

**ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN  
CEBİR ÖĞRETİMİNE İLİŞKİN BİLGİLERİ:  
ÇOKLU DURUM ÇALIŞMASI**

**MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS'  
KNOWLEDGE FOR TEACHING ALGEBRA:  
A MULTIPLE CASE STUDY**

**Pınar YILDIZ**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı İçin Öngördüğü

Doktora Tezi

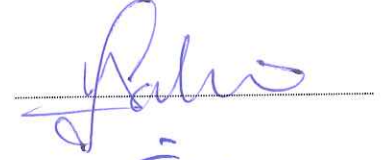
olarak hazırlanmıştır.

2016

Eğitim Bilimleri Enstitüsü M¼d¼rl¼ę¼'ne,

Pınar YILDIZ'ın hazırladığı "Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebir Öğretimine İlişkin Bilgileri: Çoklu Durum Çalışması" başlıklı bu çalışma j¼rimiz tarafından **İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı'nda Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

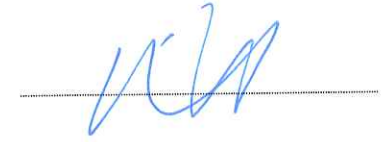
Başkan Prof. Dr. Yeter ŞAHİNER



Üye (Danışman) Yrd. Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR



Üye Doç. Dr. Mine İŞIKSAL BOSTAN



Üye Yrd. Doç. Dr. Yeşim ÇAPA AYDIN



Üye Yrd. Doç. Dr. Mesture KAYHAN ALTAY



ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki j¼ri üyeleri tarafından ..... / ..... / ..... tarihinde uygun gör¼lmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..... / ..... / ..... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Berrin AKMAN  
Eğitim Bilimleri Enstitüsü M¼d¼r¼

# ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN CEBİR ÖĞRETİMİNE İLİŞKİN BİLGİLERİ: ÇOKLU DURUM ÇALIŞMASI

**Pınar YILDIZ**

## ÖZ

Bu araştırmada ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerinin (alan bilgileri ve pedagojik alan bilgileri) incelenmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda öğretmenlerin (a) değişken, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem konularına ilişkin alan bilgileri, (b) öğrencilerin bu konuları nasıl öğrendikleri ve ne gibi zorluklar yaşadıkları hakkında sahip oldukları bilgiler ve (c) bu konuların öğretiminde kullandıkları öğretim materyalleri ve stratejileri incelenmiştir. Araştırmada nitel araştırma desenlerinden çoklu durum çalışması deseni benimsenmiştir. Araştırmaya Kayseri ilinde, iki farklı ortaokulda görev yapmakta olan üç ortaokul matematik öğretmeni katılmıştır. Katılımcılar amaçlı örneklem yöntemi ile belirlenmiştir. Verilerin toplanmasında sınıf içi gözlemler, öğretmenlerle yapılan bire-bir görüşmeler ve doküman incelemesi kullanılmıştır.

Araştırma sonucunda öğretmenlerin değişken, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem kavramlarını anlamlandırma ve yorumlama açısından alan bilgilerinin yüzeysel olduğu belirlenmiştir. Öğretmenler değişkenin farklı anlamları hakkında bilgi sahibi olmalarına rağmen, bu anlamlar arasında ilişkilendirme yapmamışlardır. Bu durumla ilişkili olarak, cebirsel ifade ve denklem kavramlarını harf, işlem ve eşitlik içerme odaklı tanımlamışlardır. Denklemin cebirsel ifadeden farkını, denklemin eşitlik sembolünü içermesi olarak ele almışlardır. Öğretmenlerin sınırlı alan bilgileri, öğrenci hatalarına ve bu hataların nedenlerine ilişkin derin bir analiz yapmalarını engellemiştir. Bu sonuçlara ek olarak, öğretim sürecini yapılandırmada alan ve öğrenci bilgilerinin önemli belirleyiciler olduğu gözlenmiştir. Öğretmenlerin kullandıkları öğretimsel stratejilerin ve materyallerin, kavramsal anlamadan ziyade işlemsel süreçlerin öğretimine odaklandığı tespit edilmiştir. Öğretim sürecinde öğrenci hata ve zorluklarına ilişkin uygulamalara nadiren yer vermişlerdir. Öğretmenler, alan ve pedagojik alan bilgilerinin sınırlı düzeyde olmasından dolayı öğretime yönelik problemlere ilişkin somut ve etkili çözümler üretememişlerdir. Bulgular cebir öğretimine ilişkin öğretmen bilgisinin kapsamlı bir

model şeklinde tanımlanmasının ve bu bilginin gelişiminin desteklenmesinin gerektiğini göstermektedir.

**Anahtar sözcükler:** Ortaokul matematik öğretmenleri, matematiksel bilgi, alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, cebir öğretimi

**Danışman:** Yrd. Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR, Hacettepe Üniversitesi, İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı

# MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' KNOWLEDGE FOR TEACHING ALGEBRA: A MULTIPLE CASE STUDY

**Pınar YILDIZ**

## **ABSTRACT**

The study aims to analyse middle school mathematics teachers' mathematical knowledge (subject matter knowledge and pedagogical content knowledge) for teaching algebra. In this respect, teachers' (a) subject matter knowledge in variable, algebraic expression, equality, and equation, (b) knowledge about how students learn these subjects and what difficulties they encounter, and (c) instructional methodologies and strategies they use were looked into. Multiple case study design was employed. Three middle school mathematics teachers from two different middle schools in Kayseri participated in the study. Purposive sampling is used in the selection of participants. Data were collected through in-class observations, individual interviews with each teacher, and document analysis.

Findings indicated that middle school mathematics teachers' subject matter knowledge in understanding and interpreting variable, algebraic expression, equality, and equation are superficial. Even though they had known different meanings of "variable", they did not make connections between these meanings. Therefore, they described algebraic expression and equation in terms of letter, operation and equality. They described the difference between equation and algebraic expression as equation's including equality symbol. Teachers' limited subject matter knowledge prevented them from making an in-depth analysis of students' errors. Moreover, subject matter knowledge and knowledge of students' were found as important determinants of teachers' instruction. Instructional materials and strategies used by teachers focus on teaching of procedural processes rather than conceptual meaning. Little attention was given to student error and difficulties students face in their instructional practices. Teachers failed to produce concrete and efficient solutions to the instructional problem due to the their limited subject matter and pedagogical knowledge. Findings indicate the necessity of defining teacher knowledge for teaching algebra in a comprehensive model and supporting the development of such knowledge.

**Keywords:** Middle school mathematics teachers, mathematical knowledge, subject matter knowledge, pedagogical content knowledge, teaching algebra

**Advisor:** Assist. Prof. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR, Hacettepe University, Department of Elementary Education, Division of Elementary Education

## ETİK BEYANNAMESİ

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Pınar YILDIZ

***Canım Aileme...***



## TEŞEKKÜR

İlk olarak doktora öğrenimim ve tez çalışmam boyunca sıcacık gülümsemesi ve desteği ile her zaman yanımda olan sevgilim hocam, tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. İ. Elif Yetkin Özdemir'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Siz olmasaydınız bu süreç bu kadar öğretici olmazdı. Sizden çok şey öğrendim. Sizin öğrenciniz olduğum için çok şanslı olduğumu belirtmek isterim. Emekleriniz, bana kattıklarınız ve bana olan inancınız için sonsuz teşekkür ederim.

Tez izleme sürecinde destek ve önerileriyle katkıda bulunan değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Yeşim Çapa Aydın ve Doç. Dr. Mine Işıksal Bostan'a teşekkür ederim. Tez jürimde yer alarak önerilerini paylaşan değerli hocalarım Prof. Dr. Yeter Şahiner ve Yrd. Doç. Dr. Mesture Kayhan Altay'a teşekkür ederim. Desteğini her zaman hissettiğim değerli bölüm hocalarım Doç. Dr. İbrahim Bayazit ve Doç. Dr. Cemalettin Işık'a ayrıca teşekkür ederim.

Birlikte deneyimlediğimiz bu süreçte desteğini esirgemeyen arkadaşım Dr. Ş. Koza Çiftçi'ye çok teşekkür ederim. Sen olmasaydın bu süreç bu kadar keyifli geçmezdi. Bu uzun yolda birlikte çok şey öğrendik. Ayrıca bu süreçte daima yanımda olan hocalarım ve arkadaşlarım Feride Acar, Hale Ortaköylüoğlu, Ufuk Girgin'e çok teşekkür ederim. Bana güç veren enerjinizi hiç kaybetmemenizi diliyorum. İyi ki varsınız. Doktora sürecinde birlikte keyifli ve verimli zaman geçirdiğim arkadaşlarım Şeyma Şengil Akar, Ramazan Gürel, Elif Sezer, Dr. Erhan Bozkurt ve Dr. Şükran Uçuş'a teşekkür ederim. Bölüm arkadaşlarım Merve Kırnap Dönmez ve Azime Atay'a dostlukları ve kahve eşliğinde geçirdiğimiz zamanlar için teşekkür ederim. Yeni tanıdığım ve benden yardımını esirgemeyen bölüm arkadaşım Dr. Sevim Sevgi'ye teşekkür ederim.

Araştırmanın yürütülmesinde destek olan okul yöneticilerine, katılımcı öğretmenlerin sınıflarındaki öğrencilere ve velilerine teşekkür ederim. Özellikle sınıflarının kapılarını bana açan katılımcı öğretmenlere sonsuz teşekkürü borç bilirim. Yoğun iş yüklerine rağmen zaman ayırıp, bu çalışmanın gerçekleşmesini sağladıkları için onlara minnettarım. Bu yoğun ve zorlu süreçte beni her zaman güler yüzle karşıladığınız için her birinize ayrıca teşekkür ederim.

Ve sevgili ailem... Bu zorlu süreçte hep birlikte ağladık ve güldük. Umudumu kaybettiğim zamanlarda hep yanımda oldunuz. Sizler olmasaydınız bu süreci

tamamlayamayabilirdim. Annem Dürsel Akdal... Yıllardır bitmeyen yollarda benden daha çok yoruldun. Her ne kadar yorgunluğumu ve üzüntülerimi hissettirmemeye çalışsam da sen hep farkındaydın. Babam Veli Akdal... Bütün zorluklar karşısında senden güç aldım ve pes etmememi sağladın. Fikirlerin bana her zaman yol gösterdi. Ağabeyim Deniz Akdal. Bu süreçte bir an olsun yanımdan ayrılmadın. Bir kardeş ancak senin kadar can olabilir. Hüseyin Yıldız... Ne diyebilirim ki... Hayat arkadaşım... Bu süreci en rahat ve keyifli şekilde geçirmem için elinden gelen her şeyi yaptın. Cansın... Hepinize çok teşekkür ederim. Ailemizin en küçük ve dünyalar tatlısı bireyi, göz bebeğimiz, canım yiğenim Veli Çınar. Seninle birlikte geçiremediğim tüm zamanlar için özür dilerim. Seni çok seviyorum. Ayrıca bu süreçte daima yanımda olan Şengül Akdal, Bensu Demir, Sakine Yıldız ve Suna Şakar'a çok teşekkür ederim. Sizleri çok seviyorum. Hep birlikte güzel günler geçirmek ümidiyle...

Ayrıca, yüksek lisans ve doktora öğrenimim boyunca sağlamış olduğu destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZ .....	iii
ABSTRACT .....	v
ETİK BEYANNAMESİ .....	vii
TEŞEKKÜR .....	ix
İÇİNDEKİLER.....	xi
TABLolar DİZİNİ .....	xiv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....	xvi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu .....	2
1.2. Araştırmanın Amacı .....	7
1.3. Problem .....	8
1.4. Alt Problemler .....	8
1.5. Araştırmanın Önemi.....	8
1.6. Sayıtlar.....	10
1.7. Sınırlılıklar ve Sınırlandırmalar .....	10
1.8. Tanımlar .....	11
1.9. Araştırmanın Kuramsal Temelleri .....	12
2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	16
2.1. Cebir Öğrenme ve Öğretimi .....	16
2.2. Öğretmenlerin Cebir Öğretimine İlişkin Alan Bilgisi.....	21
2.3. Öğretmenlerin Cebir Öğretimine İlişkin Pedagojik Alan Bilgisi .....	28
2.4. Literatür Özeti .....	35
3. YÖNTEM .....	37
3.1. Araştırma Deseni .....	37
3.2. Katılımcılar .....	38
3.2.1. Katılımcıların Belirlenmesi .....	38
3.2.1.1. Ayla Öğretmen.....	40
3.2.1.2. Hale Öğretmen .....	42
3.2.1.3. Emre Öğretmen .....	43
3.3. Veri Toplama Süreci .....	45
3.4. Veri Toplama Araçları .....	45
3.4.1. Ders Gözlemleri .....	45
3.4.2. Görüşmeler .....	47
3.4.3. Doküman İnceleme .....	51
3.5. Pilot Uygulama.....	52
3.6. Veri Analiz Süreci .....	53
3.7. Geçerlik, Güvenirlik ve Etik .....	55
3.8. Araştırmacının Rolü .....	58
4. BULGULAR ve YORUM .....	60
4.1. Ayla Öğretmen.....	60

4.1.1. Değişken .....	61
4.1.1.1. Alan Bilgisi .....	61
4.1.1.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	67
4.1.1.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	67
4.1.1.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	70
4.1.2. Cebirsel İfadeler .....	75
4.1.2.1. Alan Bilgisi .....	75
4.1.2.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	78
4.1.2.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	78
4.1.2.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	80
4.1.3. Eşitlik ve Denklem .....	85
4.1.3.1. Alan Bilgisi .....	85
4.1.3.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	91
4.1.3.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	91
4.1.3.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	94
4.2. Hale Öğretmen .....	103
4.2.1. Değişken .....	103
4.2.1.1. Alan Bilgisi .....	103
4.2.1.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	107
4.2.1.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	107
4.2.1.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	109
4.2.2. Cebirsel İfadeler .....	114
4.2.2.1. Alan Bilgisi .....	114
4.2.2.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	117
4.2.2.2.1. Alan İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	117
4.2.2.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	119
4.2.3. Eşitlik ve Denklem .....	123
4.2.3.1. Alan Bilgisi .....	123
4.2.3.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	128
4.2.3.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	128
4.2.3.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	130
4.3. Emre Öğretmen .....	140
4.3.1. Değişken .....	141
4.3.1.1. Alan Bilgisi .....	141
4.3.1.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	144
4.3.1.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	144
4.3.1.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	147
4.3.2. Cebirsel İfadeler .....	150
4.3.2.1. Alan Bilgisi .....	150
4.3.2.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	153
4.3.2.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	153
4.3.2.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	155
4.3.3. Eşitlik ve Denklem .....	159
4.3.3.1. Alan Bilgisi .....	159
4.3.3.2. Pedagojik Alan Bilgisi .....	163
4.3.3.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi .....	163
4.3.3.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi .....	165
5. SONUÇ ve ÖNERİLER .....	174
5.1. Sonuçlar .....	174

5.1.1. Öğretmenlerin Değişken Kavramının Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri.....	174
5.1.2. Öğretmenlerin Cebirsel İfadeler Konusunun Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri .....	179
5.1.3. Öğretmenlerin Eşitlik ve Denklem Konusunun Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri .....	183
5.2. Öneriler.....	187
5.2.1. Araştırmaya Yönelik Öneriler .....	187
5.2.2. Uygulamaya Yönelik Öneriler.....	188
KAYNAKÇA.....	190
EKLER DİZİNİ .....	202
EK 1: ETİK KURUL ONAY BİLDİRİMİ.....	203
EK 2: KAYSERİ İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ ARAŞTIRMA İZİNİ .....	204
EK 3: GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU .....	205
EK 4: VELİ ONAY FORMU.....	207
EK 5: ÖN GÖRÜŞME FORMU.....	208
EK 6: GÖRÜŞME FORMU I .....	210
EK 7: GÖRÜŞME FORMU II.....	213
EK 8: DOKÜMANLAR .....	218
EK 9: ORJİNALLİK RAPORU .....	220
ÖZGEÇMİŞ .....	221

## TABLULAR DİZİNİ

Tablo 3.1: Veri Toplama Sürecine İlişkin Çalışma Takvimi.....	45
Tablo 3.2: Ayla Öğretmen: Ders Gözlemleri.....	46
Tablo 3.3: Hale Öğretmen: Ders Gözlemleri.....	46
Tablo 3.4: Emre Öğretmen: Ders Gözlemleri.....	47
Tablo 3.5: Görüşme Sürecine İlişkin Bilgiler.....	47
Tablo 3.6: Öğretim Senaryolarının Konulara Göre Dağılımı.....	49
Tablo 3.7: Öğretim Senaryoları Maddelerinin Boyutlara Göre Dağılımı.....	50
Tablo 3.8: Alan ve Pedagojik Alan Bilgisi Alt Boyutları.....	54
Tablo 4.1: Ayla Öğretmenin Değişken Öğretiminde Kullandığı Sorular.....	72
Tablo 4.2: Ayla Öğretmenin Cebirsel İfadeler Konusunun Öğretiminde Kullandığı Sorular.....	81
Tablo 4.3: Ayla Öğretmenin Denklem Çözümünde Kullandığı Sorular.....	97
Tablo 4.4: Hale Öğretmenin Cebirsel İfadelerin Öğretiminde Kullandığı Sorular.....	120
Tablo 4.5: Hale Öğretmenin Denklem Çözümünde Kullandığı Sorular.....	133
Tablo 4.6: Emre Öğretmenin Cebirsel İfadelerin Öğretiminde Kullandığı Sorular.....	156
Tablo 4.7: Emre Öğretmenin Denklem Çözümünde Kullandığı Sorular.....	167

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 .....	12
Şekil 4.1 .....	65
Şekil 4.2 .....	77
Şekil 4.3 .....	86
Şekil 4.4 .....	87
Şekil 4.5 .....	89
Şekil 4.6 .....	91
Şekil 4.7 .....	93
Şekil 4.8a.....	96
Şekil 4.8b.....	96
Şekil 4.8c.....	97
Şekil 4.8d.....	97
Şekil 4.9 .....	98
Şekil 4.10.....	105
Şekil 4.11.....	113
Şekil 4.12.....	117
Şekil 4.13.....	124
Şekil 4.14.....	125
Şekil 4.15.....	127
Şekil 4.16.....	128
Şekil 4.17.....	130
Şekil 4.18a.....	132
Şekil 4.18b.....	132
Şekil 4.18c.....	133
Şekil 4.19.....	135
Şekil 4.20.....	152
Şekil 4.21.....	160
Şekil 4.22.....	162
Şekil 4.23.....	164
Şekil 4.24.....	168
Şekil 4.25.....	169
Şekil 4.26.....	170

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

**MEB:** Milli Eğitim Bakanlığı

**NCTM:** National Council of Teacher of Mathematics (Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi)



## 1. GİRİŞ

Günümüz eğitim anlayışında öğrenenin sürece etkin katıldığı ve öğrenme süreçlerinin temel alındığı bir yaklaşım benimsenmektedir. Matematik eğitiminde de öğrencilere temel kavram ve becerilerin kazandırılmasının yanı sıra düşünmeyi öğretmenin ön plana çıkarıldığı, öğrenenin kendi öğrenme sürecinin farkında olduğu ve bu sürece ilişkin kararlar alabildiği öğrenme anlayışı esas alınmaktadır (Carpenter & Lehrer, 1999; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Umay, 2007). Benzer şekilde Ortaokul Matematik Dersi (5-8. Sınıflar) Öğretim Programı'nda da öğrenme sürecine aktif katılan, sorgulama, düşünme, tartışma ve kendini ifade edebilme becerilerine sahip öğrenciler yetiştirilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca, öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin soyutlama ve ilişkilendirme yapabilmeleri önemli görülmektedir (MEB, 2013).

Matematik eğitiminde söz konusu hedeflere ulaşabilmede en önemli rol öğretmenlere düşmektedir (Fennema, Sowder & Carpenter, 1999; NCTM, 2000; Umay, 2007). Matematik eğitiminde benimsenen yeni yaklaşımlarla birlikte öğretmen rolleri de değişmiştir (MEB, 2013; NCTM, 2000; Umay, 2007). Öğretmenlerden öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabildikleri; tartışma, düşünme, soru sorma becerilerini kullanarak matematik öğrenme sürecine aktif olarak katılabildikleri öğrenme ortamları oluşturma; öğrenme sürecinde öğrencileri yönlendirme ve motive etme gibi rolleri yerine getirmeleri beklenmektedir (Carpenter & Lehrer, 1999; Fennema, Sowder & Carpenter, 1999; MEB, 2013; NCTM 2000). Bu roller bir matematik öğretmenin öğrencilerin neyi bildiğini, matematiği nasıl öğrendiklerini ve matematik öğrenmek için nelere ihtiyaçları olduğunu bilmelerini gerektirmektedir. Öğretmenin rolünün bahsedilen yönde değişmesi ve eğitimin niteliğinde en önemli etkenlerden birinin öğretmen olması, matematik öğretimi için gerekli öğretmen bilgisinin sorgulanmasını önemli ve gerekli kılmıştır (Ball, Thames & Phelps, 2008; NCTM, 2000). Bununla birlikte bu alanda yapılan çalışmalar, öğretmen bilgisinin sınıf içi öğretim uygulamalarının esas alındığı ve bu sayede öğretmen bilgisinin öğretim faaliyetleri kapsamında daha detaylı ve bütüncül olarak incelendiği çalışmaların önemini ve gerekliliğini ortaya koymaktadır (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ben-Peretz, 2011; Hill, Ball & Schilling, 2008; Izsák, 2008; Lee, 2011; Steele & Rogers, 2012).

## 1.1. Problem Durumu

Öğretmen bilgisi çok eski yıllardan beri incelenmeye ve ölçülmeye çalışılmaktadır (Hill, Schilling & Ball, 2004; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007). Öğretmen bilgisinin doğası ve gelişimi, öğretim ve öğretmen eğitimi üzerine yapılan araştırmaların artması ile anlaşılmaya başlanmıştır. Son 30 yıldır yapılan çalışmalarda öğretmen bilgisini tanımlayan farklı modeller oluşturulmuştur (Grossman, 1995; Magnusson, Krajcik & Borko, 1999; Peterson, 1988; Shulman, 1986, 1987; Turner-Bisset, 1999). Öğretmen bilgi alanları ilk olarak Shulman'ın (1986, 1987) modelinde tanımlanmış, diğer modellerin çoğu Shulman'ın modeli esas alınarak geliştirilmiştir.

Lee Shulman 1886 yılında öğretmen bilgisini üç temel bilgi alanı kapsamında açıklayan bir model sunmuştur. Bu bilgi alanları alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve program bilgisidir. Alan bilgisi öğretmenin öğreteceği konuya yönelik bilgisidir. Öğretmen anlatacağı konuya ilişkin kavramları bilmeli ve bu kavramları içeriğe uygun olarak düzenleyebilmelidir. Pedagoji bilgisi öğretmenin öğretime ilişkin genel ilke ve yöntemleri bilmesini içerir. Pedagojik alan bilgisi ise alan ve pedagoji (öğretim) bilgisi arasında bir köprü görevindedir (Shulman, 1986). Shulman araştırmacıların 1980'lere kadar öğretmen bilgisini alan bilgisi ve pedagoji bilgisi olarak ayrı incelediklerine ve konu alanını öğretim ortamına aktarmadaki öğretmen bilgisi ile ilgilenmediklerine dikkat çekerek (Shulman, 1986, 1987) bu durumu "kayıp paradigma" (Shulman, 1986, s.7) olarak nitelendirmiştir. Shulman bu noktadan yola çıkarak pedagojik alan bilgisini "konu alan bilgisinin öğretim boyutlarına giden bir bilgi" (Shulman, 1986, s.9) olarak tanımlamıştır.

Pedagojik alan bilgisi, alan bilgisinin ve öğretim bilgisinin belirli bir konunun, problemin ve öğrenen özelliklerinin dikkate alınarak birleştirilmesidir. Kısaca öğretmenin belirli bir konu alanının nasıl öğretileceğini bilmesini içeren bilgi türüdür (Shulman, 1986, 1987).

*"Pedagojik alan bilgisi, konu alanının nasıl öğretileceğine ilişkin bilgi türüdür. Bir konu alanındaki en kullanışlı gösterimleri, en güçlü benzetimleri, gösterimleri, örnekleri ve açıklamaları içerir. Başka bir deyişle, bir konuyu başkaları için daha anlaşılır olacak şekilde sunma ve formüle etme yollarıdır. Ayrıca, pedagojik alan bilgisi belirli bir konunun öğrenilmesini neyin kolay ya da zor bir hale getireceğini; farklı yaş ve hazırbulunuşluk düzeyindeki öğrencilerin öğrenme ortamına getirdikleri kavram, ön kavram ve kavram yanılgılarını bilmeyi içerir" (Shulman, 1986, s.9).*

Shulman'ın üçüncü bilgi alanı olarak tanımladığı program bilgisi ise belirli bir sınıf düzeyindeki konuların ve bu konuların öğretiminde kullanılacak materyallerin bilgisini içerir. Shulman (1986) öğretmen bilgisi için üç temel bilgi alanı tanımladıktan sonra, 1987 yılındaki çalışmasında öğretmenin sahip olması gereken yedi bilgi alanından bahsetmiştir. Alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve program bilgisinin de içinde bulunduğu bu bilgi alanlarını şöyle isimlendirmiştir: (i) alan bilgisi, (ii) genel pedagoji bilgisi, (iii) eğitim programı bilgisi, (iv) pedagojik alan bilgisi, (v) öğrenenler ve özellikleri bilgisi, (vi) eğitim hedefleri, değerleri, tarihi ve felsefi temelleri bilgisi ve (vi) eğitimsel bağlam bilgisi.

Shulman'ın (1986, 1987) öğretmen bilgisi modelini sunmasının ve pedagojik alan bilgisini kavramsallaştırmasının ardından öğretmen bilgisinin araştırıldığı çalışmalar hızla artmıştır (Hill, Schilling & Ball, 2004; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007). Araştırmacılar öğretmen bilgisinin bileşenlerini açıklayan farklı bilgi modelleri geliştirmişlerdir (Grosman, 1995; Magnusson, Krajcik & Borko, 1999; Peterson, 1988; Turner-Bisset, 1999). Grosman (1995) modelinde öğretmen bilgisinin altı bilgi alanından oluştuğunu belirtmiştir. Bunlar alan bilgisi, öğrenme ve öğrenenlerin bilgisi, genel pedagoji bilgisi, program bilgisi, bağlam bilgisi ve benlik bilgisidir. Grosman, Shulman'dan farklı olarak pedagojik alan bilgisini alan bilgisi kapsamında ele almıştır. Grosman'a göre alan bilgisi, konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisini birlikte içerir. Öğrenme ve öğrenenlerin bilgisi ise öğretmenin öğrenme teorileri ve öğrencilerin fiziksel, sosyal ve bilişsel gelişim süreci hakkındaki bilgisidir. Grosman'ın modelinde Shulman'ın tanımladığı bilgi alanlarından farklı olarak bağlam bilgisi ve benlik bilgisinin yer aldığı görülmektedir. Bağlam bilgisi, öğretmenin okul kültürüne ilişkin bilgisini içerir. Benlik bilgisi ise öğretmenin kendisine yönelik farkındalığıdır. Grosman bir öğretmenin kişisel değerlerinin, durumunun, güçlü ve zayıf yönlerinin farkında olması gerektiğini ifade etmiştir.

Turner-Bisset (1999), Shulman'ın modelinden yola çıkarak oluşturduğu modelde öğretmen bilgisini alan bilgisi (kavramsal ve işlemsel alan bilgisi), konuyla ilgili inançlar, program bilgisi, genel pedagoji bilgisi, öğretim bilgisi veya modelleri, öğrenenlerin bilgisi, benlik bilgisi, eğitimsel bağlam bilgisi ve eğitim hedefleri kapsamında ele almıştır. Turner-Bisset'in modelinde Shulman'ın tanımladığı bilgi alanlarından farklı olarak öğretim bilgisi veya modelleri bilgisi yer almaktadır. Bu

bilgi, öğretmenin yaşantısı süresince oluşturduğu öğretimsel inançları ve modelleri içerir. Bahsedilen öğretmen bilgisi modellerinin her biri öğretmen bilgisini tanımlamada yeni anlayışlar ortaya koymuştur.

Öğretmen bilgisinin yapısının farklı modeller ile tartışılması, farklı disiplinlere özgü öğretmen bilgi modelleri (Ball, Thames & Phelps, 2008; Fennema & Franke, 1992; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2003, 2005) geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Fennema ve Franke (1992) Shulman'ın modelinden yola çıkarak matematik öğretimine yönelik öğretmen bilgisi modeli önermişlerdir. Bu modelde öğretmen bilgisinin bileşenleri; matematik bilgisi (alan bilgisi), pedagoji bilgisi, öğrencilerin bilgisi ve öğretmenin inançları şeklinde sınıflandırılmıştır. Fennema ve Franke'e (1992) göre öğretmen bilgisi dinamik bir yapıdadır ve her bir bileşen sınıf ortamında karşılıklı etkileşim içerisindedir. Öğretmen bilgisi konu alan bilgisinden, konunun öğrencilere nasıl sunulacağından, öğrencilerin düşünme süreçlerinden ve öğretmenin inançlarından bağımsız olarak düşünülemez. Matematik bilgisi, öğretmenin öğreteceği konunun kavramsal ve işlemsel bilgisini içerir. Öğretmen konuya ilişkin kavramların ve işlemlerin problem çözme sürecinde nasıl kullanılacağını bilmelidir. Bu bilgi türü Shulman'ın (1986) alan bilgisine karşılık gelmektedir. Pedagoji bilgisi ise öğretim için gerekli tekniklerin (etkili planlama, sınıfı düzenleme, uygun yöntem kullanımı vb.) bilgisidir. Fennema ve Franke'nin (1992) pedagoji bilgisinin Shulman'ın (1987) genel pedagoji bilgisi ile örtüştüğü görülmektedir. Öğrenci bilgisi ise öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel düşünme ve öğrenme süreçleri hakkındaki bilgisidir. Ayrıca öğretmen bilgisi öğretmenin pedagoji bilgisi ile ele alınan konunun ve öğrencilerin sınıf ortamındaki etkileşimine bağlı olarak gelişir.

Rowland ve meslektaşları ise matematik alanı için özelleştirdikleri, alan bilgisi ve alan öğretimi bilgisini birlikte ele aldıkları Dörtlü Bilgi Modeli'ni (Knowledge Quartet) geliştirmişlerdir (Rowland, 2005; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2003, 2005, Rowland & Turner, 2007; Thwaites, Jared & Rowland, 2011; Turner & Rowland, 2011). Bu model, temel bilgi (foundation), dönüşüm bilgisi (transformation), ilişki kurma bilgisi (connection) ve beklenmeyen olaylar bilgisi (contingency) olmak üzere dört alt bilgi alanından oluşmaktadır. Bu bilgi alanlarından *temel bilgi* matematik öğretimine ilişkin inançları ve teorik bilgileri içerir (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2003). Öğrenci hatalarını bilme,

matematiksel terminolojiyi doğru kullanma ve amacın farkında olma gibi alt kodlardan oluşur (Rowland & Turner, 2007). *Dönüşüm bilgisi*, öğretmenin bilgisini öğretim için dönüştürmesini gerektiren bilgi alanıdır. Bu bilgi öğretmenin öğretim için farklı gösterimler kullanmasını, uygun örnekleri belirlemesini ve materyalleri kullanmasını içerir (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2003, 2005). *İlişki kurma bilgisi* ise dersin akışı ve düzenlenmesi ile ilgili karar vermeyi, kavramlar, konular ve gösterimler arası ilişkilendirme yapmayı içeren bilgi türüdür (Rowland, 2005; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2003, 2005). Son bilgi türü *beklenmedik olaylar bilgisi* ise planlanması imkânsız sınıf içi durumları içeren bilgi türüdür. Öğrencilerin beklenmedik düşüncelerine yanıt verme ve beklenmedik durumlarda ortaya çıkan fırsatları değerlendirme gibi alt kodlardan oluşur (Rowland & Turner, 2007).

Ball ve meslektaşları ise Shulman'ın modelinden yola çıkarak öğretmen bilgisini matematik alanı için özelleştirdikleri bir kavramsal çerçeve sunmuşlardır. Bu kavramsal çerçevede matematik öğretimi için gerekli bilgiyi alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak iki temel alana ayırmışlardır (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008; Delaney, Ball, Hill, Schilling & Zapf, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008). Ball ve meslektaşları alan bilgisini öğretim bilgisi gerektirmeyen salt matematik bilgisi olarak tanımlamışlardır. Pedagojik alan bilgisini ise konu alanının nasıl öğretileceğine ilişkin sahip olunması gereken bilgi olarak tanımlamışlardır. Alan bilgisini genel alan bilgisi, özel alan bilgisi ve yatay alan bilgisi; pedagojik alan bilgisini ise alana ilişkin öğrenci bilgisi, alan ve öğretim bilgisi ve program bilgisi olarak üç alt bilgi türüne ayırmışlardır. Bu bilgi türleri hakkında detaylı bilgiye Araştırmanın Kuramsal Temeli başlığında yer verilmiştir (bkz. 1.9. Araştırmanın Kuramsal Temeli).

Farklı öğretmen bilgisi modelleri temel alınarak yapılan matematik eğitimi araştırmalarında matematik öğretimi için gerekli öğretmen bilgisi, öğretmenlerin alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi kapsamında araştırılmıştır (An, Kulm & Wu, 2004; Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Even, 1993; Hacıomeroğlu, 2006; Işıksal, 2006; Karahasan, 2010; Lee, 2011; Tirosh, 2000). Ball (1990) öğretmenlerin matematik bilgisinin eksik olmasının öğrencilerin öğrenmesini olumsuz olarak etkilediğini belirtmektedir. Öğrencilerin matematiksel bilgileri doğru olarak öğrenebilmeleri için öncelikle öğretmenlerin öğreteceği konuya ilişkin derin bir matematik bilgisine sahip olmaları gerekmektedir. Öğretmenler konunun

içerdiği kavramlar arasındaki ilişkilerin uygun ve farklı gösterimlerini bilmelidirler. Alan bilgisi ile ilgili yapılan çalışmalar öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının konu alanına yönelik kavramsal bilgilerinin sınırlı olduğunu göstermektedir (An, Kulm & Wu, 2004; Ball, 1990; Brown & Borko, 1992; Işıksal, 2006; Kılcan, 2006; Rizvi & Lawson, 2007). Öğretmenler ve öğretmen adayları matematiksel kavramları ve bu kavramların diğer kavramlarla ilişkisini açıklamada ve yorumlamada zorlanmaktadır. Verilen bir işlemi kolaylıkla sembolize edip çözebilmekte; ancak yaptıkları işlemlerin içerdiği matematiksel kuralların nedenlerini açıklamada yetersiz kalmaktadırlar.

Alan bilgisi matematik öğretimi için temel bir unsur olup (Ball, 1990), kaliteli matematik öğretiminde tek başına yeterli değildir (Even, 1993). Öğretmenler aynı zamanda konu alanının nasıl öğretileceğini de bilmelidirler (Lee, 2011). Bu alanda yapılan çalışmalar öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin yeterli düzeyde olmadığını göstermektedir (Carpenter vd., 1988; Gökbulut, 2010, Işıksal, 2006; Lee, 2011; Tirosh, 2000). Araştırma sonuçları öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yollarına ve kavram yanılgılarına ilişkin bilgilerinin oldukça yüzeysel olduğuna ve matematiksel kavramları öğrencilere anlamlı bir şekilde sunma noktasında zorlandıklarına işaret etmektedir.

Bununla birlikte öğretmenlerin matematik öğretimi için gerekli alan ve pedagojik alan bilgisinin bir arada ve öğretim uygulamaları kapsamında incelendiği az sayıda araştırma bulunmaktadır (Even, 1993; Hacımeroğlu, 2006; Lee, 2011). Bu araştırmalar öğretmen bilgisinin öğretim faaliyetlerini nasıl etkilediğine ilişkin önemli sonuçlar ortaya koymaktadır. Bu araştırmalarda alan bilgisi zayıf olan öğretmenlerin matematiksel ilişkileri açıklayan farklı gösterimleri kullanmakta zorlandıkları ve öğrencilerin anlamasını kolaylaştıracak çözüm stratejilerini açıklamada başarısız oldukları tespit edilmiştir. Bu durum öğretmenlerin, öğrencilerin hatalarını ve kavram yanılgılarını önlemeye yönelik öğretimi sağlamalarını engellemiştir. Alan bilgisi güçlü ancak pedagojik alan bilgisi zayıf olan öğretmenlerin ise öğrencilerin yapabilecekleri hataları ve bu hataların kaynaklarını tahmin etmede başarılı olamadıkları ve dolayısıyla uygun öğretim stratejisine karar veremedikleri gözlenmiştir. Bu bulgular başarılı bir matematik öğretimi için öğretmenlerin güçlü alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olmaları gerektiğini göstermektedir. Öğretmenlerin alan ve pedagojik alan bilgilerinin

derinliği öğrencilerin anlamlı öğrenmesini sağlayacak öğretim için anahtar niteliğindedir (Ball, 1990; Even, 1993; Hacımeroğlu, 2006; Lee, 2011).

Yapılan araştırmalarda matematik öğretimine ilişkin öğretmen bilgisinin belirli matematik konularına yönelik incelendiği görölmektedir. İlköğretim düzeyinde kesirler (An, Kulm & Wu, 2004; Ball, 1990; Chen, 2010; Chestnut-Andrews, 2007; Ding, 2007; Işıksal, 2006; Kılcan, 2006, Tirosh, 2000), geometrik cisimler (Gökbulut, 2010; Manizade, 2006), aritmetiksel işlemler (Baki, 2013; Chick, Pham & Baker, 2006; Rizvi & Lawson, 2007) ve problem çözme (Carpenter vd., 1988; Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002) konularının öğretimine ilişkin öğretmen bilgisinin incelendiği çalışmalar çoğunluktadır. Ancak, matematik öğretiminde önemli bir yere sahip olan cebir alanının öğretimine ilişkin öğretmen bilgisini inceleyen az sayıda çalışma mevcuttur (Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007; Caswell, 2009; Tirosh, Even & Robinson, 1998).

Öğretmenlerin cebir öğretim bilgilerinin araştırıldığı bu çalışmalarda ise çoğunlukla anket ve görüşme soruları kullanılmış, öğretmen bilgisi çoğu zaman sınıf içi uygulamalardan (öğretim süreci) bağımsız olarak incelenmiştir (Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007; Caswell, 2009; Tirosh, Even & Robinson, 1998). Ancak öğretmen bilgisi sürekli olarak gelişen ve değişen bir yapıya sahiptir. Sosyal yapılandırmacı kuram, bilginin sosyal etkileşimler sonucu yapılandırıldığına vurgu yapar. Bu yaklaşıma göre öğretmen bilgisi sınıftaki öğretim uygulamaları sürecinde en iyi şekilde incelenebilir. Bu sayede de öğretmenlerin bilgileri öğretim uygulamaları esas alınarak detaylı olarak yorumlanabilir (Calherhead, 1996, Cobb, 1994; Kim, 2001). Bu kapsamda ulaşılabilir alanyazında, ölkemizde özellikle cebir öğrenmeye temel oluşturan değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin öğretmen bilgisinin, alan ve pedagojik alan bilgisi boyutlarının bir arada ve öğretim süreci kapsamında bütüncül olarak incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır.

## **1.2. Araştırmanın Amacı**

Bu araştırmanın temel amacı ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğrenmeye temel teşkil eden değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin bilgilerinin (alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi) sınıf içi uygulamalar (öğretim süreci) kapsamında ayrıntılı olarak incelenmesidir.

### 1.3. Problem

Ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğrenmeye temel oluşturan konuların (değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem) öğretimine ilişkin matematiksel bilgileri (alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi) nedir?

### 1.4. Alt Problemler

1. Ortaokul matematik öğretmenleri değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem kavramlarını nasıl tanımlamaktadırlar? Bu kavramların diğer matematik kavramları ve birbirleri ile ilişkisini nasıl açıklamaktadırlar?
2. Ortaokul matematik öğretmenleri değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem kavramlarının öğrenciler tarafından öğrenilmesinin nasıl gerçekleştiğini düşünmektedirler? Bu kavramlarla ilişkili öğrenci zorlukları, hataları, kavram yanılgıları ve bunların sebeplerine ilişkin bilgileri nelerdir?
3. Ortaokul matematik öğretmenlerinin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem kavramlarının öğretimi için tasarladıkları derslerin içeriği ve akışı nasıldır? Bu kavramların öğretimine yönelik derslerin işleyişi nasıldır?

### 1.5. Araştırmanın Önemi

Öğretmenlerin matematik öğretimi için yeterli düzeyde bilgiye sahip olması öğrenci başarısına etki eden en önemli faktördür (Fennema, Sowder & Carpenter, 1999). Öğretmen bilgisinin araştırıldığı çalışmalar da öğrenci başarısının sağlanabilmesi için öğretmenlerin öğretecekleri konu hakkında derin bir matematik bilgisine sahip olmaları gerektiğine dikkat çekmektedir. Bu sebeple öğretmenlerin belirli matematik konu alanlarına yönelik öğretim bilgilerini incelemek son derece önemlidir (Ball, 1990; Ball, Lubienski & Mevborn, 2001; Hill & Ball, 2004; Hill, Rowan & Ball, 2005; Neubrand, Seago, Agudelo-Valderma, DeBlois & Leikin, 2009). Araştırmacılar cebir öğretiminde de öğrenci başarısı için en önemli faktör olarak görülen öğretmen bilgisinin incelendiği çalışmaların gerekliliğine dikkat çekmektedir (Even, 1993; Herscovics & Linchevski, 1994; Huang & Kulm, 2012; Kaput, 1998; Kieran, 1992; McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase & Senk, 2012).



Öğretmenler öğretim faaliyetleri sürecinde kullandıkları bilgileri sosyal süreçler içerisinde yapılandırır (Ball & Rowan, 2004; Calherhead, 1996). Bu durum dikkate alındığında öğretmenlerin bir konu alanına yönelik öğretim bilgileri en iyi sınıf içi uygulamalar sürecinde anlaşılabilir (Ben-Peretz, 2011; Izsák, 2008; Lee, 2011; Steele & Rogers, 2012). Öğretmenlerin cebir öğretim bilgisinin incelendiği araştırmalarda öğretmen bilgisi çoğunlukla geliştirilen ölçeklerle aracılığıyla öğretim sürecinden ayrı olarak incelenmiştir. Bu sebeple bu araştırmalar, öğretmenlerin cebir öğretim bilgisini bağlamsal olarak açıklamada yetersiz kalmakta ve öğretmenlerin cebir öğretim bilgilerinin sınıf içi öğretim faaliyetleri kapsamında incelendiği yeni araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır (Boz, 2007; McCrory, 2010). Bu araştırmada durum çalışması deseni kullanılarak öğretmenlerin cebir öğretim bilgisinin alan ve pedagojik alan bilgisi boyutları öğretim sürecindeki durumlar esas alınarak bütüncül olarak incelenmiştir. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular, öğretmenlerin belirli öğretim durumlarına yönelik cebir öğretim bilgilerinin tanımlanması ve bu bilginin boyutları arasındaki etkileşimin öğretim süreci esas alınarak anlaşılması bakımından önemlidir. Bu açıdan araştırma bulguları öğretmenlerin bu bilgilerini öğretim sürecinde nasıl kullandıklarının ve öğretim sürecinin yapılandırılmasında bu bilgi türlerinin nasıl rol oynadığının anlaşılmasına ilişkin önemli dönütler sunmaktadır.

Öte yandan bu araştırma, öğretmenlerin cebir öğretim bilgilerinin aritmetikten cebire geçiş sürecindeki temel cebir konuları kapsamında incelenmiş olması sebebiyle de önem taşımaktadır. Öğrenciler cebirle ilgili öğrenmelerini aritmetikteki öğrenmeleri ile ilişkilendirerek yapılandırmaktadırlar (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2012; Herscovics & Linchevski, 1994; Kaput, 1998; Kieran, 1992). Birçok öğrenci bu temel konuları kavramada ve bu konularla ilkökulda geliştirdikleri ön-cebirselle kavramlar arasında bağlantı kurmakta zorlanmaktadırlar (Carragher & Schliemann, 2007; Dede & Argün, 2003; Herscovics & Linchevski, 1994). Yapılan araştırmalar da öğrencilerin en çok aritmetikten cebire geçiş sürecinde zorlandıklarını ve bu süreçte oluşturdukları kavram yanılgılarının ileri cebir konularının öğreniminde de devam ettiğini göstermektedir (Booth, 1988; Dede ve Argün, 2003; Herscovics & Linchevski, 1994; MacGregor & Stacey, 1997; Rosnick, 1981, Stacey & MacGregor, 1997). Bu açıdan ele alındığında, bu araştırma kapsamında öğretmenlerin aritmetikten cebire geçiş sürecindeki temel cebir konularının

öğretimine yönelik bilgilerinin öğretim süreci esas alınarak detaylı bir şekilde ortaya konulması önemlidir. Öğretmenlerin değişken, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin bilgilerinin birbiriyle ilişkili bir şekilde bütüncül olarak öğretim süreci esas alınarak tanımlanması, matematik eğitimcilerine öğretmen eğitimi sürecinde geliştirilecek uygulamalar hakkında da önemli dönütler sağlayacaktır.

### **1.6. Sayıtlar**

Bu araştırmada kabul edilen sayıtlar şunlardır:

- Araştırmanın ders gözlem sürecindeki video kamera kaydı sırasında öğretmenler ve öğrenciler olumlu veya olumsuz olarak etkilenmemişlerdir.
- Araştırmanın görüşme sürecinde öğretmenler konu ile ilgili bilgi, deneyim ve görüşlerini samimi ve açık bir şekilde ortaya koymuşlardır.

### **1.7. Sınırlılıklar ve Sınırlandırmalar**

Araştırma aşağıda açıklanan şekilde sınırlandırılmıştır.

- Öğretmenlerin cebir öğretimi için gerekli matematiksel bilgileri 6. sınıf düzeyindeki cebirsel ifadeler, değişken, eşitlik ve denklem konuları ile sınırlandırılmıştır. Ortaokul 7. ve 8. sınıflarda bu konuların öğretiminin devam ettiği diğer cebir konuları araştırma kapsamına dâhil edilmemiştir.
- Öğretmenlerin matematik öğretimi için gerekli bilgileri alan bilgisi bileşenlerinden genel alan bilgisi ile özel alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi bileşenlerinden alana ilişkin öğrenci bilgisi ile alan ve öğretim bilgisi ile sınırlandırılmıştır. Ball ve meslektaşları'nın (2008) alan bilgisi kapsamında ele aldıkları yatay alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi kapsamında ele aldıkları program bilgisi bu çalışma kapsamında ele alınmamıştır.

Araştırma sırasında açığa çıkan sınırlılıklar aşağıda açıklanmıştır.

- Öğretmenlerin belirli konuların öğretimine ders sürecinde yer vermemesi, öğretmenin bu konularla ilgili bilgisinin incelenmesini sınırlandırmıştır. Örneğin, öğretmenlerin ders sürecinde değişken kavramının farklı anlamlarına yönelik uygulamalar yapmaması öğretmenlerin buna yönelik

bilgisinin öğretim sürecinden bağımsız olarak, görüşmelerden elde edilen verilerle açıklanmasını gerekli kılmıştır.

### 1.8. Tanımlar

**Alan Bilgisi:** Öğretmenin öğretim bilgisi gerektirmeyen salt matematik bilgisidir (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008). Bu araştırmada alan bilgisi, genel alan bilgisi ve özel alan bilgisi birleşimi olarak bir arada ele alınmıştır.

- **Genel Alan Bilgisi:** Öğretime özgü olmayan ve öğretim ortamı dışında da kullanılan matematiksel bilgi ve becerileri içermektedir.
- **Özel Alan Bilgisi:** Matematiksel bilginin farklı gösterim biçimlerini, alışılmadık çözüm yollarını, matematiksel kural ve işlemlerin açıklamalarını bilmeyi içerir. Bu bilginin “özel” olarak nitelendirilmesinin sebebi öğretime özgü olması ve öğretim ortamı dışında gereksinim duyulmamasıdır.

**Pedagojik Alan Bilgisi:** Konu alanının nasıl öğretileceği ile ilişkili sahip olunması gereken bilgidir (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008). Bu araştırmada pedagojik alan bilgisinin iki alt boyutuna odaklanılmıştır.

- **Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi:** Öğrencilerin belirli bir matematiksel konuya özgü düşünme yollarını, kavram yanılgılarını, hatalarını ve bu hatalarının nedenlerini bilmeyi içeren bilgidir.
- **Alan ve Öğretim Bilgisi:** Alan bilgisi ile öğretim bilgisini bütünleştiren bilgidir. Öğretmenlerin içeriği öğretime uygun olarak düzenleyebilmeleri, hangi yöntem ve tekniklerin kullanılacağını bilmeleri gibi bilgileri içerir.

**Değişken:** Değişkenler belirlenmiş bir kümeye ait her bir elemanı belirtir. Bir sayının rolünü üstlenen bir harf veya harflerin dizisidir (Schoenfeld & Arcavi, 1998; Akt. Dede, 2005).

**Cebirsel İfade:** En az bir bilinmeyen ve işlem içeren ifadelerdir (MEB, 2009).

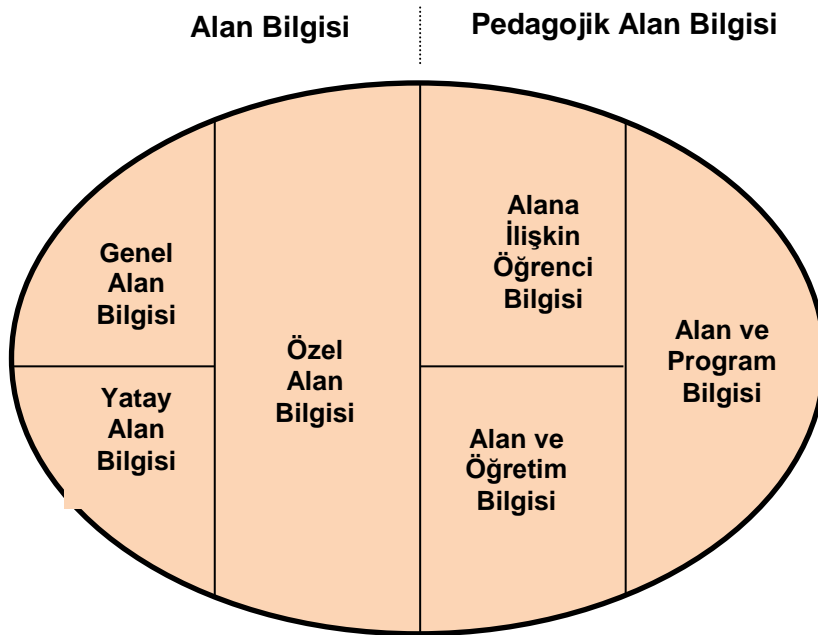
**Eşitlik ve Denklem:** Eşitlik, eşittir sembolünü içeren ve bu sembolün iki tarafının niceliksel olarak eşitliğini belirten matematiksel durumdur. İlişkisel bir anlamı ifade eder (Van De Walle, 2010). Denklem bilinmeyen içeren eşitliklerdir (MEB, 2009).

**Ortaokul Matematik Öğretmenleri:** Beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci sınıf düzeylerindeki matematik derslerini yürüten matematik öğretmenleridir.

## 1.9. Araştırmanın Kuramsal Temelleri

Araştırma kapsamında ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğrenmeye temel teşkil eden cebirsel ifadeler, değişken, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin bilgilerinin incelenmesinde Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen *Matematik Öğretimi İçin Gerekli Bilgi Alanları Modeli* temel alınmıştır. Ayrıca, sosyal yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı gözetilerek öğretmen bilgisinin öğretim uygulamaları temel alınarak tanımlanması benimsenmiştir.

Ball ve meslektaşları Shulman'ın (1986, 1987) modelinden yola çıkarak öğretmen bilgisini matematik alanı için özelleştirdikleri bir kavramsal çerçeve sunmuşlardır. Ball ve meslektaşlarının bu kavramsal çerçeve kapsamında geliştirdikleri *Matematik Öğretimi İçin Gerekli Bilgi Alanları Modeli* aşağıdaki şekilde sunulmuştur (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008; Delaney vd., 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008; Hill, Schilling & Ball, 2004) (bkz. Şekil 1.1). Bu modelde matematik öğretimi için gerekli bilgi (i) alan bilgisi ve (ii) pedagojik alan bilgisi olarak iki temel alana ayrılmıştır.



**Şekil 1.1. Matematik Öğretimi İçin Gerekli Bilgi Alanları (Ball, Thames & Phelps, 2008)**

Matematik öğretimi için *alan bilgisi* öğretmenin salt matematik bilgisidir. Alan bilgisi genel alan bilgisi, özel alan bilgisi ve yatay alan bilgisi olarak üç kategoriye ayrılmaktadır. Genel alan bilgisi öğretime özgü olmayan ve öğretim ortamı dışında da kullanılan matematiksel bilgi ve becerileri içermektedir. 1,1 ve 1,11 arasında yer

alan bir sayıyı belirlemek için gerekli matematik bilgisi genel alan bilgisi kapsamındadır. Ancak bu bilgi türüne matematik bilen diğer kişiler de sahiptir. Bu sebepten genel alan bilgisi sadece öğretime özgü değildir (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008). Özel alan bilgisi ise matematiksel bilginin farklı gösterim biçimlerini, alışılmadık çözüm yollarını, matematiksel kural ve işlemlerin açıklamalarını bilmeyi içerir. Bu bilginin “özel” olarak nitelendirilmesinin sebebi öğretim ortamı dışında gereksinim duyulmamasıdır. Özel alan bilgisi öğretmenlerin matematik öğretebilmek için sahip olması gereken bir bilgi türüdür. Kesirlerde toplama işlemi yapılırken ortak bir payda oluşturulmasının neden gerekli olduğunun bilgisi veya  $2 \div 2/3$  işleminin farklı modellerle nasıl gösterileceğinin bilgisi özel alan bilgisine örnek olarak gösterilebilir (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008). 75-18 işlemini doğru bir şekilde yapmak genel alan bilgisi ile ilişkili iken bu işlemi farklı algoritmalar kullanarak yapmak özel alan bilgisi ile ilişkilidir (Ball, Hill & Bass, 2005; Delaney vd., 2008). Öğretmenin bir matematik konusunun programdaki diğer konularla nasıl ilişkili olduğunu bilmesi ise yatay alan bilgisi olarak tanımlanmaktadır (Ball, Thames & Phelps, 2008).

*Pedagojik alan bilgisi* ise konu alanının nasıl öğretileceği ile ilişkilidir. Pedagojik alan bilgisi alana ilişkin öğrenci bilgisi, alan ve öğretim bilgisi ile program bilgisi olarak üç kategoriye ayrılmaktadır. Shulman (1986, 1987) tarafından da pedagojik alan bilgisinin öncelikli bir bileşeni olarak tanımlanan alana ilişkin öğrenci bilgisi, öğrencilerin belirli bir matematiksel konuya özgü düşünme yollarını, kavram yanılgılarını, hatalarını ve bu hatalarının nedenlerini bilmeyi içeren bilgidir. Kesirlerde toplama işlemini öğrenme sürecinde en çok ortaya çıkabilecek öğrenci hatalarını ve kavram yanılgılarını bilme veya  $8 \times 9$ 'un kaçta eşit olduğunu bulmak için öğrencilerin sıkça kullandıkları stratejileri bilme, alan ve öğrenci bilgisi kapsamındadır (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Schilling & Ball, 2004; Hill, Ball & Schilling, 2008). Alan ve öğrenci bilgisi Shulman'ın (1986) pedagojik alan bilgisi tanımındaki “öğrencilerin öğrenme ortamına getirdikleri kavram, ön kavram ve kavram yanılgılarını bilmeyi içerir” (s.9) ifadesine karşılık gelmektedir. Alan ve öğretim bilgisi ise alan bilgisi ile öğretim bilgisini bütünleştiren bilgidir. Öğretmenlerin içeriği öğretime uygun olarak düzenleyebilmeleri, hangi yöntem ve tekniklerin kullanılacağını bilmeleri gibi görevleri gerçekleştirmek için gerekli bilgidir (Ball, Thames & Phelps, 2008). Örneğin, basamak değerinin öğretiminde farklı

modellerin öğretimsel yararlarını bilme, alan ve öğretim bilgisi ile ilişkilidir (Ball, Thames & Phelps, 2008). Alan öğretimi bilgisi Shulman'ın (1986) pedagojik alan bilgisi tanımındaki "pedagojik alan bilgisi belirli bir konunun öğrenilmesini neyin kolay ya da zor bir hale getireceğini bilmeyi içerir" (s.9) ifadesine karşılık gelmektedir. Ball ve meslektaşlarının (2008), Shulman'ın tanımladığı pedagojik alan bilgisini alana ilişkin öğrenci bilgisi ve alan öğretimi bilgisi alt bileşenleri kapsamında ele aldıkları görülmektedir. Alan ve program bilgisi belirli konuların öğretimi için düzenlenmiş öğretim programının bilgisidir (Ball, Thames & Phelps, 2008). Shulman'ın (1986, 1987) alan ve pedagojik alan bilgisinden ayrı bir bilgi alanı olarak tanımladığı program bilgisi Ball ve meslektaşları (2008) tarafından pedagojik alan bilgisi içerisine dâhil edilmiştir.

Bu araştırmada, Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen ve alan bilgisini pedagojik alan bilgisiyle ilişkilendiren bir çerçeve sunan *Matematik Öğretimi İçin Gerekli Bilgi Alanları Modeli* temel alınmıştır. Bu kapsamda öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan bilgileri, genel alan bilgisi ve özel alan bilgisi birleşimi olarak bir arada ele alınmıştır. Bal ve meslektaşları da bu iki bilgi boyutunu kuramsal açıdan tanımlamakla birlikte, sınıf içi uygulamalarda bu iki bilgi boyutunun ayrı olarak ölçülmesinde sıkıntılar (Ball & Rowan, 2004; Ball, Thames & Phelps, 2008) olduğunu belirtmektedir. Öğretim süreci düşünüldüğünde de öğretmenlerin belirli öğretim durumlarına yönelik alan bilgilerinin bütüncül olarak ele alınmasının öğretmenlerin matematiksel alan bilgilerini daha anlamlı ve anlaşılır bir şekilde ortaya çıkaracağı düşünülmüştür. Bu sebeple bu araştırmada, alan bilgisi, genel alan bilgisi ve özel alan bilgisi alt boyutlarına ayrılmayarak alan bilgisi kapsamında bütüncül olarak incelenmiştir. Bununla birlikte yatay alan bilgisi ile alan ve program bilgisi boyutları, bu boyutların ayrı ölçülmesinin zor olmasından ve derinlikli analiz yapabilmek için belirli boyutlara odaklanılmasının uygun olacağı düşünüldüğünden çalışma kapsamında ele alınmamıştır. Bu kapsamda öğretmenlerin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin alan bilgileri genel alan bilgisi ve özel alan bilgisi boyutlarının birleşimi olarak bir arada incelenmiştir. Pedagojik alan bilgileri ise alana ilişkin öğrenci bilgisi ile alan ve öğretim bilgisi kapsamında incelenmiştir.

Ball ve meslektaşları da öğretmen bilgisinin öğretim sürecinden bağımsız olarak değerlendirilmesinin yetersiz olduğunu vurgulamaktadırlar (Ball, Thames & Phelps,

2008). Bu durum göz önünde bulundurulduğunda, öğretmen bilgisinin sınıf içi uygulamalar kapsamında incelenmesinin önemli olduğu görülmektedir. Bu bağlamda bu araştırmada, öğretmenlerin *Matematik Öğretimi İçin Gerekli Bilgi Alanları Modeli* kapsamında ele alınmış cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgileri *Sosyal Yapılandırmacı Kuram* perspektifi temel alınarak incelenmiştir.

Sosyal yapılandırmacı kuram temelinde ele alındığında öğretmen bilgisi sürekli olarak gelişen bir yapıya sahiptir ve öğretim sürecinde sosyal olarak yapılandırılır (Calderhead, 1996). Öğretmen bilgisinin yapılanması öğretmenlerin öğretim süreci (öğrenciler, öğretim materyalleri vb.) ile etkileşimleri sonucunda gerçekleşir. Bu temelde sosyal yapılandırmacı kuram öğretmen bilgisinin anlaşılmasında sosyal bağlama vurgu yapar. Bu yaklaşıma göre öğretmen bilgisi sınıftaki öğretim uygulamaları sürecinde en iyi şekilde incelenebilir ve bu sayede de öğretmenlerin bilgileri öğretim uygulamaları esas alınarak detaylı olarak yorumlanabilir (Adams, 2006; Cobb, 1994; Cobb & Yackel, 1996; Ben-Peretz, 2011; Calderhead, 1996; Kim, 2001; Palincsar, 1998; Prawat, & Floden, 1994; Steele & Rogers, 2012).

## 2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Araştırmanın bu bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda öğrencilerin temel cebir kavramlarını öğrenme süreci ve bu sürece yönelik öğretim stratejileri ile ilişkili araştırmalara yer verilmiştir. Ardından öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin bilgilerini inceleyen ülkemizde ve uluslararası alan yazında yer alan araştırmalar sunulmuştur. Bu kapsamda ikinci kısımda öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan bilgilerinin incelendiği araştırmalar, üçüncü kısımda ise öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelendiği araştırmalara yer verilmiştir.

### 2.1. Cebir Öğrenme ve Öğretimi

Öğrencilerin cebir öğrenme sürecini inceleyen araştırmalar, öğrencilerin cebirsel ilişkileri ve cebir için temel kavramları öğrenme sürecinde zorluk yaşadıklarını, bu sebeple de birçok hata yaptıklarını ve kavram yanılgısı oluşturduklarını göstermektedir (Booth, 1988; Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007; Dede & Argün, 2003; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1992; 2007; MacGregor & Stacey, 1997; Rosnick, 1981; Yıldız, Çiftçi, Şengil-Akar & Sezer, 2015). Öğrencilerin yaşadıkları bu zorlukların temelinde değişken ve eşitlik kavramlarına ilişkin öğrenmeleri yer almaktadır. Bu kavramların anlaşılması aritmetikten cebire geçişte ve cebir konularının öğretiminde temel olarak görülmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin değişken ve eşitlik kavramına ilişkin öğrenmeleri cebirsel ifade ve denklem kavramlarını nasıl anlamlandırdıklarını da etkilemektedir (Booth, 1988; Kieran, 2007; Kuchemann, 1978, MacGregor & Stacey, 1997; Usiskin, 1999).

Değişkenler belirlenmiş bir kümeye ait her bir elemanı belirtir. Bir sayının rolünü üstlenen bir harf veya harflerin dizisidir (Schoenfeld & Arcavi, 1998; Akt. Dede, 2005). Herscovics ve Linchevski de (1994) değişkeni “bir veya daha fazla sayıyı belirtmek için kullanılan harf sembolleri” olarak tanımlamıştır (Herscovics & Linchevski, 1994, s.33). Bu tanımlara göre  $x=4$  denklemindeki  $x$ 'e bir değişken olarak bakılabilir. Çünkü  $\{4\}$ , belirlenmiş kümenin herhangi bir elemanıdır (Dede, 2005, s. 141). En temelde değişkenin bilinmeyen ( $5x - 9 = 91$ ), değişen nicelikler ( $y - 9x = 2$ ) ve genelleştirilmiş sayı ( $a + b = b + a$ ) olarak kullanımları mevcuttur (Philipp, 1992) Araştırmalar, öğrencilerin değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerini anlamlandırmada ve farklı anlamları arasında ilişkilendirme yapmakta



zorlandıklarını ve bu sebeple de kavram yanılgıları geliştirdiklerini göstermektedir (Knuth vd., 2005; Stacey & MacGregor, 1997; Warren, 2003; Stephens, 2005).

Öğrencilerin değişken kavramına ilişkin geliştirdikleri kavram yanılgılarından biri değişkeni sayısal bir değer olarak değil, bir nesne olarak düşünmeleridir (Booth, 1988; Kuchemann, 1978; MacGregor & Stacey, 1997; Perso, 1992; Rosnick, 1981). Öğrenciler  $5y$  gibi bir cebirsel ifadedeki  $y$  değişkenini,  $y$  ile başlayan bir nesnenin kısaltması olarak algılamaktadırlar (Booth, 1988). Rosnick (1981) Massachusetts Üniversitesi'nde 150 mühendislik fakültesi öğrencisi ile yaptığı araştırmasında, öğrencilerden  $S$  (öğrencilerin sayısı) ve  $P$  (profesörlerin sayısı) değişkenlerini kullanarak "Üniversitedeki öğrencilerin sayısı profesörlerin sayısının altı katıdır." ifadesini oluşturmalarını istemiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin çoğunun  $6S$  ifadesini katsayısı daha büyük olarak düşündükleri için  $6S=P$  şeklinde bir eşitlik oluşturdukları belirlenmiştir. Bunun yanında öğrenciler  $6S=P$  eşitliğini,  $S$  ve  $P$  harf sembollerini öğrencileri ve profesörleri temsil eden bir harf olarak düşünerek, "1 profesöre 6 öğrenci düşmektedir" şeklinde yorumlamışlardır. Kuchemann (1978) ise 12-15 yaşlarındaki öğrenciler ile gerçekleştirdiği araştırmasında öğrencilerden  $7a + 3b$  cebirsel ifadesini açıklamalarını istemiştir. Öğrenciler, bu cebirsel ifadedeki  $a$  değişkenini elmaların (apples) ve  $b$  değişkenini ise muzların (bananas) kısaltması olarak belirtmişlerdir.

Booth (1988) araştırmasında öğrencilerin yaşadıkları bu zorluğun, değişken kavramının anlamını kavrayamamalarından ve aritmetikteki hatalı ve eksik öğrenmelerinden kaynaklandığını belirtmiştir. Örneğin, aritmetikte " $m$ " metrenin kısaltmasını ifade etmekte ve  $3m$ , "3 metre" olarak ifade edilmektedir. Cebirde ise harfler sayısal bir değeri (değişken) belirtmektedir. Harf sembollerinin aritmetikteki kullanım şekli, öğrencilerin cebirde kullanılan harf sembollerini nesnelere kısaltması olarak algılanmasında önemli bir etkidir (Booth, 1988). Bununla birlikte, öğretmenlerin cebirsel ifadelerde benzer ve benzer olmayan terimleri ayırt etmede kullandıkları *elma-armut (meyve-salata)* yaklaşımı (elmaları kendi arasında armutları kendi arasında toplama veya çıkarma) öğrencilerin değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerini sayısal bir nicelik olarak değil, nesnelere kısaltması olarak düşünmelerine sebep olabilmektedir (Booth, 1988; Tirosh, Even & Robinson, 1998).  $2a + 5b$  cebirsel ifadesinin 2 elma (apples) ve 5 muz (bananas) şeklinde gösterilmesi bu duruma örnek gösterilebilir. Ayrıca bu

gösterim, öğrencilerin “2 elma artı 5 muz = 7elma-ve-muz” şeklinde düşünerek  $2a + 5b = 7ab$  şeklinde hata yapmalarına da neden olmaktadır (Booth, 1988).

Öğrenciler değişkenin farklı anlamlarını kavramakta da zorlanmaktadırlar. Değişkeni sadece bilinmeyen olarak düşünmektedirler (Booth, 1988). Değişkenleri temsil eden harf sembollerinin  $x + y = y + x$  eşitliğindeki gibi herhangi bir değer (genelleştirilmiş sayı) de alabileceğini değil,  $x + 3 = 8$  eşitliğindeki gibi tek bir değer (bilinmeyen) alabileceğini düşünmektedirler (Kuchemann, 1978). Bu durumla ilişkili olarak, değişkenlerin genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanıldığı  $x + 2 = 2 + x$  eşitliğini  $x$ 'in tek bir değer alacağını düşünerek çözmeye çalışmaktadırlar (Akgün & Özdemir, 2006). Kuchemann'ın (1978) araştırmasında da benzer şekilde “ $p$ ,  $q$ 'dan büyük bir doğal sayı ise  $p + q = 12$  eşitliği için ne söylersiniz?” sorusunda çoğu öğrenci  $p$ 'nin tek bir değer alacağını düşünmüş ve  $p$ 'nin 7'ye eşit olacağını belirtmişlerdir. “ $2n$  ve  $n + 2$  cebirsel ifadelerinden hangisini daha büyüktür?” sorusunda ise öğrenciler  $n$ 'ye belirli değerler vererek sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin verilen cebirsel ifadelerden hangisinin daha büyük olduğunu belirlemeleri için aralarındaki ilişkinin  $n$  değişkeninin alacağı farklı değerlere göre değişiklik göstereceğini bilmeleri gerekmektedir ( $n \leq 2$  için  $2n \leq n + 2$  ve  $n > 2$  için  $2n > n + 2$ ) (Kuchemann, 1978). Öğrenciler değişken kavramını anlamlandıramadıkları için  $x + y = y + z$  eşitliğinin  $x = z$  olamayacağı için ve benzer şekilde  $x + y + z = x + p + z$  eşitliğinin  $y = p$  olamayacağı için doğru olmayacağını düşünmektedirler (Booth, 1988).

Araştırmalar değişken kavramının öğretiminde kavramın anlamına ilişkin farklı gösterimlerin kullanımının gerekliliğine dikkat çekmektedir (Knuth vd., 2005; Dede, 2004; MacGregor & Price, 1999; Stacey & MacGregor, 1997; Stephens, 2005). Stephens (2005) çalışmasında farklı bağlamlar sunan problemler yardımıyla değişkenin öğretimi üzerinde durmuştur. Araştırmacının bu süreçte kullandığı problem şu şekildedir. “Ricardo'nun 8 evcil faresi vardır. Bu fareler birbiryle bağlantılı 2 kafeste durmakta ve dolayısıyla kafesler arasında yer değiştirebilmektedirler. Kafeslerden biri mavi diğeri ise yeşil renktedir. Farelerin bu iki kafeste yer alabileceği tüm durumları gösteriniz.” Araştırmacı farklı bağlamlar sunan bu tarz problemlerin öğrencilerin farklı gösterimler (tablo oluşturma, grafik çizme vb.) kullanarak değişken kavramını anlamaları için fırsatlar sunduğunu ifade etmiştir. Araştırma sonucunda, öğrencilerin bu gösterimlerden sonra değişkeni

kullandıkları farklı sembolik gösterimleri ( $g + b = 8$ ,  $b + g = 8$ ,  $b = 8 - g$ ,  $g = 8 - b$ ) oluşturmalarının değişken kavramını anlamalarını desteklediği gözlenmiştir.

Cebirsel ifade en az bir bilinmeyen ve işlem içeren ifadeler olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2009). Bununla birlikte öğrencilerin cebirsel ifadeyi anlamlandırabilmeleri için cebirsel ifadenin işlemsel yapısını açıklayan tanımlamalara ek olarak cebirsel ifadenin yapısal özelliğine karşılık gelen anlamını bilmeleri önemlidir (Pomerantsev & Korostevela, 2003). Öğrenciler 3a şeklindeki bir cebirsel ifadenin *bir sayının 3 katını* temsil ettiğini bilmelidirler. Öğrenciler tarafından bu durumun anlaşılması farklı öğrenme zorluklarına yol açmaktadır (Herscovics & Linchevski, 1994). Örneğin, öğrenciler cebirsel ifadelerde cebirsel ifadedeki terimleri birleştirme veya sonlandırma eğilimi göstermektedirler (Booth, 1988; Collis, 1975; Davis, 1975). Cebirsel ifadeleri tamamlanmamış olarak düşündükleri için  $5x + 8$  cebirsel ifadesini  $13x$  şeklinde birleştirmektedirler (Tirosh, Even & Robinson, 1998).  $2 + 3$  ifadesini “3’ten 2 fazla bir sayı” (*sonuç*) olarak kabul etmemekte ve “2’ye 3 ekle” (*süreç*) işleminin gerçekleştirilmesi olarak düşünmektedirler. Cebir öncesi öğrenme sürecinde bu ayrımın fark edilmemesi, öğrencilerin süreç-sonuç ikilemini yaşamasına neden olmaktadır (Booth, 1988). Bu durumla ilişkili olarak da öğrenciler,  $3x + 2$  şeklindeki cebirsel ifadenin bir süreci ( $x$ ’i 3 ile çarp ve 2 ekle) ve aynı zamanda bir sonucu ( $x$ ’in 3 katından 2 fazla bir sayı) belirttiğini kabul etmede zorluk yaşamaktadırlar.  $3x + 2$  cebirsel ifadesini sonuçlandırılması gereken bir işlem olarak düşündükleri için  $5x$  olarak birleştirmektedirler (Tirosh, Even & Robinson, 1998). Booth (1988) öğrencilerin “+” ve “=” sembollerini gerçekleştirilmesi gereken bir eylem olarak yorumlamalarının da bu durum üzerinde etkili olduğunu belirtmiştir. Öğrenciler “+” işaretini “işlemi gerçekleştirmek” ve “=” işaretini ise “cevabı yazmak” ile eşdeğer olarak düşündükleri için cebirsel ifadedeki terimleri birleştirmektedirler.

Birçok öğrenci ise cebirsel gösterimden oluşan bir çözümü anlamlandıramamakta ve sayısal bir çözüm aramaktadır. Dolayısıyla doğru cevaba ulaşırsalar bile bu ifadeyi uygun cevap olarak nitelendirmemektedirler (Booth, 1988). Örneğin,  $3a$  veya  $a + 3$  şeklindeki cebirsel gösterimi anlamlandıramamakta ve cebirsel ifadeye eşit işareti ile bir sayı yazılması gerektiğini düşünmektedirler (Kieran, 1981).  $5n$  cebirsel ifadesini  $n$ ’nin değeri bilinmediği için uygun olmayan bir cevap olarak

belirtmektedirler. Benzer şekilde  $x + 3$  cebirsel ifadesinin  $x$ 'in değeri bilinmediği için, bir sonuç olarak kabul edilemeyeceğini düşünmektedirler (Booth, 1988).

Eşitlik kavramının öğrenimini inceleyen, öğrencilerin eşit işaretini *ilişkisel (bir durum gösteren)* bir sembol olarak değil, eylem belirten *işlemsel* bir sembol olarak yorumladıklarını göstermektedir (Barody & Ginsburg, 1983; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Jones, Inglis, Gilmore & Dowens, 2012; Kieran, 1981; Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil, Weinberg & Stephens, 2008; Vance, 1998; Yaman, Toluk & Olkun, 2003). Eşit işaretini, eşitliğin her iki tarafının niceliksel olarak aynı olduğu ve çift yönlü bir eşitliği belirten ilişkisel bir sembol olarak değil, "cevabı yazmak" ile eşdeğer görmektedirler. Eşit işaretini soldan sağa doğru eylem belirten bir sembol olarak düşündükleri için sayılar ve işlemlerin "=" işaretinin solunda, sonucun da "=" işaretinin sağında olması gerektiğini düşünmektedirler (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Kieran, 1981; Yaman, Toluk & Olkun, 2003). Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2010) öğrencilerin eşit işaretinin ilişkisel anlamını kavradıklarında problem çözme sürecinde de ilişkisel düşünceyi kullanabildiklerini belirtmiştir. *İlişkisel düşünmeyi* ise eşitliğin iki tarafını nicelik olarak hesaplamak yerine sayısal ilişkileri kullanmayı gerektiren bir süreç olarak tanımlamışlardır.

Falkner, Levi ve Carpenter (1999) 145 altıncı sınıf ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında öğrencilerin eşitlik kavramı hakkındaki anlamalarını incelemiştir. Öğrencilere  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  eşitliğinde kutu içerisine hangi sayı yazılması gerektiği sorulmuştur. Araştırma sonucunda, öğrencilerin çoğunun kutu yerine 12 veya 17 yazılması gerektiğini düşündükleri görülmüştür. Eşitlikte eşit işaretinden sonra cevap geleceğini düşünen öğrenciler kutu yerine 12, eşitlikteki bütün sayıların toplanacağını ( $8 + 4 = 12 + 5 = 17$ ) düşünen öğrenciler ise kutu yerine 17 yazmışlardır. Araştırmacılar öğrencilerin eşit işaretini ilişkisel bir sembol olarak görmelerini sağlayacak sorular kullanmanın gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Bu kapsamda  $\blacksquare = 9 + 5$ ,  $7 + 8 = \blacksquare + 10$  ve  $7 + \blacksquare = 6 + 4$  gibi soruların kullanılmasını önermektedirler. Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2010) da eşitlik kavramının öğretiminde  $3 + 7 = 7 + 3$ ,  $\blacksquare + 4 = 8$  ve  $4 + 5 = \blacksquare - 1$  şeklinde *sayı cümlelerinin* kullanılması gerekliliği üzerinde durmuştur. Bu gösterimlerin öğrencilerin denklem kavramını anlamalarında da ön koşul olduğunu ifade etmişlerdir.

Araştırmalar öğrencilerin eşitlik ve denklem kavramlarını anlamaları arasında güçlü bir ilişki olduğunu göstermektedir (Kieran, 1981). Denklemlerin yapısal özelliğini anlamak eşit işaretinin ilişkisel anlamını anlamak ile doğrudan ilişkilidir. Öğrenciler “=” işaretinin çift yönlü bir eşitliği ifade ettiğini bilmelidirler (Kieran, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005) Denklemde eşitliğin sonuçtan ziyade ilişkisel bir anlamı temsil ettiğinin vurgulanması, öğrencilerin denklemleri kavraması açısından önemlidir. Eşitlik kavramının ilişkisel anlamı denklem çözümünü adım adım yürütülen bir süreç olarak değil, bir bütün olarak yorumlamayı kolaylaştırır (Kieran, 1981).

Öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin eksik ve yanlış öğrenmeleri, denklemleri çözme sürecini önemli ölçüde etkilemektedir. Eşit işaretinden sonra cevabın gelmesi gerektiği düşüncesi denklem çözümlerinde yanlış gösterimleri kullanmalarına neden olmaktadır. Örneğin,  $3x(14 + 36) = 14 + 36 = 50x3 = 150$  şeklindeki hatalı gösterimleri kullanan öğrenciler, bu hatayı denklem çözme sürecinde de devam ettirmektedirler (Kieran, 1981). Bilinmeyen eşitliğin sol tarafında yer aldığı denklemleri (örn.  $3x + 5 = 26$ ), bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında ve her iki tarafında olan denklemlere (örn.  $3x + 5 = 2x + 2$  veya  $27 = 4x + 3$ ) göre benimsemekte ve çözmekte zorlanmaktadır. Eşitlik kavramının anlaşılması denklem çözümlerinde kullanılan stratejilerin (eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması, ters işlem) anlaşılmasının ve bu stratejiler kullanırken hatalar yapılmasının da temel nedenidir (Kieran, 1981). Kieran (1981) denklem öğretimine geçmeden öğrencilerin eşit işaretinin ilişkisel anlamını kavramalarına olanak tanıyacak öğretim materyalleri kullanılması gerektiği üzerinde durmaktadır.  $7x^2 - 3 = 5x^2 + 1$ ,  $3x7 + 3 = 25 - 1$  şeklinde sayı cümleleri kullanılmasının denklem öğretimine geçişte önemli olduğunu belirtmektedir.

## **2.2. Öğretmenlerin Cebir Öğretimine İlişkin Alan Bilgisi**

Öğretmen yeterliklerini konu alan çalışmalar öğretmenlerin alan bilgilerinin derinliğinin yüksek kaliteli ve etkili öğretimi sağlamada anahtar niteliğinde olduğuna dikkat çekmektedir (Ball, 1990; Lee, 2011; Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002; Neubrand vd., 2009; Shulman 1986,1987; Wilmot, 2008). Öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan bilgileri de öğretim uygulamalarının etkililiğini ve bu durumla paralel olarak da öğrenci öğrenmelerini önemli ölçüde

etkilemektedir. Bu durum öğretmenlerin cebir öğretimine yönelik alan bilgilerinin güçlü olmasını gerektirmektedir (Howell, 2012; McCrory vd., 2012; Stephens, 2004; Welder & Simonsen, 2011). Öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan bilgilerinin incelendiği çalışmalarda, cebire ve cebirsel düşünmeye yönelik bilgileri (Attorps, 2009; Stephens, 2008; Stump & Bishop, 2002) ile cebir konularına ve kavramlarına (cebirselle ifadeler, harf sembolleri, denklemler, örüntüler ve ilişkiler, fonksiyon gibi) (Boz, 2007; Caswell, 2009; Huang & Kulm, 2012, Li, 2007; Stephens, 2006; Welder & Simonsen, 2011) yönelik alan bilgilerine odaklanılmıştır.

İlgili alan yazına bakıldığında, yapılan çalışmalar öğretmenlerin cebiri tanımlamada bilgi eksiklikleri olduğunu göstermektedir (Dooren, Verschaffel & Onghena; 2002; Stephens, 2008; Stump & Bishop; 2002; Walkoe, 2010). Bu alanda yapılan çalışmalardan biri Stephens (2008) tarafından gerçekleştirilmiştir. Stephens (2008) Amerika'da bir eğitim fakültesinde öğrenim görmekte olan 30 öğretmen adayı ile gerçekleştirdiği çalışmasında öğretmen adaylarının cebiri nasıl tanımladıklarını incelemiştir. Araştırmacı öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış sorular içeren bireysel görüşmeler gerçekleştirmiştir. Bu görüşmede öğretmen adaylarına "Daha önce hiç duymamış birine cebiri nasıl tanımlarsınız?" şeklindeki sözel sorular ve verilen matematiksel ifadelerdeki (örneğin,  $37 + 54 = \blacksquare + 55$ ) cebirsel durumlara yönelik sorular yöneltilmiştir. Öğretmenlere verilen matematiksel ifadelerin cebirsel olup olmadığı sorulmuştur. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının cebir tanımlarının sembol ve harf kullanımı ile sınırlı olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının cebiri bir düşünme yolu olarak değil işlemlerin kullanıldığı bir çözüm yöntemi olarak gördükleri saptanmıştır. Öğretmen adayları verilen matematiksel ifadeleri içerisinde değişken, harf veya bilinmeyen olma durumuna göre cebirsel veya cebirsel olmayan durumlar olarak tanımlamışlardır. Sadece iki öğretmen adayı matematiksel durumların ilişkisel özelliklerini göz önünde bulundurdukları bir sınıflandırmadan bahsetmişlerdir. Stephens (2008) bu durumun öğretmenlerin cebirin diğer konularındaki yaklaşımlarını da etkilediğine dikkat çekmiştir. Öğretmenlerin cebiri bir sıra işlemin yapıldığı bir süreç olarak değil, bir düşünme yolu olarak görmelerinin alan bilgilerinin gelişimi için önemli olduğunu belirtmiştir.

Bu alanda Stumps ve Bishop (2002) ile Attorps (2009) tarafından yapılan çalışmaların sonuçları da Stephens'in (2008) çalışmasından elde edilen sonuçlar

ile benzerlik göstermektedir. Stumps ve Bishop (2002) çalışmalarına katılan 30 öğretmen adayının cebiri sembol ve harf kullanımı ile problem çözme odaklı tanımladıklarını ve cebirsel ilişkilerden bahsetmediklerini tespit etmişlerdir. Araştırmacılar öğretmenlerin bu yöndeki yaklaşımlarının ve bilgi eksikliklerinin ders sürecindeki öğretim uygulamalarını düzenlemede önemli bir rol oynadığını vurgulamış ve bu kapsamda yapılacak çalışmaların gerekliliğine dikkat çekmiştir. Attrops (2005) ise 10 matematik öğretmenin derslerini gözlemlemiş ve onlarla bireysel görüşmeler yapmıştır. Çalışmanın sonuçları öğretmenlerin cebiri kural ve işlemlerin uygulanması ile sınırlı olarak tanımladıklarını göstermiştir. Öğretmenlerin tanımlarında cebirsel işlemlerde sadeleştirme ve problem çözmeye vurgu yaptıkları görülmüştür. Araştırmacı, öğretmenlerin sınıflarında cebirsel düşünmeyi destekleyebilmeleri için kendilerinin cebiri bir düşünme yolu olarak görmelerinin gerekliliğine dikkat çekmiştir. Öğretmenlerin cebire ve cebirsel düşünmeye yönelik bilgilerinin incelendiği bu çalışmalar, bilgi eksikliklerinin cebir konularındaki alan bilgileri üzerinde etkili olduğunu göstermektedir.

Öğretmenlerin cebir konularındaki alan bilgilerinin incelendiği araştırmaların bulguları da cebiri bir düşünme yolu olarak görmeyen öğretmenlerin cebirsel ifadeler, denklem gibi cebir konularındaki kavram ve süreçlere ilişkin cebirsel ilişkileri kullanmadıklarını göstermektedir. Dolayısıyla, çoğunlukla işlemsel bilgilere odaklanmakta ve bu işlemsel süreçlere ilişkin kavramsal açıklamalar yapamamaktadırlar (Agarwal, 2006; Black, 2007; Caswell, 2009; Welder, 2007; Welder & Simonsen, 2011). Bu alanda Black (2007) tarafından yapılan araştırmada bir mesleki gelişim çalışması öncesinde 9 farklı okulda görev yapan 67 matematik öğretmenin cebir öğretimine ilişkin alan bilgileri Cebir Alan Bilgisi Testi kullanarak belirlenmiştir. Bu test genel cebir bilgisi, fonksiyon, cebirsel ifadeler, denklem çözme konularına ilişkin 10 adet çoktan seçmeli ve açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Araştırmada alan bilgisinin daha derinlemesine incelenebilmesi için öğretmenlerden çoktan seçmeli sorulara yönelik cevaplarının gerekçelerini açıklamaları istenmiştir. Sonuçlar öğretmenlerin cebir konularına yönelik derin bir alan bilgisine sahip olmadıklarını göstermiştir. Öğretmenler cebirsel ifadeler ve denklem çözümü konularında çoğunlukla işlemsel bilgilere sahiptirler. Öğretmenlerin bu konulara yönelik kavramsal bilgilerinin sınırlı düzeyde olduğu belirlenmiştir. Ayrıca öğretmenlerin cebirsel ifadeler ile işlemlerde ve

denklem çözümünde farklı gösterimler ve çözüm yolları kullanmadıkları, işlemsel süreçlerin altında yatan anlamlara ve nedenlere ilişkin kavramsal açıklamalarda bulunmadıkları saptanmıştır. Örneğin, öğretmenler verilen bir denklemdeki cebirsel ilişkileri açıklamada zorlanmışlardır. Caswell (2009) de benzer şekilde Colifornia'da meslekte ilk iki yılı içerisinde görev yapan 30 ortaokul matematik öğretmenin temel cebir konularına yönelik alan bilgilerini çoktan seçmeli sorular kullanarak belirlemiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin örüntüler ve ilişkiler, cebirsel ifadeler, denklem çözümü gibi temel cebir konularına yönelik önemli bilgi eksiklikleri olduğu saptanmıştır.

Öğretmenlerin cebir konularındaki (cebirsel ifadeler, denklemler, doğru grafikleri, fonksiyonlar gibi) alan bilgilerinin incelendiği araştırmalara bakıldığında bu konuların tamamının birlikte incelendiği çalışmaların çoğunlukta olduğu görülmektedir (Agarwal, 2006; Black, 2007; Caswell, 2009; Haciomeroglu, 2006; Welder & Simonsen, 2011). Cebir konuları içerisinde ise fonksiyon konusundaki öğretmen bilgisinin incelendiği çalışmalar çoğunluktadır (Agarwal 2006; Even 1993; Haciomeroglu, 2006; Karahasan 2010). Bu alanda yapılan bir çalışma Even (1993) tarafından gerçekleştirilmiştir. Even (1993) matematik öğretmen adaylarının fonksiyon konusundaki alan bilgileri ile pedagojik alan bilgilerini incelemiştir. Amerika'da 162 son sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilen çalışmada öğretmen adaylarının alan bilgileri açık uçlu bir form ve görüşmelerle saptanmıştır. İlk aşamada öğretmen adaylarından verilen formdaki açık uçlu soruları yanıtlamaları istenmiştir. İkinci aşamada ise öğretmen adaylarına yöneltilen sorular ile alan bilgilerine ilişkin daha detaylı bilgi sahibi olunması amaçlanmıştır. Ayrıca bu görüşmede öğretmen adaylarının verdiği yanıtları detaylandırmaya yönelik de sorular yöneltilmiştir. Çalışmanın sonucu öğretmen adaylarının fonksiyon kavramının anlamına ilişkin önemli bilgi eksiklikleri olduğunu göstermiştir. Az sayıda öğretmen adayının fonksiyon tanımındaki kavramları açıklayabildiği belirlenmiştir. Araştırmacı öğretmenlerin alan bilgisinin kuvvetli olması gerektiğini vurgulamış; ancak alan bilgisinin tek başına yeterli olmadığını ve bu bilgiyi öğretim ortamında kullanabilecekleri pedagojik bilgi birikimine sahip olmalarını gerektiğini ifade etmiştir.

İlgili alan yazına bakıldığında öğretmenlerin değişken konusunun öğretime ilişkin alan bilgisinin çoğunlukla denklem çözümü, doğru grafikleri ve fonksiyonlar gibi



konulardaki öğretmen bilgisi ile bir arada incelendiği görülmektedir (Huang & Kulm, 2012; Welder & Simonsen, 2011). Bu çalışmalar matematik öğretmenlerinin değişken olarak harf sembollerini ezbere kullandıklarını, değişken kavramının matematiksel anlamına ve kullanımına yönelik bilgilerinin sınırlı olduğunu ortaya koymaktadır. Değişken konusundaki öğretmen bilgisini ayrı olarak inceleyen araştırmaların sınırlı sayıda olduğu söylenebilir. Bu alanda Türkiye’de Boz (2007) tarafından gerçekleştirilen çalışmada üç farklı üniversitede okuyan 184 matematik öğretmen adayının değişkenlerin kullanımı ile ilgili bilgileri incelenmiştir. Bu kapsamda öğretmen adaylarından anket yolu ile veriler toplanmıştır. Ankete katılan öğretmen adaylarının arasından 10 kişi ile mülakat gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının değişkenin bilinmeyen olarak kullanıldığı durumlarda zorlanmadıkları ancak değişkenlerin genelleştirilmiş sayı ve değişen nicelikler olarak kullanımında zorlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının değişken kavramının kullanımını gerektiren işlemleri kolaylıkla yapabildikleri, ancak değişken kavramının anlamına ilişkin bilgi eksiklikleri bulunduğu görülmüştür.

Öğretmenlerin cebirsel ifadeler konusundaki alan bilgilerinin incelendiği bir araştırma ise Pomerantsev ve Korosteleva (2003) tarafından Kaliforniya Eyalet Üniversitesi’nde okuyan 366 öğretmen adayıyla yapılmıştır. Öğretmen adaylarının cebirsel ifadelerle ilişkin anlamalarını belirlemek amacıyla 10 adet çoktan seçmeli ve 4 adet açık uçlu soru içeren test kullanılmıştır. Araştırmanın bulguları, öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler konusunda yapılan işlemlerin altında yatan anlamaları açıklamada zorlandıklarını ve cebirsel ifadeler ile işlemlerde hata yaptıklarını göstermiştir. Öğretmen adayları  $4x^2-9y^2$  cebirsel ifadesini açıklarken  $x$  ve  $y$  değişkenlerinin farklı sayı değerlerine eşit olma durumuna odaklanmışlardır.  $x$  ve  $y$  değişkenlerinin aynı sayı değerine eşit olabileceğinden bahsetmemişlerdir. Bununla birlikte cebirsel ifadelerde sadeleştirme yaparken değişkenlerin katsayılarını ve işlem sembollerini dikkate almadan hatalı sadeleştirmeler yapmışlardır. Araştırmacılar bu durumun öğretmen adaylarının cebirsel ifadelerde değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin anlamına ilişkin bilgi eksikliklerinden kaynaklandığını belirtmiştir.

Eşitlik ve denklem kavramına ilişkin öğretmen bilgisinin incelendiği araştırmalar ise öğretmenlerin eşitlik ve denklem kavramının matematiksel anlamına yönelik

bilgilerinin sınırlı olduğunu ortaya koymaktadır (Attorps, 2003; Clement, Narode & Rosnick; 1981; Li, Stephens, 2004, 2006; Prediger, 2010). Bu alanda Stephens (2006) tarafından yapılan araştırmada 30 matematik öğretmen adayının eşitlik kavramı ve ilişkisel düşünmeye yönelik bilgileri incelenmiştir. Bu kapsamda öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde eşitlik ve ilişkisel düşünmeyi içeren 5 farklı matematiksel duruma yönelik sorular yöneltilmiştir. Bir matematik öğretmenin bu matematiksel durumları hangi amaçla kullanabileceği sorulmuştur. Örneğin,  $3 + 4 = 7$  eşitliğindeki “=” sembolünün anlamı nedir? (Durum 1) ve  $16 + 5 = 31$  ise  $16 + 5 - 9 = 31 - 9$  doğru mudur? (Durum 2) sorularını öğretmenlerin hangi amaçla kullanabileceği sorulmuştur. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlardan eşitlik kavramı ve ilişkisel düşünmeye yönelik farkındalıkları ve bilgileri belirlenmiştir. Araştırma sonucunda, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının eşitlik kavramının anlamı ve eşitlik kavramına yönelik ilişkisel düşünme hakkında bilgi sahibi oldukları belirlenmiştir. Ancak eşitlik kavramını sembol kullanımını esas alarak açıklayan ve ilişkisel düşünmeden bahsetmeyen öğretmen adaylarının sayısının az olmadığı görülmüştür. Bunun yanında öğretmen adaylarının eşitlik kavramının ilişkisel anlamının farkında oldukları; ancak bunu bir düşünme yolu olarak değil bir çözüm yolu olarak gördükleri belirlenmiştir. Araştırmacı bu durumun öğretmen adaylarının bu yöndeki bilgilerinin derinlemesine olmadığını gösterdiğini belirtmiştir. Stephens (2006) bu araştırmaya istekli öğretmen adaylarının katıldıklarını vurgulamış ve bu durumun alanda yapılan diğer araştırma sonuçlarına göre daha olumlu bulgular elde edilmesinde etkili olabileceğini ifade etmiştir.

Attorps (2003) tarafından gerçekleştirilen araştırmada ise 10 matematik öğretmenin denklem kavramına ilişkin alan bilgileri incelenmiştir. Nitel araştırma desenlerinden olgu bilim deseninin kullanıldığı çalışmanın verileri anket ve görüşme yardımıyla toplanmıştır. Ankette öğretmenlere 18 matematiksel ifade verilmiş (ör.  $e^{x+y}=1$ ,  $x^2-5x-10$ ) ve bu ifadelerin bir denklem olup olmadığı sorusu yöneltilmiştir. Anket sonrasında yapılan görüşmelerde ise öğretmenlere verdikleri yanıtların sebebine yönelik sorular yöneltilmiştir. Çalışmanın sonucuna göre öğretmenlerin denklem kavramına ilişkin anlamalarının sınırlı ve hatalı olduğu görülmüştür. Denklem anlamını ve yapısal özelliklerini daha çok işlemsel süreçler üzerinden açıklamışlar; denklemin yapısına ilişkin kavramsal

açıklamalarda bulunmamışlardır. Öğretmenler verilen matematiksel ifadenin denklem olup olmadığını harf ve işlem sembollerine göre karar vermişlerdir. Örneğin,  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$  ifadesinde eşittir işareti olduğunu, ancak bir kural olduğu için çözülemeyeceği ve bu sebepten de denklem olmadığını belirtmişlerdir. Benzer şekilde  $x=2$  ifadesinin  $x$ 'in eşit olduğu değer bilindiği için çözülemeyeceğini ve bu sebepten denklem olmadığını belirtmişlerdir. Araştırmacı bu durumu öğretmenlerin geçmiş yaşantılarında matematiği öğrenme sürecinde matematiksel anlamadan çok işlemsel becerilere odaklanmalarına bağlamıştır.

Denklem çözümüne ilişkin öğretmen bilgisinin incelendiği araştırmalar ise öğretmenlerin denklem çözümündeki işlemsel süreçlerin anlamına ilişkin bilgilerinin sınırlı düzeyde olduğunu ortaya koymaktadır (Chazan, Larriva & Sandow, 1999; Li, 2007; Stephens, 2004). Bu alanda Li (2007) tarafından yapılan araştırmada Texas'ta görev yapan 72 matematik öğretmenin denklem çözümüne ilişkin alan bilgileri incelenmiştir. Çalışma kapsamında öğretmenlere açık uçlu ve çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir test ve akademik özgeçmiş anketi uygulanmıştır. Bu öğretmenler arasından 8 öğretmen ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bulguları öğretmenlerin denklem çözümünde işlemsel süreçlere odaklandıklarını göstermiştir. Bunun yanında öğretmenlerin denklem çözümündeki işlemsel süreçlerin kavramsal açıklamaları hakkındaki bilgilerinin sınırlı olduğu görülmüştür. Öğretmenler eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması ile eş değer denklem arasındaki ilişkiyi açıklamakta zorlanmışlardır. Bununla birlikte öğretmenler iki denklemin eş değer olup olmadığını denklemlerdeki bilinmeyen eşit olduğu değeri bularak karar vermişlerdir. Örneğin, öğretmenler  $2x + 8 = 4x - 15$  ve  $2x + 9 = 4x - 14$  denklemlerinin eş değer olup olmadığına  $x$  bilinmeyeninin eşit olduğu değeri bularak karar vermişlerdir. Öğretmenler bu süreçte denklemin ilişkisel özelliklerini kullanmamışlardır. Çalışmada elde edilen bu bulgulara ek olarak, öğretmenlerin alan bilgilerinin öğretim süreçlerindeki kararlarında önemli bir rol oynadığı tespit edilmiştir. Bu sebeple, araştırmacı öğretmenlerin bu bilgilerinin sınıf içi öğretim sürecindeki uygulamalar sırasında nasıl kullanıldığının anlaşılmasının gerekliliğine dikkat çekmiştir. Öğretmen bilgisinin daha iyi anlaşılması için sınıf içi gözlemlerin temel alındığı ve bu gözlemler sonrasında sınıf içi durumlardan yola çıkarak

öğretmenlerle yapılacak görüşmeleri içeren araştırmaların önemli olduğunu belirtmiştir.

Stephens (2004) tarafından yapılan araştırmada ise 30 öğretmen adayının denklem çözümüne ilişkin bilgileri öğrenci çözümlerini içeren senaryolar kullanılarak incelenmiştir. Bu kapsamda öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde öğretmen adaylarından öğrencilerin denklem çözümünde kullandıkları ilişkisel düşünme stratejilerini değerlendirmeleri istenmiştir. Örneğin, “ $2n + 15 = 31$  denkleminin çözümü 8 ise  $2n + 15 - 9 = 31 - 9$  denkleminin çözümü nedir?” sorusu için bir öğrencinin “ $2n + 15 - 9 = 31 - 9$  denkleminde de eşitliğin her iki tarafından da aynı sayı (9) çıkarıldığı için çözüm aynıdır.” cevabının cebirsel olup olmadığı sorulmuştur. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının yarıdan fazlası ilişkisel düşünme stratejilerindeki cebirsel ilişkileri açıklamıştır. Ancak bu stratejileri bilinmeyi bulmayı içeren işlemler kullanılmadığı için cebirsel olmadığını belirten öğretmen adaylarının az sayıda olmadığı saptanmıştır.

### **2.3. Öğretmenlerin Cebir Öğretimine İlişkin Pedagojik Alan Bilgisi**

Alan bilgisi matematik öğretimi için temel bir unsur olup (Ball, 1990) kaliteli matematik öğretiminde tek başına yeterli değildir (Even, 1993). Öğretmenler aynı zamanda konu alanının nasıl öğretilceğini de bilmelidirler (Even, 1993; Lee, 2011). Araştırmacılar öğretmenlerin cebir konularının öğretiminde öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini destekleyecek uygun öğrenme ortamlarını oluşturmalarında pedagojik alan bilgisinin önemine dikkat çekmektedirler (Even, 1993; Agarwal, 2006; Lee, 2007; Stephens 2006, 2008, Tirosh, Even & Robinson, 1998). İlgili alan yazın incelendiğinde öğretmenlerin belirli cebir konu alanlarındaki pedagojik alan bilgisinin ve/veya boyutlarının incelendiği (Bayazit & Aksoy, 2010; Kutluk 2011; Tirosh, Even & Robinson, 1998), alan bilgisi ile konu alan bilgisi arasındaki ilişkinin incelendiği (Erbaş, 2004; Lee, 2007) ve pedagojik alan bilgisinin öğrenci öğrenmesi üzerindeki etkisinin incelendiği çalışmaların (Wilmot, 2008) var olduğu görülmektedir. Konu bazında incelendiğinde ise öğretmenlerin fonksiyon konusundaki pedagojik alan bilgisinin araştırıldığı çalışmaların (Agarwal, 2006; Bayazit & Aksoy; 2010; Hacıomeroğlu, 2006; Karahasan, 2010) diğer cebir konularının (cebirsel ifadeler, denklem, değişken gibi) araştırıldığı çalışmalara

(Asquith vd., 2007; Falkner, Levi & Carpenter, 1999) göre daha fazla olduğu görülmektedir.

Cebir konu ve kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgisinin öğrenci bilgisi kapsamında incelendiği çalışmalar, öğretmenlerin olası öğrenci zorlukları ve kavram yanlışları hakkındaki bilgilerinin sınırlı düzeyde olduğunu göstermektedir (Asquith vd., 2007; Baş, Erbaş & Çetinkaya, 2011; Dede ve Peker, 2004; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Kutluk, 2011). Bu araştırmalar içerisinde Kutluk (2011) tarafından gerçekleştirilen çalışmada öğretmenlerin örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlükleri hakkındaki bilgileri incelenmiştir. Araştırmada 10 farklı ilköğretim okulunda görev yapan 30 matematik öğretmeni ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme formunun ilk kısmında öğretmenlerin konuya ilişkin görüşleri ve öğrenci güçlükleri ile ilgili sorulara yer verilmiştir. İkinci kısmında ise sayı örüntüleri ile ilgili öğrenci güçlüklerine yönelik hazırlanan 3 öğretim senaryosuna yer verilmiştir. Gözlemler ise görüşme yapılan öğretmenlerin arasından seçilen 3 öğretmen ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerin 7. sınıf düzeyinde örüntü konusunu işledikleri dersler gözlenmiştir. Araştırmanın bulguları öğretmenlerin sayı örüntülerini genellemeye ilişkin öğrenci güçlükleri ile bilgilerinde eksiklikler olduğunu göstermiştir. Öğretmenler “örüntü öğeleri arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bulamama” ve “genel terime ulaşamama” gibi az sayıda öğrenci güçlüğünden bahsetmişlerdir. Bunun yanında öğretmenler bu öğrenci güçlüklerini gidermek için uygun çözüm önerilerinde (örüntü etkinlikleri, farklı temsillerin kullanımı vb.) bulunamamışlardır. Öğretmenler bu öğrenci güçlüklerinin test sorularında seçeneklerden yararlanarak ve daha fazla alıştırmaya yaparak giderilebileceğini ifade etmişlerdir. Öte yandan öğretmenlerin sayı örüntülerini genelleme konusunun cebir öğretimindeki önemini farkında olmadıkları da tespit edilmiştir. Öğretmenler bu konunun cebir konularından sonra işlenmesi gerektiğini düşünmektedirler. Kutluk (2011) bu durumun öğretmenlerin alan bilgisi eksikliğinden kaynaklandığını ve bu durumun öğretim sürecini planlamalarını etkilediğini ifade etmiştir.

Baş, Erbaş ve Çetinkaya (2011) ise araştırmalarında lise matematik öğretmenlerinin öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları hakkındaki bilgi ve düşüncelerini incelemişlerdir. Çalışmaya 49 dokuzuncu sınıf öğrencisi ve 3 matematik öğretmeni katılmıştır. Çalışmada ilk olarak öğretmenlerin mevcut

bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla bir genelleme etkinliği üzerinden yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmede öğretmenlere genelleme etkinliğine ilişkin “Bu soruları çözerken öğrencilerin yararlanacakları sayısal veya görşel ipuçları hakkında neler düşünüyörsünüz?” şeklinde sorular yöneltişmiştir. Sonrasında öğretmenler bu genelleme etkinliğini sınıflarında uygulamışlardır. Uygulama sonrasında ise öğretmenlerle tekrar yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmede, öğretmenler öğrencilerin çözümlerini inceleyerek ilk görüşmedeki soruları cevaplandırmışlardır. Araştırma sonucunda öğretmenlerin ilk görüşmede öğrencilerin çözümleriyle ilgili yanlış ya da eksik tahminlerde buldukları saptanmıştır. Örneğin, öğretmenler öğrencilerin örüntünün kuralını bulmada kullanabilecekleri farklı çözümleri belirlemede zorluk yaşamışlardır. Öğretmenler öğrencilerin kullandıkları aritmetiksel stratejileri tahmin edememişlerdir. Öğrencilerin çözümlerini inceledikten sonra öğretmenlerin daha doğru tespitlerde buldukları görölmüştür. Öğretmenler daha önce tahmin edemedikleri öğrenci çözümlerini tespit edebilmişlerdir.

Dede ve Peker'in (2004) araştırmasında ise öğrencilerin cebire yönelik hata ve yanlış anlamalarına ilişkin öğretmen adaylarının bilgileri incelenmiştir. Nicel araştırma yönteminin kullanıldığı çalışmaya son sınıfta öğrenim gören 120 öğretmen adayı ile 7. ve 8. sınıfta okuyan 99 ortaokul öğrencisi katılmıştır. Öğrencilere 10 adet açık uçlu sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Testte cebirsel ifadeler, değişken, eşitlik ve denklem konularına yönelik sorulara yer verilmiştir. Bu sorular öğrencilerin yapabilecekleri hatalara ilişkin olarak öğretmen adayları için düzenlenmiştir. Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının öğrencilerin cebire yönelik hata ve yanlış anlamalarını tahmin ederken sınırlı veya yeterli düzeyde olmayan tahminlerde bulduklarını göstermiştir. Örneğin, öğrencilerin cebirsel ifadelerde toplama işleminde terimleri birleştirme yönünde yaygın olarak yaptıkları hatayı az sayıda öğretmen adayı tahmin edebilmiştir. Öğretmen adayları öğrencilerin yaptıkları hata ve yanlış anlamaları gidermek için yaptıkları çözümlerinde ise genellikle başarısız olmuşlardır. Öğretmen adaylarının önerdikleri çözümlerin işlemsel basamakları ve kuraları açıklama yönünde olduğu görölmüştür. Çoğu öğretmen adayı ise herhangi bir çözümlerinde bulunamamıştır.

Asquith vd. (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmada ise 20 matematik öğretmeninin öğrencilerin eşitlik ve değişken kavramları ile ilgili anlamalarına yönelik bilgileri incelenmiştir. Öğretmenler ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde öğretmenlere eşitlik ve değişken ile ilgili dört soru yöneltilmiştir. Öğretmenlere bu sorulara ilişkin öğrencilerin olası düşüncelerinin, hata ve kavram yanılgılarının neler olabileceği sorulmuştur. Öğretmenlere sorulan sorular aynı zamanda 373 ortaokul öğrencisine de uygulanmıştır. Öğrencilerin yanıtları kapsamında öğretmenlerin sorulara verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. Öğretmenlerin öğrencilerin yaptıkları hatalara ilişkin tahminlerinin öğrencilerin cevapları ile uyuşmadığı tespit edilmiştir.

Falkner, Levi ve Carpenter (1999) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ise öğretmenlerin öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin olası hataları hakkındaki bilgilerine yönelik önemli sonuçlara ulaşılmıştır. Araştırmada öğretmenlerden derslerinde “ $8 + 4 = \blacksquare + 5$ ” eşitliğinde kutu yerine hangi sayının gelebileceğini öğrencilerine sormaları istenmiştir. Araştırmaya katılan altıncı sınıf matematik öğretmenlerinden biri bu sorunun hangi amaçla sorulmasının istendiğine ilişkin herhangi bir fikri olmadığını belirtmiştir. Öğretmen soruyu sınıfa yönelttiğinde ise sınıftaki 24 öğrencinin tamamı cevabın 12 olduğunu söylemiştir. Ders sonrasında öğretmen öğrencilerden böyle bir cevabı beklemediğini ve kendisi için sürpriz olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacılar bu durumun öğretmenin öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin düşünme süreçleri hakkında sınırlı düzeyde bilgi sahibi olmasından kaynaklandığını belirtmişlerdir. Cebir konularındaki öğrenci bilgisinin incelendiği bu araştırmalarda öğretmenlerin öğrencilerin düşünme süreçleri ve olası hataları hakkında bilgi sahibi olmasının öğrenci ihtiyaçlarını dikkate alarak matematiksel anlamalarını destekleyecek öğrenme ortamlarını oluşturmalarında önemli olduğu vurgulanmıştır. Araştırmacılar, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme süreçlerini bilmelerinin öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini destekleyen sınıf ortamları oluşturmalarında yol gösterici olacağını vurgulamıştır.

Öğretmenlerin cebir konu ve kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgisinin öğrenci ve öğretim bilgisi boyutlarının birlikte incelendiği araştırmalar ise öğretmenlerin öğrenci zorluklarını belirleme ve buna yönelik öğretimi düzenlemede daha çok zorlandıklarını göstermektedir. Bu araştırmalar içerisinde Karahasan (2010) tarafından yapılan araştırmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının

bileşke ve ters fonksiyonlar konusundaki pedagojik alan bilgileri incelenmiştir. Çalışma lisans ikinci sınıfta öğrenim gören 3 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Nitel araştırma desenlerinden çoklu durum çalışmasının kullanıldığı çalışmanın verileri gözlem, görüşme ve dokümanlar kullanılarak toplanmıştır. Gözlem sürecinde öğretmen adaylarının okul deneyimi sırasında yürüttükleri dersler gözlenmiş ve gözleme ilişkin notlar oluşturulmuştur. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde ise açık uçlu sorular kullanılmıştır. Doküman olarak ise fonksiyon bilgisi testi, irdeleme yazıları, öğretim senaryoları ve ders planları kullanılmıştır. Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin yeterli düzeyde olmadığını göstermiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının bu bilgileri uygun şekilde kullanamadıkları ve kullanmakta güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Çalışmada yer alan öğretmen adaylarının öğretmen merkezli bir yaklaşım benimsedikleri görülmüştür. Öğretmen adayları, öğrencilerin hatalarına yönelik öğretim uygulamalarına yer vermemişlerdir.

Bu kapsamda gerçekleştirilen bir diğer çalışma ise Bayazit ve Aksoy (2010) tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmada öğretmenlerin fonksiyon konusundaki pedagojik alan bilgisi iki boyut kapsamında incelenmiştir. Bu boyutlardan ilki öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamadaki zorlukları, kavram yanılgıları ve bunların sebeplerine ilişkin öğretmen bilgisini içermektedir. İkinci boyut ise bahsedilen bu zorlukların giderilmesi için uygun öğretim yaklaşımlarının neler olabileceği konusundaki öğretmen bilgisini içermektedir. Çalışmaya katılan öğretmenlerin eğitim ve mesleki tecrübe açısından benzer, fakat matematik öğretimine ilişkin farklı öğretim yaklaşımlarını benimseyen ve kullanan öğretmenler olması hedeflenmiştir. Bu kapsamda çalışmaya 24 yıllık ve 25 yıllık mesleki tecrübeye sahip iki lise matematik öğretmeni katılmıştır. Çalışma verileri öğretmenler ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular, çalışmaya katılan iki öğretmenin öğrencilerin fonksiyon konusunu öğrenirken karşılaşılabilecekleri zorluklar, geliştirebilecekleri kavram yanılgıları ve bunların sebeplerini belirleme noktasında benzer bilgilere sahip olduklarını göstermiştir. Öğretmenlerin bu bilgilerinin fonksiyon konusunun öğrenimine ilişkin ilgili alan yazında belirlenmiş bulgularla kapsam ve içerik olarak benzer olduğu görülmüştür. Bunun yanında öğretmenlerin fonksiyon konusunun öğretim boyutuna ilişkin farklı yaklaşımlar sergiledikleri tespit



edilmiştir. Ahmet öğretmen öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini destekleyecek öğretim stratejileri kullanmıştır. Ahmet öğretmenin öğrenci zorluklarını ve kavram yanılgılarını giderebilmek için kavramlar arası ilişkilendirme yaptığı ve farklı gösterim biçimleri kullandığı görülmüştür. Örneğin,  $y = 5$  iadesindeki sabit fonksiyon düşüncesini anlaşılır kılmak için venn-şeması ve grafik üzerinden açıklamalar yapmıştır. Burak öğretmen ise öğrenci zorluklarını ve bunların sebeplerini bilmesine rağmen öğrencinin anlamakta zorlandığı bilgileri sözel ifadeler ile açıklamıştır. Öğrencilerin bilgiye ulaşmasını ve bu bilgiyi anlamlı bir şekilde öğrenmesini kolaylaştıracak kavramlar arası ilişkilendirme gibi öğretimsel yaklaşımlar kullanmamıştır.

Tirosh, Even & Robinson (1998) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ise yedinci sınıf matematik öğretmenlerinin öğrencilerin cebirsel ifadeleri birleştirme eğilimlerine ve eğilimin sebebine yönelik bilgileri ile öğretmenlerin öğrencilerin yaşadığı bu zorluklara yönelik nasıl bir öğretim uyguladıkları incelenmiştir. Çalışmaya öğretmenlik deneyimi iki yıl olan iki öğretmen ile görev yılı 15 yıldan fazla olan iki matematik öğretmeni katılmıştır. Çalışmada öğretmenlerin cebirsel ifadeler konusunu işledikleri üç saatlik dersleri gözlenmiştir. Her ders gözleminde sonra öğretmenlerle bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde öğretmenlere gözlemlenen ders sırasında oluşan durumlar hakkında sorular yöneltilmiştir. Araştırma sonucunda, sadece iki öğretmenin öğrencilerin cebirsel ifadeleri sonlandırma eğilimlerinin farkında oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin öğrencilerin bu eğilimlerinin sebebine yönelik derinlemesine bir açıklama yapamadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin öğrencilerin bu yönde yaşadıkları zorlukları ve yaptıkları hataları gidermeye yönelik farklı öğretim yöntemleri kullanmadıkları belirlenmiştir. Öğretmenlerin kullandıkları öğretim stratejilerinin matematiksel ifadedeki işlemsel süreci açıklama yönünde olduğu görülmüştür. Örneğin, çalışmaya katılan Benny isimli öğretmen ders sırasında bir öğrencinin  $5m + 2 = 7m$  şeklinde yaptığı hatayı gidermek için “Harfleri ve sayıları kendi arasında topluyoruz.” şeklinde açıklama yaparak kuralı hatırlatmıştır. Burada Benny öğretmenin benzer terimler yöntemini uygun olarak kullanamadığı da görülmüştür. Bunun yanında Benny ve Drora öğretmen öğrencilerin yaptıkları hataları düzeltmede öğrencilerin öğrenmeleri üzerinde olumsuz etkisi olduğu

bilinen *meyve-salata* (Booth, 1988) yaklaşımını kullandıkları bir öğretim uygulaması gerçekleştirmişlerdir.

Lee (2007) ise iki matematik öğretmenin öğrencilerin cebirsel sözel problemleri çözme sürecindeki düşünceleri hakkındaki bilgisini ve bu bilgiyi öğretim planlamada nasıl kullandıklarını araştırmıştır. Araştırma verileri, açık uçlu soruları içeren bir anket, ders gözlemleri ve görüşmeler ile toplanmıştır. Araştırma sonuçları öğretmenlerin sözel cebir problemlerinin çözüm sürecinde öğrencilerin kullandıkları stratejiler hakkında bilgi sahibi olduklarını göstermiştir. Bununla birlikte, öğretmenlerin bu bilgilerini öğretimi planlamada etkili olarak kullandıkları gözlenmiştir. Öğretmenler derste öğrencilerin matematiksel anlamalarını destekleyecek farklı stratejiler kullanmışlardır. Bu stratejiler şunlardır: (i) problemlerin çözümü için zamanı düzenleme, (ii) problemlerin çözüm stratejilerini açıklarken öğrenci fikirlerini kullanma, (iii) öğrenci fikirlerini açığa çıkarmak için soru-cevap tekniğini kullanma ve (iv) dersi özetlemek için öğrenci stratejilerini kullanma. Araştırmacı, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme süreçleri hakkındaki bilgisinin öğrencilerin anlamlı öğrenmelerine katkı sağlayacak bir öğretim düzenlemede önemli bir etken olduğunu vurgulamıştır.

Erbaş (2004) ise öğretmenlerin öğrencilerin cebir öğrenme sürecinde yaşadıkları zorluklara ve yaptıkları hatalara ilişkin bilgilerini ve bu bilgilerinin öğretim sürecine nasıl yansıdığını görevinin ilk yılındaki 2 matematik öğretmeni ile gerçekleştirdiği bir çalışma ile incelemiştir. Nitel araştırma desenlerinden durum çalışmasının kullanıldığı çalışmanın verileri öğretmenlerle gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşme ve ders gözlemlerinden elde edilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmenlerin öğrenci zorlukları ve hataları hakkında bilgi sahibi oldukları tespit edilmiştir. Ancak öğretmenlerin bu durumun sebebine ilişkin bilgilerinin oldukça sınırlı olduğu görülmüştür. Öte yandan öğretmenler öğretim sürecinde öğrencilerin matematiksel anlamalarını destekleyecek ortamlar oluşturmada zorlanmışlardır. Ayrıca bu süreçte kullandıkları stratejilerin matematiksel yönden hatalı bilgiler içerdiği gözlenmiştir. Örneğin, öğretmenler cebirsel ifadeleri açıklarken *meyve salata yaklaşımını* kullanmışlardır. Öğretmenler bu kullanımın öğrencilerin anlamalarını kolaylaştırdığını belirtmişlerdir. Araştırmacı bu durumun öğretmenlerin alan bilgisindeki eksiklikten kaynaklandığını belirtmiştir.

Wilmot (2008) ise araştırmasının bir bölümünde öğretmenlerin cebir öğretim bilgileri ile öğrenci başarı arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışmaya Gana'da öğretmenlik yapan 38 lise matematik öğretmeni ve bu öğretmenlerin sınıflarında okuyan 1565 öğrenci katılmıştır. Çalışmada Michigan State Üniversitesi tarafından gerçekleştirilen KAT (Knowledge of Algebra for Teaching) projesi kapsamında geliştirilen ölçme araçlarının uyarlanması sonucu oluşturulan ölçme araçları kullanılmıştır. Öğretmenler ve öğrenciler için ayrı olarak düzenlenen bu ölçme araçları çoktan seçmeli sorulara ek olarak açık uçlu soruları içermektedir. Araştırma sonucunda öğretmenlerin cebir öğretim bilgileri ile öğrencilerin başarıları arasında doğrusal bir ilişki olduğu tespit edilmiştir. Ancak öğretmen bilgisinin öğrenci başarısını anlamlı olarak etkilemediği saptanmıştır. Araştırmacı çalışmaya katılan öğretmenlerin sayısının az olmasının ve öğretmenlerin görev yaptıkları okulların rasgele seçilmemesinin bu sonuç üzerinde etkisi olabileceğini belirtmiştir. Bunun yanında seçilen okulların Gana'daki en iyi okullar arasından yer almasından dolayı okulla ilgili diğer etmenlerin bu durum üzerinde etkisi olabileceğini ifade etmiştir.

#### **2.4. Literatür Özeti**

Öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan bilgilerini inceleyen çalışmaların sonuçları göz önünde bulundurulduğunda cebir öğretimine yönelik alan bilgilerinde önemli eksikler olduğu söylenebilir. Bunun yanında yapılan çalışmalarda öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan bilgilerinin anket veya görüşme yoluyla toplanan veriler ile incelendiği çalışmaların (Attorps, 2003; Black 2007; Boz, 2007; Li, 2007, Stephens 2006, 2008; Stumps ve Bishop, 2002) çoğunlukta olduğu görülmektedir. Araştırmacılar öğretmenlerin alan bilgisinin daha iyi anlaşılabilmesi için sınıf içi gözlemlerin temel alınarak yapılan çalışmaların gerekliliğine dikkat çekmişlerdir (Even, 1993; Li, 2007). Bu kapsamda öğretmenlerin temel cebir kavramlarına ilişkin alan bilgilerinin öğretim süreci esas alınarak incelendiği yeni çalışmalara ihtiyaç duyulduğu görülmektedir.

Öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin pedagojik alan bilgilerini inceleyen çalışmaların sonuçları göz önünde bulundurulduğunda öğretmenlerin bu yöndeki bilgilerinde önemli eksikler olduğu söylenebilir. Bunun yanında bu çalışmalarda pedagojik alan bilgisi boyutlarından alana ilişkin öğrenci bilgisi boyutunun

incelendiği çalışmaların alan ve ğretim bilgisi boyutunun incelendiği çalışmalara göre çoğunlukta görülmektedir. Ayrıca pedagojik alan bilgisinin bu boyutlarının ders süreci esas alınarak incelendiği çalışmaların az sayıda olduğu söylenbilir. Araştırmacılar ğretmenlerin pedagojik bilgisinin ve bu boyutlar arasındaki ilişkinin ğretim sürecine nasıl yansıdığının sınıf içi ders gözlemlerinin temel alındığı çalışmalar ile daha iyi anlaşılabileceğine dikkat çekmektedirler (Asquith vd. 2007; Erbaş, 2004; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Hacımeroğlu, 2006; Karahasan, 2010). Bu kapsamda öğretmenlerin temel cebir kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin ğretim süreci esas alınarak araştırıldığı yeni çalışmalara ihtiyaç duyulduğu görülmektedir.

### 3. YÖNTEM

Araştırmanın bu bölümünde araştırma deseni, katılımcılar, veri toplama süreci, veri toplama araçları, pilot uygulama, veri analiz süreci, araştırmanın geçerliği, güvenirliği, etik boyutu ve araştırmacının rolü hakkında bilgiler sunulmuştur.

#### 3.1. Araştırma Deseni

Ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerinin (alan bilgileri ve pedagojik alan bilgileri) öğretim süreci esas alınarak incelendiği bu çalışma, nitel araştırma yaklaşımı kapsamında yapılandırılmıştır. Öğretmenlerin belirli bir konunun öğretimi ile ilgili sahip oldukları bilgiler, bu bilgilerin sınıf içi öğretim uygulamaları sürecinde en iyi şekilde anlaşılabilir (Ben-Peretz, 2011; Calherhead, 1996; Lee, 2011, Steele & Rogers, 2012). Bu temelde öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerinin anlaşılması içinde bulunan bağlamın (öğretim sürecinin) dikkate alınarak ayrıntılı ve bütüncül olarak incelenmesini gerektirmektedir. Nitel araştırmalar da araştırılacak konunun bağlamına odaklanır ve bağlama ilişkin zengin bilgiler sunar (Creswell, 2007; Denzin & Lincoln, 2000; Merriam, 2009; Punch, 2005). Bu sebeple bu araştırmada, nitel araştırma yöntemi desenlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışması sınırları belirli bir sistemin veya durumun doğal ortamında derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesi olarak tanımlanmaktadır. Durum çalışmasında temel amaç ele alınan durumu bağlamsal olarak anlamaya çalışmaktır (Merriam, 2009). Üç ortaokul matematik öğretmenin her birinin ayrı bir durum olarak ele alındığı bu çalışmada durum çalışması desenlerinden çoklu durum çalışması deseni kullanılmıştır. Çoklu durum çalışmaları birden fazla durumun kendi başına bütüncül olarak ele alındığı durum çalışmalarıdır (Merriam, 2009; Yin, 2009). Bu çalışmalarda konuyu açıklamak için birden fazla durum ele alınır ve her bir durum için aynı veri toplama süreci takip edilir (Creswell, 2007). Bu çalışma kapsamında üç ortaokul matematik öğretmenin her birinin cebir öğretimi bilgisi, öğretim süreci temel alınarak bütüncül ve derinlemesine bir anlayışla incelenmiştir.

### 3.2. Katılımcılar

Araştırmaya 2013-2014 eğitim öğretim yılında Kayseri ilinde Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı ortaokullarda görev yapmakta olan üç ortaokul matematik öğretmeni katılmıştır. Araştırmanın çalışma grubu öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerinin detaylı olarak incelenecek olması sebebiyle üç ortaokul matematik öğretmeni ile sınırlı tutulmuştur.

Nitel araştırmalarda amaç genelleme yapmak değil, çalışılan konuyu derinlemesine inceleyerek bütüncül bir resim elde etmektir. Amaçlı örnekleme yöntemleri nitel araştırma geleneği içinde bu temelde ortaya çıkmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2011). Amaçlı örnekleme yönteminde çalışmanın amacına yönelik zengin veri elde edilebileceği düşünülen durumlar çalışmaya dâhil edilir (Patton, 2002). Bu araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden *kolay ulaşılabilir durum örnekleme* ve *ölçüt örnekleme* yöntemleri birlikte kullanılmıştır.

Katılımcıların belirlenmesinde öncelikli olarak araştırmaya hız ve pratiklik kazandırması için amaçlı örnekleme yöntemlerinden *kolay ulaşılabilir durum örnekleme* yöntemi kullanılmıştır. Araştırmacının ulaşabileceği okullarda görev yapan öğretmenler belirlenmiştir. Bu öğretmenler arasından ise araştırmaya dâhil edilecek öğretmenlerin belirlenmesinde *ölçüt örnekleme* yöntemi kullanılmıştır. Araştırma verileri 6. sınıf düzeyindeki şubelerden toplanacağı için belirlenen katılımcılar arasından öncelikle 6. sınıf düzeyinde matematik derslerini yürüten öğretmenler belirlenmiştir. Ayrıca bu öğretmenlerin araştırmaya katılmaya gönüllü olmaları esas alınmıştır. Araştırmaya katılmaya gönüllü öğretmenler arasından ise fikirlerini rahatça paylaşabilen, sınıf ortamında gözlenmekten rahatsızlık duymayan öğretmenler belirlenmiştir. Katılımcıların belirlenmesine ilişkin ayrıntılı bilgiye aşağıda yer verilmiştir.

#### 3.2.1. Katılımcıların Belirlenmesi

Katılımcıların belirlenmesinin ilk aşamasında Kayseri ilinin merkez ilçesinde bulunan ve mesafe olarak araştırmacının görev yaptığı yere yakın olan MEB' e bağlı altı ortaokul belirlenmiştir. Bu ortaokullarda görev yapmakta olan dokuz matematik öğretmeni ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan bu görüşmelerde öğretmenlere araştırma süreci hakkında detaylı bilgi verilmiştir. Belirlenen dokuz öğretmenden araştırmaya dâhil edilecek öğretmenlerin belirlenmesinde öncelikli

olarak araştırmaya katılmaya gönüllü ve istekli olmaları esas alınmıştır. Bu sebeple, öğretmenler araştırma hakkında bilgilendirildikten sonra çalışmaya katılmayı isteyip istemedikleri sorulmuştur. Görüşmeler sonrasında beş öğretmen gözlem sürecinde rahat olamayacaklarını ve iş yoğunluğunu sebep göstererek çalışmaya katılmayı kabul etmemişlerdir. Diğer öğretmenler çalışmaya katılmaya gönüllü olduklarını belirtmişlerdir. Bu öğretmenlerden Hale ve Emre öğretmen aynı okulda görev yapmaktadırlar. Hale öğretmenin kıdem yılı 3 ve Emre öğretmenin kıdem yılı ise 8 yıldır.

Araştırma verileri katılımcıların yürütmüş oldukları 6. sınıf düzeyindeki şubelerden toplanacağı için öğretmenlerin 6. sınıf düzeyinde cebir konusunu işledikleri tarihlerin akışmamasına dikkat edilmiştir. Çünkü öğretmenlerin derslerinin aynı gün ve saate denk gelmesi durumunda her iki dersin gözlemlenmesi mümkün olmayacaktır. Bu açıdan Hale ve Emre öğretmenin gözlemlenecek derslerinin gün ve saatlerinin çakışmıyor olması da belirleyici bir etken olmuştur. Ayrıca, bu öğretmenlerin aynı okulda görev yapıyor olmasının art arda olan derslerin gözlemlenebilmesi açısından avantaj sağlayacağı düşünölmüştür.

Araştırmaya dâhil edilecek öğretmenlerin rahat iletişim kurulabilecek öğretmenler olması da önem taşımaktadır. Öğretmenlerle araştırmacı arasında iyi bir iletişim olması veri toplama sürecinin (ders gözlemleri ve görüşmeler) verimli bir şekilde tamamlanmasında önemli bir role sahiptir. Yapılan ön görüşmelerde Hale ve Emre öğretmenin kendini rahat ifade edebilmesi, bu öğretmenlerin çalışmaya dâhil edilmesi açısından belirleyici olmuştur. Ayrıca, araştırmanın veri toplama süreci düşünöldüğünde öğretmenlerle yapılacak görüşmelerin zaman alıcı olması sebebiyle bu süreçte öğretmenlerin istekli olması son derece önemlidir. Hale ve Emre öğretmen araştırmayı önemli bulduklarını ve çalışmaya katılmaya istekli olduklarını ifade etmişlerdir. Bahsedilen durumların araştırmanın amacına yönelik veri elde etmede kolaylık sağlayacağı düşünöldüğü için Emre ve Hale öğretmen araştırmaya dâhil edilmiştir.

Diğer öğretmenlerden Deniz öğretmen 14, Sinan öğretmen ise 17 yıllık öğretmenlik tecrübesine sahiptirler. Deniz ve Sinan öğretmenin araştırmaya katılmaya gönüllü olmalarına rağmen araştırma kapsamında kendilerinin değerlendirileceğini düşünödüğü için veri toplama sürecine ilişkin çekinceleri olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, Deniz ve Sinan öğretmen görev yaptıkları okulların

sosyo-ekonomik düzeyi yüksek olduğu için çoğu öğrencinin dershaneye gittiğini ve ders konularını önceden bilerek derse geldiklerini ifade etmiştir. Bu sebeple derslerinde soru çözmeye ağırlık verdiklerini belirtmişlerdir. Araştırmanın yapısı dikkate alındığında, bahsedilen bu durumların öğretmen bilgisini durumsal olarak incelemeye yönelik veri toplamayı sınırlandıracağı düşünüldüğü için Deniz ve Sinan öğretmen araştırmaya dâhil edilmemiştir.

Araştırmaya katılacak son katılımcının belirlenmesi sürecinde, araştırmacının görev yaptığı fakültede matematik eğitimi yüksek lisans öğrenimine devam eden ve Kayseri ilinde öğretmenlik yapan ortaokul matematik öğretmenlerine ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu süreçte üç öğretmene ulaşılmıştır. Bu öğretmenlerle yapılan görüşmelerden sonra bir köy okulunda görev yapmakta olan Ayla öğretmen araştırmaya katılmaya gönüllü olduğunu belirtmiştir. Ayla öğretmen kendini rahat ifade edebilen ve çalışmaya katılmaya istekli bir öğretmen olduğu için araştırmaya dâhil edilmiştir. Böylece araştırmaya katılacak üç öğretmen belirlenmiştir. Bu öğretmenlerden Ayla öğretmen mesleğinde ikinci yılını çalışmakta ve Kayseri ilinde bir köy okulunda görev yapmaktadır. Hale öğretmen mesleğinde üçüncü yılını, Emre öğretmen ise mesleğinde sekizinci yılını çalışmaktadır. Emre ve Hale öğretmen aynı okulda görev yapmaktadırlar. Bu okul Kayseri il merkezinde yer almaktadır.

Araştırmaya katılacak öğretmenlerin belirlenmesinden sonra her bir öğretmenin görev yaptığı okul müdürleri ile görüşülmüştür. İlgili okul müdürlerine araştırma hakkında bilgi verilerek, araştırmanın yasal izinlerine (Etik Kurul İzni ve Araştırma İzni) ilişkin belgeler (Ek 1 ve Ek 2) okul idarecilerine teslim edilmiştir. Aşağıda her bir katılımcıya ilişkin kısa bilgiler yer almaktadır.

### **3.2.1.1. Ayla Öğretmen**

Öğretmenlik mesleğinde ikinci yılını çalışan Ayla öğretmen, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü mezunudur. Aynı zamanda matematik eğitimi alanında yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir. Ayla öğretmen Kayseri ilinin bir ilçesine bağlı bir köy okulunda tek matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Öğretmenlik mesleğine bu okulda başlamıştır. Sosyoekonomik düzey açısından orta düzeyde olan bu okulda 1-5. sınıflar düzeyinde iki şube, 5-8. sınıf düzeyinde ise birer şube olmak üzere toplam dört şube bulunmaktadır. 1-3. ve 4-5. sınıflar birleştirilmiş sınıf şeklindedir. Okuldaki ortalama sınıf mevcudu 15



öğrencidir. Ayla öğretmen 5-8. sınıf düzeyinde dört farklı şubenin matematik derslerini yürütmektedir. Okulda 1 matematik öğretmeni olmak üzere toplam 12 öğretmen görev yapmaktadır.

Ayla öğretmenin görev yaptığı köy okulu il merkezine 50 km uzaklıktadır. Öğretmenler okula servis ile ulaşım sağlamaktadır. Okul bir köy okulu olmasına rağmen fiziksel açıdan imkânları oldukça iyidir. Her bir derse yönelik ayrı sınıf (Matematik sınıfı, Türkçe sınıfı, Fen Bilgisi sınıfı) bulunmaktadır. Matematik sınıfında matematik materyallerinin bulunduğu bir materyal dolabı yer almaktadır. Okuldaki öğretmenlerin birbirleri ve idareciler ile arasında iyi bir iletişim ve işbirliği olduğu gözlenmiştir. Ayla öğretmen, okul idaresinin ve öğretmenlerin kendisine ilgili ve destekleyici davrandıklarını, zorlandığı noktalarda onlardan rahatlıkla yardım isteyebildiğini ifade etmiştir. Ayla öğretmen sadece başarılı öğrencilerin velilerin çocuklarının durumları ile ilgilendiğini; diğer öğrencilerin velileriyle çok az görüşebildiğini belirtmiştir.

Mesleğini çok sevdiğini belirten Ayla öğretmen, görev yaptığı okul ikliminin de mesleğini sevmesinde önemli bir rol oynadığını düşünmektedir. Ayla öğretmen görev yaptığı okulda matematik sınıfı bulunduğu için şanslı olduğunu belirtmiştir. Ayrı bir matematik sınıfının olmasından dolayı bir materyal dolabı oluşturmuştur. Bu sayede Ayla öğretmen ve öğrenciler materyallere ulaşım ve kullanım açısından çok büyük kolaylık elde etmektedirler. Öğrenciler materyallere uzak kalmayarak rahatlıkla kullanabilmektedirler. Ayrıca, Ayla öğretmen kendilerine ait bir sınıfları olduğu için sınıfı istediği şekilde düzenleyebilmekte ve istediği oturma düzenini oluşturabilmektedir. Öğrencilerin hem kendi hem de birbirleri ile daha iyi iletişim sağladığını düşündüğü için U şeklinde oturma düzeni kullanmaktadır.

Ayla öğretmen için okuldaki en temel sorun tek matematik öğretmeni olmasıdır. Okulda yalnız olduğu için başka okullarda görev yapan matematik öğretmeni arkadaşları ile iletişime geçerek zorlandığı noktalarda onlardan yardım istemektedir. Ayla öğretmen arkadaşlarının da benzer zorlukları yaşadığını ve beraber bir çözüm yolu bulmaya çalıştıklarını belirtmiştir.

Ayla öğretmene göre bir matematik öğretmenin öncelikle iyi bir alan bilgisine sahip olması gerekmektedir. Ayrıca alan bilgisinin tek başına yeterli olmadığını, konuyu öğrencilere nasıl anlatabileceğini de iyi bilmesi gerektiğini düşünmektedir.

Bunların dışında Ayla öğretmen öğrencilerin seviyelerini ve gelişim özelliklerini bilmenin çok önemli olduğunu vurgulamıştır. Bahsettiği bu özellikler açısından eksiklikleri olduğunu düşünen Ayla öğretmen, öğretmenliğe başladığı ilk sene öğrencilerin seviyelerine inmekte zorlandığını ve kendisini çaresiz hissettiğini belirtmiştir. Bu durumun sebebini ise almış olduğu eğitimin eksikliğine ve tecrübesizliğine bağlamıştır. Ancak bu sene önceki seneye kıyasla kendini geliştirdiğini ve daha yeterli hissettiğini ifade etmiştir. Ayla öğretmen kendini geliştirmek için internetten örnek ders anlatım videoları izlemekte ve kişisel gelişim kitapları okumaktadır. Öğrencilerin matematiği keşfederek ve materyallerden yararlanarak öğrenmeleri gerektiğini düşünmektedir. Ancak materyal hazırlama ve derste kullanma noktasında kendisini yeterli görmemektedir.

### **3.2.1.2. Hale Öğretmen**

Öğretmenlik mesleğinde üçüncü yılını çalışan Hale öğretmen, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü mezunudur. Kayseri il merkezinde bir okulda görev yapmaktadır. Bu okul Hale öğretmenin görev yaptığı ikinci okuldur. Hale öğretmen öncesinde iki yıl süreyle Yozgat ilinde bir köy okulunda görev yapmıştır. Hale öğretmenin görev yaptığı okul sosyoekonomik düzey açısından orta düzeyde bir okuldur. Bu okulda 5-8. sınıf düzeyinde toplam 18 şubede, yaklaşık olarak 600 öğrenci öğrenim görmektedir. Okuldaki ortalama sınıf mevcudu 30 öğrencidir. Hale öğretmen 5., 6. ve 8. sınıf düzeyinde birer şube ve 7. sınıf düzeyinde ise iki şube olmak üzere beş farklı şubenin matematik derslerini yürütmektedir. Okulda kıdemi 3 ve 15 yılları arasında değişen 5 matematik öğretmeni görev yapmaktadır.

Hale öğretmen il merkezinde bir okulda görev yapmaktadır. Ancak okulun fiziksel açıdan imkânları kısıtlıdır. Örneğin, okulda matematik sınıfı bulunmamaktadır. Ayrıca sınırlı sayıda matematik materyali bulunmaktadır. Hale öğretmen bu koşulların matematik derslerinde kendisi için oldukça zorlayıcı durumlar oluşturduğunu ifade etmiştir. Özellikle, materyal kullanımı gerektiren konuların anlatımında ve etkinlik yapması gerektiğinde zorlandığını vurgulamıştır. Hale öğretmen, her sınıfta az sayıda azimli ve ilgili öğrencinin olduğunu, diğer öğrencilerin ön bilgilerinin yetersiz ve derse karşı ilgilerinin oldukça düşük olması nedeniyle öğretim sürecinde zorlandığını belirtmiştir. Ayrıca, velilerin öğrencilerin başarı durumlarıyla çok fazla ilgilenmediğini ifade etmiştir. Bu olumsuzluklara

rağmen Hale Öğretmen, bu okulda görev yapmaktan memnun olduğunu, özellikle de okul idaresi ve öğretmenlerle iletişimden memnun olduğunu belirtmiştir.

Hale öğretmen ortaokul yıllarında matematiği sevmediğini ve lise yıllarında matematik öğretmeni sayesinde matematiği sevmeye başladığını belirtmiştir. Hale öğretmen matematiği sevmeye başladıkça da bu alanda başarılı olabileceğini düşündüğü için matematik öğretmeni olmaya karar vermiştir.

Hale öğretmen iyi bir matematik öğretmenin öncelikli olarak öğrencilerin seviyesine inebilmesi gerektiğini düşünmektedir. Bu konuda ise başarılı olduğuna inanmaktadır. Üniversitede almış olduğu alan eğitimi derslerinin bu noktada oldukça faydalı olduğunu düşünmektedir. Ayrıca bir matematik öğretmenin iyi bir alan bilgisine sahip olması gerektiğini belirten Hale öğretmen, alan bilgisi yönünden de kendisini güçlü hissetmektedir. Bunun yanında dersleri eğlenceli hale getirerek öğrencilere matematiği sevdirebilmenin matematik öğretebilmek için oldukça önemli olduğuna inanmaktadır. Ancak kendisinin derslerinde bunu çok fazla sağlayamadığını düşünmektedir. Bu durumun sebebini ise müfredat yoğunluğuna ve tecrübesizliğine bağlamıştır. Kendini geliştirmek için matematik öğretimi kitapları okuyan Hale öğretmen, bu kitaplardan özellikle anlatacağı konuya yönelik öğrenci zorlukları ve kavram yanılgıları hakkında bilgi sahibi olmak için yararlanmaktadır. Ayrıca derslerinde çok fazla etkinliğe yer veremediğini düşünmekte ve bu noktada daha planlı davranarak kendini geliştirmeye çalışmaktadır. Hale öğretmen öğrencilerin matematiği tekrar yaparak ve çok soru çözerek daha iyi öğrenebileceklerini düşünmektedir.

### **3.2.1.3. Emre Öğretmen**

Öğretmenlik mesleğinde sekizinci yılını çalışan Emre öğretmen, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü mezunudur. Kayseri il merkezinde bir okulda görev yapmaktadır. Bu okul aynı zamanda Emre öğretmenin göreve başladığı okuldur. Emre öğretmen göreve başladığından bu yana aynı okulda görev yapmaktadır. Sosyoekonomik düzey açısından orta düzeyde olan bu okulda 5-8. sınıf düzeyinde toplam 18 şubede, yaklaşık olarak 600 öğrenci öğrenim görmektedir. Okuldaki ortalama sınıf mevcudu 30 öğrencidir. Emre öğretmen 5., 7. ve 8. sınıf düzeyinde birer şube ve 6. sınıf düzeyinde ise ikişer şube olmak üzere beş farklı şubenin matematik derslerini yürütmektedir. Okulda kıdemi 3 ve 15 yılları arasında değişen 5 matematik öğretmeni görev yapmaktadır. Emre öğretmen,

Hale öğretmen ile aynı okulda görev yapmaktadır. Okul ve öğrenci velileri ile ilgili Hale öğretmen ile benzer görüşlere sahiptir.

Emre öğretmen ortaokul ve lise yıllarında matematiği çok sevdiğini ve öğretmenlerinden matematikte çok başarılı olduğuna yönelik övgüler aldığını belirtmiştir. Bu yıllarda arkadaşlarına anlamadıkları konuları anlatarak yardım ettiğini ifade etmiştir. Matematikte yeni şeyler keşfetmeyi ve matematik anlatmayı çok sevdiği için matematik öğretmeni olmaya karar vermiştir. Mesleğinin ilk yıllarında zorlandığı için zaman zaman motivasyonu oldukça düşmüş ancak ilerleyen yıllarda mesleğini daha çok sevmiştir

Emre öğretmene göre bir matematik öğretmenin alan bilgisinin iyi düzeyde olması ve girdiği sınıf düzeylerinden daha üst düzey matematik bilmesi gerekmektedir. Emre öğretmen, öğrencilerin öğretmenlerinin matematik bilgisi açısından birikimli olduğuna inanmalarının çok önemli olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple bir matematik öğretmenin öğrencilerin sorduğu her soruyu cevaplayabilmesi gerektiğine inanmaktadır. Alan bilgisinin öğretmenlikte ön şart olduğunu; ancak öğretmenin bu bilgiyi öğrenciye aktaramadığı zaman bir önemi kalmadığını belirten Emre öğretmen, bu sebeple öğretim bilgisinin alan bilgisinden daha önemli olduğunu düşünmektedir. Alan bilgisi bakımından yeterli olduğunu ancak öğretim bilgisi bakımından eksiklikleri olduğunu belirtmiştir. Üniversitede almış olduğu eğitimin alan bilgisi yönünden daha çok katkı sağladığını, öğretim bilgisi yönünden yetersiz kaldığını düşünmektedir. Öğretim bilgisine yönelik eksikliklerini zaman içinde fark ederek geliştirdiğini ifade etmiştir.

Emre öğretmen, derslerini etkinlik ve materyal ağırlıklı işlemek istemektedir. Ancak zaman sıkıntısından dolayı bunu çok fazla sağlayamadığını belirtmiştir. Emre öğretmenin anlatmakta en çok zorlandığı konular geometri konularıdır. Emre öğretmen geometri konularında görsellik ön planda olduğu için öğrencilerin kavramları anlamakta zorlandıklarını düşünmektedir. Sınıflarda da projeksiyon ve akıllı tahta olmadığı için bu konuların anlatımında daha çok zorlanmaktadır. Öğrencilerin matematiği sorgulayarak öğrenmeleri gerektiğini düşünmektedir. Bundan dolayı matematik öğretirken öğrencilerde merak uyandırmanın önemli olduğuna inanmaktadır. Ayrıca, zaman sıkıntısı olduğu için her öğrenci ile birebir ilgilenmekte zorlandığını belirtmiştir.

### 3.3. Veri Toplama Süreci

Araştırma verileri 2013-2014 eğitim-öğretim yılının güz ve bahar dönemlerinde toplanmıştır. Veri toplama süreci iki aşamadan oluşmaktadır. 2013-2014 güz dönemini kapsayan I. aşamada (hazırlık aşaması) veri toplama araçları (görüşme formları) geliştirilmiştir. Ayrıca katılımcılar belirlenerek katılımcılarla ön görüşmeler yapılmıştır. 2013-2014 eğitim ve öğretim yılının bahar dönemini kapsayan II. aşamada (uygulama aşaması) ise ilk olarak ders gözlemleri gerçekleştirilmiştir. Ders gözlemleri sonrası görüşme formlarında düzenlemeler yapılmıştır. Görüşme formlarında yapılan düzenlemeler sonrası ise bir öğretmen ile görüşme formlarının pilot uygulaması yapılmıştır. Pilot çalışma sonrasında görüşme formları düzenlenerek son şekli oluşturulmuştur (Ek 5 6-7) Son şekli verilen veri toplama araçları kullanılarak öğretmenlerle görüşmeler ve ders gözlemleri gerçekleştirilmiştir. Ayrıca her bir öğretmene ilişkin dokümanlar toplanmıştır. Veri toplama sürecinin aşamaları Tablo 3.1’de sunulmuştur.

**Tablo 3.1: Veri Toplama Sürecine İlişkin Çalışma Takvimi**

<b>Aşama</b>	<b>Zaman</b>	<b>Veri Toplama Aşamaları</b>
<b>Hazırlık</b> <b>2013-2014 Güz Dönemi</b>	Eylül - Aralık, 2013	Taslak veri toplama araçlarının geliştirilmesi
	Ekim - Aralık, 2013	Katılımcıların belirlenmesi
	Ocak, 2014	Öğretmenlerle ön görüşmelerin yapılması
<b>Uygulama</b> <b>2013-2014 Bahar Dönemi</b>	Mart – Nisan, 2014	Ders gözlemlerinin yapılması
	Mayıs, 2014	Pilot çalışmanın gerçekleştirilmesi ve veri toplama araçlarının düzenlenmesi
	Haziran, 2014	Öğretmenlerle görüşmelerin yapılması ve ilgili dokümanların toplanması

### 3.4. Veri Toplama Araçları

Durum çalışmalarında birden fazla veri toplama yöntemlerinin kullanılması önemlidir (Yin, 2009). Böylece araştırmanın veri tabanı zenginleşir ve araştırma sonuçları daha geniş bir bakış açısıyla yorumlanabilir (Yıldırım & Şimşek, 2011). Ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerini incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada veriler görüşme, gözlem ve doküman inceleme yöntemleri kullanılarak toplanmıştır.

#### 3.4.1. Ders Gözlemleri

Gözlem, herhangi bir ortamda oluşan davranışa ilişkin ayrıntılı ve kapsamlı bilgi elde etmek amacıyla kullanılan nitel veri toplama yöntemidir (Bailey, 1982; Akt.

Yıldırım & Şimşek, 2011). Nitel araştırmalarda gözlem nicel araştırmalara göre daha az yapılandırılır. Araştırmacı, önceden belirlenmiş kategori ve sınıflandırmalar kullanmayarak açık uçlu gözlemler yapabilir. Davranışlar doğal akışı içinde gözlemlenir (Punch, 2005). Bu araştırmada ders gözlemlerinin temel amacı öğretim sürecindeki uygulamalar kapsamında öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemektir. Ders gözlemleri bu sürecin bütüncül ve detaylı olarak incelenmesine olanak sağlamıştır.

Araştırma verilerinin toplandığı 2013-2014 eğitim öğretim yılında uygulanmakta olan İlköğretim Matematik Dersi (6-8. Sınıflar) Öğretim Programı'nda (2009) cebir öğrenme alanına geçiş 6. sınıf düzeyinde yer almaktadır. Bu kapsamda ders gözlemleri 6. sınıflar kapsamında yapılmıştır. Her bir öğretmenin 6. sınıf düzeyinde örüntüler ve ilişkiler, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularını işledikleri toplam 10 ders saati gözlenmiştir. Bu konular programda bir arada yer almaktadır.

Ders gözlemlerinde ilk olarak Hale ve Emre öğretmenin dersleri gözlenmiştir. Hale ve Emre öğretmenin aynı okulda görev yapması ve gözlemlenecek derslerinin saatlerinin farklı olması, ders gözlemlerinin çakışmamasına ve eş zamanlı olarak gerçekleştirilmesine olanak sağlamıştır. Hale ve Emre öğretmenin ders gözlemleri tamamlandıktan sonra ise Ayla öğretmenin dersleri gözlenmiştir. Ayla öğretmenin gözlemlenecek konuları Hale ve Emre öğretmenden daha sonra işlemiş olması ders gözlemlerinin çakışmasını engellemiştir. Her bir ders yaklaşık olarak 40 dakika gözlenmiştir. Gözlem sırasında gözleme ilişkin alan notları oluşturulmuştur. Gözlemlenen dersler video kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Her bir öğretmenin gözlemlenen derslerine ilişkin bilgiler Tablo 3.2, 3.3 ve 3.4'de sunulmuştur.

**Tablo 3.2: Ayla Öğretmen: Ders Gözlemleri**

<i>Zaman</i>	<i>Süre</i>	<i>Sınıf</i>	<i>Konu</i>
<i>Nisan, 2014</i>	2 ders saati	6-A	Örüntüler ve İlişkiler
	2 ders saati	6-A	Cebirsel İfadeler
	6 ders saati	6-A	Eşitlik ve Denklem

**Tablo 3.3: Hale Öğretmen: Ders Gözlemleri**

<i>Zaman</i>	<i>Süre</i>	<i>Sınıf</i>	<i>Konu</i>
<i>Mart, 2014</i>	2 ders saati	6-E	Örüntüler ve İlişkiler
	2 ders saati	6-E	Cebirsel İfadeler
	6 ders saati	6-E	Eşitlik ve Denklem

**Tablo 3.4: Emre Öğretmen: Ders Gözlemleri**

<i>Zaman</i>	<i>Süre</i>	<i>Sınıf</i>	<i>Konu</i>
<i>Mart, 2014</i>	2 ders saati	6-B	Örüntüler ve İlişkiler
	2 ders saati	6-B	Cebirsel İfadeler
	6 ders saati	6-B	Eşitlik ve Denklem

### 3.4.2. Görüşmeler

Görüşme nitel çalışmalarda en yaygın kullanılan veri toplama yöntemlerinden biridir (Glesne, 2013; Merriam, 2009; Patton, 2002; Punch, 2005). Görüşme bireylerin gözlemlenemeyen düşüncelerini, davranışlarını ve duygularını öğrenmek için kullanılır (Merriam, 2009). Görüşmenin amacı bireyin bakış açısını anlamaktır (Creswell, 2007; Patton, 2002). Bu çalışmada görüşme türlerinden yarı yapılandırılmış görüşme kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmede keşfedilmek istenen duruma yönelik katılımcı görüşleri derinlemesine incelenebilir (Merriam, 2009; Punch, 2005; Yin 2009).

Araştırmada görüşmeler ders gözlemleri tamamlandıktan sonra yapılmıştır. Görüşmelerin ders gözlemlerinden sonra yapılmasının sebebi öğretmenlerin ders anlatımlarının yapılan görüşmelerden etkilenmemesini sağlamak ve görüşme formlarını ders gözlemlerinden yola çıkarak yapılandırmaktır. Görüşmelerde ders gözlemleri ve pilot uygulama sonrası son şekli verilen yarı yapılandırılmış görüşme formları kullanılmıştır. Görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelere ilişkin bilgi Tablo 3.5'de verilmiştir.

**Tablo 3.5: Görüşme Sürecine İlişkin Bilgiler**

<i>Zaman</i>	<i>Aşama</i>	<i>Amaç</i>	<i>Araç</i>
<i>Haziran, 2014</i>	Ön Görüşme	Öğretmenleri tanıma Karşılıklı güven ortamı oluşturma	Yarı yapılandırılmış görüşme soruları
	Görüşme I	Öğretmenlerin cebir, cebir öğrenme ve öğretimine yönelik bakış açıları ile cebir öğretimine ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri hakkında bilgi sahibi olma	Yarı yapılandırılmış görüşme soruları
	Görüşme II	Öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri hakkında bilgi sahibi olma	Öğretim senaryolarına ilişkin görüşme soruları

### Ön Görüşme

Bu görüşmede öğretmenleri yakından tanımaya yönelik veri toplanmıştır. Öğretmenlere mesleki deneyimleri, görev yaptıkları okul ortamları, mesleğe yönelik tutumları, üniversitede almış oldukları eğitim, bir matematik öğretmenin

özellikleri/yeterlikleri hakkındaki görüşleri vb. sorular yöneltilmiştir. Bu görüşmede kullanılan görüşme formu Ek 5’de sunulmuştur. Ayrıca bu görüşmede tanışma ve araştırmacı ile katılımcılar arasında bir güven ortamı oluşturulması hedeflenmiştir.

## **Görüşme I**

Bu görüşmede kullanılan görüşme formu iki bölümden oluşmaktadır (Ek 6). Görüşmenin ilk bölümünde öğretmenlerin cebir, cebir öğrenme ve öğretimine yönelik bakış açıları hakkında bilgi sahibi olunması amaçlanmıştır. Bu kapsamda görüşme formunun ilk bölümünde öğretmenlerin cebir konularına olan ilgisi, tutumu ile cebir konularına, cebir öğrenmeye ve öğretmeye yönelik görüşlerini açığa çıkarmaya yönelik sorulara yer verilmiştir. Aşağıda bu kapsamda hazırlanan görüşme sorularına örnekler verilmiştir.

