

RUNGE-KUTTA METOTLARININ YAKINSAKLIK
MERTEBELERİNİN TESBİTİ

Yüksek Lisans Tezi

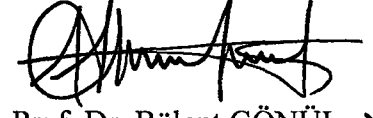
730889

Matematik Bölümü
Gaziantep Üniversitesi


Abdullah KABLAN

Ağustos 2003

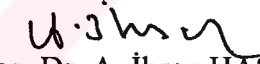
Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı


Prof. Dr. Bülent GÖNÜL, Y
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Bölüm Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

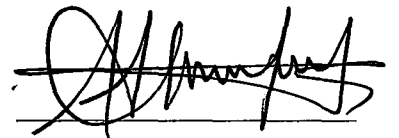

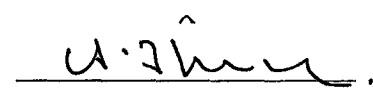

Yrd. Doç. Dr. A. İhsan HASÇELİK
Danışman

Sınav Juri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa ÖZAKÇA

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İTHAF

*Sevgili eşime
ve
doğacak
kızıma...*

ÖZ

RUNGE-KUTTA METOTLARININ YAKINSAKLIK MERTEBELERİNİN TESBİTİ

KABLAN Abdullah
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Ağustos 2003, 89 sayfa

Klasik yöntemle adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan nümerik metotların mertebelerinin belirlenmesi çok uzun ve karışık işlemler gerektirmektedir. Grafik yöntemi ile bu işlemler oldukça kısalmakta ve basitleşmektedir.

Bu çalışmada grafik yöntemi ile ilgili temel bilgiler verildikten sonra, bu yöntemle genel Runge-Kutta metotlarının mertebeleri incelenmiştir.

Ayrıca son zamanlarda geliştirilen çok adımlı Rosenbrock tipi bir metodun grafik yöntemi ile mertebesi belirlenerek kararlılık analizi yapılmış ve daha sonra da aynı mertebeden klasik Runge-Kutta metotları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Nümerik metotların mertebe şartları, grafik teorisi,
Runge-Kutta metotları, Rosenbrock metotları

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ABSTRACT

DETERMINATION OF THE ORDER OF CONVERGENCE OF RUNGE-KUTTA METHODS

KABLAN, Abdullah
M.Sc. in Department of Mathematics.
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
August 2003, 89 pages

With classical methods, determination of orders of numerical methods that are used in the solution of initial value problems for the ordinary differential equations requires very long and complex processes. This processes are shortened and simplified by the graph method.

In this study, after basic information related to graph method is given, the orders of general Runge-Kutta methods are investigated by this method.

In addition, using the graph method, the order of a recently derived multistep-Rosenbrock type method is determined and the stability analysis of this method is investigated. Furthermore the new method is compared with the classical Runge-Kutta methods of the same order.

Key words: Order conditions of numerical methods, graph theory,
Runge-Kutta methods, Rosenbrock methods.

TEŐEKKÖR

7 yıldır her konuda kendisinden çok Şeyler öğrendiğim ve bu çalıŐma boyunca da benden yardımlarını esirgemeyen, çalışmanın sonuca ulaşmasında ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında daima yol gösterici olan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK'e ve her zaman bana destek olan sevgili aileme çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
TABLO LİSTESİ.....	vii
1. BÖLÜM: GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM: TEK VE ÇOK ADIMLI METOTLAR.....	4
2.1. TEK ADIMLI METOTLAR.....	4
2.1.1. Giriş.....	4
2.1.2. Tek Adımlı Metotlar.....	5
2.1.3. Runge-Kutta Metotları.....	12
2.1.4. Açık ve Kapalı Tip Metotlar.....	14
2.1.5. Düzenlenmiş Metotlar.....	18
2.1.6. Rosenbrock Tipi Metotlar.....	21
2.1.7. Metotların Kararlılık Analizleri.....	23
2.2. ÇOK ADIMLI METOTLAR.....	32
2.2.1. Çok Adımlı Metotlar.....	32
2.2.2. Çok Adımlı Metotların Kararlılığı.....	37
3. BÖLÜM: METOTLARIN MERTEBELERİNİN BELİRLENMESİNDE GRAFİK YÖNTEMİNİN ÖNEMİ.....	41
3.1. METOTLARIN MERTEBELERİNİN BELİRLENMESİNDE KLASİK YÖNTEM.....	41
3.2. METOTLARIN MERTEBELERİNİN BELİRLENMESİNDE GRAFİK YÖNTEMİ.....	44
3.2.1. Niçin Grafik Yöntemi?	44
3.2.2. Grafiklerle İlgili Bazı Tanımlar.....	45

3.2.3. Runge-Kutta Metotlarının Grafik Yöntemi İle Mertebesinin Bulunması.....	47
3.2.4. Rosenbrock Tipi Metotların Grafik Yöntemi İle Mertebesinin Bulunması.....	65
4. BÖLÜM: ÇOK ADIMLI ROSENBROCK TİPİ BİR METODUN MERTEBE ve KARARLILIK ANALİZİ ve SAYISAL SONUÇLARI.....	72
4.1. GJ METODU.....	72
4.2. GJ METODUNUN MERTEBE ANALİZİ.....	77
4.3. GJ METODUNUN KARARLILIK ANALİZİ.....	79
4.4. SAYISAL SONUÇLAR.....	82
5. BÖLÜM: SONUÇLAR.....	86
KAYNAKLAR.....	88

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.2.1. Euler Metodu.....	7
Şekil 1.7.1. $s \leq 4$ için açık RK metotlarının kararlılık bölgeleri.....	27
Şekil 1.7.2. Bazı kapalı metotların kararlılık bölgeleri.....	31
Şekil 2.2.1a. μ nün izlediği yol.....	38
Şekil 2.2.1b. (2.2.7) nin köklerinin izlediği yol.....	38
Şekil 2.2.2. $k = 2, 3, 4$ için Adams-Bashforth metotlarının kararlılığı.....	39
Şekil 2.2.3. $k = 2, 3, 4$ için Adams-Moulton metotlarının kararlılığı.....	40
Şekil 2.3.1. Gerçek çözümün türevleri.....	55
Şekil 2.3.2. $f^J(g)$ nin türevleri.....	57
Şekil 2.3.3. $\gamma(t)$ nin tanımı ile ilgili örnek.....	59
Şekil 2.3.4. $(u, t_1, \dots, t_m) \leftrightarrow t$ eşlemesine örnek.....	61
Şekil 2.3.5. Ağaçların yinelemeli tanımı.....	61
Şekil 3.1. GJ3 Metodunun kararlılık bölgesi.....	80
Şekil 3.2. GJ3 Metodu ve diğer metotların kararlılık bölgeleri.....	81
Şekil 4.1. $y' = y$ problemi ($t = 20$)	83
Şekil 4.2. $y' = -y^2/2$ problemi ($t = 20$)	83
Şekil 4.3. Van Der Pol denklemi ($t = 2$)	84
Şekil 4.4. $y' = -y^2/2$ denklemi ($t = 20$)	85

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.3.1. Metotların Butcher gösterimi.....	13
Tablo 1.3.2. Dört basamaklı dördüncü mertebeden klasik Runge-Kutta metodu.....	13
Tablo 1.3.3. Üç basamaklı üçüncü mertebeden Optimal ve beş basamaklı dördüncü mertebeden Kutta Merson metotları.....	14
Tablo 1.4.1. ERK, DIRK ve IRK metotlarının tablo gösterimi.....	15
Tablo 1.4.2. Bazı kapalı Runge-Kutta metotları.....	15
Tablo 1.4.3. Üçüncü mertebeden SDIRK metodu.....	17
Tablo 1.4.4. Dördüncü mertebeden Hammer&Hollingsworth metodu.....	17
Tablo 1.4.5. Altıncı mertebeden Kuntzmann&Butcher metodu.....	18
Tablo 1.5.1. Altıncı mertebeden Gauss metodu.....	19
Tablo 1.5.2. Beşinci mertebeden Radau IA metodu.....	20
Tablo 1.5.3. İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIA metotları.....	20
Tablo 1.5.4. İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIB metotları.....	21
Tablo 1.5.5. İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIC metotları.....	21
Tablo 1.7.1. Bazı kapalı metotların kararlılık fonksiyonları.....	31
Tablo 2.1.1. Adams-Bashford metotlarının katsayıları.....	35
Tablo 2.1.2. Adams-Moulton metotlarının katsayıları.....	36
Tablo 2.3.1. Beşinci dereceye kadar olan ağaçlar ve elementer diferansiyeller.....	54

Tablo 2.3.2. 10. dereceye kadar olan ağaçların sayıları.....	55
Tablo 2.3.3. Mertebe şartlarının sayısı.....	62
Tablo 2.4.1 Beşinci dereceye kadar olan ağaçlar ve elementer diferansiyeller.....	71
Tablo 1.1. GJ4 Metodunun Mertebe Şartlarının Çözüm Kümesi.....	76
Tablo 2.1. Üçüncü dereceye kadar GJ Metodu için ağaç ve elementer diferansiyeller.....	78
Tablo 4.1. Test problemleri.....	82



1. BÖLÜM

GİRİŞ

Başta mühendislik ve fizik olmak üzere bir çok bilim dalında çoğu problem diferansiyel denklemlerle açıklanmaktadır. Karşılaşılan bu diferansiyel denklemler genel olarak kısmi türevler içeren kısmi diferansiyel denklemler ve sadece adi türevleri içeren adi diferansiyel denklemler olmak üzere iki gruba ayrılır. Ancak bu diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak genel olarak mümkün olmayabilir. Özellikle günümüzde kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine halen çalışmalar sürdürülmektedir.

Bu çalışmada özellikle analitik çözümü bulunamayan, başlangıç koşullarını sağlayan adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılan nümerik metotların mertebesi ve bu mertebeyi belirlemekte kolaylık sağlayan grafik yöntemi üzerinde durulmaktadır.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) \quad (1.1)$$

şeklindeki başlangıç değer problemi için s basamaklı Runge-Kutta metodu aşağıdaki formdadır [1].

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad (i = 1, \dots, s)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (1.2)$$

Bu metodun mertebesi c_i, a_{ij} ve b_i katsayılarının seçimine göre değişmektedir. Genel olarak bu katsayılar bulunup metotlar oluşturulurken aşağıdaki adımlar izlenir.

Adım 1: Metodun $h = 0$ 'da Taylor seri açılımı yapılır.

Adım 2: $y(x)$, (1.1) probleminin gerçek çözümü olmak üzere $y(x)$ 'in $h=0$ 'da Taylor seri açılımı yapılır.

Adım 3: 1'inci ve 2'nci adımlarda elde edilen denklemlerdeki karşılıklı katsayılar eşitlenerek c_i, a_{ij} ve b_i katsayıları bulunur ve metotlar oluşturulur.

3'üncü adımda merteye şartları diye adlandırılan lineer olmayan bir denklem sistemi elde edilir ve daha sonra bu sistem çözülerek metotlar oluşturulur. Bu denklem sistemindeki denklem sayısı metodun merteye sayısına göre değişir. Merteye sayısı arttıkça denklem sayısı daha da hızlı bir şekilde artar. Örneğin, merteye sayısı 4 iken 8 tane denklem elde edilirken, merteye sayısı 6 olduğunda bu değer 37'ye, merteye sayısı 8 olduğunda 200'e, 10 olduğunda ise 1205'e yükselmektedir [1].

Görüldüğü üzere özellikle 6'ıncı mertebeden sonra denklem sayısı çok hızlı bir şekilde artmaktadır. Çünkü yüksek mertebeli metotlarda 1'inci adımı yapmak oldukça zor, zahmetli ve hatta içinden çıkılmaz bir hal alabilir. İşte bu nedenle 1960'lardan sonra yapılan çalışmalar sonucunda bu zorluğun üstesinden gelinmiştir.

Metotların merteye şartları üzerine bir çok çalışmalar yapan Butcher'ın bu konuya getirdiği en büyük yenilik 1987 de olmuştur. Butcher, metotların Taylor seri açılımlarını yaparken grafik teorisinden faydalanmıştır. Şöyle ki; gerek metotların ve gerekse gerçek çözümün Taylor açılımlarını yaparken karşılaşılan çok uzun, kısmi türevler içeren denklemleri ağaç olarak adlandırılan çeşitli grafiklerle simgelemiş ve daha sonra bu ağaçlara yeni dallar eklemek suretiyle metotların ardıl türevlerini elde etmiştir [2]. Böylelikle çok uzun ve karışık cebirsel denklem sistemleri daha kısa ve basit hale getirilmiş ve yüksek mertebeli metotlarında merteye analizleri yapılabilmektedir.

Yine aynı yıllarda Wanner ve Hairer'in çalışmaları ile bu yöntem daha da geliştirilmiş ve başka tip metotlara da uygulanmıştır [1,3].

Özellikle son yıllarda grafik yöntemi merteye analizinde daha da önemli bir yer tutmuştur. Bilgisayar teknolojisinin gelişimi ile birlikte daha iyi sonuçlar veren yüksek mertebeli metotlar daha çok kullanılmıştır. Bu sebeple bu yönde çalışmalar artırılmış ve grafik yöntemi kullanılarak çeşitli şekilde yüksek mertebeli metotlar

oluşturulmuştur. Yine son yıllarda Hairer'in oluşturduğu Hamilton sistemleri için kullanılan symplectic metotlar, manifoldlar üzerinde bazı fiziksel özellikleri koruyan (invariant bırakan) metotlarda da yine grafik yöntemi kullanılmıştır[4].

Günümüzde yüksek mertebeli metotlara duyulan ihtiyacın gün geçtikçe arttığı düşünülürse, bulunan bu metotların mertebeye analizinde grafik yönteminin ne kadar önemli olduğu ortaya çıkmaktadır. Aksi halde bu metotların mertebelerini klasik yöntemle belirlemek çok zor hatta imkansız olabilirdi.

Bu yüzden grafik yöntemi yüksek mertebeli metotların elde edilmesi ve bunların mertebeye analizlerinin yapılabilmesi bakımından çok önemli bir kolaylıktır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde nümerik metotlar tek ve çok adımlı olmak üzere iki grupta incelenmiştir. Tek adımlı metotlarda öncelikle nümerik metotların nasıl oluşturulduğuna dair bilgiler verilmiş ve daha sonra da metotlar türlerine göre incelenmiştir. Çok adımlı metotlarda ise yine metotların nasıl elde edildiği anlatılmış ve burada da metotlar türlerine göre sınıflandırılmıştır. Bu bölümde ayrıca bahsedilen tüm tek ve çok adımlı metotların kararlılık analizleri yapılmıştır.

