscillatory solutions of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}^{p}}{x_n^{p}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 495-499.

Stevo Stevic, (2006). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-2m+1}^{p}}{b + c x_{n-2k}^{p-1}}$, *J.Appl. Math. Comput.*, 21, 223-232.

Stevo Stevıc, (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^{p}}{x_n^{p}}$, *J. Appl. Math. And Comp.*, 18, 229-234.

Stevo Stevıc, (2005). On positive solutions of a (k+1)th order difference equation, *Applied Mathematic letters*, 19(5), 427-431.

Der-Chen Chang and Stevo Stevıc, (2003). On the recursive sequence of $x_{n+1} = \alpha + \frac{\beta x_{n-1}}{1 + g(x_n)}$, *Applicable Analysis*, 82, 145-156.

R.Devault, G.Ladas and S.W. Schultz, (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126, 3257-3261.

Stevo Stevıc, (2002). A note on the difference equation $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{x_{n-i}^{p_i}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8(7), 641-647.

H.M.El-Owaidy, A.M.Ahmed and A.M.Youssef, (2005). The dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^{p}}$, *Applied Mathematik Letters*, 18, 1013-1018.

Xing-Xue Yan, Wan-TongLi, (2003). Global attractivity in the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 138, 415-423.

G.Papaschınopoulos and C.J.Shınas, (2004). On a (k+1)-th order difference equation with a coefficient of period k+1 , *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 215-225.

Xing-Xue Yan and Wan-Tong Li, (2004). Dynamic behavior of a recursive sequence , *Applied Mathematics and Computation*, 157, 713-727.

Yonghong Fan, Linlin Wang and Wantong Li, (2004). Global behaviour of a higher order nonlinear difference equation, *J.Math. Anal.Appl.*, 299, 113-126.

Taixiang Sun and Hongjian Xi, (2007). On convergence of the solutions of the difference equation $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, *J.Math. Anal.Appl.*, 325, 1491-1494.

Xing-Xue Yan, Wan-Tong Li and Zhu Zuhao, (2005). On the reursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, *J.Appl. Math. And Comp.* , 17, 269-282.

Xing-Xue Yan, Wan-TongLi and Hong-Ruı Sun, (2001). Global attractivity in a higher order nonlinear difference equation, *Applied Mathematics E-Notes*, 2, 51-58.

You-Huı Su and Wan-Tong Li, (2005). Global attractivity of a higher order nonlinear difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 947-958.

Yu Zheng, (1996). Existence of nonperiodic solutions of the Lyness equation $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + x_n}{x_{n-1}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 203, 94-102.

Xiaofan Yang, David J.Evans ve Graham M.Megson, (2004). On a non-autonomous difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 168, 380-388.

X.Y.Zeng, B.Shi and D.C.Zhang, (2004). Stability of solutions for the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}$, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176, 283-291.

D.C.Zhang, B.Shı and M.J.Gaı, (2001). a rational recursive sequence $x_{n+1} = \frac{a + bx_n^2}{1 + x_{n-1}^2}$, *Computers and Mathematics with Applications*, 41, 301-306.

Xiaofan Yang, Hongjian Lai, David J.Evans and Graham M.Megson, (2003). Global stability in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 158, 703-716.

Sun Taıxıang, (2004). On the non-oscillatory solutions of the recursive sequence $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 483-485.

S.Kalabusıc, M.R.S.Kulenovıc and C.B.Overdeep, (2004). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1} + \delta x_{n-k}}{Bx_{n-1} + Dx_{n-k}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 915-928.

B.D.Metsel, (2002). On globally periodic of the difference equation $x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 201-209.

C.H.Gıbbons and C.B.Overdeep, (2004). On the trichotomy character of $x_{n+1} = \frac{a_n + \gamma_n x_{n-1}}{A_n + B_n x_n}$ with period-two coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 655-667.

C.H.Gıbbons, M.Kulenovic, G.Ladas, (2000). On the recursive sequence $y_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}$, *Math. Sci. Res. Hot-Line* , 4 (2), 1-11.