- Cebirin ortaokulda önemli bir öğrenme alanı olduğu kabul edilir. Siz bu düşünceye katılıyor musunuz? (Evet ise) Matematik içerisinde cebir/cebir konuları neden önemlidir?
- Cebir altıncı sınıf öğrencilerinin ilk kez karşılaştıkları bir konu, yeni bir öğrenme alanı. Sizce ortaokul 6. sınıf seviyesinde cebir öğretimine başlamak uygun mudur? (Evet-Hayır ise) Neden?
- Sizce cebir (en iyi) nasıl öğrenilir/öğrenilmelidir? Niçin?
- Sizce cebir (en iyi) nasıl öğretilir/öğretilmelidir? Niçin?

Görüşme formunun ikinci bölümünde öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgileri hakkında bilgi sahibi olunması amaçlanmıştır. Bu kapsamda öğretmenlerin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerini açığa çıkarmaya yönelik sorular hazırlanmıştır. Aşağıda bu kapsamda hazırlanan görüşme sorularına örnekler verilmiştir.

- Sizce değişken kavramını anlamak (matematik öğrenme süreci açısından) neden önemlidir?
- Cebire örüntüler konusu ile geçiş yapılması hakkında ne düşünüyorsunuz? Cebire geçişte bu konunun tercih edilme sebebi sizce ne olabilir? Öğrenciler bu konuyu öğrenirken cebirin hangi kavramlarını öğrenmiş oluyorlar?



- Sizce öğrenciler cebirsel ifadeler konusunu en iyi nasıl anlayabilirler/öğrenebilirler?
- Öğrencilerin eşitlik ve denklem konusunu anlayabilmeleri için neleri bilmesi gerekir? Ön bilgileri neler olmalıdır?

## Görüşme II

Bu görüşmede öğretmenlerin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerini açığa çıkarmaya yönelik öğretim senaryoları hazırlanmış ve öğretmenlere bu senaryolara ilişkin sorular sorulmuştur. Bu öğretim senaryoları ilgili alan yazın incelenerek (Aquiths, Stephens, Knuth & Alibali, 2007; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980, Booth, 1988; Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil, Weinberg & Stephens, 2008; Falkner, Levi, Carpenter, 1999; Kieran, 1981; Kuchemann, 1978; Usiskin, 1999) oluşturulmuştur. Hazırlanan öğretim senaryoları ile öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri hakkında detaylı bilgi edinilmesi amaçlanmıştır. Bu görüşmede kullanılan görüşme formu Ek 7’de sunulmuştur. Bu formda yer alan öğretim senaryolarının değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularına göre dağılımı Tablo 3.6’da sunulmuştur.

**Tablo 3.6: Öğretim Senaryolarının Konulara Göre Dağılımı**

<i>Konu</i>	<i>S 1</i>	<i>S 2</i>	<i>S 3</i>	<i>S 4</i>	<i>S 5</i>	<i>S 6</i>	<i>S 7</i>	<i>S 8</i>
<i>Cebirsel İfadeler</i>	X	X	X					
<i>Değişken</i>				X	X	X		
<i>Eşitlik ve Denklem</i>							X	X

Öğretim senaryolarına yönelik oluşturulan soru maddelerinin alan ve pedagojik alan bilgisi (alana ilişkin öğrenci bilgisi ile alan ve öğretim bilgisi) boyutlarına göre dağılımı ise Tablo 3.7’de sunulmuştur.

**Tablo 3.7: Öğretim Senaryoları Maddelerinin Boyutlara Göre Dağılımı**

<b>Boyut</b>	<b>S 1</b>	<b>S 2</b>	<b>S 3</b>	<b>S 4</b>	<b>S 5</b>	<b>S 6</b>	<b>S 7</b>	<b>S 8</b>
<b>Alan Bilgisi</b>	1.a 1.b	2.a	3.a	4.a	5.a	6.a	7.a	8.a
<b>Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi</b>		2.b	3.b	4.b 4.c	5.b 5.c	6.b 6.c	7.b 7.c	8.a
<b>Alan ve Öğretim Bilgisi</b>	1.b	2.c	3.c	4.d	5.d	6.d	7.d	8.b

Öğretim senaryolarında örnek öğretim durumlarına yer verilmiştir. Aşağıda örnek bir öğretim senaryosu ve öğretim senaryolarına yönelik öğretmenlere yöneltilen sorulardan örnekler sunulmuştur.

Senaryo 2: Cebirsel ifadeler konusunun işlendiği bir derste öğrencilerinize aşağıdaki gibi bir soru yönelttiğinizi varsayalım.

*“3x ifadesine 4 eklersem ne olur?”*

Bu soruya sınıfınızdaki Çınar isimli bir öğrencinin aşağıdaki gibi bir cevap verdiğini farz edelim.

*“3x ifadesine 4 eklersem 7x bulurum.”*

- Çınar’ın cevabını nasıl değerlendirirsiniz?
- Çınar neden böyle bir cevap vermiş olabilir?
- Çınar’ın verdiği cevaba yönelik kendisine nasıl bir dönüt verirdiniz?

#### Alan Bilgisi

- Öğrencilerin yaptıkları tanımları nasıl değerlendirirsiniz? (Senaryo 1,a)
- Yunus’un açıklamalarını nasıl değerlendirirsiniz? (Senaryo 3,a)
- Elif öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir? (Senaryo 7,a)

#### Pedagojik Alan Bilgisi

##### *Alana ilişkin öğrenci bilgisi*

- Öğrencilerin bu soruya ilişkin olası düşünceleri ve bu soruyu cevaplarken yapabilecekleri hatalar neler olabilir? (Senaryo 4,b)

- Öğrencilerin bu olası düşüncelerinin ve hatalarının nedenleri neler olabilir?  
(Senaryo 4,c)

#### *Alan ve öğretim bilgisi*

- Öğrencilerin bu hataları/kavram yanılgıları sizce nasıl düzeltilebilir?  
(Senaryo 5,d)
- Çınar'ın verdiği cevaba yönelik kendisine nasıl bir dönüt verirdiniz?  
(Senaryo 2,c)
- Ezgi öğretmenin Yunus'a nasıl bir açıklama yapması uygun olur? (Ezgi öğretmenin yerinde olsaydınız Yunus'a nasıl bir açıklama yapardınız?)  
(Senaryo 3,c)

Yapılan görüşmede, öğretmenlere yöneltilen öğretim senaryoları öğretmenlerin gözlemlenen derslerinde karşılaşılan benzer durumlar ile de ilişkilendirilmiştir. Bu sayede öğretmenlerin kendi öğretim süreçlerinden yola çıkarak da yöneltilen soruları cevaplandırmaları amaçlanmıştır. Öğretmenlere verilen senaryolardan sonra “Siz kendi derslerinizde bu tür durumlarla karşılaşıyor musunuz? Bu tür durumlarda nasıl bir yol izliyorsunuz?” gibi sorular yöneltilerek öğretim senaryolarını kendi ders süreçleri ile ilişkilendirerek yanıtlamaları sağlanmaya çalışılmıştır. Bu yaklaşım, öğretmenlerin soruları daha derinlemesine yanıtlamalarına katkı sağlamıştır.

#### **3.4.3. Doküman İnceleme**

Dokümanlar nitel araştırmalarda etkili bir şekilde kullanılması gereken önemli bilgi kaynaklarıdır. Doküman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu veya olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini kapsar (Yıldırım & Şimşek, 2011). Bu araştırmada doküman incelemesinde amaç, gözlem ve görüşme verilerine ek olarak öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgileri hakkında ek verilere ulaşmaktır. Bu çalışmada öğretmenlerin öğretim sürecinde kullandıkları yazılı kaynaklar (yazılı kâğıtları, çalışma yaprakları vb.), öğretmen dokümanları (ders notları, ders kitabı üzerine yazdığı notlar vb.) ve öğrenci ürünleri (defter vb.) doküman analizinde kullanılmıştır. Ek 8'de bu dokümanlardan örnekler sunulmuştur.

### 3.5. Pilot Uygulama

Pilot uygulama 2013-2014 bahar döneminde iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşama öğretmenlerin ders gözlemlerinden bir hafta önce gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada öğretmenlerin araştırma verilerinin toplanacağı sınıftaki dersleri cebir konularının öğretimine geçmeden önce ikişer ders saati gözlenmiştir. Bu gözlemlerin araştırma verilerinin toplandığı sınıflarda gerçekleştirilmesi ile öğretmenlerin ve öğrencilerin kameraya ve araştırmacıya alışmaları hedeflenmiştir. Bu sayede, araştırma sürecinde gözlemlenecek derslerin doğal yapısının olumsuz yönde etkilenmemesi sağlanmaya çalışılmıştır. Gözlem öncesinde, gözlem yapılacak sınıflarda yer alan öğrencilerle, öğrenim gördükleri sınıflarda kısa süreli bir görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde öğrencilerle tanışılmış, araştırma hakkında bilgiler (amaç, veri toplama süreci) verilmiş ve soruları yanıtlanmıştır.

Pilot uygulamanın ikinci aşaması araştırma kapsamında geliştirilen veri toplama araçlarını (görüşme formları) denemek ve gerekli düzenlemeleri oluşturmak amacıyla yapılmıştır. Bu amaç kapsamında görüşme formlarının pilot uygulaması araştırmanın ders gözlemlerinden sonra gerçekleştirilmiştir. Bunun sebebi ders gözlemleri süresince de görüşme formlarının düzenlenmiş olmasıdır. Örneğin, birinci görüşme formuna öğretmenlerin öğretim faaliyetlerine yönelik davranışlarına ve almış oldukları kararlara ilişkin sorular eklenmiştir. İkinci görüşme formundaki öğretim senaryolarını oluşturma kısmında ise gözlemlenen derslerdeki durumlar ile ilişkili senaryolara da yer verilmiştir. Düzenlenen görüşme formlarının pilot uygulaması ise Kayseri ilinde görev yapmakta olan Anıl öğretmenle gerçekleştirilmiştir. Mesleğinde dördüncü yılını çalışmakta olan Anıl öğretmen, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü mezunudur.

Anıl öğretmen ile gerçekleştirilen pilot uygulama sonrasında görüşme formlarında yer alan soruların sıralamasında değişiklik yapılmıştır. Ayrıca, aynı anlamı içerdiği tespit edilen bazı sorular birleştirilerek sadeleştirilmiştir. Görüşme formu 3'teki öğretim senaryolarına yönelik sorularda da soru köklerinde değişikliğe gidilmiştir. Soru kökleri kısaltılarak soruların daha anlaşılır olması sağlanmıştır. Öğretmen tarafından tam anlaşılmadığı düşünülen soru köklerindeki ifadeler de değiştirilmiştir. Ayrıca, her bir öğretim senaryosunun öğretmenlere ayrı bir kâğıtta verilmesine karar verilmiştir. Bu uygulamanın görüşmeyi daha verimli kılacağı

düşünülmüştür. Bu duruma ek olarak, öğretim senaryolarına yönelik soruların öğretmenlere verilen kâğıtta yer almamasına, bu soruları araştırmacının öğretmene yöneltmesine karar verilmiştir. Bu sayede öğretmenin öğretim senaryolarına daha iyi odaklanabileceği düşünülmüştür. Yapılan düzeltmeler ve düzenlemeler sonrası görüşme formlarına son şekli (Ek 5-6-7) verilmiştir. Bununla birlikte pilot uygulama yapılacak görüşmelerin yaklaşık süresinin belirlenmesinde de yol gösterici olmuştur. Pilot uygulamada Anıl öğretmen ile gerçekleştirilen her bir görüşme yaklaşık olarak 40 dakika sürmüştür. Bu durum dikkate alındığında veri toplama sürecinde öğretmenler ile gerçekleştirilecek görüşmelerin daha uzun sürme ihtimaline karşılık her bir görüşme için yaklaşık 60 dakika zaman planlaması yapılmıştır.

### **3.6. Veri Analiz Süreci**

Nitel araştırmalarda veri analizi süreci araştırmacının veri toplama aşamasında başlayan bir süreçtir (Creswell, 2007; Patton, 2002). Veri toplama sürecinde veriyi anlamlandırmaya yönelik oluşan fikirler nitel veri analizinin başlangıcını oluşturur. Nitel veri analizinde asıl amaç anlama ve yorumlamadır (Patton, 2002). Bu araştırmada gözlem, görüşme ve doküman incelemesi yoluyla toplanan verilerin analizindeki temel amaç ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerinin incelenmesi, açıklanması ve yorumlanmasıdır. Bu kapsamda araştırma verileri çalışmanın kuramsal çerçevesini oluşturan öğretim için gerekli matematiksel bilgi alanları modeli (Ball, Thames & Phelps, 2008) temel alınarak alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi boyutlarına göre analiz edilmiştir.

Ball ve meslektaşları (2008) alan bilgisi boyutunu alan bilgisi ve özel alan bilgisi şeklinde iki alt kategoriye ayırmışlardır. Bal ve meslektaşları bu iki bilgi boyutunu kuramsal açıdan tanımlamakla birlikte, sınıf içi uygulamalarda bu iki bilgi boyutunun ayrı olarak ölçülmesinde sıkıntılarolduğunu belirtmişlerdir (Ball & Rowan, 2004; Ball, Thames & Phelps, 2008). Bu sebeple bu araştırmada alan bilgisi, genel alan bilgisi ve özel alan bilgisi alt boyutlarına ayrılmayarak alan bilgisi kapsamında bütüncül olarak analiz edilmiştir. Bu sayede öğretmenlerin ilgili konuya ve kavrama ilişkin alan bilgilerinin daha anlamlı olacağı düşünülmüştür. Araştırma verileri pedagojik alan bilgisi basamağında ise “alana ilişkin öğrenci bilgisi” ile “alan ve öğretim bilgisi” kategorilerine göre analiz edilmiştir.

Öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerinin analizinde temel alınan alan ve pedagojik alan bilgisi alt boyutlarının kapsamı Tablo 3.7' de gösterilmiştir.

**Tablo 3.8: Alan ve Pedagojik Alan Bilgisi Alt Boyutları**

---

***Alan Bilgisi***

---

- Matematiksel sembol ve terimleri doğru olarak kullanma
- Matematiksel tanım, süreç ve kavramları açıklama
- Matematiksel bilginin farklı gösterim biçimlerini ve açıklamalarını bilme
- Amaca uygun matematiksel gösterimleri seçme ve kullanma
- Anlatacağı matematik konusunun önceki veya ileriki yıllardaki matematik konularıyla ilişkisini bilme

---

***Pedagojik Alan Bilgisi***

---

- Belirli bir matematiksel konuya ilişkin öğrenci düşüncelerini anlama ve yorumlama (alana ilişkin öğrenci bilgisi)
- Belirli bir matematiksel konuya ilişkin öğrenci zorluklarını, hatalarını, kavram yanlışlarını ve nedenlerini bilme (alana ilişkin öğrenci bilgisi)
- Ders içeriğini ve akışını düzenleme (alan ve öğretim bilgisi)
- Ders içeriğini yapılandırma (alan ve öğretim bilgisi)
  - Öğretim materyalleri
  - Öğretim stratejileri

---

Araştırma kapsamında gözlem, görüşme ve dokümanlardan elde edilen veriler öğretmenlerin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularına ilişkin öğretim bilgilerini derinlemesine ve bütüncül olarak ortaya koymak için betimsel analiz yoluyla analiz edilmiştir. Betimsel analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır. Betimleme ve alıntılama nitel raporlaştırmanın temelini oluşturur. Zengin betimleme nitel veri analizlerinin daha anlamlı olarak sunulmasına olanak tanır. Betimleme sürecinde araştırma verilerinin okuyucular için anlamlı olabilmesi için yeterli betimlemeye ek olarak doğrudan alıntılara yer verilir (Creswell, 2007; Patton, 2002).

Araştırma verilerinin analizine başlamadan önce ilk olarak veriler düzenlenmiştir. Verilerin düzenlenmesinin ilk aşamasında her bir öğretmenin ders gözlem kayıtları gözlem tarihi, gözlenen sınıf ve işlenen konu bilgilerine göre isimlendirilmiştir. Görüşme kayıtları ise görüşme tarihi ve görüşme sırası (ön, birinci, ikinci görüşme)

bilgilerine göre isimlendirilmiştir. Verilerin düzenlenmesinin ikinci aşamasında her bir öğretmenin video ve ses kayıtları çözümlenmiştir. Sonrasında elde edilen çözümler de benzer şekilde isimlendirilmiştir. Verilerin düzenlenmesinin son aşamasında ise gözlem ve görüşme dokümanları ile çözümler bir araya getirilerek her bir öğretmene ilişkin nitel veri seti oluşturulmuştur.

Araştırma verilerinin analizi üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizinin ilk aşamasında, gözlem ve görüşme çözümleri değişken, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem konu alanlarına göre kategorilendirilmiştir. Birden fazla konu alanını içeren veriler alt kategorilere ayrılmıştır. Örneğin, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem konularına ilişkin veriler değişken kavramına ilişkin verileri de içermektedir. Bu sebeple ortak veriler her bir konu alanı için de kategorilere ayrılmıştır. Veri analizinin ikinci aşamasında veriler alan ve pedagojik alan bilgisi alt boyutlarına göre kodlanmıştır. Alan bilgisi boyutunda değişken konusuna yönelik kodlanan veriler değişkenin tanımlanması ve yorumlanmasını içeren verileri sınıflandırmak için alt kodlamalar yapılmıştır. Cebirsel ifadeler konusuna yönelik yapılan kodlamalar cebirsel ifadenin tanımlanması, yorumlanması ve cebirsel ifadelerde işlem sürecinin açıklanması verilerini sınıflandırmaya yönelik kodlanmıştır. Eşitlik ve denklem konusuna yönelik veriler için ise eşitlik, eşitliğin korunumu, denklemin tanımlanması ve yorumlanması ile denklem çözümünün açıklanması verilerine yönelik alt kodlamalar yapılmıştır. Pedagojik alan bilgisi alt boyutlarında ise konu alanlarına göre sınıflandırılan veriler, alana ilişkin öğrenci bilgisi ile alan ve öğretim bilgisi alt boyutları esas alınarak kodlanmıştır.

Veri analizinin son aşamasında ise sınıflandırılan ve kodlanan veriler tanımlanarak yorumlanmıştır. Tanımlama sürecinde gözlem ve görüşme sürecindeki öğretmen ifadelerinden doğrudan alıntılar yapılarak veri analizine ilişkin kanıtlar sunulmuştur. Sonrasında ise öğretmenlerin cebir öğretim bilgilerine yönelik doğrudan alıntılarla sunulan veriler yorumlanarak birbirleriyle ilişkilendirilmiştir.

### **3.7. Geçerlik, Güvenirlik ve Etik**

Geçerlik ve güvenilirlik bir araştırmanın kuramsal çerçevesinin oluşturulması, verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanması ile bulguların sunulması aşamaları ile ilişkilidir. Bu araştırmanın geçerlik ve güvenilirliğinin sağlanmasında (i)

inandırıcılık (iç geçerlik), (ii) transfer edilebilirlik (dış geçerlik) ve (iii) güvenilirlik ölçütleri (Lincoln & Guba, 1985; Merriam, 2009) temel alınmıştır.

İnandırıcılık (iç geçerlik) araştırma bulgularının dış dünyadaki gerçekliğe uyumluluğu ile ilgilidir. Örneğin, bulgular gerçekten var olan durumu açıklıyor mu? sorusu inandırıcılıkla ilişkilidir (Merriam, 2009). Bu araştırmada bulguların inandırıcılığı, araştırmadan elde edilen verilerin öğretmenlerin cebir öğretim bilgilerini gerçekçi bir şekilde yansıtabilmesi ile ilişkilidir. Bu kapsamda öğretmenlerin cebir öğretim bilgilerinin ders süreci temel alınarak incelenmiş olması çalışmanın iç geçerliği için avantaj sağlamıştır. Araştırma bulgularının inandırıcılığını artırmak amacıyla (i) veri toplamada çoklu (birden fazla) yöntemin kullanılması, (ii) katılımcılarla uzun süreli birliktelik ve gözlem ve (iii) katılımcı doğrulaması yöntemleri kullanılmıştır.

İnandırıcılığı artırmak için veri toplama yöntemleri (gözlem, görüşme ve doküman inceleme) çeşitlendirilmiştir. Bu sayede, öğretmenlerin cebir öğretimine ilişkin gözlem aracılığıyla elde edilen veriler görüşme ve doküman incelemesinden elde edilen verilerle detaylandırılmıştır. Ayrıca, gözlemden elde edilen veriler görüşme verileriyle desteklenerek, gözlemden elde edilen verilerin diğer verilerle uyumu da incelenebilmiştir. Bununla birlikte öğretmen bilgisine yönelik gözlemler elde edilemeyen veriler, görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Örneğin, gözlem sürecinde öğretmenlerin pedagojik alan bilgisinin öğrenci bilgisi alt boyutuna ilişkin sınırlı bilgiye ulaşılmıştır. Öğretmenlerin öğrenci bilgisine yönelik bilgisi hakkında yapılan görüşmeler aracılığıyla daha detaylı bilgi sahibi olunabilmiştir.

Araştırma verilerinin toplanma sürecinde öğretmenlerle uzun süreli birliktelik gerçekleştirilmiştir. Öğretmenleri belirleme, gözlem ve görüşme zamanlarını ayarlama sürecinde katılımcılarla gerek yüz yüze gerekse telefonla sıklıkla görüşme gerçekleştirilmiştir. Gözlem sürecinde de her bir öğretmenin toplam 10 ders saati gözlenmiştir. Bu gözlemlerin öncesinde ikişer saat ön gözlemler yapılmıştır. Bu sayede öğretmenlerle yaklaşık dört aylık bir süre birliktelik sağlanmıştır. Öğretmenlerle gerçekleştirilen bu uzun süreli birliktelik araştırma verilerinin inandırıcılığını artırmada önemli bir rol oynamıştır.

Araştırma bulgularının inandırıcılığını artırmak için veri toplama ve veri analiz sürecinde katılımcı onayı (katılımcı doğrulaması) yapılmıştır. Bu kapsamda,



öğretmenlerle yapılan görüşmeler sırasında ders gözlemlerine ilişkin araştırmacının yaptığı yorumlara ilişkin öğretmenlerin görüşleri alınmıştır.

Nitel araştırmalarda transfer edilebilirlik (dış geçerlik) araştırma sonuçlarının başka durumlara ne ölçüde uygulanabileceği ile ilgilidir. Okuyucuların kendi durumları ile araştırılan ortamın birbirleriyle ne derece örtüştüğünü görebilmelerini sağlamak ve böylelikle araştırma bulgularının farklı durumlara nakledilebilirlik derecesini görmek amacıyla detaylı tanımlama yapılır (Merriam, 2009). Bu araştırmanın dış geçerliliği zengin ve yoğun tanımlanma ile sağlanmıştır. Araştırmada öğretmenler ve çalıştıkları ortam detaylı olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, araştırma bulguları da kanıtlarla desteklenerek detaylı olarak tanımlanmıştır.

Nitel araştırmalarda güvenilirlik ulaşılan sonuçların toplanan verilerle ne kadar tutarlı olduğudur. Güvenirlik aynı zamanda araştırmayı inceleyen diğer kişilerin araştırma bulgularını araştırma verileri ile tutarlı bulmasını ifade eder (Merriam, 2009). Bu amaçla araştırmada gözlem, görüşme ve doküman inceleme yoluyla elde edilen veriler karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir. Veri analiz sürecinin ilk aşamasında ilk olarak bir öğretmenin verileri kodlanmıştır. Diğer öğretmenlerin verilerinin analiz süreci ilk öğretmen ile karşılaştırmalı olarak yapılarak kodlamalardaki tutarlılık test edilmiştir. Gerekli durumlarda kodlamalarda düzenlemelere gidilmiştir.

Araştırmanın etiğinin sağlanması için birtakım uygulamalar yapılarak önlemler alınmıştır. İlk olarak araştırma Hacettepe Etik Komisyonu'ndan gerekli izin (Ek 1) alınmıştır. Sonrasında katılımcılar ve öğrenciler araştırma süreci hakkında bilgilendirilmişlerdir. Araştırma verilerini toplamaya başlamadan önce öğretmenlerle yapılan ön görüşmelerde etik hususlar hakkında açıklamalar yapılmıştır. Araştırma süreci içerisinde herhangi bir sebep belirtmeden araştırmadan çekilme hakkına sahip oldukları vurgulanmıştır. Ayrıca, öğretmenlere araştırmada gerçek isimleri yerine takma isim kullanılacağı ve gözlem ve görüşmelere ilişkin kayıtların güvenli bir ortamda saklanacağı hakkında bilgi verilmiştir. Yapılan açıklamaların ardından öğretmenlere onaylanmış gönüllü katılım formu (Ek 3) verilerek formdaki bilgileri dikkatle okuyarak doldurmaları istenmiştir.

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerin ardından, gözlem yapılacak sınıflarda yer alan öğrencilere araştırma hakkında bilgiler verilmiştir. Video kaydının araştırma amaçlı yapıldığı ve kayıtların araştırma dışında başka ortamlarda paylaşılmayacağı vurgulanmıştır. Ayrıca, araştırmada gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılacağı belirtilmiştir. Sonrasında öğrencilerin soruları yanıtlanmış ve hazırlanan veli onay formları (Ek 4) dağıtılmıştır. Öğrencilerden bu formları anne veya babalarına ileterek dikkatle okumalarını sağlayarak doldurmaları istenmiştir.

### **3.8. Araştırmacının Rolü**

Nitel araştırma sürecinde araştırmacı, veri toplama sürecini yönlendirici bir rol üstlenir. Bu sebeple araştırmacının araştırdığı konuya yönelik motivasyonu önemlidir (Merriam, 2009; Patton 2002). Araştırmacı olarak bu konuya yönelmem de 2 yıl süreyle öğretmenlik yapmış olmamın belirleyici olduğunu söyleyebilirim. Öncelikle bu araştırmanın sınıf ortamında vakit geçirmeme fırsat tanıyacak bir araştırma olmasının, bu süreçte motive olmamda belirleyici olduğunu belirtmek isterim. Bununla birlikte öğretimdeki başarıda en önemli faktörün öğretmenler olduğu kanısındayım. Bu iki durumu göz önünde bulundurduğumda ve öğretmen bilgisinin sınıf ortamında araştırılmasının önemli olduğunu düşündüğüm için bu kapsamda bir araştırma gerçekleştirmek istedim. Araştırma sürecinde matematik eğitimcisi araştırmalarının öğretim sürecini esas alan araştırmalara daha çok yönelerek çalışma alanından uzak kalmamalarının önemine yönelik inancımın arttığını vurgulamak isterim.

Nitel araştırmanın doğası düşünüldüğünde araştırma sürecinde katılımcılarla güven kurmak önemlidir. Öğretmenler veri toplama sürecinde kendilerine yönelik bir değerlendirme yapıldığını düşünerek olumsuz bir algı oluşturabilirler. Böyle bir algı oluşması, öğretmenlerin kendilerini rahat ifade etmelerini engelleyerek veri toplama sürecini olumsuz etkileyecektir. Bu durumun oluşmaması için araştırmacı olarak öğretmenlerle yaptığım genel görüşmelerde araştırma sürecini detaylı olarak açıklayarak ve öğretmenlerin araştırma sürecine ilişkin sorularını samimiyetle cevaplayarak güven ortamı oluşmasını sağlamaya çalıştım. Bu süreçte öğretmenlik deneyiminin, empati kurmamı sağladığı için öğretmenlerle iletişim kurmama yardımcı oldu.

Araştırmacı olarak ders gözlemlerinde katılımsız gözlemci rolünü üstlendim. Gözlemlenmiş olduğum derslerin, gözlem sürecinden olumsuz etkilenmemesi için ders başlamadan önce sınıfı düzenleyerek (sınıftaki sıralar, kamera konumu vb.) video kaydına hazır hale getirdim. Bu sayede zaman kaybını engellemeye çalıştım. Ders sürecini olumsuz olarak etkilememek için video kamerayı öğrencilerin görüş pozisyonunun dışında, sınıfın arka tarafına yerleştirdim. Ayrıca video kaydı sırasında öğrencilerin ve öğretmenin rahatsızlık duymaması için göz teması kurmamaya özen gösterdim. Bu süreçte hem kamera kullanımını gerçekleştirdim hem de gözleme ilişkin alan notlar aldım.

Yapılan görüşmelerde öğretmenlerin kendilerini rahat hissetmeleri için öncelikle görüşme ortamını düzenledim. Görüşmeler öğretmenlerin görev yaptıkları okullarda, kendilerini rahat ifade edebilecekleri sessiz ortamlarda gerçekleştirilmiştir. Yapılan görüşmelerin zamanı ayarlanırken öğretmenlerin iş yoğunluğunun olmadığı geniş zamanlar belirlenmiştir. Bu sayede görüşmelerin daha verimli geçmesi sağlanmıştır. Ayrıca, görüşme süresince öğretmenleri yönlendirecek yorumlardan kaçınılmıştır. Öğretmenlerin yapılan görüşmelerde ve ders gözlemlerinde kendilerini rahat bir şekilde ifade ettikleri gözlenmiştir. Öğretmenler de araştırma sürecinde bir güven ortamı oluşturulduğunu ve bu sebeple ders gözlemlerinden ve görüşmelerden herhangi bir rahatsızlık duymadıklarını ifade etmişlerdir.

## 4. BULGULAR ve YORUM

Araştırmanın bu bölümünde ortaokul matematik öğretmenlerinin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine ilişkin matematiksel bilgilerine yönelik elde edilen bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir. Bu kapsamda her bir öğretmene ilişkin bulgular ayrı olarak sunulmuştur.

### 4.1. Ayla Öğretmen

Ayla öğretmen matematikte işlem gerektiren konularda, soyut düşünme gerektiren konulara göre daha başarılı olduğunu belirtmiştir. Bu sebeple, işlem ağırlıklı olduğunu düşündüğü cebir konularını diğer konulara kıyasla daha çok sevdiğini ve öğrencilik yıllarında cebir konularını öğrenmede zorluk yaşamadığını ifade etmiştir. Ayrıca, cebirin temelini oluşturan denklemler konusunu bir bulmacaya benzettiğini ve uğraşmaktan çok keyif aldığını belirtmiştir.

Ayla öğretmen kendi öğrencilik yıllarındaki matematik öğretimi yaklaşımları ile günümüzdeki matematik öğretimi yaklaşımlarında farklılıklar olduğunu düşünmektedir. Bu durumla paralel olarak cebir öğretiminde de farklılıklar olduğunu ifade etmiştir. Ayla öğretmen, öğrencilik yıllarında cebirin tanım ve ezber ağırlıklı öğretildiğini belirtmiştir. Ortaokuldaki matematik öğretmenin derse bir tanım yazarak başladığını ve sonrasında da örnek çözümyle devam ettiğini ifade etmiştir. Bu sebeple zaman zaman konuları anlamakta zorlandığını belirtmiştir. Ayla öğretmen günümüzdeki matematik ve cebir öğretiminin ezbere dayalı olmayan, yenilikçi bir yaklaşım olduğunu düşünmektedir.

Ayla öğretmen cebir öğretiminde önemli gördüğü iki noktayı vurgulamıştır. Bunlardan ilki öğrencilerin konuyu anlayarak ve günlük yaşamla ilişkilendirerek öğrenmelerinin sağlayacak öğretimin tasarlanmasıdır. Ayla öğretmen öğrencilerin cebiri günlük yaşamla ilişkilendirerek öğrenmeleri gerektiğine inanmaktadır. Öğrencilerin cebir konularını öğrenirken yaptıkları işlemlerin çoğunu aslında günlük yaşamda kullandıkları için gerçekleştirilecek öğretimin de bu yönde olmasının anlamlı öğrenmelerinde büyük bir rol oynayacağını düşünmektedir. Derslerinde de cebir konularını öğrencilerin günlük yaşamıyla ilişkilendirerek anlatmaya çalıştığını belirtmiştir. Ancak, bu noktada çok başarılı olmadığını düşünmektedir.

Ayla öğretmenin cebir öğretiminde önemli gördüğü bir diğer nokta ise öğretimin öğrencilerin düşünmelerini sağlayacak şekilde tasarlanmasıdır. Ayla öğretmen öğrencilerin düşünmelerini sağlayacak örnekler kullandığında konuyu daha iyi anladıklarına inandığını belirtmiştir. Ancak bu düşüncesini ders sürecine aktarmada zorluklar yaşadığını düşünmektedir. Örnek olarak eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste öğrencilerin eşitliğin ne olduğunu düşünmelerine olanak sağlayan örnekler ve sorular sormadığını fark ettiğini belirtmiştir.

#### 4.1.1. Değişken

##### 4.1.1.1. Alan Bilgisi

Ayla öğretmen, değişken kavramını tanımlarken, cebirsel ifade, denklem ve özdeşliklerde kullanılan harf sembollerine vurgu yapmış ve harf sembolleri için “birer bilinmeyendir yani değişkendir” ifadesini kullanmıştır. Açıklamasında değişken kavramını farklı değerler alabilen harf sembolleri olarak da tanımlamıştır.

*“İşte mesela cebirsel ifadelerde, denklemlerde, yani kısaca matematikte kullandığımız harfler birer bilinmeyendir yani değişkendir. Mesela  $a+3=5$  denkleminde  $a$  bir bilinmeyen yani değişkendir. Örneğin,  $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$  özdeşliğini düşündüğümüzde  $a$  ve  $b$  farklı değerler alabilir, değişebilir. Yani, değişken farklı değerler verebileceğimiz harf sembolleridir diyebiliriz.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

Yukarıdaki açıklamada Ayla öğretmenin değişken kavramına ilişkin birbiri ile çelişen tanımlar yaptığı görülmektedir. Ayla öğretmen değişkeni, farklı değerler alabilen harf sembolleri olarak tanımlamıştır. Bu tanımına paralel olarak da değişkenlerin genelleştirilmiş sayı olarak kullanıldığı özdeşlikleri örnek vermiştir. Örneğin,  $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$  özdeşliğindeki  $a$  ve  $b$  harf sembollerinin farklı değerler alabileceği için birer değişken olduğunu belirtmiştir. Ancak,  $a + 3 = 5$  denklemindeki  $a$  harf sembolünü de tek bir değer almasına rağmen değişken olarak nitelendirmiştir. Bu durum, Ayla öğretmenin değişken ve bilinmeyeni eş anlamlı olarak birbirinin yerine kullanmasından ve harf sembollerinin hepsini “değişken ve bilinmeyen” olarak tanımlamasından kaynaklanmaktadır. Başka bir deyişle, Ayla öğretmen değişkeni temsil etmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları arasında bir ayrım gözetmemektedir.

Ayla öğretmenin ders sürecinde de bilinmeyen ve değişen değerleri temsil etmekte kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları arasındaki ayrımı gözetmediği

gözlenmiştir. Derslerinde değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin denklemlerde sınırlı sayıda değerler alabilirken cebirsel ifadelerde herhangi bir değer alabileceği fikrine yer vermemiştir. Örneğin, eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste  $x + 2 = 7$  denklemindeki  $x$  sembolü için “*bilinmeyen yani değişkendir*” ifadesini kullanmıştır [SG5- K: Eşitlik ve Denklem]<sup>1</sup>. Cebirsel ifadeler konusunun işlendiği derste ise cebirsel ifadelerde kullanılan harf sembolleri için de “*bilinmeyen, yani değişken*” ifadesini kullanmıştır [SG4- K: Cebirsel İfadeler]. Bu bulgular, Ayla öğretmenin değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları arasında bir ilişkilendirme yapmadığını göstermektedir.

Bununla birlikte Ayla öğretmenin, eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste değişkenin tanımına yönelik hatalı bir açıklama yaptığı da gözlenmiştir. Ayla öğretmen iki ayrı denklemde aynı harf sembolü ile gösterilen bilinmeyeni, farklı denklemlerde farklı değerler aldığı için değişken olarak tanımlamıştır.

**Ayla Öğretmen:** İki tane denklem ( $b+1=5$  ve  $b-2=7$ ) yazdım. Biz burada  $b$ 'ye değişken demiştik, bilinmeyen demiştik. Fakat birinci denkleme baktığımızda  $b$  kaç?

**Öğrenciler:** 4.

**Ayla Öğretmen:** Birinci denklemde  $b$ , 4. Peki, ikinci denklemde  $b$  kaç olacak?

**Öğrenciler:** 9.

**Ayla Öğretmen:**  $b=9$ . Yalnız şunu karıştırmayın biz soru çözerken fark etmeniz gereken bir şey var. Bir soruda  $x$  mesela 5 çıkıyordu. Diğer soruda  $x$  mesela 4 çıkıyordu ya da 10 çıkıyordu. Sorudan soruya  $x$ 'in değeri değişebilir tamam mı? Biz o yüzden  $x$ 'e bilinmeyen yani değişken diyoruz. Bakın birinci soruda  $b$ , 4 çıktı. İkinci soruda yine  $b$  var ama burada 9 çıktı. Değişken olduğunu görebiliyor musunuz? Sorudan soruya değişti. Her yerde  $b$ , 10 çıkacak.  $b$  5 çıkacak değil.

**Burak:** Yani değişiyor hocam, değişkendir.

**Ayla Öğretmen:** Aynen öle değişkendir, değişebilir.

#### [SG9- K: Eşitlik ve Denklem]

Ayla öğretmen,  $b + 1 = 5$  ve  $b - 2 = 7$  denklemlerindeki  $b$  bilinmeyenin aldığı değerlerin sorudan soruya değiştiği için değişken olduğunu ifade etmiştir. Ayla öğretmenin “*Bakın birinci soruda  $b$ , 4 çıktı. İkinci soruda yine  $b$  var ama burada 9 çıktı. Değişken olduğunu görebiliyor musunuz? Sorudan soruya değişti.*” açıklaması bu durumun bir göstergesidir. Bu açıklaması bilinmeyeni temsil etmek için kullanılan aynı harf sembolünü farklı denklemlerde farklı değerler aldığı için değişken olarak tanımladığını göstermektedir.

<sup>1</sup> Sınıf İçi Gözlem 5- Konu: Eşitlik ve Denklem

Ayla öğretmen değişken kavramına yönelik bir başka ifadesinde ise değişkeni sayısal bir değer olarak değil, bir nesne olarak belirtmiştir. Örneğin,  $2k + 3k$  ifadesinde  $k$  değişkenini bir nesne (kalem) olarak belirterek, “2 kalem 3 kalem daha ne olur? 5 kalem.” ifadesini kullanmıştır [SG4- K: Cebirsel İfadeler]. Bilinmeyen için kutu gösterimi kullandığı bir diğer ifadesinde de bilinmeyeni kutuların sayısı olarak değil, bir nesne (kutu) olarak belirtmiştir.

Öte yandan Ayla öğretmen değişkenin genelleştirilmiş sayı ve değişen nicelikler olarak kullanımlarına ilişkin bilgi sahibidir. Kendisine değişkenin farklı anlamlarına ilişkin bazı matematik soruları yöneltilmiş ve bir matematik öğretmenin dersinde bu soruları hangi amaçla kullanabileceği sorulmuştur [Ayla Öğretmen, Görüşme III].

1.  $n$  bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür? (Senaryo 4, a)
2.  $a$ ,  $b$ 'den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$  (Senaryo 4, b)
3.  $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde  $x$ ' in alabileceği değerler nelerdir? (Senaryo 5)

Ayla öğretmen, ilk örnek soruyu öğrencilerin  $n$ 'nin alabileceği değerler için bir karşılaştırma yaparak değişkeni kavrayabilmeleri için sorabileceğini belirtmiştir. Benzer şekilde, ikinci örnek soruda  $a$  ve  $b$ 'nin değişken olduğunu ve değişen değerler alabileceğini; üçüncü örnek soruda ise  $x$ 'in tek bir değer değil sonsuz sayıda değer alabileceğini göstermenin amaçlanmış olabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca, Ayla öğretmen değişkenin farklı kullanımlarına ilişkin  $a + b = 12$  ( $a$  ve  $b$  doğal sayı),  $x + y = y + x$  ve  $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$  eşitliklerini örnek vermiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme III]. Ayla öğretmenin bu ifadeleri, değişkenin genelleştirilmiş sayı ve değişen nicelikler olarak kullanımlarına ilişkin bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.

Ayla öğretmenin derslerinde yaptığı uygulamalar da değişkenin değişen nicelikler olarak kullanımına ilişkin bilgi sahibi olduğunu göstermektedir. Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste  $a + b = 12$  ( $a$  ve  $b$  doğal sayı) eşitliği üzerinde durmuştur.  $a$ 'nın aldığı farklı sayı değerlerine göre  $b$ 'nin nasıl değiştiğini açıklamıştır. Öğrencilerle arasında gerçekleşen aşağıdaki diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

**Ayla Öğretmen:** *a'yı değiştirdiğimde a'ya bağlı olarak b de değişiyor mu? a değiştikçe b de değişiyor.*

**Öğrenciler:** *Evet.*

**Ayla Öğretmen:** *a, 3 ise b ne olur?*

**Öğrenciler:** *9.*

**Ayla Öğretmen:** *a, 4 ise b ne olur?*

**Öğrenciler:** *8.*

**Ayla Öğretmen:** *a, 10 ise b ne olur?*

**Öğrenciler:** *2.*

**[SG9- K: Eşitlik ve Denklem]**

Ayla öğretmenin bu eşitlikten sonra yaptığı uygulama da bahsedilen duruma örnek gösterilebilir. Ayla öğretmen  $a + b + c = 15$  (a, b ve c doğal sayı) eşitliğindeki harf sembollerinin aldıkları değerlerin birbirlerine göre değişebileceğini ve farklı değerler alabileceklerini ifade etmiştir.  $a + b + c = 15$  (a, b ve c doğal sayı) eşitliği için a'ya 3 değerini verip, b ile c'nin nasıl değiştiği üzerinde durmuştur. Bu eşitlikte b ve c'nin değişken olduğunu “*Değişiyor görüyor musunuz? b'ye değer verip c'yi buluyorum. Ama şunu diyebilir miyim? b kesin 1'dir. c de kesin 11'dir. Diyebilir miyim?*” ifadeleri ile vurgulamıştır.

**Ayla Öğretmen:** *a'yı 3 vermiş olsun. b'yi, c'yi mi bulabilir miyiz? b, 1 olsaydı, c kaç olurdu?*

**Mert:** *11.*

**Ayla Öğretmen:** *b, 1 olduğunda c 11 oldu. c, 2 deseydim. 2 ile kaçın toplamı 12 yapar?*

**Mert:** *10.*

**Ayla Öğretmen:** *Değişiyor görüyor musunuz? b'ye değer verip c'yi buluyorum. Ama şunu diyebilir miyim b kesin 1 dir? c de kesin 11 dir. Diyebilir miyim?*

**Mert:** *Hayır.*

**Ayla Öğretmen:** *b, 2 de olabilir. 3 de olabilir. 5 de olabilir.*

**[SG9- K: Eşitlik ve Denklem]**

Ayla öğretmen bir sayı örüntüsünün genel terimini bulma sürecinde de örüntünün genel terimindeki n değişkeninin değişebilen değerler aldığını belirtmiştir. Ayla öğretmenin 2, 4, 6, 8, 10... sayı örüntüsüne yönelik aşağıdaki açıklamaları bir sayı örüntüsünü genelleme sürecinde değişkenin kullanımı hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.



**Ayla Öğretmen:** Birinci terimde 2, ikinci terimde 4, üçüncü terimde 6, dördüncü terimde 8. Peki devam ettirdim. Ellinci terimde ne dediniz? 100. Peki örüntünün kuralına ne dediniz?

**Öğrenciler:** İkinci katları.

**Ayla Öğretmen:** Bakın arkadaşlar, birinci terim dediğimde 1'i kaçla çarptım 2. İkinci terim de kaçla çarptım? 2. Üçüncü terimde kaçla çarptım? 2 ile çarpıp 6'yı buldum. Dördüncü terimde kaçla çarptım? 2. O zaman n. terimde n'yi kaçla çarpmam lazım?

**Öğrenciler:** 2.

**Ayla Öğretmen:** Aferin, işte dizinin genel terimi 2.n olur.

**Öğrenci:** Hocam, n ne anlama geliyor?

**Ayla Öğretmen:** Burada n, siz değiştirebilirsiniz n'yi. n yerine a da diyebilirim. n burada bir değişkendir. Ben genelleme yapıyorum ya, n'nin yerine 1 de yazabilirim, 2 de yazabilirim, 3 de yazabilirim. n bir değişkendir. Eğer n'nin yerine 1 yazarsam hangi terimi bulurum? Birinci terimi. Bak yazalım.  $2 \cdot 1 = 2$ , birinci terimi elde ettim mi?

**Öğrenciler:** Evet.

#### [SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Ayla öğretmenin 2, 4, 6, 8, 10...sayı örüntüsünün 2.n genel terimine yönelik “n burada bir değişkendir. Ben genelleme yapıyorum ya, n'nin yerine 1 de yazabilirim, 2 de yazabilirim, 3 de yazabilirim.” ifadesi bir sayı örüntüsünü genelleme sürecinde değişkenin kullanımı hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir. Bu açıklamasında n'nin bir değişken olduğunu ve değişen değerler alabileceğini vurguladığı görülmektedir. Örüntüler ve ilişkiler konusunun işlendiği derste sayı örüntüsü ile ilgili yaptığı diğer uygulamalarda da bir sayı örüntüsündeki sıra sayısının değişen değerler alabileceği ve bu değerlerin n. adım olarak ifade edildiğini vurgulamıştır. Ayla öğretmenin 3, 6, 9, 12, ... sayı örüntüsünün 3.n genel terimindeki n değişkeninin değişebilen değerler aldığını belirtmek için tahtada yaptığı gösterim aşağıda verilmiştir (bkz. Şekil 4.1) [SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler].

3 = 3 x (1)  
6 = 3 x (2)  
9 = 3 x (3)  
12 = 3 x (4)

3.n

kaçıncı terim

#### Şekil 4.1

Ayla öğretmenin bir sayı örüntüsünün genelleme sürecinde değişken kullanımından bahsetmesine rağmen aritmetikten cebire yapılan bir genelleme süreci olarak cebirsel ilişkileri detaylı olarak açıklamamıştır. Bu durum aritmetikten cebire

genelleme sürecinde değişkenin kullanımına yönelik bilgisinin sınırlı olduğunu göstermektedir. Altıncı sınıf düzeyinde cebire geçişte örüntüler ve ilişkiler konusunun tercih edilme sebebinin örüntü kuralındaki  $n$  değişkenin farklı değerler aldığı göstermek olduğu yönündeki açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

**Araştırmacı:** Altıncı sınıflarda cebir öğrenme alanına örüntüler ve ilişkiler konusu ile geçiş yapılmaktadır. Cebire geçişte bu konunun tercih edilme sebebi ne olabilir? Bu konunun önemine ilişkin ne söylersin?

**Ayla Öğretmen:** Burada da aslında baktığımız zaman öğrencilere üçüncü terim, beşinci terim, altıncı terim diyoruz. Orada genel terimi  $n$  olan bir dizide biz  $n$ 'nin yerine değişik şeyler verebiliyoruz. Birinci terim dediğimizde 1, ikinci terim dediğimizde 2... Aslında muhtemelen şeydir. Öğrencilere  $n$ 'nin yerine hem 1 yazabileceğini, hem 5 yazabileceğini, hem de 10 yazabileceğini göstermektedir.

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

Ayla öğretmen ve öğrencileri arasında bir sayı örüntüsünün genel terimini bulma sürecinde gerçekleşen aşağıdaki diyalog da yukarıda bahsedilen durumu destekler niteliktedir. Aşağıdaki açıklamaları bir sayı örüntüsünün genel terimini bulma sürecinde değişken kullanımını, cebir konularından bağımsız gördüğünü göstermektedir.

**Tuğba:** Öğretmenim bugün cebir işleyeceğiz demiştiniz.

**Ayla Öğretmen:** Örüntülerden sonra geçeceğiz.

**Umut:** Hocam cebir nasıl bir şey?

**Ayla Öğretmen:** Orada  $x$ 'ler,  $y$ 'ler,  $a$ 'lar,  $b$ 'ler olacak.

[SG2- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Ayla öğretmenin örüntü kuralını bulma sürecinde değişken kullanımını cebir ile ilişkilendirmediğini gösteren bir diğer bulgu ise örüntüler ve ilişkiler konusu ile öğrencilere kazandırılmak istenen bilgi ve becerinin örüntü kuralındaki  $n$ 'nin değişebileceğini göstermek ve bu süreçte öğrencilere asıl kazandırılmak istenen bilgi ve becerinin ise cebirsel ifade yazmak olduğu yönündeki düşüncesidir. Aşağıdaki açıklamaları, örüntüleri genellemede aritmetikten cebire geçiş sürecinde değişken kullanımına değil, kural bulmaya odaklandığını göstermektedir.

**Araştırmacı:** Örüntüler ve ilişkiler konusu ile öğrencilere kazandırılması hedeflenen cebirsel bilgi ve beceriler nelerdir?

**Ayla Öğretmen:**  $n$ 'nin değişebileceğini göstermek istemiş olabilirler. Bilinmeyene verdiğimiz her değer için farklı sonuçlar bulabileceğimizi göstermek istemiş olabilirler. Bu konuya baktığımız zaman genel terimi bulma falan tabi ki önemli ama zaten cebirsel ifadeyi yapabilen öğrenciler bunu yapıyorlar çünkü konu ritmik saymaymış gibi görünüyor ama baktığımız zaman cebirsel ifadeyle alakalı aslında. Öğrencilerin burada asıl yapmaları gereken bir cebirsel ifade bulabilmek. Çünkü

dediğim gibi öğrencilere hem bulduruyoruz bir şeyi sonra sil baştan dönüyoruz tekrar cebirsel ifade nedir diye. Böyle olunca önce cebirsel ifadeler verilir sonra örüntüye geçilebilir.”

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

#### 4.1.1.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.1.1.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Ayla öğretmen öğrencilerin değişken kavramına ilişkin olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin değişkenin değişebilen değerler değil tek bir değer alacağını düşündüklerini ve farklı değerler alabileceğini kavramakta zorlandıklarını belirtmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme II]. Öğrencilerin  $5x$  gibi bir cebirsel ifadede  $x$ 'in tek bir değer alabileceğini düşündüklerini ve bu yönde kavram yanılığı oluşturduklarını ifade etmiştir.

“Öğrenciler  $x$  ve  $y$ 'nin ne olduğunu, aslında değişebilen bir şey olduğunu anlamakta zorlanıyorlar. Örneğin,  $5x$  deyince  $x$  bir tane sayı olacak diye düşünüyorlar. Mesela bazen soruyorum  $x$  ne olabilir diye, biri 1 biri 5 diyor. Hangisi olacak o zaman? Buna yönelik kavram yanılıkları var.”

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

Ayla öğretmenin bu açıklamalarında alan yazında en sık karşılaşılan öğrenci zorluğundan bahsettiği görülmektedir. Bunun yanında Ayla öğretmen “(i)  $n$  bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür?, (ii)  $a$ ,  $b$ 'den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$ ” (Senaryo 4) sorularında öğrencilerin değişkenlerin belirli bir değer alabileceğini düşündükleri için hata yaptıklarından bahsetmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme III]. Öğrencilerin bu tür sorularda en çok yaptıkları hatanın değişkenlere belirli sayısal değerler vererek bir sonuca ulaşmaya çalıştıkları olduğunu ifade etmiştir.

“Bu tür sorularda en çok çok yaptıkları hata birkaç sayıyı deneyerek yapmaya çalışıyorlar. Örneğin,  $3n$  ve  $n+6$  ifadelerinde öğrenci  $n$  yerine 1 yazar 2 yazar belirli değerler vererek karşılaştırma yapar yoksa bir eşitsizlik kesinlikle kuramaz. Ama ikinci soruda öğrenciler 5'e 5 versek 10 olur, hani öğrenciler öyledir ya birine 4 verelim birine 6 verelim.  $a$  için bir değer  $b$  için bir değer verebilirler, farklı değerler olacağını düşünemeyebilirler. 3'e 7 i vermek yerine 6'ya 4 hani 5'e en yakın olanları verebilirler.”

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

Ayla öğretmenin bu sorulara yönelik de alan yazında en sık karşılaşılan öğrenci hatalarından bahsettiği görülmektedir. İlk soruda öğrencilerin  $n$ 'ye belirli değerler vererek karşılaştırma yapacaklarını, ancak bir eşitsizlik ilişkisi kuramayacaklarını

belirtmiştir. Benzer şekilde ikinci soruda da a ve b için 5'e yakın olan 4 ile 6 değerlerini verebileceklerini, a ve b'nin farklı değerler alabileceğini düşünemeyebileceklerini ifade etmiştir.

Ayla öğretmen öğrencilerin genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını anlamalarına ilişkin olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında da bilgi sahibidir. " $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde x'in alabileceği değerler nelerdir?" (Senaryo 5) sorusunda öğrencilerin x'in herhangi bir değer alabileceğini düşünemediklerini ve tek bir değere eşit olacağı yönünde kavram yanılgısı geliştirdiklerini belirtmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme III]. Benzer şekilde  $x + y = y + x$  eşitliğini örnek vermiştir. Bu eşitlikte de öğrencilerin x ve y'nin farklı değerler alabileceğini kavramada zorlandıklarını belirtmiştir. x ve y'ye sabit bir değer vererek eşitliğin sağlanıp sağlanmadığına baktıklarını belirtmiştir. Örneğin, x'e 2 ve y'ye 3 değerini verdiklerini ve bu değerlerle eşitlik doğru oluyorsa, x'in 2 ve y'nin 3'e eşit olduğunu düşündüklerini ifade etmiştir. İlk olarak da "0" değerini verdiklerini ve eşitliği sağladığı için x'in "0" olduğunu düşündüklerini belirtmiştir.

Ayla öğretmen öğrencilerin farklı harf sembolleri ile gösterilen değişkenlerin birbirine eşit olamayacağı yönündeki düşünceleri hakkında da bilgi sahibidir. Öğrencilerin aynı harfle gösterilen değişkenlerin her zaman aynı sayısal değere eşit olduklarına ilişkin kavram yanılgısına sahip olabildiklerini ifade etmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme III]. Bu kavram yanılgısı ile ilişkili olarak, " $x + y + z = x + p + z$  eşitliği doğru mudur?" (Senaryo 7) sorusunda öğrencilerin  $y = p$  olamayacağı için eşitliğin doğru olmayacağı düşündüklerini şu sözleriyle açıklamıştır.

*"Öğrenciler bu eşitliğin  $y=p$  olamayacağı için doğru değildir derler. Çünkü bir tarafta y var, bir tarafta p var. Öğrenci hocam bir yerde x, y ve z'yi topladım diğer yerde x, p ve y'yi topladım cevabını kesin verir. Hocam bir tarafta y var bir tarafta fazladan p var derler."*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Ayla öğretmen öğrencilerin aynı harf sembolü ile gösterilen bir değişkenin aldığı değer her zaman aynı değere eşit olacağını düşündüklerinden de bahsetmiştir.

*"Biz öğrencilere bir a ifadesi verdiğimiz zaman, iki soru yazdığımızda öğrenciler birincide a'yı 2 bulduğu zaman diğerinde de a'nın 2 olacağını düşünüyorlar. a'nın her bir soru için farklı değerler alabileceğini görmeleri lazım. Ben x yazdığım zaman, a yazdığım zaman, x'in a'nın tüm sorularda aynı olacağını düşünüyorlar."*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Öte yandan Ayla öğretmen öğrencilerin değişken kavramını anlamada yaşadıkları zorlukların ve yaptıkları hataların temel sebebi olarak öğretim programındaki sıralamayı göstermiştir. Bu durum Ayla öğretmenin değişken kavramının öğretimine ilişkin alan bilgisinin öğrenci bilgisi üzerinde etkili olduğunu göstermektedir. Ayla öğretmen aritmetikten cebire geçişte örüntüler ve ilişkiler konusunu bir araç olarak görmemekte ve dolayısıyla değişken kavramının öğretiminin bu konu ile yapılmasının öğrencilerin anlamalarını zorlaştırdığını düşünmektedir. Öğrencilerin değişken kavramını cebirsel ifadeler ve denklem konuları ile birlikte daha iyi öğrenebileceklerine inanmaktadır. Bu sebeple de örüntüler ve ilişkiler konusunun cebirsel ifadeler konusundan sonra öğretilmesinin öğrencilerin değişken kavramını öğrenmelerini kolaylaştıracağını belirtmiştir. Aşağıdaki açıklamaları bu yöndeki düşüncelerini yansıtmaktadır.

*“Öğrencilere bir sayı örüntüsü verdiğimde 1,3,5 tabi ki sonrakini tahmin edebiliyorlar. Ritmik saymaları az çok bildikleri için tahmin edebiliyorlar. Ama n. terim dediğimi zaman n daha orda öğrenci için bir şey ifade etmiyor. Öğrenci bir şey ifade etmeyen şeyi, yani n bir şey ifade etmediği için zorlanıyorlar. Öğrenciler direkt böyle bir şeyin içine düşüyorlar. İster istemez n ne bilmiyorlar. Altıncı sınıfta öğrencilere cebirsel ifadeleri ve denklemleri vermeden önce genel terimi buldurmayı gösteriyoruz. Öğrenciler birden karşılaştıkları için ister istemez değişkenin ne olduğunu algılayamıyorlar. x'in, n'nin ne olduğunu bilmeden öğrencilerden genel terimi falan bulmasını istiyoruz. Ondan sonra tekrar cebirsel ifadeye dönüyoruz. x şuydu y şuydu... Benim öğrencilerimde çok sıkıntı yaşadık bu konuda.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme I]**

*“Öğrencilere hem bulduruyoruz bir şeyi (cebirsel kural) sonra sil baştan dönüyoruz tekrar cebirsel ifade nedir diye. Böyle olunca önce cebirsel ifadeler verilip sonra örüntüye geçilebilir.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Ayla öğretmen cebire geçişteki bu zorlukların sebebi olarak öğrencilerin cebir öncesi öğrenmelerindeki olası zorluklara değinmemiştir. Örneğin, öğrencilerin aritmetikte kutu sembolü kullanırken zorlanmadıklarını, ancak harf sembollerinin kullanımına geçince zorlandıklarını belirtmiş ve bu durumun sebebini anlayamadığını ifade etmiştir.

*“Öğrenciler bunları ilkokuldan beri görüyorlar. Bizim dediğimiz x, y değil de belki kutu koyarak problemleri çözebiliyorlar. Sadece x yazmıyoruz, y yazmıyoruz, kutu koyuyoruz. Ama nedense işin içine harf girince yapamıyorlar. Bilmiyorum... Kafam karıştı...”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Ayla öğretmen harf sembolleri ile kutu sembolünün kullanımındaki ayırmadan bahsetmemiştir. Örneğin, kutu sembolünün ilkokulda genellikle bilinmeyen yerine kullanıldığını ancak harf sembollerinin değişkenin farklı kullanımlarına yönelik farklı anlamları içerdiğine değinmemiştir. Aşağıdaki ifadelerinde de öğrencilerin değişkeni anlamada zorlanmalarının sebebi olarak kendi öğretimindeki genel eksikliklerden bahsettiği görülmektedir.

*“Ben kendim içinde söylüyorum. Öğrencilere çok fazla bilinmeyenlerin üzerinde durmadım. x bilinmeyendir y bilinmeyendir, değerler alır dedik ve geçtik. Bunun üzerinde çok fazla konuşmuyoruz. Öğrencilerle çok fazla tartışmadığımız için çok anlamadıklarını düşünüyorum. Soru çözmeye, problem çözmeye daha çok vakit ayırıyoruz. Daha klasik sorular sordüğümüz için öğrencilerde anlama gelişmiyor bence, ne olduğunu tam anlayamıyor öğrenciler. Ondan dolayı fazlasıyla sıkıntı yaşıyor.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

#### 4.1.1.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi

##### Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi

Ayla öğretmenin değişken kavramının öğretimine ilişkin alan bilgisinin öğretim uygulamalarının içeriğini ve akışını düzenlemeye yönelik kararlarını etkilediği görülmüştür. Ayla öğretmen değişken kavramının örüntüler ve ilişkiler konusu ile anlaşılmasının güç olduğunu düşündüğü için örüntüler ve ilişkiler konusunun işlendiği 2 ders saatinde bir sayı örüntüsünün kuralını bulma odaklı öğretim uygulamalarına yer vermiştir. Örüntü kuralındaki  $n$  değişkeninin örüntüyü genelleme sürecinde değişen değerleri temsil etmekte kullanıldığı fikrinin geri planda kaldığı gözlenmiştir. Bu durumun, Ayla öğretmenin örüntüler ve ilişkiler konusunun cebirsel ifadeler ve denklemler konusundan sonra öğretilmesi gerektiği yönündeki düşüncesi ile ilişkili olduğu görülmektedir.

*“Önce cebirsel ifadeden bahsedilse, önce bilinmeyen nedir, x nedir, y nedir anlatılsa. Konu sıralaması olarak cebirsel ifadeden bahsedilip, sayı örüntüsüne ondan sonra geçilse daha iyi olabilir. Belki birkaç cebirsel ifade yazdırılıp bu konu (örüntü ve ilişkiler) daha sonra verilebilir. Denklemler konusundan sonra da verilebilir.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

Ayla öğretmenin bu yöndeki düşüncesi ile uyumlu olarak da ders içeriğinde ve akışında değişiklik yaptığı gözlenmiştir. Ayla öğretmen değişken kavramının öğretimi ile ilişkili uygulamalara örüntüler ve ilişkiler konusundan ziyade cebirsel ifadeler ve denklemler konusundan sonra yer vermiştir. Örüntüler ve ilişkiler,

cebirsal ifadeler ve denklem konularının öğretiminden sonraki bir ders saatinde değişkenin değişebilen değerler aldığını gösteren uygulamalar yapmıştır.

## Ders İşleyişi Bilgisi

### Öğretim Materyalleri

Ayla öğretmen değişken kavramının öğretimine geçişte harf sembolleri yerine öğrencilerin ilkokuldan tanıdık oldukları matematiksel sembolleri kullanmanın önemli olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin değişken kavramını öğrenme sürecinde harf sembolleri kullanıldığında soruları çözemediklerini, ancak kare ve üçgen gibi sembolleri içeren gösterimler kullanıldığında soruları daha kolay çözebildiklerini ifade etmiştir. Harf sembolleri yerine kutu gösterimini kullanmanın öğrencilerin değişken kavramını daha iyi anlamalarını sağladığını düşünmektedir ve derslerinde de bu gösterimi kullandığını belirtmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme II].

Ayla öğretmen değişken kavramına formal geçişi örüntüler ve ilişkiler konusu ile yapmamıştır. Değişkeni temsil etmekte kullanılan harf sembollerine cebirsal ifadelere geçişte yer vermiştir. Bu durumla ilişkili olarak da öğrencilerin aritmetikte bilinmeyen temsil etmekte kullandıkları kutu gösterimini cebirsal ifadeler konusuna geçişte kullanmıştır. Öğrencilerle arasında gerçekleşen diyalog bu durumu göstermektedir.

**Ayla Öğretmen:** Arkadaşlar, hani ilkokulda öğretmeniniz size işlem yapıyordu. Diyordu ki mesela kare yapıyordu. Artı 2 diyordu, eşittir 5 diyordu. ■ + 2 = 5.

**Öğrenciler:** 3.

**Ayla Öğretmen:** Ne yapıyordunuz siz burada?

**Safiye:** Karenin içine sayı yazıyorduk hocam.

**Ayla Öğretmen:** Evet, hangi sayıyla 2'yi toplarsam 5 yapar diyorduk.

**Serkan:** Hocam ikinci sınıfta yapmıştık.

**Ayla Öğretmen:** Aynen. Artık arkadaşlar cebirsal ifadeye geçerken buradaki kareyi silmişler yerine a demişler. Ya da ■ - 7 = 10. Demişler ki hangi sayıdan 7'yi çıkarırsam 10 yapar?

**Öğrenciler:** 17.

**Ayla Öğretmen:** Demişler ki biz buradan artık üçgeni silelim b yapalım. Sorabilirsiniz, öğretmenim bu a'yı b'yi neye göre yazıyorsunuz? Bakın isterseniz a deyin, isterseniz b deyin, isterseniz x, y deyin, hiç önemli değil. Bilmeniz gereken burada yazdığım x'li, a'lı, b'li yazdığım bilinmeyendir, değişkendir. Bakın eğer ben bir bilinmeyenle işlem kullanıyorsam bu tür ifadelere cebirsal ifade adını veriyorum.

[SG4- K: Cebirsal İfadeler]

Ayla öğretmen kutu gösterimi içeren bir denklem örneğine yer vermiş ve cebirsel ifadelerde bu gösterim yerine harf sembollerinin kullanılacağını ifade etmiştir. Bu uygulama, harf sembollerinin bilinmeyen bir değeri temsil etme durumu ile değişen değerleri temsil etme durumu arasındaki ayrımın göz ardı edildiğini göstermektedir.

Ayla öğretmen derslerinde bir değişkenin başka bir değişkene göre değerler aldığı durumları içeren örnek sorular kullanmıştır. Ayla öğretmenin ders sürecinde kullandığı örnek sorular Tablo 4.1’de verilmiştir.

**Tablo 4.1: Ayla Öğretmenin Değişken Öğretiminde Kullandığı Sorular**

Sorular
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>a + b = 12</math> (a ve b doğal sayı) ise a ve b'nin alabileceği değerler nelerdir?</li><li>• <math>a + b + c = 15</math> eşitliğinde <math>a=3</math> için b ve c'nin alabileceği değerler nelerdir?</li><li>• <math>2b - a = 5</math> ise <math>a=1</math> için <math>b=?</math>, <math>a=25</math> için <math>b=?</math></li><li>• <math>a + b = 13</math> ve <math>a &lt; b</math> ise a'nın alabileceği değerler nelerdir?</li></ul>

Ayla öğretmen öğrencilerin değişkenin tek bir değer değil, farklı ve değişen sayısal değerler alabileceğini kavramakta zorlandıkları için yaptığı uygulamalarda bu duruma yönelik sorular seçtiğini ifade etmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme II]. Ancak bu soruların öğrenci seviyesine uygun olmadığı görülmektedir. Matematik Öğretim Programı 6. sınıf düzeyindeki kazanımlar birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri içermektedir. Ayla öğretmenin kullandığı sorularda birinci dereceden iki ve üç bilinmeyenli denklemleri kullandığı görülmektedir. Ayrıca, değişkenin farklı sayısal değerler alabildiğini gösteren farklı soru türleri kullanmamıştır. Örneğin, değişkenin cebirsel ifadelerde değişen değerler alabileceğini gösteren örnek sorulara yer vermemiştir. Ayla öğretmen yapılan görüşmede  $5x$  ve  $x+2$  gibi x değişkeninin farklı değerler alabildiğini gösteren örneklerden bahsetmiş, ancak derslerinde bu tür uygulamalar yapmadığını ifade etmiştir.

*“Bir etkinlik vardı. Etkinlikte  $5x$  yazıyordu. Öğrencilerden x’in yerine değerler verip sonuç bulmalarını istiyordu. Öğrencilere herhangi bir cebirsel ifade verip, x’in değişebileceğini, x değiştikçe işte cebirsel ifadenin sonucunun değişebileceğini öğrencilerin görmesi lazım. Arkadaşım bir materyal hazırlamıştı. İşte bir sayının 2 fazlası, kartondan x yazmış artı 2 yapmış. Mesela x’in yerine biri 5 koyuyordu. İşte 5 yazdığımızda sonuç 7. Başka biri 3 yazıyordu sonuç  $3+2$ , 5. Öğrenci burada x’in tek bir değer değil de farklı değerler alabileceğini fark etmiş oluyordu. Ben bunun pişmanlığını yaşıyorum biraz daha materyal kullansaydım diyorum. Eğleniyorlar, aktif oldukları için. Hem de her değer için farklı sonuç aldıklarını görebiliyorlar.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**



Ayla öğretmen öğrencilerin değişken kavramına ilişkin yaşadıkları zorluklar ve geliştirdikleri kavram yanlışlarına yönelik ise bu yöndeki düşüncelerinin yanlış olduğunu fark etmelerini sağlayacak örnek sorular kullanmıştır. Öğrenci zorlukları ve kavram yanlışları için farklı bir etkinlik veya model kullanmamıştır. Örneğin, derste yaptığı uygulamada ve yapılan görüşmede öğrencilerin aynı harf sembolü ile gösterilen bir değişkenin aldığı değer farklı sorularda da aynı olduğu yönünde geliştirdikleri kavram yanılığı için bu harf sembollerinin farklı sorularda farklı sayı değerine eşit olduğunu gösteren örnekler kullanmıştır. Ayla öğretmen derste yaptığı uygulamada  $b + 1 = 5$  ve  $b - 2 = 7$  denklemlerini örnek olarak kullanmıştır.  $b$  bilinmeyeninin ilk denklemde 4'e ve ikinci denklemde 9'a eşit olduğunu göstermiştir [SG9- K: Eşitlik ve Denklem]. Yapılan görüşmede ise farklı bir sınıfta yaptığı uygulamadan bahsetmiştir.  $a$  harf sembolünü içeren üç farklı denklem kullanarak her bir denklemde farklı bir değere eşit olduğunu gösterdiğini belirtmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme III]. Öğrencilerin " $x + y + z = x + p + z$ " eşitliğinde  $y = p$  olamayacağı yönünde geliştirdikleri kavram yanılığı için de " $2y = p + 3$  eşitliğinde  $y = 3$  ise  $p = ?$ " sorusunun kullanılabileceğini belirtmiştir.

*"Farklı bir örnek verip, örneğin burada  $y$  ile  $p$ 'nin eşit olmasını istiyorum değil mi bunun için aşağıya farklı bir örnek yazıp ne olabilir işte  $2y = p + 3$ ,  $y, 3$  ise  $p$  kaçtır?  $y, 3$  ise  $p$ 'nin de 3 çıkması gerekir değil mi aslında burada  $y$  ile  $p$ 'nin eşit olduğunu görüyorlar. Belki biraz ikisinin eşit çıkabileceklerini fark ettirebiliriz diye düşündüm."*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

### Öğretim Stratejileri

Ayla öğretmen öğretim programında aritmetikten cebire geçişin ve değişken kavramının öğretiminin amaçlandığı örüntüler ve ilişkiler konusunda öğrencilerin aritmetik bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır. Örüntü kuralını bulmada değişken kullanılarak yapılan genelleme sürecine ilişkin bilgi sahibi olmasına rağmen, bu genelleme sürecinin aritmetik ile ilişkisinden bahsetmemiştir. Örüntü kuralını bulmanın aritmetikten yapılan bir genelleme olduğu fikrine yer vermemiştir. Bu durumun Ayla öğretmenin aritmetikten cebire geçişte örüntüler ve ilişkiler konusunu bir araç olarak görmemesi ile de ilişkili olduğu söylenebilir. 2, 4, 6, 8, 10 ... sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde de  $n$ 'nin bir değişken olduğunu ve  $n$  yerine farklı sayılar gelebileceğini vurguladığı, ancak bu genelleme sürecini öğrencilerin aritmetik öğrenmeleriyle ilişkilendirmediği görülmektedir.

**Ayla Öğretmen:** Birinci terimde 2, ikinci terimde 4, üçüncü terimde 6, dördüncü terimde 8. Peki devam ettirdim. Ellinci terimde ne dediniz? 100. Peki örüntünün kuralına ne dediniz?

**Öğrenciler:** İkinin katları.

**Ayla Öğretmen:** Bakın arkadaşlar, birinci terim dediğimde 1'i kaçla çarptım 2. İkinci terim de kaçla çarptım? 2. Üçüncü terimde kaçla çarptım? 2 ile çarpıp 6'yı buldum. Dördüncü terimde kaçla çarptım? 2. O zaman n. terimde n'yi kaçla çarpmam lazım?

**Öğrenciler:** 2.

**Ayla Öğretmen:** Aferin, işte dizinin genel terimi 2.n olur.

**Öğrenci:** Hocam, n ne anlama geliyor?

**Ayla Öğretmen:** Burada n, siz değiştirebilirsiniz n'yi. n yerine a da diyebilirim. n burada bir değişkendir. Ben genelleme yapıyorum ya n'nin yerine 1 de yazabilirim, 2 de yazabilirim, 3 de yazabilirim. n bir değişkendir. Eğer n'nin yerine 1 yazarsam hangi terimi bulurum? Birinci terimi. Bak yazalım.  $2 \cdot 1 = 2$ , birinci terimi elde ettim mi?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Bakın siz n'yi kaçınıcı terimi istiyorsanız ona göre değiştirirsiniz. 100. terimi bulmak istiyorum diyorsan n'nin yerine kaç yazacağım.

**Öğrenciler:** 100.

**Ayla Öğretmen:** Aferin.  $2 \cdot 100 = 200$ .

#### [SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Öğrencilerin ders sürecinde n değişkenini anlamada zorluk yaşadıkları ve Ayla öğretmene yukarıdaki diyalogdaki gibi n'nin ne anlam ifade ettiğine ilişkin sorular yönelttikleri gözlenmiştir. Ayla öğretmen öğrencilerin bu sorularını yukarıdaki açıklamalarına benzer şekilde sözel ifadeler kullanarak açıklamıştır. Öğrencilerin n değişkenini anlamada zorlandıkları noktaları keşfederek anlamlandırmalarını sağlayacak stratejiler kullanmamıştır. Aşağıdaki diyalogda da Mert isimli öğrencinin sorduğu soruya mevcut örnekler üzerinden açıklamalar yapmıştır. Ayrıca bu süreçte soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu ve öğrencinin öğretmenin sorularına cevap verme yoluyla tartışmaya katıldığı gözlenmiştir.

**Mert:** Hocam a ve b değişken ya hocam. Biz işlemimizde birçok bilinmeyen kullanabilir miyiz hocam?

**Ayla Öğretmen:** Kullanabiliriz. Şöyle mi diyorsun? Mesela  $a + b + c = 15$  diyelim. Bana sadece a'yı vermiş olsun. a'yı 3 vermiş olsun. b'yi, c'yi mi bulabilir miyiz diyorsun?

**Mert:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Şimdi şöyle düşün, Mert a'yı silip yerine 3 yazacağım değil mi?

**Mert:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** 3'ü karşıya gönderebilir miyim?

**Mert:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Yine karşıma bir tane denklem çıkıyor görüyor musun? Ne oldu?  $b + c$  kaç eşit oldu?

**Mert:** 12.

**Ayla Öğretmen:** Ben yine şunu derim.  $b$  1 olsaydı,  $c$  kaç olurdu?

**Mert:** 11.

**Ayla Öğretmen:**  $b$  1 olduğunda,  $c$  11 oldu.  $c$  2 deseydim. 2 ile kaçın toplamı 12 yapar?

**Mert:** 10.

**Ayla Öğretmen:** Değişiyor görüyor musun?  $b$ 'ye değer verip  $c$ 'yi buluyorum. Ama şunu diyebilir miyim  $b$  kesin 1' dir?  $c$  de kesin 11' dir. Diyebilir miyim?

**Mert:** Hayır.

**Ayla Öğretmen:**  $b$ , 2 de olabilir. 3 de olabilir. 5 de olabilir.

**Tolga:** Yani değişkenleri istediğimiz kadar değiştirebiliriz.

**Ayla Öğretmen:** Aynen öle.

[SG9- K: Eşitlik ve Denklem]

#### 4.1.2. Cebirsel İfadeler

##### 4.1.2.1. Alan Bilgisi

Ayla öğretmen cebirsel ifadeyi değişken kavramından ziyade, denklem kavramı ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Öğrencilerle arasında gerçekleşen aşağıdaki diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

**Ayla Öğretmen:** Arkadaşlar, hani ilkokulda öğretmeniniz size işlem yapıyordu. Diyordu ki mesela kare yapıyordu. Artı 2 diyordu, eşittir 5 diyordu.  $\blacksquare + 2 = 5$ .

**Öğrenciler:** 3.

**Ayla Öğretmen:** Ne yapıyordunuz siz burada?

**Safiye:** Karenin içine sayı yazıyorduk hocam.

**Ayla Öğretmen:** Evet, hangi sayıyla 2'yi toplarsam 5 yapar diyorduk.

**Serkan:** Hocam ikinci sınıfta yapmıştık.

**Ayla Öğretmen:** Aynen. Artık arkadaşlar cebirsel ifadeye geçerken buradaki kareyi silmişler yerine  $a$  demişler. Ya da  $\blacksquare - 7 = 10$ . Demişler ki hangi sayıdan 7'yi çıkarırsam 10 yapar?

**Öğrenciler:** 17.

**Ayla Öğretmen:** Demişler ki biz buradan artık üçgeni silelim  $b$  yapalım. Sorabilirsiniz, öğretmenim bu  $a$ 'yı  $b$ 'yi neye göre yazıyorsunuz? Bakın isterseniz  $a$  deyin, isterseniz  $b$  deyin, isterseniz  $x$ ,  $y$  deyin, hiç önemli değil. Bilmeniz gereken burada yazdığım  $x$ 'li,  $a$ 'lı,  $b$ 'li yazdığım bilinmeyendir, değişkendir. Bakın eğer ben bir bilinmeyenle işlem kullanıyorsam bu tür ifadelere cebirsel ifade adını veriyorum.

[SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Ayla öğretmenin kutu sembolü kullanarak oluşturduğu açık sayı cümlelerini harf sembolü ile ilişkilendirerek bir denklem elde ettiği ve sonrasında cebirsel ifadeyi denklemden yola çıkarak tanımladığı görülmektedir. Bununla birlikte cebirsel ifadeyi

tanımlarken içerisinde bilinmeyen ve işlem olma durumunu vurgulamış; ancak cebirsel ifadelerin anlamına yönelik açıklamalarda bulunmamıştır. Örneğin, cebirsel ifadenin değişkenin alacağı farklı sayı değerleri için farklı değerler alabileceğinden bahsetmemiştir. Bu durum, Ayla öğretmenin değişkenin tanımına yönelik sınırlı bilgisi ile ilişkilidir. Ayla öğretmen bu açıklamalarında da önceki açıklamalarına benzer şekilde cebirsel ifadede değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerini bilinmeyen ve değişken olarak tanımlamıştır. Cebirsel ifadelerde değişkenin kullanımına ilişkin bir ayırmadan bahsetmemiştir.

Ayla öğretmenin cebirsel ifade oluştururken de benzer şekilde cebirsel ifadenin anlamından ziyade bilinmeyen ve işlem kullanmaya odaklandığı gözlenmiştir. Örneğin, sözel ifadelerden cebirsel ifade oluşturma sürecinde öğrencilerle arasında gerçekleşen aşağıdaki diyalogda kullanılan işlemlere odaklanmıştır.

**Ayla Öğretmen:** *Elmaların 4 eksiği. Kaç tane elma olduğunu biliyor muyum?*

**Öğrenciler:** *Hayır.*

**Ayla Öğretmen:** *Elmaların sayısına ne diyelim?*

**Öğrenciler:** *b.*

**Ayla Öğretmen:** *Bana ne diyor elmaların 4 eksiği, elmalardan kaç çıkaracağım?*

**Öğrenciler:** *4.*

**Ayla Öğretmen:** *+4 mü -4 mü?*

**Öğrenciler:** *-4.*

**Ayla Öğretmen:** *b-4. Arkadaşlar işte bu şekilde istediğiniz gibi cebirsel ifade oluşturabilirsiniz.*

**Yağmur:** *Hocam çarpma ile bölme olur mu?*

**Ayla Öğretmen:** *Olur tabii ki olur ne diyebiliriz? Benim yaşımın 2 katı. Kat deyince ne yapacağım?*

**Öğrenciler:** *Çarpma.*

**Ayla Öğretmen:** *Çarpma işlemi uygulayacağım.*

**[SG3- K: Cebirsel İfadeler]**

Ayla öğretmen, cebirsel ifadelerde toplama işleminde ise cebirsel ifadelere girişte yaptığı gibi cebir öncesi sembolleri (kutu sembolü) kullanmıştır. Aşağıdaki diyalogda  $5x + 3x$  ifadesindeki toplama işlemini  $x$  değişkenini kutu olarak göstererek açıklamıştır.

**Ayla Öğretmen:**  *$5x+3x$  olsun. Ben size anlatırken demiştim ki eskiden biz kutu yapıyorduk ya Serkan. Şunları kutu gibi düşünün.*

**Serkan:** *Hocam kutunun içine sayı gelecek.*

**Ayla Öğretmen:** Evet, biz  $x$ 'i getirdik. Şunları kutu gibi düşünün 5 tane kutu ile 3 tane kutuyu toplayınca ne buluyordunuz?

**Öğrenciler:** 8 kutu.

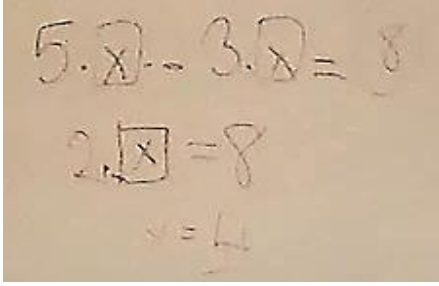
**Ayla Öğretmen:** 8 kutu değil mi? Kutunun yerinde aslında ne var  $x$  mi var?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** O zaman  $8x$ .

#### [SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Ayla öğretmen cebirsel ifadelerde çıkarma işlemini de benzer şekilde açıklamıştır. Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste  $5x - 3x = 8$  denklemi için “5 tane kutudan 3 tane kutuyu çıkarırsam kaç kutu kalır?” ifadesini kullanmıştır [SG6- K: Eşitlik ve Denklem]. Ayla öğretmenin buna yönelik tahtada yaptığı gösterim aşağıda verilmiştir (bkz. Şekil 4.2).



5x - 3x = 8  
2x = 8  
x = 4

#### Şekil 4.2

Öte yandan Ayla öğretmenin bu açıklamalarında bilinmeyeni kutuların sayısı olarak değil bir nesne (kutu) olarak belirttiği görülmektedir. Diğer açıklamalarında da benzer bir yol izlediği gözlenmiştir. Örneğin,  $2k$  ile  $3k$  cebirsel ifadesinin toplamını  $(2k + 3k)$  “2 kalem 3 kalem daha ne olur? 5 kalem.” şeklinde açıklamıştır [SG4- K: Cebirsel İfadeler]. Bu ifadesi  $k$  değişkenini herhangi bir sayısal değer olarak değil, bir nesne (kalem) olarak belirttiğini göstermektedir. Bu durumun, değişken kavramının anlamına ilişkin bilgisi ile ilişkili olduğu görülmektedir.

Ayla öğretmenin yukarıdaki açıklamalarına bakıldığında cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işleminde elma-armut yaklaşımını kullandığı, benzer ve benzer olmayan terimlerden bahsetmediği görülmektedir. Ayla öğretmen benzer olmayan  $3x$  ve  $4y$  terimlerinin toplamını da benzer şekilde göstermiştir.  $3x + 4y$  cebirsel ifadesinde  $x$ 'i elma,  $y$ 'yi ise armut olarak ifade ederek elmaların ve armutların kendi içinde toplanabileceğini belirtmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme III]. Bu yaklaşımın, benzer ve benzer olmayan terimlerin anlamı hakkında hatalı bir

bilgi içerdiği de söylenebilir. Ayla öğretmen  $2x + 5y$  cebirsel ifadesinde de  $x$ 'i elma ve  $y$ 'i armut olarak belirtmiş, elma ile armutun toplanamayacağını ifade etmiştir.

*“Şunu diyorum elma ile armut toplanmaz. Klasik öğretmen, bu elma, bu armuttur. 2 elmanız 5 armutunuz var. Siz 7 elma-armut mu diyorsunuz? 2 elma 5 armutum var diyorsunuz. İşte klasik.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

#### 4.1.2.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.1.2.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Ayla öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeler konusundaki olası düşünceleri, yaşadıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin cebirsel ifadelerde sayısal bir sonuç bulmaya çalıştıklarını ve bu yönde kavram yanılgısı geliştirdiklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin cebirsel ifadelerde bilinmeyenin sonsuz sayıda değer alabildiğini düşünemedikleri için bilinmeyene belirli değerler vererek sonuç bulmaya çalıştıklarını belirtmiştir.

*“Cebirsel ifade deyince nedense hep bir şeyi bulmak istiyorlar. Sayısal bir sonuç bulmak istiyorlar. Bu yönde kavram yanılgıları var. Cebirsel ifade nedir, hep bilinmeyen bir sayı var bu sayının ne olduğunu bulmaya çalışıyorlar. Orada sayının ne olduğu adı üstünde bilinmeyen ama öğrenciler hep buna odaklanmışlar.  $x$ 'i bulmamız lazım.  $x$ 'in yerine mutlaka bir şey gelmesi lazım. Öğrenciler hep bir eşitlik şeklinde bir şey kuruyorlar kafalarında.  $x$  öğrenciler için 5'tir 10'dur.  $x$ 'in 1,2,3 sonsuz olabileceğini çok fazla düşünemiyorlar. Benim de aslında genel olarak karşılaştığım şey bu. Ya da işte bilinmeyen bir sayıyı belirtmek için kullanılır evet bilinmeyen bir sayı yerine yazdığımızı biliyorlar ama öğrencilerin verdikleri cevapta aslında  $x$  dediğinde bilinmeyen olmuyor. Onlar cebirsel ifadede bilinmeyen yerine hep bir sayıyı yerleştirmeye çalışıyorlar.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

Ayla öğretmen öğrencilerin ilerleyen sınıflarda da cebirsel ifadelerde sayısal bir sonuç aramaya yönelik yaptıkları hatanın ve oluşturdukları kavram yanılgısının devam ettiğini belirtmiştir. 8. sınıf öğrencilerinin özdeşlikler konusunda  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  özdeşliği için  $x^2 - 16$  özdeşliğinin çarpanlarını bulmalarını istediğinde, öğrencilerin bu özdeşliği  $x^2 - 16 = 15$  şeklinde bir sayısal değere eşitleyerek  $x$ 'i bulmaya çalıştıklarını belirtmiştir.

*“Öğrencilerde şey var bir sonuç olacak, yani öle  $x+5$  diye kalamaz. 8. sınıflarda özdeşlikleri işlerken mesela  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  olduğunu göstermeye çalışıyoruz. İşte soruyu yazıyorum  $x^2 - 16$  bunun çarpanlarını bulun diyorum. Öğrenciler eşittir 15 diyebiliyorlar. Aslında sonucun öle olmayacağını anlatmaya çalışıyorum ama öğrenci hep net bir sonuç istiyor maalesef. Hep sayısal bir değere ulaşmaya çalışıyorlar.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

Ayla öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadelerle işlemlere ilişkin en çok yaptıkları hatalar ve bir cebirsel ifadeyi sonuç olarak kabul etmemeleri yönünde geliştirdikleri kavram yanılgısı hakkında da bilgi sahibidir. Öğrencilerin  $2a + 5b$  cebirsel ifadesinin  $7ab$ 'ye eşit olduğunu düşündüklerinden örnek vermiştir. Benzer şekilde  $3x + 4$  cebirsel ifadesinin de  $7x$  veya  $7$ 'ye eşit olduğu yönünde hata yaptıklarını belirtmiştir. Bununla birlikte  $2a + 5b$  ve  $2x + 3$  cebirsel ifadelerini sonuç olarak kabul etmediklerini ifade etmiştir.

*“Öğrenciler böyle bir soru sorduğumda öğrencilere  $3x+4$  dediğimde iki farklı cevap geliyor. Ya  $7x$  diyorlar ya da  $7$  diyorlar. Yedinci sınıf öğrencilerinde de hatta sekizinci sınıf öğrencilerinde de çok fazla karşılaşıyorum.  $2x+3$  gibi bir cebirsel ifade de  $5x$  diyen var  $5$  diyen var.  $2a+5b$ 'de de  $7ab$  diyebiliyorlar. Mesela arada bir işlem olduğu için örneğin artı var işlemin devam etmesi gerektiğini düşünüyorlar.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Ayla öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeler konusunu anlamada yaşadıkları zorlukların ve yaptıkları hataların temel sebebinin ilkokuldaki öğrenmeleriyle ilişkili olduğunu düşünmektedir. Öğrencilerin cebirsel ifadelerde sayısal bir sonuç olması gerektiği düşüncelerinin ilkokulda matematikte sayısal bir cevap bulma odaklı öğrenme gerçekleştirmeleri ile ilişkili olduğunu ifade etmiştir.

*“Biz birinci sınıftan itibaren hep öğrencilerden sayısal bir cevap içeren cevaplar istiyoruz. Ya da sorduğumuz soruların hep sayısal bir cevabı var. Öğrencilere çok fazla rutin olmayan problemler kullanmıyoruz. Aslında bunları çok fazla kullanmadığımız için öğrencilerde kalıp şeyler oluşuyor, sayısal bir cevap bulmaya çalışıyorlar.  $3$ ,  $5$ ,  $7$  olması lazım bir cevabın.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme III]**

Benzer şekilde öğrencilerin cebirsel ifadelerde işlemlerde terimleri birleştirmelerinin de ilkokul öğrenmeleri ile ilişkili olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin  $3x + 4$  ve  $2a + 5b$  cebirsel ifadelerinde, arada toplama işlemi olduğu için işlemin devam etmesi gerektiğini düşündüklerini ifade etmiştir.

*“Mesela arada bir işlem olduğu için örneğin artı var işlemin devam etmesi gerektiğini düşünüyorlar. Toplamaları gerektiğini düşünüyorlar. Sonuç olabileceğini düşünmüyorlar.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme III]**

*“ $x$ 'in,  $a$ 'nın,  $b$ 'nin bir bilinmeyen olduğunu tam anlamadıkları için ikisinin toplanabilir veya çıkarılabilir bir şey olduğunu düşünüyorlar. Hani bunların birbirinden farklı olabileceğini düşünemiyorlar.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

#### 4.1.2.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi

##### Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi

Ayla öğretmen cebirsel ifadeler konusuna Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (2009) belirtildiği gibi 2 ders saati süre ayırmıştır. Bu derslerin içeriğinde cebirsel ifadenin tanımlanması, cebirsel ifadelerde terim ve katsayı, cebirsel ifade oluşturma ve cebirsel ifadelerle işlemler (toplama ve çıkarma işlemleri) konularına yer vermiştir. Öğretim programı kazanımlarında yer almamasına rağmen dersinde cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik uygulamalar yapmıştır. Öğrencilerin bu işlemleri ilkokulda kutu sembolü kullanarak zorlanmadan yaptıklarını düşündükleri için dersinde de cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerine yer verdiğini belirtmiştir. Ayrıca toplama ve çıkarma işlemlerini temel düzeyde öğrenmelerinin denklem çözümede kolaylık sağladığını düşündüğü için de bu yönde bir karar aldığını ifade etmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme II].

Öte yandan Ayla öğretmen dersin akışında da değişiklik yapmıştır. Dersin içeriğinde cebirsel ifadelerle işlemlere yer vermesine rağmen cebirsel ifadede terim ve katsayı kavramlarına dersin sonunda yer vermiştir. Cebirsel ifadelerle işlemler ile terim kavramının ilişkisine yönelik bilgisinin bu kararı üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Ayla öğretmen cebirsel ifadelerle işlem yapma sürecini benzer ve benzer olmayan terimler üzerinden açıklamadığı için cebirsel ifadelerle işlemler konusuna terim ve katsayı kavramlarından bağımsız olarak dersin sonunda yer vermiştir. Ayla öğretmenin aşağıdaki açıklamaları bu durumu desteklemektedir.

*“Cebirsel ifadelerde terim ve katsayıyı da veriyoruz. Evet dediğiniz gibi ben en sonda anlattım. Öğrencilerin işte terim nedir katsayı nedir bunları ezberlemesi gerekiyor. Kafaları karışmasın diye en son anlatmak daha iyi oluyor sanki...”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

##### Ders İşleyişi Bilgisi

##### Öğretim Materyalleri

Ayla öğretmen cebirsel ifadelerin öğretiminde işleme odaklanmaktan ziyade anlamayı destekleyen sözel problemlerin kullanılması gerektiğini düşünmektedir.

*“İlkokulda işte beş katı ya da yedi eksiği evet bunları yapıyorlar ama biraz daha problem çözdürseler daha iyi olabilir. Baktığım zaman öğrenciler hep matematiksel işlem yapıyorlar, yaptırılıyor. Sözel problemleri daha az kullanıyoruz. Daha az kullandığımız için öğrencilerin çok fazla anlamaları gelişmiyor diye düşünüyorum.”*



*Bundan dolayı cebirsel ifadelerde sözel problemleri cebirsel ifadeye dönüştürmeleri önemli, ben de derste bunun üzerinde durmaya çalıştım.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme I]**

Öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlamlandırmalarını sağlayacak sözel problemlere yer verilmesinin gerekliliğini belirtmesine rağmen derslerinde sözel durumlara uygun cebirsel ifade oluşturma sürecinde cebirsel ifadenin anlamından ziyade işlemlerin doğru kullanımına odaklanmıştır. Ayla öğretmenin bu sözel problem örneklerini farklı işlemlerin (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) kullanımını gerektirecek şekilde çeşitlendirdiği görülmektedir. Ayla öğretmenin bu süreçte kullandığı örnekler Tablo 4.2’de sunulmuştur.

**Tablo 4.2: Ayla Öğretmenin Cebirsel İfadeler Konusunun Öğretiminde Kullandığı Sorular**

<b>Sorular</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Ahmet’in yaşının 3 fazlası</li><li>• Elmaların sayısının 4 eksiği</li><li>• Ayşe’nin cevizlerinin sayısının 2 katı</li><li>• Elmaların yarısı</li><li>• Otobüsten 62 yolcu inerse kaç yolcu kalır?</li><li>• Göldeki ördeklerin yanına 9 ördek daha geldi. Gölde kaç ördek oldu?</li><li>• Öykü Eda’dan 15 cm kısadır. Öykü’nün boyu kaç cm’dir?</li><li>• Otobüsteki yolcuların sayısının 2 katının 5 fazlası kaçtır?</li></ul>

Bunun yanında, Ayla öğretmen öğrencilerin verilen bir cebirsel ifadeyi somutlaştırmakta zorlandıklarını ve bu sebeple öğrencilerin aşına olduğu somut örnek ve materyalleri kullanımının önemli olduğunu ifade etmiştir. Somut örnekler kullanıldığında daha iyi ilişkilendirme yapabildiklerini düşünmektedir. Ayla öğretmen bu örnekleri en çok cebirsel ifadelerle işlemleri açıklarken kullandığını belirtmiştir. Cebirsel ifadelerde kullanılan harf sembollerini elma veya armut olarak ifade ettiğinde öğrencilerin daha rahat anladıklarını ifade etmiştir. Örneğin,  $2x + 5y$  cebirsel ifadesini 2 elma ve 7 armut olarak somutlaştırdığını belirtmiştir. Ancak Ayla öğretmenin somut olarak nitelendirdiği bu örnekler, öğrencilerin cebirsel ifadedeki değişkenleri belirtmek için kullanılan harf sembollerini sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak düşünmelerine yol açabilecek hatalı örneklerdir. Bu durum değişkeni sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak görmesinin öğretim uygulamalarına bir yansımasıdır. Dolayısıyla Ayla öğretmen,

cebirsal ifadelerde işlem yaparken benzer ve benzer olmayan terimleri göz önünde bulundurmaya yardımcı olacak bir uygulama yapmamıştır.

Öte yandan Ayla öğretmen  $8x + 5y$  cebirsal ifadesine  $8x$  ile  $5y$  terimlerin farklı terimler olduğunu göstermek için önceki sene kullandığı bir materyalden de örnek vermiştir. Öğrencilerin yapılan işlemlerin mantığını anlamalarını sağladığını belirttiği bu etkinlikte  $8x$  ve  $5y$  terimlerinin farklı terimler olduğunu farklı renkte kartonlar kullanarak göstermiştir. Ancak, kullanılan bu gösterimin benzer olmayan terimlerin matematiksel anlamını karşılamadığı ve bu sebeple de matematiksel işlemin altında yatan anlamı açıklamadığı görülmektedir. Ayla öğretmen farklı renkte kestiği kartonlardan birini  $x$  ve diğerine ise  $y$  olarak göstermiştir.

*“Şey yapmıştık kırmızı ve sarı bir karton kestik, iki farklı renk birine  $x$  birine  $y$  yazıp aslında iki farklı rengin iki farklı şeyi temsil ettiğini konuşmuştuk. Biraz daha rahat oturmuştu öğrencilerle. Öğrenciler birazcık mantığını anladıktan sonra sıkıntı olmuyor.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Ayla öğretmen öğrencilerin cebirsal ifadeler konusuna ilişkin yaptıkları hataların altında yatan sebepleri fark etmelerini sağlayacak sorular kullanmamıştır. Örneğin,  $2a + 5b$  cebirsal ifadesinin  $7ab$ 'ye eşit olduğu yönünde yaptıkları hata için  $a$  ve  $b$ 'ye farklı değerler vererek sonucun farklı olduğunu gösteren örnekler kullandığını ifade etmiştir. Öğrencilerin cebirsal ifadede yapılan işlemlerin matematiksel anlamını kavramalarını sağlayacak benzer ve benzer olmayan terimlerden bahsetmemiştir.

*“ $2x+3$  gibi bir cebirsal ifade de  $5x$  diyen var  $5$  diyen var.  $2a + 5b$  de de  $7ab$  diyebiliyorlar.  $x$ 'in  $a$ 'nın  $b$ 'nin bir bilinmeyen olduğunu tam anlamadıkları için ikisinin toplanabilir veya çıkarılabilir bir şey olduğunu düşünüyorlar. Hani bunların birbirinden farklı olabileceğini düşünemiyorlar. Ben böyle olunca  $a$  ve  $b$ 'ye farklı değerler verdirip sonucun farklı olabileceğini göstermeye çalışıyorum.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme III]**

### **Öğretim Stratejileri**

Ayla öğretmenin cebirsal ifadeler konusuna geçişte öğrencilerin ön bilgileri ile uygun bir ilişkilendirme yapmadığı gözlenmiştir. Aşağıdaki sınıf tartışmasında, kullandığı sözel ifade ile cebirsal ifade arasında bir ilişkilendirme yapmadan kutu gösteriminin kullanımını açıkladığı görülmektedir.

**Ayla Öğretmen:** Arkadaşlar bakın yeni konuya geçiyoruz çok önemli neden biliyor musunuz? Şimdi yedilerde denklemler diye bir konu işliyoruz cebirsal ifade

kullanıyoruz, sekizinci sınıflarda aynı şekilde. Bakın buradan başlayacaksınız üniversiteye kadar karşınıza çıkacak.

**Öğrenci:** Çok mu zor?

**Ayla Öğretmen:** Hayır çok zor değil çok kolay bir konu ama kolay olduğu kadar da önemli tamam mı, eğer şimdi iyi öğrenirseniz ilerleyen sınıflarda iyi yaparsınız.

**Öğrenci:** Hocam her yerde mi karşımıza çıkacak?

**Ayla Öğretmen:** Nasıl çıkacak biliyor musunuz? Damla Serkan'a diyor ki mesela benim param seninkinin 2 TL fazlası diyor. Siz aslında arkadaşlar burada cebirsel ifade kullanıyorsunuz siz farkında değilsiniz.

**Serkan:** Hocam Damla'nın 10 lirası mı var?

**Ayla Öğretmen:** Nerden biliyorsun ki onun 10 lirası olduğunu?

**Serkan:** Hocam benim 8 liram var?

**Ayla Öğretmen:** Ama başkaları biliyor mu senin 8 liran olduğunu?

**Serkan:** Onur biliyor hocam.

**Ayla Öğretmen:** Ben bilmiyorum ama. Arkadaşlar, hani ilkokulda öğretmeniniz size işlem yapıyordu. Diyordu ki mesela kare yapıyordu. Artı 2 diyordu, eşittir 5 diyordu. ■ + 2 = 5

**Öğrenciler:** 3.

**Ayla Öğretmen:** Ne yapıyordunuz siz burada?

**Safiye:** Karenin içine sayı yazıyorduk hocam.

**Ayla Öğretmen:** Evet, hangi sayıyla 2'yi toplarsam 5 yapar diyorduk.

**Serkan:** Hocam ikinci sınıfta yapmıştık.

**Ayla Öğretmen:** Aynen. Artık arkadaşlar cebirsel ifadeye geçerken buradaki kareyi silmişler yerine a demişler.

#### [SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Ayla öğretmen "Damla Serkan'a diyor ki mesela benim param seninkinin 2 TL fazlası." durumundan bahsetmesine rağmen Damla ve Serkan'ın parası arasındaki ilişkiden yola çıkarak bu ilişkiyi gösteren bir cebirsel ifade kullanmamıştır. Bu ilişkilendirmeyi yapmadan kutu gösteriminin cebirsel ifadelerle ilişkilendirmesini açık sayı cümlesi ■ + 2 = 5 kullanarak yapmıştır.

Ayla öğretmen öğrencileri cebirsel ifade oluşturmada zorlandıkları ve hata yaptıkları zaman, soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktiftir ve öğrencilerin doğru cevabı kendilerinin bulmalarına fırsat tanımamaktadır. "Ayşe'nin cevizlerinin sayısının 2 katı" sözel ifadesinden cebirsel ifade oluşturma sürecinde gerçekleşen tartışma, bu duruma örnek gösterilebilir.

**Ayla Öğretmen:** Ayşe'nin cevizlerinin sayısının 2 katı.

**Lokman:** Hocam cevizleri kaç taneymiş ki?

**Ayla Öğretmen:** Biliyor muyuz? Burada bilinmeyenim ne benim?

**Öğrenciler:** Cevizler.

**Ayla Öğretmen:** Cevizlerin sayısının kaç katı diyor?

**Öğrenciler:** 2.

**Ayla Öğretmen:** Cevizlerin sayısına ne diyelim?

**Öğrenciler:** 5, 7.

**Ayla Öğretmen:** Arkadaşlar bilinmeyen diyorum siz bilinen bir sayı söylüyorsunuz.

**Öğrenci:** x.

**Ayla Öğretmen:** x diyelim, z diyelim. x'in kaç katı?

**Öğrenciler:** 2.

**Ayla Öğretmen:** Ayşe'nin cevizlerini biliyor muyum?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Ayla Öğretmen:** O zaman ne diyelim cevizlerin sayısına?

**Öğrenciler:** x.

**Ayla Öğretmen:** x diyelim. 2 katı demek ne demek? 2 ile ne yapacağım?

**Öğrenciler:** Çarpacağım.

**Ayla Öğretmen:** x.2.

#### [SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Ayla öğretmen öğrencileri cebirsel ifade oluştururken değişken kullanımında zorlandığı zaman, işlem kullanımını ön plana çıkararak onları adım adım cebirsel ifade oluşturmaya yönlendirmiştir. Bu süreçte cebirsel ifadenin anlamı geri planda kalmıştır. Ayla öğretmenin öğrenciler benzer hataları yapmaya devam ettiğinde ise cebirsel ifadeyi açıklama yolunu tercih ettiği, ancak bu süreçte yaptığı açıklamaların net olmadığı görülmektedir.

**Ayla Öğretmen:** Arkadaşlar cebirsel ifadenin ne olduğunu bir kez daha söylüyorum. Daha önce karşınıza çıkmıştı hatırlıyor musunuz? Terazi çizmiştik, bir taraf  $k+5$  yazmıştık bir tarafa 10 yazmıştık ben size o terazinin dengede olabilmesi için  $k$  yerine kaç gelmeli? Sağ kefe ile sol kefe birbirine ne olmalı?

**Öğrenciler:** Eşit.

**Mert:** Hocam sağdaki 50 ise soldaki de 50.

**Ayla Öğretmen:** Buraya adama geliyor ya sebze satıyor ne yapıyor bir tarafa 1 kg ağırlık koyuyorsa diğer tarafa da 1kg domates koyuyor dengede olsun diye. Aslında orada kullandığımızda cebirsel ifadeydi.

#### [SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Ayla öğretmenin cebirsel ifadeyi değişkenden ziyade denklem ile ilişkilendirmesi ile ilişkili olarak, cebirsel ifadeyi tanımlamayı eş kollu terazi üzerinden gerçekleştirmiştir. Bu durumun, cebirsel ifadenin tanımına ilişkin sınırlı alan bilgisinin öğretim uygulamalarına bir yansıması olduğu söylenebilir. Cebirsel ifadeyi içerisinde bilinmeyen ve işlem bulunma odaklı tanımlaması ile ilişkili olarak

da öğretim uygulamalarında cebirsel ifadenin anlamı geri planda kalmıştır. Bunun yanında Ayla öğretmen olası öğrenci zorlukları hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen derslerinde buna yönelik öğretim uygulamalarına yer vermemiştir.

### 4.1.3. Eşitlik ve Denklem

#### 4.1.3.1. Alan Bilgisi

#### Eşitlik ve Eşitliğin Korunumu

Ayla öğretmen eşitlik kavramını terazi ile ilişkilendirerek eş kollu terazinin dengede olma durumunu eşitlik olarak tanımlamıştır. Eşitliğin korunumunu ise teraziye ağırlık ekleme ve çıkarma yoluyla kefelerin dengelenmesi olarak anlamlandırmıştır. Ayla öğretmenin eşitlik konusuna geçişte eş kollu terazi modeli üzerinden yürüttüğü sınıf tartışması bu durumu yansıtmaktadır.

**Ayla Öğretmen:** Şimdi buraya sebze geliyor ya, elinde bir tane terazisi var. Geldiği zaman daha önce demiştik aslında size, teraziyi ne yapmaya çalışıyor?

**Eda:** Eşitlemeye.

**Ayla Öğretmen:** Sürekli teraziyi dengede tutmaya çalışıyor. Bakın arkadaşlar Eda dedi ki eşitlemeye çalışıyor dedi. Artık biz işlemlerimizi ne yapacağız eşitleyeceğiz. Sağ kefeyle sol kefeyi nasıl eşitleriz onu bulmaya çalışacağız. Örnek olarak, ben geldim dedim ki 5 kg domates almak istiyorum dedim. Bir tarafa 5 kg ağırlığı koyar mı?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Diğer tarafa da ne koyacak, bir kefeye ağırlık bir kefeye de domates koyacak mı? Şimdi domates fazla geldiğinde ne yapıyor?

**Öğrenciler:** Alıyor.

**Ayla Öğretmen:** Haa alıyor değil mi? Aldı 5'e 5 eşitledi. 5 kg ağırlığım var. 5 kg da domatesim var. Daha sonra ben dedim ki fikrim değişti. 6 kg almak istedim. Şimdi domatesi ekler mi? 6 kg olması için 1 kg daha ekler mi?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Şimdi sadece domatesi eklersem sizce terazi dengede kalır mı?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Ayla Öğretmen:** Ne yapmam lazım?

**Öğrenciler:** Diğer tarafa da 1 kg eklememiz lazım.

**Ayla Öğretmen:** Aynen öyle 1 kg domates ekledim mi, 1 kg da ağırlık ekleyecek miyim?

**Hasan:** Hocam mesela 10 kg patates alıyoruz oraya da 10 kg ağırlık koyuyoruz.

**Ayla Öğretmen:** Evet, patatesi 5 kg artırırsam ne olacak?

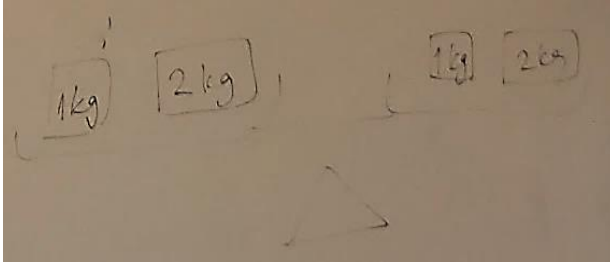
**Hasan:** 5 kg daha koyacağız hocam.

**Ayla Öğretmen:** Bakın, sizin yapacağınız işlemler artık ne biliyor musunuz? Bana artık eşitlik verecek. Terazi dengede verecek. Ben sağ kefedeki çıkaracağım, onu dengelemek için sol kefedeki de çıkaracağım.

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Bu tartışmada, Ayla ğretmenin “*Bana artık eşitlik verecek. Terazide dengede verecek.*” ifadesi eşitlik kavramını terazi modeli ile ilişkilendirdiğini ve terazinin dengede olma durumunu eşitlik olarak tanımladığını göstermektedir. Bununla birlikte Ayla ğretmenin eşitliğin korunumunu da terazi modeli üzerinden açıkladığı görülmektedir. Ayla ğretmenin “*5 kg ağırlığım var 5 kg da domatesim var. Daha sonra ben dedim ki fikrim değişti. 6 kg almak istedim. şimdi domatesi ekler mi 6 kg olması için 1 kg daha ekler mi?*” ifadesi teraziye ağırlık ekleme ve çıkarma durumları üzerinden eşitliğin korunumunu açıkladığını göstermektedir.

Ayla ğretmen terazide yapılan ağırlık ekleme ve çıkarma eylemlerini (6 kg olması için 1 kg daha ekler mi?) matematiksel sembollerle ( $5 = 5$ ,  $5 + 1 = 5 + 1$ ) göstermemiştir. Ayla ğretmenin tartışmanın sonunda da “*Ben sağ kefedenden çıkaracağım, onu dengelemek için sol kefedenden de çıkaracağım.*” açıklaması ile de eşitliğin korunumunu sözel olarak açıkladığı; ancak eşitliğin korunumunu gösteren sembolik bir gösterim kullanmadığı görülmektedir. Ayla ğretmen sembolik gösterimi derste terazi modeli kullanarak verdiği başka bir örnek de kullanmamıştır. Ayla ğretmenin kullandığı bu örnek aşağıda verilmiştir [bkz. şekil 4.3, SG6- K: Eşitlik ve Denklem].



**şekil 4.3**

Ayla ğretmen bu terazi modeli rneği için de  $1 + 2 = 1 + 2$  sembolik gösterimini kullanmamıştır. Terazinin sol kefesindeki 1 kg ağırlığı ve sağ kefesindeki 2 kg ağırlığı olarak, “*Sağ kefedenden 1 kg çıkarırdım, sol kefedenden de 2 kg çıkarırdım. Dengede olur mu?*” sorusu ile eşitliğin korunup korunmadığını sormuştur. Aşağıdaki ifadelerinde de terazinin sol ve sağ kefesindeki ağırlıklara aynı işlemin uygulanması ile eşitliğin korunabileceğini sözel olarak açıkladığı görülmektedir.

**Ayla ğretmen:** *Unutmayın arkadaşlar eşitlikte de aynı şey geçerli. Eşitliğin sağ tarafına kaç ekliyorsanız, sol tarafına da eklersiniz. Sağ tarafından kaç ıkırıyorsanız, sol tarafından da çıkarırsınız. Sağ tarafı 3'e blyorsanız, sol tarafı da 3'e bölmem lazım. Sağ tarafı 2 ile arpıyorsanız, sol tarafı da 2 ile çarpmam lazım.*

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Bununla birlikte Ayla öğretmenin eşitlik kavramının öğretiminde sayı cümlelerinin kullanım amacına ilişkin bilgi sahibi olmadığı görülmüştür. Bu kapsamda Ayla öğretmene aşağıdaki öğretim senaryosuna (Senaryo 7) ilişkin sorular yöneltilmiştir (bkz. Şekil 4.4) [Ayla Öğretmen, Görüşme III].

Altıncı sınıf matematik öğretmeni Elif öğretmen eşitlik ve denklem konusuna geçişte öğrencilerine aşağıdaki soruyu sormuştur.

$8 + 4 = \blacksquare + 5$  ifadesinde  $\blacksquare$  yerine hangi sayı gelmelidir?

#### Şekil 4.4

Ayla öğretmene bu senaryoya ilişkin “Elif öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir?” sorusu yöneltilmiştir. Ayla öğretmenin açıklamasında bu sorunun sorulma amacı olarak bilinmeyi bulma üzerinde durduğu görülmüştür. Elif öğretmenin kutu yerine bilinmeyen yazılacağını göstermek amacıyla bu soruyu kullandığını belirtmiştir. Aritmetikten cebire geçişte sayı cümlelerinin eşitlik kavramının öğretimindeki kullanım amacından bahsetmemiştir. Ayla öğretmenin bu yöndeki açıklaması aşağıda verilmiştir.

*“Kutunun yerine ne gelebileceğini göstermek için sormuştur. Muhtemelen buradan bilinmeyene geçeceği için sormuştur. Bilinmeyi buldurma da olabilir. Buradan sonra ne yapabilir? Kutuyu bulduktan sonra kutunun yerine x yazdırır. Muhtemelen denklemlere geçiş aşamasında sormuştur.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

#### Denklem ve Denklem Çözme

Ayla öğretmen denklem kavramını eşitlikten ziyade cebirsel ifade ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Ayla öğretmenin denklemi cebirsel ifade ile daha fazla ilişkilendirmesi, cebirsel ifadelere geçişte denklemlerle ilişki kurması ile tutarlılık göstermektedir.  $3x = 3$  denklemini  $a \cdot 3$  ve  $x + 2$  cebirsel ifadeleri ile karşılaştırarak denklemi “içinde bilinmeyen bulunan eşitlikler” olarak tanımlamıştır. Öğrencilerle arasında gerçekleşen diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

**Ayla Öğretmen:** Şimdi dikkatinizi bir şeye çekmek istiyorum. Daha önceki derste size şöyle yazdırıyordum. Diyordum ki örneğin, bir sayının 3 katı ne diyorduk? Sayıma  $a$  dersem,  $a$ 'yı kaçla çarpıyordum?

**Öğrenciler:** 3 ile.

**Ayla Öğretmen:**  $a \cdot 3$ . Bir sayının 2 fazlası, bu sayıma  $x$  diyelim. 2 fazlası  $x+2$ . Şimdi arkadaşlar, şu ikisi ( $a \cdot 3$  ve  $x+2$  ile  $3 \cdot x=3$ ) arasında bir fark var.

**Öğretmen:** Biz burada ( $a \cdot 3$ )  $a$ 'nın değerini bulabilir miyiz sizce?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Ayla Öğretmen:** Ya da  $x$ ' in değerini bulabilir miyiz?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Ayla Öğretmen:** Bulabilmemiz için ne olması lazım karşıda bir eşittir diye bir şey olması lazım değil mi? Artık biz ne yapıyoruz çözebiliyoruz, bilinmeyen değerini bulabiliyoruz. O zaman, içinde bilinmeyen bulunduran eşitliklere denklem denir. Tahtaya bir bakar mısınız?  $3.x=3$ . İçinde bilinmeyen var mı? Eşitlik var mı?

**Öğrenciler:** Var.

**Ayla Öğretmen:** Bakın  $x$ ' i bilmiyorum değil mi? Bilinmeyen bulunduruyor. Eşitlik var mı?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** O zaman bu şekilde ifade ediyorsam ben, bunlar birer nedir? Denklemdir. Artık biz ne yapıyoruz denklemleri çözüyoruz.

### [SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Ayla öğretmenin denklemin cebirsel ifadeden farkını eşitlik içermesi olarak tanımladığı görülmektedir. “Bulabilmemiz için ne olması lazım karşıda bir eşittir diye bir şey olması lazım değil mi? Tahtaya bir bakar mısınız?  $3.x = 3$ . İçinde bilinmeyen var mı? Eşitlik var mı?” ifadesi bu durumun bir göstergesidir. Ayrıca, bu ifade denklemde eşitliği, denklemin eşitlik sembolünü içermesine indirgeyerek el aldığını göstermektedir. Ayla öğretmen  $3.x = 3$  denkleminde eşitliğin iki tarafının niceliksel eşitliğine yönelik bir ilişki kurmamıştır.

Bununla birlikte Ayla öğretmen, denklem ve cebirsel ifadelerde harf sembollerinin nasıl tanımlandığı üzerine net bir açıklama yapmamıştır.  $a.3$  ve  $x + 2$  cebirsel ifadelerinde  $a$  ve  $x$ 'in değerinin bulunamayacağını, ancak  $3.x = 3$  ifadesinin içinde bilinmeyen ve eşitlik olduğu için bilinmeyen değerinin bulunabileceğini belirtmiştir. Denklemlerde eşitlik söz konusu olduğu için, harf sembolünün sadece eşitliği sağlayan değerler alabileceğinden bahsetmemiştir. Ayla öğretmenin denklemde eşitlik olduğu için bilinmeyen değerinin bulunabileceğini belirtmesi denklemi işlem odaklı tanımladığını göstermektedir. Ayrıca Ayla öğretmen, denklemi cebirsel ifade ile ilişkilendirerek tanımlamasına rağmen, harf sembollerinin denklemlerde sınırlı sayıda değerler alabilirken cebirsel ifadelerde herhangi bir değer aldığı fikrine yer vermemiştir.

Öte yandan Ayla öğretmen denklem çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin anlamına ilişkin bilgi sahibidir. Denklemde eşitliğin diğer tarafına geçirek bilinmeyeni bulma yolunun eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması sonucu olduğunu ifade etmiştir.



" $3x+2=5$  denklemini düşünürsek buradaki  $+2$ 'nin  $-2$  olarak karşı tarafına gitmesinin sebebi işte eşitlikte her iki tarafa da aynı işlemi uygulayalım ki niceliksel olarak eşitlik bozulmasın. Eşitliğin her iki tarafından da  $2$ 'yi çıkarırsak buradaki (eşitliğin sol tarafı)  $2$  gider. Sağ tarafta  $5-2$  olur. O zaman biz  $+2$ 'yi sağ tarafa  $-2$  olarak geçmiş olur. Biz her seferinde böyle yapmıyoruz da kısa yolda işaret değiştiriyoruz."

[Ayla Öğretmen, Görüşme II]

Ayla öğretmenin  $x + 6 = 12$ ,  $2x = 20$  ve  $y - 5 = 14$  denklemlerinin çözüm sürecindeki açıklamaları da bilinmeyi bulma sürecinde denklemden eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.

**Ayla Öğretmen:** Bakın eşitliğin sağ tarafında hangi işlemi yapıyorsam sol tarafında da aynı işlemi yapacağım. Birinci soruda eşitliğin sol tarafından  $6$  kg alsam ne kalır burada?  $x$  kalır.  $12$  kg dan da  $6$ 'yı almam gerekmiyor mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:**  $12$ 'den  $6$ 'yı alırsam kaç kalır?

**Öğrenciler:**  $6$ .

**Ayla Öğretmen:** Bakın  $x=6$ . Ya da diyorum ki eşitliğin bir tarafına kaç eklersem diğer tarafına da onu ekleyecek miyim? Örneğin, arkadaşlar buradan ( $y-5=14$ )  $5$  çıkardığımda tekrar ekleyebilir miyim?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** O zaman buraya da ( $y-5=14$ )  $5$  ekleyecek miyim?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:**  $5$  eklersem ne olur?

**Öğrenciler:**  $19$ .

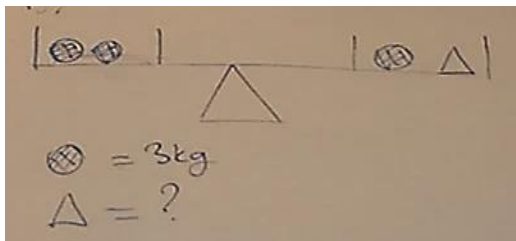
**Ayla Öğretmen:** Eşitliğin bir tarafını kaç bölsem diğer tarafını da bölüyor muyum?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:**  $2x$ 'i  $2$ 'ye bölsem,  $x$ ,  $20$ 'yi  $2$ 'ye bölsem  $10$ .

[SG7- K: Eşitlik ve Denklem]

Ayla öğretmenin denklem çözümünün terazi modeli ile gösterilmesine ilişkin de bilgi sahibidir. Bilinmeyi bulma sürecinde (bkz. Şekil 4.5) gerçekleşen sınıf tartışma bu durumu yansıtmaktadır.



Şekil 4.5

**Ayla Öğretmen:** Ben size demiştim ki arkadaşlar teraziye dengede tutabilmek için sağ kefesinden ne alıyorsam sol kefesinden de alacak mıyım?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Örneğin sol taraftan bir tane top aldım sağ taraftan da alacak mıyım?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Bakın sol taraftan bir tane topu siliyorum, sağ taraftan da bir tane topu sildim mi?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Ben zaten topun 3 kg olduğunu biliyor muyum?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** O zaman burada (sol kefe) 3 kg ağırlık varsa sağ tarafta da (sağ kefe) 3 kg ağırlık olursa dengede olur mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Bakın bu şekilde sağ ve sol kefedeki ağırlıkları da yapabiliriz.

.....

**Ayla Öğretmen:** Unutmayın arkadaşlar denklemlerde de aynı şey geçerli eşitliğin sağ tarafına kaç ekliyorsanız sol tarafına da eklerseniz. Sağ taraftan kaç çıkarıyorsanız sol taraftan da çıkarırsınız. Sağ tarafı 3'e bölüyorsanız sol tarafı da kaç bölmem gerekir?

**Öğrenciler:** 3'e

**Ayla Öğretmen:** 2 ile çarpıyorsam?

**Öğrenciler:** 2 ile çarpmamız lazım.

**Ayla Öğretmen:** Çünkü bakın niye eşitlik ya eşitliğin olmasını istiyorum.

**[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]**

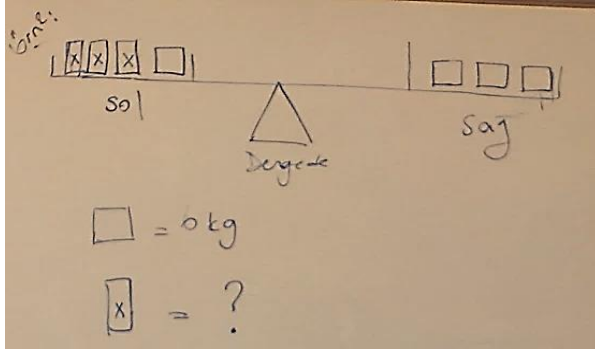
Ayla öğretmen denklem çözümünün terazi modeli ile gösterilmesine yönelik bilgi sahibi olmasına rağmen terazi modeli kullanılarak yapılan bu işlemsel eylemlere ilişkin sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Bu durum Ayla öğretmenin terazi modeli kullanarak denklem çözümü ile sembolik denklem çözümünü ilişkisiz olarak gördüğünü göstermektedir. Aşağıdaki açıklamaları bu durumu destekler niteliktedir. Bu açıklamalar, terazi modeli ile denklem çözümü ile sembolik denklem çözümünü ayrı olarak ele aldığını göstermektedir.

*“Terazide gösterdikten sonra hani öğrenci mantığını anlayınca denklem çözümüne geçiyorum. Örnekler üzerinden de gösteriyorum. Öğrenci terazi mantığını anlayınca işlemleri rahat kavrayabiliyor. Hani öğrenci biraz daha neden iki tarafa da (eşitliğin iki tarafı) aynı şeyin eklendiğini veya çıkarıldığını daha iyi anlıyor.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Ayla öğretmen aşağıdaki terazi modeli örneğindeki (bkz. Şekil 4.6) bilinmeyeni bulmada da sembolik gösterim kullanmamıştır. Terazide yapılan ağırlık çıkarma

eylemlerini matematiksel olarak göstermemiştir. Sembolik gösterimi teraziden aynı ağırlıklar çıkarıldıktan sonraki son aşamada kullanmıştır.



Şekil 4.6

**Ayla Öğretmen:** Ben örnek olarak ben sağ tarafından ve sol tarafından bir kare silersem. Silebilir miyim?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Aynı ağırlığı çıkardım değil mi?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Artık sol kefede ne kaldı, sağ kefede ne kaldı yazalım. Sol kefede ne kaldı?

**Tolga:** 3 tane x.

**Ayla Öğretmen:** Dengede olduğu için sağ ile sol eşit olacak mı?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** O zaman eşittir. Sağ kefede ne var?

**Öğrenciler:** 2 tane kare.

**Ayla Öğretmen:** Her birinin ağırlığı 6 kg, 6 kg mı?

**Öğrenciler:** 12 kg.

**Ayla Öğretmen:** Arkadaşlar  $3 \cdot x = 12$  kg. Hangi sayı ile 3'ü çarparsam 12 yapar?

**Öğrenciler:** 4.

**Ayla Öğretmen:** O zaman x, 4 kg.

[SG7- K: Eşitlik ve Denklem]

#### 4.1.3.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.1.3.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Ayla öğretmen öğrencilerin eşitlik konusundaki olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin eşitliğin sağ tarafını sol tarafının bir sonucu olarak düşündüklerini ve eşitliğin her iki tarafının da birbirine eşit olduğunu anlamakta zorlandıklarını belirtmiştir. Bu durumun ilkokulda kullanılan problemlerin çoğunlukla sayısal bir sonuç bulmayı içeren problemler olmasından kaynaklandığını belirtmiştir. Sorularda öğrencilerden hep sayısal bir cevap

istendiği için öğrencilerin eşit işaretinden sonra bir cevap gelmesi gerektiğini düşündüklerini ifade etmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme II]. Ayla öğretmene bu durumla ilişkili olarak öğrencilerin  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  eşitliğine ilişkin olası düşünceleri ve bu süreçte yapabilecekleri hatalar sorulmuştur (Senaryo 7). Öğrencilerin eşitliğin iki tarafının eşit olması gerektiğini düşünemeyecekleri belirtmiştir.

*“İki tarafın eşit olması belki onu düşünemeyebilirler. 12 eşit olması için 5 ile kaç toplamam lazım? Onu düşünemeyebilirler. Zaten eşitliği anlamayan öğrenci bir taraf 12 ise diğer tarafta 12 olacak onu zaten düşünemez.” Ne gibi hatalar yapabilir... Altıncı sınıfta dediğim gibi çok yani düşünüyorum çok fazla hata olamayabilir ama ne olabilir? Belki 8 ile 4 ü toplayıp 12 yazabilirler. Çünkü =, =, = şeklinde devam ediyorlar mesela. Direkt 8, 4 daha 12 o zaman kutu 12'dir diyebilirler.*

### [Ayla Öğretmen, Görüşme III]

Ayla öğretmen öğrencilerin kutu sembolü yerine 12 geleceğini düşünerek hata yapabileceklerinden belirtmiştir. Ayla öğretmenin “Çünkü =, =, = şeklinde devam ediyorlar mesela...” açıklamasının, önceki ifadelerindeki öğrencilerin eşittir işaretinden sonra cevabı yazdıklarına ilişkin açıklamalarıyla uyumlu olduğu görülmektedir. Ancak öğrencilerin olası başka hatalarından bahsetmemiştir. Örneğin, öğrencilerin kutu sembolü yerine  $17 (8 + 4 + 5 = 17)$  gelebileceği yönünde yaptıkları bir diğer yaygın hatadan bahsetmemiştir.

Ayla öğretmen beşinci sınıf öğrencilerinin eşitlikle ilişkili yaptıkları hatalardan örnekler vermiştir. Öğrencilerin eşitlik sembolünü ard arda gelen işlemlerin arasında kullanarak hatalı gösterimler yaptıklarından bahsetmiştir. Bu hatalı gösterim sonucunda da birçok hatalı çözüm yaptıklarını belirtmiştir. Bir öğrencinin “ $8 - 4 = 4 : 2 = 2$ ” şeklinde yaptığı hatalı gösterimi örnek olarak vermiştir. Öğrencilerin eşitliğin ne olduğunu tam olarak anlamadıkları ve eşittir işaretinden sonra bir cevap geleceğini düşündükleri için bu tarz hatalı işlemleri çok fazla yaptıklarını vurgulamıştır [Ayla Öğretmen, Görüşme III].

Ayla öğretmen öğrencilerin denklemler konusundaki olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında da bilgi sahibidir. Öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olan denklemlerin yanlış olduğunu düşündüklerini belirtmiştir. Bu durumla ilişkili olarak  $4 = x$  ve  $5 = 2x + 1$  denklemlerini örnek vermiştir.

*“Mesela  $4=x$  denkleminde, bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olduğu için zorlanıyorlar. Bunun yanlış olduğunu düşünen çok öğrenci var. Onlara göre bilinmeyen hep sol tarafta olmalı. Bu tarz denklemlerle karşılaştıklarında bir*

*duraksıyorlar. Örneğin,  $5=2x+1$  yazdığımda, öğrenci hocam cevabı 5 değil mi? Ters yazmışız diyor.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme III]**

Ayla öğretmen öğrencilerin yaşadıkları bu zorlukların sebebi hakkında da bilgi sahibidir. Bu durumun öğrencilerin ilkokuldaki öğrenmelerinden kaynaklandığını ifade etmiştir. İlkokulda yapılan işlemlerde eşittir işaretinden sonra sayısal bir cevap geldiği için öğrencilerin denklemlerde de eşitliğin sağında cevap olması gerektiğini düşündüklerini belirtmiştir.

*“Bu durum ilkokuldaki öğrenmeleriyle alakalı sanırım. Orda işlem yaparken hep art arda devam eden işlemler oluyor ya... Ondan dolayı olabilir diye düşündüm. İlkokulda yapılan işlemlerde hep eşittirden sonra bir cevap geliyor. Sayısal bir cevap geliyor. Bundan dolayı sağda hep cevap olacağını düşünüyorlar.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme III]**

Ayla öğretmen öğrencilerin denklem çözümünde yaptıkları hatalardan da bahsetmiştir. Öğrencilerin denklem çözerken, işlemleri eşitliğin diğer tarafına geçirirken zorlandıklarını ve hatalar yaptıklarını belirtmiştir. Bu durumun ise denklemin iki tarafının sayısal olarak birbirine eşit olduğunu kavrayamamalarından kaynaklandığını ifade etmiştir [Ayla Öğretmen, Görüşme II].

Ayla öğretmenin denklem çözümünde öğrencilerin işlemleri yan yana devam ettirme eğilimlerine ilişkin de bilgi sahibi olduğu görülmüştür. Ayla öğretmene bu duruma ilişkin aşağıdaki öğretim senaryosu (Senaryo 8) yöneltilmiştir [bkz. Şekil 4.7].

Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği bir derste öğrencilerinize aşağıdaki gibi bir soru yönelttiğinizi varsayalım.

$$3x + 4 = 16 \text{ denklemini çözünüz.}$$

Bu soruyu sınıfınızdaki Sila isimli bir öğrencinin aşağıdaki gibi çözdüğünü farz edelim.

$$3x + 4 = 16 = 3x = 16 - 4 = 12 = 3x = x = 4$$

**Şekil 4.7**

Sila'nın çözümünü değerlendirmesi istendiğinde, Sila'nın eşitliğin ne olduğunu kavrayamadığı için hatalı bir çözüm yaptığını ifade etmiştir.

*“Aslında eşitliğin ne olduğunu kavrayamamış oluyor düşündüğümde. Öğrenci aslında eşitliği kavramamış olması lazım bu durumda. Evet, çünkü şurada  $3x$  o zaman niye  $12$ 'ye eşit olmak zorunda?  $3x$ ,  $12$ 'ye ya da  $x$ ,  $12$ 'ye eşit olacak. Burada öğrenci eşitlik kavramını tam anlamamış. Belki bulduğu sonuç doğru olabilir ama eşitlik yapmıyor aslında öğrenci.”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme III]**

Ayla öğretmenin açıklamasına bakıldığında, Sıla'nın yaptığı bu hataya ve nedenine ilişkin bilgi sahibi olduğu görülmektedir. Ayla öğretmen, Sıla'nın sonucu bulmasına rağmen eşitliği kavrayamadığı için çözümünün hatalı olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, Sıla'nın yaptığı bu hatanın kendi öğrencilerinin en çok yaptığı hata olduğunu belirtmiştir. Önceki sene öğrenci çözümlerinde karşılaştığı benzer hatalara da örnek vermiştir. Ayla öğretmenin defterine not aldığı çözümler şu şekildedir. “ $5 = 2x + 1 = 2$ ,  $15 + 3y + 3 = 9$ ,  $2x + 4 = 8x = 2$ ”. Öğrencilerin denklemdaki eşitlik durumunu kavrayamadıkları için bu şekilde hatalı çözümler yaptıklarını ifade etmiştir.

#### **4.1.3.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi**

##### **Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi**

Ayla öğretmen eşitlik ve denklem konusuna programda belirtildiği gibi 6 ders saati süre ayırmıştır. 6 ders saatinin 1 saatinde eşitlik ve eşitliliğin korunumuna 5 ders saatinde ise denklem ve denklem çözümüne ilişkin öğretim uygulamalarına yer vermiştir. Denklem ve denklem çözümünün işlendiği bu derslerde denklem kurmadan ziyade denklem çözümü ile uygulamalara yer vermiştir. Ayla öğretmen bu uygulamasının ardındaki sebepleri aşağıda açıklamıştır.

*“Öğrenciler işte fazlası denildiğinde toplama yapılması gerektiğini ve ya eksiği denildiğinde çıkarma yapılması gerektiğini bilmiyorlar. Ya da denklemi doğru olarak yazsalar bile çözmeye daha çok sıkıntı yaşıyorlar. İşaretleri birbirine karıştırıyorlar. Denklem çözerken bu işlemlerin nasıl kullanıldığını görmeleri önemli. Bundan dolayı farklı denklemlerin çözümlerine ağırlık vermeye çalıştım. Denklem kurma önemli ama kurdukları denklemi çözemeyince bir anlamı kalmıyor...”*

**[Ayla Öğretmen, Görüşme II]**

Yukarıdaki açıklamasından anlaşılacağı üzere, Ayla öğretmen denklem çözme becerisinin denklem kurmaya göre daha önemli olduğunu ve öğrencilerinin de özellikle denklem çözümünde zorlandıklarını düşünmektedir.

## Ders İşleyişi Bilgisi

### Öğretim Materyalleri

Ayla öğretmen eşitlik kavramının en iyi terazi modeli kullanılarak öğretilbileceğini düşünmektedir. Ancak, terazi modelinin eşitlik kavramını nasıl temsil ettiği ile ilgili bilgi eksikliği bulunduğu ve bu sebeple ürettiği çözüm önerilerinin yüzeysel kaldığı görülmektedir. Aşağıdaki ifadeleri bu durumu yansıtmaktadır.

*“Sonraki senelerde yapabilirsem öğrencilerle yapılacak birkaç terazi örneği bulup belki dersin öncesinde öğrencilerle bir terazi yapıp ağırlıklar getirip hani biraz uzun uzadıya eşit olmaları gerektiğini öğrenciye kavratırsam sanki daha iyi olabilir. Yani aslında eşitlik tamamen öğrencilerin bildiği terazi mantığı başka bir şey yok. Öğrencilere sorduğumda 7 kg domates almak istediğimde kaç kg ağırlık koyacağım 7 kg. Bunu söylüyorlar, eşit olduğunu biliyorlar evet ama iş matematiğe dönünce sıkıntı yaşıyorlar. Belki onların uğraşabilecekleri bir şey (terazi) yaptırırsaydım daha iyi anlayabilirlerdi.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

Ayla öğretmen terazi modeli kullanarak yapılan eylemler ile matematiksel semboller kullanılarak yapılan eylemler arasında bir ilişkilendirme yapmadığı için somut çözüm önerileri üretmediği görülmektedir. Ayla öğretmenin, “Öğrencilere sorduğumda 7 kg domates almak istediğimde kaç kg ağırlık koyacağım 7 kg. Bunu söylüyorlar, eşit olduğunu biliyorlar evet ama iş matematiğe dönünce sıkıntı yaşıyorlar.” şeklindeki açıklaması bu durumu yansıtmaktadır. Bu durumla ilişkili olarak, öğrencilerin  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  eşitliğini terazi modeli kullanarak daha iyi anlayabileceklerini düşünmesine rağmen terazi modelinin bu süreçte nasıl kullanılacağına ilişkin detaylı bir açıklama yapmamıştır.  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  eşitliğinde yapılan matematiksel eylemler ile terazi modeli ile yapılan eylemler arasında bir ilişkilendirme yapamadığı için, bu eşitliğin terazi modeli kullanılarak öğretimine ilişkin somut çözümler üretmemiştir.

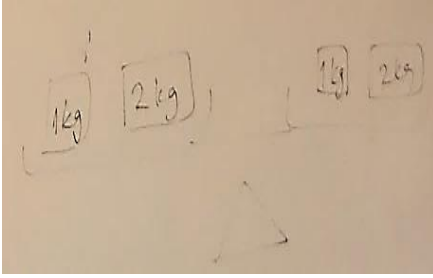
*“Eşitlik konusuna geçerken eşitlik konusu üzerinde fazla durmak gerekiyor. Gerçekten de öle aslında sonradan düşündüğüm öle. Bunların  $(8 + 4 = \blacksquare + 5)$  birbirine eşit olduğunu öğrencinin anlaması lazım. Biz öğrenciye, benim yaptığım en büyük hata, aslında eşitliğin tam olarak ne olduğunu anlatmıyoruz. Eşitliğin ne olduğunu tam olarak anlaması lazım. Terazi mantığını iyi anlaması lazım. Üstüne uzun uzun konuşuyor muyuz? Hayır benim yaptığım en büyük şey o, öğrenci sanki biliyormuş gibi ders işliyorum. Konuya geçerken aceleci, hızlı davranıyorum galiba. Terazi kullanımını hızlı geçiyorum. Öğrencinin hemen burayı  $(7 + 4 = \blacksquare + 5)$  hemen 7 bulmasını bekliyorum. Hemen anlamalarını istiyorum.”*

[Ayla Öğretmen, Görüşme III]

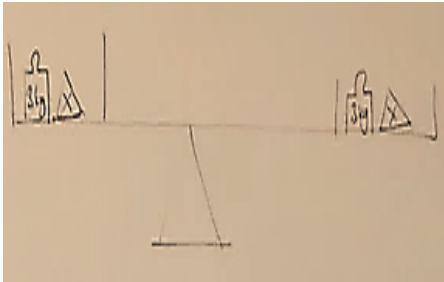
Ayla öğretmenin, öğrencilerin eşitlik kavramını anlamada zorlandıklarını belirtmekte ve çözüm önerisi olarak konu üzerinde daha fazla zaman harcaması gerektiğini ifade etmektedir. Ancak Ayla öğretmen bu süreçte nasıl bir yol izlediği takdirde öğrencilerin kavramı anlamasının kolaylaşacağına yönelik somut bir öneride bulunamamıştır.

Ayla öğretmen denklem ve denklem çözümünde de benzer şekilde terazi modelini kullanmış, ancak bu süreçte model kullanımını sembolik gösterimle ilişkilendirmemiştir. Terazi modeli kullanılarak yapılan işlemsel eylemleri sadece sözel olarak açıklamıştır. Ayla öğretmenin aritmetikten cebire geçişte sayı cümlelerinin kullanılmasına ilişkin bilgi eksikliğinin eşitlik, eşitliğin korunumu, denklem ve denklem çözümünün öğretimi üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Ayla öğretmen eşitlik kavramının öğretiminde sayı cümlelerini bir araç olarak görmemektedir; dolayısıyla terazi modelini kullanırken de sayı cümleleri ile ilişki kurmamıştır [SG6- K: Eşitlik ve Denklem].

Ayla öğretmen eşitlik (bkz. Şekil 4.8a, 4.8b), eşitliğin korunumu (bkz. Şekil 4.8c), denklem ve denklem çözümü (bkz. Şekil 4.8d) için terazi modelini içeren aşağıdaki örnekleri kullanmıştır. Yukarıda bahsedildiği üzere, bu süreçte terazi modeline ilişkin sembolik bir gösterim kullanmamıştır.

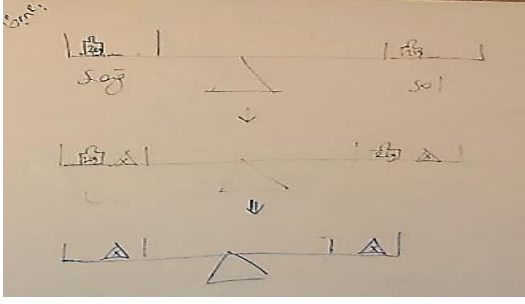


**Şekil 4.8a**

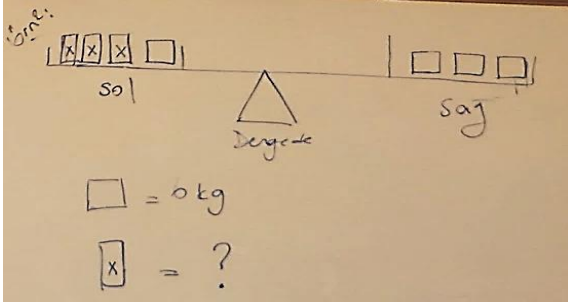


**Şekil 4.8b**





**Şekil 4.8c**



**Şekil 4.8d**

Öte yandan Ayla öğretmen, öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olan denklemlerin yanlış olduğu yönünde kavram yanılgısı geliştirdiklerini belirtmesine rağmen kullandığı denklem örneklerinin bu özellikleri taşımadığı görülmektedir. Ayla öğretmen denklem çözümünde bilinmeyen eşitliğin sol tarafında olduğu denklemler kullanmıştır. Bu denklemleri öğrenci zorluklarından ziyade farklı işlem becerilerinin kullanımını gerektirecek şekilde çeşitlendirmiştir. Ayla öğretmenin denklem çözme sürecinde kullandığı bu sorular Tablo 4.3’de sunulmuştur.

**Tablo 4.3: Ayla Öğretmenin Denklem Çözümünde Kullandığı Sorular**

Sorular
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>x + 6 = 12</math> ise <math>x=?</math></li> <li><math>2.x = 20</math> ise <math>x=?</math></li> <li><math>y - 5 = 14</math> ise <math>y=?</math></li> <li><math>2.x - 3 = 5</math> ise <math>x=?</math></li> <li><math>y + 6 = 24</math> ise <math>y=?</math></li> <li><math>4.y - 8 = 12</math> ise <math>y=?</math></li> </ul>

Ayla öğretmenin materyal kullanımında bahsettiği öğrenci zorluklarını dikkate almadığı görülmektedir. Bu örnekler, öğrencilerin denklemin yapısal özelliğini kavramalarına olanak sağlayacak örnekler değil bilinmeyeni bulma sürecindeki algoritmayı öğrenmelerini sağlayacak örneklerdir. Öğrencilerin denklem çözümündeki işlemsel becerilerini geliştirmeye yönelik örnekler seçtiği, öğrenci zorluklarını dikkate alarak bu örnekleri çeşitlendirmede olduğu görülmektedir. Bunun

yanında Ayla öğretmen, günlük yaşam problemleri durumlarından yola çıkarak denklem çözmeyi gerektiren örnekler de kullanmamıştır.

### Öğretim Stratejileri

Ayla öğretmenin eşitlik ve denklem konusunun öğretimine ilişkin alan bilgisinin öğretim uygulamalarına yönelik yaklaşımını etkilediği gözlenmiştir. Ayla öğretmen eşitlik ve denklem konusuna geçişte öğrencilerin ön bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır. Terazi modeli kullanarak eşitlik ve eşitliğin korunumunu açıkladığı aşağıdaki örneğe (bkz. Şekil 4.9) yönelik gerçekleşen sınıf tartışması bu durumu yansıtmaktadır.



Şekil 4.9

**Ayla Öğretmen:** Bir tane terazi alıyorum. Şimdi terazinin dengesini bozmak istemiyorum. Örneğin, burada 3 kg'lık bir ağırlık var buraya da 3 kg'lık bir ağırlık koyarsam dengede olur mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Şimdi ben terazinin dengesini hiç bozmamaya çalışıyorum tamam mı örnek olarak buraya bir tane  $x$  kg'lık bilmediğim bir ağırlık eklersem terazinin dengesi bozulmaması için diğer tarafa da eklemem gerekiyor mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Serdar:** Hocam mesela öbür tarafa domates koyuyoruz oraya da koyacağız.

**Ayla Öğretmen:** Aynen öyle, çünkü neyi istiyorum dengede kalmasını istiyorum. Ya da diyorum ki ben buradan 3kg'lık ağırlığı alacağım, ne kalır burada 3kg'lık ağırlığı alırsam?

**Öğrenciler:**  $x$

**Ayla Öğretmen:** Bu taraftan alıyorsam denge bozulmaması için diğer taraftan da ne yapmam lazım?

**Öğrenciler:** Almam lazım.

**Burak:**  $x$ 'i alsak oradan hocam.

**Ayla Öğretmen:** Fark etmez. Örneğin buraya 2kg'lık bir ağırlık ekliyorum. Ben buraya 2kg'lık ekliyorsam diğer taraf ne yapmam lazım dengede kalabilmesi için?

**Öğrenciler:** 2kg eklememiz lazım.

**Ayla Öğretmen:** Unutmayın arkadaşlar eşitliklerde de aynı şey geçerli eşitliğin sağ tarafına kaç ekliyorsanız sol tarafına da eklerseniz. Sağ tarafından kaç çıkarıyorsanız sol taraftan da çıkarırsınız.

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Ayla öğretmen, öğrencilerin eşitlik kavramını ön bilgileri ile ilişkilendirebilecekleri  $3 + x = 3 + x$  şeklinde sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Eşitlik ve denklem konusuna geçişte sayı cümlelerini bir araç olarak görmemesinin bu durum üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Bunun yanında eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde terazi modeli kullanması ancak terazi modeli kullanarak açıkladığı matematiksel işlemleri sembolik gösterime aktarmaması da bu durumun bir göstergesidir.

Ayla öğretmenin öğrencilerin eşitlik konusunda yaşadıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen bu duruma yönelik öğretimsel uygulamalar yapmadığı gözlenmiştir. Örneğin, öğrencilerin eşittir sembolünden sonra cevabın yazılacağını düşündüklerini belirtmesine rağmen derslerinde eşitlik kavramının ilişkisel anlamını içeren uygulamalar yapmamıştır. Eşitlik ve eşitliğin korunumunu sadece sözel açıklamalar yaparak açıklamıştır. Öğrencilerin alternatif düşünce ve çözümlerine yönelik ise yukarıdaki diyalogdaki “*Eşitliklerde de aynı şey geçerli eşitliğin sağ tarafına kaç ekliyorsanız sol tarafına da eklerseniz. Sağ tarafından kaç çıkarıyorsanız sol taraftan da çıkarırsınız.*” şeklinde benzer açıklamalarda bulunmuştur. Tartışma sırasında öğrencileri eşitlik kavramı hakkında düşünmeye ve sorgulama yapmaya yönlendirecek sorular kullanmamıştır. Örneğin, öğrencilere “Teraziye 3 kg ağırlık ekleme işlemi sembol kullanarak nasıl gösterebiliriz?” şeklinde sorular yöneltmemiştir.

Ayla öğretmen denklem çözümünde ise ters işlem (eşitliğin karşı tarafına geçirme metodu) kullanarak bilinmeyeni bulmanın eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması yolu ile bilinmeyen bulmanın bir sonucu olduğuna yönelik bilgi sahibi olmasına rağmen ders sürecinde bu iki yoldan birbirinden bağımsız olarak bahsetmiştir. Bu durum Ayla öğretmenin öğretim uygulamaları sırasında eşitliğin diğer tarafına geçirme yolu ile denklemin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması yolu arasında bir ilişki kurmadığını göstermektedir.  $x + 6 = 12$ ,  $2x = 20$  ve  $y - 5 = 14$  denklemlerinde denklemin diğer tarafına geçirerek bilinmeyeni bulma sürecine ilişkin açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

**Ayla Öğretmen:** Matematikle ilgilenenler bakmışlar. Bu da (eşitliğin her iki tarafından aynı niceliğin çıkarılması) aslında biraz zor bir yöntem, acaba demişler daha kolay bir yöntemi var mı? Sonra araştırıyorlar. Diyorlar ki bir kolay yöntem daha var diyorlar. Sağdakini sola, soldakini de sağa atalım. Örnek olarak arkadaşlar. Eşitliğin sol tarafında bilinmeyenim ne var?

**Öğrenciler:** x.

**Ayla Öğretmen:** O zaman demişler. Bilinen var bilinmeyen var. Bilinenleri bir tarafa, bilinmeyenleri bir tarafa toplayalım demişler. Örneğin, burada  $(x+6)$   $x'$  i bırakmak istesem  $x'$  in yanındaki 6'yı karşı tarafa gönderebilir miyim?

**Öğrenciler:** Evet.

**Ayla Öğretmen:** Ama bakın,  $x'$  in  $(x+6=12)$  yanındaki 6 karşı tarafa geçerken ne değiştiriyor? İşaret değiştiriyor. -6 oluyor.

**Öğrenci:** Tam tersi mi oluyor?

**Ayla Öğretmen:** Aynen öle.

**Öğretmen:** O zaman  $x$  ne olur 6 oluyor. Şurada  $(y-5=14)$  çıkarma mı var? Ben  $y'$  i yalnız bırakmak istersem  $y'$  nin yanında ne var?

**Öğrenciler:** -5.

**Ayla Öğretmen:** -5'i karşıya ne olarak geçiriyorum?

**Öğrenciler:** Artı 5.

**Ayla Öğretmen:** Bak bu tarafta  $y$  kaldı. -5, 14'ün yanına ne olarak geldi?

**Öğrenciler:** Artı 5.

**Ayla Öğretmen:** O zaman  $y$  ne olur?  $y=19$ . Ya da çarpma mı var  $(2.x=20)$ ? Çarpmanın tersi neydi?

**Öğrenciler:** Bölme.

**Ayla Öğretmen:** Bakın.  $2.x=20$ . Şu çarpı 2 mi? Çarpı 2'yi de karşıya bölü 2 olarak geçirecek miyim? 20'yi 2'ye böl?

**Öğrenciler:** 10.

**Ayla Öğretmen:** Bakın hep aynı sonuçlar çıkıyor.

[SG7- K: Eşitlik ve Denklem]

Bu diyaloga bakıldığında, Ayla öğretmenin denklem çözme sürecinde işlemleri eşitliğin diğer tarafına geçirmeyi (bilinen ve bilinmeyenleri eşitliğin farklı tarafına toplama) işlemsel olarak ele aldığı, bu süreçteki işlemsel eylemleri kavramsal olarak açıklamadığı görülmektedir. “Ama bakın,  $x'$  in  $(x + 6 = 12)$  yanındaki 6 karşı tarafa geçerken ne değiştiriyor? İşaret değiştiriyor, -6 oluyor.” “Bakın,  $2.x = 20$ . Şu çarpı 2 mi? Çarpı 2'yi de karşıya bölü 2 olarak geçirecek miyim? 20'yi 2'ye böl?” ifadeleri bu durumun bir göstergesidir. Bu durumun Ayla öğretmenin denklemde eşitliğin her iki tarafında aynı işlemi uygulama yolu ile eşitliğin diğer tarafına geçirme yolu arasında ilişki kurmamasının bir sonucu olduğu söylenebilir.

## Özet

Sonuç olarak, yukarıda detaylı olarak sunulan bulgular, Ayla öğretmenin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine yönelik alan bilgisinin yeterli ve derin olmadığını göstermektedir. Ayla öğretmen değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları hakkında bilgi sahibi olmasına

rağmen, bu anlamlar arasında bir ayrım gözetmeden harf sembollerinin tamamını “değişken ve bilinmeyen” olarak tanımlamıştır. Bu durumla ilişkili olarak, değişken kavramına ilişkin birbiriyle çelişen ve hatalı tanımlar (iki farklı denklemde aynı harf sembolü ile gösterilen bilinmeyi değişken olarak tanımlama ve değişkeni bir nesne olarak belirtme) yaptığı görülmüştür. Ayrıca, örüntü kuralını bulma sürecinde değişken kullanımını cebir ile ilişkilendirmediği gözlenmiştir. Değişken farklı anlamları arasında bir ilişkilendirme yapmadığı için cebirsel ifadeyi tanımlarken de cebirsel ifadelerde değişkenin herhangi bir değer aldığı fikrine yer vermemiştir. Cebirsel ifadeyi değişken kavramından ziyade denklem kavramı ile ilişkili olarak tanımlamıştır. Cebirsel ifadelerde işlem sürecini de değişken için nesne benzetmesi yapılan elma-armut yaklaşımı kullanarak açıklamıştır.

Ayla öğretmen eşitlikte, eşitliğin iki tarafının niceliksel olarak birbirine eşitliği hakkında bilgi sahibidir. Ancak eşitlik ve eşitliğin korunumunu sembolik olarak gösterilmesine ilişkin sınırlı bilgiye sahiptir. Bu durumla ilişkili olarak, eşitlik ve eşitliğin korunumun öğretiminde araç olarak kullanılan sayı cümlelerinin kullanım amacına ilişkin de bilgi sahibi değildir. Denklemi ise cebirsel ifade ile ilişkilendirerek ve denklemin cebirsel ifadeden farkının eşitlik sembolü içermesine indirgiyerek tanımlamıştır. Denklem tanımında, denklemin eşitlik içermesinin matematiksel anlamı geri plan kalmıştır. Ayla öğretmen, denklem çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin anlamına ve denklem çözümünün terazi modeli ile gösterilmesine ilişkin bilgi sahibidir. Ancak terazi modeli kullanarak denklem çözümü ile sembolik denklem çözümünü ilişkisiz olarak görmektedir.

Ayla öğretmen öğrencilerin değişken ve cebirsel ifadeler konularında yapabilecekleri hatalar hakkında bilgi sahibidir. Ancak bu hataların altında yatan öğrenci düşüncelerini net olarak ortaya koyamadığı görülmektedir. Örneğin, değişkenin değişen değerler veya genelleştirilmiş sayı anlamlarına ilişkin öğrenci zorluklarından bahsetmiş; ancak bu durumun sebebinin harf sembollerinin farklı anlamlarının hatalı kullanımı ve genellenmesi olabileceğinden bahsetmemiştir. Benzer şekilde öğrencilerin  $3x + 4$  cebirsel ifadesinin  $7x$  şeklinde birleştirmelerinin nedeni olarak  $3x + 4$ 'ü sonuç olarak kabul etmemelerinden bahsetmiş, ancak öğrencilerin bu ifadeyi bir süreç ( $x$ 'i 3 ile çarp 4 ekle) gördüklerini net olarak ifade etmemiştir. Ayla öğretmen eşitlik ve denklem konularında öğrenci hatalarının altında yatan olası öğrenci düşünceleri hakkında da bilgi sahibi olmakla birlikte

derinlemesine analiz yapamamıştır. Öğrenci hatalarının sebebi olarak, öğrencilerin eşittir işaretinden sonra cevap gelmesi gerektiği yönündeki sonra bir cevap gelmesi gerektiği yönündeki düşüncelerini göstermiş; ancak eşitlik durumunun ilişkisel anlamını göz önünde bulundurarak derinlemesine analiz yapmamıştır.

Ayla öğretmenin alan ve öğrenci bilgisi, öğretim uygulamaları üzerinde etkili olmuştur. Örneğin, örüntüler ve ilişkiler konusunu değişken kavramının öğretimi için bir araç olarak görmediği için, ders sırasında örüntü kuralındaki n değişkeninin örüntüyü genelleme sürecinde değişen değerleri temsil etmekte kullanıldığı fikri geri planda kalmıştır. Ayla öğretmen, değişken kavramına formal geçişi örüntüler ve ilişkiler konusu ile yapmadığı için değişkeni temsil etmekte kullanılan harf sembollerine cebirsel ifadelerle geçişte yer vermiştir. Benzer şekilde, cebirsel ifadeyi içerisinde bilinmeyen ve işlem bulunma odaklı tanımladığı için öğretim uygulamalarında cebirsel ifadenin anlamı geri planda kalmıştır.