Bu şekilde metotlar tanıtıldıktan sonra üçüncü bölümde metotların yakınsaklık mertebelerinin belirlenmesinde grafik yönteminin öneminden bahsedilmiştir. Öncelikle mertebenin tanımı yapılarak bu kavramın metotlar için ne anlama geldiği anlatılmıştır. Daha sonra metotların mertebelerini bulma yöntemlerinden bahsedilmiş ve klasik yöntem ile grafik yöntemi anlatılmıştır. Önce metotların mertebeleri klasik yöntemle bulunmuş, ancak bu noktada klasik yöntemin zorluklarından bahsedilip, grafik yöntemine geçilmiştir. Grafik yöntemi ile ilgili bazı tanım ve açıklamalar yapıldıktan sonra bu yöntem Runge-Kutta ve Rosenbrock tipi metotlara uygulanmıştır.

Dördüncü bölümde ise grafik yöntemi ile ilgili edinilen bilgiler ışığında David Geoken ve Olin Johnson'a ait çok adımlı Rosenbrock tipi bir metodun grafik yöntemi ile mertebeye analizi yapılmıştır. Ayrıca bu metodun kararlılık bölgesi belirlenmiş ve bu bölgeler başka metotların kararlılık bölgeleri ile karşılaştırılmıştır. Son olarak aynı metodun sayısal bazı sonuçları aynı mertebeden klasik Runge-Kutta metotları ile karşılaştırılarak bu değerler grafiklerle sunulmuştur.

2. BÖLÜM

TEK VE ÇOK ADIMLI METOTLAR

2.1. TEK ADIMLI METOTLAR

2.1.1. Giriş

Uygulamalı matematikte bir çok problem çeşitli tipte diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Bu diferansiyel denklemler içerisinde en basit denklem çeşidi x bağımlı değişken ve $y(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $y' = f(x, y(x))$ tipindeki denklemlerdir. Bu tür denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bu problemi sağlayan sonsuz tane çözüm vardır. Bu çözümler içerisinde (x_0, y_0) noktasından geçen çözümün bulunmasına başlangıç değer problemi denir ve başlangıç şartları da $y(x_0) = y_0$ formundadır. Şimdi daha genel olarak aşağıdaki gibi n boyutlu diferansiyel denklem sistemi ele alınsın.

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

⋮

$$y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$y_i(x_0) = y_{i0} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Bu sistem aşağıdaki vektör formları kullanılarak $y' = f(x, y)$ formuna getirilebilir.

$$y' = f(x, y), \quad y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{bmatrix}, \quad y(x_0) = y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

Diferansiyel denklemler sadece birinci mertebeden türevleri değil aynı zamanda daha yüksek mertebeden türevleri de içerebilirler. Örneğin,

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

şeklindeki n 'inci mertebeden bir diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y^{(1)}(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri kurularak aşağıdaki şekilde birinci mertebeden n boyutlu bir sistem haline getirilebilir.

$$z' = \begin{bmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \\ z_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix}$$

2.1.2. Tek Adımlı Metotlar

Diferansiyel denklemler için oluşturulan nümerik metotların esas amacı,

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.2.1)$$

şeklindeki başlangıç değer problemlerinin analitik yollarla elde edilemeyen çözümünün, herhangi bir noktadaki yaklaşık değerinin hesaplanmasıdır. Yani $y(x)$, (1.2.1) probleminin analitik yollarla bulunamayan gerçek çözümü ve $a \in \mathbb{R}$ herhangi bir reel sayı olmak üzere $y(a)$ değerinin yaklaşık hesabının yapılmasıdır. (1.2.1) başlangıç değer problemi birinci dereceden bir denklemdir ve geliştirilen nümerik metotlar bu tür problemlerin çözümünde kullanılır. Eğer problem daha yüksek mertebeden ise, o zaman denklem daha önce de anlatıldığı gibi birinci mertebeden sisteme çevrilir ve daha sonra nümerik metot uygulanabilir. Yani anlatılacak olan metotlar birinci mertebeden n boyutlu sistemler için de geçerlidir. Ancak burada $n = 1$ alınarak anlatım yapılacaktır.

Şimdi problem, (1.2.1) deki başlangıç değer problemi için $a \in \mathbb{R}$ ve $y(x)$ gerçek çözüm olmak üzere, $y(a)$ yaklaşık değerinin bulunması olsun. İlk olarak $[x_0, a]$ aralığı $x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$ şeklinde alt aralıklara bölünür. Burada $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ değerleri her bir alt aralığın uzunluğudur ve bu değerlere adım uzunluğu denir. Her bir adım uzunluğu farklı seçilebileceği gibi $h_i = h$ şeklinde sabit bir değer de alınabilir. $y(x)$, (1.2.1) deki başlangıç değer probleminin gerçek çözümü olsun. O zaman $y'(x)$ eğimi için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Şimdi probleme tekrar dönülürse

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y)$$

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x))$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme $y(x_0) = y_0$ başlangıç değeri uygulanırsa

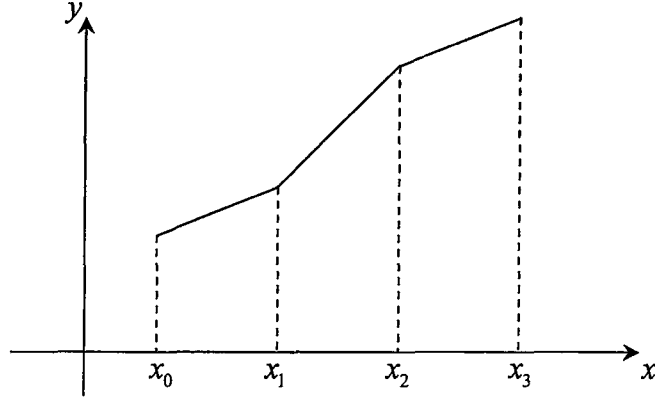
$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

ifadesi elde edilir. Böylelikle $y(x)$ gerçek çözümünün $x_0 + h = x_1$ noktasındaki yaklaşık değeri bulunmuş olur. Bu işlemler aynı şekilde x_1, x_2, \dots, x_n değerleri için yapılır ve en sonunda $y(x_n) \approx y(a)$ yaklaşık değeri elde edilir. Gerçek değer ile yaklaşık değeri karıştırmamak amacıyla bundan sonra x_1 noktasındaki gerçek değer $y(x_1)$ şeklinde yaklaşık değer ise y_1 şeklinde gösterilecektir. Tüm bunlar genelleştirilirse (1.2.1) deki başlangıç değer problemi için

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2.2)$$

şeklinde bir nümerik metot elde edilmiş olur. Bu metoda Euler metodu denir. Burada x_i noktalarındaki teğet doğruları birleşerek Euler poligonu denilen aşağıdaki kırık çizgiyi oluşturur.



Şekil 1.2.1. Euler Metodu

Euler metodu tipik bir tek adımlı metottur. Genel olarak metotlar, $\Phi(x_n, y_n, h)$ fonksiyonu ile verilir. Örneğin Euler metodu için $\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$ dir.

Tanım 1.2.1. (1.2.1) deki başlangıç değer problemi için tek adımlı metot

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \quad (1.2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Phi(x_n, y_n, h)$ fonksiyonu metodu belirleyen fonksiyondur ve bu fonksiyonun farklı seçimleri ile farklı metotlar elde edilir.

(1.2.1) deki başlangıç değer problemi için (1.2.3) deki metot uygulansın. Ayrıca bu problemin gerçek çözümü $y(x)$ olsun. Farzedelim ki x_n noktasındaki gerçek değer için, $y(x_n) = y_n$ olsun. O zaman

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

$$y_{n+1} = y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n), h)$$

olur. Genel olarak y_{n+1} noktasındaki hata $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ şeklinde gerçek çözüm ile nümerik çözüm arasındaki fark olarak alınır. Buradan hata değeri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$hata = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$hata = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y(x_n), h) \quad (1.2.4)$$

Tanım 1.2.2. (1.2.4) deki hata değerine yerel kесme hatası (*local truncation error* ($l.t.e$)) denir ve t_{n+1} ile gösterilir.

$$t_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y_n, h) \quad (1.2.5)$$

Bu hata ölçümü bir anlamda metodun yaklaşım hızı ile alakalıdır. Şöyle ki iyi bir metod için

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_{n+1} = 0$$

olması gerekir. Ancak burada önemli olan $h \rightarrow 0$ iken t_{n+1} değerinin ne kadar hızla sıfıra yaklaştığıdır. Başka bir ifade ile nümerik metottan elde edilen yaklaşık değer ile gerçek değer arasındaki hatanın ne kadar hızla azaldığıdır. Bu da metotların mertebeleri ile alakalıdır ve genel olarak, eğer bir metod için

$$t_{n+1} = O(h^{p+1}) \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h^{p+1})}{h^{p+1}} \text{ var} \right) \quad (1.2.6)$$

ise o zaman bu metoda p 'ninci mertebededir denilecektir [5]. Burada, metodun mertebesi büyüdükçe yaklaşımda o kadar hızlı olacaktır.

Tanım 1.2.3. (1.2.1) deki başlangıç değer probleminin $y(x)$ gerçek çözümü ile y_{n+1} nümerik çözümü arasındaki farka genel hata (*global error* ($g.e$)) denir ve e_{n+1} ile gösterilir.

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1})$$

Örnek 1.2.4. Euler metodu için $\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$ olduğu belirtilmişti. Burada f fonksiyonu yeter derecede kısmi türevlenebilir olsun. Acaba Euler metodu için $h \rightarrow 0$ iken t_{n+1} değeri hangi mertebede (hangi hızla) sıfıra yaklaşmaktadır. Eğer $y'(x) = f(x, y)$ probleminin gerçek çözümü $y(x)$ ise o zaman tüm x değerleri için

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

dir. Farzedelim ki x_n noktasındaki gerçek değer de $y(x_n) = y_n$ olsun. Şimdi Euler metodu, adım uzunluğu h alınarak uygulandığında

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

olur ve burada $y(x_n) = y_n$ olduğundan

$$y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

olur. Ayrıca $y'(x) = f(x, y(x))$ olduğundan son denklem

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) \quad (1.2.7,a)$$

şeklini alır. Burada ayrıca $y(x)$ gerçek çözümün x_n noktasında Taylor seri açılımı yapılırsa

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(x_n) + \dots \quad (1.2.7,b)$$

denklemini elde edilir. Daha önce y_{n+1} deki yerel hatanın $t_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ şeklinde olduğu belirtilmişti. O zaman, (1.2.7,a) ve (1.2.7,b) denklemlerinden, hata

$$t_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= [y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(x_n) + \dots] - [y(x_n) + hy'(x_n)] \\ &= \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(x_n) + \dots \end{aligned}$$

şeklinindedir. Sonuç olarak bu metot için $t_{n+1} = O(h^2)$ olduğundan, Euler metodu birinci mertebededir denir. Yani gerçek çözümün Taylor açılımı ile Euler metodunun Taylor açılımı yalnızca ilk iki terimde uyuşmaktadır.

Daha önce bir metodun mertebesi büyüdükçe, gerçek çözüme yaklaşımın o kadar iyi olduğundan bahsedilmişti. O zaman yukarıdaki örnekten hareketle, acaba mertebesi 1'den daha büyük bir metot oluşturulabilir mi? Bu soruya verilecek ilk cevap $\Phi(x_n, y_n, h)$ fonksiyonu olarak, (1.2.7,b) deki Taylor açılımında ilk üç terimi almak şeklinde olacaktır. Yani $\Phi(x_n, y_n, h)$ fonksiyonu

$$\Phi(x, y, h) = y'(x) + \frac{h}{2} y''(x) \quad (1.2.8)$$

şeklinde seçilirse ve burada da

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)$$

kısmi türevleri (1.2.8) de yerlerine yerleştirilirse

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x, y, h) = y_n + h(f(x, y) + \frac{h}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f))$$

şeklinde bir metot elde edilir. Bu seçimle oluşturulmuş bir metodun Taylor açılımı gerçek çözümün Taylor açılımı ile üç terimde uyuşmaktadır. Yani $t_{n+1} = O(h^3)$ olduğundan bu metodun mertebesi 2'dir. O zaman bu yolla daha da yüksek mertebeden metotlar elde edilebileceği açıktır. Ancak bu tür metotlarda her $y_n \rightarrow y_{n+1}$ adımında sadece f değil, aynı zamanda f_x, f_y, \dots gibi kısmi türevlerde gerek olacaktır. Bu da hesaplamayı oldukça zorlaştırmaktadır. Yüksek mertebeden daha basit metotlar aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\Phi(x, y, h) = b_1 f(x, y) + b_2 f(x + c_2 h, y + a_{21} h f(x, y)) \quad (1.2.9)$$

Burada b_1, b_2, c_2, a_{21} değerleri sabittir ve bu değerler t_{n+1} de h 'nin kuvveti mümkün olduğunca büyük olacak şekilde seçilir. Şimdi (1.2.9) daki $\Phi(x, y, h)$ fonksiyonu ile oluşturulan metodun x_n noktasında Taylor seri açılımı yapılırsa

$$y_{n+1} = y(x_n) + (b_1 + b_2) h f(x_n, y_n) + b_2 \frac{h^2}{2!} [c_2 f_x(x_n, y_n) + a_{21} f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklem (1.2.7,b) deki gerçek çözümün Taylor açılımı ile karşılaştırılırsa, ilk üç terimin uyuşması için, yani metodun 2'inci mertebeden olması için aşağıdaki denklemlerin sağlanması gerekir.

$$b_1 + b_2 = 1 \quad b_2 c_2 = \frac{1}{2} \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \quad (1.2.10)$$

Bu denklem sistemi 4 bilinmeyene, 3 denkleme sahiptir. Dolayısıyla bir bilinmeyen keyfi olacaktır. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad c_2 = 1 \quad a_{21} = 1$$

şeklindedir. Buradan (1.2.9) daki metot yukarıdaki değerlerle

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))] \quad (1.2.11)$$

şeklinde bir metot halini alır. Artık bu metot 2'nci mertebededir. Yani ilk üç terimde uyuşma vardır. Bu metoda Heun metodu denir ve her bir adımda f nin iki değerinin hesaplanması gerekir. (1.2.10) denkleminin bir başka çözümü ise

$$b_1 = 0 \quad b_2 = 1 \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad a_{21} = \frac{1}{2}$$

şeklindedir ve buradan elde edilen metot

$$\Phi(x, y, h) = [f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hf(x, y))] \quad (1.2.12)$$

formundadır. Bu metoda Modife Euler metodu denir ve 2'nci mertebededir. Ayrıca her bir adımda yine f 'nin iki değeri gerekir.