E.S.Thomas, Aaron S.Clark and D.R.Wılken, (2006). A note on the geometry of invariants, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 859-861.

W.T.Patula and H.D.Voulov, (2002). On the oscillation and periodic character of a third order rational difference equation, *Proceedings of The American Mathematical Society*, 131, 985-989.

R.Devault and L.Galminas, (1999). Global stability of $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 231, 459-466.

D.P.Mishev and W.T.Patula, (2000). Oscillation and global asymptotic stability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 252, 364-375.

E.Camouzıs, R.DeVault and W.Kosmala, (2004). On the period five trichotomy of all positive solutions of $x_{n+1} = \dfrac{p + x_{n-2}}{x_n}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 291, 40-49.

Valerio De Angelis, (2003). Notes on the non-autonomous Lyness equation , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 294, 288-293.

Jeffrey T.Hoag, (2004). Monotonicity of solutions converging to a saddle point equilibrium, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 295, 10-14.

Lothar Berg, (2004). Oscillating solutions of rational difference equations, *Rostock. Math. Kolloq.* , 58, 31-35.

Anna Cıma, Armengol Gasull and Francesc Manosas, (2004). On periodic rational difference equations of order k , *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 549-559.

Mona T.Aboutaleb, M.A.El-Sayed and Alaa E.Hamza, (2001). Stability of the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 261, 126-133.

Alaa E.Hamza, (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, *J. Math. Anal. Appl.* , 322, 668-674.

Raghıb M.Abu-Sarıs and Neda'a K.Al-Jubourı, (2003). Characterization of rational periodic sequences 2 , *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 409-418.

H.M.El-Owaidy and M.M.Afıfı, (2000). A note on periodic cycle of $x_{n+2} = \dfrac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 109, 301-306.

M.M.Afıfı, (2004). On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 617-628.

M.M.Afıfı and A.M.Ahmed, (2003). On the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{a + \alpha x_n + \alpha x_{n-1} + \ldots + \alpha x_{n-k+2}}{x_{n-k+1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 144, 537-542.

Mehdi Dehghan and Reza Mazrooei-Sebdani, (2006). Dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-2k+1}}{x_{n-2k+1} + \alpha x_{n-2l}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 185, 464-472.

H.M.El-Owaidy, A.M.Ahmed and Z.Elsady, (2004). Global attractivity of recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 151, 827-833.

H.M.El-Owaidy, A.M.Ahmed and Z.Elsady, (2004). Global attractivity of recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_{n-k}}{\gamma + x_n}$, *J. Appl. Math. And Computing* , 16, 243-249.

H.M.El-Owaidy, A.M.Ahmed and M.S.Mousa, (2003). On the recursive sequences $x_{n+1} = \dfrac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 145, 747-753.

H.M. El-Owaidy, A.M. Ahmed and A.M. Youssef, (2005). On the dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{bx_{n-1}^2}{A + Bx_{n-2}}$, *Rostock Math Kollog*., 59, 3-10.

Alaa E.Hamza and M.A El-Sayed, (1998). Stability problem of some nonlinear difference equations, *Int. T.Math. and Math. Sci*., 2, 331-340.

Mehdi Dehghan and Majıd Jaberi Douraki, (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_{n-k+1} + \gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1} + Cx_{n-2k+1}}$,*Applied Mathematics and Computation*, 170, 1045-1066.

Ragheb M. Sarris, (2000). Global behaviour of rational sequences involving piecewise power function, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2, 103-109.

E.Camouzis, E.Chatterjee., G.Ladas, (2007). On the Dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}}$, *Mathematical Analysis and Applications*, 331, 230-239.

X.Yang, Y.Yang, (2008). On the difference equation $x_n = \dfrac{px_{n-s} + x_{n-l}}{qx_{n-s} + x_{n-l}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 2003, 679-689.

R.Mazrooei-Sebdani, M.Dehghan, (2007). Dynamics of $x_n = \dfrac{x_{n-2k+1}}{x_{n-2k+1} + x_{n-2k}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 185, 464-472.