Ayla öğretmenin derslerinde kullandığı soru ve materyaller çeşitlilik göstermekle birlikte kavramların önemli özelliklerini yansıtacak şekilde yapılandırılmamıştır. Örneğin, Ayla öğretmen bir değişkenin başka bir değişkene göre değerler aldığı durumları içeren sorular kullanmış, ancak değişkenin cebirsel ifadelerde herhangi bir değer aldığını gösteren sorulara yer vermemiştir. Benzer şekilde cebirsel ifadeler konusuna geçişte günlük yaşam durumlarından bahsetmiş; ancak bu durumları içeren ilişkileri cebirsel ifade olarak temsil etmemiştir. Bunun yanında olası öğrenci zorlukları hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen derslerinde buna yönelik öğretim uygulamalarına yer vermemiştir. Cebirsel ifade oluşturma sürecinde cebirsel ifadenin anlamından ziyade işlemlerin doğru kullanımına odaklanmıştır. Sözel problem örneklerini farklı işlemlerin kullanımını gerektirecek şekilde çeşitlendirmiştir.

Ayla öğretmen eşitlik ve denklem kavramlarının öğretiminde terazi modeli kullanımını sembolik gösterim ile ilişkilendirmemiştir. Bu durumla ilişkili olarak, eşitlik ve denklem konusuna geçişte öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirme yapmalarına yardımcı olacak gösterimler (örn. sayı cümleleri) kullanmamıştır. Denklem çözümünde ise yapılan işlemlerin matematiksel açıklamaları hakkında bilgi sahibi olmakla birlikte öğretim sürecinde bu ilişkiye yer vermemiştir. Bu durum Ayla öğretmenin bu ilişkiye yönelik alan bilgisine sahip, ancak bunu öğretim uygulamasına yansıtmayacak öğretim bilgisinin eksik olduğunu göstermektedir.

## 4.2. Hale Öğretmen

Hale öğretmen ortaokul yıllarında matematik dersinde başarılı olmadığını ve cebir konularının diğer konulara kıyasla daha çok soyut düşünme gerektirdiği için anlamakta çok zorlandığını belirtmiştir. Ortaokulun son senelerinde ve lise yıllarında kendi çabasıyla matematikte başarılı olmaya başladığını ifade etmiştir.

Hale öğretmen cebir konularını katı cisimler konusundan sonra öğretmekte en çok zorlandığı konu olarak nitelendirmiştir. Bu durumun cebir konularının soyut yapısından kaynaklandığını düşünmektedir. Cebirde harfler yerine sayılar kullanıldığını öğrencilerin sayılar ve harf sembolleri arasında ilişki kurmada zorlandıklarını ifade etmiştir. Öğrencilerin temel işlem becerilerinde eksiklikler olduğu için de soyut olan cebir konularını öğrenmede daha çok zorlandıklarını düşünmektedir.

Hale öğretmen cebir öğretiminde görselleştirme ve somutlaştırmanın önemli olduğunu düşünmektedir. Bunu sağlamak için ise materyal kullanılması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak cebirin soyut yapısından dolayı materyal kullanımının diğer matematik konularına kıyasla daha zor olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple cebir konularında çok fazla materyal kullanamadığını belirtmiştir. Ayrıca, bu açıdan kendisini yeterli görmemektedir.

### 4.2.1. Değişken

#### 4.2.1.1. Alan Bilgisi

Hale öğretmen değişkeni “*cebirsal ifadelerde kullanılan harfler*” [SG3- K: Cebirsal İfadeler], bilinmeyişi ise “*denklemlerde kullanılan harfler*” olarak tanımlamıştır [SG5- K: Eşitlik ve Denklem]. Ayrıca ders sürecinde sık sık “*Cebirsal ifadelerde harflerin ismi değişkendi, denklemde harflerin ismi bilinmeyen oldu.*” açıklamasını yapmıştır. Değişkeni temsil etmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamlarını temsil eden ifadelere derste yer vermiş, ancak bu farklı anlamlara yönelik bir açıklama yapmamıştır. Başka bir deyişle, değişkenleri belirtmek için kullanılan harf sembollerinin denklemlerde sınırlı sayıda değer alabilirken cebirsal ifadelerde herhangi bir değer alabileceği fikrine yer vermemiştir.

Hale öğretmen yapılan görüşmelerde de cebirsal ifade ve denklemde değişkeni temsil etmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları arasındaki ayırmadan bahsetmemiştir. Bu duruma ilişkin “*Öğrencilere cebirsal ifadede kullanılan harflerin*

*değişken, denklemdeki harflere ise bilinmeyen dediğimizi söylüyorum.” ifadesini kullanmıştır. Hale öğretmenin bu ifadesini içeren açıklaması aşağıda verilmiştir.*

**Araştırmacı:** *Harf sembollerinin cebirsel ifade ve denklemde kullanımını öğrencilere nasıl açıklıyorsunuz?*

**Hale Öğretmen:** *Zaten bunu belirtiyorum. Derste de söylüyorum sürekli, cebirsel ifadede kullanılan harflere değişken, denklemdeki harflere ise bilinmeyen dediğimizi söylüyorum. Cebirsel ifade de değişken diyorduk, denklemde ise bilinmeyen diyoruz, diyorum.*

**[Hale Öğretmen, Görüşme III]**

Hale öğretmenin bu açıklamasında harf sembollerinin cebirsel ifade ve denklemde nasıl kullanıldığı hakkındaki matematiksel anlamın geri planda kaldığı görülmektedir. Bu durum, zihnindeki değişken kavramının anlamının yüzeysel olduğunu göstermektedir. Bunun yanında yapılan görüşmede değişkenin kullanımına yönelik hatalı bir açıklama yapmıştır. İki ayrı denklemde aynı harf sembolü ile gösterilen bilinmeyeni, farklı denklemlerde farklı değerler aldığı için değişken olarak tanımlamıştır. Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

*“x aynı x, illa 3 olmak zorunda değil. O yüzden biz buna değişken diyoruz. Bir problemde x' i 5 bulursunuz, diğer problemde 7 bulursunuz. x değişken olduğu için 3'te olur 5'te olur.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme II]**

Hale öğretmen değişken kavramına yönelik bir başka ifadesinde ise değişkeni sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak belirtmiştir. Örneğin,  $x + x + x + x$  işleminde x değişkeni için bir nesne (elma ve ayakkabı) benzetmesi yapmıştır [SG4- K: Cebirsel İfadeler]. Değişkeni belirtirken sıklıkla bu benzetmeyi kullanmıştır.

Öte yandan Hale öğretmen değişkenin genelleştirilmiş sayı ve değişen nicelikler olarak kullanımlarına ilişkin bilgi sahibidir. Kendisine değişkenin anlamlarına ilişkin bazı matematik soruları yöneltilmiş ve bir matematik öğretmenin derste bu soruları hangi amaçla kullanabileceği sorulmuştur [Hale Öğretmen, Görüşme III].

1. n bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür?  
(Senaryo 4, a)
2. a, b'den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$  (Senaryo 4, b)



3.  $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde  $x$ ' in alabileceği değerler nelerdir? (Senaryo 5)

Hale öğretmen bir matematik öğretmenin bu soruları öğrencilerin değişkenlerin yerine farklı sayılar verip veremeyeceklerini görmek amacıyla kullanabileceğini ifade etmiştir. İlk örnek soruda öğrencilerin karşılaştırma yapabilmeleri için  $n$ 'ye farklı sayı değerleri vermeleri gerektiğini ve bu sebeple öğretmenin bu soruyu öğrencilere  $n$ 'nin farklı sayı değerleri alabileceğini göstermek amacıyla kullanabileceğini belirtmiştir. İkinci örnek soruda  $a$  ve  $b$ 'nin tek bir değer değil birbirine göre değişen değerler aldığını; üçüncü örnek soruda ise  $x$ 'in değişken olduğunu ve  $x$ 'in alacağı bütün sayı değerleri için eşitliğin sağlandığını fark etmelerinin amaçlanmış olabileceğini belirtmiştir [Hale Öğretmen, Görüşme III].

Hale öğretmenin bir sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde değişkeninin kullanım amacına ilişkin bilgisinin sınırlı olduğu gözlenmiştir. Bu süreçte aritmetikten cebire yapılan bir genelleme süreci olarak cebirsel ilişkilerden bahsetmemiş, sadece örüntü kuralının nasıl bulunduğunu açıklamıştır. Hale öğretmenin 3, 6, 9, 12... sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde yaptığı gösterim (bkz. Şekil 4.10) ve bu gösterime ilişkin açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

Adım Sayısı	Adım sayısına karşılık gelen değer	Örüntünün kuralı
1.	→ 3	1.3
2.	→ 6	2.3
3.	→ 9	3.3
4.	→ 12	4.3

n.3  
(n-3)

Şekil 4.10

**Hale Öğretmen:** İlk önce bakıyoruz. Birinci adım, ikinci adım, üçüncü adım, dördüncü adım. Buradaki 3 birinci adıma, ikinci adıma 6, üçüncü adıma 9, dördüncü adıma da 12 denk geliyor. Birinci adımla 3 arasında bir bağıntı kurmam gerekiyor. Aynı şekilde ikinci adımla 6 arasında bir bağıntı kurmam gerekiyor. Bu bağıntıya göre de örüntünün kuralını bulmam gerekiyor. Yalnız bağıntı kurarken dikkat etmem gereken şey şu, bunun (birinci adım) arasında kurduğum bağıntıyla bunun (ikinci adım) arasında kurduğum bağıntı birbirine eşit olacak birbirinin aynısı olacak. İlk başta bağıntıyı nasıl kuruyorsam sonraki adımlarda da aynı bağıntıyı kurmam gerekiyor.

[SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Hale öğretmen 3, 6, 9, 12... sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde bu sayı örüntüsündeki sıra sayısının değişen değerler alabileceğini ve bu değerlerin n. adım olarak ifade edildiğinden bahsetmemiştir. Sayı örüntüsüne ilişkin bir kural bulmanın değişken kullanarak yapılan bir genelleme olduğu fikrine yer vermemiştir. Sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde adım ile o adımdaki sayı arasında bir bağıntı kurulması gerektiğini vurgulamış, ancak bu bağıntının neden kurulması gerektiğini açıklamamıştır. Aşağıdaki ifadesinde de sayı örüntüsüne ilişkin bir kural bulmanın değişken kullanarak yapılan bir genelleme olduğu fikrine yer vermemiştir. Sayı örüntüsünde ilerleyen terimleri hesaplamak zor olacağı için örüntü kuralını bulmak gerektiğinden bahsetmiştir.

**Hale Öğretmen:** Normalde ben örüntünün kuralını bulmasaydım eğer bu örüntüyü (3, 6, 9, 12...) şöyle çözümlerirdim. 3 artmış, 3 artmış, 3 artmış. 3 artıra artıra... Beşinci sınıfta öğrendiğimiz şekli bu şekilde değil mi? Biz cebirsel ifade olarak göstermiyorduk. Sadece arasındaki ilişkiyi buluyorduk. Soruda bize 15. adımını bulunuz diyor. Eğer biz tek tek böyle 15 tane sayı yazmaya kalksak belki daha büyük bir sayı verebilirdi. Siz derdi ki 30. adımını bulun, 40. adımını bulun. Daha büyük sayı verseydi eğer bizim bunu tek tek yazıp bulmamız çok zorlaşirdi. O yüzden biz ne yapıyoruz örüntünün kuralını buluyoruz.

[SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Öte yandan Hale öğretmen örüntü kuralı için “örüntünün cebirsel ifadesi” ifadesini kullanmasına rağmen n'nin bir değişken olduğundan bahsetmemiştir. Değişken kavramından ilk olarak cebirsel ifadeyi tanımlarken bahsetmiştir. Hale öğretmenin öğrencilerin değişkenin anlamını örüntü kuralını bulma sürecinde değil; cebirsel ifade ve denklem konusunda anlayacaklarına yönelik inancı da bahsedilen durumu desteklemektedir.

*“Orada bulunan kuralın bir cebirsel ifade olduğunu bilmeleri önemli. Sonuçta bir kural buluyoruz değişkeni kullanarak bir kural buluyoruz ama burada değişkeni sadece kural bulmak için kullanıyorlar. Nasıl kullanıldığını asıl cebirsel ifade ve denklemlere geçinde görecekler. Şu an onlar için pek anlam ifade etmiyor.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamalarında örüntü kuralını bulma sürecinde harfler ile sayılar arasında ilişki kurmadan bahsetmesine rağmen bu ilişkinin geri planda kaldığı ve kural bulmaya odaklandığı görülmektedir. Hale öğretmen, harflerle sayılar arasında ilişki kurmayı aritmetikten cebire genelleme sürecini temel olarak açıklamamıştır.

**Araştırmacı:** Altıncı sınıflarda cebir öğrenme alanına örüntüler ve ilişkiler konusu ile geçiş yapılmaktadır. Cebire geçişte bu konunun tercih edilme sebebi ne olabilir? Bu konunun önemine ilişkin ne söylersin?

**Hale Öğretmen:** İşte cebirde dediğim gibi harfler için içine giriyor. Harflerle sayılar arasındaki ilişkiyi kurdurmak da en güzel bu konuyla olabilir o yüzden bence bu konuyu tercih etmiş olabilirler. Değişkeni kullanarak bir kural bulmaya çalışıyoruz. Her adımda aynı kural olması gerekiyor.

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

#### 4.2.1.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.2.1.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Hale öğretmenin değişken kavramının öğretimine ilişkin alan bilgisinin öğrencilerin değişken kavramını öğrenmeleri hakkındaki bilgisi üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Cebire geçişte örüntüler ve ilişkiler konusunu bir araç olarak görmesine rağmen bu konu ile öğrencilerin harf sembollerini anlamakta zorlandıklarını düşünmektedir. Bu sebeple cebirsel ifadeler ve denklemler konusunu öğrencilerin değişken kavramını anlayabilmeleri için daha uygun bir araç olarak görmektedir. Hale öğretmenin aşağıdaki ifadeleri de bahsedilen durumu desteklemektedir.

*“Orada bulunan kuralın bir cebirsel ifade olduğunu bilmeleri önemli. Sonuçta bir kural buluyoruz değişkeni kullanarak bir kural buluyoruz ama burada değişkeni sadece kural bulmak için kullanıyorlar. Nasıl kullanıldığını asıl cebirsel ifade ve denklemlere geçince görecekler. Şu an onlar için pek anlam ifade etmiyor.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

*“Bana kalırsa bu konuyla çocuklar harf sembolünü kullanmakta zorlanıyorlar. Denklemi çözmek örüntüler konusundan daha basit geliyor. Bu konuyu anlattığım zaman anlayan bir iki tane çocuk oluyor. Çünkü zekâsını kullanması gerekiyor. Aslında geçiş yaparken güzel, güzel kavratılırsen anlayabilirse güzel ama anlattığın zaman aradaki ilişkiyi kuran çocuk çok az olduğu için kavramakta zorlanıyorlar. Değişken, harf kullanımını cebirsel ifadelerde ve denklemlerde daha iyi anlayabiliyorlar.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Hale öğretmenin öğrencilerin değişken kavramına ilişkin olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibidir. Örneğin, öğrencilerin değişkenin her zaman belirli değerler aldığını düşündükleri yanılgısından bahsetmiştir [Hale Öğretmen, Görüşme II]. “*i*)  $n$  bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür?, *ii*)  $a$ ,  $b$ 'den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$ ” (Senaryo 4) sorularında değişkenin tek bir değer alacağını düşündüklerini ve harf sembollerine tek bir değer vererek sonuca ulaşmaya çalıştıklarını belirtmiştir.

*“n'nin değişken olduğunu anlamadıkları için n yerine 1 verebilir, 2 verebilir. Öğrenci tek bir sayı vererek sonuç bulabilir. Mesela 1'i verir, burası 3 burası 7'dir der. O yüzden 3, 7'den küçüktür burası daha büyüktür der. Ama biz buraya 6 verseydik 6 kere 3, 18, 6, 6 daha 12. 3n, n+6'dan daha büyük olurdu. Ama öğrenciler tek yönlü düşündüğü için 1 verip bir tane sonuç bulup bu bundan büyüktür diye kavram yanlışına düşebilir. İkinci soruda da yine aynı şekilde bir tane sayı düşünüp a şudur diyebilirler. Öğrencilerin genelde yaptığı 1 sayısını veriyorlar. a zaten b'den küçüktür, a 1'dir. O zaman b de 9'dur diye söyleyebilirler.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme III]**

Hale öğretmen değişkenlerin genelleştirilmiş sayı olarak kullanıldığı eşitliklerde de öğrencilerin değişkenlerin tek bir değer aldığını düşündüklerini ifade etmiştir “ $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde x'in alabileceği değerler nelerdir?” (Senaryo 5) sorusunda x'e belirli değerler vererek eşitliğin doğru olup olmadığını kontrol ettiklerini ve eşitliği doğrulayan herhangi bir değeri sonuç olarak belirttiklerini ifade etmiştir [Hale Öğretmen, Görüşme III].

Hale öğretmen öğrencilerin farklı harf sembolleri ile gösterilen değişkenlerin birbirine eşit olamayacağı yönünde oluşturdukları kavram yanlışlığı hakkında da bilgi sahibidir. Öğrencilerin farklı harflerin farklı sayılara eşit olması gerektiğini düşündüklerini ifade etmiştir. Bu durum ile ilişkili olarak, “ $x + y + z = x + p + z$  eşitliği doğru mudur?” (Senaryo 7) sorusunda öğrencilerin yapabilecekleri hatalar sorulduğunda,  $y = p$  olamayacağı için eşitliğin doğru olmayacağını düşündüklerini belirtmiştir.

*“İşte x'ler, z'ler iki tarafta da aynı o zaman y ile p birbirine eşittir dememiz gerekiyor. Ama öğrenci burada şunu düşünebilir. x ile x'i aynı vermiş, z ile z'yi aynı vermiş o zaman aynıdır. y ile p'ye baktığımız zaman y ile p'ye eşit demiş ama harfler farklı o zaman y ile p eşit değildir, yanlıştır diye düşünebilir öğrenci. y ye de 2 verdiniz p'yi de nasıl 2 buldunuz diyen öğrenci olur. Harfler farklı o yüzden sayılar da farklı çıkmalıdır diye düşünebilirler. Çünkü y farklı bir harf p farklı bir harf, harfler farklı ise mutlaka bunlara eşdeğer olan sayılar da farklı olacaktır diye kavram yanlışlığı oluşturuyorlar. y'yi 5 bulduysak p harfi farklı olduğu için p harfini de farklı bulmam gerekir benim diyor.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme III]**

Hale öğretmen öğrencilerin aynı harf sembolü ile gösterilen bir değişkenin aldığı değerin her zaman aynı değere eşit olduğunu düşündüklerinden de bahsetmiştir. Bu duruma ilişkin olarak, öğrencilerin  $2x + 5 = 15$  ve  $3x + 7 = 16$  denkleminde x'in farklı değerler alıyor olmasını kavrayamadıklarını örnek göstermiştir.

*“Ama birinde işte soruyu yazdım.  $2x+5=15$ , diğer soruyu yazdım  $3x+7=16$ . Birinde x'i 5 buluyor birinde 3 buluyor öğrenci. İşte, birinde 5 bulacak diğerinde 3 bulacak. Arada kontrol ederken yanlış dedim. Hocam tahtada bulduk dedi. O şeyi kavrayamamıştı. x aynı x birinde 5 oluyor, birinde 3 oluyor. Öğrenci, hocam o*

*zaman siz yanlış buldunuz birincide gibi bir şey söylemişti. Öğrenci x'i orada 5 bulduk yine her zaman 5 olacak diye düşünüyor mesela. x'in bazen 5 bazen 3 olabileceğini kavrayamıyorlar.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme II]**

Hale öğretmen öğrencilerin değişken kavramını anlamada yaşadıkları zorlukların ve yaptıkları hataların, değişkenin sayıları belirttiğini kavrayamadıklarından kaynaklandığını belirtmiştir. Bu durumu da “harflerle sayılar arasında ilişki kuramamaları” şeklinde belirtmiş, ancak bu ifadesini daha detaylı açıklamamıştır. Sadece matematikte harf kullanımı artmaya başladıkça matematiğin zorlaştığını belirtmiştir.

*“Sayılar, bir karikatür vardı şeyde internette dolaşiyor. İşte ilkokulda öğrendiğimiz matematik 2+2, 4. İşte ortaokulda 2x geliyor daha sonra lisede daha çok harfler, üniversitede tüm harfler oluyor. Matematiğin zorluğunu da biz oradan anlayabiliriz aslında. Ne kadar çok harf o kadar matematik zorlaşıyor.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme II]**

Hale öğretmen öğrencilerin değişken kavramı ile ilgili yaşadıkları zorlukların bir diğer sebebini aritmetik öğrenmelerindeki eksikliklere bağlamıştır. Ancak öğrencilerin aritmetikteki eksikliklerinin değişken kavramını öğrenmeleri üzerindeki etkisini net bir şekilde açıklamamıştır. Bu durumu sadece öğrencilerin dört işleme ilgili öğrenme eksikliklerine bağlamıştır.

*“İlk önce dört işlemi çok çok iyi bilmeleri gerekiyor bence öğrencilerin o eksikliği tamamlamamız lazım. Beşinci sınıfta özellikle işlem eksikliği ilk önce onu tamamlamamız gerekir. Dört işlemi tamamladıktan sonra da artı ve eksi kavramlarını çocukların, ben mesela işaretler hangileri diye soruyorum artı, eksi, çarpı ve bölü diyorlar. İşaretle işlemi bile karıştıran çocuklar var. Temel bilgileri sağlam vermemiz gerekiyor o yüzden ilk önce artı, eksi kavramlarını çocuklara anlatmamız gerekiyor. Altıncı sınıf için dört işlemi bence beşinci sınıfta halledip gelmiş olmaları gerekiyor. Bu yönlerden bilgi eksiklikleri olmazsa değişkeni daha rahat öğrenebilirler. Ama dört işlem eksikleri bulunduğu anda en temelde değişkeni kullandıkları işlemlerde çok fazla hata yapıyorlar.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme II]**

#### **4.2.1.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi**

##### **Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi**

Hale öğretmen örüntüler ve ilişkiler konusunun cebire geçişte kullanılmasının harf sembolleri ve sayılar arasında ilişki kurulmasında önemli olduğunu düşünmesine rağmen; bu konuda öncelikli amacı örüntü kuralını bulmaktır. Bu yaklaşım, değişken kavramına ilişkin öğretim uygulamalarının içeriğini ve akışını düzenlemeye yönelik kararlarını etkilemiştir. Örüntüler ve ilişkiler konusunun

işlendiği 2 ders saatinde bir sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde n değişkenin değişen değerler aldığı fikrine yer vermemiştir. Bu derslerinde bir sayı örüntüsünün genel terimini bulma ve genel terimi verilen bir sayı örüntüsünün istenen bir terimini bulmayı içeren öğretim uygulamaları yapmıştır.

## Ders İşleyişi Bilgisi

### Öğretim Materyalleri

Hale öğretmen öğrencilerin değişken kavramını anlamalarında somut örnek ve materyallerin kullanımının önemli olduğunu belirtmiştir. Somut örnek ve materyaller ile belirttiği şeyin ise görselleştirmek ve günlük hayatla ilişkilendirmek olduğunu ifade etmiştir. Bir sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde, öğrencilerin örüntü adımları arasındaki ilişkiyi anlamalarının değişken kavramını öğrenmelerini kolaylaştıracağını düşündüğü için tablo kullanmayı tercih etmiştir. Hale öğretmen tablo kullanımının öğrencilerin bu ilişkiyi keşfedebilmelerinde görsel açıdan kolaylık sağladığını düşünmektedir. Ancak, bir sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde oluşturduğu tabloları değişkenin bu süreçte nasıl kullanıldığını göstermekten ziyade örüntü kuralını bulmak amacıyla kullanmıştır.

Hale öğretmencebir sel ifadeler ve denklemler konusunun işlendiği derslerde değişken kavramı için “ayakkabı” ve “elma” gibi nesne benzetmesi yapmıştır. Öğrencilere, “Eğer karıştırıyorsanız bakın,  $x$  bilinmeyen olduğu için bunu ayakkabı gibi, elma gibi düşünün.” açıklamasını yapmıştır. Bu benzetme, değişkeni sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak görmesinin öğretim uygulamalarına bir yansımasıdır. Görsel ve günlük hayatla ilişkili olarak nitelendirdiği bu örneklere yönelik açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

*“Değişken ile sayı arasındaki ilişkiyi anlayabilmeli, ben onlara  $x$ 'i ayakkabı ya da elma olarak veriyorum hatta çocuklar gülüyorlar. Hep elma ya da ayakkabı olarak anlattım çocuklar hep elmamı hocam o diyorlardı. Onlara hani bilinmeyeni elma olarak düşünün dedim. Anlatırken mutlaka görselleştirmek gerekiyor. Sadece  $x$  diye anlatmak değil de onu çocukların günlük hayatta kullandığı şeylerle bağdaştırmak gerekiyor.  $x$  yerine dediğim gibi çocuk ayakkabıyı, elmayı daha iyi anlar. Çünkü ayakkabıyı sürekli ayağına giyiyor. Haşır neşir olduğu bir şey. Elmayı yiyor sürekli gördüğü bir şey, görselleştirerek, günlük hayattan örnekler vererek bence bu şekilde basitleştirebiliriz ki somutlaştırırsak ya da günlük hayata dökersek çocukların çok daha iyi öğreneceğini düşünüyorum ben.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Hale öğretmen aşağıdaki örnekte de değişken kavramı için “kot pantolon” benzetmesini yapmış, değişkenin alacağı farklı değerler için ise farklı pantolonların farklı fiyatlara sahip olmasını göstermiştir.

*“Ben kullanmadım bunu ama anlatırken bu sınıfta sorun yaşamadım ondan kullanmadım. O yüzden ama anlatırken mesela farklı farklı kıyafetler var ve bu kıyafetlerin fiyatları var. Hepsinin de ismi kot pantolou ama kot pantolonun birisi 10 lira birisi 20 lira, farklı farklı fiyatlar almış. Ama hepsi de kot pantolon aslında.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

Hale öğretmen farklı harf sembolü ile gösterilen değişkenlerin aynı sayısal değere eşit olabileceğini göstermek için de benzer bir örnek kullanmıştır.  $x + y + z = x + p + z$  eşitliğinde  $y$  ve  $p$  değişkeni için armut ve elma benzetmesini yapmış, bu değişkenlerin alacağı aynı değerler için ise aynı fiyatlara sahip olmasını göstermiştir.

*“Eğer somut olarak yapacaksak, işte manava gittiniz elmanın kilosu da 5 lira armudun kilosu da 5 lira ama biri elma biri armut, tatları farklı farklı. Sen ikisine de 5 lira vereceksin. İkisini aynı fiyata alabildiğine göre bu harfler de aynı değeri alabilir. Bu şekilde gösterilebilir.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

Öte yandan, Hale öğretmen farklı öğrenci zorlukları hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen derslerinde bu durumlara yönelik örnek ve materyal kullanmamıştır. Cebirsel ifadelerde değişkenin değişebilen değerler aldığını gösteren örnek sorulara yer vermemiştir. Örneğin,  $x + 2$  ifadesinde  $x$ 'in alabileceği farklı sayı değerleri için  $x + 2$ 'nin alabileceği farklı sayı değerlerinden bahsetmemiştir. Öğrencilerin cebirsel ifade ve denklemde değişken kullanımını karşılaştırmalarına fırsat sağlayacak örnekler kullanmamıştır. Sadece değişken kavramının matematiksel anlamına yönelik olmayan görsel ve günlük hayatla ilişkili olarak belirttiği nesne benzetmesini kullanmıştır. Bu durum, Hale öğretmenin değişken kavramının öğretimine ilişkin alan bilgisinin kullandığı materyaller üzerinde etkili olduğunu göstermektedir.

### Öğretim Stratejileri

Hale öğretmenin değişken kavramına ilişkin alan bilgisinin öğretim uygulamalarına yönelik yaklaşımını etkilediği gözlenmiştir. Örneğin, örüntüler ve ilişkiler konusuna geçişte öğrencilerin aritmetik bilgileri ile ilgili bir ilişkilendirme yapabilecekleri değişken kullanılarak yapılan genelleme fikrine yer vermemiştir. Bu durumun Hale

öğretmenin bir sayı örüntüsünün genel terimini bulmada yapılan genelleme sürecinde değişkenin anlamından ziyade örüntünün kuralını bulmayı esas alması ve öğrencilerin değişken kavramını cebirsel ifade ve denklem konusu ile daha iyi öğrenebileceklerini düşünmesi ile ilişkili olduğu söylenebilir. Hale öğretmenin örüntüler ve ilişkiler konusuna geçişte yaptığı aşağıdaki açıklamaları öğrencilerin aritmetik öğrenmeleri ile bir ilişkilendirme yapmadığını göstermektedir.

**Hale Öğretmen:** Belirli kurala göre verilmiş sayı dizisinin cebirsel ifadeye göre kurallı yazacağız. Yani biz, cebirsel ifade dediğimiz şey henüz işlemedik. Bu konudan sonra cebirsel ifadeler konusunu işleyeceğiz. Harfli ifadeler, cebirsel ifadeler aynı anlama geliyor. Örüntünün kuralını cebirsel ifade ile göstermeye çalışacağız. Şimdi başlangıçta bu konu ve cebirsel ifadeler size biraz garip gelebilir. Çünkü siz harfli ifadelerle işlem yapmayı öğrenmediniz. Başlangıçta birazcık zor gelebilir ama sonradan ne demek istediğimizi anladığınız zaman konu daha zevkli ve anlaşılır hale gelecek.

[SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Aşağıda gerçekleşen diyalog da Hale öğretmenin öğrencilerin aritmetik öğrenmeleri ile ilişkilendirme yapmadığını göstermektedir.

**Öğrenci:** Hocam ilkokulda farklı şekillerde de yapıyorduk. Tablo çizmek zorunda mıyız?

**Hale Öğretmen:** Evet tablo çizeceksiniz. Adımları yazıyorsunuz, adımlara karşılık gelen sayıları yazıyorsunuz ve arasındaki ilişkiyi buluyorsunuz. İlişkiyi bulurken de hepsinde aynı olmasına dikkat ediyorsunuz.

[SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Hale öğretmenin öğrencilerin örüntü konusunda ilkokulda kullandıkları farklı stratejiler ile bir ilişkilendirme yapmadığı görülmektedir. Ayrıca ders sürecinde de bu yaklaşımına benzer şekilde, öğrencilerin örüntü kuralını bulmada farklı stratejiler kullanmalarına fırsat tanımamış, bu süreçte sadece tablo kullanmaları gerektiğini belirtmiştir. Hale öğretmenin bu süreçte yönlendirmeler ile oldukça aktif olduğu gözlenmiştir. Örüntü kuralını bulurken öğrencilere ne yapmaları gerektiğini adım adım açıklamıştır. 3, 6, 9, 12... sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecinde (bkz. Şekil 4.11) öğrencilerle arasında gerçekleşen diyalog bu duruma örnek gösterilebilir.



Adım Sayısı	Adım sayısına karşılık gelen sonuç	Örüntünün kuralı
1	→ 3	1.3
2	→ 6	2.3
3	→ 9	3.3
4	→ 12	4.3
	1.3	(n-3)

Şekil 4.11

**Hale Öğretmen:** İlk önce bakıyoruz. Birinci adım, ikinci adım, üçüncü adım, dördüncü adım. Buradaki 3 birinci adıma, ikinci adıma 6, üçüncü adıma 9, dördüncü adıma da 12 denk geliyor. Birinci adımla 3 arasında bir bağıntı kurmam gerekiyor. Aynı şekilde ikinci adımla 6 arasında bir bağıntı kurmam gerekiyor. Bu bağıntıya göre de örüntünün kuralını bulmam gerekiyor. Yalnız bağıntı kurarken dikkat etmem gereken şey şu, bunun (birinci adım) arasında kurduğum bağıntıyla bunun (ikinci adım) arasında kurduğum bağıntı birbirine eşit olacak birbirinin aynısı olacak. İlk başta bağıntıyı nasıl kuruyorsam sonraki adımlarda da aynı bağıntıyı kurmam gerekiyor. Pekâlâ, ilk adımda sizce nasıl bir bağıntı kurmuş olabiliriz?

**Burak:** 3 ekleyerek hocam.

**Hale Öğretmen:** 3 ekleyerek... 1'e 3 eklersem kaç yapar?

**Öğrenci:** 4.

**Hale Öğretmen:** 2'ye 3 eklersem kaç yapar?

**Öğrenci:** 5.

**Hale Öğretmen:** Oldu mu? Hayır.

**Pelin:** Bence ikişer ikişer gidiyor hocam. 1'e 2 eklerseniz 3, 2'ye 4 eklerseniz 6.

**Hale Öğretmen:** Ama bak aynı dedim bağıntı aynı olacak. Sen 1'e 2 ekledin 3, ikinci aşamada 2'ye de 2 ekleyeceksin, ne oluyor? 4 oluyor olmadı.

**Halil:** Hocam buradaki birinci adımla 3'ü çarpabiliriz hocam.

**Hale Öğretmen:** Tamam, 1 ile 3'ü çarptık 3, devamını söyle.

**Halil:** 2 ile de 3'ü çarpabiliriz. 3 ile 3'ü çarpabiliriz 9, 3 ile 4'ü çarpabiliriz 12.

**Hale Öğretmen:** Arkadaşınızın söylediği gibi kurduğumuz bağıntı doğru mu sizce?

**Öğrenciler:** Evet.

[SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Hale öğretmenin bu süreçte soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu ve öğrencilerin öğretmenin sorularına cevap verme yoluyla tartışmaya katıldıkları görülmektedir. Bununla birlikte Hale öğretmen "Sizce nasıl bir bağıntı kurmuş olabiliriz?" sorusuna, Burak'ın "3 ekleyerek" şeklinde verdiği cevaba karşılık öğrenciden herhangi bir açıklama istememiş, kendi varsayımı üzerinden bir değerlendirmeye gitmiştir. Hale öğretmenin Burak'ın cevabına direkt kendisinin dönüt verdiği ve diğer öğrencilerin bu fikri değerlendirmesine fırsat tanımadığı görülmektedir.

Hale öğretmen öğrencilerin değişken kavramını anlamada zorlandıkları ve hata yaptıkları zaman direkt tanımı veya kuralı açıklamıştır. Öğrencilere hatalarını fark etmelerine ve değişken kavramının anlamına ilişkin sorgulama yapmalarına fırsat tanımamıştır. Ayrıca, bu süreçte değişken kavramının matematiksel anlamına yönelik olmayan nesne benzetmesi yaptığı örnekler kullanmıştır. Bu benzetme Hale öğretmenin değişkeni sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak görmesinin öğretim uygulamalarına bir yansımasıdır. Aşağıda Eyüp isimli öğrencinin  $x + x + x + x$  ifadesini alt alta toplayarak sonucu  $x$  olarak yazmasına ilişkin yaptığı hataya yönelik öğretmenin yaklaşımı ve yaptığı açıklamalar bahsedilen durumu yansıtmaktadır.

**Hale Öğretmen:** *Sen yanlıştını gördün mü?*

**Emre:** *Hayır.*

**Hale Öğretmen:** *Sevda?*

**Seher:** *Hocam  $4x$  olacak.*

**Hale Öğretmen:** *Neden  $4x$  olacak?*

**Seher:** *4 tane  $x$  var.*

**Hale Öğretmen:** *Kaç tane  $x$  varmış, say Emre. O zaman biz buraya ne yazacağız?*

**Emre:**  *$4x$ .*

**Hale Öğretmen:**  *$x$ 'leri ayakkabı gibi düşünün. 1 tane ayakkabı, 2 tane ayakkabı, 3 tane ayakkabı, 4 tane ayakkabı. Kaç tane ayakkabı var burada?*

**Öğrenciler:** *4.*

**Hale Öğretmen:** *Eğer karıştırıyorsanız bakın  $x$  bilinmeyen olduğu için bunu ayakkabı gibi, elma gibi düşünün. 1 elma, 2 elma, 3 elma, 4 elma kaç tane elma var?*

**Öğrenciler:** *4.*

**Hale Öğretmen:** *O zaman 4 tane elma olacak,  $4x$ .*

[SG4- K: Cebirsel İfadeler]

## 4.2.2. Cebirsel İfadeler

### 4.2.2.1. Alan Bilgisi

Hale öğretmen cebirsel ifadeyi tanımlarken cebirsel ifadelerdeki harf sembollerinin farklı değerler alabileceğinden bahsetmekle birlikte, tanım sırasında harf sembollerinin “herhangi bir sayıyı” değil, “bilinmeyen bir sayıyı” temsil ettiği ifadesini kullanmıştır. Bu durum harf sembollerinin cebirsel ifadelerdeki anlamı ile denklemlerdeki anlamı arasındaki ayrımı engellemektedir. Hale öğretmenin cebirsel ifadeyi tanımlarken yaptığı açıklamalar bu durumu yansıtmaktadır.

**Hale Öğretmen:** Cebirsel ifadelerin diğer adı harfli ifadelerdir. İki ismi var bu konunun. İçinde en az bir bilinmeyen bulunan ve işlem içeren ifadelere cebirsel ifadeler diyoruz. Şimdi içinde en az bir bilinmeyen bulunan, buradaki bilinmeyenden kastım şu. İçinde harfler var ve bu harfler sayıları temsil ediyor. Bu sayıları biz harflerle ifade ettiğimiz için ne olduğunu bilmiyoruz. Mesela  $x+5$ . Buradaki  $x$ ' in hangi sayı olduğunu biliyor muyuz biz?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Hale Öğretmen:** Murat 6 diye düşünebilir. Ahmet 7 diye düşünebilir. Ben 8 diye düşünebilirim. Buradaki  $x$ ' in hangi harf hangi sayı olduğunu bilmediğimiz için biz buna harfli ifadeler, cebirsel ifadeler diyoruz. Şimdi cebirsel ifadelerde bulunan harfler bir sayıyı temsil ederler. Yani bu sayı 5, 6, 7 olabilir. Biz bu harfin hangi sayıyı temsil ettiğini şu anda bilmiyoruz. Ama bu harfler bir sayıyı temsil ediyormuş. Eğer biz bu şekilde işlemlerde harf görürsek buna cebirsel ifade diyeceğiz. Harf varsa eğer cebirsel ifadedir. Ben buraya  $x$  yazdım illa ki  $x$  harfini kullanmak zorunda değilsiniz. Burada  $a$  olur,  $b$  olur,  $c$  olur,  $z$  olur,  $h$  olur,  $p$  olur. Önemli olan burada neyin olması? Harfin olması. Harfin olması ve harfin bilinmeyen bir sayıyı temsil etmesi.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]

Hale öğretmenin cebirsel ifadede öncelikli olarak harf kullanımını vurguladığı görülmektedir. Ders sürecinde cebirsel ifade için “harfin olması ve harfin bilinmeyen bir sayıyı temsil etmesi” fikrini cebirsel ifadeyi tanımlarken sıklıkla kullanmıştır. Bununla birlikte, “Eğer bu şekilde işlemlerde harf görürsek biz buna cebirsel ifade diyeceğiz.” açıklaması cebirsel ifadede harf sembollerinin herhangi bir değeri aldığı fikrinin geri planda kaldığını göstermektedir.  $2.a$ ,  $5.b + 2$  ve  $8 + 2$  ifadelerinin cebirsel ifade olup olmadığını belirleme sürecinde öğrencilerle arasında gerçekleşen aşağıdaki diyalog da bu durumu desteklemektedir.

**Hale Öğretmen:**  $2.a$  bir cebirsel ifade midir?

**Öğrenciler:** Evet.

**Buket:** Hocam bence cebirsel ifadedir çünkü çarpı  $a$  demiş, bilinmeyen sayının yerine harf getirmiş.

**Hale Öğretmen:** Burada harf var. Harf var ise cebirsel ifadedir değil mi?  $5.b+2$  bir cebirsel ifade midir?

**Damla:** Harf olduğu için...

**Hale Öğretmen:** İçinde eğer harf varsa, harf bilinmeyeni ifade ediyordu. O zaman biz buna cebirsel ifade diyoruz.  $8+2$  bir cebirsel ifade midir?

**Bahri:** Cebirsel ifade değildir, çünkü harf ya da değişik bir şey yok.

**Hale Öğretmen:** Evet aferin, içinde harf geçmediği için bu bir cebirsel ifade değildir. O zaman sorularda karşımıza çıktığı zaman ayırt edebiliyoruz. O zaman harf geliyorsa bunlar birer cebirsel ifadedir.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]

Hale öğretmenin aşağıdaki ifadelerinde de cebirsel ifadelerde aslında bir genelleme yapıldığı fikri geri planda kalmaktadır. Hale öğretmen,  $4x$  cebirsel

ifadesini herhangi bir sayının 4 katının temsili şeklinde düşünmemekte ve bu sebeple de kavramı daha çok işlemsel açıdan (içinde harf sembolü barındırması) ele almaktadır.

**Seher:** Hocam  $4x$  olacak.

**Hale Öğretmen:** Neden  $4x$  olacak?

**Seher:** 4 tane  $x$  var.

**Hale Öğretmen:** Kaç tane  $x$  varmış, say Eyüp. O zaman biz buraya ne yazacağız?

**Emre:**  $4x$ .

**Hale Öğretmen:**  $x$ 'leri ayakkabı gibi düşünün. 1 tane ayakkabı, 2 tane ayakkabı, 3 tane ayakkabı, 4 tane ayakkabı. Kaç tane ayakkabı var burada?

**Öğrenciler:** 4.

**Hale Öğretmen:** Eğer karıştırıyorsanız bakın  $x$  bilinmeyen olduğu için bunu ayakkabı gibi, elma gibi düşünün. 1 elma, 2 elma, 3 elma, 4 elma kaç tane elma var?

**Öğrenciler:** 4.

**Hale Öğretmen:** O zaman 4 tane elma olacak,  $4x$ .

[SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Bunun yanında Hale öğretmenin cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işleminde elma-armut yaklaşımını kullandığı, benzer ve benzer olmayan terimlerden bahsetmediği görülmektedir. Bu durum Hale öğretmenin değişkeni sayısal bir değer olarak değil nesne olarak görmesinin değişkenin cebirsel ifadelerde işlemleri açıklarken kullanımına bir yansımasıdır.  $x + x + x + x$  toplama işlemini  $x$  için elma ve ayakkabı benzetmesi kullanarak açıklaması bu duruma örnek gösterilebilir.

Hale öğretmen  $x + x + x + x$  toplama işleminde  $x$  terimlerinin benzer terimler olduğu fikrine yer vermemiştir. Öğrencilerin değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin sayısal bir değeri değil bir nesneyi belirtmesine ilişkin kavram yanılgısı geliştirmelerine sebep olabilecek elma-armut yaklaşımını kullanmıştır. Yapılan görüşmede de  $4x - 2x$  işleminin sonucunu açıklarken benzer bir yaklaşım izlediği görülmüştür.

*“Ben onlara  $x$ 'i ayakkabı ya da elma olarak veriyorum. Sürekli 4 tane elmam var. 2 tanesini yedim. Hep elma ya da ayakkabı olarak anlattım çocuklar hep elmamı hocam o diyorlardı. Onlara hani bilinmeyeni elma olarak düşünün dedim. 4 elmam vardı. 2 elmayı yedim. 2 elma kaldı. Burada 2'nin yanına elmayı koymayı unutmuyacaksınız, elma yerine sen oraya  $x$  koyacaksınız. Çocuk bu şekilde daha rahat kavriyor.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

#### 4.2.2.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.2.2.2.1. Alan İlişkin Öğrenci Bilgisi

Hale öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeler konusundaki olası düşünceleri, yaşadıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin cebirsel ifadelerde sayısal bir sonuç bulmaya çalıştıklarını ve bu sebeple de cebirsel ifadeden oluşan bir sonucu cevap olarak kabul etmediklerini belirtmiştir [Hale Öğretmen, Görüşme II]. Hale öğretmene bu duruma ilişkin aşağıdaki öğretim senaryosu (Senaryo, 3) yöneltmiştir [bkz. Şekil 4.12].

Verilen şeklin bazı bölümleri gizlenmiştir. Her bir kenarının uzunluğu “5 br” ve kenar sayısı “n” olan bu şeklin çevresinin uzunluğu nedir?



**Ezgi Öğretmen:** Yunus bu soru için ne düşünüyorsun?

**Yunus:** Kenar uzunluğu ile kenar sayısını çarpmamız gerekir öğretmenim.

**Ezgi Öğretmen:** Evet...

**Yunus:** 5 ile n'yi çarpmamız gerekir.

**Ezgi Öğretmen:** Güzel.

**Yunus:** O zaman  $5n$  yazabiliriz ama siz cevabı istiyorsunuz.

**Ezgi Öğretmen:**  $5n$ 'yi cevap olarak kabul edemez miyiz?

**Yunus:** Hayır! n'yi bilmedikçe cevabı bulamayız.

#### Şekil 4.12

Hale öğretmen bu senaryoda, Yunus'un sonucu bulduğunu, ancak cebirsel ifadenin bir sonuç olamayacağını düşündüğü için  $5n$  cebirsel ifadesini sonuç olarak kabul etmediğini belirtmiştir.

*“Çocuklarda harfli ifadelere girdiğiniz zaman sorunun çözümünü bulunca illaki matematik ya 7 olacak 8 olacak illaki sabit bir sayı bulma isteği var. Bu  $5n$ 'yi veya  $5a$ 'yı cevap olarak kabul etmiyorlar. Mesela ben tahtada örnek çözerken sonucu  $5a$  buldum. Öğrenci soru bitti mi öğretmenim diyor. Aynı şeylerle biz de karşılaşıyoruz. Burada Yunus sorunun gerekli çözümünü nasıl yapabileceğini biliyor aslında. Biz eğer 3 kenarı var deseydik  $5.3=15$  sonucu rahatlıkla bulabilecekti. Sorunun çözüm şeklini biliyor ama cebirsel ifadeler konusunu tam olarak kavrayamadığı için  $5n$  olarak sonucun bulunabileceğini düşünmüyor. Ama sorunun çözümünü güzel bir şekilde yapıyor.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

Hale öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadelerde işlemleri birleştirerek yaptıkları hatalar hakkında da bilgi sahibidir. Örneğin, öğrencilerin  $2x + 3y$  cebirsel ifadesinin  $5xy$ 'ye eşit olduğunu düşünebildiklerini belirtmiştir. Benzer şekilde  $3x + 4$  cebirsel ifadesinin de 7 veya  $7x$  'e eşit olduğunu düşündüklerini ifade etmiştir.

*“En çok yapılan hatalardan bir tanesi zaten.  $3x$  ile  $4$ 'ü direkt topluyorlar  $7x$  diyor ya da  $7$  diyor.  $x$ 'i hiç görmüyor.  $3x$ 'e  $4$  eklersem buradaki eklerse mi hiç görmüyor.  $3 \cdot 4 = 12$  diyen öğrencilerle bile karşılaşmışım. Yazılı kâğıtlarında özellikle bulan öğrenciler var.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme III]**

Hale öğretmen öğrencilerin yaşadıkları bu zorlukların ve yaptıkları hataların değişkenin ne olduğunu kavrayamadıklarından ve aritmetikteki bilgi eksikliklerinden kaynaklandığını belirtmiştir. Ancak öğrencilerin değişken kavramı ile aritmetikteki bilgi eksikliklerinin bu durum üzerindeki etkisini net bir şekilde açıklamamıştır. Bu durumu sadece öğrencilerin dört işlemle ilgili öğrenme eksikliklerine bağlamıştır [Hale Öğretmen, Görüşme III]. Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamaları öğrencilerin,  $3x + 4$  cebirsel ifadesinin  $7x$ 'e eşit olduğu yönünde yaptıkları hata için değişken kavramını anlamamalarını sebep gösterdiği, ancak bu hatayı işlemsel açıdan ele aldığını göstermektedir.

*“Direkt sayıları düşünüyor. Sayıları topluyor,  $x$  ifadesinin herhangi bir etkisi yok onun için. Bir de öğrenci kendisine kolay gelen ne ise onu yapıyor. Eklemeyi mi biliyor,  $3$  ile  $4$ 'ü eklerim diyor,  $x$ 'i ekleyemez o yüzden değişken ifadesini kavrayamadığı için direkt bu şekilde toplama işlemi yapmıştır. Değişken,  $x$  kavramını kavrayamamış. Direkt  $3x$  ve  $4$ 'ü, aynı ifadeler gibi düşünüp  $3x$  ile  $4$ 'ü toplayıp  $7x$ 'i bulmuş.  $3$  ile  $4$ 'ü sayıları topluyor, sayıları bir düşünüyor yanına da  $x$ 'i koyuyor. Buradakini sadece bir sembol gibi düşünüp hani hiçbir anlam ifade etmiyor. Sadece  $3$  ile  $4$ 'ü toplama işlemi,  $3$  ile  $4$ 'ü ekledim  $7$  buldum.  $x$  ifadesini de ben yanına koyarım, buradaki değişkeni kesinlikle kavrayamamış.”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme III]**

Hale öğretmen öğrencilerin bu hatayı neden yaptıklarına ilişkin matematiksel düşünme süreçlerinden bahsetmemiştir. Örneğin, öğrencilerin bu hatayı “ $3x + 4$  ifadesinin “herhangi bir sayının 3 katının 4 fazlası”nı temsil ettiğini kavramamış olmalarından kaynaklandığından bahsetmemiştir. Bu durumla ilişkili olarak da  $3x + 4$  cebirsel ifadesindeki toplama işlemi gerçekleştirilmesi gereken bir eylem ve  $3x+4$  ifadesini tamamlanmamış olarak düşündüklerine ilişkin bir açıklamada bulunmamıştır. Bu durumun Hale öğretmenin cebirsel ifadelerin tanımına ilişkin sınırlı bilgisi ile ilişkili olduğu söylenebilir.

#### 4.2.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi

##### Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi

Hale öğretmen cebirsel ifadeler konusuna Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (2009) belirtildiği gibi 2 ders saati süre ayırmıştır. Bu derslerin içeriğinde cebirsel ifadelerin tanımlanması, cebirsel ifadelerde terim ve katsayı, cebirsel ifade oluşturma ve cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri konularına yer vermiştir. Öğretim programı kazanımlarında yer almamasına rağmen bu derslerinde cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik uygulamalar yapmıştır. Hale öğretmen 6. sınıf düzeyinde cebirsel ifadeler konusunun denklemler için en temel konu olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple denklemleri öğrenme sürecinde cebirsel ifadelerde temel toplama ve çıkarma işlemlerini öğrenmelerinin önemli olduğunu düşündüğü için derste bu konulara da yer verdiğini belirtmiştir.

*“Altıncı sınıfta denklemlere geçiş aşamasında cebirsel ifadeler en temel konu işte cebirsel ifadelerle denklemler arasındaki farkı anlamaları gerekir onu anladıktan sonra basit mesela cebirsel ifadelerde toplama, çıkarma yapıyoruz. Bunu görsel olarak işte normal sayı olarak değil de çocuklara 5 lira 3 lira değil de arabanın fiyatı  $2a + 3$  veya  $3a + 4$  diye vererek basit toplama çıkarma işlemlerini yaptırıyoruz çocuklara. Başta onları anlasın ki daha sonra denklemler geçtiği zaman denklemler konusunda  $2x + 3x$  mesela  $2x + 3x$ 'i toplamak bize çok basit geliyor ama öğrenciler bunu toplamakta çok zorlanıyor. Cebirsel ifadelerde bunun temelini veriyoruz daha sonra denklemler konusunu anlatmak daha kolay oluyor. Bundan dolayı programda olmasa da ben anlatıyorum. Denklemlere geçmeden toplama ve çıkarmayı basit düzeyde yapabilmeleri önemli...”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

##### Ders İşleyişi Bilgisi

###### Öğretim Materyalleri

Hale öğretmen öğrencilerin verilen sözel durumlara uygun cebirsel ifade oluşturmalarının denklemler konusu için önemli olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple dersinde farklı işlemleri (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) kullanarak cebirsel ifade oluşturmaya gösteren örnek sorulara yer verdiğini belirtmiştir [Hale Öğretmen, Görüşme II]. Hale öğretmenin bu süreçte kullandığı örnekler Tablo 4.4'de sunulmuştur.

**Tablo 4.4: Hale Öğretmenin Cebirsel İfadelerin Öğretiminde Kullandığı Sorular**

Sorular
<ul style="list-style-type: none"><li>• Bir sayının 3 katı</li><li>• Bir sayının 7 fazlası</li><li>• Bir sayının 8 eksiği</li><li>• Bir sayının 9'a bölümü</li><li>• Bir sayının 2 katının 3 fazlası</li><li>• Bir sayının 5 fazlasının 3 katı</li><li>• Bir sayının 3 katının 2 eksiği</li><li>• Bir sayının 3 eksiğininin 4 katı</li><li>• Bir sayının 3'te birinin 5 fazlası</li></ul>

Hale öğretmenin kullandığı sözel problem durumlarının farklı dört işlemlerin kullanımını içerdiği ve günlük yaşam durumlarını içermediği görülmektedir. Örneğin, öğrencilerin aritmetikteki öğrenmeleri ile ilişkilendirme yapabilecekleri "Ayşe'nin ablası Ayşe'den 3 yaş büyüktür" gibi iki kardeşin yaşı arasındaki ilişkiden yola çıkarak cebirsel ifade oluşturabilecekleri günlük yaşam durumu örneklerine yer vermemiştir.

Hale öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeler konusunu kavramalarında somut örnekler kullanmanın önemli olduğu belirtmiş ve değişken kavramının öğretiminde somut olarak nitelendirdiği nesne benzetmesi yaptığı örnekleri cebirsel ifadelerde de kullanmıştır. Bu örnekler cebirsel ifadenin matematiksel anlamına yönelik değildir. Bu durum Hale öğretmenin değişken kavramına ilişkin alan bilgisinin cebirsel ifadeler konusunun öğretimi için kullandığı örnekler üzerinde etkili olduğunu göstermektedir. Örneğin, cebirsel ifadelerde toplama işleminde değişkeni elmaya benzeterek yaptığı açıklama aşağıda verilmiştir.

*"İki elmam vardı, 3 elma daha aldım 5 elma oldu. Burada 5'in yanına elmayı koymayı unutmayacaksın, elma yerine sen oraya x koyacaksın. Çocuk bu şekilde daha rahat kavriyor. Ama  $3x + 2x = 5x$  yapar dediğiniz zaman bakıyor yani hani nasıl yaptı diye."*

**[Hale Öğretmen, Görüşme II]**

Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamasında da  $3x + 4$  cebirsel ifadesindeki terimlerin toplanamayacağını göstermek için elma ve armut benzetmesi yaptığı görülmektedir.

*"Bunu anlatırken mesela görselleştirerek yani somutlaştırarak 3'ün yanında elma var gibi kabul edin diyorum. 3 elma, bunu da 4 tane armut gibi düşünün. 3 elma ile ben 4 tane armudu toplayamam o yüzden bu toplama işlemi  $3x + 4$  olarak kalır.  $7x$  bulamayız sonucu diye ifade edebiliriz öğrencilere. Çünkü x çok soyut bir kavram*



*olduğu için onlara x yerine elma desek ya da x yerine portakal ya da başka bir şey söylesek onlar için çok daha rahat olur. Söylediğim şey buradaki x'in değişken olduğu. Bunun yerine sabit sayı getirebilirim, 3 getirebilirim, 4 getirebilirim. Ama daha çok elma armut dediğim zaman, görsel olarak daha iyi anlıyor. Sabit sayı verdiğim zaman kavrayamayan çocuklar var. 3 elma ile 4 armudu toplayamam dediğim zaman bunu daha iyi kavriyorlar."*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

## Öğretim Stratejileri

Hale öğretmen cebirsel ifadeler konusuna geçişte öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirme yapmadan direkt cebirsel ifadenin tanımını vermiştir. Bunun yanında verilen bir sözel duruma uygun cebirsel ifade oluşturmada da "Ayşe'nin ablası Ayşe'den 3 yaş büyüktür" gibi iki kardeşin yaşı arasındaki ilişkiden yola çıkarak aritmetik bilgilerini kullanabilecekleri bir ilişkilendirme yapmamış, cebirsel ifade oluşturma sürecindeki işlemsel süreci ön plana çıkarmıştır. Cebirsel ifade oluşturmada sözel ifadedeki durumu anlamlandırarak matematiksel olarak temsil etmeye çalışmaktan ziyade, öğrencileri anahtar kelimelerden yola çıkarak harf sembolleri arasındaki işleme karar vermeye yönlendirmiştir. Hale öğretmenin aşağıdaki diyalogdaki açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

**Hale Öğretmen:** *Şimdi bu konu bizim için çok çok önemli bir konu. Çünkü 7. sınıfta göreceğimiz denklem kurma problemlerinin temeli olacak bir konu. Şimdi bakıyoruz, bize diyor ki soruda sözel ifadeler verilmiş, bu sözel ifadeleri cebirsel ifade olarak yazalım. Yani cebirsel ifade olarak yazalım ne demek, harf kullanarak yazacağız. Öncelikle bilmemiz gereken şey şu, fazlalık derse eğer toplama işlemi aklıma gelecek, kat derse eğer çarpma işlemi aklıma gelecek, eksiği derse eğer çıkarma işlemi, bölümü derse eğer bölme işlemi aklıma gelecek. Bunu anlamayan var mı?*

**Öğrenciler:** *Hayır.*

**Hale Öğretmen:** *Fazlalık deyince?*

**Öğrenciler:** *Toplama.*

**Hale Öğretmen:** *Kat deyince?*

**Öğrenciler:** *Çarpma.*

**Hale Öğretmen:** *Eksik deyince?*

**Öğrenciler:** *Çıkarma.*

**Hale Öğretmen:** *Bölüm deyince?*

**Öğrenciler:** *Bölme.*

[SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Hale öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadelerde zorlanmalarının temel sebebinin dört işlemle ilgili ön bilgi eksikliklerinden kaynaklandığını düşündüğü için bu yaklaşımı sergilemiştir. Öğrencilerin dört işlemlerle ilgili öğrenme eksiklikleri olduğu

için cebirsel ifade oluşturmada zorlandıklarını ve denklem kurma sürecinde de bu işlemleri kullanacakları için bu süreçte dört işlem kullanımına ilişkin hatırlatmalar yaptığını belirtmiştir.

Hale öğretmenin bu hatırlatmaları ve açıklamaları yaparken soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu, öğrencilerin çoğunlukla cevap verme yoluyla tartışmaya katıldığı gözlenmiştir. “Bir sayının 3 fazlasının 4 katı” sözel durumuna ilişkin cebirsel ifade oluşturma sürecinde Hale öğretmen ve öğrenciler arasında gerçekleşen diyalog bu duruma örnek gösterilebilir.

**Hale Öğretmen:** Bir sayının 3 fazlası, bir sayım  $h$  olsun.  $h$ 'nin 3 fazlası,  $h+3$ ,  $h$ 'nin 3 fazlasının 4 katı diyor.  $h+3 \cdot 4$  yazıp böyle bırakırsam yanlış olur çünkü niye ben burada ne yaptım 3 ile 4'ü çarpıyorum.  $3 \cdot 4 = 12$  dedim. Pekâlâ, bir sayının 4 katını almış oluyor muyum?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Hale Öğretmen:** Ama bana ne diyor, bir sayının 3 fazlasının 4 katını al diyor. Ama ben böyle yazınca 4 katını almış oldum mu?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Hale Öğretmen:** O zaman ben buraya parantez açıyorum. Ben size kümelerde anlatmışım. Kümelerde ne demişim. Birleşimin kesişim, kesişimin birleşim üzerine dağılmasını anlatmışım. Bakın 4 ile  $h$ 'yi çarparsam  $4h$ , 4 ile 3'ü çarparsam 12.  $h$ 'nin de 4 katını almış oldum. Anlamayan var mı?

**Öğrenciler:** Hayır.

#### [SG4- K: Cebirsel İfadeler]

Hale öğretmen öğrencilere düşünmeleri için fırsat tanımadan doğru cevabı kendisi söylemiştir. Bunun yanında kullandığı soruların öğrencileri sorgulamaya yöneltecek sorulardan ziyade öğrencilerin evet veya hayır cevabını vermelerini gerektirecek sorular olduğu görülmektedir. Öte yandan Hale öğretmen, öğrenciler hata yaptıkları zaman hatalarını sorgulama yaparak fark etmelerini sağlayacak yönlendirmeler yapmamıştır. Aşağıdaki tartışmada, Hale öğretmenin  $x + x + x + x$  ifadesine ilişkin öğrencinin yaptığı hata karşısında başka bir öğrenciye söz hakkı verdiği görülmektedir.

**Hale Öğretmen:** Sen yanlısını gördün mü?

**Emre:** Hayır.

**Hale Öğretmen:** Sevda?

**Seher:** Hocam  $4x$  olacak.

**Hale Öğretmen:** Neden  $4x$  olacak?

**Seher:** 4 tane  $x$  var.

**Hale Öğretmen:** Kaç tane  $x$  varmış, say Emre. O zaman biz buraya ne yazacağız?

**Emre:**  $4x$ .

**Hale Öğretmen:**  $x$ 'leri ayakkabı gibi düşünün. 1 tane ayakkabı, 2 tane ayakkabı, 3 tane ayakkabı, 4 tane ayakkabı. Kaç tane ayakkabı var burada?

**Öğrenciler:** 4.

**Hale Öğretmen:** Eğer karıştırıyorsanız bakın  $x$  bilinmeyen olduğu için bunu ayakkabı gibi, elma gibi düşünün. 1 elma, 2 elma, 3 elma, 4 elma kaç tane elma var?

**Öğrenciler:** 4.

**Hale Öğretmen:** O zaman 4 tane elma olacak,  $4x$ .

[SG4- K: Cebirsel İfadeler]

### 4.2.3. Eşitlik ve Denklem

#### 4.2.3.1. Alan Bilgisi

#### Eşitlik ve Eşitliğin Korunumu

Hale öğretmen eşitlik kavramını terazi ile ilişkilendirerek eş kollu terazinin dengede olma durumunu eşitlik olarak tanımlamıştır. Ayrıca, teraziye ağırlık ekleme çıkarma yoluyla dengenin korunumunu göstererek eşitliğin korunumu ile ilişkilendirmiştir. Öğrencilerle arasında gerçekleşen sınıf tartışması bu durumu yansıtmaktadır.

**Hale Öğretmen:** Pazara gittiğiniz zaman siz pazara bana 1 kg domates ver dediniz. Adam 1 kg domatesi poşete koyuyor, terazinin bir kefesine o domatesi koyuyor. Sonra terazinin bir kefesine 1 kg'lık ağırlık koyacak. Bakıyor ki ne oldu? Domates ağır bastı. 1 kg yer aşağıda kaldı. Domates 1 kg'dan ağır geldi. Oradan dengeleyecek kadar domates aldı. Terazi ne oldu dengede kaldı. Ne bu taraf ağır bastı ne bu taraf ağır bastı. İki taraf dengede kaldığı zaman ne oldu terazimize biz dengede dedik. Bu sefer 1 kg domatesin yanına 1 kg salatalık koyduk. Salatalık koyduktan sonra terazinin bu kefesine ne yapar?

**Öğrenciler:** Aşağı iner.

**Hale Öğretmen:** Aşağı iner. Bu taraf kefesine ne olur?

**Öğrenciler:** Yukarı çıkar.

**Hale Öğretmen:** Denge bozulur mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Hale Öğretmen:** Pekâlâ dengeyi korumak için ne yapmamız gerekiyor?

**Öğrenciler:** Salatalığı çıkartmamız lazım.

**Hale Öğretmen:** Hayır salatalığı çıkartmıyorsunuz. Salatalığı koydun bu taraf ağır bastıktan sonra tekrar dengeyi kurmak için ne yapmam lazım?

**Damla:** Hocam 1 kg daha ekledim.

**Hale Öğretmen:** 1 kg daha ağırlık koymam gerekir. Terazinin kefesine ne oldu dengeye geldi. Peki, terazinin bu tarafına 5 kg ekledim. Eşitlik bozulur mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Hale Öğretmen:** Denge bozuldu, dengenin tekrar yerine gelmesi, yani eşitliğin sağlanması için ne yapmam gerekir?

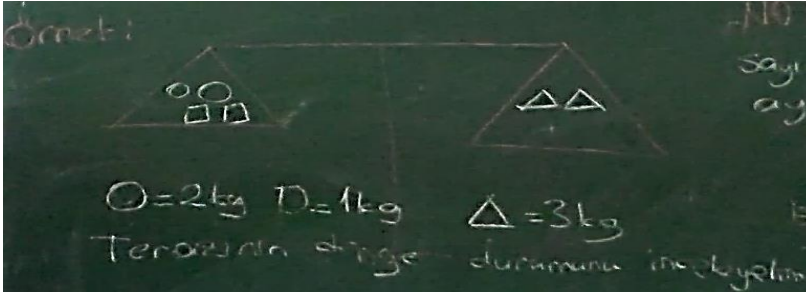
**Öğrenciler:** Hocam öbür tarafa da 5kg ekleriz.

**Hale Öğretmen:** Aferin, öbür tarafa da 5 kg eklememiz gerekiyor.

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmenin “Denge bozuldu, dengenin tekrar yerine gelmesi, yani eşitliğin sağlanması için ne yapmam gerekir?” ifadesi eşitlik kavramını terazi modeli ile ilişkilendirdiğini ve terazinin dengede olma durumunu eşitlik olarak ifade ettiğini göstermektedir. Bununla birlikte, “1 kg daha ağırlık koymam gerekir. Terazinin kefesine ne oldu dengeye geldi. Peki, terazinin bu tarafına 5 kg ekledim. Eşitlik bozulur mu?” ifadesi teraziye ağırlık ekleme çıkarma durumları üzerinden eşitliğin korunumunu açıkladığını göstermektedir.

Bu süreçte Hale öğretmen eşitliğin korunumunu sadece sözel olarak açıklamıştır. Terazide yapılan ağırlık ekleme ve çıkarma eylemlerini (1 kg daha ekledim, 5 kg ekledim) matematiksel sembollerle ( $1 = 1$ ,  $1 + 5 = 1 + 5$ ) göstermemiştir. Terazi modelini kullandığı aşağıdaki örnekte (bkz. Şekil 4.13) de sadece sözel açıklama yapmış,  $2 + 2 + 1 + 1 = 3 + 3$  şeklinde sembolik bir gösterim kullanmamıştır.



Şekil 4.13

“Bakıyorum, yuvarlaklar 2 kg dı. O zaman 2 ile 2’yi topladım 4. İki tane de kare var. O zaman 5,6. O zaman bu terazinin sol kefesinde 6 kg var. Diğer kefeye bakıyorum. Üçgenler 3 kg dı. 3 kg artı 3 kg kaç yaptı? 6 kg yaptı. Her bir kefe de 6 kg bulunduğu için bunlar dengededir. Terazimiz dengededir.”

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmenin terazi modeli kullanarak gerçekleştirdiği eylemleri sembolik gösterime aktarmaması, aritmetikten cebire geçişte sayı cümlelerinin kullanım amacına ilişkin bilgisinin eksikliğinden kaynaklanıyor olabilir. Bu bulguyu destekleyen bir başka bulgu da öğretim senaryoları ile ilgili görüşmelerden gelmiştir. Aşağıda sunulan öğretim senaryosunda (Senaryo 7, bkz. Şekil 4.14) da sayı cümlelerinin eşitlik kavramı ile ilişkisinden bahsetmemiştir.

Altıncı sınıf matematik öğretmeni Elif öğretmen eşitlik ve denklem konusuna geçişte öğrencilerine aşağıdaki soruyu sormuştur.

$8 + 4 = \blacksquare + 5$  ifadesinde  $\blacksquare$  yerine hangi sayı gelmelidir?

#### Şekil 4.14

Hale öğretmene bu senaryoya ilişkin “*Elif öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir?*” sorusu yöneltilmiştir. Hale öğretmen sorunun sorulma amacı olarak sadece görselleştirme üzerinde durmuş, aritmetikten cebire geçişte sayı cümlelerinin eşitlik kavramının öğretimindeki kullanım amacından bahsetmemiştir.

*“Denkleme geçişte sormuştur bunu. Kare ifadesini verirken x,y,z gibi bir harflendirme vermemiş ilk başta zaten. İlkokul konularındaki gibi kutucuk koyarak görselleştirmiş bunu. Çocuk x olduğu zaman, y olduğu zaman bunun herhangi bir sayıyı temsil ettiğini görmekte zorlanıyor ama burada kutucuk olduğu zaman çocuk için daha kolay görüyor. Bu yüzden Elif Hoca görselleştirmek amacıyla sormuştur bu soruyu.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

#### Denklem ve Denklem Çözme

Hale öğretmen denklemi eşitlik ve cebirsel ifade ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Denklemde eşitlik sembolünün iki tarafının eşit olma durumunu terazi modelinde denge kavramı ile ilişkilendirmiştir. Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

*“Biz denklemler konusunu terazilerle ilişkilendiririz. Terazilerle denklemler konusu aslında birbiriyle çok ilişkili iki tane kavram. Denklemlerde de aynı terazideki gibi bizim bir eşitliğimiz olacak eşitliğimizin bir tarafında cebirsel ifadeler, bir tarafında sayılar. Her iki tarafında cebirsel ifade de olabilir. Önemli olan burada iki tarafın da birbirine eşit olması, yani dengede olması, bir taraf ağır basıp diğer taraf hafif kalmayacak. Ne olacak, her ikisi de birbirine eşit olmak zorunda. Zaten denklemlerde en önemli şey eşitliktir.”*

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmen denklem kavramını terazi modeli ile ilişkilendirmesine rağmen, bu ilişkiyi net bir şekilde açıklamamıştır. Sadece terazi ve denklemde eşitlik olma durumunu vurgulamış, denklemi eşitlik ve eşitlikte cebirsel ifade olma durumuna indirgeyerek tanımlamıştır. Aşağıdaki sınıf tartışmasında ise denklemi “İçinde bilinmeyen içeren eşitlikler” şeklinde doğru olarak tanımlamış, ancak denklemi içerisinde eşitlik ve harf (bilinmeyen) olma durumu odaklı ele almıştır. Denklemde bilinmeyen sadece eşitliği sağlayan değerler alabileceği fikrine yer vermemiştir.

**Hale Öğretmen:** Sizce denklemin tanımı ne olabilir? Yapabilecek olan var mı? Nasıl bir tanım yapabilirsiniz?

**Seher:** Birbirine eş değer...

**Hale Öğretmen:** Eşitliği kullandı güzel, bir şey daha kullanacak.

**Damla:** Farklı ölçüdeki ya da farklı sayıları eşitlemek...

**Hale Öğretmen:** Peki, başka?

**Cihan:** Mesela hocam ikisinin eşit olması...

**Hale Öğretmen:** Eşitliği kullandı zaten bir şeyi daha kullanmanız gerekiyor, cebirsel ifadelerde kullandığımız bir şey...

**Damla:** İki farklı sayıyı birbirine eşitlemek...

**Hale Öğretmen:** İlla sayı mı olması gerekiyor?

**Handan:** Harf.

**Hale Öğretmen:** Harflere biz ne diyorduk?

**Öğrenciler:** Değişken.

**Hale Öğretmen:** Şimdi biz denklemlerde harflerimize bilinmeyen diyeceğiz. İçinde bilinmeyen içeren eşitliklere denklem denir.

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmen yapılan görüşmede de denklemi harf ve eşitlik içerme odaklı tanımlamıştır. Denklem bilinen ve eşitlik içermesinin matematiksel anlamının geri planda kaldığı görülmüştür.

*“Öğrenciler denklemin ne olduğunu biliyorlar. Ben sık sık vurguluyorum işte harf varsa eşitlik varsa denklemdir. Zaten cebirsel ifadeye eşitlik eklendiğinde denklem oluyor. Cebirsel ifadeden sonra bir de eşitlik ekliyoruz.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Öte yandan Hale öğretmen denklem çözümü ve denklem çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin anlamsal açıklamasına yönelik bilgi sahibidir.

*“Yani eşitliğin bir tarafında hangi işlemi yaparsak eşitliğin diğer tarafında da aynı işlemi yapalım ki denge bozulmasın. Aslında biz hani karşı tarafa atma mantığı demek, başta çözerken öyle çözüyoruz ama sonradan pratik olsun diye karşı tarafa atıyoruz diye anlatıyoruz. Başta anlatırken x'i yalnız bırakmanın amacı işte bir tarafta +5 varsa siz o +5'i çıkartıyorsunuz diğer taraftan da +5'i çıkartıyorsunuz ki eşitlik bozulmasın diye. Sonra bu taraftaki 5'ler gidiyor. Pratik olarak diğer tarafa işaret değiştirerek geçmiş oluyor. Kısa yolu olmuş oluyor.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Hale öğretmenin  $x + 3 = 8$  denkleminin çözümüne ilişkin yaptığı gösterim (bkz. Şekil 4.15) ve bu çözüme ilişkin yaptığı açıklamalar denklem çözümünde eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.

$$\begin{aligned}x+3 &= 8 \\x+3-3 &= 8-3 \\x &= 5\end{aligned}$$

Şekil 4.15

**Hale Öğretmen:**  $x+3=8$  şimdi burada benim amacım ne,  $x$ 'i bulmak.  $x$ 'i nasıl bulacağım?  $x+3=8$  dedik amacım benim buradaki  $x$ 'i tek başına bırakmak.  $x$ 'i yalnız başına nasıl bırakırım. Şuradaki 3'ü ben atarsam  $x$  tek başına kalır mı?

**Öğrenciler:** Evet.

**Hale Öğretmen:** Şuradaki  $x$ 'i ben dışarıya atıyorum. O zaman yanına  $-3$  koydum. 3'ten 3'ü çıkarırsak sonuç kaç kalır?

**Öğrenciler:** 0.

**Hale Öğretmen:** Peki terazinin bu kefesinden 3'ü çıkardım. Burada herhangi bir işlem yapmama gerek var mı?

**Öğrenciler:** Var.

**Hale Öğretmen:** Ne yapacağım orada?

**Öğrenciler:** 3'ü çıkaracağız.

**Hale Öğretmen:** Buradan da ben 3'ü çıkartacağım.  $x$  burada tek başına kaldı. 3'ten 3 çıktı 0 kaldı. 8'den 3 çıkarsa 5 kalır.  $x=5$ .

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmen denklem çözümünün terazi modeli ile ilişkilendirilmesine ilişkin de bilgi sahibidir. Denklem çözümünde eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanmasını terazi modelî ile ilişkilendirerek göstermiştir.

**Hale Öğretmen:** Denklemlerde işlem yaparken bizim amacımız şu. Buradaki  $x$ 'i yani bilinmeyeni bulmak. Bilinmeyeni bulmak için denklem üzerinde işlemler yapmak gerekir. İşlemleri de şu şekilde yapmamız gerekiyor. Aynı terazide olduğu gibi, denklemlerin bir tarafına ben hangi işlemi yaparsam, diğer tarafına da aynı işlemi yapmak zorundayım. Denklem bir tarafından 10 sayısını çıkarttım, diğer tarafından da eşitliğin bozulmaması için 10 çıkaracağım. Denklem bir tarafının 2 katını aldım, yani iki ile çarptım diğer tarafına ne yapacağım?

**Öğrenciler:** İki ile çarpacağız.

**Hale Öğretmen:** Denklem bir tarafını 3 e böldüm. Diğer tarafını da ne yapacağım ben?

**Öğrenciler:** 3'e böleceğiz.

**Hale Öğretmen:** Yani denklemlerde ne yapmam gerekiyormuş. Mutlaka eşitliği korumam gerekiyormuş. Terazilerde biz nasıl eşitliği sağlıyorsak, denklemlerde de aynı şekilde eşitliği sağlıyoruz.

**Hasan:** Hocam, peki söylediniz ya 5 ekleyince eşitlik bozuldu diye, eklediğiniz 5'i çıkarsanız olmuyor mu?

**Hale Öğretmen:** Bir taraftan 5'i çıkardıysanız diğer taraftan da 5'i çıkartabilirsiniz. Katını da alabilirsin, bölme işlemi de yapabilirsin. Hepsini yapabilirsin.

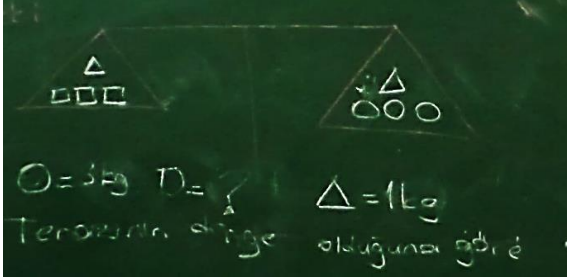
[SG5-K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmen denklem çözümünü terazi modeli ile ilişkilendirmesine rağmen terazi modelinde yaptığı bu işlemsel eylemlere ilişkin sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Bu durum Hale öğretmenin terazi modeli kullanarak denklem çözümü ile sembolik denklem çözümünü ilişkisiz olarak gördüğünü göstermektedir. Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamaları da bu durumu desteklemektedir.