Son olarak şu ana kadar ki basit yaklaşımlarla elde edilen metotlardan daha karmaşık bir yapıya sahip ve belli bir mertebeye kadar yukarıdaki örneklerin geliştirilmiş hali sayılabilecek olan Runge-Kutta metodundan bahsedilecektir. Bu metot aşağıdaki formdadır. [1,2,5,6]

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (1.2.13)$$

Yukarıda yapıldığı gibi yine Taylor seri açılımları karşılaştırılırsa $t_{n+1} = O(h^5)$ elde edilir. Yani açılımlarda ilk beş terimde uyuşma vardır. Bu da bu metodun 4'üncü

mertebeden olduğunu gösterir. İlerleyen bölümlerde Runge-Kutta metotlarından daha ayrıntılı bir şekilde bahsedileceğinden burada sadece formül vermekle yetinilecektir.

Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu y' 'ye bağlı değil ise o zaman problem

$$y' = f(x) , y(x_0) = y_0$$

şeklinde olur. O zaman bu başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

şeklinde bir integral denklemdir. Bu durumda Heun metodu nümerik integrasyonda kullanılan yamuk kuralına [2], modife Euler metodu orta nokta kuralına [2], ve Runge-Kutta metodu da Simpson kuralına [2] karşılık gelir.

2.1.3. Runge-Kutta Metotları

Tanım 1.3.1. s tamsayı ve $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ 'de reel sabit katsayılar olmak üzere

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2))$$

⋮

$$k_n = f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}))$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s) \quad (1.3.1)$$

şeklindeki denklem sistemine s basamaklı açık tip Runge-Kutta metodu denir. Burada

$$c_2 = a_{21} , c_3 = a_{31} + a_{32} , \dots , c_s = a_{s1} + \dots + a_{s,s-1} \quad (1.3.2)$$

veya genel olarak

$$c_i = \sum_j a_{ij}$$

kabulleri vardır. Bu kabuller özellikle yüksek mertebeden metotların ileride bahsedilecek olan mertebeye şartları analizinde büyük oranda kolaylık sağlamaktadır.

Metotlar genelde (1.3.1) deki denklem tipinden ziyade daha farklı şekillerde gösterilmektedir. Butcher (1.3.1) deki metodu tablo şeklinde aşağıdaki gibi göstermiştir. Bu gösterime Butcher gösterimi denir. [1,2]

Tablo 1.3.1. Metotların Butcher gösterimi

0				
c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1} b_s

Örneğin (1.2.13) deki 4 basamaklı 4'üncü mertebeden klasik Runge-Kutta metodunun Butcher gösterimi aşağıdaki gibidir.

Tablo 1.3.2. Dört basamaklı dördüncü mertebeden klasik Runge-Kutta metodu

0				
$1/2$	$1/2$			
$1/2$	0	$1/2$		
1	0	0	1	
	$1/6$	$2/6$	$2/6$	$1/6$

Butcher açık tip Runge-Kutta metotlarının 's' basamak sayısı ile 'p' mertebesi arasında Butcher bariyerleri denilen aşağıdaki bağıntıyı kurmuştur [2,5].

$$p = s \quad 1 \leq s \leq 4$$

$$p \leq s-1 \quad 5 \leq s \leq 7$$

$$p \leq s-2 \quad s \geq 8$$

Tablo 1.3.3. Üç basamaklı üçüncü mertebeden optimal ve beş basamaklı dördüncü mertebeden Kutta Merson metotları

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$		
	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$		
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2	
	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.1.4. Açık ve Kapalı Tip Metotlar

Tanım 1.4.1. b_i, a_{ij} ($i=1, \dots, s$) reel sayılar olmak üzere

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad (i=1, \dots, s)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (1.4.1)$$

şeklindeki metoda s basamaklı Runge-Kutta (RK) metodu denir. Eğer $i \geq j$ için $a_{ij} = 0$ ise metoda açık tip RK metodu (*Explicit Runge-Kutta (ERK)*) denir. Eğer $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ve en az bir i için $a_{ii} \neq 0$ ise metoda köşegensel kapalı tip RK metodu (*Diagonaly implicit Runge-Kutta (DIRK)*) denir. Eğer tüm köşegen elemanları birbirine eşit ise yani $a_{ii} = \gamma$, $i=1, \dots, s$ ise metoda tek tip köşegensel kapalı RK metodu (*Singly Diagonaly implicit Runge-Kutta (SDIRK)*) denir. Tüm bunların dışındaki metotlara da kapalı tip RK metotları (*implicit Runge-Kutta (IRK)*) denir [1].

Tablo 1.4.1. ERK, DIRK ve IRK metotlarının tablo gösterimi

$i \geq j, a_{ij} = 0$	$i > j, a_{ij} = 0$ ve $\exists i, a_{ii} \neq 0$	$\exists i > j$ için $a_{ij} \neq 0$
Açık RK Metodu (ERK)	Köşegensel Kapalı RK Metodu (DIRK)	Kapalı RK Metodu (IRK)
$\begin{array}{c ccc} c_1 & 0 & & \\ c_2 & a_{21} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots 0 \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} c_1 & a_{11} & & \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots a_{ss} \end{array}$	$\begin{array}{c cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{array}$
$\begin{array}{c ccc} & b_1 & b_2 & \dots b_s \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} & b_1 & b_2 & \dots b_s \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} & b_1 & b_2 & \dots b_s \end{array}$

Tablo 1.4.2. Bazı kapalı Runge-Kutta metotları

Kapalı orta nokta metodu

$$k_1 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$y_1 = y_0 + hk_1$$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1

Hammer&Hollingsworth

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{h}{3}(k_1 + k_2)\right)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2)$$

0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Metot kapalı olduğu zaman (1.4.1) deki denklem k_i ($i=1, \dots, s$) değerlerine bağlı kapalı bir denklem oluşturur. Bu denklemin çözümünün varlık ve tekliği Butcher tarafından gösterilmiştir [1,2].

Teorem 1.4.2. f sürekli ve başlangıç noktası komşuluğunda L Lipschitz sabiti olmak üzere Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer h adım uzunluğu

$$h < \frac{1}{L \max_i \sum_j |a_{ij}|}$$

olacak şekilde seçilirse, o zaman (1.4.1) deki denklemin tek bir çözümü vardır ve bu iterasyon yoluyla elde edilir. [2]

Örnek 1.4.3. 2 basamaklı 3'üncü mertebeden

$$k_1 = f(x_0 + c_1 h, y_0 + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2))$$

$$k_2 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2))$$

$$y_1 = y_0 + h(b_1k_1 + b_2k_2)$$

kapalı tip RK metodunun mertebeye şartları aşağıdaki gibidir.

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (1.4.2,a)$$

$$b_1c_1 + b_2c_2 = \frac{1}{2} \quad (1.4.2,b)$$

$$b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \frac{1}{3} \quad (1.4.2,c)$$

$$b_1(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + b_2(a_{21}c_1 + a_{22}c_2) = \frac{1}{6} \quad (1.4.2,d)$$

Bu değerler daha önce yapıldığı gibi Taylor seri açılımları karşılaştırılarak elde edilmiştir. (1.4.2,a)-(1.4.2,a) denklemlerinden b_1 ve b_2 yok edilerek c_1 ve c_2 ye bağlı

$$c_2 = \frac{2 - 3c_1}{3 - 6c_1}$$

denklemini elde edilir. Bu c_1 değeri de (1.4.2,a) ve (1.4.2,b) denklemlerinde kullanılarak b_1 ve b_2 nin

$$b_1 = \frac{c_2 - 1/2}{c_2 - c_1}, \quad b_2 = \frac{c_1 - 1/2}{c_1 - c_2} \quad (c_1 \neq 1/2, c_1 \neq c_2)$$

değerleri bulunur. Bulunan tüm bu değerler ve $a_{21} = c_2 - a_{22}$, $a_{11} = c_1 - a_{12}$ eşitlikleri birlikte kullanılarak dördüncü denklemden

$$a_{22} = \frac{1/6 - b_1(a_{12}(c_2 - c_1) + c_1^2)}{b_2(c_2 - c_1)}$$

değeri elde edilir. Burada a_{12} ve c_1 serbest parametrelerdir. Bütün bunların sonucu olarak yukarıdaki bağıntılara göre eğer $a_{12} = 0$ alınırsa kapalı tip RK metotlarının (DIRK metotları) 3'üncü mertebeden tek parametrelili ailesi elde edilir. Eğer $a_{12} = 0$ ve $a_{11} = a_{22}$ denirse SDIRK metotları elde edilir.

Tablo 1.4.3. Üçüncü mertebeden SDIRK metodu

γ	γ
$1 - \gamma$	$1 - 2\gamma$ γ
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

4'üncü mertebeden metotlarda ise merite şartlarında yukarıdakilerle birlikte 4 denklemler daha vardır. Bunun da yine 2 parametreye bağlı tek çözümü vardır. (Tablo 1.4.4)

Tablo 1.4.4. Dördüncü mertebeden Hammer&Hollingsworth metodu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tablo 1.4.5. Altıncı mertebeden Kuntzmann&Butcher metodu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

2.1.5. Düzenlenmiş Metotlar

Tanım 1.5.1. s pozitif bir tamsayı ve c_1, \dots, c_s ayırık reel sayılar (0 ile 1 arasında) olsun. Bu sayılara karşılık gelen s 'nci dereceden düzenlenmiş polinom aşağıdaki şekilde tanımlanır. [4]

$$u(x_0) = y_0 \quad (\text{başlangıç değeri}) \quad (1.5.1.a)$$

$$u'(x_0 + c_i h) = f(x_0 + c_i h, u(x_0 + c_i h)) \quad i = 1, \dots, s \quad (1.5.1.b)$$

ve nümerik çözüm de aşağıdaki şekildedir.

$$y_1 = u(x_0 + h) \quad (1.5.2)$$

Örneğin $s = 1$ için polinom aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = y_0 + (x - x_0)k \quad (1.5.3.a)$$

$$k = f(x_0 + c_1 h, y_0 + hc_1 k) \quad (1.5.3.b)$$

(1.5.3,b) denkleminde $c_1 = 0$ alınırsa Euler metodu, $c_1 = 1$ alınırsa kapalı tip Euler metodu ve $c_1 = 1/2$ alınırsa orta nokta kuralı oluşmaktadır. Ayrıca $s = 2$ için de $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ alınırsa kapalı tip yamuk metodu, $c_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{3}/6$ alınırsa Hammer&Hollingsworth metodu elde edilir.

Teorem 1.5.2. (1.5.1) deki düzenlenmiş polinom aşağıdaki seçimlerle IRK metoduna eşdeğerdir.

$$a_{ij} = \int_0^{c_j} l_j(t) dt \quad b_{ij} = \int_0^1 l_j(t) dt \quad i, j = 1, \dots, s \quad (1.5.4)$$

Burada $l_j(t)$ ler

$$l_j(t) = \prod_{k \neq j} (t - c_k) / \prod_{k \neq j} (c_j - c_k) \quad (1.5.5)$$

şeklindeki Lagrange polinomlarıdır. [1,2,4]

Gauss-Lobatto Düzenlenmiş Metotları

Yukarıda bahsedilen düzenlenmiş metotlarda c_1, \dots, c_s sayıları s 'ninci dereceden

$$\frac{d^s}{dx^s} (x^s (x-1)^s)$$

şeklindeki Legendre polinomlarının kökleri alınırsa Gauss metotları elde edilir. [4] Bu metotlara Kuntzmann-Butcher metotları da denir. s basamaklı Gauss metodu $2s$ mertebededir.

Tablo 1.5.1. Altıncı mertebeden Gauss metodu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Geliştirilen diğer metot türleri ise yine c_1, \dots, c_s sayılarının seçimine göre çeşitli isimlerle adlandırılmış olan aşağıdaki metot türleridir. Burada yine c_1, \dots, c_s sayıları aşağıda verilen denklemlerin kökleri olarak alınır.

$$\text{I: } \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^s(x-1)^{s-1}) \quad \text{Radau IA}$$

$$\text{II: } \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^{s-1}(x-1)^s) \quad \text{Radau IIA}$$

$$\text{III: } \frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}(x^{s-1}(x-1)^{s-1}) \quad \text{Lobatto}$$

Radau formundaki s basamaklı metotlar $2s-1$ mertebeli ve Lobatto formundaki s basamaklı metotlar ise $2s-2$ mertebelidir. Ayrıca Radau IIA metotlarında $s=1$ alınırsa kapalı tip Euler metodu oluşur.

Tablo 1.5.2. Beşinci mertebeden Radau IA metodu

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1-\sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1+\sqrt{6}}{18}$
$\frac{6-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{6+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$

Tablo 1.5.3. İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIA metotları

0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Tablo 1.5.4. İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIB metotları

0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Tablo 1.5.5. İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIC metotları

0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

2.1.6. Rosenbrock Tipi Metotlar

Daha önce kapalı tip metotlar için her adımda ortaya çıkan, lineer olmayan denklemler için iterasyon metodunun kullanılması gerektiğinden bahsedilmişti. Rosenbrock metotları hesaplanması zor, lineer olmayan bu denklemleri lineer bir denklem dizisine çevirir.

Köşegensel kapalı tip Runge-Kutta metodunun otonom diferansiyel denklemler için uygulanan formunun genel gösterimi aşağıdaki gibidir. [3]

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + a_{ii}k_i) \quad (i=1, \dots, s)$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (1.6.1)$$

Burada problem

$$y' = f(y) \quad (1.6.2)$$

şeklinde otonom bir diferansiyel denklemdir. Şimdi (1.6.1) denklemi lineerleştirilirse

$$k_i = hf(g_i) + hf'(g_i) a_{ii} k_i$$

$$g_i = y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \quad (1.6.3)$$

şeklinde denklem elde edilir. Dolayısıyla (1.6.1) kapalı denklemi (1.6.3) açık denkleme dönüştürülmüş olur. Burada daha önce her adımda $k_i^{(0)} = 0$ başlangıç değeri alınarak Newton iterasyon metodunun uygulanması gerekirdi. Ancak (1.6.3) denkleminde buna hiç gerek yoktur. Ayrıca (1.6.3) de $f'(g_i)$ yerine $J = f'(y_0)$ Jakobiyeni kullanılır.