Dongmei Chen, Xianyi Li, (2009). Dynamics for Nonlinear Difference Equation $x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^{p}}$, *Advances in Difference Equations*, 235691.

Luis Alseda and Michael Misiurewicz, (2009). A Note on a Rational Difference Equation, *Mathematics Subject Classifications*, 39A33-39A20.

Xiu-Mei Jia and Lin-Xia Hu, (2010). Global Attractivity of a Higher-Order Nonlinear Difference Equation, *Mathematics Subject Classifications*, 39A10.

<u>2. Doktora Tezleri:</u>

C. M. Kent, (1998). *Stability and Periodicity of Some Difference Equations*, Doktora Tezi, University of Rhode Island.

J. Feuer, (1998). *Invariants and Invariant Region of Lyness-Type Difference Equations*, Doktora Tezi, University of Rhode Island.

L. C. McGrath, (2002). *Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations*, Doktora Tezi, University of Rhode Island.

M. A. Radin, (2001). *The Global Stability Boundedness and Periodicity Charecter of Certain Difference Equations*, Doktora Tezi, University of Rhode Island.

N. Prokup, (2000). *Boundedness Global Stability and Perodicity of Some Difference Equations*, Doktora Tezi, University of Rhode Island.

R. Devault, (1996). *Permanence and Stability In Models of a Perannial Grass.*, Doktora Tezi, University of Rhode Island.

3. Kitaplar :

L.A. Moybe, (2000). *Difference Equations with Public Health Applications*, New York, U.S.A.

M.R.S. Kulenevic and G. Ladas, (2002). *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures*, Florida: Boca Raton.

S. Elaydi, (1995). *A Introduction to Difference Equations*, New York: Spinger- Verlag.

E. Camouzis and G. Ladas, (2007). *Dynamics of Third Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures*, Florida: Boca Raton.

W.G. Kelley and A.C. Petterson, (2001). *Difference Equations An Introduction with Applications*, London: Harcourt Place.

V.L. Kocic and G. Ladas, (1993). *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

N. Finizio and G. Ladas, (1982). *An Introduction to Differantial Equations*, California: Wadsworth Publishing.

R. Li, Z. Chen and W. Wu, (2000), *Generalized Difference Methods for Differantial Equations*, New York: Marcel Dekker.

D. Betounes, (2010), *Differantial Equations Theory and Applications*, New York: Springer.

R.P. Agarwal, (2000), *Difference Equations and Inequalities Theory, Methods and Applications*, New York: Marcel Dekker.

T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Mehmet Emre ERDOĞAN	İmza:	
Doğum Yeri:	KONYA		
Doğum Tarihi:	13.05.1986		
Medeni Durumu:	Bekar		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	Özel İdare 100. yıl İlkokulu		Selçuklu - KONYA	1992 – 1997
Ortaöğretim	Konya Mahmut Sami Ramazanoğlu Anadolu İmam- Hatip Lisesi Özel Diltaş Lisesi		Selçuklu - KONYA Selçuklu - KONYA	1997 – 1999 1999 – 2001
Lise	Karatay Anadolu Lisesi		Karatay - KONYA	2001 – 2004
Lisans	Selçuk Üniversitesi	Eğitim Fak. İlk. Mat. Öğrt.	Meram - KONYA	2005 – 2009
Yüksek Lisans	Selçuk Üniversitesi	Eğitim Bil. Ens. Ort. Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi A.B.D	Meram - KONYA	2009 – 2011

Becerileri:	
İlgi Alanları:	Bilgisayar programlama, animasyon Matematik araştırma, kişisel gelişimi sağlama Futbol, Basketbol sporları
İş Deneyimi:	Bil Dershanesi – 2009 - 2010 YGS-LYS Matematik / Geometri Öğretmeni, SBS Matematik Öğretmeni
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	Doç. Dr. Cengiz ÇINAR, Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Yrd. Doç. Dr. A. Selçuk KURBANLI
Tel:	0505 532 42 88
Adres	Bosna Hersek mh. Bölme sk. Yörünge - 17 sit. No: 4/31 Selçuklu / KONYA