*“Denklem çözümünde terazi ile ilişkilendirerek mantığını anlattıktan sonra işte denklemde de terazideki gibi eşitliğin bozulmaması için her iki tarafa da (eşitlik) aynı işlemin yapılması gerekiyor. Öğrenci bunu kavradıktan sonra denklem çözümlerine geçiyorum.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Aşağıdaki örnekte (bkz. Şekil 4.16) ise bilinmeyi bulmada da sembolik bir gösterim kullanmamış, sadece sözel açıklama yaparak bilinmeyi bulmayı göstermiştir. Terazide yapılan ağırlık çıkarma işlemini eylemini  $x + x + x + 1 - 1 = 3 + 3 + 3 - 1$  şeklinde matematiksel sembolle göstermemiştir.



Şekil 4.16

**Hale Öğretmen:** Bu soruyu ben çözeceğim zaten. Terazide dengede olduğuna göre sayıyorum. 3, 6, 9, 10 kg yapıyor. Buranın da 10 kg olması lazım. 10'dan üçgenin ağırlığını çıkarırsam 9 kg kalır. 3 tanesi 9 kg ise her birine kaç kg düşer?

[SG5-K: Eşitlik ve Denklem]

#### 4.2.3.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.2.3.2.1 Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Hale öğretmenin öğrencilerin eşitlik konusunda yaşadıkları zorluklara ve yaptıkları hatalara yönelik detaylı bir bilgiye sahip olmadığı görülmüştür. öğrencilerin  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  eşitliğinde yapabilecekleri hatalar sorulduğunda (Senaryo 7) aşağıda sunulan açıklamayı yapmıştır.



“Şey olabilir. Bu 8’i ( $8 + 4 = \blacksquare + 5$ ) birinci sayı olarak alıyor. Kutucuğu da birinci sayı olarak görüyor. 4’ü ve 5’i ikinci sayı olarak görüyor. 8 yerine, kutucuğun yerine direkt 8 yazıyor. Burada birinci sayı 8 o zaman buradaki birinci sayı yerine de 8 gelecek, yani aradaki toplama işlemi umurunda değil, oraya direkt 8 gelecek olarak düşünüyor.”

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

Hale öğretmen bu örnekte öğrencilerin eşitlik kavramı ve eşittir sembolünün anlamı ile ilgili sahip olabilecekleri yaygın hatalardan bahsetmemiştir. Öğrencilerin eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görüp kutu yerine 12 veya 17 cevaplarını verebileceklerinden bahsetmemiştir. Öğrencilerin kutu yerine 8 yazarak hata yapabileceklerini belirtmiştir. Hale öğretmen, öngördüğü hatanın nedenini de toplama işlemine dikkat etmeme şeklinde açıklamıştır.

Hale öğretmen öğrencilerin denklem kavramına ilişkin yaşadıkları zorluklar hakkında ise bilgi sahibidir. Öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olduğunda denklemin yanlış olduğunu düşündüklerini ve bu tür denklemleri ters çevirerek çözmeye çalıştıklarını belirtmiştir.

“Çok farklı hatalar yapıyorlar. Mesela en çok karşılaştığım denklemleri kendilerince değiştirebiliyorlar.  $20 = 2x + 8$  denkleminin  $2x + 8 = 20$  şeklinde olacağını düşünüyorlar mesela. Bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olunca yanlış olduğunu düşünüyorlar. Bu şekilde örneklerle az karşılaştıkları için yanlış geliyor herhalde...”

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Hale öğretmen öğrencilerin  $20 = 2x + 8$  şeklindeki bir denklemin hatalı olduğunu düşündükleri için denklemi  $2x + 8 = 20$  şeklinde değiştirdiklerini ifade etmiştir. Bu durumun sebebini ise öğrencilerin bu tür denklemlerle az karşılaşmalarına bağlamıştır. Bu yaklaşımı eşitlik kavramı ve eşit işaretinin anlamı ile ilgili olası yanlışlarla ilişkilendirmemiştir.

Hale öğretmen öğrencilerin denklem çözümünde yaptıkları hatalardan da bahsetmiştir. Öğrencilerin denklemdeki terimleri eşitliğin karşı tarafına geçirirken işaret değiştirmeyi ve eşitliğin her iki tarafını aynı sayıya bölmeyi unuttuklarını ifade etmiştir.

“Özellikle eşitliğin bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri bir tarafa toplamada karşı tarafa geçirirken – ya da + olarak geçirirken işaret değiştirmeyi unutuyorlar. – yine – olarak, + yine + olarak geçiriyor. -4 geçirdik karşı tarafa  $-4 + 8$  yani  $8 - 4$  değil de  $-4 + 8$  oldu. -4’ü önce geçirip +8’i sonra yazdı diyelim onda şaşırıyorlar. Hangi işlemi yapacağız, arada + var toplama yapılır. Ya da  $5a=25$  dediğimiz zaman orada a’yı yalnız bırakmak için her iki tarafı 5’e bölmeyi düşünemiyorlar.”

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

Hale öğretmen denklem çözümünde öğrencilerin işlemleri yan yana devam ettirme eğilimlerine ilişkin de bilgi sahibidir. Bu duruma ilişkin aşağıdaki öğretim senaryosu (Senaryo 8) yöneltilmiştir (bkz. Şekil 4.17).

Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği bir derste öğrencilerinize aşağıdaki gibi bir soru yönelttiğinizi varsayalım.

$3x + 4 = 16$  denklemini çözünüz.

Bu soruyu sınıfınızdaki Sıla isimli bir öğrencinin aşağıdaki gibi çözdüğünü farz edelim.

$3x + 4 = 16 = 3x = 16 - 4 = 12 = 3x = x = 4$

#### Şekil 4.17

Hale öğretmenden Sıla'nın çözümünü değerlendirmesi istendiğinde, Sıla'nın hatalı bir çözüm yaptığını ve bu hatanın kendi öğrencilerinin en çok yaptığı hata olduğunu ifade etmiştir.

*“Kendi öğrencilerime baktığım zaman en çok yapılan hatalardan bir tanesi bu. Mesela  $3x+4=16$  demiş, 4'ü karşı tarafa attı, 4 çıktı 12.  $3x=12$  diyor. Aşağıya  $x=12$  diyor. Mesela her iki tarafı 3'e bölüp  $x=4$  diyen öğrenci olmuyor. Niye yukarıdaki işlemi karışık yaptığı için aşağıya geçerken direkt 12 sonucunu buldum diye direkt 12 sonucunu yazıyor. Bir de  $16=3x$  gibi bir ifade var burada mesela ama böyle bir ifade sorunun içinde yok. Aslında yanlış bir çözümdür de bu. Çocuk bunu aslında o anda göremiyor. Bunun yanlış olduğunu göremiyor.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

Hale öğretmen Sıla'nın eşitlik kavramını anlamadığı için bu hatayı yaptığını belirtmiş, ancak detaylı olarak açıklamamıştır. Bu durumun sebebini öğrencilerin eşitliği çok fazla genelleştirip her işleme uygulamalarına bağlamıştır. Bu hatayı, öğrencilerin eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görmeleri ile ilgili olası yanlışlarla ilişkilendirmemiştir.

*“İşte eşitliği kavrayamamış. Biz eşitlik kavramı çok önemlidir diye üzerinde duruyoruz denklemlerde eşitlik çok önemlidir. Sürekli derslerde söylediğimiz, tekrar ettiğimiz şey bu eşitlikte her iki tarafın dengede olması söz konusudur. Böyle olunca çocuk eşitliği çok fazla genelleştirip her işleme uyguluyor. Mutlaka burada eşittir olacak diye düşünüyorlar.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme III]

#### 4.2.3.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi

##### Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi

Hale öğretmen eşitlik ve denklem konusuna programda belirtildiği gibi 6 ders saati süre ayırmıştır. 6 ders saatinin 1 saatinde eşitlik ve eşitliliğin korunumuna, 5 ders

saatinde ise denklem ve denklem çözümüne ilişkin öğretim uygulamalarına yer vermiştir. Derslerinde denklem kurma uygulamalarına az yer vermiştir. Denklem kurma sürecinin cebirsel ifade oluşturma süreci ile benzerlik gösterdiğini ve bu sebeple derste denklem kurmaya az zaman ayırdığını belirtmiştir. Hale öğretmenin denklem kurmanın cebirsel ifade oluşturmada farkını eşitlik içermesine indirgemesinin bu durum üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Bunun yanında öğrencilerin denklem çözümünü farklı konularda kullanacakları için bu konuya daha çok zaman ayırdığını ifade etmiştir.

*“Sonuçta denklemlere geçmeden cebirsel ifade yazmayı öğreniyorlar. Zaten cebirsel ifade yazmayı, işte işlemleri doğru kullanmayı bilen bir öğrenci denklemleri de doğru yazabiliyor. Bir tek eşitlik ekleniyor burda (denklem kurma) Artık bundan sonra önemli olan denklemleri çözebilmeleri. Her zaman kullanacaklar. Bundan sonraki her konuda bir şekilde denklem çözmeleri gerekecek.”*

[Hale Öğretmen, Görüşme II]

## Ders İşleyişi Bilgisi

### Öğretim Materyalleri

Hale öğretmen eşitlik ve denklem konularının en iyi terazi kullanılarak öğretilbileceğini düşünmektedir. Ancak, terazi modelinin eşitlik ve denklem kavramını nasıl temsil ettiği ile ilgili bilgi eksikliği yüzünden öğrencilerin denklem çözümünde terazi ile ilişkilendirme yapmakta zorlanmalarına anlam verememektedir.

*“Eşitlik ve denklem en iyi terazi kullanılarak öğretilir. Soyut olduğu için, matematik genelde soyut ama bir olasılıkla siz onu görselleştirebiliyorsunuz ama denklemler konusu tamamen soyut bir şey bunu anlatmak için somut bir hale döndürmekte çok çok zorlanıyoruz hatta döndüremiyoruz bile. Teraziler somutlaştırabilme açısından çok çok önemli. İşte terazinin denge, eşitlik denge demektir zaten, iki tarafın da dengede olması demektir. Terazide de denge durumu söz konusudur. Ben bir tarafına beş kilo domates koyuyorsam diğer tarafına da 5 kilo patlıcan ya da 5 kilo herhangi bir ağırlık koyacağım ki dengede durabilsin. Bir taraftan bir kilo ağırlık alıyorsam diğer taraftan da alayım ki denge bozulmasın. Teraziler konusuyla bu şekilde tabi daha ayrıntılı tabi anlatırsak denklemler konusunu daha iyi kavrayabilirler. Yani eşitliğin bir tarafında hangi işlemi yaparsak eşitliğin diğer tarafında da aynı işlemi yapalım ki denge bozulmasın.”*

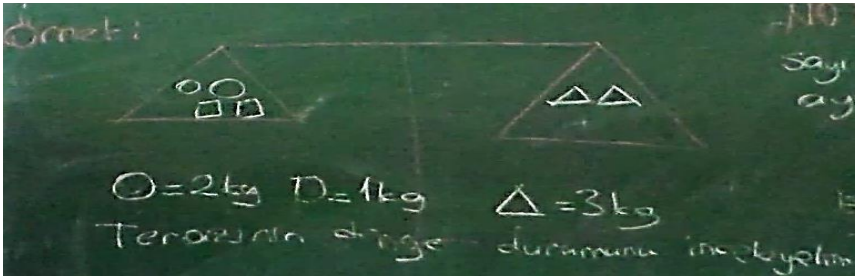
[Hale Öğretmen, Görüşme III]

*“Öğrenciler terazi mantığını iyi anlıyorlar ama soru çözümüne gelince aradaki ilişkiyi kurabilen çok az öğrenci oluyor. Sık sık da tekrarlıyorum aynı şeyi yaptığımız ama daha farklı nasıl anlatılabilir bilmiyorum.”*

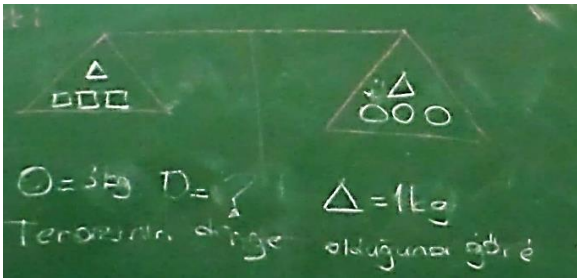
[Hale Öğretmen, Görüşme II]

Hale öğretmen, yukarıda örnek olarak sunulan ilk açıklamasında terazi modelinin eşitlik kavramını somutlaştırmaya yardımcı olduğunu belirtmesine rağmen, modelin bunu nasıl sağladığını net olarak açıklamamıştır. Bu durumun olası bir nedeni terazi modelinde bilinmeyen ağırlığın bulunması için gerçekleştirilen eylemler ile sembolik denklem çözümü arasında kendisinin de bir ilişki kurmamış olmasıdır. Bir diğer olası neden ise, kendisi için çok net görünen bu ilişkinin materyalin kullanımı sırasında zaten anlaşılabilirliğini düşünmesi ve bu ilişkiyi net olarak ortaya koyacak uygulamalara gerek olmadığını düşünmesidir. Dolayısıyla, yukarıda sunulan ikinci açıklamasında görüldüğü üzere, öğrencilerin model kullanımı ile sembolik işlemler arasında ilişki kuramamasına şaşırmakta ve bu duruma ilişkin somut çözümler üretememektedir.

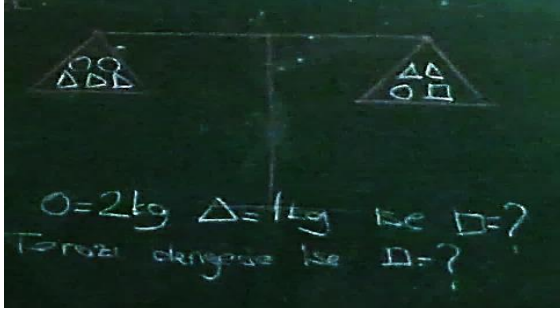
Hale öğretmen ders sırasında da terazi modelinin eşitlik ve denklem çözümü ile ilişkisine yönelik benzer açıklamalar yapmış, ancak terazi modelinin kullanımını sembolik gösterimle ilişkilendirmemiştir. Örneğin, eşitlik (bkz. Şekil 4.18a) ve denklem (bkz. Şekil 4.18b ve 4.18c) kavramlarına yönelik kullandığı örneklere yönelik  $2 + 2 + 1 + 1 = 3 + 3$  (bkz. Şekil 4.18a) şeklinde sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Bu durum Hale öğretmenin aritmetikten cebire geçişte eşitlik ve denklem kavramlarına temel teşkil edebilecek sayı cümlelerini bir araç olarak görmemesi ile de ilişkilidir.



Şekil 4.18a



Şekil 4.18b



**Şekil 4.18c**

Hale öğretmen denklem çözümüne ilişkin olası öğrenci zorlukları hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen örnek seçiminde bu durumları dikkate almamıştır. Seçtiği örnekleri öğrenci zorluklarını dikkate alarak çeşitlendirmemiştir. Örneğin, öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olan denklemlerin yanlış olduğu düşündüklerini belirtmesine rağmen derste kullandığı örneklerin bu özellikleri taşımadığı görülmektedir. Hale öğretmenin denklem çözümü için kullandığı bu sorular Tablo 4.5’de sunulmuştur.

**Tablo 4.5: Hale Öğretmenin Denklem Çözümünde Kullandığı Sorular**

Sorular
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>x + 4 = 7</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>2x - 1 = 9</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>3x - 4 = 2x + 6</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>3(x+1) = 9</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>6x - 3 = 15</math> ise <math>x=?</math></li></ul>

Bu örneklerin, öğrencilerin denklemin yapısal özelliğini kavramalarını sağlayacak örnekler olmadığı görülmektedir. Örneğin, Hale öğretmen “ $x + 4 = 7$  denklemi bize matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor?, Bu denklem ve  $x + 4$  cebirsel ifadesindeki  $x$  sembolü ne anlam ifade etmektedir?” şeklinde örneklere yer vermemiştir. Öğrencilerin denklem çözme sürecindeki farklı algoritmaları kullanmalarını sağlayacak örneklere yer verdiği görülmektedir. Hale öğretmenin aşağıdaki açıklamaları bu durumu destekler niteliktedir.

*“İşte örnekleri seçerken denklem çözümünde toplama, çıkarma, çarpma işlemlerinin nasıl uygulanması gerekiyor ona dikkat ediyorum. Farklı işlemler yönünden çeşitlendiriyorum ki hepsini kullanabilsinler. Birinde bölme işlemini kullanmaları gerekiyor, birinde toplama diğerinde çıkarma veriyorum. Ya da dağılma işlemini kullanmaları gereken denklemler de veriyorum. Farklı şekilde çeşitlendirmeye çalışıyorum”*

**[Hale Öğretmen, Görüşme II]**

## Öğretim Stratejileri

Hale öğretmenin eşitlik ve denklem konusuna ilişkin alan bilgisinin öğretim uygulamalarına yönelik yaklaşımını etkilediği görülmüştür. Eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde sayı cümlelerini bir araç olarak görmediği için konuya geçişte öğrencilerin aritmetik bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır. Eşitliği sayı cümleleri üzerinden giderek tanımlamamıştır. Bu süreçte terazi modelini kullanmış, ancak terazi modeli ile yapılan eylemlerle öğrencilerin bildikleri sayı cümleleri arasında ilişki kurmalarını sağlayacak bir uygulama yapmamıştır.

Bununla birlikte Hale öğretmenin denklemi içerisinde eşitlik ve bilinmeyen bulunma odaklı tanımlamasının,  $2x + 4 = 16$  eşitliğinin bir denklem olup olmadığı üzerinde gerçekleşen sınıf tartışmasında da etkili olduğu görülmektedir.

**Hale Öğretmen:** Şimdi bakıyorum, içinde bilinmeyen içerecek. Bilinmeyen ne harftir. İçinde ( $2x+4=16$ ) bilinmeyen var mı burada?

**Öğrenciler:** x.

**Hale Öğretmen:** x bilinmeyen değil mi içinde bilinmeyen içeren ve eşitlik var mı?

**Öğrenciler:** Evet.

**Hale Öğretmen:** Eşitlikte var. İçinde bilinmeyen ve eşitlik içeren ifadelere biz ne diyoruz, denklem diyoruz. Cebirsel ifade ile denklemin farkı şu,  $2x+4$  bu bir cebirsel ifadedir. Değil mi?

**Öğrenciler:** Evet.

**Hale Öğretmen:** Çünkü içinde eşitlik yok.  $2.x+4=16$  bir denklemdir çünkü hem bilinmeyen hem de eşitlik var, o yüzden bu bir denklemdir. Var mı anlaşılmayan bir yer?

**Öğrenciler:** Yok.

**Hale Öğretmen:** Hangisi cebirsel ifade hangisi denklem dersem karıştırır mısınız?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Hale Öğretmen:** Eğer eşitlik varsa bu bir denklem, eğer eşitlik yoksa bu bir cebirsel ifadedir. Var mı anlaşılmayan bir yer?

**Yasin:** Hocam illaki eşitlik olmasa harf olsa denklem olmaz mı?

**Hale Öğretmen:** Tabi ki, illaki eşitlik olacak, zaten önemli olan bu bilinmeyen ve eşitlik içeren demiş. Mutlaka olmak zorunda, zaten eşitlik olmazsa onun ismi cebirsel ifade olur. Var mı anlaşılmayan bir yer?

[SG5-K: Eşitlik ve Denklem]

Yukarıdaki tartışmada, cebirsel ifade ile denklem arasındaki farkın eşitlik içermeye durumuna indirgenildiği görülmektedir. Hale öğretmeni, cebirsel ifadede “herhangi bir sayının iki katının dört fazlası” tanımlanırken, denklemde “bir sayının iki katının dört fazlasının 16’ya eşit olması”nın tanımlanmasından bahsetmemiştir. Denklem ve cebirsel ifadede harf sembolünün nasıl farklılaştığı üzerinde durmamıştır.

Ayrıca tartışma sürecinde Hale öğretmenin açıklamaları ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu, öğrencilerin sorulan sorulara kısa cevaplar vererek tartışmaya katıldığı görülmektedir. Hale öğretmenin denklemini tanımlamada, eşitlik ve bilinmeyen olma durumunu temel alması ile öğrencilerin tartışılmasına ve test edilmesine fırsat tanımadığı görülmektedir. Örneğin, Yasin isimli öğrencinin “Hocam illaki eşitlik olmasa, harf olsa denklem olmaz mı?” şeklindeki sorusuna öğretmen direkt değerlendirme yaparak cevap vermiştir. Bu durum, diğer öğrencilerin bu fikir üzerinde düşüncelerini engellemiş ve kavramın anlamlandırılmasını destekleyebilecek bir fırsatın oluşmasını önlemiştir.

Hale öğretmen denklem çözümünde ise eşitliğin diğer tarafına geçirerek bilinmeyeni bulma yönteminin eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması sonucunda olduğunu bilmesine rağmen, bu yöntemler arasındaki ilişkiye derste yer vermemiştir. Aşağıdaki örnekte  $x + 3 = 8$  denkleminin çözümünde, denklemin diğer tarafına geçirerek bilinmeyeni bulma sürecine ilişkin gösterimi (bkz. Şekil 4.19) ve bu süreçteki sınıf tartışması bu durumu göstermektedir.

$x + 3 = 8$   
Bilinmeyen Bilinen  
 $x = 8 - 3$   
 $x = 5$

Şekil 4.19

**Hale Öğretmen:** Şimdi bu bizim uzun yol (eşitliğin her iki tarafına aynı işlemi uygulama) çözümümüz, mantığını bu şekilde kavramaya çalışıyoruz. Şimdi bir de diğer yolu var. Benim amacım neydi?

**Öğrenciler:**  $x$ 'i bulmak.

**Hale Öğretmen:**  $x$ 'i tek başına bırakmak. Denklemleri bu şekilde uzun uzadıya çözersek bizim işlemimiz uzayacak.  $x+3$  bilinmeyen kefe olsun. 8 de bilinen kefe olsun. Bizim iki tane kefe var biri bilinen kefe diğeri bilinmeyen kefe. Şimdi ben size niye ayrı ayrı kefe şeklinde gösterdim. Çünkü siz eşitliğin karşı tarafına geçirirken bu geçecek miydi bu burada mı kalacaktı diye karıştıracaksınız. Eşitliği baz alarak eşitliğin bu tarafına bilinmeyen kefe dedim. Eşitliğin diğer tarafına da bilinen kefe dedim. Şimdi  $x$  bilinen mi bilinmeyen mi?

**Öğrenciler:** Bilinmeyen.

**Hale Öğretmen:** Pekâlâ,  $x$  hangi kefedeydi?

**Öğrenciler:** Bilinmeyen.

**Hale Öğretmen:** O zaman ben  $x$ 'e dokunmuyorum.  $x$  bilinmeyen kefesinde kalıyor.

**Hale Öğretmen:** 8 bilinen mi bilinmeyen mi? Hangi kefedeydi?

**Öğrenciler:** Bilinen.

**Hale Öğretmen:** O zaman 8'e de dokunmuyorum 8'de yine bilinen kefesinde kalıyor. Şimdi sıra geldi 3'e 3 bilinen mi bilinmeyen mi?

**Öğrenciler:** Bilinen.

**Hale Öğretmen:** O zaman 3'ün ait olduğu yer neresi?

**Öğrenciler:** Bilinen.

**Hale Öğretmen:** O zaman  $x$  bilinmeyendeydi bilinmeyende kaldı. 8 bilinendeydi. Yine bilinen de kalıyor. +3'ü ben karşı kefeye geçireceğim. +3 işaretini değiştirip te karşıya geçecek, nasıl geçecek?

**Öğrenciler:** -3

**Hale Öğretmen:** O zaman  $x=5$ .

### [SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmenin denklemde eşitliğin her iki tarafına aynı işlemi uygulama yolu ile eşitliğin diğer diğer tarafına geçirme yolu arasında ilişki kurmadığı; karşı tarafa geçirme algoritması sırasında yapılan işlemlerin altında yatan anlamlara ve nedenlere yönelik açıklama yapmadığı görülmektedir. Örneğin, +3'ün eşitliğin diğer tarafına geçtiğinde neden işaret değiştirdiğini açıklamamıştır. Hale öğretmen "Şimdi bu bizim uzun yol çözümümüz, mantığını bu şekilde kavramaya çalışıyoruz. Şimdi bir de diğer yolu var." şeklinde belirtmesine rağmen bu iki yol arasında herhangi bir ilişkilendirme yapmamıştır.

Öte yandan Hale öğretmenin denklem çözümünde kullandığı stratejinin öğrencilerin olası düşüncelerini ve farklı çözüm yollarını sınırlandırabileceği görülmektedir. Denklemde eşitliğin sol tarafını bilinmeyen kefesi ve sağ tarafını bilinen kefesi olarak adlandırarak denklemi çözmek, farklı çözüm yolları kullanmayı sınırlandırabilmektedir. Hale öğretmen ders sürecinde denklem çözümünü bu şekilde yapmaları için öğrencileri yönlendirmiştir. Öğrenciler denklemde eşitliğin diğer tarafına geçirirken çok fazla hata yaptıkları için bu şekilde bir yol izlediğini belirtmiştir.

*"Özellikle zorlandıkları şey karşı tarafa hangisini atılacak. Mesela şurası bilinmeyen kısım şurası bilinen kısım. Ben çözerken altına bilinmeyenleri burada toplayalım bilinenleri burada toplayalım diyorum. O zaman bilinmeyenler bu terazinin içinde kalacak. Bilinenler bu taraf teraziye geçecek. O şekilde anlatıyorum. O şekilde anlatmama rağmen geçirirken zorluk yaşıyorlardı. Bunu mu geçireceğim bunu mu geçireceğim bu nerede kalacak. Onu çözmek içinde altlarını çizip bilinmeyen kefesi, bilinen kefesi diyorum.*

### [Hale Öğretmen, Görüşme II]



Hale öğretmenin öğrenci hatalarını önlemek için kullandığı bu öğretim stratejisi denklem çözümüne ilişkin sorgulama yapmaya engel oluşturabilmektedir. Hale öğretmenin öğretimini, öğrencilerin matematiksel fikirleri keşfetmelerini sağlayacak şekilde değil, denklem çözümündeki kural ve işlemleri en az hata ile gerçekleştirmelerini sağlayacak şekilde yapılandığı görülmektedir. Buna paralel olarak, öğrencileri denklemleri derste belirttiği şekilde çözmeleri için adım adım yönlendirdiği gözlenmiştir.  $x + 4 = 7$  denkleminin çözüm sürecinde Hale öğretmen ve Emirhan arasında gerçekleşen diyalog bu duruma örnek gösterilebilir.

**Hale Öğretmen:** Gel Emirhan.  $x$  bilinmeyendi bilinmeyen kefesinde kalacak. Yaz o zaman, eşittir işaretini koy şuraya. 7 hangi kefedeydi?

**Emirhan:** Bilinen.

**Hale Öğretmen:** Yerinde kalacak mı bir yere geçecek mi?

**Emirhan:** Kalacak.

**Hale Öğretmen:** O zaman yaz. 4 hangisinde?

**Emirhan:** Bilinmeyen.

**Hale Öğretmen:** Yerinde kalacak mı geçecek mi başka bir yere?

**Emirhan:** 7'nin yanına geçecek.

**Hale Öğretmen:** Nasıl geçecek +4'müş bu?

**Emirhan:** -4

**Hale Öğretmen:** O zaman  $x=3$ .

#### [SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmen denklem çözümünde öğrenciler zorlandıkları zaman işlemsel süreci açıklayarak yanıt vermiştir.  $3x - 1 = 9 - 2x$  denkleminin çözümünde Cihan'ın sorduğu soruya ilişkin sergilediği yaklaşım bu duruma örnek gösterilebilir. Öğrencinin denklem çözümünde yapılan işlemleri anlamlandırmasını sağlayacak şekilde işlemlerin altında yatan anlamalara ilişkin bir açıklama yapmamıştır.

**Hale Öğretmen:** Yine aynı şekilde düşünün, bu taraf bilinmeyen kısım, bu taraf bilinen kısım olsun. Bilinmeyenleri bir tarafta toplayın, bilinenleri bir tarafta toplayın.  $x$ 'i bulun.

**Cihan:** Hocam her zaman mı çıkarırız?

**Hale Öğretmen:** Nasıl her zaman mı çıkarırız?

**Cihan:** Hocam hani bilinmeyeni çıkarıyorduk ya.

**Hale Öğretmen:** Bak  $2x$ 'in işareti ne şurada? Artı.  $+2x$  değil mi,  $+2x$ 'i karşıya ben nasıl geçiriyorum?

**Cihan:**  $-2x$ .

**Hale Öğretmen:** Arada ne oldu çıkarma işlemi oldu o yüzden çıkarıyoruz.

#### [SG7- K: Eşitlik ve Denklem]

Hale öğretmen  $3x + 3 = 9$  denkleminin çözümünde öğrencilerin yaptıkları hata için de benzer bir yaklaşım sergilemiştir. Aşağıdaki tartışmada denklem çözümüne ilişkin işlemsel kuralları tekrar ederek öğrencilerin yaptıkları hataları düzelttiği görülmektedir.

**Hale Öğretmen:**  $x$ 'in katsayısı kaç?

**Fatih:** 3.

**Hale Öğretmen:** Zaten bunu görmenizi istiyordum. Bir kaçınızda yine aynı hatayı gördüm. Ben size şurada üstüne basarak dedim ki. Her zaman 2'ye bölmüyorsunuz. Burada  $x$ 'in katsayısı kaç?

**Öğrenciler:** 3.

**Hale Öğretmen:** O zaman 3'e böleceksiniz.

**Burak:** Hocam  $x$ 'in yanında yazan sayıya böleceğiz değil mi?

**Öğretmen:** Evet,  $x$ 'in yanında yazan sayıya böleceksiniz.

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

## Özet

Sonuç olarak, yukarıda detaylı olarak sunulan bulgular, Hale öğretmenin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine yönelik alan bilgisinin yeterli ve derin olmadığını göstermektedir. Hale öğretmen değişken ve bilinmeyen değerleri temsil etmekte kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları arasında bir ayırım gözetmemiş, sadece isim olarak bir ayırımdan bahsetmiştir. Değişken kavramına ilişkin birbiriyle çelişen ve hatalı tanımlamalar (iki farklı denklemde aynı harf sembolü ile gösterilen bilinmeyeni değişken olarak tanımlama ve değişkeni bir nesne olarak belirtme) yapmıştır. Değişkenin genelleştirilmiş sayı ve değişen nicelikler olarak kullanımı hakkında bilgi sahibi olmakla birlikte aritmetikten cebire genelleme sürecinde değişken kullanıma ilişkin sınırlı bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Hale öğretmen bu süreçte örüntüye ait kural bulmayı ön plana çıkarmıştır. Cebirsel ifadede harf sembollerinin farklı değerler aldığını belirtmesine rağmen cebirsel ifadeyi harf ve işlem içerme odaklı tanımlamıştır. Dolayısıyla cebirsel ifadenin anlamı geri planda kalmıştır. Değişken kavramı hakkındaki alan bilgisi ile ilişkili olarak da cebirsel ifadelerde işlemleri açıklamada elma-armut yaklaşımını kullanmış, benzer ve benzer olmayan terimler fikrine yer vermemiştir.

Hale öğretmen eşitliğin iki tarafının aynı değeri temsil ettiğini bilmesine rağmen, eşitlik ve eşitliğin korunumunu sembolik olarak göstermemektedir. Bu durumla ilişkili olarak da eşitlik ve eşitliğin korunumunun öğretiminde araç olarak kullanılan sayı cümlelerinin kullanım amacına ilişkin bilgi sahibi değildir. Hale öğretmen

denklemini ise harf ve eşitlik içermeye odaklı tanımlamıştır. Denklemdeki cebirsel ifade içermesi gerektiğini belirtmiş, ancak cebirsel ifade ve denklemin farkını eşitlik içermesine indirgemıştır. Cebirsel ifadelerde ve denklemlerde kullanılan harf sembolünün matematiksel anlamındaki farklılığa yer vermemiştir. Hale öğretmen denklemin çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin anlamını bilmekte ve denklemin çözümünü terazi modeli modeli ile gösterebilmektedir. Ancak terazi modeli kullanılarak yapılan bu işlemsel eylemlere ilişkin sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Bu durum, Hale öğretmenin terazi modeli kullanarak denklemin çözümünü ile sembolik denklemin çözümünü ilişkisiz olarak görmesi ve bu konunun öğretiminde sayı cümlelerine yönelik bilgisinin sınırlı olmasından kaynaklanıyor olabilir.

Hale öğretmen değişken ve cebirsel ifade kavramlarına ilişkin alanyazındaki öğrenci zorlukları ve hataları hakkında bilgi sahibidir. Örneğin, öğrencilerin cebirsel ifadeyi sonuç olarak kabul etmeyerek sayısal bir sonuç arama ve cebirsel ifadede terimleri birleştirme şeklinde yaptıkları hatalar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin yaşadıkları bu zorlukların ve yaptıkları hataların değişkenin ne olduğunu kavrayamadıklarından ve aritmetikteki bilgi eksikliklerinden kaynaklandığını belirtmiş, ancak net bir açıklama yapamamıştır. Bu durumu sadece öğrencilerin dört işlemle ilgili öğrenme eksikliklerine bağlamıştır.

Hale öğretmenin öğrencilerin eşitlik konusunda yaşadıkları zorluklara ve yaptıkları hatalara yönelik detaylı bir bilgiye sahip olmadığı görülmüştür. Öğrencilerin denklemin konusunda yaptıkları en yaygın hatalar hakkında ise bilgi sahibidir. Hale öğretmen öğrencilerin yaptıkları bu hataların eşitlik kavramını anlamamamalarından kaynaklandığını ve bu sebeple de eşitliği çok fazla genelleştirip her işleme uyguladıklarını belirtmiştir. Öğrencilerin eşitlik ve denklemin konusunda yaptıkları hataları, eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görmeleri ile ilgili olası yanılgılarla ilişkilendirmemiştir.

Hale öğretmenin alan bilgisinin öğretim uygulamaları üzerinde etkili olduğu görülmüştür. Örneğin, değişken kavramının öğretimi için kullandığı örnek ve gösterimlerin kavramın farklı anlamlarını içermediği ve bu örneklerde kullandığı nesne benzetmesinin değişken kavramının matematiksel anlamını karşılamadığı görülmektedir. Bunun yanında örüntü kuralını bulma sürecinde öncelikli amacın örüntüye ait bir kural yazmak olduğu yönündeki düşüncesi ile paralel olarak, bu

süreçte değişkenin değişen değerleri temsil etmekte kullanıldığı fikri geri planda kalmıştır. Dolayısıyla öğrencilerin ön bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır.

Hale öğretmen cebirsel ifadeyi harf ve işlem içerme odaklı tanımlamış ve öğretim uygulamalarında da cebirsel ifadenin anlamını içeren materyaller kullanmamıştır. Değişken kavramı için yaptığı nesne benzetmesine cebirsel ifadeler konusunun öğretimi için kullandığı sorularda da yer vermiştir. Cebirsel ifadenin matematiksel anlamını karşılayan ve öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirme yapmalarına fırsat sağlayacak günlük yaşam durumlarını içeren örnekler kullanmamıştır. Öğrencilerin yaptıkları hataların nedeninin dört işlemle ilgili öğrenme eksiklikleri olduğunu düşündüğü için ise ders sürecinde kullandığı örnekler de cebirsel ifade oluşturma ve cebirsel ifadelerde işlem süreci üzerinde durmuştur.

Hale öğretmen terazi modelinin eşitlik ve denklem kavramlarını somutlaştırmaya yardımcı olduğunu belirtmesine rağmen, modelin bunu nasıl sağladığını net olarak açıklamamıştır. Terazi modeli kullanımını sembolik gösterimle ilişkilendirmemesi de bahsedilen bilgi eksikliği ile ilişkilidir. Bu durumun sonucu olarak, öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirme yapmalarını sağlayacak gösterimler (örn. sayı cümleleri) kullanmamıştır. Denklem çözümünde ise yapılan ters işlemlerin matematiksel anlamı hakkında bilgi sahibidir. Ancak ders sırasında, eşitliğin diğer tarafına geçirek bilinmeyen bulmanın, eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması sonucu olduğuna ilişkin bir ilişkilendirme yapmamıştır. Denklem çözümünde izlediği yaklaşımın (eşitliğin sol tarafını bilinmeyen kefesi, eşitliğin sağ tarafını bilinen kefesi olarak belirleme) ise öğrencilerin olası düşüncelerini ve farklı çözüm yollarını sınırlandırabilecek bir yaklaşımdır. Öğretim sürecindeki uygulamalarda öğrencilerin denklem çözme sürecindeki farklı algoritmaları kullanmalarını sağlayacak örneklere yer vermiştir. Hale öğretmen öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olan denklemlerin yanlış olduğu düşündüklerini belirtmesine rağmen derste kullandığı örnekler bu özellikleri taşımamaktadır.

### **4.3. Emre Öğretmen**

Emre öğretmen ortaokul yıllarında cebir konularını diğer matematik konularına göre daha kolay öğrendiğini belirtmiştir. Cebir konularından özellikle denklemler konusunu ve problem çözmeyi sevdiğini ifade etmiştir. Denklem çözmeyi bulmacaya benzettiği için denklem çözerken hiç sıkılmadığından bahsetmiştir. Ortaokuldaki matematik öğretmenin cebir konularına tanım yazdırarak

başladığını ve ezber ağırlıklı bir öğretim yaptığını hatırladığını belirtmiştir. Emre öğretmen günümüzde matematik ve cebir öğretiminde kavramların özüne yönelik anlamamanın ve sorgulamanın daha ön planda olduğunu düşünmektedir.

Emre öğretmen cebirin matematiğin en önemli alanı olduğunu düşünmektedir. Matematik ve cebir konuları içinde en önemli olduğuna inandığı konunun ise denklem çözme olduğunu belirtmiştir. Denklemlerin matematiğin özünü oluşturduğunu düşünmektedir. Bu sebeple, denklemleri iyi çözebilen bir öğrencinin matematikte çok başarılı olacağına inanmaktadır. Öğrencileri motive etmek için bu düşüncesini zaman zaman derslerde paylaştığını ifade etmiştir.

Emre öğretmen cebir konularının öğretiminde diğer konulara göre daha kolay olduğunu düşünmektedir. Cebirin kendi içinde bir sistematığı olduğu için öğretimi aşama aşama planlamanın önemli olduğunu ifade etmiştir. Her bir aşamaya ilişkin öğrenci hatalarını belirleyerek derste bu noktaları vurgulamanın öğrencilerin hata yapmasını engelleyerek öğrenmelerini kolaylaştırdığını düşünmektedir. Bu sebeple öğrencilerin defterlerine yaptıkları hatalara yönelik notlar yazdığını belirtmiştir.

Emre öğretmen öğrencilerin cebirde başarılı olabilmesi için kavramları öğrenmelerine ek olarak tanımları ve kuralları bilmelerinin önemli olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple derste kuralları not olarak yazdığını ve sık sık vurguladığını dile getirmiştir. Ayrıca, öğrencilerin cebiri iyi öğrenebilmeleri için çok soru çözmeleri gerektiğini düşünmektedir. Öğrencilerin bu sayede işlem becerilerinin geliştiğini ve kuralları unutmadıklarını belirtmiştir. Emre öğretmen öğrencilerin cebir kavramlarını anlayarak öğrenmelerinin önemli olduğunu düşünmekle birlikte bir noktadan sonra işlemsel becerinin daha önemli olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple, öğrencilerin kavramlara yönelik temel bilgilere sahip olmalarının yeterli olduğuna inanmaktadır.

### **4.3.1. Değişken**

#### **4.3.1.1. Alan Bilgisi**

Emre öğretmen matematikte kullanılan harf sembollerini bilinmeyen olarak tanımlamıştır [Emre Öğretmen, Görüşme II]. Derslerinde bilinmeyen ve değişken kavramlarını eş anlamlı olarak kullanmış, çoğunlukla "değişken" yerine "bilinmeyen" ifadesini kullanmıştır. Emre öğretmenin aşağıdaki ifadeleri, harf sembollerini bilinmeyen olarak tanımladığını göstermektedir.

“Bilinmeyenim neydi? Harfti.  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gibi harflere biz bilinmeyen diyoruz.”

“Bunun bilinmeyişi  $x$ 'dir, çünkü hangi harf var  $x$  var. Sayıya falan gerek yok. Artık sayılar yerine harfleri kullanacağız. Bilinmeyen dediğimiz zaman  $x$ .”

“Kaç bilinmeyen ( $4x+3a+7z$ ) vardır? Yani harf? Burada bilinmeyen dediğimiz harftir.”

#### [SG2-3-4- K: Cebirsel İfadeler]

Emre öğretmen harf sembollerinin cebirsel ifadelerde ve denklemlerde kullanımına ilişkin bilgi sahibidir. Değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin denklemlerde sınırlı sayıda değerler alabilirken, cebirsel ifadelerde herhangi bir değer alabileceği fikrine yer vermiştir. Emre öğretmenin eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste  $2x + 5 = 45$  denkleminin ilişkin aşağıdaki açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

**Emre Öğretmen:** Denkleminde biz ne yapıyoruz? Burada ( $2x+15=45$ ) bir bilinmeyen var. Denklem olduğu zaman  $x$ 'in yerine gelen sayıyı bulabiliyoruz. Peki, eşittir 45 olmasaydı.  $x$ 'in yerine ne gelebilirdi? Her şey gelebilir.

**Öğrenciler:** Her şey gelebilir.

**Emre Öğretmen:** Neden? Çünkü eşit olduğu bir değer yok.  $x$ 'in yerine 5 yazın mesela,  $2.5+15=25$ . Yani cebirsel ifade olduğu zaman  $x$ 'in yerine her değer gelebilir ama denklem olduğu zaman  $x$ 'in yerine gelebilecek belli değerler vardır. Cebirsel ifadenin eşit olduğu bir değer olmadığı için  $x$  yerine her sayıyı verebilirim. Ama her verdiğim sayıda da farklı bir sonuç bulurum.

#### [SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Emre öğretmen değişken kavramına yönelik bir ifadesinde ise değişkeni sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak belirtmiştir. Örneğin,  $2x + 5y - 9$  cebirsel ifadesinde  $x$  için kalem ve  $y$  için defter benzetmesi yapmıştır. [SG3- K: Cebirsel İfadeler]. Bu benzetme öğrencilerin değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin sayısal bir değeri değil, bir nesneyi belirttiği yanılığına sebep olabilecek bir benzetmedir.

Emre öğretmene değişkenin farklı kullanımına ilişkin aşağıdaki soruların bir matematik dersinde hangi amaçla kullanılabileceği sorulmuştur [Emre Öğretmen, Görüşme III].

1.  $n$  bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür? (Senaryo 4, a)
2.  $a$ ,  $b$ 'den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$  (Senaryo 4, b)
3.  $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde  $x$ 'in alabileceği değerler nelerdir? (Senaryo 5)

Emre öğretmen bu sorularda harf sembollerinin farklı sayı değerleri alabileceğini göstermenin amaçlanmış olabileceğini ifade etmiştir. İlk örnek sorunun öğrencilerin bir karşılaştırmaya giderek  $n$  değişkeninin farklı sayı değerleri aldığını, ikinci örnek sorunun  $a$  ve  $b$  değişkenlerinin tek bir değer değil, birbirine göre değişen değerler aldığını ve üçüncü örnek sorunun ise  $x$ 'in bütün sayı değerlerini alabileceğini göstermek amacıyla kullanılabileceğini belirtmiştir. Bu yanıtlar, Emre öğretmenin değişkenin genelleştirilmiş sayı ve değişen nicelikler olarak kullanımlarına ilişkin bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.

Emre öğretmen bir sayı örüntüsünün genel terimini bulma sürecinde de örüntünün genel terimindeki  $n$  değişkeninin farklı sayı değerleri alabileceğini belirtmiştir.  $n$  değişkenine ilişkin yaptığı aşağıdaki açıklamaları sayı örüntüsünü genelleme sürecinde değişkenin kullanımı hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.

**Emre Öğretmen:** *n burada sayının bulunduğu yeri belirtsin. Biz burada 1, 2, 3, 4 yazmamak için bunların yerine harf kullanıyoruz. n harfi bunların genel olarak isimlendirilmiş halidir. Yani n dediğim zaman bunun yerine 1 de gelebilir, 2 de gelebilir, 3 de gelebilir. Hepsi gelebilir. n genel olarak hangi değeri verdiğimizi bilemeyeceğimiz için kural bulmak için ne yapmak lazım harf kullanmak lazım. Harf kullanmadığınız zaman sizin yaptığınız işlem özel bir işlem olur. Ama adım sayısının yerine n dersem ne yapmış olurum, bunu genelleştirmiş olurum. n'nin yerine hangi sayılar gelebilir? 1 gelebilir, 2, gelebilir, 3 gelebilir hepsi gelebilir. O yüzden hepsini tek tek yazamayacağımız için bunların yerine bunları temsil eden bir harf kullanıyoruz, n harfi. n harfine temsilci sayı, genel sayı da diyebiliyoruz.*

#### [SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Emre öğretmen bir sayı örüntüsünün genelleme sürecinde  $n$  değişkeninin farklı değerler alacağından bahsetmesine rağmen, örüntü kuralındaki  $n$  harf sembolünü değişken olarak tanımlamamıştır. Bunun yanında örüntü kuralı için “örüntünün cebirsel ifadesi” ifadesini kullanmış, ancak  $n$ 'nin bir değişken olduğunu belirtmemiştir. Bu bulgular, aritmetikten cebire genelleme sürecinde değişkenin kullanımına yönelik bilgisinin sınırlı olduğunu göstermektedir. Bu durumu destekleyen bir diğer bulgu ise Emre öğretmenin cebire geçişte örüntüler ve ilişkiler konusunun somutlaştırma amaçlı tercih edilmiş olduğu yönündeki düşüncesidir. Emre öğretmen bu süreçte değişken kullanılarak yapılan genelleme sürecinden bahsetmemiştir.

**Araştırmacı:** *Altıncı sınıflarda cebir öğrenme alanına örüntüler ve ilişkiler konusu ile geçiş yapılmaktadır. Cebire geçişte bu konunun tercih edilme sebebi ne olabilir? Bu konunun önemine ilişkin ne söylersiniz?*

**Emre Öğretmen:** *Ne olabilir? Belki modelden biraz somutlaştırıp sonra geçme amaçlanmıştı. Hani burada şekiller falan var ya çocuk somut olan şeyi daha iyi*

anlar diye belki ilk başta öyle bir geçiş yapılmıştır. Sonuçta birim küpler, kibrit çöpleri var. Günlük hayattan örnekler vermiş.

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmen değişken kavramının öğretiminin amaçlandığı örüntüler ve ilişkiler konusu ile öğrencilere kazandırılması amaçlanan bilgi ve becerinin “örüntüye ilişkin kural bulma” olduğunu ifade etmiştir. Bu süreçte değişken kullanılarak aritmetikten cebire bir genelleme yapıldığı fikrine yer vermemiştir. Aşağıdaki açıklamaları bu durumu yansıtmaktadır.

**Araştırmacı:** Örüntüler ve ilişkiler konusu ile öğrencilere kazandırılması hedeflenen cebirsel bilgi ve beceriler nelerdir?

**Emre Öğretmen:** Belki cebirsel ifadeyi mi göstermeye çalışıyor. Ya da bir sayı dizisi ki bunlar aritmetik dizi. Aritmetik dizinin kuralını bulmuş oluyor. Hani sayılara uygun bir kural bulmuş oluyor. Bir sayı dizisi var sonsuza kadar giden. O sayı dizisinin herhangi bir basamağını bulacak bir kural bulmasını mı amaçlıyor...

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

#### 4.3.1.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.3.1.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Emre öğretmenin değişken kavramının öğretimine ilişkin alan bilgisinin öğrenci bilgisi üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Aritmetikten cebire geçişte örüntüler ve ilişkiler konusunu bir araç olarak görmediği için cebirsel ifadeler konusunun bu konudan önce öğretilmesinin öğrencilerin harf sembollerini anlamalarını kolaylaştıracağını düşünmektedir.

*“Zaten öğrenci burada cebirsel bir kural bulmaya çalışıyor. Ama çocuk daha harfi bilmeden kural bulmaya çalışıyor. Cebirsel ifadeyi önce öğrense harflerin kullanımını da öğrenmiş olur. Örüntü kuralını da rahatlıkla bulabilir.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmenin aşağıdaki açıklamaları da örüntüler ve ilişkiler konusunun öğrencilerin değişken kavramını anlamalarını zorlaştırdığı yönündeki düşüncesini yansıtmaktadır. Emre öğretmen öğrencilerin değişken kavramının cebirsel ifadeler konusu ile daha iyi öğrenebileceklerini düşünmektedir.

*“Böyle olunca öğrenci çok zorlanıyor. Burada (örüntü kuralı) kullanılan harfleri anlamakta zorlanıyor. Örüntünün cebirsel ifadesi diyoruz ama cebirsel ifadeyi açıklamadan bu kural onlar için bir anlam ifade etmiyor. Zaten cebirsel ifadede harflerin kullanımını görüyor. Değişkeni öğreniyor. Bundan sonra kural bulması kolay oluyor. Diğer türlü çok karıştırıyorlar.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]



Öte yandan Emre öğretmen öğrencilerin değişken kavramına ilişkin olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin temelde harf sembollerinin sayısal bir değeri temsil ettiğini anlamakta zorlandıklarını belirtmiştir. Bununla birlikte değişken yerine kullanılan harf sembollerinin her zaman tek bir değer alacağına ilişkin kavram yanlışlığı oluşturduklarını ifade etmiştir. Bu duruma ilişkin öğrencilerin değişkenin cebirsel ifade ve denklemde kullanımına ilişkin yaşadıkları zorluklardan bahsetmiştir.

*“Mesela bilinmeyen, değişken diyorsun. Bunun adı bilinmeyen işte değişken. Çocuğa x biliyor musun ne olduğunu biliyorum diyor ama sonuç olarak  $x=2$  alın dediğim zaman hocam bu bilinmeyen değil mi, neden 2 alıyoruz diyenler çıkıyor. Hâlbuki işte x’in yerine herhangi bir değer gelebilir diyorum. Denklemden öyle değil de cebirsel ifadelerde x yerine ne isterseniz o gelir. İşte  $3x+2$ , en başta onu yaptırıyoruz mesela x yerine 5 alın ne çıkar şu çıkar, 6 alın ne çıkar öle... Cebirsel ifadelerde değişkenin yerine herhangi bir değer geleceğini anlamakta zorlanıyorlar. Denklemlerdeki gibi tek bir değer geleceğini düşünüyorlar.”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Emre öğretmen “i) n bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür?, ii) a, b’den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$ ” (Senaryo 4) sorularına ilişkin literatürde en sık karşılaşılan öğrenci hata ve zorluklarından bahsetmiştir. Bu tür sorularda öğrencilerin akıllarına ilk gelen sayıyı denediklerini belirtmiştir. Örneğin, ilk soruda n için 1 değerini verdiklerinde  $3 \cdot n = 3 \cdot 1 = 3$  ve  $n + 6 + 1 + 6 = 7$  olduğu için  $3n$  ifadesinin  $n + 6$  ifadesinden daha küçük olduğunu düşündüklerini ve n yerine farklı sayı değerleri vererek bir karşılaştırma yapmadıklarını ifade etmiştir. Benzer şekilde ikinci soruda da a ve b için 5 değeri verildiğinde  $5 = 5$  olacağı için 5’e en yakın 4 ve 6 değerlerini verebileceklerini, a ve b’nin değişen sayı değerleri alabileceğini düşünmekte zorlanacaklarını ifade etmiştir.

*“Öğrenciler bu sorularda tek bir sayıya odaklanıyorlar. Akıllarına ilk gelen sayıyı deniyorlar. Tek bir değer olacağını düşünüyorlar. Örneğin, burada  $(3n$  ve  $n + 6)$  n yerine 1 veriler. 1 verdiklerinde 3 ve 7 olur. 3, 7’den küçük olacağı için  $3n$ ’nin  $n+6$ ’dan küçük olacağını düşünürler. Bir karşılaştırma yapamazlar. Yine bunda da  $(a+b=10)$  5’5 olduğunda eşit olacağı için 5’e en yakın 4 ve 6’yı verirler.”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Emre öğretmen öğrencilerin değişkenlerin genelleştirilmiş sayı olarak kullanıldığı eşitliklere ilişkin düşünme süreçleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında da bilgi sahibidir. “ $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde x’in alabileceği değerler nelerdir?” (Senaryo 5) sorusunda öğrencilerin x yerine tek bir değer geleceğini düşündüklerini, x’in aldığı

her sayı değeri için eşitliğin doğru olduğunu kavramakta zorlandıklarını ifade etmiştir. Bu sebeple  $x$  yerine tek bir değer değer vererek eşitliğin doğru olup olmadığını kontrol ettiklerini ve eşitliği doğrulayan herhangi bir değeri sonuç olarak kabul ettiklerini belirtmiştir [Emre Öğretmen, Görüşme III].

Emre öğretmen öğrencilerin farklı harf sembolleri ile gösterilen değişkenlerin birbirine eşit olamayacağı yönünde oluşturdukları kavram yanılgısı hakkında da bilgi sahibidir. Emre öğretmene bu kavram yanılgısı ile ilişkili olarak, " $x + y + x = x + p + z$  eşitliği doğru mudur?" (Senaryo 7) sorusunda öğrencilerin yapabilecekleri hatalar sorulmuştur. Öğrencilerin  $y = p$  olamayacağı için eşitliğin yanlış olmayacağını düşüneceklerini ifade etmiştir.

*"Eşitlik için çok fazla doğru diyen çıkmaz. İşte  $y$  ile  $p$  birbirine eşit değil diyebilirler. Şunların hepsi aynı bu harfler farklı derler. Farklı olduğu içinde eşitlik yanlış derler."*

**[Emre Öğretmen, Görüşme III]**

Emre öğretmenin öğrencilerin değişken kavramına ilişkin olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibi olduğu, ancak bunların sebeplerine ilişkin bilgisinin sınırlı olduğu görülmüştür. Öğrencilerin değişken kavramını anlamakta zorlanmalarının temel sebebinin örüntüler ve ilişkiler konusunun cebirsel ifadeler konusundan önce öğretilmesi olduğunu düşünmektedir.

*"Denklemleri vermeden harfe geçiyor çocuk. Aslında buna geçmeden önce bence cebirsel ifadeleri verdikten sonra buna (örüntüler ve ilişkiler) geçebilir. Ya da denklemleri verdikten sonra geçilebilir. Örüntüleri önce vermesi çok iyi değil. Çocuk daha şurada n'in ne anlama geldiğini harfin ne anlama geldiğini bilmeden biz çocuğa harf öğretmeye çalışıyoruz. Kafası karışıyor."*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Emre öğretmen öğrencilerin yaşadıkları zorlukların bir diğer sebebinin öğrencilerin ilkökuldaki bilgi eksiklikleri olduğunu belirtmiştir. Ancak, bu durumun öğrencilerin değişken kavramını öğrenmeleri üzerindeki etkisini net bir şekilde açıklamamıştır. Bu durumu sadece öğrencilerin dört işlemle ilgili öğrenme eksikliklerine bağlamıştır. Harf sembollerinin farklı anlamlarının hatalı kullanımı ve genellenmesi gibi öğrencilerin aritmetik öğrenmeleri ile ilişkili durumlardan bahsetmemiştir.

*"Konu yine dört işleme görüyor. Sayılarla çok iyi yaparsa harflerle zaten yapar. Harfi bir şekilde çocuğa kavratırız de çocuk onu yapamadığı için çarpma bölme ya da işlem önceliğinde sıkıntı yaşadığı için olmuyor zaten. En büyük sıkıntı benim gördüğüm o."*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

#### 4.3.1.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi

##### Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi

Emre öğretmenin değişken kavramının öğretimine ilişkin alan bilgisi öğretim uygulamalarının içeriğini ve akışını düzenlemeye yönelik kararlarını etkilemiştir. Örüntüler ve ilişkiler konusunu değişken kavramının öğretiminde bir araç olarak görmediği için örüntüler ve ilişkiler konusunun işlendiği derslerde değişken kavramının anlamına yönelik uygulamalar yapmamıştır. Bu süreçte yaptığı uygulamalarda örüntü kuralındaki  $n$  değişkeninin örüntüyü genelleme sürecinde değişen değerleri temsil etmekte kullanıldığı fikri geri planda kalmıştır. Bir sayı örüntüsünün genel terimini bulma ve genel terimi verilen bir sayı örüntüsünün istenen terimini bulmayı içeren uygulamalar yapmıştır. Bu durumun, Emre öğretmenin örüntüler ve ilişkiler konusunun cebirsel ifadeler konusundan sonra öğretilmesi gerektiği yönündeki düşüncesi ile de ilişkili olduğu söylenebilir.

*“Örüntüler ve ilişkiler konusu harfli olduğu için bence önce cebirsel ifadeleri vermesi lazım. Çünkü çocuk yerine koymayı öğrenecek. Genelde burada sıkıntı oluyor. Ben de hep buradan başlıyorum hatta bu cebirsel ifadeler konusunu işlemeyen bu konunun bunla alakalı olduğunu söyleyerek başlıyorum mesela. Biz cebirsel ifade denklem konusuna geçeceğiz, bu konu tamamen bunla alakalı. Denklemlere geçmeden önce bile olabilir. Çünkü burada mesela işe  $n+(n+1)$  çocuk bunu yazmış. Biz daha çocuğa bunların nasıl toplanacağını öğretmemişiz.  $n$ ,  $n$  daha  $2n$ , artı  $1...$  Çocuğa daha harfli ifadeyi anlatmadan buna (cebirsel ifade) geçiyoruz. Böyle olunca da çok zorlanıyorlar.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Dolayısıyla, Emre öğretmen değişken kavramına ilk olarak cebirsel ifade konularının öğretiminde yer vermiş, sonrasında değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin anlamına ilişkin uygulamalar yapmıştır.

##### Ders İşleyişi Bilgisi

###### Öğretim Materyalleri

Emre öğretmen değişken kavramının öğretiminde öğrencilerin aritmetik bilgileri ile ilişki kurabilecekleri bir gösterim (kutu, yıldız vb.) kullanmamıştır. Sadece sayılar yerine harf sembollerinin kullanılacağını ifade etmiştir [SG3: K-Cebirsel ifadeler]. Aşağıdaki açıklamasında görüleceği üzere, Emre öğretmen kutu gösterimi gibi aritmetikte kullanılan gösterimlerin öğrenmeyi olumsuz etkilediğini düşünmekte ve bu sebeple bu tür gösterimleri kullanmamaktadır.

*“Belki başta şekil falan kullanılabilir. x yerine kutu kullanılabilir. Ama o da biraz daha ilkokul düzeyine geldiği için hani bir şekilde hızlı geçmek lazım. Bir anda bırakması lazım. O kutu olayından falan bir an önce vazgeçilmesi için, ben genelde şey yapıyorum hızlı geçiş yapıyorum. Çok nadir öle kutu falan. Kutu koyuyorum bazen beşlerde bunu yapıyorum. Beşlerde harf kullanamıyoruz. Kutu falan kullanıyoruz. Kutuyla da olmuyor yani. Çok karıştırıyorlar. O şeyden bir an önce sıyrılması, kurtulması lazım diye. Sonuçta kutu koy, çizgi çiz ilkokulda...”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Öte yandan Emre öğretmen öğrencilerin değişken kavramını anlamalarında somut örneklerin kullanımının önemli olduğunu belirtmiştir. Ancak somut olarak nitelendirdiği bu örneklerin değişken kavramının matematiksel anlamına yönelik olmadığı görülmektedir. Emre öğretmen cebirsel ifadeler ve denklemler konusunda değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin yerine kitap gibi somut örnekler kullanıldığında öğrencilerin işlemleri daha kolay yapabildiklerini ifade etmiştir. Aşağıda Emre öğretmenin bu yöndeki açıklamalarına yer verilmiştir.

*“x dediğin zaman öğrenci zorlanıyor. Bakıyorum o zaman x’i kitap gibi düşünün diyorum. O zaman öğrenci somutlaştırabiliyor. İlerleyen konularda da bakıyorum hocam ayakkabı gibi düşünürsen daha kolay oluyor diye kendileri söylüyorlar.”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Emre öğretmen ders sürecinde de değişken kavramı için nesne benzetmesi yapmıştır [SG3-4: K-Cebirsel ifadeler]. Bu benzetme, Emre öğretmenin değişkeni sayısal bir değer olarak değil nesne olarak görmesinin öğretim uygulamalarına bir yansımasıdır. Emre öğretmenin ders sürecinde yaptığı aşağıdaki açıklamasında da değişken kavramı için nesne benzetmesi yaptığı görülmektedir.

*“Emre Öğretmen: Bakın burada x’i (3x+4) kitap gibi düşünebilirsiniz. Ya da sen söyle kalem diye de düşünebilirsin.”*

**[SG3-4: K-Cebirsel ifadeler]**

Emre öğretmen değişken kavramının farklı anlamlarına ilişkin öğrencilerin yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen derste bu duruma ilişkin örnekler kullanmamıştır. Örneğin, değişkenin cebirsel ifadelerde değişen değerler alabileceğini gösteren örnek sorulara yer vermemiştir. Yalnızca, eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derste  $2x + 15 = 45$  denkleminde x’in tek bir değer aldığını;  $2x + 15$  cebirsel ifadesinde ise herhangi bir değer alabileceğini belirtmiştir. Bu açıklama dışında öğrencilerin değişken kavramına ilişkin yaşadıkları zorluklara yönelik farklı örnek ve materyaller kullanmamıştır.

## Öğretim Stratejileri

Emre öğretmenin değişken kavramına ilişkin alan bilgisinin öğretim uygulamalarına yönelik yaklaşımını etkilediği gözlenmiştir. Emre öğretmen örüntüler ve ilişkiler konusunda öğrencilerin aritmetik bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır. Örüntü kuralını bulmanın, aritmetikten cebire yapılan bir genelleme olduğu fikrine yer vermemiştir. Bu durumun Emre öğretmenin örüntüler ve ilişkiler konusunu değişken kavramının öğretimi için bir araç olarak görmemesi ile ilişkili olduğu söylenebilir. Emre öğretmen 2, 4, 6, 8, 10... sayı örüntüsünün kuralını bulma sürecindeki aşağıda gerçekleşen tartışma, Emre öğretmenin kural bulma odaklı bir yaklaşım sergilediğini göstermektedir.

**Emre Öğretmen:** Biz burada 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 şeklinde devam eden bir örüntünün kuralını bulacağız. 2, 4, 6, 8, 10 diye devam eden bir örüntüde birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü veya beşinci adımı bulmak kolay. Ama 100. adımı bulmak istersem bunu 100'e kadar, 100 adım saymaktansa bunun bir kuralını bulsak, bu örüntüye ilişkin bir kural bulsak bunu çözmek daha kolay olur.

**Ayşe:** Hocam birinci adımda tam 2 katı 2, ikinci adımda 2 katı 4, üçüncü adımda 2 katı 6 böyle.

**Emre Öğretmen:** Evet çok güzel. O zaman ne oluyor hep iki katı oluyor. Ama neyin iki katı, adım sayısının.  $1.2=2$ ,  $2.2=4$ ,  $3.2=6$  ve bu şekilde devam ediyor. Adım sayısını bilmesem yani hep 1, 2, 3 mü olacak. Adım sayısını bilmemiş olsam kuralını nasıl bulurum? Kaçınıcı adım desek mesela  $x$  desek kaç katı olur?

**Ayşe:**  $x.2$  olur.

**Emre Öğretmen:**  $x.2$  olur yani 100. adım desem  $100.2$ . Ellinci adım dersem?

**Öğrenciler:** 50.2

**Emre Öğretmen:** Burada  $x$  adım sayısı ama biz adım sayısını  $n$  harfi ile göstereceğiz.

### [SG1- K: Örüntüler ve İlişkiler]

Emre öğretmen değişkeni direkt harf sembolü ile göstermiş, öğrencilerin ilkökulda bilinmeyen temsil etmekte kullandıkları gösterimlere yer vermemiştir. Başka bir deyişle, değişken kavramının öğretiminde öğrencilerin aritmetik bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır. Değişkeni harf sembolü olarak tanımlamış ve öğrencilerin kavramın anlamalarını sorgulamalarına fırsat tanıyacak stratejiler kullanmamıştır. Aşağıdaki açıklaması bu duruma örnek gösterilebilir.

**Metin:** Hocam bilinmeyen deyince içinde harf var demek mi?

**Emre Öğretmen:** Bilinmeyen dediğimiz zaman harfe bakacaksınız. Harf varsa o bilinmeyen, değişkendir. Sayıya falan gerek yok bilinmeyen dediğimiz zaman  $x$ ,  $y$  gibi harf olacak."

### [SG3- K: Cebirsel İfadeler]

Bunun yanında Emre öğretmen değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin cebirsel ifadelerde ve denklemlerde temsil ettiği farklı anlamları, cebirsel ifadenin bir değere eşit olma ve olmama durumu ile ilişkilendirmiştir. Böyle bir karşılaştırma uygun olmakla birlikte harf sembollerinin denklemlerde neden belirli değerler aldığına ilişkin detaylı bir tartışma gerçekleştirilmemiştir. Öğrencilerle arasında gerçekleşen aşağıdaki tartışma bahsedilen durumu yansıtmaktadır.

**Emre Öğretmen:** Denklemden biz ne yapıyoruz? Burada ( $2x+15=45$ ) bir bilinmeyen var. Denklem olduğu zaman  $x$ 'in yerine gelen sayıyı bulabiliyoruz. Peki, eşittir 45 olmasaydı.  $x$ 'in yerine ne gelebilirdi? Her şey gelebilir.

**Öğrenciler:** Her şey gelebilir.

**Emre Öğretmen:** Neden? Çünkü eşit olduğu bir değer yok.  $x$ 'in yerine 5 yazın mesela,  $2.5+15=25$ . Yani cebirsel ifade olduğu zaman  $x$ 'in yerine her değer gelebilir ama denklem olduğu zaman  $x$ 'in yerine gelebilecek belli değerler vardır. Cebirsel ifadenin eşit olduğu bir değer olmadığı için  $x$  yerine her sayıyı verebilirim. Ama her verdiğim sayıda da farklı bir sonuç bulurum.

#### [SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Emre öğretmenin harf sembollerinin cebirsel ifadelerde ve denklemlerdeki anlamlarına ilişkin önemli fikirleri örtük olarak ele aldığı görülmektedir. Denklemlerde eşitlikten bahsetmesine rağmen, eşitlik söz konusu olduğu için harf sembolünün sadece eşitliği sağlayan değerleri alabileceğinden açık bir şekilde bahsetmemiştir. Ayrıca cebirsel ifadenin anlamından yola çıkarak  $2x + 15$  cebirsel ifadesinde “herhangi bir sayının iki katının 15 fazlası” ile ilgilenildiği gibi bir açıklamaya yer vermemiştir.

Öte yandan Emre öğretmenin bu süreçte soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu ve öğrencilerin öğretmenin sorularına cevap verme yoluyla tartışmaya katıldığı görülmektedir. Ayrıca, Emre öğretmen öğrencilere düşünceleri için fırsat tanımamış, sorduğu sorunun cevabını kendi söylemiştir. Bu durumla ilişkili olarak da öğrencilerin tartışma sürecinde ortaya çıkan ve çıkması muhtemel fikirlerinin geri planda kaldığı gözlenmiştir.

### 4.3.2. Cebirsel İfadeler

#### 4.3.2.1. Alan Bilgisi

Emre öğretmen cebirsel ifadeleri, içerisinde harf ve işlem bulunan ifadeler olarak tanımlamıştır. Öğrenciler ile arasında gerçekleşen aşağıdaki diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

**Emre Öğretmen:** Cebirsel ifadeler harfli ifadeler. Harfli ifadeler olarak kullanacağınız ifadelerden bahsedeceğiz. İçinde harf olan ifadeler. Cebirsel ifadeye bir örnek vereyim mesela.

**Uğur:**  $3a+4$ .

**Emre Öğretmen:**  $3a+4$  dediğimiz zaman bir cebirsel ifadedir.

**Mehmet:** Hocam  $3a$ 'ya  $a=4$  dese  $3.4=12$ .

**Öğretmen:** Onu örüntülerde yapmıştık ya  $n$ 'nin yerine 100 falan yazıyorduk. Önce cebirsel ifadeyi tanıtaacağız. Sonra biz cebirsel ifadeleri cümleye çevireceğiz ya da bir cümleyi cebirsel ifade şeklinde yazacağız. Önce cebirsel ifade denir onu yazalım.

**Pınar:**  $8x+4$ .

**Emre Öğretmen:** Bunların hepsi birer cebirsel ifadedir. Niye? İçinde harf var. İçinde harf olduğu için bunlara cebirsel ifade denir. İçinde ne olacak?

**Öğrenciler:** Harf.

**Emre Öğretmen:** Tamam yazalım. İçinde en az bir bilinmeyen, burada bilinmeyen dediğimiz harf ve işlem bulunan ifadelere cebirsel ifade denir. Demek ki içinde ne bulunması lazım bir tane harf bulunacak yani bilinmeyen ve bir tane de işlem bulunacak. O zaman bir örnek yazarsak mesela.  $2x$  dediğim zaman bu bir cebirsel ifade midir?

**Öğrenciler:** Evet.

**Emre Öğretmen:** Neden?

**Öğrenciler:**  $x$  var. Harf var.

**Emre Öğretmen:** 2 çarpı  $x$  oluyor. Harf var, işlem var. O zaman cebirsel ifadedir.

[SG2- K: Cebirsel İfadeler]

Emre öğretmenin cebirsel ifadeyi içerisinde bilinmeyen ve işlem olma durumuna indirgeyerek tanımladığı, cebirsel ifadenin değişkenin alacağı farklı sayı değerleri için farklı değerler aldığından bahsetmediği görülmektedir.  $2x$  cebirsel ifadesinin “herhangi bir sayının iki katı”nı temsil ettiği fikrine yer vermemiştir. Aşağıdaki açıklaması da cebirsel ifade kavramını kural odaklı tanımladığını desteklemektedir.

“Yani öğrencinin bir harf ve işlem gördüğünde bunun cebirsel ifade olduğunu bilmesi önemli. Onun için ben sık sık tekrar ediyorum. İşte harf varsa işlem varsa cebirsel ifadedir. Sonra denklemlerde bir de eşitlik ekleniyor. O zaman ikisi arasındaki farkı ayırt edebiliyor.”

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmen cebirsel ifadedeki terimler için “bilinen terim” ve “bilinmeyenli terim” ifadesini kullanmış, benzer terim ve benzer olmayan terimden bahsetmemiştir.

**Emre Öğretmen:**  $3x+10$  da  $x$  nasıl bir terim denir?

**Öğrenciler:** Bilinmeyenli terim.

**Emre Öğretmen:** Bilinmeyenli terim, içinde bilinmeyen var mı bunun, ne var?

**Öğrenciler:**  $x$ .

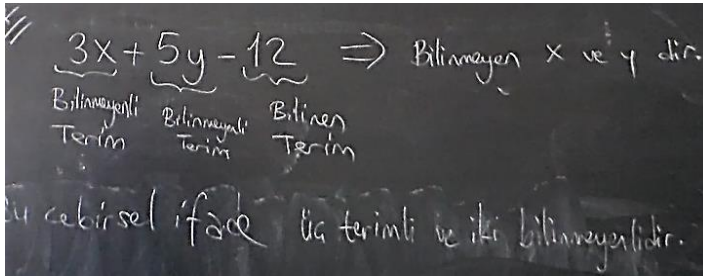
**Emre Öğretmen:** Bu  $x$ 'li yani bilinmeyenli bir terim. O zaman 10 nasıl bir terimdir?

**Öğrenciler:** Bilinen terim.

**Emre Öğretmen:** İçinde harf olduğu zaman bilinmeyenli terim. Sadece sayı olduğunda bilinen terim.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]

$3x + 10$  cebirsel ifadesinde  $3x$  ifadesini içerisinde  $x$  bilinmeyeni olduğu için bilinmeyenli terim, 10'u da bilinmeyen içermediği için bilinen terim olarak tanımlamıştır.  $3x + 5y - 12$  cebirsel ifadesindeki  $3x$  ve  $5y$  terimlerini bilinmeyenli terim,  $-12$ 'yi ise bilinen terim olarak tanımlamıştır (bkz. Şekil 4.20).



**Şekil 4.20**

Emre öğretmen cebirsel ifadelerde işlemlerde aynı harf sembolünü içeren terimler arasında toplama ve çıkarma işlemleri yapılabileceği belirtmiş, ancak benzer ve benzer olmayan terim ifadesini kullanmamıştır. Örneğin,  $9x$  ve  $8x$  terimlerinin aynı harf sembolünü içerdiği için toplanabileceğini ifade etmiştir. Öğrencilerle arasında gerçekleşen diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

**Emre Öğretmen:**  $9x+8x+11y-3y$ . Buradan ne toplanabilir veya çıkarılabilir?

**Merve Hocam**  $9x$  ile  $8x$ 'i toplarız.

**Emre Öğretmen:** Neden?

**Merve:** Çünkü hocam  $9x$ ,  $8x$  ikisi de aynı.

**Emre Öğretmen:** Tamam. İkisini toplarsak ne yapar?

**Merve:**  $17x$ .  $11$ 'den de  $3$ 'ü çıkarırız.  $8$ .

**Emre Öğretmen:**  $8$  ne?

**Merve:**  $8y$ .

**Emre Öğretmen:** O zaman  $17x+8y$ . Bundan sonrasında bir şey var mı? Bundan sonrasında hiç bir şey yok işlem böyle kalıyor.

**Merve:** Çünkü ikisi aynı harf değil.

**Emre Öğretmen:** Evet. Farklı harf olduğu zaman toplayamıyoruz.  $17x+8y$  olarak kalıyor. Bilinen bir sayı verdikleri zaman da bilinenleri yani sayıları kendi arasında toplamam gerekiyor.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]



Emre öğretmen cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işleminde elma-armut yaklaşımını kullanmıştır. Bu durum değişkeni sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak görmesinin cebirsel ifadelerde işlemleri açıklarken kullanımına bir yansımasıdır.  $2x + 5y - 9$  cebirsel ifadesinde  $x$  için kalem ve  $y$  için defter benzetmesi yapmış, farklı bilinmeyenler olduğu için toplanamayacağını belirtmiştir.

**Emre Öğretmen:**  $x$  ile  $y$  burada ayrı ayrı kavramlar.  $x$  ayrı bir değer  $y$  ayrı bir değer.  $x$  yerine az önce ne demiştik?

**Öğrenciler:** Kalem.

**Emre Öğretmen:**  $y$  yerine de defter diyelim. 2 tane kalem 5 tane defter peki ben bunları toplayabilir miyim? Bunları toplayıp 7 diyebilir miyim?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Emre Öğretmen:** Neden?

**Öğrenciler:** Bilinmeyen hocam. İkisinde de bilinmeyen var.

**Emre Öğretmen:** İki bilinmeyen ikisi farklı farklı ama. O yüzden toplayamayız.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]

Öte yandan Emre öğretmen cebirsel ifadeyi sonuç olarak görmektedir. Ancak bunun sebebi olarak cebirsel ifadenin bir matematiksel sonucu (örn. herhangi bir sayının iki katı) temsil ettiği fikrine değinmemiş; cebirsel bir ifadenin en sade haline geldiğinde bir sonucu temsil ettiğini belirtmiştir. Bu durum Emre öğretmenin cebirsel ifadede süreç odaklı bir anlayışı ön planda tuttuğunu göstermektedir.  $3x + 5$  ve  $2x + 5y - 9$  cebirsel ifadelerine ilişkin aşağıdaki açıklamaları bu yaklaşımını yansıtmaktadır.

**Ece:** Hocam hani  $3x+5$  diyoruz ya onun cevabı yok mu?

**Emre Öğretmen:** Yok olduğu gibi bırakıyoruz. Niye bırakıyoruz. Çünkü bu bilinmeyenli terim bu bilinen terim ikisini toplayamayız, bu şekilde bırakırız cevap budur. Peki, burada  $(2x+5y-9)$   $x$  ile  $y$ 'yi niye toplayamıyorum? Biri farklı biri farklı. Biri elma biri armut. Biri kalem biri defter farklı şeyler. İkisinin de bilinmeyeni aynı olsa toplanabilir.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]

#### 4.3.2.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.3.2.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Emre öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeler konusundaki olası düşünceleri, yaşadıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin en çok yaptıkları hatanın cebirsel ifadedeki bütün terimleri, terimlerdeki harf sembollerine bakmadan işlem yapmak (toplama, çıkarma vb.) olduğunu belirtmiştir.

**Emre Öğretmen:** Öğrenciler işlemleri yaparken hiç dikkat etmiyorlar. Harflere işlemlere bakmadan toplamaya, çıkartmaya çalışıyorlar.

**Araştırmacı:** Örnek verebilir misiniz?

**Emre Öğretmen:** Ne mesela, şu cebirsel ifadede  $(3x+5y)$  mesela  $x$ 'e  $y$ 'ye bakmadan bütün katsayıları toplayıp yanına harfleri  $xy$  yazıyorlar.  $8xy$  buluyorlar mesela. Ya da  $3x+5y+2$  desek yine fark etmiyor. Aynı şekilde  $10xy$  yazıyorlar.

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Bunun yanında Emre öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeden oluşan bir sonucu cevap olarak kabul etmediklerini de belirtmiştir. Öğrencilerin cebirsel ifadenin sayısal bir sonuca eşit olması gerektiğini düşündüklerini ve bu sebeple de hata yaptıklarını ifade etmiştir. Emre öğretmenin bu duruma ilişkin  $2x$  ve  $3x$  cebirsel ifadelerini örnek verdiği açıklamaları şu şekildedir.