Tanım 1.6.1. s basamaklı Rosenbrock metodu aşağıdaki şekildedir.

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j \quad i = 1, \dots, s$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (1.6.4)$$

Burada $\alpha_{ij}, \gamma_{ij}, b_i$ değerleri belirli katsayılardır ve $J = f'(y_0)$ dir. Bu metodun her bir adımında k_i bilinmeyenlerine göre, $I - h\gamma_{ij} J$ şeklindeki bir lineer sistem matrisinin çözülmesi gerekir. Eğer problem

$$y' = f(x, y) \quad (1.6.2.a)$$

şeklinde otonom olmayan bir diferansiyel denklem ise o zaman $x' = 1$ eşitliği denklemini otonom sisteme dönüştürür. Bu durumda (1.6.4) metodu bu sisteme uygulanırsa,

$$k_i = hf(x_0 + \alpha_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^s b_j k_j \quad (1.6.4,a)$$

metodu elde edilir. Buradaki yeni katsayılar ise

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \quad (1.6.5)$$

şeklindedir. Eğer problem, M sabit ve tekil olmayan bir matris olmak üzere

$$My' = f(x, y) \quad (1.6.2,b)$$

şeklinde kapalı diferansiyel denklem ise (1.6.2,b) nin her iki tarafı M^{-1} ile çarpılır ve problem (1.6.2,a) formuna getirilerek (1.6.4,a) metodu uygulanır. Daha sonra da elde edilen formülün her iki tarafı M ile çarpılarak aşağıdaki metot elde edilir.

$$Mk_i = hf(x_0 + \alpha_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^s b_j k_j \quad (1.6.4,b)$$

2.1.7. Metotların Kararlılık Analizleri

$\varphi(x)$, $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin yeteri kadar düzgün bir çözümü olsun. f fonksiyonu gerçek çözüm etrafında lineerleştirilirse

$$y'(x) = f(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))(y(x) - \varphi(x)) + \dots \quad (1.7.1)$$

şeklinde olur. Burada $y(x) - \varphi(x) = \bar{y}(x)$ denilirse

$$y'(x) = \varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))(y(x) - \varphi(x)) + \dots$$

$$y'(x) - \varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))(y(x) - \varphi(x)) + \dots$$

$$\bar{y}'(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))(y(x) - \varphi(x)) + \dots = J(x)\bar{y}(x) + \dots$$

denklemini elde edilir. Burada J Jakobiyen matrisi sabit düşünülüp hata terimi ihmal edilmiştir. Şimdi $\bar{y}(x)$, $y(x)$ olarak değiştirilirse

$$y' = Jy \quad (1.7.2)$$

eşitliği elde edilir. (1.7.2) denklemini örnek olarak Euler metoduna uygulanırsa

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m)$$

$$y_{m+1} = y_m + hJy_m$$

$$y_{m+1} = (1 + hJ)y_m \quad (1.7.3)$$

olur. $hJ = z$ (z kompleks sayı) ve $R(z) = 1 + z$ denilirse (1.7.3) denklemini

$$y_{m+1} = R(z)y_m \quad (1.7.4)$$

$$R(z) = 1 + z \quad (1.7.5)$$

şeklinde olur. Burada J köşegenleştirilebilir bir matris ve v_1, v_2, \dots, v_n şeklinde özvektörlere sahip olsun. O zaman y_0 başlangıç değeri bu v_1, v_2, \dots, v_n taban vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$$

Bu başlangıç değeri de (1.7.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$y_{m+1} = R(hJ)y_m \quad (1.7.6)$$

$$y_1 = R(hJ)y_0$$

$$y_2 = (R(hJ))^2 y_1$$

⋮

$$y_{m+1} = (R(hJ))^m y_0$$

$$y_{m+1} = \sum_{j=1}^n (R(h\lambda_j))^m \alpha_j v_j \quad (1.7.7)$$

olur. Buradaki λ_j değerleri J nin özdeğerleridir. Ayrıca açık bir şekilde görülmektedir ki $m \rightarrow \infty$ iken y_m değerinin sınırlı olması için $z = h\lambda_j$ kompleks sayılarının aşağıdaki kümeye ait olması gerekir.

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-1)| \leq 1\}$$

Tanım 1.7.1. Herhangi bir metodun

$$y' = \lambda y \quad y_0 = 1 \quad (z = h\lambda) \quad (1.7.8)$$

problemine uygulanmasından sonra elde edilen $R(z)$ fonksiyonuna kararlılık fonksiyonu denir. Yukarıdaki (1.7.8) problemine Dahlquist test problemi,

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$$

bölgesine de kararlılık bölgesi denir. [1,2,5]

Kararlılık, bir metodun uygulanan adımlar sonrasında nümerik çözümünün devamlı suretle gerçek çözüme yakın değerler almasıdır. Yani belirli adımlardan sonra nümerik çözümle gerçek çözümün birbirinden ayrılıp uzaklaşmamasıdır. Meydana gelen bu uzaklaşmanın engellenebilmesi için h adım uzunluğunun yukarıda anlatılan metodun kendi kararlılık bölgesi içerisinde alınması gerekir. Örneğin Euler metodunda

$$y' = -50(y - \cos x)$$

denklemi için $\lambda = -50$ dir. $h\lambda \in S$ olması için h değerinin $0 \leq h \leq \frac{2}{50}$ aralığında

alınması gerekir ve bu aralık metodun kararlılığı için en uygun aralıktır.

Açık Runge-Kutta metotları için kararlılık

(1.3.1) de verilen ve otonom problemler için uygulanan açık tip Runge-Kutta metotlarının genel gösterimi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$g_i = y_m + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f(g_j) \quad i = 1, \dots, s$$

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=1}^s b_j h f(g_j) \quad (1.7.9)$$

Bu formüle (1.7.8) deki $y' = \lambda y$ test problemi uygulanırsa

$$g_i = y_m + h\lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} g_j \quad (1.7.10)$$

$$y_{m+1} = y_m + h\lambda \sum_{j=1}^s b_j g_j \quad (1.7.11)$$

denklemleri elde edilir. (1.7.10) denklemi (1.7.11) denkleminde yerine yerleştirilirse

$$y_{m+1} = R(z)y_m$$

$$R(z) = 1 + z \sum_j b_j + z^2 \sum_j b_j a_{jk} + z^3 \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} + \dots \quad (1.7.12)$$

şeklinde derecesi s 'den küçük $R(z)$ polinomu oluşur.

Teorem 1.7.2. Eğer herhangi bir RK metodu p 'nci mertebeden ise, kararlılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir. [3]

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} \quad (1.7.13)$$

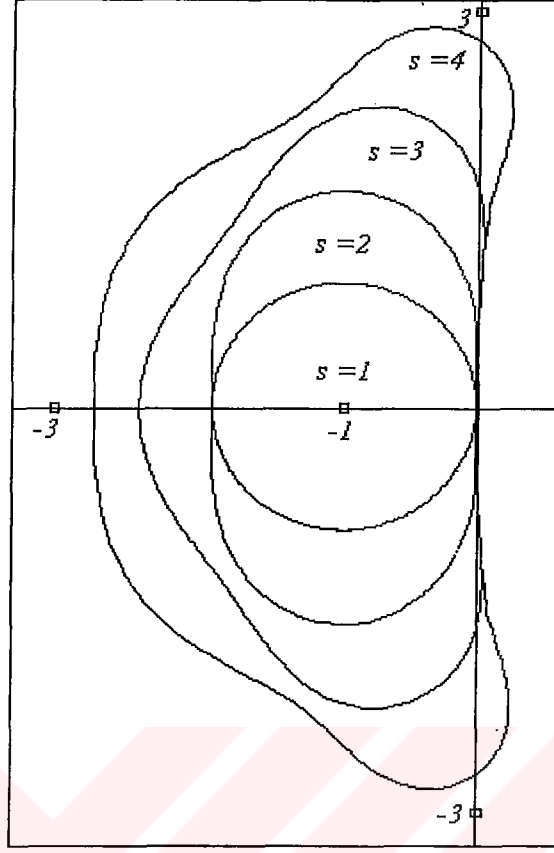
İspat: (1.7.8) probleminin gerçek çözümü e^z ve nümerik çözümü de $y_1 = R(z)$ dir. O zaman

$$e^z - R(z) = O(h^{p+1}) = O(z^{p+1}) \quad (1.7.14)$$

olmak zorundadır. Öyle ise $R(z)$ fonksiyonunun derecesi p 'den küçük tüm terimleri ile e^z nin Taylor açılımındaki derecesi p 'den küçük tüm terimleri aynı olmalıdır. Bu da (1.7.13) ifadesi demektir. Sonuç olarak $p = s$ özelliğini taşıyan tüm RK metotları için kararlılık fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$R(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^s}{s!} \quad (1.7.15)$$

$s \leq 4$ için açık RK metotların kararlılık bölgeleri Şekil 1.7.1 de gösterilmiştir.



Şekil 1.7.1. $s \leq 4$ için açık RK metotlarının kararlılık bölgeleri

Kapalı Runge-Kutta metotları için kararlılık

s basamaklı IRK metodunun genel formu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$g_i = y_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij} h f(x_0 + c_j h, g_j) \quad i=1, \dots, s \quad (1.7.16,a)$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j f(x_0 + c_j h, g_j) \quad (1.7.16,b)$$

Burada yine (1.7.16,a) denklemini $y' = \lambda y$ problemine uygulanırsa

$$g_i = y_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij} h f(x_0 + c_j h, g_j)$$

$$g_i = y_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij} h \lambda g_j$$

$$g_i = y_0 + z \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} g_j$$

olur. Bu denklem açılırsa

$$g_1 = y_0 + z(a_{11}g_1 + a_{12}g_2 + \dots + a_{1s}g_s)$$

$$g_2 = y_0 + z(a_{21}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{2s}g_s)$$

⋮

$$g_s = y_0 + z(a_{s1}g_1 + a_{s2}g_2 + \dots + a_{ss}g_s)$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Burada bazı düzenlemeler yapıldığında denklem

$$(1 - za_{11})g_1 - za_{12}g_2 - \dots - za_{1s}g_s = y_0$$

$$-za_{21}g_1 - (1 - za_{22})g_2 - \dots - za_{2s}g_s = y_0$$

⋮

$$-za_{s1}g_1 - za_{s2}g_2 - \dots - (1 - za_{ss})g_s = y_0$$

şekline gelir. Bu denklem sistemi $\bar{1} = (1, \dots, 1)^T$ olmak üzere matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{bmatrix} = y_0 \bar{1}$$

Burada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $g^T = (g_1, \dots, g_s)$ denirse denklem

$$(I - zA)g = y_0 \bar{1} \quad (1.7.17)$$

şeklinde olur. Şimdi de $b^T = (b_1, \dots, b_s)$ olmak üzere (1.7.16,b) denklemi $y' = \lambda y$ problemine uygulanırsa,

$$y_1 = y_0 + h \sum_{j=0}^s b_j f(x_0 + c_j h, g_j)$$

$$y_1 = y_0 + h\lambda \sum_{j=0}^s b_j g_j$$

$$y_1 = y_0 + z(b_1 g_1 + \dots + b_s g_s)$$

$$y_1 = y_0 + zb^T g \quad (1.7.18)$$

denklemini elde edilir. Burada (1.7.17) ve (1.7.18) denklemleri birlikte düşünülüp yine matris formunda yazılırsa aşağıdaki gibi bir denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} I - zA & 0 \\ -zb^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ y_1 \end{bmatrix} = y_0 \begin{bmatrix} \bar{1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin çözümü için Cramer kuralı kullanılarak y_1 in değeri bulunabilir ve $y_1 = R(z)y_0$ dan $R(z)$ kararlılık fonksiyonu elde edilir.

$$R(z) = \frac{\det \begin{bmatrix} I - zA & \bar{1} \\ -zb^T & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} I - zA & 0 \\ -zb^T & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} I - zA + z\bar{1}b^T & 0 \\ -zb^T & 1 \end{bmatrix}}{\det(I - zA)} = \frac{\det(I - zA + z\bar{1}b^T)}{\det(I - zA)}$$

Sonuç olarak kapalı tip Runge-Kutta metotlarının kararlılık fonksiyonları

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + z\bar{1}b^T)}{\det(I - zA)} \quad (1.7.19)$$

şeklindedir [3]. Bazı kapalı tip metotların kararlılık fonksiyonları Tablo 1.7.1 de ve kararlılık bölgeleri de Şekil 1.7.2 de verilmiştir. Burada dikkati çeken bir başka olay ise kapalı metotlar için $R(z)$ kararlılık fonksiyonları, pay ve paydası s 'den küçük olan rasyonel fonksiyonlar olmaktadır.

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{der}(P) = k, \text{ der}(Q) = j, \quad k, j < s \quad (1.7.20)$$

Eğer metot p 'ninci mertebeden ise, o zaman

$$e^z - R(z) = C z^{p+1} + O(z^{p+2}) \quad (z \rightarrow 0 \text{ için})$$

eşitliği yazılabilir (Teorem 1.7.2). Burada genel olarak $C \neq 0$ dır. Eğer değil ise o zaman $C \neq 0$ olana kadar p 'nin değeri arttırılır. Bu durumda $R(z)$ ye e^z nin rasyonel yaklaşımı denir. C değeri de yaklaşımın hatası olur.

Tanım 1.7.3. Eğer bir metodun kararlılık fonksiyonu

$$S \supset \Omega^- = \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

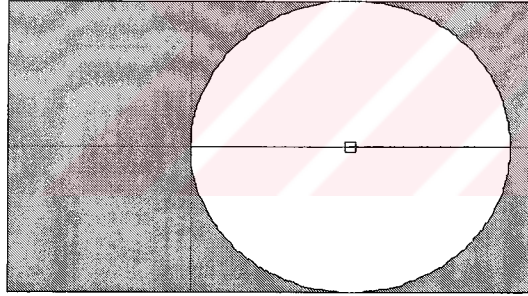
şartını sağlıyor ise bu metoda A-kararlı metod denir. Örneğin Tablo 1.7.1 deki kapalı orta nokta kuralı, yamuk kuralı, Hamer&Holligsworth, Lobatto IIIA metotları A-kararlı metotlardır.

Kararlılık fonksiyonu (1.7.20) deki gibi olan metotlarda, eğer tüm reel y ler için $|R(iy)| \leq 1$ ve $\operatorname{Re} z < 0$ iken $R(z)$ analitik ise o zaman bu metotlara A-kararlıdır denir.

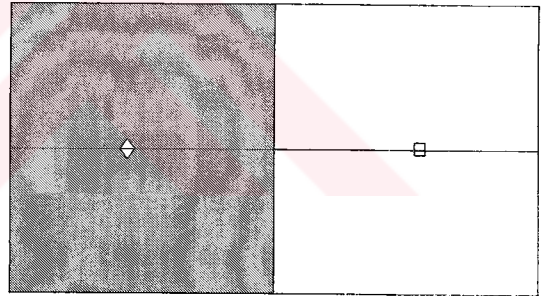
A-kararlılık özelliği, özellikle özdeğerleri çok küçük olan denklemler (stiff denklemler) için önemli bir avantaj sağlamaktadır. Şöyle ki; problemin özdeğeri küçük olduğu takdirde, kararlılık için h adım uzunluğunun büyük seçilmesi gerekir. A-kararlı olmayan metotlarda bu seçimi yapmak zordur. Ancak A-kararlı olan metotlarda kararlılık bölgesi çok büyük olduğundan h değeri istenen büyüklükte seçilebilmektedir.

Tablo 1.7.1. Bazı kapalı metotların kararlılık fonksiyonları

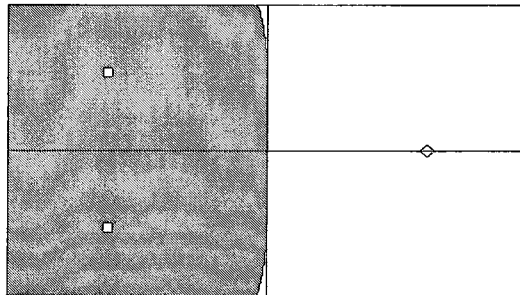
Metot	$R(z)$
Kapalı Euler	$\frac{1}{1-z}$
Kapalı orta nokta	$\frac{1+z/2}{1-z/2}$
Yamuk kuralı	$\frac{1+z/2}{1-z/2}$
Hamer&Holligsworth (4. mertebe)	$\frac{1+z/2+z^2/12}{1-z/2+z^2/12}$
SDIRK (3. mertebe)	$\frac{1+z(1-2\gamma)+z^2(1/2-2\gamma+\gamma^2)}{(1-\gamma z)^2}$
Kuntzmann-Butcher (6.mertebe)	$\frac{1+z/2+z^2/10+z^3/120}{1-z/2+z^2/10-z^3/120}$
Lobatto IIIA (4. mertebe)	$\frac{1+z/2+z^2/12}{1-z/2+z^2/12}$



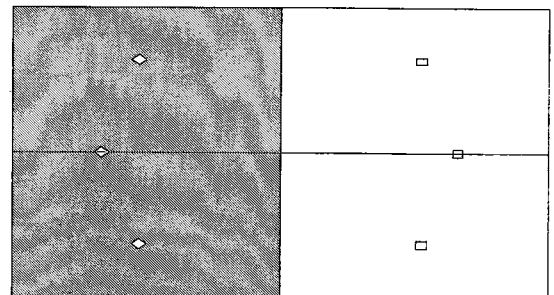
Kapalı Euler



Kapalı Orta nokta



Hamer&Holligsworth (4'üncü mertebe)



Kuntzmann-Butcher (6'ıncı mertebe)

Şekil 1.7.2. Bazı kapalı metotların kararlılık bölgeleri

2.2. ÇOK ADIMLI METOTLAR

2.2.1. Çok Adımlı Metotlar

Çok adımlı metotlar

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1.1)$$

şeklindeki başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılır. $y(x)$ bu denklemin gerçek çözümü olmak üzere, x_{j+r} noktasındaki $y(x_{j+r})$ gerçek değerinin η_{j+r} yaklaşık değeri, $y(x_k)$ gerçek değerlerinin η_k ($k = j, j+1, \dots, j+r-1$) yaklaşık değerleri ile hesaplanır. Burada $r \geq 2$ dir. $r = 1$ alınırsa metot tek adımlı hale gelir. Tek adımlı metotlarda olduğu gibi burada da aralıklar $x_k = x_0 + kh$ şeklinde alınır.

$$\eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{j+r-1} \Rightarrow \eta_{j+r} \quad (2.1.2)$$

Buradaki $\eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{j+r-1}$ başlangıç değerleri herhangi bir tek adımlı metottan elde edilebilir. Şimdi (2.1.1) denklemini dikkate alınırsa

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y)dx$$

$$\int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} dy = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t)) dt$$

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t)) dt \quad (2.1.3)$$

formülü elde edilir. Burada $f(t, y(t))$ ye Newton-Cotes metodu kullanılarak aşağıdaki özellikleri taşıyan bir $P_q(x)$ polinomu ile yaklaşılabılır.

$$(1) \text{ der}(P_q(x)) \leq q$$

$$(2) P_q(x_k) = f(x_k, y(x_k)), \quad k = p, p-1, \dots, p-q$$

Daha sonra integral içerisindeki $f(x, y(t))$ fonksiyonu yerine bulunan $P_q(x)$ polinomu yazılır. Burada x_i ler eşit aralıklı seçilir. Yani $h = x_{i+1} - x_i$ dir. $P_q(x)$

polinomunu bulmak için aşağıdaki Lagrange interpolasyonu kullanılır ve daha sonra bu polinom (2.1.3) denkleminde $f(t, y(t))$ fonksiyonunun yerine yazılırsa

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^q f(x_{p-i}, y_{p-i}) L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}}$$

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) \approx \sum_{i=0}^q f(x_{p-i}, y_{p-i}) \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x) dx$$

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) \approx h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f(x_{p-i}, y_{p-i})$$

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x) dx$$

(2.1.4)

formülleri elde edilir. Şimdi de

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}} dx$$

ifadesinde $x = x_0 + h(s + p)$ değişken değişikliği yapılırsa

$$x = x_0 + h(s + p)$$

$$dx = h.ds$$

$$x_{p+k} = x_0 + hp + hk = x_0 + hs + hp \Rightarrow s = k$$

$$x_{p-j} = x_0 + hp - hj = x_0 + hs + hp \Rightarrow s = -j$$

$$\beta_{qi} = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q$$

denklemini elde edilir. (2.1.4) deki $y(x_{p+k})$ ve $y(x_{p-j})$ değerleri yerine, bunların yaklaşık değerleri olan η_{p+k} ve η_{p-j} değerleri yerleştirilip; \approx işareti de eşit işareti ile değiştirilirse aşağıdaki formüller elde edilir.

$$\eta_{p+k} = \eta_{p-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i} \quad f_k = f(x_k, \eta_k)$$

$$\beta_{qi} = \int \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q \quad (2.1.5)$$

Bu formüllerdeki k, j ve q nun değişik seçimleri ile değişik tipte çok adımlı metotlar elde edilir. Örneğin $k=1, j=0$ ve $q=0,1,2, \dots$ seçilirse aşağıdaki gibi tanımlanan Adams-Bashforth metotları elde edilir. [1,2,5,6]

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \left[\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \dots + \beta_{qq} f_{p-q} \right]$$

$$\beta_{qi} = \int \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q \quad (2.1.6)$$

Örneğin $k=1, j=0$ ve $q=2$ alınırsa Adams-Bashforth metotlarından bir tanesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$q=2$ için $\beta_{2i} = \int \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^2 \frac{s+l}{-i+l} ds$ olur. Buradan β_{2i} katsayıları i nin değerlerine göre

$$i=0 \text{ için } \beta_{20} = \int \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq 0}}^2 \frac{s+l}{l} ds = \int_0^1 \frac{s^2 + 3s + 2}{2} ds = \frac{s^3}{6} + \frac{3s^2}{4} + s \Big|_0^1 = \frac{23}{12}$$

$$i=1 \text{ için } \beta_{21} = \int \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq 1}}^2 \frac{s+l}{-1+l} ds = \int_0^1 \frac{s}{-1} \cdot \frac{s+2}{1} ds = - \left(\frac{s^3}{3} + s^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{4}{3}$$

$$i=2 \text{ için } \beta_{22} = \int \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq 2}}^2 \frac{s+l}{-2+l} ds = \int_0^1 \frac{s}{-2} \cdot \frac{s+1}{-1} ds = \frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{10}{24}$$

şeklinde elde edildikten sonra bunlar

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \left[\beta_{20} f_p + \beta_{21} f_{p-1} + \beta_{22} f_{p-2} \right]$$

denkleminde yerine yazılarak

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \left[\frac{23}{12} f_p - \frac{16}{12} f_{p-1} + \frac{5}{12} f_{p-2} \right]$$

şeklindeki Adams-Bashford metotlarından birisi elde edilir. Eğer $q = 0$ alınırsa

$$\eta_{p+1} = \eta_p + hf_p$$

olur ki bu da açık Euler metodudur. Bazı Adams-Bashford metotlarındaki β_{qi} katsayılarını gösteren tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo 2.1.1. Adams-Bashford metotlarının katsayıları

β_{qi}	$i = 0$	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	3	-1			
$12\beta_{2i}$	23	-16	5		
$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251

Ayrıca $k = 0, j = 1$ ve $q = 0, 1, 2, \dots$ seçilirse aşağıdaki Adams-Moulton formülleri elde edilir.

$$\eta_p = \eta_{p-1} + h[\beta_{q0}f_p + \beta_{q1}f_{p-1} + \dots + \beta_{qq}f_{p-q}]$$

Burada p yerine $p+1$ yazılırsa

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h[\beta_{q0}f(x_{p+1}, \eta_{p+1}) + \beta_{q1}f_p + \dots + \beta_{qq}f_{p+1-q}]$$

$$\beta_{qi} = \int_{-1}^0 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q \quad (2.1.7)$$

denklemini elde edilir. (2.1.7) de ilk göze çarpan farklılık (2.1.2) formunda olmayışıdır. Yani η_{p+1} değerinin (2.1.7) denkleminin her iki tarafında olmasıdır. Burada verilen $\eta_p, \eta_{p-1}, \dots, \eta_{p+1-q}$ değerleri için (2.1.7) denklemini η_{p+1} değerine göre genel olarak lineer olmayan bir denklem olur. Bu tür metotlara kapalı tip çok adımlı metotlar denir. Adams-Moulton metodu da kapalı tip bir metottur. Lineer olmayan bu

tip denklemlerde η_{p+1} değerinin bulunması için aşağıdaki şekilde iteratif metotlar oluşturulur.

$$\eta_{p+1}^{(i+1)} = \eta_p + h[\beta_{q0}f(x_{p+1}, \eta_{p+1}^{(i)}) + \beta_{q1}f_p + \dots + \beta_{qq}f_{p+1-q}] \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (2.1.8)$$

Bu iterasyon için $\eta_{p+1}^{(0)}$ başlangıç değeri Adams-Bashforth gibi herhangi bir açık tip metottan elde edilebilir. Bunun için kullanılan Adams-Bashforth gibi açık tip metotlara prediktör metotlar ve Adams-Moulton gibi kapalı tip metotlara da korrektör metotlar denir. (2.1.7) deki Adams-Moulton metodu için bir kaç katsayı aşağıda verilmiştir.

Tablo 2.1.2. Adams-Moulton metotlarının katsayıları

β_{qi}	$i=0$	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	1	1			
$12\beta_{2i}$	5	8	-1		
$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

Tüm bunların dışında eğer $k=1, j=1$ alınırsa Nyström metodu elde edilir.

$$\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + h[\beta_{q0}f_p + \beta_{q1}f_{p-1} + \dots + \beta_{qq}f_{p-q}]$$

$$\beta_{qi} = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i=0,1,\dots,q \quad (2.1.9)$$

Bu metot (2.1.2) formundadır ve prediktör bir metottur.

Diğer bir metot ise Milne metodudur ve bu metotta korrektör bir metottur. Burada da $k=0, j=2$ seçilir ve p ile $p+1$ yer değiştirilerek metot elde edilir.

$$\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + h[\beta_{q0}f(x_{p+1}, \eta_{p+1}) + \beta_{q1}f_{p-1} + \dots + \beta_{qq}f_{p+1-q}]$$

$$\beta_{qi} = \int_{-2}^0 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q \quad (2.1.10)$$

Bu metotta da (2.1.8) deki gibi iterasyon kullanılır. [1,2,5,6]

2.2.2. Çok Adımlı Metotların Kararlılığı

Genel r adımlı bir çok adımlı metot

$$a_r \eta_{j+r} + a_{r-1} \eta_{j+r-1} + \dots + a_0 \eta_j = h(b_r f_{j+r} + \dots + b_0 f_j) \quad (2.2.1)$$

şeklinde yazılır. Daha önce yapıldığı gibi (2.2.1) denklemini

$$y' = Jy \quad (2.2.2)$$

şeklindeki otonom sisteme uygulanırsa

$$\begin{aligned} a_r \eta_{j+r} + a_{r-1} \eta_{j+r-1} + \dots + a_0 \eta_j &= h(b_r J \eta_{j+r} + \dots + b_0 J \eta_j) \\ a_r \eta_{j+r} + a_{r-1} \eta_{j+r-1} + \dots + a_0 \eta_j &= hJ(b_r \eta_{j+r} + \dots + b_0 \eta_j) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

şeklinde denklem elde edilir. Burada da yine η_{j+i} katsayıları J nin taban oluşturan özvektörleri cinsinden yazılabilir ve (2.2.3) denklemini

$$a_r \eta_{j+r} + a_{r-1} \eta_{j+r-1} + \dots + a_0 \eta_j = h\lambda(b_r \eta_{j+r} + \dots + b_0 \eta_j)$$

haline gelir. $h\lambda = \mu$ denilirse

$$(a_r - \mu b_r) \eta_{j+r} + \dots + (a_0 - \mu b_0) \eta_j = 0 \quad (2.2.4)$$

şeklinde bir fark denklemi elde edilir ki bu da $y' = \lambda y$ Dahlquist denkleminin uygulanması demektir.

Tanım 2.2.1. (2.2.4) denkleminde $\eta_{j+r} = \zeta^r$ denilirse

$$(a_r - \mu b_r) \zeta^r + \dots + (a_0 - \mu b_0) = 0 \quad (2.2.5)$$

denklemine (2.2.1) deki çok adımlı metodun karakteristik denklemi denir. [3]

Tanım 2.2.2.

$$S = \begin{cases} (2.2.5) \text{ denkleminin tüm } \xi_i(\mu) \text{ kökleri için } |\xi_i(\mu)| \leq 1 \\ \mu \in \mathbb{C}, \\ (2.2.5) \text{ denkleminin tüm katlı } \xi_i(\mu) \text{ kökleri için } |\xi_i(\mu)| < 1 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

kümesine (2.2.1) metodunun kararlılık bölgesi denir.