*“Mesela  $2x$  cebirsel ifadesini sonuç olarak görmüyor. Çocuk hep işlem olarak, bir sayı bekliyor yani. Hepsinde öyle mesela ne diyor.  $x + 3x$  dediğimiz zaman çocuk onu  $4x$  yazamıyor ya da ama şunu yazıyor.  $2x + 3x$ ,  $x$ 'leri görmeden topla dediğin zaman topluyor. 2, 3 daha 5 diyor.  $x$ 'i yanına yaz diyorsun ama şey yok yani artık işlem süreci çok kısa mı anlatılıyor, ilkokulda ya da biz onu tam kavratamıyor muyuz? Hep sonuç bekliyor. İşlem de ne yapıldığını çocuk görmek istemiyor. Sonuç kaç 10 bitti. Sayısal bir sonuç beklediği için belki ondan olabilir. Yapıyor mesela cevap işte  $3x$  çıkıyor. Hala bir şey bekliyor, bir sayı bekliyor çocuk. Hep sayıya eşit olacak diye düşünüyor.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmenin öğrencilerin bu olası düşüncelerinin ve hatalarının sebeplerine ilişkin bilgisinin sınırlı olduğu görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel ifadelerde işlem yaparken benzer olmayan terimleri birleştirmelerinin sebebini somut olarak açıklamamıştır. Bu durumla ilişkili sorulan bir örnek durumda  $3x + 4$  cebirsel ifadesinin  $7x$ 'e eşit olduğunu belirten bir öğrencinin (Senaryo 2) hatasının bilinmeyen kavramını anlamamasından kaynaklandığını belirtmiştir. Emre öğretmenin aşağıdaki açıklamaları öğrencilerin bu hatasını sadece işlemsel açıdan ele aldığını göstermektedir.

*“Bilinmeyeni tam olarak anlamamış olabilir. Daha  $x$ 'in ne olduğunu ya da bilinmeyen terim ile bilinen terimin farkını anlayamamış. Bilinmeyenli terim bilinen terim, hani birinde  $x$  var birinde  $x$  yok. Bunların toplanamayacağını daha anlamamış. Ya da işte sayılara odaklanıyorlar. 3 ile 4'e odaklanıyorlar.  $x$ 'in bir önemi yok gibi düşünüyor çocuk. Yani 3 ile 4'ü topluyor. 3, 4 daha diyor 7 diyor. Şu  $x$  de orada duruyor zaten yanına yazıyor. Yani biraz katsayılarının toplanacağını falan anlayamıyorlar.  $3x+4x$  desen buna da  $7x$  diyor, diğerine de  $7x$  diyor.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme III]

Bu tür hatalar yapan öğrencilerin cebirsel ifadeleri bir sonuç olarak (örn.  $x$ 'in 3 katının 4 fazlası) değil, tamamlanması gereken bir süreç (örn.  $x$ 'i 3 ile çarp 4 ekle) olarak gördükleri fikrinden bahsetmemiştir. Emre öğretmen öğrencilerin cebirsel ifadeden oluşan bir gösterimi cevap olarak kabul etmeyip sayısal bir cevap aramalarının sebebini ise ilkokuldaki öğrenmeleri ile ilişkilendirmiş, ancak net bir açıklama yapmamıştır.

*“Mesela  $2x$  cebirsel ifadesini sonuç olarak görmüyor. Çocuk hep işlem olarak, bir sayı bekliyor yani. Hepsinde öle mesela ne diyor.  $x + 3x$  dediğimiz zaman çocuk onu  $4x$  yazamıyor ya da ama şunu yazıyor.  $2x + 3x$ ,  $x$ 'leri görmeden topla dediğin zaman topluyor. 2, 3 daha 5 diyor.  $x$ 'i yanına yaz diyorsun ama şey yok yani artık işlem süreci çok kısa mı anlatılıyor, ilkokulda ya da biz onu tam kavratamıyor muyuz? Hep sonuç bekliyor. İşlem de ne yapıldığını çocuk görmek istemiyor. Sonuç kaç 10 bitti. Sayısal bir sonuç beklediği için belki ondan olabilir. Yapıyor mesela cevap işte  $3x$  çıkıyor. Hala bir şey bekliyor, bir sayı bekliyor çocuk. Hep sayıya eşit olacak diye düşünüyor.”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

*Hani çocuk 5'in 2 katı ( $5n$ ) dediğin zaman hemen 10 diyor. Nasıl buldu diye ayrıca sormak gerekiyor. İşte 5 kere 2, 10. Çocuk söylerken 5'in 2 katı nasıl bulunur desen bile 10 diyor. 5 ile 2'yi çarpabiliriz demiyor. İşlemi önemsemiyor, direkt sonuca odaklanmış. Cebirsel ifadede de öle. Bu test tekniğinden mi neyse sürekli çocuklar test çöze çöze işlem basamaklarını umursamıyorlar artık. “*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

#### **4.3.2.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi**

##### **Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi**

Emre öğretmen cebirsel ifadeler konusuna Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (2009) belirtildiği gibi 2 ders saati süre ayırmıştır. Bu derslerin içeriğinde cebirsel ifadenin tanımlanması, cebirsel ifadelerde terim ve katsayı, cebirsel ifade oluşturma ve cebirsel ifadelerle işlemler (toplama ve çıkarma işlemleri) konularına yer vermiştir. Öğretim programı kazanımlarında yer almamasına rağmen cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik uygulamalar yapmıştır. Emre öğretmen öğrencilerin denklem konusuna geçmeden cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini temel düzeyde yapabilmelerinin önemli olduğunu düşündüğü için bu konuya yönelik uygulamalar yapmayı tercih ettiğini belirtmiştir.

*“Öğrenciler denklemlere geçince zorlanıyorlar. Kitapta vermemiş ama denklemlerden önce temel işlemleri öğrenmeleri gerekiyor. Zaten bir iki örnek gösterince öğrenciler zorlanmadan yapıyorlar. Bilinmeyen kullanmaya başlıyorlar zaten ne kadar erken öğrenirlerse o kadar iyi...”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Bununla birlikte Emre öğretmen cebirsel ifadenin anlamına ilişkin uygulamalara az zaman ayırmıştır. Öğrencilerin cebirsel ifadenin ne olduğunu kolay anladıkları yönündeki düşüncesinin bu yaklaşımı üzerinde etkili olduğu görülmektedir.

*“Zaten öğrencilere bir iki örnek verince anlıyorlar. İşte  $x+3$ , harf ve işlem var cebirsel ifadedir. Öğrenciler bunu kavrayınca cebirsel ifadenin ne olduğunu kolay öğreniyorlar. Denklemlere geçince de ikisi (cebirsel ifade ve denklem) arasındaki farkı daha rahat görüyorlar. Önemli olan işlemleri nasıl yapacaklarını bilmeleri. Bunlara daha fazla zaman ayırmak gerekli bence. İlerleyen konularda sürekli kullanacaklar.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmen ders sürecinde en fazla zamanı ise sözel bir duruma uygun cebirsel ifade oluşturma uygulamalarına ayırmıştır. Emre öğretmenin aşağıdaki açıklamaları denklem konusuna ön hazırlık olduğunu düşündüğü için bu uygulamalara daha fazla yer verdiğini göstermektedir.

*“Denkleme geçmeden cebirsel ifadeyi ince ince işlemek lazım. İşte bir sayının iki fazlası  $x+2$ , bir sayının üç fazlası  $x+3$ . Tek tek cümleden, eşdeğer bir cümleden ona uygun cebirsel ifadeye geçiş örneklerini bol tutmak gerekiyor.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

## Ders İşleyişi Bilgisi

### Öğretim Materyalleri

Emre öğretmen öğrencilerin denklem konusunu daha iyi öğrenebilmeleri için sözel durumlara uygun cebirsel ifade oluşturmalarının ve bu cebirsel ifadelerle işlem yapabilmelerinin önemli olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple derslerinde cebirsel ifade oluşturma sürecinde farklı işlemleri kullanmayı gerektiren türde sözel durum örnekleri kullandığını belirtmiştir [Emre Öğretmen, Görüşme II]. Emre öğretmenin bu süreçte kullandığı örnekler Tablo 4.6’da sunulmuştur. Kullandığı sözel problem durumlarının farklı işlemlerin (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) kullanımını ve günlük yaşam durumlarını içeren örnekler olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.6: Emre Öğretmenin Cebirsel İfadelerin Öğretiminde Kullandığı Sorular**

Sorular
<ul style="list-style-type: none"><li>• Ali'nin yaşının 5 katının 4 eksiği</li><li>• Ayşe'nin parasının 2 katının 7 lira fazlası</li><li>• Emir'in bilyelerinin 7 eksiğinin 3 katı</li><li>• Emir'in bilyelerinin 3 katının yedi eksiği</li><li>• Ayşe'nin topunun 5 fazlasının yarısı</li></ul>

Emre öğretmen verilen sözel duruma uygun cebirsel ifade yazma ile ilgili örnekler kullanmasına rağmen bir cebirsel ifadenin matematiksel anlamını içeren örnek sorular kullanmamıştır. Örneğin, bir cebirsel ifadenin değişkenin aldığı farklı sayı değerleri için farklı değerler aldığını gösteren örnekler kullanmamıştır. Benzer şekilde “ $x + 5$ ” gibi bir cebirsel ifadenin “herhangi bir sayının 5 fazlası” olduğu fikrini içeren örneklere yer vermemiştir. Bu durumun, Emre öğretmenin cebirsel ifadeyi içerisinde işlem ve harf odaklı tanımlamasının öğretim uygulamalarına bir yansımaya olduğu söylenebilir.

Emre öğretmen cebirsel ifadeler konusunda materyal yerine somut örnekler kullanımının daha etkili olduğunu düşünmektedir. Öğrenciler zorlandıkları zaman onlara tanıdık olan örnekler kullandığını belirtmiştir [Emre Öğretmen, Görüşme II]. Örneğin, cebirsel ifadelerde işlemleri anlatırken değişken için kitap veya kalem benzetmesini yaptığında öğrencilerin işlemleri daha kolay yapabildiklerini ifade etmiştir.  $5k + 2k$  cebirsel ifadesinde  $k$  değişkeni için kalem benzetmesi yapmıştır. Ancak bu benzetme, değişken kavramının sayısal bir değer olarak değil bir nesne olarak görülmesine sebep olabilecek bir öğretim materyalidir.

*“En başta çocuklar  $5k+2k$  deyince 5 ile 2’yi topluyor.  $k$  ile  $k$ ’yi de toplaması lazım diye düşünüyor. 1  $k$  oradan geliyor, 1  $k$  oradan onu da toplayacakmış gibi geliyor. Ben de  $k$ ’ye kalem diyorum. 5 kalem artı 2 kalem, 7 kalem yapıyor. 7 kalem, kaç tane kalem diyorum 1 tane kalem. O zaman  $k$ ’yi bir kere yazacak.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

### Öğretim Stratejileri

Emre öğretmen cebirsel ifadeler konusuna geçişte direkt cebirsel ifadenin tanımını vererek cebirsel ifadede harf ve işlem olma durumuna vurgu yaparak işlemsel süreci ön plana çıkarmıştır.  $3a + 4$  cebirsel ifadesi için “herhangi bir sayının 3 katının 4 fazlası” gibi öğrencilerin aritmetik bilgilerini kullanabilecekleri bir ilişkilendirme yapmamıştır. Cebirsel ifadeler konusuna geçişte gerçekleşen aşağıdaki sınıf tartışması bahsedilen durumu yansıtmaktadır.

**Emre Öğretmen:** Cebirsel ifadeler harfli ifadeler. Harfli ifadeler olarak kullanacağınız ifadelerden bahsedeceğiz. İçinde harf olan ifadeler. Cebirsel ifadeye bir örnek vereyim mesela.

**Uğur:**  $3a+4$ .

**Emre Öğretmen:**  $3a+4$  dediğimiz zaman bir cebirsel ifadedir.

**Mehmet:** Hocam  $3a$ ’ya  $a=4$  dese  $3.4=12$ .

**Öğretmen:** Onu örüntülerde yapmıştık ya  $n$ ’nin yerine 100 falan yazıyorduk. Önce cebirsel ifadeyi tanıtacağız. Sonra biz cebirsel ifadeleri cümleye çevireceğiz ya da

bir cümleyi cebirsel ifade şeklinde yazacağız. Önce cebirsel ifade denir onu yazalım.

**Pınar:**  $8x+4$ .

**Emre Öğretmen:** Bunların hepsi birer cebirsel ifadedir. Niye? İçinde harf var. İçinde harf olduğu için bunlara cebirsel ifade denir. İçinde ne olacak?

**Öğrenciler:** Harf.

**Emre Öğretmen:** Tamam yazalım. İçinde en az bir bilinmeyen, burada bilinmeyen dediğimiz harf ve işlem bulunan ifadelere cebirsel ifade denir. Demek ki içinde ne bulunması lazım? Bir tane harf bulunacak yani bilinmeyen ve bir tane de işlem bulunacak.

#### [SG2- K: Cebirsel İfadeler]

Emre öğretmenin yukarıdaki “Niye? İçinde harf var... Demek ki içinde ne bulunması lazım? Bir tane harf bulunacak yani bilinmeyen ve bir tane de işlem bulunacak.” ifadeleri cebirsel ifadeleri tanımlamada işlemsel süreci ön plana çıkardığını ve öğrencilerin ön bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmadığını göstermektedir. Bunun yanında  $3a$  cebirsel ifadesi için öğrencinin “Hocam  $3a$ 'ya  $a = 4$  dese  $3.4 = 12$ .” şeklindeki düşüncesini dikkate almadığı, cebirsel ifadenin tanımı üzerinden açıklamalarına devam ettiği görülmektedir. Öğrencilerin aritmetik bilgileri ile ilişkilendirme yapılabilecek ve cebirsel ifadenin anlamını yansıtan nitelikte olan bu öğrenci düşüncesinden cebirsel ifadeyi tanımlarken yararlanmamıştır.

Öte yandan Emre öğretmenin bu süreçte soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu ve öğrencilerin öğretmenin sorularına cevap verme yoluyla tartışmaya katıldığı görülmektedir. Ayrıca, Emre öğretmen öğrencilere düşünmeleri için fırsat tanımamış, öğrencilerden yanıt gelmeyince de açıklamaları kendi yapmıştır. Bu durumla ilişkili olarak da öğrencilerin tartışma sürecinde ortaya çıkan ve çıkması muhtemel fikirlerinin geri planda kaldığı gözlenmiştir.  $3x + 5y$  cebirsel ifadesi için öğrencilerle arasında gerçekleşen diyalog bu duruma örnek gösterilebilir.

**Emre Öğretmen:**  $3x$  ile  $5y$  toplanabilir mi?

**Mehmet:** Evet.

**Öğrenciler:** Hayır.

**Emre Öğretmen:** Nasıl toplansın? Bu ayrı bir şey bu ayrı bir şey, bu 3 tane  $x$  bu da 5 tane  $y$ , aynı şeyler mi?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Emre Öğretmen:** Toplayabilir miyiz o zaman?

**Öğrenciler:** Hayır.

**Emre Öğretmen:** Toplayamayız. Toplayabilmemiz için ne olması gerekirdi?

**Öğrenciler:** ...

**Emre Öğretmen:** Burası  $x$  iken buranın da  $x$  olması gerekirdi.

[SG3- K: Cebirsel İfadeler]

Emre öğretmen öğrenciler zorlandıklarında veya hata yaptıklarında direkt işlemsel süreci açıklamıştır. Öğrencilerin hatalarını fark etmelerini ve düşünmelerini sağlayacak stratejiler kullanmamıştır. Örneğin, öğrencilerin  $3x + 4$  cebirsel ifadesinin  $7x$ 'e eşit olduğu şeklinde yaptıkları hata için öğrencileri sorgulamaya yöneltecek bir strateji izlemediği görülmektedir. Ayrıca buna ilişkin “ $3x$ 'in bilinmeyenli bir terim,  $4$ 'ün ise tamamen bilinen bir terim olduğunu söylerim.” ifadesinin de matematiksel olarak hatalı olduğu görülmektedir. Emre öğretmen ders sürecinde de benzer yaklaşımlar sergilemiştir. Aşağıda Emre öğretmenin öğrenci hatasını düzeltmek için yaptığı açıklamalara yer verilmiştir.

*“Düzeltem gerekse önce  $3x+4$ 'ün,  $3x+4$  olarak kalacağını söylerim. Daha sonra da  $3x$ 'in niye öle olduğunu soracaklardır.  $3x$ 'in bilinmeyenli bir terim,  $4$ 'ün ise tamamen bilinen bir sayı olduğunu söylerim.  $3x$  ile  $4$  o yüzden toplanamaz derim. Ardından da  $3x+4x$ 'i veririm o da  $7x$  yapar. İkisinin farkını sorarım, bunda  $x$  var bunda yok. Bu toplanamaz bu toplanır diye ayrıca belirtirim.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme III]

### 4.3.3. Eşitlik ve Denklem

#### 4.3.3.1. Alan Bilgisi

#### Eşitlik ve Eşitliğin Korunumu

Emre öğretmen eş kollu terazinin dengede olma durumunu eşitlik olarak tanımlamıştır. Eşitliğin korunumunu ise teraziye ağırlık ekleme ve çıkarma yoluyla terazi kefelerinin dengelenmesi ile ilişkilendirmiştir. Bu süreçte öğrencilerle arasında gerçekleşen tartışma aşağıda verilmiştir.

**Emre Öğretmen:** Eşitliği biz dengedeki bir terazi gibi düşünebilir miyiz?

**Öğrenciler:** Evet.

**Emre Öğretmen:** Pazardaki teraziler var ya, terazinin bir kefesine sebze veya meyve diğer kefesine ağırlık koyuyorlar. Her iki taraf dengede oluyor. Peki, her iki taraf dengede iken her iki tarafa da  $1$ 'er kg koyarsam dengede olur mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Emre Öğretmen:** Her iki taraftan da aynı ağırlıkları çıkarırsam dengede olur mu?

**Öğrenciler:** Evet.

**Emre Öğretmen:** Eşitliğin bir tarafına ne yapıyorsam eşitliğin bozulmaması için diğer tarafına da aynı işlemi yapabilirim. Bir tarafına  $9$  ekledim, diğer tarafına da  $9$  eklemem lazım. Bir tarafı  $3$  ile çarpтым, diğer tarafı da  $3$  ile çarpmam lazım.

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Emre öğretmenin “Eşitliği biz dengedeki bir terazi gibi düşünebilir miyiz?” ifadesi eşitlik kavramını terazi ile ilişkilendirdiğini ve terazinin dengede olma durumunu eşitlik olarak tanımladığını göstermektedir. Emre öğretmen eşitliğin korunumunu ilk olarak teraziye ağırlık ekleme ve çıkarma durumları üzerinden “Peki, her iki taraf dengede iken her iki tarafa da 1'er kg koyarsam dengede olur mu?” ve “Peki her iki taraftan da aynı ağırlıkları çıkarırsam dengede olur mu?” ifadeleri ile açıklamıştır. Sonrasında ise bu durumu eşitlik ile ilişkilendirerek eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması ile eşitliğin bozulmayacağını “Demek ki eşitliğin bir tarafına ne yapıyorsam eşitliğin bozulmaması için diğer tarafına da aynı işlemi yapabilirim.” şeklinde açıkladığı görülmektedir.

Emre öğretmen terazide yapılan ağırlık ekleme ve çıkarma eylemlerini sadece sözel olarak açıklamış, ancak eşitliğin korunumunu gösteren herhangi bir gösterim (örn.  $1 = 1$ ,  $1 + 9 = 1 + 9$  gibi semboller) göstermemiştir. Bu durum aritmetikten cebire geçişte sayı cümlelerinin rolü ve kullanım amacına ilişkin bilgi sahibi olmadığını göstermektedir. Açık sayı cümleleri ile ilgili yöneltilen öğretim senaryosunda (Senaryo 7) da sayı cümlelerinin eşitlik kavramı ile ilişkisinden bahsetmemiştir (bkz. Şekil 4.21) [Emre Öğretmen, Görüşme III].

Altıncı sınıf matematik öğretmeni Elif öğretmen eşitlik ve denklem konusuna geçişte öğrencilerine aşağıdaki soruyu sormuştur.

$8 + 4 = \blacksquare + 5$  ifadesinde  $\blacksquare$  yerine hangi sayı gelmelidir?

#### Şekil 4.21

Emre öğretmene bu senaryoya ilişkin “Elif öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir?” sorusu yöneltilindiğinde açıklama yapmaktaki zorlanmıştır.

*“Harf yerine kutu kullanmış... Daha iyi anlasın diye mi acaba?”*

[Emre Öğretmen, Görüşme III]

Emre öğretmenin aritmetikten cebire geçişte sayı cümlelerinin kullanımının çok önemli olmadığı ve bu gösterimlerin hızlı geçilmesi yönündeki düşüncesi de yukarıdaki bulguları destekler niteliktedir.

*“Belki başta şekil falan kullanılabilir. x yerine kutu kullanılabilir. Ama o da biraz daha ilkökul düzeyine geldiği için hani bir şekilde hızlı geçmek lazım. Bir anda bırakması lazım. O kutu olayından falan bir an önce vazgeçilmesi için, ben genelde şey yapıyorum hızlı geçiş yapıyorum. Çok nadir öle kutu falan. Kutu koyuyorum bazen beşlerde bunu yapıyorum. Beşlerde harf kullanamıyoruz. Kutu falan*



kullanıyoruz. Kutuyla da olmuyor yani. Çok karıştırıyorlar. O şeyden bir an önce sıyrılması, kurtulması lazım diye. Sonuçta kutu koy, çizgi çiz ilkokulda...”

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

## Denklem ve Denklem Çözme

Emre öğretmen denklemi terazi modeli ve cebirsel ifade ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Denklem cebirsel ifadeden farkının eşitlik içermesi olduğunu belirtmiş, eşitliği de terazinin dengede olma durumu ile ilişkilendirerek denklemi, “içinde en az bir bilinmeyen, işlem ve eşitlik bulunan ifadeler” olarak tanımlamıştır.

**Emre Öğretmen:** Denklem tanımında aslında cebirsel ifadelere benziyor. Fakat cebirsel ifadede ne diyorduk, mesela  $3x+2$  diyorduk bitiyordu. Eğer yanına ona eşit olan bir değer yazarsak ona da denklem deniyor. Yani denklemde hangi sembolün olması zorunlu?

**Mert:** Eşittir.

**Emre Öğretmen:** Eşittir sembolünün. Şu mesela  $3x+2$  bu nedir cebirsel ifade midir?

**Öğrenciler:** Evet.

**Emre Öğretmen:** İçinde bilinmeyen var, işlem var. Eğer ben bunun yanına eşittir 10 yazarsam bu ne olur?

**Öğrenciler:** Denklem.

**Emre Öğretmen:** Bunun adı denklem olur. Neden burada ne var?

**Öğrenciler:** Eşittir.

**Emre Öğretmen:** Eşittir olduğu anda adı ne oluyor?

**Öğrenciler:** Denklem.

**Emre Öğretmen:** Demek cebirsel ifadenin yanına ne koyacağız eşittir. Öbür tarafa da bir şey yazarsınız artık. O zaman tanım olarak ne diyebiliriz.

**Derya:** Denklem aynı eşit kollu terazi var ya ona benziyor.

**Emre Öğretmen:** Evet terazinin ne halidir? Denge halidir. Peki, burada denklemin tanımını yapalım. Denklem terazinin denge hali neden? Denklemde eşitlik olması lazım. İçinde en az bir bilinmeyen ve işlem bulunan? Ne diyeceğim? Bu cebirsel ifade oluyor.

**Öğrenciler:** Eşitliklere.

**Emre Öğretmen:** Eşitliklere denklem denir.

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

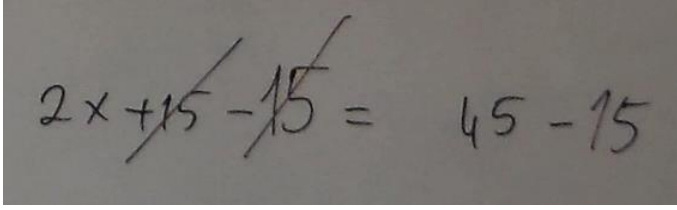
Emre öğretmen denklemi terazi modeli ile ilişkilendirmiş, ancak bu ilişkiyi net bir şekilde açıklamamıştır. Denklemde eşitlik olmasının matematiksel anlamına ilişkin bir açıklama yapmamıştır. Cebirsel ifade ve denklemde harf sembollerinin nasıl tanımlandığı ile ilişkili bir açıklama yapmamış; denklemin cebirsel ifadeden farkını eşitlik içermesi olarak tanımlamıştır. Emre öğretmenin “Cebirsel ifadede ne diyorduk, mesela  $3x+2$  diyorduk bitiyordu. Eğer yanına ona eşit olan bir değer

yazarsak ona da denklem deniyor. Yani denklemde hangi sembolün olması zorunlu?” ifadesi bu durumun bir göstergesidir. Bu durum Emre öğretmenin denklemi içerisinde bilinmeyen ve eşitlik olma durumuna indirgeyerek tanımladığını göstermektedir. Emre öğretmenin bu tanımında denklemin anlamsal yönünün geri planda kaldığı görülmektedir. Aşağıdaki açıklamaları da bu durumu desteklemektedir.

“İçerisinde harf ve işlem bulunacak. Derste de hep bunu söylüyorum. Sık sık tekrarlıyorum. Öğrenciler cebirsel ifadeyi bildikleri için işte cebirsel ifadeye de bir de eşitlik eklenecek diye anlatıyorum.”

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Öte yandan Emre öğretmen denklem çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin altında yatan nedenlere ilişkin bilgi sahibidir. Emre öğretmenin  $2x + 15$  denkleminin çözümüne ilişkin yaptığı gösterim (bkz. Şekil 4.22) ve bu süreçte yaptığı açıklamalar denklem çözümünde eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.


$$2x + 15 - 15 = 45 - 15$$

Şekil 4.22

**Emre Öğretmen:** +15'in diğer tarafa niye -15 olarak geçtiğini nasıl açıklayabiliriz? +15'e hangi işlemi yaparsam gider? Amacım  $2x$ 'i yalnız bırakmak değil mi? O zaman 15'den nasıl kurtuluruz?

**Emre:** -15.

**Emre Öğretmen:** Bu +15'ten kurtulmak için buraya ne yazarız?

**Öğrenciler:** -15.

**Emre Öğretmen:** Eşitliğin her iki tarafına da aynı işlemi uygulamamız gerekiyordu. Burası -15 ise buradan da ne yapmam lazım? 15'i çıkarmam lazım. O zaman  $2x=3$ .  $x=15$  oldu. Yani eşitliğin bir tarafından 15 çıkarıyorsam diğer tarafından da 15 çıkarmam lazım. Bunun basit yolu da şu. İşlemi uzatmamak için nasıl yapıyoruz? +15'i diğer taraf nasıl atıyoruz?

**Öğrenciler:** -15

**Emre Öğretmen:** Yaptığımız işlemin mantığı bu. İşlemi uzatmamış oluyoruz. Bir taraftan bir tarafa geçerken işaret değiştiriyoruz.

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

Emre öğretmen denklem çözümünün terazi modeli ile ilişkilendirilmesine yönelik de bilgi sahibidir. Ancak bu durumu sadece sözel olarak açıklamış, terazi modelinde yapılan işlemsel eylemlere ilişkin sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Bu durum Emre öğretmenin terazi modeli kullanarak denklem çözümü ile sembolik denklem çözümünü ilişkisiz olarak gördüğünü göstermektedir. Emre öğretmenin aşağıdaki açıklamaları bu durumu göstermektedir.

*“Hani bu şekilde (terazi modeli ile) açıkladıktan sonra soru üzerinden nasıl çözüldüğünü açıklıyorum. İşte o zaman da terazideki gibi eşitliğin yani dengenin bozulmaması için denklemde eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenebileceğini veya çıkarılabileceğini, aynı şekilde aynı sayı ile çarpılıp bölünebileceğini söylüyorum. Öğrenci kendi de söylüyor zaten, hocam dengenin bozulmaması için değil mi diyorlar. Sonra iş dört işleme pratiğe kalıyor.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

#### 4.3.3.2. Pedagojik Alan Bilgisi

##### 4.3.3.2.1. Alana İlişkin Öğrenci Bilgisi

Emre öğretmenin öğrencilerin eşitlikle ilgili olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında detaylı bir bilgiye sahip olmadığı görülmüştür. Emre öğretmene  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  eşitliğinin (Senaryo 7) çözümüne ilişkin olası öğrenci düşünceleri ve bu süreçte yapabilecekleri hatalar sorulduğunda aşağıdaki yanıtı vermiştir.

**Araştırmacı:** Burada öğrenciler ne gibi hatalar yapabilir?

**Emre Öğretmen:** Toplamaz herhâlde ya, eşittiri görmez hepsini toplayabilir. Her şey olabilir. Kutunun yerine belki eşittiri görmez hepsini toplayabilir.

**Araştırmacı:** Nedeni ne olabilir?

**Anı Öğretmen:** Çocuğun matematik düzeyi düşük işte, hiçbir şey bilmiyor eşittir ne anlama geliyor ya da çocuk hep şeye almış hepsini toplar çıkar. Çok fazla hazırbulunuşluğu yok.

**Araştırmacı:** Bu soruyu yapabilmesi için neyi bilmesi gerekir peki?

**Emre Öğretmen:** Toplama, çıkarmayı bilsin yeter. Başka hiçbir şeye gerek yok.

[Emre Öğretmen, Görüşme III]

Emre öğretmen öğrencilerin bu örnekte eşitlik kavramı ve eşittir sembolünün anlamı ile ilgili sahip olabilecekleri yanılgılardan bahsetmemiştir. Örneğin, öğrencilerin eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak düşünerek kutu sembolü yerine cevap gelmesi gerektiğini düşünerek sonucu 12 veya 17 bulabileceklerini belirtmemiştir. Emre öğretmenin “... eşittiri görmez hepsini toplayabilir.” açıklamasını yaptığı, ancak bu ifadesinin açıklayıcı olmadığı görülmektedir. Emre öğretmen öğrencilerin yapabilecekleri hatanın da öğrencilerin matematik düzeyinin düşük olmasından kaynaklandığını belirtmiştir. Bu hatanın

sebebi olarak öğrencilerin eşitlik kavramının anlamına ilişkin olası zorluklarına değinmemiştir. Emre öğretmenin “*toplama, çıkarmayı bilsin yeter.*” ifadesi bu durumu destemektedir.

Emre öğretmen öğrencilerin denklem çözümünde yaşadıkları zorluklar ve yaptıkları hatalar hakkında bilgi sahibidir. Öğrencilerin denklem çözümünde terimleri eşitliğin diğer tarafına geçirmede zorlandıklarını ve bu süreçte işaret değiştirmeme gibi hatalar yaptıklarını belirtmiştir. Bu hatanın sebebini ise öğrencilerin tam sayılar konusu ile ilgili öğrenme eksikliklerine ve öğrencilerin dikkatsizliğine bağlamıştır. Öğrencilerin eşitlik kavramına ilişkin olası düşüncelerinden ve zorluklarından bahsetmemiştir.

*“Çünkü yer değiştirdiğin zaman bir kere  $-3x=9$  gibi bir şey vardı. Çocuk  $-3$ 'ü diğer tarafa  $+3$  olarak attı,  $x=12$  dedi mesela. Niye öle yaptın dedim. Hocam o  $-3$ , o diğer tarafa artı olarak geçer. Peki dedim, o eksi üç çıkarma mı sayının işaretimi, sayının işareti aradaki işlem ne dedim çarpma, ondan sonra çocuk çarpmanın ters işlemi ne bölme. Bölme olarak geçmesi gerekir diye. Mesela orada çok sıkıntı yaşıyoruz tam sayıları çok bilmedikleri için ya da dikkatsiz oldukları için. Hep şeye geliyor, o aradaki çarpma işlemini tam kavratamıyoruz herhâlde.  $-3x$  dediği zaman çocuk oradaki  $-3$ 'ü,  $3$  çıkarıyor gibi algılıyor. Tam sayılarla dört işlemi iyi bilse daha az sıkıntı yaşarız herhâlde. Tamsayılarda toplama, çıkarma, çarpma, bölme, negatif sayılarda iyi bilmesi lazım.”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Emre öğretmen denklem çözümünde öğrencilerin işlemleri yan yana devam ettirme eğilimine ilişkin de bilgi sahibidir. Aşağıda sunulan öğretim senaryosu (Senaryo 8) böyle bir örnek durumu içermektedir (bkz. Şekil 4.23).

Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği bir derste öğrencilerinize aşağıdaki gibi bir soru yönelttiğinizi varsayalım.

$3x + 4 = 16$  denklemini çözünüz.

Bu soruyu sınıfınızdaki Sıla isimli bir öğrencinin aşağıdaki gibi çözdüğünü farz edelim.

$3x + 4 = 16 = 3x = 16 - 4 = 12 = 3x = x = 4$

**Şekil 4.23**

Emre öğretmen öğrencilerin yaptığı bu hatanın ilkokuldaki alışkanlıklarından kaynaklandığını düşünmektedir. Bunun yanında öğrencilerin eşittir işaretinin hangi matematiksel ifadeyi kapsadığını anlamaları gerektiğini belirtmiş, ancak bu hatayı, öğrencilerin eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görmeleri ile ilgili

olası yanlışlarla ilişkilendirmemiştir. Bu hatanın temel sebebi olarak öğrencilerin soruları hızlı çözmesini göstermiştir.

**Araştırmacı:** *Sıla neden böyle bir çözüm yapmış olabilir?*

**Emre Öğretmen:** *Çocuklar alışmış böyle düz yazı yazmaya işte düz yazı gibi yazıyor. İşlemi çözerken de düz yazı nasılsa öle yazıyor. Yani önceden hep alt alta işlem yapıyorlardı şimdi hep yana doğru işlem yapmaya başlıyorlar. Normalde işte 12 ile 25'i topla desen çocuk hep böyle aşağıya doğru toplar yavaş yavaş bu toplamadan yan toplamaya geçiyor. İşte zaten burada doğru düzgün toplama yok belki ondandır yani yana doğru yazıyordu.*

**Araştırmacı:** *Temelde neyi bilmediği için bu hatayı yapmış olabilir?*

**Emre Öğretmen:** *Belki sembollerle alakalıdır ya. Hani bu eşittirin tek burayı kapsadığını bir sonraki aşamada yeni bir işlem basamağı yazması gerektiğini anlaması lazım. Çocuklar hızlı çözmeye mi alışmış ne bu tarz şeyleri çok yapıyorlar. Alışmış artık yan yana yazıyor bitsin, işlem çözerken de öle. İşlem önceliğinde de çok gördüm. Sırayla yapıyorlar.*

[Emre Öğretmen, Görüşme III]

#### 4.3.3.2.2. Alan ve Öğretim Bilgisi

##### Ders İçeriği ve Akışı Bilgisi

Emre öğretmen eşitlik ve denklem konusuna programda belirtildiği gibi 6 ders saati süre ayırmıştır. Bu süreçte eşitlik ve eşitliliğin korunumuna ilişkin öğretim uygulamalarına yaklaşık on dakika yer vermiştir. Öğrencilerin zaten tanıdık olduklarını düşündüğü eşitlik konusuna denklem çözümüne geçişte hatırlatma amaçlı değinmiştir. Eşitlik kavramını denklemlerin öğrenimi için bir araç olarak görmesine rağmen bu konuya yeterli zaman ayırmaması, eşitlik kavramının denklem ve denklem çözümündeki kavramsal süreçleri nasıl açıkladığına ilişkin bilgi eksikliğinden kaynaklanıyor olabilir. Aşağıdaki açıklamaları bahsedilen durumu yansıtmaktadır.

*“Evet, bu konuyu ayrı bir konu olarak anlatmadım. Eşitlik sürekli karşılaştıkları bir şey. Birinci sınıftan bu yana görüyorlar. İşte eşitlik nedir, iki tarafın da birbirine eşit olması. Denklemde de aynı. Denklem çözümünde de bunu hatırlatıyorum sürekli. Çok da konuyu uzatmaya gerek yok. İşte bir taraf neye eşitse diğer tarafta ona eşit olacak. Çok farklı şeyler gösterince kafaları karışıyor.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Denklem çözenin matematik öğrenmede öncelikli olduğunu düşündüğü için derslerinde denklem kurma ile ilgili öğretim uygulamalarına daha az yer vermiştir.

*“Denklem bütün konuların temelini oluşturuyor. Artık bütün konularda, problemlerde denklem çözmeleri gerekcek. Ne kadar çok denklem çözerler kuralları ne kadar iyi öğrenirlerse sonra rahat ederler. Soru çözdükçe pekiştiriyorlar. Ben de bol bol denklem çözmeye çalışıyorum.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

## Ders İşleyişi Bilgisi

### Öğretim Materyalleri

Emre öğretmen terazi modelinin eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde önemli olduğunu düşünmektedir. Ancak, terazi modeli kullanarak denklem çözümü ile sembol kullanarak yapılan çözümünü birbirinden bağımsız görmesi, öğrencilerin bu ilişkiyi kavramalarına yardımcı olacak somut çözümler üretememesine sebep olmuştur. Öğrencilerin bu ilişkiyi kavramada zorlandıkları için terazi modeli kullanımını hızlı geçtiğini ifade etmiştir.

*“Terazi, eşitlik ve denklemleri anlamaları için önemli. Her iki tarafa aynı işlemi yapacağını kavramaları için önemli. Sonuçta işte terazinin bir kefesinden yarım kilo çekiyorsan öbür tarafından da çekersin, ekliyorsan öbür tarafına da eklersin, çarparsan yine çarparsın. Onu anlaması için önemli. Ama ilişkiyi kurmaları zor oluyor. Çıkararak işte +5'i öbür tarafa -5 olarak atmak yerine işte ben bir iki defa anlatıyorum öle. Hani +5, iki taraftan da 5 çıkarsan +5-5 gidiyor yine öbür tarafa -5 geçmiş oluyor. İşlem kalabalığını önlemek için ya da hızlı yapmak için öle yapıyoruz. Çoğu kavrayamıyor. Yani birine anlatsan ötekini karıştırıyor. Bundan dolayı kısa tutuyorum. Bu sefer anlaması gerekeni anlayamıyor. Sonuçta geriye ket vurma oluyor. O onu engelliyor, o onu engelliyor.”*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmen terazi modelinin eşitlik ve denklem konuları ile ilişkisi hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen model kullanımını sembolik gösterimle ilişkilendirmemiştir. Ders sırasında eşitlik ve denklem konularının öğretimi için terazi modeli içeren örnek ve gösterimler kullanmamış, sadece sözel açıklamalar ile terazi modelinin eşitlik ve denklem konularıyla ilişkisinden bahsetmiştir. Emre öğretmenin aşağıdaki açıklamaları da bu durumu göstermektedir.

**Araştırmacı:** *Eşitlik ve denklem konusu için terazi modelini içeren örnek ve gösterimler kullanmadınız. Örnekleri sadece sözel olarak açıkladınız. Buna ilişkin neler söylersiniz?*

**Emre Öğretmen:** *Bunu sürekli tekrarlıyorum, neden terazi gibi düşünmemiz gerektiğini. Soru çözümüne geçtiğim zamanda soru üzerinden de hatırlatıyorum. Terazide çok fazla zaman kaybedince kafaları karışıyor. Soru üzerinden o ilişkiyi daha iyi görüyorlar. Terazi gördüklerinde biliyorlar zaten ama soru üzerinden zor öğrendikleri için ona daha çok ağırlık veriyorum.*

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmen denklem çözümünde öğrencilerin denklem çözme sürecindeki işlem pratiğini geliştirmelerini sağlayacak örneklere yer verdiğini ifade etmiştir.

*“Öğrencinin eksili bir terimin diğer tarafa artı olarak atılacağını bilmesi gerekiyor. Ya da bilinenlerin bir tarafa bilinmeyenlerin bir tarafa toplanması gerektiğini. Bilinmeyeni bulmak için her iki tarafı bilinmeyen katsayısına bölünmesi*

*gerektiğini iyice öğrenmesi lazım. Ben de örnekleri seçerken bunlara göre seçiyorum. Çözümde ne kadar farklı işlemlerle karşılaşırsa, işlemlerin nasıl yapılacağını bilirse o kadar iyi öğreniyorlar.”*

**[Emre Öğretmen, Görüşme II]**

Emre öğretmenin derste kullandığı denklem örneklerini de belirttiği şekilde çeşitlendirdiği görülmektedir. Bu örnekleri öğrencilerin denklemler konusuna ilişkin olası düşünceleri ve zorlukları kapsamında değil, denklem çözme sürecindeki işlemsel kuralları kullanabilmeye yönelik çeşitlendirdiği söylenebilir. Bu sorular Tablo 4.7’de sunulmuştur.

**Tablo 4.7: Emre Öğretmenin Denklem Çözümünde Kullandığı Sorular**

Sorular
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>5x - 2 = 28</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>10.x + 4 = 45</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>6x-10 = 4x + 50</math> ise <math>y=?</math></li><li>• <math>12x + 70 = 80 + 11x</math> ise <math>x=?</math></li><li>• <math>5 + 2a = 85 - 3a</math> ise <math>a=?</math></li><li>• <math>5x - 17 = 3x + 53</math> ise <math>x=?</math></li></ul>

### **Öğretim Stratejileri**

Emre öğretmenin eşitlik ve denklem konusuna ilişkin alan bilgisinin öğretim uygulamalarına yönelik yaklaşımını etkilediği gözlenmiştir. Emre öğretmen eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde sayı cümlelerini bir araç olarak görmediği için öğrencilerin aritmetik bilgileri ile bir ilişkilendirme yapmamıştır. Eşitlik ve denklem kavramını terazi modeli ile ilişkilendirme sürecinde sembolik bir gösterim kullanmaması da bu durumun bir göstergesidir.

Bunun yanında Emre öğretmen denklem çözümünde yapılan işlemlerin altında yatan anlamları ve nedenleri keşfetmeye yönelik değil, sonuç bulma odaklı bir yaklaşım sergilemiştir. Denklem çözümünde ilk olarak ters çevirme (eşitliğin diğer tarafına geçirme) yöntemini göstermiş, ters çevirme yönteminde yapılan işlemlerin altından yatan anlamlardan ve nedenlerden bahsetmemiştir. Denklem çözümünü belirli kurallar üzerinden açıklamıştır. Bu kurallar şu şekildedir. (i) Bir denklemi çözmek için bilinmeyen terimleri eşittirin bir tarafında bilinen terimleri ise eşittirin diğer tarafında toplarız, (ii) Eşittirin bir tarafından diğer tarafına geçen terim işaret değiştirir ve (iii) Bir eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir. Aynı sayı çıkarılabilir. Aynı sayıyla çarpılabilir ve aynı sayıya bölünebilir. Emre öğretmen

“Eşittirin bir tarafından diğer tarafına geçen terim işaret değiştirir” ve “Bir eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir.” durumları arasında ilişki kurmamış, bunları farklı kurallar olarak ele almıştır. Emre öğretmen  $3x + 10 = 40$  denkleminin çözümüne ilişkin gösterimi (bkz. Şekil 4.24) ve açıklamaları aşağıda verilmiştir.

Handwritten work on a chalkboard showing the solution of the equation  $3x + 10 = 40$ . The steps are:  $3x + 10 = 40$ ,  $3x = 40 - 10$ ,  $3x = 30$ ,  $x = 10$ . A handwritten note "işaret değiştirir" with an arrow points from the +10 to the -10. Another note "ç.k. = {10}" is written at the bottom.

Şekil 4.24

**Emre Öğretmen:** Bir terazi düşünün. Terazinin bir kefesinde  $x$ 'li terimler bilinmeyenli terimler, terazinin bir kefesinde de bilinen terimler olacak. Yani bilinmeyenler eşittirin bir tarafına, bilinenler diğer tarafına gidecek. O zaman eşittir burada ne oluyor bir ülkenin sınırı gibi düşünün. Sınırdaki yabancılar var mı birbirine mesela bu bir bilinmeyen terim bu bilinen bir terim, ne yapmam lazım bilinmeyenli terimi  $3x$ 'i tek bırakmam lazım.  $+10$ 'u ne yapmak lazım diğer tarafa atmak lazım. Eşittirin bir tarafından diğer tarafına geçen terim işaret değiştirir. Burada bilinmeyenli terim hangisi?

**Öğrenciler:**  $3x$ .

**Emre Öğretmen:**  $3x$ 'in altını çizdim.  $3x$ 'in bulunduğu tarafa bakarsak eşittir neydi bir sınır. Böldük. Şimdi eşittirin sol tarafında bu nasıl bir terim bilinen bir terim. Bunu ne tarafa atmam lazım?

**Öğrenciler:** Karşıya.

**Emre Öğretmen:** Diğer tarafa. O zaman  $a+10$  ne tarafa atacağım diğer tarafa.  $+10$  diğer tarafa geçerken nasıl geçecek?

**Öğrenciler:**  $-10$ .

**Emre Öğretmen:** Burada ne kaldı şimdi,  $3x$ . O zaman burada ne vardı  $40$ . Bunun yanına ne geldi?

**Öğrenciler:**  $-10$ .

**Emre Öğretmen:**  $3x=40-10$ . Bir taraftan bir tarafa geçtiğiniz zaman işaret değiştiriyorsunuz.

**Öğrenci:**  $3x = 10$ .

**Emre Öğretmen:** O zaman ben burada  $3x$  dediğim zaman,  $3x=30$  ise  $3$  ile neyi çarparsam  $30$  olur bulmam gereken şey bu aslında.  $30$ 'u  $3$ 'e bölersem  $x$  yerine ne gelmeliymiş?  $10$  gelmeliymiş. O zaman her iki tarafı  $3$ 'e böleceğiz.  $x=10$  bulduk. Denklemi terazi gibi düşündüğümüzde, denklemde eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir. Aynı sayı çıkarılabilir. Aynı sayı ile çarpılabilir. Ve aynı sayıya bölünebilir. Denklemde eşittirin bir tarafına ne yapıyorsam diğer tarafına da aynı işlemi yapabilirim.

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]



Emre öğretmen denklem çözümünde terazi modeli ile ilişkilendirmeyi sadece terazinin kefeleri ile eşitliğin iki tarafı arasında yapmış, sonrasında direkt sembol üzerinden ters çevirme yöntemini kullanmıştır. Çözüm sonrasında ise terazi modeli ile eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması yolunu ilişkilendirmiş, ancak bunun ters çevirme yöntemi ile ilişkisine yer vermemiştir. Yani, denklem çözümünün ara basamaklarında terazi modeli ile bir ilişkilendirme yapmamıştır.

Emre öğretmen başka bir örneği de ters çevirme yöntemi ile açıkladıktan sonra denklemde eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanmasına ilişkin kısa bir açıklama yapmıştır. Emre öğretmenin  $5x - 24 = 36$  denkleminin çözümü için yaptığı bu açıklamalar ve gösterim (bkz. Şekil 4.25) aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.25

**Emre Öğretmen:** Demek ki eşittirin bir tarafına ne yapıyorsam diğer tarafına da aynı işlemi yapabilirim. Eşitliğin bozulmaması için bir taraf ne işlem yaptıysam diğer tarafa da aynı işlemi yapabiliriz. Örneğin bir tarafa 9 ekledim, diğer tarafa da 9 eklemem lazım. Bir tarafı 3 ile çarptım diğer tarafı da 3 ile çarptım. Bunu çok kullanmıyoruz ama not olarak dursun. Biz daha çok şu kuralı kullanıyoruz eşitliğin bir tarafından diğer tarafına geçen terim işaret değiştiriyor biz bunu kullanıyoruz. Buradaki amaç şu aslında tahtaya bakın. Burası ne -24 mü ne yaparsam 0 olur -24'e 24 eklersem. Yani bir şeyden 24 çıkardık ya bu tarafa 24 eklersem ne olur 0 olur. Bu -24'ü yok etmek için şuraya ne yaparız 24 ekleriz. Bu tarafa 24 eklersem diğer tarafa da ne ekleyeceğim 24. Bunlar ne olacak -24+24, 0 kalacak. Ne oldu bakın  $5x=36+24$ .

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Emre öğretmen denklem çözümünde eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanmasını öğrencilerin anlamalarının zor olduğunu düşünmektedir. Bu sebepten bu açıklamaların üzerinde kısa durulması gerektiğini düşünmektedir.

“Tamam sonuçta söylüyoruz. Hani buradan geldiğini, ama çok uzatınca kafaları karışıyor. Bu buradan geliyor deyip belli kurallar var onları öğrenmeleri gerekiyor. Eşitliğin bir tarafına bilenenleri işte diğer tarafına bilinmeyenleri toplayıp gerekli işlemleri yapacaklar. Bir süre sonra zaten daha iyi çözebiliyorlar.”

[Emre Öğretmen, Görüşme II]

Emre öğretmenin sergilediği bu yaklaşımla ilişkili olarak denklem çözümü sırasında öğrencilere yönelttiği sorularda neden ve nasıl gibi açıklamalardan ziyade sonuç odaklı cevaplar aradığı görülmüştür.  $5x - 24 = 36$  denkleminin çözüm sürecinde gerçekleşen diyalog bu duruma örnek gösterilebilir.

**Emre Öğretmen:** Önce bilinmeyenli terimin altını bir çizin, fazlalık varsa diğer tarafa atın.

**Umut:** Hocam bilinmeyenli sayının altını çizelim.

**Emre Öğretmen:** Zaten bilinmeyenli sayı eşittirin ne tarafında?

**Öğrenciler:** Solunda.

**Emre Öğretmen:** O zaman eşittrinin sol tarafı bilinmeyenlerin tarafı olacak. Eşittirin sol tarafında bilinen ne varsa öbür tarafa atacağım. Ne var bilinen, -24. -24 diğer tarafa +24 olarak gider. 36'nın yanına bir de ne geldi?

**Öğrenciler:** +24

**Umut:** Hocam eşitlik olsun diye 5 ile 60'ı 5'e böleriz. Zaten 5 burada çarpma 5ler gider. 60'ı da 5'e bölersek  $x=60:5$ ,  $x=12$

**Emre Öğretmen:** 5'e bölme sebebi ne burada niye 5'e böldü 6'ya bölmedi?

**Öğrenciler:** ...

**Emre Öğretmen:** x'in kaç katı burası?

**Öğrenciler:** 5

**Emre Öğretmen:** Kaça bölmem lazım? x'in katsayısı kaçsa ona bölmem lazım.

[SG5- K: Eşitlik ve Denklem]

Emre öğretmenin bu süreçte soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif olduğu ve öğrencilerin öğretmenin sorduğu sorulara cevap verme yoluyla tartışmaya katıldığı görülmektedir. Ayrıca Emre öğretmenin sorulan sorulara öğrenciler yanlış bir cevap verdiklerinde veya hatalı bir çözüm yaptıklarında ise doğrudan kuralları açıklamış, öğrencilerin sorgulama yaparak hatalarını fark etmelerini sağlayacak bir yol izlememiştir.  $5x-2=28$  denkleminin çözümünde (bkz. Şekil 4.26) Emre öğretmenin ve Ayşe arasında gerçekleşen aşağıdaki diyalog bu durumu yansıtmaktadır.

İzomet - 297-11-

$$5x - 2 = 28 \text{ ise } x = ?$$
$$5x = 28 + 2 = 30$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{30}{5}$$
$$x = 6$$

Şekil 4.26

**Emre Öğretmen:** *Yaptığını anlat. İlk ne yapıyorduk bilinmeyen olan sayının altını çiziyorduk. Bilinmeyenli terimin yalnız kalması için -2'yi ne yapıyoruz?*

**Ayşe:** *Artı 2*

**Emre Öğretmen:** *+2 olarak diğer tarafa atmamız gerekiyor. Peki,  $5x=30$  ise  $x$ 'i bulmak için ne yaparız?*

**Ayşe:** *30'u 5'e böleriz.*

**Emre Öğretmen:** *Her iki tarafı da 5'e böleriz. 6'yı sil oradan aşağıya kalanları yaz.*

[SG6- K: Eşitlik ve Denklem]

## Özet

Sonuç olarak, yukarıda detaylı olarak sunulan bulgular, Emre öğretmenin değişken, cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem konularının öğretimine yönelik alan bilgisinin yeterli ve derin olmadığını göstermektedir. Emre öğretmen değişkenin farklı anlamları hakkında bilgi sahibi olmakla birlikte bu anlamlar arasında ilişkilendirmeyi sınırlı düzeyde yapmıştır. Ayrıca değişken kavramı için hatalı bir tanımlama (nesne benzetmesi) kullanmıştır. Bununla birlikte Emre öğretmenin bir sayı örüntüsünün kuralını bulmada değişken kullanımı hakkında bilgi sahibi olduğu, ancak değişken kullanılarak aritmetikten cebire genelleme fikri hakkında bilgisinin sınırlı olduğu görülmüştür. Cebirsel ifadeyi tanımlarken cebirsel ifadenin değişkenin alacağı farklı değerler için farklı değerler aldığı fikrine yer vermemiş, cebirsel ifadeyi harf ve işlem içermeye durumuna indirgeyerek tanımlamıştır. Cebirsel ifadelerde işlem sürecini açıklamada ise cebirsel ifadenin anlamını içermeyen hatalı tanımlamalar yapmıştır. Bu süreçte elma-armut yaklaşımı ile belinen terim ve bilinmeyenli terim ifadesini kullanmış, benzer ve benzer olmayan terimler fikrine yer vermemiştir.

Emre öğretmen eşitlikte, eşitliğin iki tarafının niceliksel olarak birbirine eşitliği hakkında bilgi sahibidir. Ancak bu durumun sembolik olarak gösterilmesine ilişkin bilgisi sınırlıdır. Bu durumla ilişkili olarak da eşitlik ve eşitliğin korunumunun öğretiminde araç olarak kullanılan sayı cümlelerinin kullanım amacına ilişkin bilgi sahibi değildir. Denklemi ise eşitlik ve işlem içermesi durumuna indirgeyerek tanımlamıştır. Denklemi cebirsel ifade ile ilişkilendirmiş, ancak denklem ile cebirsel ifadenin farkını, denklemin eşitlik içermeye durumu odaklı ele almıştır. Emre öğretmen denklem çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin açıklamaları ve denklem çözümünün terazi modeli ile gösterilmesine ilişkin bilgi sahibidir. Ancak terazi modeli kullanılarak yapılan bu işlemsel eylemlere ilişkin sembolik bir gösterim kullanmamıştır. Bu durum, Emre öğretmenin terazi modeli kullanarak

denklem çözümleri ile sembolik denklem çözümlerini ilişkisiz olarak görmesinden kaynaklanıyor olabilir.

Emre öğretmen değişken, cebirsel ifade ve denklem konusuna ilişkin alanyazındaki öğrenci zorlukları ve hataları hakkında bilgi sahibidir. Eşitlik konusundaki öğrenci hatalarına yönelik ise detaylı bir bilgiye sahip değildir. Öğrencilerin değişken konusunu anlamada yaşadıkları zorlukların sebebi olarak öğretim programındaki sıralamayı (cebire ve değişken kavramının öğretimine örüntüler ve ilişkiler konusu ile geçiş yapılması) ve öğrencilerin ilkökuldaki bilgi eksikliklerini göstermiştir. Ancak, bu bilgi eksikliklerinin öğrencilerin değişken kavramını öğrenmeleri üzerindeki etkisini net bir şekilde açıklamamıştır. Cebirsel ifadeler konusundaki öğrenci hatalarının nedeni olarak sadece işlemsel süreçleri açıklamış, ancak bu hatalı işlemlerin altında yatan olası öğrenci düşüncelerinden bahsetmemiştir. Öğrencilerin eşitlik ve denklem konusunda yaptıkları hataların ise eşitlik kavramını anlamalarından kaynaklandığını belirtmiş, ancak eşitlik kavramı ile ilgili olası düşüncelerinin bu durum üzerindeki etkisinden bahsetmemiştir. Emre öğretmen bu hatayı, öğrencilerin eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görmeleri ile ilgili olası yanılgılarla ilişkilendirmemiştir.

Emre öğretmenin alan bilgisi öğretim uygulamaları üzerinde etkili olmuştur. Örneğin, örüntüler ve ilişkiler konusunu değişken kavramının öğretimi için bir araç olarak görmediği için ders sırasındaki uygulamalarda  $n$  değişkeninin örüntüyü genelleme sürecinde değişen değerleri temsil etmekte kullanıldığı fikri geri planda kalmıştır. Bunun yanında değişken kavramının farklı anlamlarını içeren örnek ve materyal kullanmamıştır. Alan bilgisi ile ilişkili olarak, kullandığı örneklerde nesne benzetmesi yapmış ve bu kullanımının öğrencilerin kavramı somutlaştırmalarında yardımcı olduğunu belirtmiştir. Değişken kavramının öğretime geçişte ise direkt harf sembolü kullanmış, öğrencilerin önbilgileri ile ilişkilendirme yapabilecekleri bir gösterim (kutu, yıldız vb.) kullanmamıştır.

Emre öğretmen cebirsel ifadelere geçişte öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirme yapmalarına fırsat sağlayacak, cebirsel ifadenin anlamına yönelik örnekler kullanmamıştır. Cebirsel ifadelerin öğretimi için kullandığı sorularda cebirsel ifadenin anlamı geri planda kalmış, farklı işlemsel kuralları kullanmayı gerektirecek sorular kullanmıştır. Cebirsel ifadelerde işlem sürecini açıklarken elma-armut

yaklaşımını kullanmış, benzer ve benzer olmayan terimleri göz önünde bulundurmaya yardımcı olacak bir uygulama yapmamıştır.

Emre öğretmenin terazi modelinin eşitlik ve denklem kavramlarını nasıl temsil ettiği ile ilgili bilgi eksiklikleri bulunmaktadır. Terazi modeli kullanarak yapılan denklem çözümü ile sembol kullanarak yapılan denklem çözümünü birbirinden bağımsız görmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin bu ilişkiyi kavramalarına yardımcı olacak somut çözümler üretememiştir. Denklem çözümünü belirlediği kurallar üzerinden açıklamıştır. Denklem çözümünde, eşitliğin diğer tarafına geçirerek bilinmeyeni bulmanın eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması sonucu olduğuna ilişkin uygun bir ilişkilendirme yapmamıştır. Bu durum Emre öğretmenin bu ilişkiye yönelik alan bilgisine sahip, ancak bunu öğretim uygulamasına yansıtacak öğretim bilgisinin eksik olduğunu göstermektedir. Emre öğretmen öğretim sürecindeki uygulamalarda da denklem çözme sürecindeki işlem pratiğinin gelişmesini sağlayacak türde örnekler kullanmıştır. Kullandığı örnekleri öğrencilerin denklemler konusuna ilişkin olası düşünceleri ve zorlukları kapsamında çeşitlendirmemiştir.

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

### 5.1. Sonuçlar

Bu araştırmada üç ortaokul matematik öğretmenin değişken, cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem konularına ilişkin matematiksel bilgileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar her bir konu için ayrı başlıklar altında sunulmuştur.

#### 5.1.1. Öğretmenlerin Değişken Kavramının Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri

Bulgular, öğretmenlerin zihninde değişken kavramına ait net bir tanımın olmadığını göstermektedir. Öğretmenler değişkenin farklı anlamları hakkında bilgi sahibi olmalarına rağmen, bu farklı anlamları birbiri yerine kullanabilmişlerdir. Dolayısıyla birbiri ile çelişen tanımlar yapmışlardır. Örneğin, bir öğretmen değişkeni değişen değerler alabilen harf sembolleri olarak tanımlamış, ama aynı zamanda cebirsel ifade, denklem ve özdeşliklerde kullanılan harf sembollerinin hepsi için değişken ifadesini de kullanmıştır. Bu durumla ilişkili olarak, öğretmenlerin değişken kavramının farklı anlamları arasında net ve derin bir ilişkilendirme yapmadıkları görülmüştür. Yalnızca bir öğretmen değişkenleri belirtmek için kullanılan harf sembollerinin denklemlerde “sınırlı sayıda” değer alabilirken cebirsel ifadelerde “herhangi bir değeri” alabileceğinden bahsetmiştir. Ancak, diğer iki öğretmen cebirsel ifade ve denklemde değişkeni temsil etmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamları arasında bir ayırımdan bahsetmemiştir. Araştırmalar, öğretmenlerin değişken kavramının kullanımını gerektiren işlemleri kolaylıkla yapabildiklerini, ancak değişken kavramına ilişkin bilgi eksiklikleri bulunduğunu göstermektedir (Boz, 2007; Huang & Kulm, 2012; Welder & Simonsen; 2011). Bu sebeple öğretmenler, değişkenin farklı anlamlarını içeren kullanımlarını yorumlamada zorluk yaşamakta ve hata yapmaktadırlar. Öğretmenlerin değişken kavramının anlamı hakkındaki bilgi eksiklikleri ise öğretim uygulamalarını önemli ölçüde etkilemektedir (Asquith vd., 2007; Kieran, 1992).

Öğretmenlerin değişken kavramına ilişkin hatalı tanımlamalar yaptıkları da gözlenmiştir. İki öğretmen, aynı harf sembolü farklı denklemlerde farklı değerler alabildiği için değişken olarak tanımlanır diye düşünmektedir. Ayrıca, değişkeni sayısal bir değeri temsil eden harf sembolleri olarak tanımlamalarına rağmen değişken için kalem, elma ve ayakkabı gibi nesne benzetmeleri yapmışlardır. Bu

bulgu, değişkeni sayısal bir değer olarak değil, nesne olarak gördüklerini göstermektedir. Değişken kavramı için kullanılan nesne benzetmesi öğrencilerde de gözlemlenen en yaygın kavram yanılgılarından biridir (Akkaya & Durmuş, 2006; Asquith vd., 2007; Booth, 1988; Christo, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007; MacGregor & Stacey, 1997; Kuchemann, 1978; Perso, 1992; Russell, O'Dwyer & Miranda, 2009; Stacey & MacGregor, 1997). Pim (1987) ğretmenlerin kullandıkları bu benzetmelerin öğrencilerin değişkenlerin bir sayısal değeri değil, bir nesneyi temsil ettiği yönünde kavram yanılgısı geliştirmelerine yol açtığını belirtmiştir.

Öğretmenlerin değişken kavramını anlamlandırmalarının yzeyssel olduğunu gösteren bir diğer bulgu ise aritmetikten cebire geçiş sürecinde değişken kullanımını kural odaklı ele almalarıdır. Bu yaklaşım, sayı örüntüsüne ilişkin kural bulmayı değişken kullanılarak aritmetikten cebire yapılan genelleme süreci olarak anlamlandırmadıklarını göstermektedir (Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1992; Malisani & Spagnolo, 2009; Zazkis & Liljedahl, 2002; Warren, 1998). Hale ğretmen değişken kavramının ğretiminde, cebirsel ifade ve denklem konularını örüntüler ve ilişkiler konusuna göre daha uygun bir araç olarak görmektedir. Ayla ğretmen, ders sürecinde örüntüler ve ilişkiler konusunu bir cebir konusu olarak ele almamıştır. Emre ğretmen ise sayı örüntüsünün kuralı için "rntnn cebirsel ifadesi" tanımlamasını kullanmasına rağmen n'nin bir değişken olduğunu belirtmemiştir. Bu bulgular, öğretmenlerin örüntü kuralını bulma sürecinde yapılan eylemi bir genelleme süreci olarak anlamlandırmadıklarını göstermektedir. Bu durumla ilişkili olarak da öğretmenler, örüntüler ve ilişkiler konusunu değişken kavramının ğretimi için bir araç olarak görmemektedirler. rntleri genellemenin cebirsel düşünme ve değişken kavramının öğretimindeki nemi (Palabıyık & Akkuş, 2011) dşnldğnde, öğretmenlerin bu süreçte değişkenin kullanımına ilişkin bilgi eksikliklerinin bulunması bu kapsamda düzenlenecek ğretimi olumsuz yönde etkileyebilmektedir.

Öğretmenlerin değişken kavramına yönelik bilgi eksikliği, bu kavramın nasıl öğrenileceği ve bu süreçte öğrencilerin yaşayabilecekleri olası zorluklar ve bunların sebepleri hakkında bilgilerini de sınırlandırmaktadır. Bulgular, ğretmenlerin değişken kavramı ile ilgili tipik ğrenci hataları ve kavram yanılgıları (Akgün & zdemir, 2006; Booth, 1988; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg &

Stephens, 2005; Kuchemann, 1978; Perso, 1992; Stephens, 2005; ; Wagner, 1983; Weinberg, Stephens, McNeil, Krill & Knuth, 2004) hakkında bilgi sahibi olduklarını göstermektedir. Ancak, öğrencilerin hatalı anlamalarının ardında yatan olası sebeplere yönelik derinlemesine bir analiz yapamamışlardır. Örneğin, öğrencilerin, aynı harfle gösterilen değişkenlerin her zaman aynı sayısal değere eşit oldukları ve aynı harf sembolü ile gösterilen bir değişkenin aldığı değerin her zaman aynı değere eşit olacağı yönünde kavram yanılgısı geliştirdiklerinden bahsetmişlerdir. Benzer şekilde, öğrencilerin değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin sadece belirli değerler aldıklarını düşündüklerini ve bu sebeple de birçok hata yaptıklarını belirtmişlerdir. Yani,  $5x$  gibi bir cebirsel ifadede öğrencilerin  $x$  değişkeninin tek bir değer alabileceğini düşündüklerini ifade etmişlerdir. Dolayısıyla, " $x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde  $x$ 'in alabileceği değerler nelerdir?" gibi sorularda öğrencilerin değişkenlerin yerine belirli değerler vererek sonucun doğruluğunu kontrol ettiklerini ifade etmişlerdir. Ancak öğretmenler bu hataların nedenini öğrencilerin değişkenin "farklı değerler alabileceğini" düşünmemelerine bağlamışlardır. Öğretmenler değişken kavramının farklı anlamlarını bilmekle birlikte bu anlamlar arasında kendileri bir ilişkilendirme yapmamaktadırlar. Bu sebeple öğrencilerin bu tür hatalı düşüncelerinin sebebinin değişkenin farklı anlamlarını içeren durumlar arasında ayırım yapmamaları, farklı anlamlarının hatalı kullanımı ve genellenmesi olabileceğinden bahsetmemişlerdir. Değişkenin denklem ve cebirsel ifadelerde farklı anlamlar içermesinin öğrencilerde olası kavram yanılgısı oluşturabileceği ile ilgili net açıklamalarda bulunmamışlardır. Öğrenci hatalarının sebebi olarak, genel ve yüzeysel açıklamalarda bulunmuşlardır. Hataların sebebinin, öğrencilerin dört işlemle ilgili bilgi eksikliklerine, öğretim programındaki sıralamanın uygun olmamasına (cebirsel ifadeler konusuna örüntüler konusundan önce yer verilmesi gerektiği fikri) ve kendi öğretimlerindeki eksikliklere bağlamışlardır.

Öğretmenler örüntü kuralını bulma sürecini "değişken kullanılarak aritmetikten cebire yapılan bir genelleme" olarak görmemektedirler. Dolayısıyla değişken kavramına ve cebire geçişte örüntülerin kullanılmasının değişken kavramını anlamayı zorlaştırdığını düşünmekteydiler. Öğrencilerin değişken kavramını cebirsel ifadeler ve denklem konuları ile daha iyi öğrenebileceklerini ve bu sebeple "Örüntüler ve İlişkiler" konusunun "Cebirsel İfadeler" konusundan sonra işlenmesi



gerektiğini düşünmektedirler. Kutluk (2011) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu araştırmada da öğretmenlerin, sayı örüntülerini genelleme konusunun değişken ve cebir öğretimindeki öneminin farkında olmadıkları ve bu sebeple bu konunun cebir konularından sonra işlenmesi gerektiğini düşündükleri tespit edilmiştir. Kutluk (2011) bu durumun öğretmenlerin alan bilgisi eksikliğinden kaynaklandığını ve öğretim süreci planlamalarını da etkilediğini ifade etmiştir.

Öğretmenlerin değişken kavramına ilişkin alan ve öğrenci bilgileri öğretim sürecini düzenlemelerinde belirleyici olmuştur. Örüntüler ve ilişkiler konusunu değişken kavramının öğretiminde bir araç olarak görmedikleri için ders sırasındaki uygulamalarda  $n$  değişkeninin “örüntüyü genelleme sürecinde değişen değerleri temsil etmekte kullanıldığı fikri” geri planda kalmıştır. Bu durum, öğretmenlerin zihinlerinde örüntü kuralını bulmada yapılan eylemin bir genelleme olduğu fikrinin geri planda kalması ile de ilişkilidir. Bu sebeple değişken kavramına formal geçişi örüntüler ve ilişkiler konusu ile yapmamışlar, değişkeni temsil etmekte kullanılan harf sembollerine cebirsel ifadelerle geçişte yer vermişlerdir.

Öğretmenler, değişken kavramının cebirsel ifadeler ve denklem konusu ile daha iyi öğretilebileceğini düşünmelerine rağmen bu konuların işlendiği derslerde değişkenin farklı anlamlarına yönelik öğretim uygulamalarına sınırlı düzeyde yer vermişlerdir. Bu yaklaşımlarında, değişken kavramının farklı anlamları arasında bir ilişkilendirme yapmadan, değişkeni sadece “matematikte kullanılan harf sembolleri” odaklı tanımlamalarının etkili olduğu söylenebilir. Dolayısıyla derslerinde değişkenin farklı anlamları arasındaki ayrıma yönelik örnek ve materyal kullanmamışlardır.

Öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerini derinlemesine analiz edememeleri, değişken kavramının öğretimi için seçtikleri materyallerde de belirleyici olmuştur. Derslerinde öğrenci hata ve zorluklarını gidermeye yönelik örnekler sınırlı düzeyde yer vermişlerdir. Sadece “değişkenin sayısal bir değeri temsil ettiği” fikrini yansıtan örnekler üzerinde durmuşlardır. Değişkenin farklı anlamları arasında ilişkilendirme yapmayı sağlayacak örnekler kullanmamışlardır. Ayla öğretmen bir değişkenin diğer bir değişkene göre farklı değerler aldığı durumlar üzerine uygulamalar yapmış, ancak değişkenin farklı anlamları arasında bir karşılaştırmaya yer vermemiştir. Emre öğretmen ise değişkenin cebirsel ifade ve

denklemdaki anlamına ilişkin önemli fikirleri örtük olarak ele almıştır. Bununla birlikte öğretmenler değişken kavramını somutlaştırma düşüncesiyle hatalı benzetmeler (nesne örnekleri) kullanmışlardır. Değişken kavramının sayısal bir değer olarak belirtilmediği bu hatalı benzetmeler, öğretmenlerin alan bilgisindeki eksikliğin öğretim uygulamalarına bir yansımasıdır. Bu hatalı yaklaşım, öğrencilerin de değişken kavramına ilişkin yanlış anlayışlar kazanmalarına sebep olabilmektedir. Stephens (2005), öğrencilerin değişken kavramına ilişkin anlama geliştirmelerinde değişkenin anlamını sorgulayabilecekleri sembolik gösterimlerin (örneğin,  $g + b = 8$ ,  $b + g = 8$ ,  $b = 8 - g$ ,  $g = 8 - b$ ) kullanılmasının önemli olduğunu belirtmiştir.

Öğretmenler değişken kavramının öğretiminde öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirmeyi ise sınırlı düzeyde yapmışlardır. Bu durumun bir göstergesi, örüntüler ve ilişkiler konusunun öğretiminde örüntü kuralını bulmanın değişken kullanılarak aritmetikten cebire genelleme olduğu fikrinin geri planda kalmasıdır. Öğretim sürecinde bu fikre yer verilmemesi, öğrencilerin değişken kavramını aritmetik öğrenmeleri ile ilişki kurarak yapılandırmalarına engel oluşturmaktadır (McCrorry vd., 2010; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010; Zazkis & Liljedahl, 2002). Bu durumun bir diğer göstergesi ise öğretmenlerin, öğrencilerin aritmetik öğrenmeleri ile ilişki kurabilecekleri matematiksel gösterimleri (kutu, yıldız vb.) kullanmamaları veya uygun bir şekilde kullanamamalarıdır. Örneğin, Ayla öğretmen aritmetikte bilinmeyen temsil etmek için kullanılan kutu gösteriminden yola çıkarak, değişkeni temsil etmekte kullanılan harf sembollerine geçiş yapmıştır. Kutu gösterimi içeren bir denklem örneğine yer vermiş ve cebirsel ifadelerde bu gösterim yerine harf sembollerinin kullanılacağını ifade etmiştir. Bu uygulama Ayla öğretmenin değişken kavramına ilişkin sınırlı alan bilgisi ile ilişkili olup, harf sembollerinin bilinmeyen bir değeri temsil etme durumu ile değişen değerleri temsil etme durumu arasındaki ayrımın göz ardı edildiğini göstermektedir. Emre öğretmen ise değişken kavramının öğretimine geçişte ilkökulda kullanılan kutu sembolü gibi matematiksel gösterimlerin kullanılmasının gerekli olmadığını ve bu gösterimlerin öğrencilerin öğrenmelerini olumsuz olarak etkilediğini düşünmektedir. Araştırmalar değişken kavramının öğretiminde öğrencilerin cebir öncesi öğrenmeleri ile ilişki kurmanın önemli olduğuna dikkat çekmektedir. Değişken kavramının öğrencilerin ön bilgileri ile ilişki kurmadan öğretimi, kavramı anlamada

zorluk yaşamalarına ve kavram yanılgısı geliştirmelerine yol açmaktadır (Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran & Chalouh, 1992; Pillay, Wills & Boulton-Lewis, 1998; Warren, 2003).

Bununla birlikte öğretmenlerin, değişken kavramının öğretimi sırasında soru ve yönlendirmeleri ile oldukça aktif oldukları ve öğrencilerin öğretmenin sorularına cevap verme yoluyla tartışma sürecine dâhil oldukları görülmüştür. Öğretmenler bu süreçte öğrencilerin değişken kavramının matematiksel anlamını sorgulamalarını ve keşfetmelerini sağlayacak sorular sormamışlardır. Öğrenciler zorlandıklarında veya hatalı bir cevap verdiklerinde değişken kavramının anlamına ilişkin açıklamalar yapmamışlardır. Öğrenciler bir cebirsel ifade veya denklemde değişkeni tanımlamada zorlandıklarında sık sık “*Bilinmeyen nedir? Harftir.*” ve “*Değişken nedir? Harftir.*” gibi açıklamalar yapmışlardır.

### **5.1.2. Öğretmenlerin Cebirsel İfadeler Konusunun Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri**

Öğretmenlerin değişken kavramına ilişkin bilgileri cebirsel ifadeyi nasıl anlamlandırdıklarını da etkilemiştir. Öğretmenler değişken kavramının farklı anlamları arasında bir ilişkilendirme yapmamışlar ve dolayısıyla tanımlarında cebirsel ifadenin değişkenin alacağı farklı sayı değerleri için farklı değerler aldığı fikri geri planda kalmıştır. Değişkeni “harf sembolü” odaklı olarak tanımlamaları ile ilişkili olarak, cebirsel ifadeyi de “harf ve işlem” içermeye odaklı tanımlamışlardır. Hale öğretmen cebirsel ifadedeki harf sembollerinin farklı değerler alabileceğini belirtmekle birlikte harf sembolleri için “harfin olması ve harfin bilinmeyen bir sayıyı temsil etmesi” üzerinde durmuştur. Cebirsel ifade kavramını daha çok işlemsel açıdan ele almıştır. Bu yaklaşımın cebirsel ifadelerdeki harf sembollerinin denklemlerdeki anlamı ile ayrımı engellediği söylenebilir. Öğretmenler  $4x$  gibi bir cebirsel ifadeyi harf ve işlem içerdiği için cebirsel ifade olarak tanımlamışlar, “herhangi bir sayının 4 katı” anlamına yer vermemişlerdir. Ayla öğretmen, cebirsel ifadeyi değişken kavramından ziyade denklem kavramı ile ilişkilendirerek tanımlamış, harf sembollerinin bilinmeyen bir değeri temsil etme durumu ile değişken değerleri temsil etme durumu arasındaki ayrımı göz ardı etmiştir.

Öğretmenlerin değişken kavramı için yaptıkları nesne benzetmesi, cebirsel ifadelerde işlem yapma sürecini nasıl anlamlandırdıklarını da etkilemiştir. Cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini benzer ve benzer olmayan terimleri

(Tirosh, Even & Robinson, 1988) kullanarak değil, değişken kavramı için nesne benzetmesinin yapıldığı meyve-salata yaklaşımını (Booth, 1988; Pimm, 1987) kullanarak açıklamışlardır.  $2k + 3k$  gibi bir cebirsel ifadeyi 2 kalem ile 3 kalemin toplamı şeklinde göstermişlerdir. Dolayısıyla benzer olmayan terimleri farklı nesnelere benzetmiş ( $x$  için kalem ve  $y$  için defter), terimlerdeki bilinmeyenler farklı olduğu için toplanamayacağını belirtmişlerdir. Bu yaklaşım, öğretmenlerin yanlış bir anlayış üzerinden giderek cebirsel ifadelerde işlem sürecini hatalı bir şekilde açıkladıklarını göstermektedir. Araştırmadan elde edilen bu sonuç, Pomerantsev ve Korosteleva (2003) tarafından yapılan araştırmanın bulguları ile uyumludur. Bu araştırmada da öğretmen adaylarının, cebirsel ifadelerde işlemleri kolaylıkla yapabildikleri, ancak bu işlemlerin altında yatan anlamları açıklamakta zorlandıkları belirlenmiştir. Araştırmacı bu durumun öğretmen adaylarının değişkeni belirtmek için kullanılan harf sembollerinin farklı anlamlarına ilişkin bilgi eksikliklerinden kaynaklandığını belirtmiştir. Tirosh, Even ve Robinson (1988) ise öğretmenlerin cebirsel ifadelerde işlemleri açıklamada benzer ve benzer olmayan terimlerden bahsetmemelerinin ve meyve-salata yaklaşımını kullanmalarının, öğrencilerin farklı kavram yanılgıları (değişken kavramını bir nesne olarak düşünme, işlemleri yanlış genelleme) geliştirmelerine yol açtığını belirtmektedirler.