Örnek 2.2.3.

$$\eta_{j+4} = \eta_{j+3} + h \left[\frac{55}{24} f_{j+3} - \frac{59}{24} f_{j+2} + \frac{37}{24} f_{j+1} - \frac{9}{24} f_j \right]$$

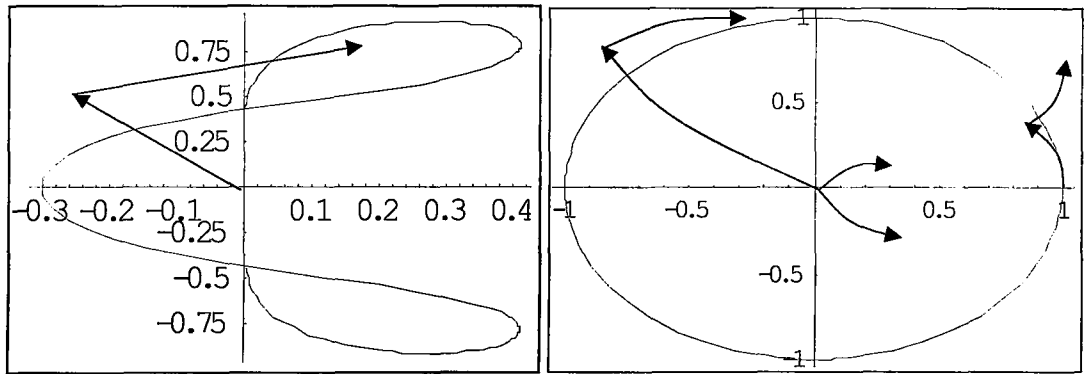
şeklindeki açık tip Adams metodu için önce $y' = \lambda y$ Dahlquist test denkleminde

$$\eta_{j+4} = \eta_{j+3} + h\lambda \left[\frac{55}{24} \eta_{j+3} - \frac{59}{24} \eta_{j+2} + \frac{37}{24} \eta_{j+1} - \frac{9}{24} \eta_j \right]$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra $h\lambda = \mu$ denilir ve $\eta_{j+r} = \zeta^r$ eşitliği uygulanırsa

$$\zeta^4 - \left(1 + \frac{55}{24}\mu\right)\zeta^3 + \frac{59}{24}\mu\zeta^2 - \frac{37}{24}\mu\zeta + \frac{9}{24}\mu = 0 \quad (2.2.7)$$

olur. Burada $\mu = 0$ için (2.2.7) denklemi, $\zeta = 1$ köküne ve $\zeta = 0$ üç katlı köküne sahiptir. Şekil 2.2.1a daki gibi μ değeri $-0.25 + 0.5i$ noktasına taşındığı zaman, buna karşılık gelen köklerin hareketi Şekil 2.2.1b de gösterilmiştir.



Şekil 2.2.1a. μ nün izlediği yol

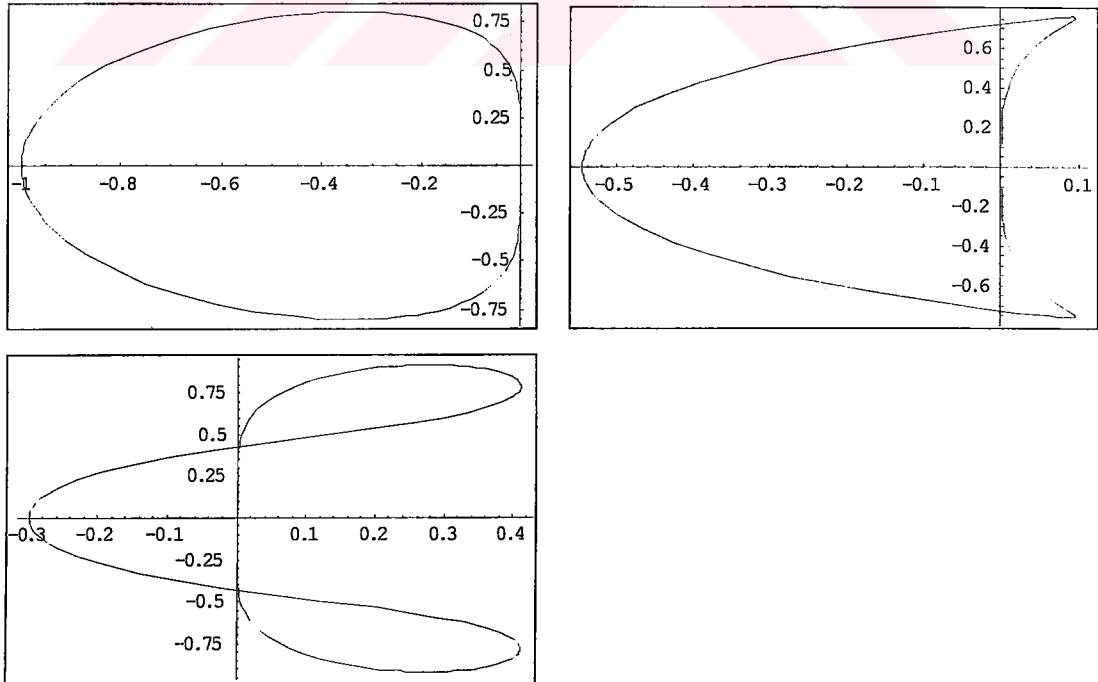
Şekil 2.2.1b. (2.2.7) nin köklerinin izlediği yol

Kararlılık için (2.2.7) denkleminin, tüm $\zeta_j(\mu)$ köklerinin birim çember içerisinde olması gerekir. Ancak Şekil 2.2.1b' de de görüldüğü üzere ikinci bölgedeki $\zeta_3(\mu)$ kökü, $e^{i\theta}$ ($\theta = 3\pi/4$) noktasında birim çemberin dışına çıkan ilk köktür. Buna karşılık gelen μ değeri (2.2.7) den elde edilen aşağıdaki denklemden bulunur.

$$\mu = \frac{e^{4i\theta} - e^{3i\theta}}{\frac{55}{24}e^{3i\theta} + \frac{59}{24}e^{2i\theta} - \frac{37}{24}e^{i\theta} + \frac{9}{24}} \quad (2.2.8)$$

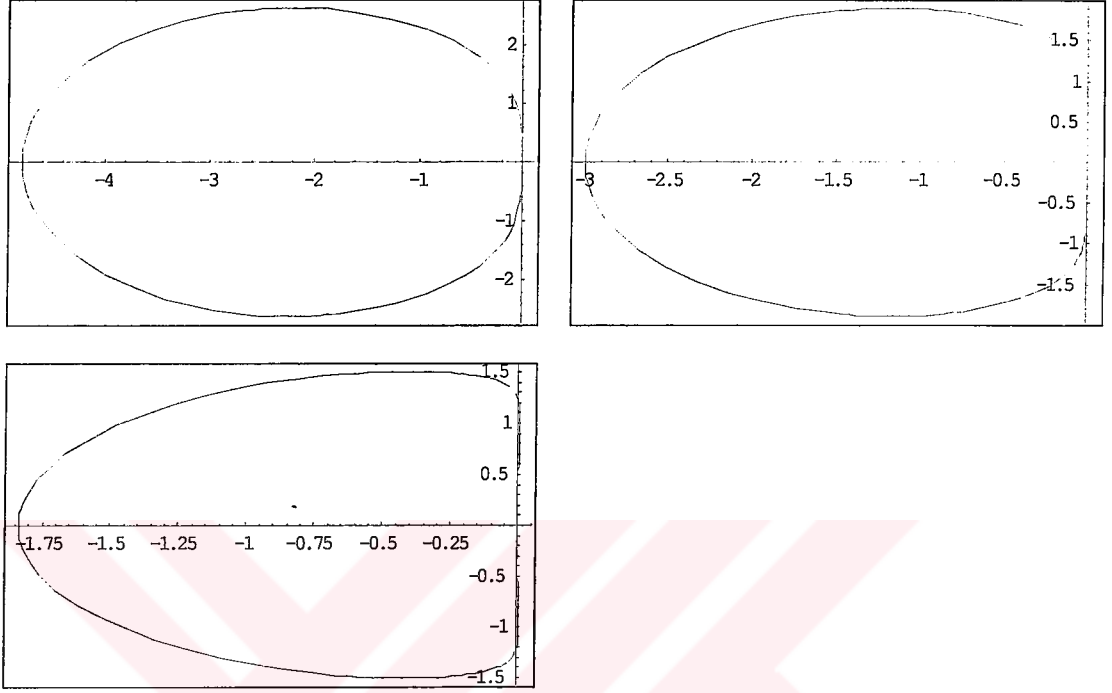
Bu denklem $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığında Şekil 2.2.1a daki eğriyi çizer. Bu eğri \square düzlemini üç bölüme ayırır. Daha önce $-0.25 + 0.5i$ noktasına hareket ettirilen μ değeri $0.25 + 0.75i$ noktasına getirilerek tekrar bölge içerisine girdirilsin. Buna karşılık $\zeta_3(\mu)$ kökü birim çember içerisine tekrar girmemektedir. (Şekil 2.2.1b). Kararlılık için μ değerinin \square^- kısmında olması gerekir. O zaman μ değerinin belirlediği bölgelerden negatif yarı düzlemde kalan kısım kararlılık bölgesi olacaktır.

Adams-Bashforth metotlarında $k=1$ için -1 merkezli 1 yarıçaplı Euler metodundaki daire elde edilir. $k=2,3,4$ için ise Şekil 2.2.2 de görüldüğü gibi \square^- bölgesindeki alan gittikçe azalmaktadır.



Şekil 2.2.2. $k = 2, 3, 4$ için Adams-Bashforth metotlarının kararlılığı

Adams-Moulton metotlarında $k=1$ için kapalı yamuk kuralı bulunur ve A-kararlıdır. $k=2,3,4$ için ise Şekil 2.2.3 de görüldüğü gibi λ bölgesindeki alan açık Adams-Bashforth metotlarından daha büyüktür ancak bunlarda A-kararlı değildir.



Şekil 2.2.3. $k=2,3,4$ için Adams-Moulton metotlarının kararlılığı

3. BÖLÜM

METOTLARIN MERTEBELERİNİN BELİRLENMESİNDE GRAFİK YÖNTEMİNİN ÖNEMİ

3.1. METOTLARIN MERTEBELERİNİN BELİRLENMESİNDE KLASİK YÖNTEM

Metotların mertebeleri, o metodun gerçek çözüme yaklaşım derecesi ile alakalıdır. Metodun mertebesi arttıkça yaklaşım miktarı da o derecede artmaktadır. Düşük mertebeli metotlarda her bir adımdaki fonksiyon hesabı az, yüksek mertebeli metotlarda ise her bir adımdaki fonksiyon hesabı daha fazladır. Ancak düşük mertebeli metotlarda çok adımla elde edilecek olan yaklaşım miktarı, daha yüksek mertebeli metotlarda bir kaç adımla elde edilebilir. O zaman mümkün olduğunca az fonksiyon hesaplı ve mümkün olduğunca yüksek mertebeli bir metot en çok istenen metot olacaktır.

Daha önce 2'nci bölüm, (1.2.6) da herhangi bir metot için $t_{n+1} = O(h^{p+1})$ ise, bu metoda p 'nci mertebededir denilmişti. Aşağıda bu tanıma eşdeğer olan başka bir tanım verilecek ve işlemler bu tanım üzerinden yapılacaktır.

Tanım 1.1. Yeterince düzgün $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ tipindeki bir başlangıç değer probleminin çözümü için kullanılan bir metot

$$\|y(x_0 + h) - y_1\| \leq K h^{p+1}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise bu metoda p 'nci mertebededir denir. [1]

Yani bu, gerçek çözüm ile nümerik çözümün Taylor seri açılımlarının baştan h^p terimine kadar (h^p terimi de dahil) çakışması anlamına gelir. O zaman klasik

yöntemle bir metodun mertebesi bulunurken, önce metodun Taylor seri açılımı daha sonra gerçek çözümün Taylor seri açılımı yapılarak çakışan terim sayısı bulunur.

Örnek 1.2.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

şeklindeki Euler metodunun mertebesini bulmak için öncelikle metodun Taylor seri açılımı yapılır.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h(f + hf' + \frac{h^2}{2!} f'' + \dots) \\ y_1 &= y_0 + h(f + h(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{2!} f'' + \dots) \\ y_1 &= y_0 + hf + h^2(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{2!} f'' + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ardından $y(x)$ gerçek çözümünün Taylor açılımı yapılır.

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y''(x) = f_x + f_y f$$

$$y'''(x) = f_{xx} + f_{xy} f + (f_{yx} + f_{yy} f) f + f_y (f_x + f_y f)$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf + \frac{h^2}{2!} (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_{yx} + f_{yy} f) + \dots \quad (1.2)$$

tanım gereğince, (1.1) ve (1.2) denklemlerinin farkı alınırsa

$$\|y(x_0 + h) - y_1\| = \left\| [y(x_0) + hf + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \dots] - [y_0 + hf + h^2 (f_x + f_y f) + \dots] \right\|$$

$$\|y(x_0 + h) - y_1\| = \left\| -\frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \dots \right\| \leq Kh^2$$

olur. Buradan Euler metodunun mertebesinin 1 olduğu bulunur.

Örnek 1.3.

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (1.3,a)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1\right) \quad (1.3,b)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \quad (1.3,c)$$

şeklindeki 2 basamaklı Heun metodu için merteye analizi aşağıdaki gibidir.

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1\right)$$

$$k_2' = f_x \frac{2}{3} + f_y \frac{2}{3}k_1 = \frac{2}{3}(f_x + f_y f)$$

$$\begin{aligned} k_2'' &= \frac{2}{3} \left(f_{xx} \frac{2}{3} + f_{xy} \frac{2}{3}f + (f_{yx} \frac{2}{3} + f_{yy}f \frac{2}{3})f \right) \\ &= \frac{4}{9}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \end{aligned}$$

Bu değerler kullanılarak k_1 ve k_2 nin Taylor açılımları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f + h \frac{2}{3}(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{2} \frac{4}{9}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2)$$

Yukarıdaki değerler (1.3,c) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}f + \frac{3h}{4} \left(f + h \frac{2}{3}(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{2} \frac{4}{9}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + f + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \quad (1.4)$$

denklemini elde edilir. Son olarak da (1.2) ve (1.4) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\|y(x_0+h) - y_1\| &= \left\| \left[y_n + f + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_{xy} + f_{yy}f) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[y_n + f + \frac{h^2}{2}(f_x + f_yf) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \right] \right\| \\
&= \left\| \frac{h^3}{6}(f_{xy} + f_{yy}f) + \dots \right\| \leq Kh^3
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak Heun metodunun mertebesi 2'dir.