Öğretmenler, öğrencilerin cebirsel ifadeler ile ilişkili olası düşünceleri ve en yaygın hatalar hakkında bilgi sahibidirler. Öğrencilerin cebirsel ifadeden oluşan bir gösterimi cevap olarak kabul etmediklerini ve cebirsel ifadenin sayısal bir sonuca eşit olması gerektiğini (Booth, 1988; Chalouh & Herscovics, 1988; Kieran, 1981; Perso, 1992) düşündüklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerin cebirsel ifadede değişken yerine belirli değerler vererek sayısal bir sonuç bulmaya çalıştıklarını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin en çok yaptıkları hatalardan bir diğerinin ise cebirsel ifadelerde harf sembollerini ve işlemleri dikkate almadan terimleri birleştirmeleri (Booth, 1988; Collis, 1975; Davis, 1975; Matz, 1980; Stacey & MacGregor, 1997; Tirosh, Even & Robinson, 1988) olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin  $2a + 5b$  gibi bir cebirsel ifadeyi  $7ab$ 'ye eşitlediklerini örnek göstermişlerdir.

Öğretmenlerin cebirsel ifadeler konusuna ilişkin sınırlı alan bilgileri, öğrencilerin bahsedilen olası düşünceleri ve yaptıkları hataların sebepleri hakkında derinlemesine bir analiz yaparak net açıklamalarda bulunamamalarında etkili olmuştur. Örneğin, öğrencilerin cebirsel ifadeden oluşan bir gösterimi cevap olarak

kabul etmemelerinin sebebi olarak sadece cebirsel ifadenin sayısal bir sonuca eşit olması gerektiği yönündeki düşüncelerini göstermişlerdir. Bu düşüncenin sebebi olarak,  $3x + 2$  gibi bir cebirsel ifadeyi bir sonuç ( $x$ 'in 3 katından 2 fazla bir sayı) olarak değil, sadece bir süreç ( $x$ 'i 3 ile çarp 2 ekle) olarak görmelerinden (Booth, 1988) bahsetmişlerdir. Öğretmenlerin cebirsel ifadeyi işlemsel süreci ön plana çıkararak süreç odaklı tanımlamaları (cebirsel ifadeyi harf ve işlem olarak anlamlandırma ve  $2x$  gibi bir cebirsel ifadeyi “herhangi bir sayının 2 katı”nın matematiksel temsili olarak görmeme), öğrencilerin bu yöndeki düşüncelerinin nedenini tespit edememelerinde önemli bir etkidir. Örneğin, Emre öğretmen bir cebirsel ifadenin en sade halinin bir sonucu temsil ettiği fikrine yer vermiştir. Bu yaklaşım cebirsel ifadede süreç odaklı bir anlayışı ön planda tuttuğunu göstermektedir.

Öğrencilerin cebirsel ifadelerde yaşadıkları süreç-sonuç ikilemi, cebirsel ifadelerde terimleri birleştirme şeklinde yaptıkları hatanın da temel nedenidir. Dolayısıyla öğretmenlerin bu duruma ilişkin bilgileri sınırlıdır. Sadece Ayla öğretmen bu hatanın süreç-sonuç ikilemi ile ilişkili bir diğer sebebini ifade etmiştir. Öğrencilerin aritmetikteki öğrenmeleri ile ilişkili olarak,  $2a + 5b$  gibi bir cebirsel ifadede arada toplama işlemi olduğu için devam etmesi gerektiğini (Booth, 1988) düşündüklerini belirtmiştir. Hale ve Emre öğretmen ise bu hatayı sadece öğrencilerin matematiksel işlemlerin anlamını bilmeme gibi dört işlemle ilgili öğrenme eksikliklerine bağlamıştır. Tirosh, Even ve Robinson (1988) tarafından yapılan araştırma sonucunda da öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel ifadelerde terimleri birleştirmeye yönelik yaptıkları hataların farkında oldukları, ancak öğrencilerin bu hatalarının sebebine ilişkin derinlemesine bir açıklama yapamadıkları tespit edilmiştir. Araştırmacılar bu durumun öğretmenlerin öğrenci ihtiyaçlarına göre öğretimi düzenlemelerini önemli ölçüde etkilediğini belirtmişlerdir.

Öğretmenlerin cebirsel ifadeler konusuna ilişkin alan ve öğrenci bilgileri, öğretim sürecini düzenlemelerinde belirleyici olmuştur. Öğretmenler, Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (2009) yer almamasına rağmen öğrencilerin denklem konusunu öğrenmelerinde önemli olduğunu düşündükleri için derslerinde cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi konusuna yer vermişlerdir. Ayla öğretmen bu süreçte cebirsel ifadelerle benzer ve benzer olmayan terimler üzerinde durmamış, terim ve katsayı kavramlarını ise bu konudan ayrı olarak ele almıştır. Emre ve Hale

öğretmen de cebirsel ifadelerde işlem yaparken benzer ve benzer olmayan terimleri göz önünde bulundurmaya yardımcı olacak bir uygulama yapmamıştır. Bu bulgular, öğretmenlerin cebirsel ifadelerle işlem yaparken terimlerin neyi ifade ettiğinin ve birbirleri ile ilişkilerinin bilinmesi gerektiği fikrine öğretim uygulamalarında yer vermediklerini göstermektedir. Bu durum, öğretmenlerin sınırlı alan bilgileri ile ilişkilidir.

Öğretmenlerin cebirsel ifadeyi harf ve işlem içermeye odaklı anlamlandırmaları, kullandıkları öğretim materyallerinde de etkili olmuştur. Öğretmenler cebirsel ifadenin anlamına yönelik örnekler değil, cebirsel ifade oluşturmada farklı işlemleri (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) kullanmayı gerektiren örnekler kullanmışlardır. Chalouh ve Herscovics (1988) öğrencilerin cebirsel ifadeyi anlamlandırmaları için öğretim uygulamalarında cebirsel ifadenin anlamını içeren örnek, materyal ve gösterimlerin kullanılması gerektiği önermektedirler. Örneğin,  $3a$ ,  $5b$  ve  $4+3n$  gibi cebirsel ifadelerin matematiksel anlamı üzerine konuşulması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu uygulamaların, cebirsel ifadenin bir sonucu temsil ettiği fikrini öğrenmede de önemli olduğu ifade edilmiştir. Ancak bu çalışmaya katılan öğretmenler, değişken kavramı için kullandıkları nesne benzetmesini cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işleminde de kullanmışlardır. Cebirsel ifadelerde işlemlerin kavramsal anlamını yansıtmayan bu hatalı benzetme öğretmenlerin değişken kavramına ilişkin alan bilgisindeki eksikliğin olumsuz bir yansımasıdır.

Öğretmenlerin cebirsel ifadelerin öğretiminde sadece farklı işlemleri kullanmayı gerektiren örneklere yer vermelerinde, öğrenci bilgilerindeki eksiklik de etkili olmuştur. Öğrencilerin cebirsel ifadeler konusundaki hata ve zorluklarının temel nedeninin dört işlemle ilgili bilgi eksiklikleri olduğunu düşünmektedirler. Dolayısıyla, öğretim sürecinde farklı işlemleri kullanmayı gerektirecek örneklere yer verilmesinin, cebirsel ifadeler konusunu öğrenmede önemli görmektedirler. Öğrencilerin yaptıkları hataların sebebi olarak cebirsel ifadenin matematiksel anlamının geri planda kalmasını görmedikleri için bu kapsamda uygulamalar yapmamışlardır.

Öğretmenler cebirsel ifadeler konusuna geçişte öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirme yapmamışlardır. Bu yaklaşım, öğretmenlerin zihninde değişkenin cebirsel ifadelerde herhangi bir değer aldığı fikrinin geri planda kalması ile

ilişkilidir. Hale ve Emre öğretmen konuya geçişte direkt cebirsel ifadenin tanımını vermiştir. Derste sözel durumlar arasındaki ilişkiden yola çıkarak bir cebirsel ifade oluşturulmamıştır. Ayla öğretmen ise günlük yaşam durumlarına yer vermiş, ancak bu durumlara ilişkin cebirsel bir ifade oluşturulmamıştır. Duruma ilişkin cebirsel ifade açık sayı cümleleri ( $\blacksquare + 2 = 5$ ) kullanılarak tanımlanmıştır. Ayla öğretmenin cebirsel ifadeyi değişken kavramından ziyade denklem kavramı ile ilişkilendirmesi bu gösterimi kullanması üzerinde etkili olmuştur.

Öğretmenlerin cebirsel ifadeyi harf ve işlem içermeye odaklı tanımlamalarının sınıf içi tartışmalara da yön verdiği gözlenmiştir. Tartışma sürecinde öğrencilerin cebirsel ifadenin anlamına ilişkin ortaya çıkan ve çıkması muhtemel fikirleri geri planda kalmıştır. Örneğin, ders sürecindeki tartışmalarda zaman zaman öğrenciler bir cebirsel ifadedeki değişkene farklı değerler vererek cebirsel ifadenin aldığı değeri bulmak istemişlerdir. Ancak, öğrencilerin değişkenin cebirsel ifadedeki anlamını ve cebirsel ifadenin değişkenin aldığı sayı değerleri için farklı değerler aldığı fikrini öğrenmelerine olanak sağlayan bu düşünce üzerinde durulmamıştır. Bununla birlikte, öğrenciler cebirsel ifadeyi anlamada zorlandıkları veya hata yaptıkları zaman nesne benzetmesi yaparak işlemsel süreci açıklamışlardır. Öğrencilerin cebirsel ifadenin anlamını kavramalarını sağlayacak farklı gösterimlere yer vermemişlerdir.

### **5.1.3. Öğretmenlerin Eşitlik ve Denklem Konusunun Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri**

Bulgular, öğretmenlerin zihnindeki eşitlik kavramı tanımının yüzeysel olduğunu göstermektedir. Öğretmenler, eşitlik kavramını terazinin denge durumu ve eşitliğin korunumunu terazi kefelerinin dengelenmesi ile ilişkilendirmişler, ancak bu ilişkiyi sadece sözel olarak açıklamışlardır. Eşitlik ve eşitliğin korunumunu açıklayan matematiksel bir gösterim (örneğin,  $5 = 5$ ,  $2 + 3 = 4 + 1$ ) kullanmamışlardır. Bu durum, öğretmenlerin eşitlik kavramının ilişkisel anlamına yönelik bilgilerinin derin olmadığını göstermektedir. Bu yaklaşım ile ilişkili olarak, eşitlik ve denklem konusunun öğretimine geçişte sayı cümlelerinin (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Kieran, 1981; Knuth vd., 2008; Stephens vd., 2013; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010) kullanım amacına ilişkin de bilgi sahibi olmadıkları tespit edilmiştir. Öğretmenler, sayı cümlelerini eşitlik ve denklem konusunun öğretimi için bir araç olarak görmemektedirler.  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  sayı

cümlesinin bir dersteki kullanım amacını “bilinmeyi bulma ve soruyu görselleştirme” olarak belirtmişlerdir. Araştırmada elde edilen bu sonuç, Stephens (2006) tarafından gerçekleştirilen araştırmanın sonuçları ile benzerlik göstermektedir. Bu araştırmada da öğretmen adaylarının eşitlik kavramının ilişkisel anlamı hakkında bilgi sahibi olmadıkları belirlenmiştir. Bu yönde bilgi sahibi olanların ise eşitlik kavramının ilişkisel anlamını bir düşünme yolu olarak değil, bir çözüm yolu olarak gördükleri tespit edilmiştir.

Öğretmenler denklemi işlemsel bir kavram olarak anlamlandırmaktadırlar. Denklemi “eşitlik ve harf (bilinmeyen)” içeren bir kavram olarak tanımladıkları için denklemin matematiksel anlamı geri planda kalmıştır. Denklemde eşitliği sadece “eşitlik sembolü” olarak ele almışlardır. Eşitliğin iki tarafının değerine yönelik bir ilişki kurmamışlardır. Bu yaklaşım, öğretmenlerin eşitlik kavramının ilişkisel anlamı hakkındaki sınırlı bilgileri ile ilişkilidir. Bununla birlikte öğretmenler, denklemin cebirsel ifadeden farkını eşitlik içermesi olarak belirtmişlerdir. Denklemde bilinmeyen eşitliği sağlayan değerler aldığı fikrine yer vermemişlerdir. Denklem kavramının anlamsal yönünü yansıtmayan bu yaklaşım, değişken kavramına ilişkin alan bilgisindeki eksikliğin olumsuz bir yansımasıdır. Atorps (2003) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da öğretmenlerin denklem kavramını daha çok işlemsel süreçler üzerinden açıkladıkları, denklem kavramının anlamına yönelik kavramsal açıklamalarda bulunamadıkları belirlenmiştir.

Öğretmenler denklem çözümünde yapılan matematiksel işlemlerin açıklamalarına ilişkin ise bilgi sahibidirler. Denklemde eşitliğin diğer tarafına geçirerek bilinmeyi bulma yolunun, eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması sonucu olduğunu belirtmişlerdir. Bunun yanında öğretmenlerin denklem çözümünün terazi modeli ile gösterilmesine yönelik de bilgi sahibi oldukları, ancak terazi modeli kullanılarak yapılan işlemsel eylemlere ilişkin sembolik bir gösterim kullanmadıkları belirlenmiştir. Bu durum öğretmenlerin terazi modeli kullanarak bilinmeyi bulma ile sembolik denklem çözümünü ilişkisiz olarak gördüklerinin bir göstergesi olabilir. Ayrıca bu bulgular, eşitlik ve eşitliğin korunumunu açıklamada sembolik bir gösterim kullanılmaları ile paralellik göstermektedir.

Öğretmenlerin öğrencilerin eşitlik konusundaki olası düşünceleri ve yaptıkları hatalar hakkındaki bilgisi sınırlıdır. Sadece Ayla öğretmen, öğrencilerin eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görebildikleri (Barody & Ginsburg, 1983;



Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Knuth vd., 2005; Knuth vd., 2008; Slavit, 1999; Yaman, Toluk & Olkun, 2003) hakkında bilgi sahibidir. Ayla öğretmen  $8 + 4 = \blacksquare + 5$  sorusunda öğrencilerin kutunun değerini 12 bulma yanılığında bahsetmiştir. Bu hatanın sebebi olarak, öğrencilerin eşittir işaretinden sonra bir cevap gelmesi gerektiği yönündeki düşüncelerini göstermiş; ancak eşitlik durumunun ilişkisel anlamını göz önünde bulundurarak derinlemesine bir analiz yapmamıştır. Hale ve Emre öğretmen ise öğrencilerin eşitlik kavramı ile ilgili yaptıkları hataları ön bilgi eksiklikleri ile işlem hatasına bağlamıştır. Bu durumun öğretmenlerin eşitlik kavramının ilişkisel anlamına yönelik sınırlı alan bilgileri ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Öğretmenler öğrencilerin denklem ve denklem çözümüne ilişkin olası düşünceleri ve yaşadıkları zorluklar hakkında bilgi sahibidirler. Öğrencilerin  $5 = 2x + 1$  gibi bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında olan denklemlerin yanlış olduğunu düşündüklerini (Kieran, 1981) belirtmişlerdir. Denklem çözümünde ise öğrencilerin terimleri eşitliğin diğer tarafına geçirirken terimin işaretini belirleme ve eşitliğin her iki tarafını aynı sayıya bölme işlemleri sırasında hata yaptıklarını belirtmişlerdir. Bunun yanında öğretmenler, öğrencilerin denklem çözümünde işlemleri yan yana devam ettirme eğilimleri hakkında da bilgi sahibidir. Bu hataların sebebine ilişkin ise sadece Ayla öğretmen bilgi sahibidir. Öğrencilerin denklemde eşitliğin her iki tarafının sayısal olarak birbirine eşit olduğunu kavrayamadıkları için bu hatayı yaptıklarını belirtmiştir. Hale ve Emre öğretmen ise öğrencilerin bu hatalarını ön bilgi eksikliklerine ve dikkatsizliklerine bağlamışlardır. Bu hatayı, eşittir işaretini sonuca götüren bir sembol olarak görmeleri ile ilgili olası yanılığlarla ilişkilendirmemiştir. Bu durumun öğretmenlerin eşitlik kavramına ilişkin sınırlı alan bilgileri ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Öğretmenlerin eşitlik ve denklem konusuna ilişkin alan ve öğrenci bilgileri öğretim sürecini düzenlemeye yönelik kararlarını etkilemiştir. Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği derslerde denklem kurmadan çok denklem çözümüne ilişkin öğretim uygulamalarına yer vermişlerdir. Denklem kavramını işlemsel açıdan ele aldıkları için denklem çözümünün denklem kurmaya göre daha önemli olduğunu düşünmektedirler. Bu durumun öğretmenlerin alan bilgisindeki eksikliğin öğretim uygulamalarına olumsuz bir yansıması olduğu görülmektedir.

Öğretmenlerin eşitlik ve denklem konusuna ilişkin alan bilgileri materyal kullanımları üzerinde de etkili olmuştur. Öğretmenlerin terazi modelinin eşitlik ve denklem kavramlarını nasıl temsil ettiği ile ilgili bilgi eksiklikleri bulunmaktadır ve bu sebeple bu kavramların terazi modeli kullanılarak öğretimine ilişkin somut çözümler üretememişlerdir. Terazi modelini kullanarak bilinmeyi bulmayı sadece sözel olarak açıklamışlar ve bu süreçte model kullanımını sembolik gösterimle ilişkilendirmemişlerdir. Bu durum, eşitlik ve denklem kavramının öğretiminde sayı cümlelerini bir araç olarak görmemeleri ile de ilişkilidir. Öğretmenlerin bu süreçte sayı cümlelerini kullanmaması, eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde öğrencilerin aritmetik öğrenmeleri ile ilişkilendirme yapmadıklarını da göstermektedir.

Öğretmenler, denklemin diğer tarafına geçirme yolunun denklemin her iki tarafına aynı işlemin uygulanması sonucunda olduğunu bilmelerine rağmen, öğretim sürecinde bu yollar arasında ilişki kurmamışlardır. Ayla ve Hale öğretmen bu yollardan birbirinden bağımsız bahsetmişlerdir. Bu durum, öğretmenlerin bu ilişkiyi öğretim uygulamasına yansıtacak öğretim bilgilerinin eksik olduğunu göstermektedir. Emre öğretmen ise bu ilişkiyi denklemin diğer tarafına geçirme yoluyla denklem çözümünü anlattıktan sonra kısa olarak açıklamıştır. Eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanmasının öğrencilerin öğrenmelerini zorlaştırdığını düşündüğü için bu şekilde bir uygulama yapmıştır. Denklem çözümünde yapılan işlemlerin altında yatan anlamları ve nedenleri keşfetmeye yönelik değil, sonuç bulma odaklı bir yaklaşım sergilemiştir. Emre öğretmenin bu yaklaşımında da öğretim bilgisindeki eksikliğin rol oynadığı görülmektedir. Öğretmenlerin sergiledikleri bu yaklaşım denklem çözümü sırasında sınıf tartışmalarında da belirleyici olmuştur. Öğretmenler bu süreçte neden ve nasıl gibi açıklama gerektiren sorulardan ziyade sonuç odaklı sorular sormuşlardır. Bu durumla ilişkili olarak da tartışma sürecinde öğrencilerin denklem çözümünü anlamlandırmalarına fırsat sağlayacak fikirlerinin geri planda kaldığı gözlenmiştir.

Öğretmenler, denklemin yapısal özelliğini kavramayı ve denklem çözme sürecindeki matematiksel fikirleri keşfetmeyi sağlayacak örnekler değil, bilinmeyi bulma sürecindeki algoritmayı öğrenmeyi sağlayacak örnekler kullanmışlardır. Soru seçiminde belirttikleri öğrenci zorluklarını dikkate almamışlardır. Örneğin, öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin sağ tarafında yer alan denklemlerin yanlış

olduğunu düşündüklerini belirtmelerine rağmen derslerinde çoğunlukla bilinmeyen eşitliğin sol tarafında yer aldığı denklem örneklerine yer vermişlerdir. Öğrencilerin denklem çözümünde terimleri eşitliğin diğer tarafına geçirmede hata yaptıklarını ve bu hataları gidermek için çok soru çözmeleri gerektiğini düşünmektedirler. Bu bulgular, öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerine ilişkin sınırlı bilgilerinden dolayı öğretime yönelik etkili çözümler üretemediklerini göstermektedir. Araştırmalarda, eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde öğrencilerin ön bilgilerinin ve öğrenme süreçlerinin temel alındığı öğretimsel görevlerin belirlenmesinin önemi vurgulanmaktadır (Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1992; Knuth vd., 2006; Linchevski & Livneh, 1999; Stephens, Knuth, Blanton, Isler, Gardiner & Marum, 2013; Warren, 2003).

## **5.2. Öneriler**

Bu araştırmada öğretmenlerin cebir öğretime ilişkin bilgileri incelenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular, öğretmenlerin cebir öğretime ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerinde önemli eksiklikler olduğunu göstermektedir. Bu kapsamda araştırmancının bu bölümünde, araştırmancının bulgularından yola çıkılarak araştırmaya ve uygulamaya yönelik öneriler sunulmuştur.

### **5.2.1. Araştırmaya Yönelik Öneriler**

Bu araştırmada öğretmenlerin cebir öğretime ilişkin matematiksel bilgileri, Ball ve meslektaşlarının (2008) öğretmen bilgisini matematik alanı için özelleştirdikleri *Matematik Öğretimi İçin Gerekli Bilgi Alanları Modeli* temel alınarak incelenmiştir. Bu model, matematik alanına yönelik genel bir öğretmen bilgi modelidir. Öğretmenlerin cebir öğrenme alanına yönelik bilgisi için özelleştirilen bir kuramsal çerçeve olmaması, öğretmenlerin cebir öğretime ilişkin matematiksel bilgilerinin incelenmesini zorlaştırmıştır. Ayrıca bu bilginin sınıf içi uygulamalar kapsamında incelenmiş olması, özellikle alan bilgisinin genel alan ve özel alan bilgisi boyutlarının birlikte alan bilgisi kapsamında incelenmesi gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Bununla birlikte öğretim süreci kapsamında diğer bilgi boyutlarının da net bir şekilde ayrılmadığı görülmüştür. Bu sebeple, öğretim süreci bağlamında alan ve pedagojik alan bilgisi alt boyutlarının birbirleri ile ilişkili olarak tanımlandığı cebir öğrenme alanına yönelik bir kuramsal çerçevenin geliştirilmesi önerilmektedir. Bu kapsamda yapılacak araştırmalar, öğretmenlerin cebir öğretim bilgisinin bağlamsal olarak anlaşılması açısından gerekli görülmektedir.

Bu araştırmada öğretmenlerin cebir öğretimi bilgisi öğretim süreci esas alınarak ve öğretmenlerle ders sonrasında yapılan görüşmeler yoluyla incelenmiştir. Ders sırasında ise gözlem notları oluşturulmuştur. Gözlem notu oluşturma sürecinde sınıf içi durumlar göz önünde bulundurulduğunda zaman zaman zorluklar yaşanmıştır. Ders gözlemlerinde, incelenen konu alanına yönelik hazırlanan gözlem formlarının kullanılmasının gözlem sürecinin daha verimli gerçekleşmesini destekleyeceği düşünülmektedir. Bu sebeple farklı matematik konu alanlarında, sınıf içi uygulamalar kapsamında öğretmen bilgisinin incelenmesine olanak sağlayacak gözlem formlarının geliştirilmesi önerilmektedir.

Bu araştırmada, öğretim sürecinin yapılandırılmasında öğretmenlerin konuya ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerinin yanı sıra matematik öğrenme ve öğretimine yönelik inançlarının da etkili olduğu görülmüştür. Örneğin, bir öğretmen denklem çözümünde yapılan işlemlerin matematiksel açıklamaları hakkında bilgi sahibi olmasına rağmen öğretim sürecinde bu duruma sınırlı düzeyde yer vermiştir. Bu yaklaşımın, öğretmenin bazı kavram ve konulara yönelik işlemsel sürecin öğrenilmesinin daha önemli olduğu yönündeki inançları ile ilişkili olduğu görülmüştür. Bu sebeple alan ve pedagojik alan bilgisinin farklı boyutlarında, farklı bilgi ve beceri düzeylerine sahip öğretmenlerle çalışılarak, sınıf içi öğretim uygulamalarında öğretmen inançların rolünün incelenmesi önerilmektedir.

### **5.2.2. Uygulamaya Yönelik Öneriler**

Araştırmaya katılan öğretmenler gönüllülük esasını temel alınarak araştırmaya dâhil edilmiştir. Araştırmanın öğretmenlerin vakit ayırmasını gerekli kılan bir süreç olduğu düşünüldüğünde araştırmaya katılmaya istekli öğretmen bulma noktasında zorluk yaşanmıştır. Öğretmenler, bu tür araştırmalara katılmaya gönüllü kılınmaları amacıyla teşvik edilebilirler. Bununla birlikte, öğretmenlerin sınıf ortamında gerçekleştirilen bu tür çalışmaların önemi ve gerekliliği hakkında bilgilendirilecekleri hizmet içi uygulamalar düzenlenebilir.

Araştırmadan elde edilen bulgular, öğretmenlerin temel cebir kavramlarını (değişken, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem) anlamlandırmalarının yüzeysel olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte öğretmenler bu kavramlar arasındaki ilişkilendirmeyi işlemsel açıdan ele almışlardır. Öğretmenlerin alan bilgilerindeki bu eksikliğin öğrenci hatalarını ve bu hataların nedenlerini belirlemelerinde önemli bir etken olduğu görülmüştür. Öğretmenler alan ve pedagojik alan bilgisindeki bu

eksiklikten dolayı öğretime yönelik somut çözümler üretememişlerdir. Bu sonuçlar, öğretmenlerin bu bilgileri kazanmalarını sağlayacak hizmet öncesi uygulamaların gerekliliğine işaret etmektedir.

Öğretmenlerin öğretecekleri konuya ilişkin iyi düzeyde alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olmaları gerekmektedir (Even, 1993; Lee, 2011). Araştırma sonuçları göz önünde bulundurulduğunda, ilköğretim matematik öğretmenliği programında yer alan derslerde, öğretmen adaylarının temel cebir kavramlarını (değişken, cebirsel ifade, eşitlik ve denklem) anlamlarını derinlemesine sorgulama yapmalarını sağlayacak fırsatlar sağlanmalıdır. Bu kapsamda programdaki ilgili ders içeriklerinin, öğretmen adaylarının bu kavramları sadece ders kitaplarındaki şekilde tanımlamadan ziyade kavramlar arasında ilişki kurarak anlamlandırmalarını sağlayacak şekilde düzenlenmesi önemlidir.

Öğretmenler en yaygın öğrenci hataları hakkında bilgi sahibi olmakla birlikte alan bilgilerindeki eksiklikten dolayı bu öğrenci hatalarının altında yatan olası öğrenci düşünceleri hakkında derinlemesine analiz yapamamışlardır. İlköğretim matematik öğretmenliği programındaki derslerde temel cebir kavramlarının ve bu kavramlara yönelik öğrenci düşünme süreçlerinin bütüncül olarak ele alındığı uygulamalara yer verilebilir. Örneğin, sınıf içi örnek öğretim durumlarına yer verilerek öğretmen adaylarının bu durumun tüm boyutlarını bir arada analiz etmesi sağlanabilir. Bu sayede öğretmen adayları öğretime yönelik somut çözümler üretebilirler. Bununla birlikte öğretmenlerin alan ve alana ilişkin öğrenci bilgilerinin öğretim sürecini düzenlemede belirleyici olduğu ve bu bilgilerini öğretim sürecini düzenlemede etkili olarak kullanamadıkları da gözlenmiştir. Özellikle öğrencileri kavramlara yönelik sorgulamaya yöneltecek stratejiler kullanmamışlardır. Ayrıca, öğretim sürecinde öğrencilerin kavrama yönelik düşünme süreçleri geri planda kalmıştır. Bu kapsamda ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki dersler öğretmen adaylarının bu becerileri kazanmalarını sağlayacak şekilde yapılandırılması önemlidir. Dersler öğretmen adaylarının önemli fikirleri arkadaşlarıyla tartışarak ve sorgulama yaparak öğrenmelerini sağlayacak şekilde yapılandırılabilir. Bu sayede öğretmen adayları bu yaklaşımı benimseyerek meslek yaşamlarında da uygulayabilirler.

## KAYNAKÇA

- Adams, P. (2006). Exploring social constructivism: Theories and practicalities. *Education, 34*(3), 243-257.
- Agarwal, S. (2006). *The nature of pre-service secondary mathematics teachers' knowledge of mathematics for teaching of functions*. Unpublished Doctoral Dissertation. State University of New York, Buffalo, United States.
- Akgün, L., & Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The Teaching of Mathematics, 9*(1), 45-52.
- Akkan, Y., Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 43*, 1-13.
- Akkaya, R. ve Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 31*, 1-12.
- An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school mathematics teachers in China and U.S.. *Journal of Mathematics Teachers Education, 7*, 145-172.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.
- Attorps, I. (2003). Teachers' images of the 'equation'concept. *European Research in Mathematics Education, 3*.
- Attorps, I. (2009). Secondary school teacher's conceptions about algebra teaching. *Colección Digital Eudoxus, 1*(1).
- Baki, M. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının bölme işlemi ile ilgili matematiksel bilgileri ve öğretimsel açıklamaları. *Eğitim ve Bilim, 167*(38), 301-311.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*(4), 449-446.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mevborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Eds.). *Handbook of research on teaching (4th ed.)* (pp: 433-456). New York: Macmillan.

- Ball, D. B., & Rowan, B. (2004). Introduction: Measuring Instruction. *The Elementary School Journal*, 105(1), 3-10.
- Ball, D. B., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Baroody, A.J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, 84(2), 198-212.
- Baş, S., Erbaş, A. K., & Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, 36 (159), 41-55.
- Bayazıt, İ. ve Aksoy, Y. (2010). Öğretmenlerin fonksiyon kavramı ve öğretimine ilişkin pedagojik görüşleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 9(3), 697-723.
- Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Ben-Peretz, M. (2011). Teacher knowledge: What is it? How do we uncover it? What are its implications for schooling?. *Teaching and Teacher Education*, 27(1), 3-9.
- Black, D. J. W. (2007). The relationship of teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge in algebra, and changes in both types of knowledge as a professional development, Unpublished Doctoral Dissertation. Auburn University, Auburn.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: VA.
- Boz. N. (2007). Öğretmen adaylarının değişkenlerin kullanımı ile ilgili bilgileri. *Sosyal Bilimler Araştırmaları Dergisi*, 1-18.
- Brown, C. A., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Eds.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York: Macmillan.
- Calderhead, J. (1996). Teachers: beliefs and knowledge. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.). *Handbook of educational psychology* (pp. 709-725). New York: Macmillan.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 385-401.
- Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebra reasoning. In F. Lester (Eds.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 699-705) Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Caswell, L. M. (2009). *The algebra content knowledge of beginning teachers in California*. Unpublished Doctoral Dissertation. Capella University, United States.
- Chalouh, L., & Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In a.f. Coxford Shulte (Eds.). *The ideas of Algebra K-12*. Reston: Virginia: NCTM.
- Chazan, D. Larriva, C., & D. Sandow. (1999). *What kind of mathematical knowledge supports teaching for 'conceptual understanding'? Preservice teachers and the solving of equations*. Paper presented at the Twenty-third Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Haifa, Israel.
- Chen, X. (2010). *A study of prospective mathematics teachers' knowledge development and beliefs changes for teaching fraction division*. Unpublished Doctoral Dissertation. Texas A&M University, United States.
- Chestnut-Andrews, A. (2007). *Pedagogical content knowledge and scaffolds: Measuring teacher knowledge of equivalent fractions in a didactic setting*. Unpublished Doctoral Dissertation. The City University of New York, United States.
- Chick, H. L., Pham, T., & Baker, M. (2006). Probing teachers' pedagogical content knowledge: Lessons from case of the subtraction algorithm. *Identities Cultures and Learning Spaces*, 139-146.
- Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction*, 283-297.
- Clement, J., Narode, R., & Rosnick, P. (1981). Intuitive misconceptions in algebra as a source of math anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 3(4), 36-45.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3-4), 175-190.
- Collis, K.F. (1975). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian Viewpoint*. Australian Council for Educational Research: Melbourne
- Davis, R. B. (1975). Cognitive process involved in simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, 1(3), 7-35.



- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). London: Sage.
- Dede, Y. (2004). Değişken kavramı ve öğretimdeki zorlukların belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 4(1), 48-56.
- Dede, Y. (2005). Değişken kavramı üzerine. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(1), 139-148.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180-185.
- Dede, Y. ve Peker, M. (2004). Öğrencilerin cebire yönelik hata ve yanlış anlamaları: Matematik öğretmen adaylarının tahmin becerileri ve çözüm önerileri. XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı. İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Malatya. 6-9 Temmuz 2004.
- Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H.C., Schilling, S. G., & Zapf, D. (2008). "Mathematical knowledge for teaching": Adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 171-197.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2000). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.). *Handbook of qualitative reseacrh* (pp. 1-28). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Ding, M. (2007). *Knowing mathematics for teaching: A case study of teacher responses to students errors and difficulties in teaching equivalent fractions*. Unpublished Doctoral Dissertation. Texas A&M University, United States.
- Dooren, V. D., Verschaffel, L. & Onghena, P (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- Erbaş, A. K. (2004). *Teachers' knowledge of student thinking and their instructional practices in algebra*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Georgia, Athens.
- Even, R. (1993). Subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the functions concepts. *Journal for Reseachr in Mathematics Education*, 24, 94-116.
- Falkner, K.P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Childrens understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 231-236.
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Eds.). *Handbook of reseacrh on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). New York: Macmillan.

- Fennema, E., & Sowder, J., & Carpenter, T. P. (1999). Creating classrooms that promote understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 185-199). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş*. (Çev. Ersoy, A., & Yalçinoğlu, P.). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Gökbulut, Y. (2010). *Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusundaki pedagojik alan bilgileri*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Grossman, P. L. (1995). Teachers' knowledge. In L. W. Anderson (Eds.). *International encyclopedia of teaching and teacher education* (pp. 20-24). Tarrytown, NY: Permagon.
- Haciomeroglu, G. (2006). *Prospective secondary teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of concept of function*. Unpublished Doctoral Dissertation. The Florida State University, United States.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). *A cognitive gap between arithmetic and algebra*. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal of Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. K. Lester (Eds.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Howell, H. (2012). *Characterizing mathematical knowledge for secondary teaching: A case from high school algebra*. Unpublished Doctoral Dissertation. New York University, United States.
- Huang, R., & Kulm, G. (2012). Prospective middle grade mathematics teachers' knowledge of algebra teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 417-430.

- Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions*. Unpublished Doctoral Dissertation. Middle East Technical University, Ankara, Turkey
- Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95-143.
- Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 166-176.
- Kaput, J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Paper presented at the Algebra Symposium, Washington, DC, May, 1998.
- Karahasan, B. (2010). *Preservice secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge of composite and inverse functions*. Unpublished Doctoral Dissertation. Middle East Technical University, Ankara, Turkey.
- Kılcan, S. A. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerde bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (2007). What do students struggle with when first introduced to algebra symbols? Brief. Retrieved February, 22, 2008.
- Kieran, C., & Chalouh, L. (1992). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In T. D. Owens (Eds.). *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 179-198). New York: Macmillan.
- Kim, B. (2001). Social constructivism. *Emerging Perspectives on Learning, Teaching and Technology*, 1(1), 16, 55-61.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N.M., Weinberg, A., & Stephens, A.C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N.M., Weinberg, A., & Stephens, A.C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514-519.

- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.
- Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.
- Kutluk, B. (2011). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlükleri bilgilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Lee, J. E. (2006). Teaching algebraic expressions to young students. The three day journey of "a+2". *School Science and Mathematics*, 106(2), 99-104.
- Lee, J. E. (2011). *A study of pre-kindergarten teachers' mathematical knowledge for teaching*. Unpublished Doctoral Dissertation. The University of Texas, Austin, United States.
- Lee, K. (2007). *Teacher's knowledge of middle school students' mathematical thinking in algebra word problem solving*. Unpublished Doctoral Dissertation. Oregon State University, United States.
- Li, X. (2007). *An investigation of secondary school algebra teachers' mathematical knowledge for teaching algebraic equation solving*. Unpublished Doctoral Dissertation. The University of Texas, Austin, United States.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
- MacGregor, M., & Price, K. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 449–467.
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–16. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1–19.
- Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.). *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 95-132). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Malisani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of variable. *Educational Studies Mathematics*, 71, 19-41.
- Manizade, A. (2006). *Designing measures for assessing teachers' pedagogical content knowledge of geometry and measurement at the middle school level*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Virginia, United States.

- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 1, 93–166.
- MEB, (2009). *İlköğretim matematik dersi (6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı ve kılavuzu*. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.
- MEB, (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.
- McCrorry, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 584-615.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: Jossey- Bass.
- National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Neubrand, M., Seago, N., Agudelo-Valderma, C., DeBlois, L., & Leikin, R.(2009). The balance of teacher knowledge: Mathematics and pedagogy. In R. Even, & D. L. Ball (Eds.). *ICMI Study 15 Volume: The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 211-225). Springer US.
- Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology*, 49, 345–375.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Perso, T. (1992). *Overcoming misconceptions in algebra: using diagnostic (conflict) teaching*. Subiaco, Western Australia: Mathematical Association of Western Australia.
- Peterson, P. L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher*, 17(5), 5-14.
- Philipp, R. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, 85, 557-561.
- Pillay, H., Wilss, L., & Boulton-Lewis, G. (1998). Sequential development of algebra knowledge: A cognitive analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 10(2), 87-102.
- Pimm, D. (1987). 'Pupils' written mathematical records'. In D. Pimm (Eds.). *Speaking mathematically*. Routledge & Kegan Paul, London & New York.

- Pomerantsev, L., & Korosteleva, O. (2003). Do prospective elementary and middle school teachers understand the structure of algebraic expressions? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 1-10.
- Prawat, R. S., & Floden, R. E. (1994). Philosophical perspectives on constructivist views of learning. *Educational Psychologist*, 29(1), 37-48.
- Prediger, S. (2010). How to develop mathematics for teaching and for understanding the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 73-93.
- Punch, K. F. (2005). *Sosyal araştırmalara giriş: Nicel ve nitel yaklaşımlar*. (Çev. Bayrak, D., Arslan, H. B., & Akyüz, Z.). Ankara: Siyasal Kitabevi.
- Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, 8(2), 377-392.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables?. *Mathematics Teacher*, 74(6), 418-420.
- Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching. In A. Gagatsis (Eds.), *Proceedings of the Fourth Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69-81), Nicosia, Cyprus: Cyprus Mathematical Society.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003). The knowledge quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 97-102.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Rowland, T., & Turner, F. (2007). Developing and using the 'Knowledge Quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, 10(1), 107-124.
- Russell, M., O'Dwyer, L. M., & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. *Behavior research methods*, 41(2), 414-424.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-21.
- Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 251-274.

- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.
- Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159-180.
- Stephens, A. C. (2004). *Preservice elementary teachers conceptions of algebra and algebraic equivalence*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Wisconsin, Madison.
- Stephens, A. C. (2005). Developing students understanding of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(2), 96-100.
- Stephens, A. C. (2006.) Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 249-278.
- Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers?. *Journal of Mathematical Behavior*, 27, 33-47.
- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 173-182.
- Stump, S. L., & Bishop, J. (2002). Preservice elementary and middle school teachers' conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D.Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant, & K. Nooney (Eds.). *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 1903–1914). Columbus, OH: ERIC.
- Thwaites, A., Jared, L. and Rowland, T. (2011) Analysing secondary mathematics teaching with the Knowledge Quartet. *Research in Mathematics Education*, 13(2), 227-8
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of childrens' conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.
- Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 51-64.
- Turner-Bisset, R. (1999). The knowledge of bases of the expert teacher. *British Educational Research Journal*, 25(1), 39-55.
- Turner, F., & Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In T. Rowland & K.

- Ruthven (Eds.). *Mathematical knowledge in teaching* (pp.195-212). New York: Springer.
- Turnuklu, E. B., & Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: Pre-service primary mathematics teachers perspectives in Turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 1, 1-13.
- Umay, A. (2007). *Eski arkadaşımız okul matematiğinin yeni yüzü*. Ankara: Aydan WEB Tesisleri.
- Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses variables. In edited by B. Moses (Eds.). *Allgebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 7-13). Reston, Va: Natinoal Council of Teachers Mathematics.
- Vance, J. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics*, 4.
- Yaman, H., Toluk, Z. ve Olkun, S. (2003). İlköğretim öğrencileri eşit işaretini nasıl algılamaktadırlar?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 142-151.
- Yin, R. K. (2009). *Case study reseacrh: Design and methods*. Los Angeles, Calif: Sage Publications.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, P., Çiftçi, Ş. K., Şengil-Akar, Ş. ve Sezer, E. (2015). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hatalar. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 18-31.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7th ed.). New Jersey: Pearson Education.
- Wagner, S. (1983). What are these things called variables. *Mathematics Teacher*, 76(7), 474-479.
- Walkoe, J. (2010). *Seeing algebraic thinking in the classroom: a study of teachers' conceptualizations of algebra*. Paper presented at the Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences-Volume 1 (pp. 1055-1062). International Society of the Learning Sciences, June.
- Warren, E. (1998). Students' understanding of the concept of a variable. In. C. Kanes, M. Goos & E. Warren, (Eds), *Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Research Group of Australasia* (pp. 661-668). Griffith University Print, Brisbane, Australia: MERGA



- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.
- Weinberg, A., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Krill, D. E. & Knuth, E. J. (2004). *Students' initial and developing conceptions of variables*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, San Diedo, CA.
- Welder, R. M. (2007). *Preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge of prerequisite algebra concepts*. Unpublished Doctoral Dissertation. Montana State University, Montana
- Welder, R. M., & Simonsen, L. M. (2011). Elementary teachers' mathematical knowledge for teaching prerequisite algebra concepts. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1.
- Wilmot, E. M. (2008). *An investigation into the profile of Ghanaian high school mathematics teachers' knowledge for teaching algebra and its relationship with student performance*. Unpublished Doctoral Dissertation. Michigian State University, United States.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402.

## **EKLER DİZİNİ**

## EK 1: ETİK KURUL ONAY BİLDİRİMİ



T.C.  
**HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ**  
Genel Sekreterlik

Yazı İşleri Müdürlüğü

Sayı : 88600825 / 433-977

Konu :


13 Mart 2014

### EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: 26.02.2014 tarih ve 407 sayılı yazınızı

Enstitünüz İlköğretim Anabilim Dalı doktora programı öğrencisi **Pınar AKDAL**'ın **Yrd. Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR** danışmanlığında yürüttüğü "**Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebir Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri**" başlıklı doktora tez çalışması Üniversitemiz Senatosu Etik Komisyonunun **04.03.2014** tarihinde yapmış olduğu toplantıda incelenmiş olup, etik açıdan uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini saygılarımla rica ederim.

  
Prof. Dr. Ü. Şebnem HARPUR  
Rektör a.  
Rektör Yardımcısı

Ek: Tutanak

## EK 2: KAYSERİ İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ ARAŞTIRMA İZİNİ



T.C.  
KAYSERİ VALİLİĞİ  
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 94025929/605/275477

20/01/2014

Konu: Anket İzni

ERCIYES ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE  
(Personel Dairesi Başkanlığı)

İlgi : 13/01/2014 tarih ve 551 sayılı yazınız.

Üniversiteniz Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi Pınar AKDAL'ın İlimiz

Ortaokullarının 5,6,7 ve 8. sınıf Öğretmenlerine yönelik "Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebir Öğretimine İlişkin Matematik Bilgileri" konulu Anketçalışmasını yapmasında bir sakıncanın olmadığı Anket Değerlendirme Komisyonu tarafından tespit edilmiş olup, eğitim-öğretimi aksatmadan Okul Müdürlerinin gözetiminde ve sorumluluğunda araştırmanın yapılması, Okul Müdürlüğü tarafından araştırma sonucunun Müdürlüğümüze bilgi vermesi kaydıyla uygun görüldüğü ile ilgili Valilik Mamandan alınan 20/01/2014 tarihli 262980 sayılı onay ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi arz ederim.

Bilal YILMAZ  
İl Millî Eğitim Müdürü

Ekler:

1- Onay Örneği (1 sayfa)

Ölçme ve Değerlendirme İzni  
Aşılma Tarihi:  
20/01/14  
SÖZGÜM HOCAN  
MİLLİ

Bu belge, 5070 sayılı Elektronik İmza Kanununun 5 inci maddesi gereğince güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. Evrak teyidi <http://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 9939-5b8b-3c29-8c6e-dc6a kodu ile yapılabilir.

Hacı Saki Mah. Osman Kavuncu Bul.  
No:40/B 38010 Kocasinan/KAYSERİ  
Elektronik Ağı: [www.kayseri.meb.gov.tr](http://www.kayseri.meb.gov.tr)  
e-posta: [arac38@meb.gov.tr](mailto:arac38@meb.gov.tr)

Ayrıntılı bilgi için: N.TAŞ (Şef)

Tel: (0 352) 330 11 25(160)  
Faks: (0 352) 336 76 04

### EK 3: GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

**Araştırmanın Adı:** Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebir Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri

**Araştırmacıların Adı:**

Arş. Gör. Pınar YILDIZ \*

Yrd. Doç. Dr. Elif YETKİN ÖZDEMİR (Danışman) \*\*

**Adresler:**

\* Erciyes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Kat:1, No: 118, Kayseri

\*\* Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Beytepe, Ankara

**E-mail adresi:**

\* pinar\_akdal@hotmail.com

\*\* elif.yetkin.ozdemir@gmail.com

**Telefonu:**

\* 0506 585 45 29

\*\* 0536 928 91 74

Sayın Matematik Öğretmeni,

Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Bölümü doktora öğrencisiyim. Doktora tez çalışması kapsamında ve Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR danışmanlığında “Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebir Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri” başlıklı bir araştırma yürütmekteyim. Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmenlerinin cebir öğretimine yönelik alan bilgileri ile pedagojik alan bilgilerini ve bu bilgilerini öğretim sürecinde nasıl kullandığı incelenecektir. Destekleriniz için sizi araştırmamıza katılmaya davet ediyoruz. Kararınızı vermeden önce sizi araştırma hakkında kısaca bilgilendirmek istiyoruz.

Bu çalışmaya katılmayı kabul ettiğiniz takdirde bir sınıf kapsamında yürüttüğünüz matematik dersleri bir dönem boyunca toplam 2 hafta (10 ders saati) gözlemlenecektir. Süreç boyunca, sizinle gözlemler öncesinde ve sonrasında olmak üzere görüşmeler yapılacaktır. Görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt edilecektir. Bu süreçte sizler tarafından hazırlanacak/kullanılacak olan ders materyalleri ve dokümanlar (ders planları, çalışma kâğıtları, materyaller, ders gözlem formları, tartışma notları, çalışma notları vb.) görüşme ve gözlemden elde edilen bulguları desteklemek amacıyla kullanılacaktır.

Bu araştırma bilimsel bir amaçla yapılmaktadır ve katılımcı bilgilerinin gizliliği esas tutulmaktadır. Video ve ses kayıtlarında isminiz yerine bir numara veya takma isim kullanılacaktır. Görüntü ve ses kayıtları araştırma projemiz süresince kilitli bir dolapta muhafaza edilip araştırma sona erdiğinde imha edilecektir.

### EK 3: GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU (DEVAMI)

Bu araştırmaya katılmak tamamen gönüllülük esasına dayalıdır. Katıldığınız takdirde çalışmanın herhangi bir aşamasında herhangi bir sebep göstermeksizin çekilme hakkına da sahiptiriz. Araştırma hakkında ek bilgi almak istersiniz lütfen yukarıdaki telefon numaralarından bizimle irtibata geçiniz.

Bu bilgiler ışığında bu araştırma projesine katılmayı kabul ediyorsanız, lütfen bu formu imzalayıp kapalı bir zarf içerisinde bize geri yollayın.

Ben, ..... (isim), yukarıdaki metni okudum ve katılmam istenen çalışmanın kapsamını ve amacını, gönüllü olarak üzerime düşen sorumlulukları tamamen anladım. Çalışma hakkında soru sorma imkânı buldum. Bu çalışmayı istediğim zaman ve herhangi bir neden belirtmek zorunda kalmadan bırakabileceğimi ve bıraktığım takdirde herhangi bir olumsuzluk ile karşılaşmayacağımı anladım.

Bu koşullarda söz konusu araştırmaya kendi isteğimle, hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın katılmayı kabul ediyorum.

Formun bir örneğini aldım / almak istemiyorum (bu durumda araştırmacı bu kopyayı saklar).

**Katılımcının Adı-Soyadı** : .....  
**İmzası** : .....  
**Adresi** (Varsa Telefon No, Faks No) : .

.....  
.....

**Tarih** (Gün/Ay/Yıl) : ..... /..... /.....

**Araştırmacının Adı-Soyadı** : .....  
**İmzası** : .....  
**Tarih** (Gün/Ay/Yıl) : ..... /..... /.....

## EK 4: VELİ ONAY FORMU

Değerli Veli,

“Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Cebir Öğretimine İlişkin Matematiksel Bilgileri” başlıklı araştırmamız kapsamında, velisi olduğunuz öğrencinin öğrenim gördüğü sınıfta video kaydı yapılacaktır. Aşağıdaki tabloda, araştırma ile ilgili kısa bilgiler yer almaktadır. Bu bilgileri okuduktan sonra velisi olduğunuz öğrencinin çalışmaya katılımını onaylıyorsanız adınızı ve soyadınızı yazarak imzalamanız beklenmektedir.

Arş. Gör. Pınar YILDIZ

<b>Araştırmanın Amacı ve Kapsamı</b>	Araştırmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin öğretime yönelik bilgilerini incelemektir. Bu kapsamda velisi olduğunuz öğrencinin öğrenim gördüğü sınıftaki matematik dersleri gözlemlenecektir.
<b>Araştırma Süresi</b>	2 hafta (10 ders saati)
<b>Veri Toplama Araçları</b>	Sınıf içi video kayıtları ve derste öğrenciler tarafından üretilecek olan dokümanlar
<b>Veriler Nerede Kullanılacak</b>	Araştırmada elde edilecek olan veriler doktora tez çalışması kapsamında kullanılacaktır.
<b>Gizlilik ve Etik</b>	Elde edilen veriler gizlilik ve etik ilkelerine uygun şekilde sadece araştırmacı tarafından incelenecek ve saklanacaktır. Öğrencilerin gerçek kimlikleri kesinlikle gizli tutulacaktır.

Yukarıda yer alan açıklamaları okudum ve aşağıda kimlik bilgileri yer alan öğrencimin araştırmaya gönüllü katılımını onaylıyorum.

**Öğrencinin,**

Adı Soyadı:

**Velinin,**

Adı - Soyadı:

İmza:

Tarih:

## EK 5: ÖN GÖRÜŞME FORMU

### Yönerge ve Giriş

Bu görüşmemizin amacı bir matematik öğretmeni olarak sizi daha yakından tanımak ve mesleğe ilişkin duygu ve düşünceleriniz hakkında bilgi sahibi olmaktır. Bu amaçlarla size bazı sorular yönelteceğim. Size yöneltecek olduğum bu soruların doğru veya yanlış cevabı bulunmamaktadır. Bu nedenle görüşme boyunca kendi duygu ve düşüncelerinizi rahatlıkla ifade edebilirsiniz. Görüşme boyunca söyledikleriniz tümüyle gizli kalacaktır. Araştırma raporu yazılırken isminiz gizli tutulacaktır. Görüşmenin yaklaşık olarak otuz dakika süreceğini tahmin ediyorum. Görüşmeye başlamadan önce belirtmek istediğiniz herhangi bir düşünce veya soru var mı? İzninizle görüşmeye başlamak istiyorum.

### Görüşme Soruları

#### 1. Kendinizden biraz bahseder misiniz?

- Hangi üniversiteden mezun oldunuz?
- Kaç senedir öğretmenlik yapıyorsunuz?
- Hangi okullarda görev yaptınız? Bu okullardan kısaca bahseder misiniz?/Bu okulları kısaca karşılaştırır mısınız? (*öğrenci-veli profili, idareci-meslektaş (zümre) profili, çalışma ortamı (matematik sınıfı-materyal)*)
- Şu an görev yaptığınız okulun bir matematik öğretmeni olarak size sağladığı imkânlar ve sınırlılıklar nelerdir?
- Görev yaptığınız okullarda hangi sınıf seviyelerini okuttunuz? Bu sınıf seviyelerinde kaç şubede derse giriyorsunuz? Şuan kaçınıcı sınıfları okutuyorsunuz?

#### 2. Matematik öğretmeni olmaya nasıl karar verdiniz?

- Bu mesleğin sizin için özel bir anlamı var mı? (*Evet*) Açıklar mısınız?

#### 3. Mesleğinizden memnun musunuz? (*Evet-Hayır*) Niçin?

- Hangi şartlarda mesleğinizden daha memnun olurdunuz?
- Meslekten ayrılmayı düşündüğünüz anlar oldu mu? (*Evet*) Anlatır mısınız?



4. Sizce bir matematik öğretmeni ne gibi özelliklere-yeterliklere (bilgi-beceri) sahip olmalı? İyi bir matematik öğretmenin diğer branştaki öğretmenlerden (örneğin Fen Bilgisi veya Türkçe) farklı olarak sahip olması gereken özelliklere-yeterlikler var mıdır? *(Evet)* Bu özellikler-yeterlikler nelerdir?
- Bahsettiğiniz özelliklerden/yeterliklerden birinin diğerinden daha önemli olduğunu düşünüyor musunuz? *(Evet)* Neden?
5. Bir matematik öğretmeni olarak güçlü olduğunuzu düşündüğünüz yönleriniz nelerdir?
- Bu bahsettiğiniz noktaların ders sürecinizi nasıl etkilediğini düşünüyorsunuz?
  - Üniversitede almış olduğunuz eğitimin bahsettiğiniz noktalardaki yeterliliğinize katkısı sizce nedir?
6. Peki, bir matematik öğretmeni olarak geliştirmeyi düşündüğünüz yönleriniz var mı? *(Evet)* Nelerdir?
- Bu bahsettiğiniz noktaların ders sürecinizi nasıl etkilediğini düşünüyorsunuz?
  - Bu yönlerinizi geliştirmek için girişimde bulunuyor musunuz? *(Evet)* Neler yapıyorsunuz? *(Hayır)* Niçin?
7. Sizce matematik nasıl öğrenilir/öğrenilmelidir? Niçin?
- Siz matematiği bu şekilde mi öğrendiniz?
  - Peki, şu anda siz kendi öğrencilerinizin matematiği nasıl öğrenmelerini istiyorsunuz/bekliyorsunuz?
8. Sizce matematik nasıl öğretilir/öğretilmelidir? Niçin?
- Siz matematiği bu şekilde mi öğretiyorsunuz?
  - Kendi öğretmen bilgilerinizde veya becerilerinizde geliştirmeye, farklılaştırmaya çalıştığınız/istediğiniz şeyler var mı?
9. Sizce matematikte iyi olmak ne anlama gelmektedir?
- Matematikte iyi olan bir öğrencinin özelliklerini nasıl tanımlarsınız?

## EK 6: GÖRÜŞME FORMU I

**Yönerge ve Giriş:** Bu görüşmemizin amacı bir matematik öğretmeni olarak sizi daha yakından tanımak ve cebir öğrenme alanına yönelik duygu ve düşünceleriniz hakkında bilgi sahibi olmaktır. Bu amaçlarla size bazı sorular yönelteceğim. Size yöneltecek olduğum bu soruların doğru veya yanlış cevabı bulunmamaktadır. Bu nedenle görüşme boyunca kendi duygu ve düşüncelerinizi rahatlıkla ifade edebilirsiniz. Görüşme boyunca söyledikleriniz tümüyle gizli kalacaktır. Araştırma raporu yazılırken isminiz gizli tutulacaktır. Görüşmenin yaklaşık 40 dakika süreceğini tahmin ediyorum. Görüşmeye başlamadan önce belirtmek istediğiniz herhangi bir düşünce veya soru var mı? İzinizle görüşmeye başlamak istiyorum.

### Görüşme Soruları

1. Ortaokuldaki öğrencilik yıllarınızı düşündüğünüzde cebirle ilgili neler hatırlıyorsunuz?
  - Cebirle uğraşmayı sever miydiniz? (*Evet-Hayır*) Neden? Cebir öğrenmek sizin için kolay/zor muydu? Neden?
  - Öğrencilik yıllarınızda cebir nasıl öğretiliyordu? Şimdi nasıl öğretiliyor? Sizce cebir öğretimi yaklaşımında bir fark var mı? (*Evet-Hayır*) Nasıl? Açıklar mısınız?
2. Cebirin ortaokulda önemli bir öğrenme alanı olduğu kabul edilir. Siz bu düşünceye katılıyor musunuz? (*Evet*) Matematik içerisinde cebir/cebir konuları neden önemlidir? (*Hayır*) Neden önemli değildir? (*Alternatif: Ortaokul öğrencilerinin cebir bilmesi neden gereklidir?*)
3. Cebir altıncı sınıf öğrencilerinin ilk kez karşılaştıkları bir konu, yeni bir öğrenme alanı. Sizce ortaokul 6. sınıf seviyesinde cebir öğretimine başlamak uygun mudur? (*Evet-Hayır*) Neden?
4. Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenebilmesi için neleri bilmesi/yapabiliyor olması gerekir? Hazırbulunuşlukları nasıl olmalıdır? Bunun sebepleri nelerdir?
  - İlkokuldaki hangi konuların/kavramların öğrenilmesi öğrencilerin cebir öğrenmeleri için gereklidir? Niçin?
  - İlkokul kazanımları arasında doğrudan cebirle ilgili kazanımlar yok ama öğrencileri cebir öğrenmeye hazırlayacak neler yapılabilir?

5. Öğrencilerinizin altıncı sınıf seviyesinde cebir konularına yönelik hangi bilgi ve becerileri kazanmalarını amaçlıyorsunuz?
6. Altıncı sınıflarda cebir öğrenme alanına örüntüler ve ilişkiler konusu ile geçiş yapılmaktadır. Bu konuya ilişkin kazanım ise *“sayı örüntülerini modelleyerek bu örüntülerdeki ilişkiyi harflerle ifade eder”* şeklindedir.
- Cebire örüntüler konusu ile geçiş yapılması hakkında ne düşünüyorsunuz? Cebire geçişte bu konunun tercih edilme sebebi sizce ne olabilir?
  - Öğrenciler bu konuyu öğrenirken cebirin hangi kavramlarını öğrenmiş oluyorlar?
  - Bu kazanım ile öğrencilere kazandırılması hedeflenen cebirsel bilgi ve beceriler nelerdir?
7. Sizce cebir öğretmek kolay mı/zor mu? Cebir öğretiminin hangi yönlerden kolay veya zor olduğunu düşünüyorsunuz?
- Cebir konuları içinde öğretmekte (en çok) zorlandığınız konular nelerdir? Neden bu konuları öğretmekte zorlandığınızı düşünüyorsunuz?
  - Peki, cebir konularının öğretimini diğer matematik konularının öğretimiyle karşılaştırmanızı istesem neler söylersiniz?
8. Cebirsel ifadeler konusunu anlamak (matematik öğrenme süreci açısından) neden önemlidir?
- Öğrencilerin cebirsel ifadeler konusunu anlayabilmesi için hangi matematik konularını ve kavramlarını bilmeleri gerekir? Ön bilgileri neler olmalıdır?
  - Sizce öğrenciler cebirsel ifadeler konusunu en iyi nasıl anlayabilirler/öğrenebilirler?
9. Cebirin temel elemanlarından birinin değişken (harfli ifadeler) kavramını anlamak olduğunu biliyoruz. Sizce değişken kavramını anlamak (matematik öğrenme süreci açısından) neden önemlidir?
- Öğrenciler değişken kavramı ile ilk ne zaman/nasıl karşılaşıyorlar?
  - Öğrencileri değişken kavramını anlayabilmeleri için neleri bilmesi gerekir? Ön bilgileri neler olmalıdır?
  - Sizce öğrenciler değişken kavramını en iyi nasıl anlayabilirler/öğrenebilirler?

**10.** Cebiri anlamada eşitlik ve denklem konusunu anlamamanın önemli olduğunu biliyoruz. Sizce eşitlik ve denklem konusunu anlamak (matematik öğrenme süreci açısından) neden önemlidir?

- Öğrenciler eşitlik/denklem konusu ile ilk ne zaman/nasıl tanışıyorlar?
- Öğrencilerin eşitlik ve denklem konusunu anlayabilmeleri için neleri bilmesi gerekir? Ön bilgileri neler olmalıdır?
- Sizce öğrenciler eşitlik ve denklem konusunu en iyi nasıl anlayabilirler/öğrenebilirler?

**11.** Sizce cebir (en iyi) nasıl öğrenilir/öğrenilmelidir? Niçin?

- Peki, şu anda siz kendi öğrencilerinizin cebiri nasıl öğrenmelerini bekliyorsunuz/istiyorsunuz? Niçin?

**12.** Sizce cebir (en iyi) nasıl öğretilir/öğretilmelidir? Niçin?

- Cebiri bu şekilde mi öğretiyorsunuz?

**13.** Cebiri iyi olan öğrencilerinizi düşünmenizi istiyorum. Cebirde iyi olmak sizce ne anlama gelir/ne demektir?

- Cebirde iyi olan öğrenciler matematiksel bilgi ve beceriler açısından ne gibi özelliklere sahiptir?

## EK 7: GÖRÜŞME FORMU II

**Yönerge ve Giriş:** Bu görüşmemizin amacı bir matematik öğretmeni olarak sizi daha yakından tanımak ve cebir öğretimine yönelik düşünceleriniz hakkında bilgi sahibi olmaktır. Bu amaçlarla size bazı örnek durumlar (olaylar) sunacağım ve bunlarla ilgili sorular yönelteceğim. Görüşme boyunca söyledikleriniz tümüyle gizli kalacaktır. Araştırma raporu yazılırken isminiz gizli tutulacaktır. Görüşmenin yaklaşık 50 dakika süreceğini tahmin ediyorum. Görüşmeye başlamadan önce belirtmek istediğiniz herhangi bir düşünce veya soru var mı? İzninizle görüşmeye başlamak istiyorum.

### Görüşme Soruları

1. 6. sınıf öğrencilerinden Merve, Can, Ayşe ve Burak'ın cebirsal ifadelere ilişkin tanımları aşağıdaki şekildedir.

**Merve:** Cebirsal ifade bilinmeyen bir sayıyı belirtmek için kullanılır.

**Can:** Cebirsal ifade bilinmeyeni bulma tekniğidir.

**Ayşe:** Cebirsal ifade bilinmeyen bir şeydir.

**Burak:** Cebirsal ifade bilinmeyen terim olan bir problemdir.

- Öğrencilerin yaptıkları tanımları nasıl değerlendirirsiniz?
- Tanımlarıyla ilgili öğrencilere nasıl dönüt verirsiniz?

### Kaynak:

Yıldız, P., Çiftçi, Ş. K., Şengil-Akar, Ş., & Sezer, E. (2015). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsal ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hatalar. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 18-31.

2. Cebirsal ifadeler konusunun işlendiği bir derste öğrencilerinize aşağıdaki gibi bir soru yönelttiğinizi varsayalım.

**“3x ifadesine 4 eklersem ne olur?”**

Bu soruya sınıfınızdaki Çınar isimli bir öğrencinin aşağıdaki gibi bir cevap verdiğini farz edelim.

**“3x ifadesine 4 eklersem 7x bulurum.”**

- a. Çınar'ın cevabını nasıl değerlendirirsiniz?
  - b. Çınar neden böyle bir cevap vermiş olabilir?
  - c. Çınar'ın verdiği cevaba yönelik kendisine nasıl bir dönüt verirdiniz?
3. Cebirsel ifadeler konusunun işlendiği bir derste aşağıda verilen soru için Ezgi öğretmen ve öğrencisi Yunus arasında geçen diyalog şu şekildedir.



Verilen şeklin bazı bölümleri gizlenmiştir.

Her bir kenarının uzunluğu “5 br” ve kenar sayısı “n” olan bu şeklin çevresinin uzunluğu nedir?

**Ezgi Öğretmen:** Yunus bu soru için ne düşünüyorsun?

**Yunus:** Kenar uzunluğu ile kenar sayısını çarpmamız gerekir öğretmenim.

**Ezgi Öğretmen:** Evet...

**Yunus:** 5 ile n'yi çarpmamız gerekir.

**Ezgi Öğretmen:** Güzel.

**Yunus:** O zaman  $5n$  yazabiliriz ama siz cevabı istiyorsunuz.

**Ezgi Öğretmen:**  $5n$ 'yi cevap olarak kabul edemez miyiz?

**Yunus:** Hayır! n'yi bilmedikçe cevabı bulamayız.

- a. Yunus'un açıklamalarını nasıl değerlendirirsiniz?
- b. Yunus neden böyle bir açıklama yapmış olabilir?
- c. Ezgi öğretmenin Yunus'a nasıl bir açıklama yapması uygun olur? (Ezgi öğretmenin yerinde olsaydınız Yunus'a nasıl bir açıklama yapardınız?)

Kaynak:

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: VA.

4. 6. sınıf matematik öğretmeni Mehmet öğretmen öğrencilerine aşağıdaki soruları sormuştur.

**n bir doğal sayı ise  $3n$  ve  $n + 6$  ifadelerinden hangisi daha büyüktür?**

**a, b'den küçük bir doğal sayı ve  $a + b = 10$  ise  $a = ?$**

- Mehmet öğretmen bu soruları hangi amaçla sormuş olabilir?
- Öğrencilerin bu soruları cevaplarken yapabilecekleri hatalar neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hatalarının nedenleri neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hataları/kavram yanılgıları sizce nasıl düzeltilebilir?

Kaynak:

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N.M., Weinberg, A., & Stephens, A.C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514-519.

Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.

5. 6. sınıf matematik öğretmeni Büşra öğretmen öğrencilerine aşağıdaki soruyu sormuştur.

**$x + 2 = 2 + x$  eşitliğinde x'in alabileceği değerler nelerdir?**

- Büşra öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir?
- Öğrencilerin bu soruyu cevaplarken yapabilecekleri hatalar neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hatalarının nedenleri neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hataları/kavram yanılgıları sizce nasıl düzeltilebilir?

Kaynak:

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: VA.

6. 6. sınıf matematik öğretmeni Hakan öğretmen öğrencilerine aşağıdaki soruyu sormuştur.

**$x + y + z = x + p + z$  eşitliği doğru mudur? Nedenini açıklayınız.**

- Hakan öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir?
- Öğrencilerin bu soruyu cevaplarken yapabilecekleri hatalar neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hatalarının nedenleri neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hataları/kavram yanılgıları sizce nasıl düzeltilebilir?

Kaynak:

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: VA.

7. Altıncı sınıf matematik öğretmeni Elif öğretmen eşitlik ve denklem konusuna geçişte öğrencilerine aşağıdaki soruyu sormuştur.

**$8 + 4 = \blacksquare + 5$  ifadesinde  $\blacksquare$  yerine hangi sayı gelmelidir?**

- Elif öğretmen bu soruyu hangi amaçla sormuş olabilir?
- Öğrencilerin bu soruyu cevaplarken yapabilecekleri hatalar neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hatalarının nedenleri neler olabilir?
- Öğrencilerin bu hataları/kavram yanılgıları sizce nasıl düzeltilebilir?

Kaynak:

Falkner, K.P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Childrens understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 231-236.



8. Eşitlik ve denklem konusunun işlendiği bir derste öğrencilerinize aşağıdaki gibi bir soru yönelttiğinizi varsayalım.

$$3x + 4 = 16 \text{ denklemini çözüünüz.}$$

Bu soruyu sınıfınızdaki Sıla isimli bir öğrencinin aşağıdaki gibi çözdüğünü farz edelim.

$$3x + 4 = 16 = 3x = 16 - 4 = 12 = 3x = x = 4$$

- a. Sıla'nın çözümünü nasıl değerlendirirsiniz?  
b. Çözümü ile ilgili Sıla'ya nasıl bir açıklama yaparsınız?

## EK 8: DOKÜMANLAR

Cebirsel ifade; 7. ve 8. dersler,  
En az bir bilinmeyen ve işleviciler ifade  
Cebirsel ifadeler

Harfler: Bilinmeyen, değişken

Eskiden  $\boxed{a} + 3 = 5$ ,  $\boxed{a} = ?$

↓  
a, x, b, y ⇒ terimler

Azsenin parçasının 2 farkı  
Elnelon 3 ekliği  
Armutların 3 katı.

$$5 - 4 = 4 : 2 = 2$$

$$5 = 2x + 1 = 2$$
$$15 = 3y + 3 = 9$$
$$2x + 4 = 8x = 2$$

## EK 8: DOKÜMANLAR (DEVAMI)

Cebirsel ifadeler  $4+3 \rightarrow$

Cebirsel ifade: İçinde en az bir bilinmeyen bulunan ve işlem içeren ifadelerdir.  $x+5$   $2x+3+3$

Cebirsel ifade kullanılan harfler sayıları temsil eder ve bunlara değişken ya da bilinmeyen de.

Değişken: Cebirsel ifadelerde kullanılan harflerdir.  $x+5$   $2x+3x$

Terim: Bir cebirsel ifadeye bir sayı ile bir ya da birden fazla değişkenin çarpımına denir.

Not: Denklemlerde işlem yaparken eşitliğin sağ taraf ya da sol tarafına sayılar ya da bilinmeyenler işaret değiştirerek geçerler.

Örnek =  $3x - 4 = 2x + 6$

Bilinmeyen = Bilinen

$3x - 2x = +4 + 6$

$x = 10$

## EK 9: ORJİNALLİK RAPORU

Originality GradeMark PeerMark

ORTAOKUL  
PINAR YILDIZ TARAFINDAN

turnitin

%8  
BENZER  
0 ÜZERİNDEN

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN  
CEBİR ÖĞRETİMİNE İLİŞKİN BİLGİLERİ:  
ÇOKLU DURUM ÇALIŞMASI

MIDDLE SCHOOL <sup>83</sup> MATHEMATICS TEACHERS'  
KNOWLEDGE FOR TEACHING ALGEBRA:  
A MULTIPLE CASE STUDY.

Pinar YILDIZ

<sup>2</sup> Hacettepe Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin  
İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı İçin Öngördüğü  
Doktora Tezi  
olarak hazırlanmıştır.

Eşleşmeyi Gözden Geçir

1	72 İnternet kaynağı	%1
2	TechKnowledge Turke... Öğrenci ödevi	%1
3	www.willamette.edu İnternet kaynağı	%<1
4	www.bogazici.edu.tr İnternet kaynağı	%<1
5	www.researchgate.net İnternet kaynağı	%<1
6	www.tqsource.org İnternet kaynağı	%<1
7	193.255.206.126 İnternet kaynağı	%<1
8	earsiv.atauni.edu.tr İnternet kaynağı	%<1

SAYFA: 1 / 239

Salt-Metin Raporu

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

<b>Adı Soyadı</b>	Pınar YILDIZ
<b>Doğum Yeri</b>	Kırşehir
<b>Doğum Tarihi</b>	24.05.1985

### Eğitim Durumu

<b>Lise</b>	Ankara Çankaya Rıdvan-Binnaz Ege Anadolu Lisesi Anadolu Öğretmen Lisesi	2003
<b>Lisans</b>	Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü	2007
<b>Yüksek Lisans</b>	Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı	2010
<b>Yabancı Dil</b>	İngilizce: Okuma (İyi), Yazma (İyi), Konuşma (Orta)	

### İş Deneyimi

<b>Projeler</b>	TÜBİTAK 1001 - "Göreve Yeni Başlayan İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Öğretim Faaliyetlerine İlişkin Öz Düzenleme Süreçleri" (Bursiyer)	2013 – 2015
<b>Çalıştığı Kurumlar</b>	Milli Eğitim Bakanlığı (İlköğretim Matematik Öğretmeni)	2007 - 2009
	Erciyes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi (Araştırma Görevlisi)	2009 - ...

### Akademik Çalışmalar

**Yayınlar** (Ulusal, uluslararası makale, bildiri, poster vb gibi.)

#### Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler:

Çiftçi, K., Karadağ, E., & Akdal, P. (2014). Instruction of statics via computer-based tools: Effects on statics' anxiety, attitude and achievement. *Journal of Educational Computing Research*, 50, 119-133.

#### Ulusal Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler:

Yıldız, P., Çiftçi, Ş. K., Şengil-Akar, Ş., & Sezer, E. (2015). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hatalar. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 1, 18-31.

#### Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan Bildiriler:

Yetkin-Özdemir, İ. E., Bozkurt, E., Yıldız, P., & Gürel, R. (2015, 16-21 Ağustos). *Teacher regulation of instructional practices: A case study with a novice teacher*. Bildiri International Symposium on Elementary Mathematics

Teaching isimli konferansta sunulmuştur, Prag, Çek Cumhuriyeti.

Yetkin-Özdemir, İ. E., Gürel, R., Bozkurt, E., & Yıldız, P. (2015, 8-10 Haziran). *Göreve yeni başlayan ortaokul matematik öğretmenlerinin nedensel yüklemeleri*. Bildiri 2nd Eurasian Educational Research Congress isimli konferansta sunulmuştur, Ankara, Türkiye.

Yetkin-Özdemir, İ. E., Akdal, P., Bozkurt, E., & Gürel, R. (2014, 3-6 Eylül). *Beginning teachers' metacognition for teaching middle school mathematics*. Bildiri 6th Biennial Meeting of European Association for Research on Learning and Instruction isimli konferansta sunulmuştur, İstanbul, Türkiye.

Akdal, P., Çiftçi, K., & Bozkurt, E. (2013, 6-9 Haziran). *Primary mathematics teachers' perceptions of the materials and use of materials*. Bildiri V. International Congress of Educational Research isimli konferansta sunulmuştur, Çanakkale, Türkiye.

Sezer, E., Çiftçi, K., Akdal, P., & Şengil-Akar, Ş. (2011, 22-25 Haziran). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifade yazma ve yorumlama sürecinde karşılaştıkları zorluklar*. Bildiri III. International Conference on Educational Sciences isimli konferansta sunulmuştur, Gazimagusa, KKTC.

Akdal, P. (2011, 22-25 Haziran). İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin matematik öz-yeterliliklerinin matematik başarısına göre incelenmesi. *Pre-service primary school teachers' preference of the problem solving strategies for word problems*. Bildiri III. International Conference on Educational Sciences isimli konferansta sunulmuştur, Gazimagusa, KKTC.

#### **Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan Bildiriler:**

Yetkin-Özdemir, İ. E., Yıldız, P., Bozkurt, E., & Gürel, R. (2015, 14-16 Mayıs). *Göreve yeni başlayan ortaokul matematik öğretmenlerinin öğretim hedefleri*. Bildiri 14. Matematik Eğitimi Sempozyumu isimli konferansta sunulmuştur, Niğde.

Yetkin-Özdemir, İ. E., Bozkurt, E., Gürel, R., & Akdal, P. (2014, 11-14 Eylül). *Göreve yeni başlayan ortaokul matematik öğretmenlerinin öğretim faaliyetlerine yönelik hazırlık süreçlerinin incelenmesi*. Bildiri XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi isimli konferansta sunulmuştur, Adana.

Akdal, D., Akdal, P., Aksoy, N. C., & Uçuş, Ş. (2012, 24-26 Mayıs). *Sınıf öğretmeni adaylarının matematik ile ilgili inançları*. Bildiri XI. Ulusal Sınıf Öğretmenliği Kongresi isimli konferansta sunulmuştur, Rize.

Şengil-Akar, Ş., Akdal, P., & Çiftçi, K. (2011, 1-4 Eylül). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgileri*. Bildiri X. Matematik Sempozyumu isimli konferansta sunulmuştur, İstanbul.

#### **Kitap Bölümü:**

Yetkin-Özdemir, İ. E., Akdal, P., Bozkurt, E., & Gürel, R. (2014). Öğretmenlerde özdüzenleme: Matematik dersi örneği. İçerisinde G. Sakız (Ed.), *Özdüzenleme: Öğrenmeden öğretime öz-düzenleme davranışlarının gelişimi, stratejiler ve öneriler* (s. 233-247). Ankara: Nobel.

## İletişim

<i>e-Posta Adresi</i>	<a href="mailto:pinar_akdal@hotmail.com">pinar_akdal@hotmail.com</a> , <a href="mailto:akdalpinar@gmail.com">akdalpinar@gmail.com</a>
<i>Jüri Tarihi</i>	21.01.2016