Yukarıdaki iki örnekte görülmektedir ki, Örnek 1.3'de 2 basamaklı bir metodun mertebesi bulunurken yapılan işlem miktarı, Örnek 1.2'de 1 basamaklı metod için yapılan işlem miktarından çok çok fazladır. Dolayısıyla 3 veya 4 basamaklı bir metodun mertebesinin bulunması için daha da uzun ve karışık ifadelerin hesaplanması gerekecektir. Özellikle diferansiyel denklem sistemlerine uygulanan sistem şeklindeki, yüksek basamaklı metotlarda yukarıda yapıldığı gibi kısmi türevleri almak oldukça zor ve karmaşık bir iştir.

Peki metotların mertebelerinin bulunmasında daha kısa ve basit bir yol yok mu? İşte bu soruya bir sonraki kısımda cevap verilecek ve metotların mertebelerinin daha kısa ve daha basit bir şekilde nasıl hesaplanacağı anlatılacaktır. Burada çok uzun ve karışık olan türevlerin bazı grafiksel gösterimleri yapılacak ve bu grafikler üzerinden türev işlemleri gerçekleştirilerek denklemler daha kısa hale getirilecektir.

3.2. METOTLARIN MERTEBELERİNİN BELİRLENMESİNDE GRAFİK YÖNTEMİ

3.2.1. Niçin Grafik Yöntemi ?

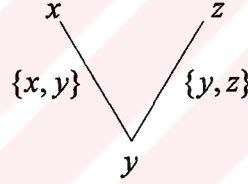
Bir önceki kısımda görüldüğü üzere metotların basamak sayıları arttıkça mertebesi analizi zorlaşmaktadır. Özellikle yüksek basamaklı metotlarda türevler alınırken oldukça uzun denklemlerle karşılaşmaktadır. Bu sebeple bu tür uzun ve karışık kısmi türevler içeren denklemlerin ağaç olarak adlandırılan bazı grafiksel gösterimleri yapılacak ve daha sonra bu ağaçlara yeni dallar eklenerek denklemin istenilen mertebeden türevleri alınmış olacaktır.

Bu yolla uzun denklemler daha basit hale getirilerek türevleri alınacak ve dolayısıyla metotların merteye analizi çok kolay bir şekilde yapılabilecektir.

3.2.2. Grafiklerle İlgili Bazı Tanımlar

Burada bahsedilecek olan grafik yöntemi, grafik teorisinin uygulama alanlarından sadece birisidir. Çok geniş uygulama alanlarına sahip olan grafik teorisi burada sadece uzun denklemleri kısaltmak amacıyla kullanılacaktır. O yüzden bu kısımda sadece konu ile ilgili tanım ve gösterimlerden bahsedilecektir.[1,2,7,8]

Tanım 2.2.1. Sonlu bir V kümesi ve bu kümenin farklı elemanlarının oluşturduğu çiftlerden meydana gelen bir E kümesi olsun. V kümesinin elemanlarına nokta, E kümesinin elemanlarına dal denir. V kümesinin elemanları ile E kümesindeki çiftler arasında bağlantı kurularak elde edilen diyagrama grafik denir. Örneğin, $V = \{x, y, z\}$ ve $E = \{(x, y), (y, z)\}$ olmak üzere (V, E) grafiği aşağıdaki şekilde gösterilir.



Tanım 2.2.2. $\Gamma = (V, E)$ ve $\Gamma' = (V', E')$ iki grafik olsun. Eğer $\forall x, y \in V$ için $(x, y) \in E$ iken $(\varphi(x), \varphi(y)) \in E'$ olacak şekilde bir $\varphi: V \rightarrow V'$ bire-bir eşlemesi var ise, o zaman $\Gamma = (V, E)$ ve $\Gamma' = (V', E')$ grafiklerine izomorfiktir denir.

İki grafik izomorfik ise, bu iki grafiğin diyagramları aynıdır, sadece noktalarının yerleri farklıdır.

Tanım 2.2.3. $\Gamma' = (V', E')$ ve $\Gamma = (V, E)$ iki grafik olsun. Eğer $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$ ise, o zaman $\Gamma' = (V', E')$ grafiğine $\Gamma = (V, E)$ grafiğinin alt grafiğidir denir.

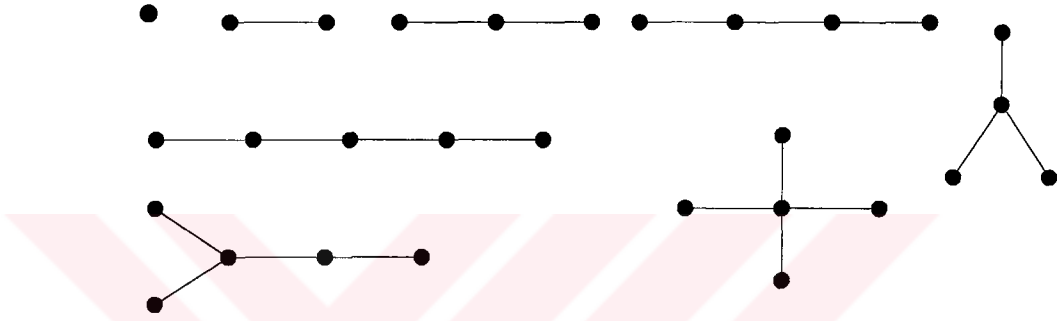
Tanım 2.2.4. $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, n$ için $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ şeklindeki

farklı e_1, e_2, \dots, e_n dallarının dizisine v_0 ' dan v_n ' ye bir zincir denir. Herhangi bir noktadan kendisine olan zincire ise devir denir.

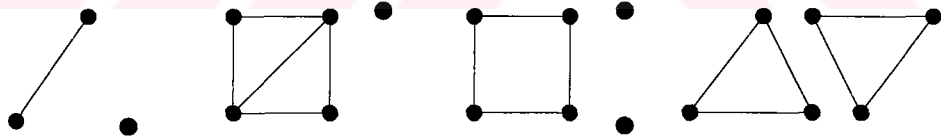
Tanım 2.2.5. Eğer bir nokta çiftinde bir noktadan diğerine zincir var ise, bu nokta çiftine bağlantılıdır denir. Eğer grafik içerisindeki her nokta çifti için bir zincir var ise, o zaman da grafiğe bağlantılıdır denir.

Tanım 2.2.6. Bağlantılı olup devirli olmayan grafiklere köksüz ağaç denir.

Örneğin aşağıdaki grafikler köksüz ağaçlardır.

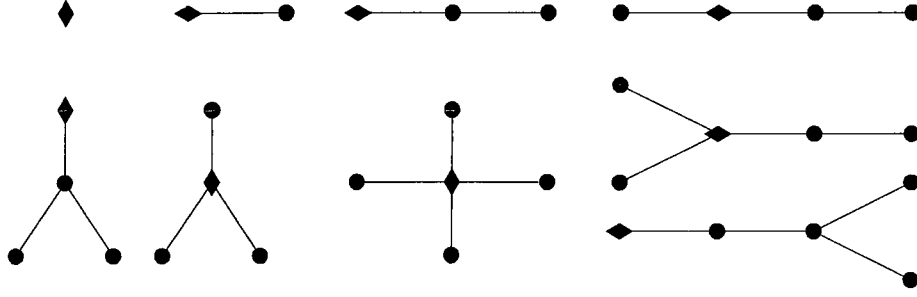


Aşağıdaki grafikler ise köksüz ağaç değildir. Çünkü bunların bazıları bağlantılı değildir, bazıları ise devirlidir.



Eğer V nin noktalarından birini diğerlerinden ayırıp buna kök denirse, o zaman köklü ağaçlar elde edilmiş olur ve bunlar (V, E, r) üçlüsü ile gösterilir. Burada (V, E) köksüz ağaç ve r 'de köktür. (V, E, r) ve (V', E', r') iki köklü ağaç için Tanım 2.2.2 deki şart sağlanıyor ve ayrıca r den r' ne eşlemesi var ise o zaman bu iki köklü ağaca izomorftur denir. [2,7,8]

Aşağıda köklü ağaçlarla ilgili örnekler verilmiştir.



3.2.3. Runge-Kutta Metotlarının Grafik Yöntemi İle Mertebesinin Bulunması

Bu kısımda metotların mertebe şartlarından daha sonra metotların mertebelerinin bulunmasından bahsedilecektir. Daha önce herhangi bir yüksek mertebeden diferansiyel denklemin lineer bir sisteme dönüştürülebileceği gösterilmişti. Şimdi n 'ninci dereceden otonom bir diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde nxn denklem sistemine çevrilmiş olsun.

$$(y^1)' = f^1(y^1, \dots, y^n)$$

$$(y^2)' = f^2(y^1, \dots, y^n)$$

⋮

$$(y^n)' = f^n(y^1, \dots, y^n)$$

(2.3.1)

Bu sistemin genel yazılımı

$$(y^J)' = f^J(y^1, \dots, y^n) \quad J = 1, \dots, n \quad (2.3.2)$$

şeklinde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü için kullanılacak Runge-Kutta metodu ise, 2'nci Bölüm (1.3.1) denkleminde tek boyutlu verilen Runge-Kutta metodunun otonom denklemler için uygulanmış olan çok boyutlu hali olacaktır. Bu da aşağıdaki şekildedir. [1]

$$g_i^J = y_0^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J(g_j^1, \dots, g_j^n) \quad i = 1, \dots, s$$

$$y_1^J = y_0^J + \sum_{j=1}^s b_j h f^J(g_j^1, \dots, g_j^n) \quad (2.3.3)$$

Burada denklemler arasında simetri olabilmesi amacıyla $k_i = f(g_i)$ denilmiştir.

2'nci Bölümün (2.1.8) kısmında metotların mertebelerini tespit ederken hem y_1^J nümerik çözümünün, hem de gerçek çözümün türevlerinin alınması gerekiyordu. Burada da nümerik çözümün türevi alınırken hem y_1^J ve hem de g_i^J nin h 'ye göre $h=0$ da türevleri alınmalıdır. Ancak yukarıdaki iki denklem simetrik olduğundan sadece g_i^J nin türevlerinin alınması yeterli olacaktır. (2.3.3) deki denklemler $h\phi(h)$ şeklinde olduğundan türev alınırken Leibniz formülü kullanılabilir. Bu formül

$$(h\phi(h))^{(q)}\Big|_{h=0} = q \cdot (\phi(h))^{(q-1)}\Big|_{h=0} \quad (2.3.4)$$

şeklindedir. Şimdi bu formül kullanılarak g_i^J nin türevleri alınabilir.

$q = 0$ için (2.3.3) den

$$(g_i^J)^{(0)}\Big|_{h=0} = y_0^J \quad (2.3.5,0)$$

$q = 1$ için (2.3.3) ve (2.3.4) den

$$(g_i^J)^{(1)}\Big|_{h=0} = \sum_j a_{ij} f^J\Big|_{y=y_0} \quad (2.3.5,1)$$

$q = 2$ için (2.3.4) ve (2.3.5,1) den dolayı $f^J(g_j)$ nin birinci türevi gerekecektir.

Öncelikle bu bulunursa

$$(f^J(g_j))^{(1)} = \sum_K f_K^J(g_j) \cdot (g_j^K)^{(1)} \quad (2.3.6,1)$$

Burada f_K^J ile $\partial f^J / \partial y^K$ türevi gösterilmiştir. (2.3.5,1) formülünde i, j, J harfleri j, k, K harfleri ile yer değiştirilip (2.3.6,1) de yerine yazılır ve (2.3.4) formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (g_i^J)^{(2)}\Big|_{h=0} &= 2 \sum_j a_{ij} (f^J(g_j))^{(1)} \\ &= 2 \sum_j a_{ij} \sum_K f_K^J \cdot (g_j^K)^{(1)} \\ &= 2 \sum_j a_{ij} \sum_K f_K^J \sum_k a_{jk} f^K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{j,k} a_{ij} a_{jk} \sum_K f_K^J f^K \\
(g_i^J)^{(2)} \Big|_{h=0} &= 2 \sum_{j,k} a_{ij} a_{jk} \sum_K f_K^J f^K \Big|_{y=y_0} \quad (2.3.5,2)
\end{aligned}$$

$q = 3$ için (2.3.6,1) in türevi alınır

$$(f^J(g_j))^{(2)} = \sum_{K,L} f_{KL}^J(g_j) \cdot (g_j^K)^{(1)} \cdot (g_j^L)^{(1)} + \sum_K f_K^J(g_j) \cdot (g_j^K)^{(2)} \quad (2.3.6,2)$$

değeri elde edilir. (2.3.5,1) ve (2.3.5,2) de elde edilen $(g_j^K)^{(1)}$ ve $(g_j^K)^{(2)}$ değerleri (2.3.6,2) de yerine yazılır ve bu da üçüncü türevde yerine yerleştirilir.

$$\begin{aligned}
(g_i^J)^{(3)} \Big|_{h=0} &= 3 \sum_j a_{ij} (f^J(g_j))^{(2)} \\
&= 3 \sum_j a_{ij} \left(\sum_{K,L} f_{KL}^J(g_j) (g_j^K)^{(1)} (g_j^L)^{(1)} + \sum_K f_K^J(g_j) (g_j^K)^{(2)} \right) \\
&= 3 \sum_j a_{ij} \sum_{K,L} f_{KL}^J \sum_k a_{jk} f^K \sum_l a_{jl} f^L + 3 \sum_j a_{ij} 2 \sum_K f_K^J \sum_{k,l} a_{jk} a_{kl} \sum_L f_L^K f^L \\
(g_i^J)^{(3)} \Big|_{h=0} &= 3 \sum_{j,k,l} a_{ij} a_{jk} a_{jl} \sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L + 3 \cdot 2 \sum_{j,k,l} a_{ij} a_{jk} a_{kl} \sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L \Big|_{y=y_0} \quad (2.3.5,3)
\end{aligned}$$

(2.3.3) deki denklemler simetrik olduğundan g_i^J nin elde edilen türevlerinde a_{ij} değerleri b_j değeriyle yer değiştirilerek y_i^J nin türevleri elde edilir.

Gerçek Çözümün Türevleri

Gerçek çözümün türevleri (2.3.2) nin türevleri alınarak daha kolay bir şekilde elde edilir. Öncelikle

$$(y^J)^{(1)} = f^J(y) \quad (2.3.7,1)$$

dir. Şimdi (2.3.2) nin ikinci türevi alınarak (2.3.7,1) değeri gerekli yere yazılırsa

$$(y^J)^{(2)} = \sum_K f_K^J(y) \cdot (y^K)^{(1)} = \sum_K f_K^J(y) f^K(y) \quad (2.3.7,2)$$

değeri elde edilir. Ardından (1.7,2) nin türevi alınarak üçüncü türev bulunur.

$$(y^J)^{(3)} = \sum_{K,L} f_{KL}^J(y) f^K(y) f^L(y) + \sum_{K,L} f_K^J(y) f_L^K(y) f^L(y) \quad (2.3.7,3)$$

3. Mertebe İçin Şartlar

3'üncü mertebe için (2.3.5,1-3) deki her bir türev (a_{ij} değerleri b_j değerleri ile yer değiştirilmek üzere) (2.3.7,1-3) deki türevlerle eşit olmak zorundadır. Buradan karşılıklı türevlerin eşitlenmesi sonucunda oluşan katsayılar arasındaki bağıntıyı gösteren aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.3.1. (2.3.3) deki Runge-Kutta metodu aşağıdaki şartları sağlar ise 3'üncü mertebededir denir.

$$\sum_j b_j = 1$$

$$2 \sum_{j,k} b_j a_{jk} = 1$$

$$3 \sum_{j,k,l} b_j a_{jk} a_{jl} = 1$$

$$6 \sum_{j,k,l} b_j a_{jk} a_{kl} = 1 \quad (2.3.8)$$

Ağaçlar ve Elementer Diferansiyeller

Yukarıdaki işlemlere devam edildiği takdirde çok uzun ve karışık ifadelerin geleceği açıktır. İşte bu ifadeleri basitleştirmek için burada grafiksel gösterime geçilecektir.

Öncelikle j, k, l ve J, K, L gibi indisler arasında a_{jk}, a_{jl}, \dots deki indis çiftlerini baz alarak bazı linkler kurulacak ve bu linklerin aynısı f_{KL}^J, f_K^J deki üst ve alt indisler arasında gerçekleştirilecektir. Örneğin (2.3.5,3) deki f_{KL}^J ve f_K^J terimleri sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterilecek ve bu objelere etiketlenmiş ağaçlar denilecektir.

$$t_{31} = \begin{array}{c} l \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \end{array}$$

$$t_{32} = \begin{array}{c} l \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \end{array}$$

$$(2.3.9)$$

Bunlar, noktaları toplamın indisleri tarafından belirlenen (etiketlenen) bağlantılı ağaçlardır. Yukarıdaki grafiksel gösterim aşağıdaki şekilde de yapılabilir.

$$l \longrightarrow j \quad k \longrightarrow j \qquad l \longrightarrow k \quad k \longrightarrow j$$

Tanım 2.3.2. $A = \{j < k < l < m < \dots\}$ sıralı bir zincir olsun ve A_q de A kümesinin ilk q tane teriminden oluşan A nın bir alt kümesi olsun.

$$t : A_q - \{j\} \rightarrow A_q, \text{ öyleki } z \in A_q - \{j\} \text{ için } z < t(z)$$

eşlemesine $q (q > 1)$ mertebeden köklü etiketlenmiş ağaç denir. q mertebeden tüm etiketlenmiş ağaçların kümesi LT_q ile gösterilir. Burada z ye $t(z)$ nin oğlu ve $t(z)$ ye de z nin babası denilecek, j ise tüm noktaların atası olacak ve buna ağacın kökü denilecektir. Etiketlenmiş ağaçların q mertebesi onun nokta sayısına eşittir ve $q = \rho(t)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.3. $t \in LT_q$ etiketlenmiş ağaca karşılık gelen elementer diferansiyel aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$F^J(t)(y) = \sum_{K,L,\dots} f_{K,\dots}^J(y) f_{\dots}^L(y) f_{\dots}^L(y) \dots$$

Burada toplam, $q-1$ tane indise bağlıdır. (Bunlar J haricindeki K, L, \dots indisleridir ve $A_q - \{j\}$ kümesine karşılık gelirler.) Toplamın elemanları ise q tane f dir ve toplam bunların çarpımından oluşur. Yine burada üst indisler t ağacının tüm noktalarını içerirler, alt indisler ise bunlara karşılık gelen çocuklardır. Eğer A_q kümesi

$$A_q = \{j_1 < j_2 < \dots < j_q\} \tag{2.3.10}$$

şeklinde yazılırsa, o zaman $F(t)$ nin türevi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F^{j_1}(t) = \sum_{j_2, \dots, j_q} \prod_{i=1}^q f_{i^{-1}(j_i)}^{j_i} \tag{2.3.11}$$

Burada herhangi bir indisin oğlu onun t dönüşümü altındaki ters görüntüsü olarak gösterilmiştir. Bazı elementer diferansiyellere aşağıdaki örnekler verilebilir.

$$\sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L \quad \sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L$$

Bunlar t_{31} ve t_{32} ağaçları için yazılmış elementer diferansiyellerdir ve (2.3.5,3) ile (2.3.7,3) denklemlerinde var olan ifadelerdir.

Aşağıdaki üç etiketlenmiş ağaç şekilsel olarak aynıdır.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} l \\ \diagdown \quad \diagup \\ m \quad k \\ \diagup \quad \diagdown \\ j \end{array} & \begin{array}{c} m \\ \diagdown \quad \diagup \\ l \quad k \\ \diagup \quad \diagdown \\ j \end{array} & \begin{array}{c} m \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \quad l \\ \diagup \quad \diagdown \\ j \end{array} \end{array} \quad (2.3.12,a)$$

Bunların belirttiği elementer diferansiyeller ise aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{K,L,M} f_{KM}^J f^M f_L^K f^L, \quad \sum_{K,L,M} f_{KL}^J f^L f_M^K f^M, \quad \sum_{K,L,M} f_{LK}^J f^K f_M^L f^M \quad (2.3.12,b)$$

Bu üç elementer diferansiyel aynıdır. Bunlar arasındaki tek fark indislerin yerlerinin değişmesidir. O halde buradan hareketle aşağıdaki tanım verilebilir.

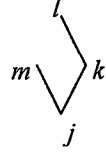
Tanım 2.3.4. A_q kümesinin elemanları arasında büyüklük sıralaması göz önüne alınarak herhangi bir t ağacının, oluşturulan tüm farklı tipteki etiketlenmeleri birbirine denktir.

Örneğin;

$q = 4$ için A_4 kümesi $A_4 = \{j > k > l > m\}$ şeklinde olsun. O zaman

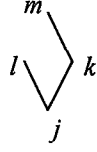
$$t = \begin{array}{c} j_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \quad j_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} j_1 > j_3 > j_4 \\ j_1 > j_2 \end{array}$$

tipindeki ağaç j_1, j_2, j_3, j_4 ün A_4 kümesindeki sıralama göz önüne alınarak oluşturulmuş olan tüm farklı seçimleriyle aşağıdaki gibi 3 farklı şekilde etiketlenir.



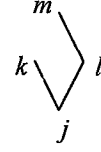
$$j > k > l$$

$$j > m$$



$$j > k > m$$

$$j > l$$



$$j > l > m$$



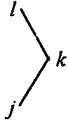





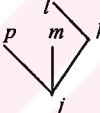
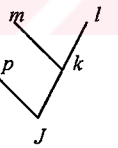
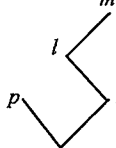
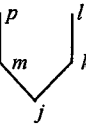

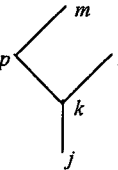
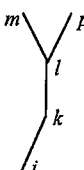
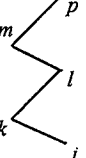
$$j > k$$

Bu üç ağaç birbirine denktir ve bunlar t ağacının denklik sınıfını oluşturur.

Tanım 2.3.5. q mertebeden tüm ağaçların kümesi T_q ile gösterilir. Ayrıca q mertebeden bir t ağacının denklik sınıfındaki eleman sayısı da $\alpha(t)$ ile gösterilir.

Sıfırıncı dereceden ağaç ϕ şeklinde gösterilip boş ağaç diye adlandırılır. Ayrıca birinci dereceden ağaçta τ şeklinde gösterilir. Tablo 2.3.1 de derecesi 5'den küçük olan tüm ağaçlar gösterilmiştir. Tablo 2.3.2 de ise 1'den 10'a kadar olan derecelerdeki ağaç sayısı gösterilmiştir. [1]

Tablo 2.3.1. Beşinci dereceye kadar olan ağaçlar ve elementer diferansiyeller

$q.$	t	Grafik	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$F^J(t)(y)$	$\Phi_J(t)$
0	ϕ	ϕ	1	1	y^J	
1	τ	$\cdot j$	1	1	f^J	1
2	t_{21}		2	1	$\sum_K f_K^J f^K$	$\sum_k a_{jk}$
3	t_{31}		3	1	$\sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{jl}$
	t_{32}		6	1	$\sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{kl}$
4	t_{41}		4	1	$\sum_{K,L,M} f_{KLM}^J f^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{jl} a_{jm}$
	t_{42}		8	3	$\sum_{K,L,M} f_{KM}^J f_L^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{jm}$
	t_{43}		12	1	$\sum_{K,L,M} f_K^J f_{LM}^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{km}$
	t_{44}		24	1	$\sum_{K,L,M} f_K^J f_L^K f_M^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{lm}$
5	t_{51}		5	1	$\sum_{K,L,M,P} f_{KLMP}^J f^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{jl} a_{jm} a_{jp}$
	t_{52}		10	6	$\sum_{K,L,M,P} f_{KMP}^J f_L^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{jm} a_{jp}$
	t_{53}		15	4	$\sum_{K,L,M,P} f_{KP}^J f_{ML}^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{km} a_{jp}$
	t_{54}		30	4	$\sum_{K,L,M,P} f_{KP}^J f_L^K f_M^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{jp}$
	t_{55}		20	3	$\sum_{K,L,M,P} f_{KM}^J f_L^K f_P^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{jm} a_{mp}$
	t_{56}		20	1	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_{LMP}^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{km} a_{kp}$
	t_{57}		40	3	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_{LP}^K f_M^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{kp}$
	t_{58}		60	1	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_L^K f_{MP}^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{ip}$
	t_{59}		120	1	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_L^K f_M^L f_P^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{mp}$

Tablo 2.3.2. 10'uncu dereceye kadar olan ağaçların sayıları

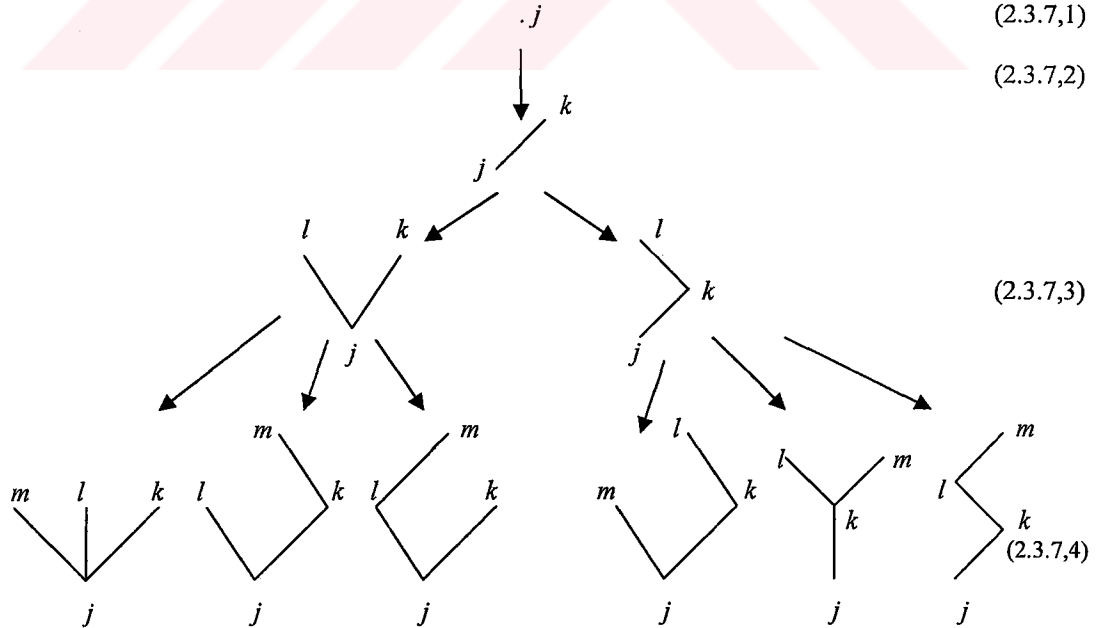
q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(T_q)$	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719

Gerçek Çözümün Taylor Açılımı

Teorem 2.3.6. (2.3.2) nin gerçek çözümü aşağıdaki denklemi sağlar. [1]

$$(y^j)^{(q)} \Big|_{x=x_0} = \sum_{t \in LT_q} F^j(t)(y_0) = \sum_{t \in T_q} \alpha(t) F^j(t)(y_0) \quad (2.3.7,q)$$

İspat: (2.3.1-3) denklemlerinden $q=1,2,3$ için denklemin doğru olduğu görülmektedir. Burada 4'üncü türev için (2.3.7,3) ün türevinin alınması gerekir. (2.3.7,3) ün oluşturduğu iki ağacın (bunlar (2.3.9) daki iki ağaçtır.) noktalarına yeni dallar ekleyerek yeni ağaçlar oluşturulur. Dolayısıyla her bir ağaç tek başına 3 ağaç oluşturur. (2.3.7,3) ün Leibniz formülü ile türevi alınır, bunların geometrik olarak (2.3.9) daki ağaçların her bir noktasına yeni dallar eklenmiş ve bunlara da yeni harfler verilmiş olan ağaçlara karşılık geldiği görülür. [1]



Şekil 2.3.1. Gerçek çözümün türevleri

Bu yolla şu söylenebilir ki q mertebeden tüm etiketlenmiş ağaçlar q 'nuncu türevin içerisinde yer alır ve bunların her biri sadece bir kez ortaya çıkar. Bu da teoremdaki ikinci eşitliği gösterir. Eğer bu aşamada bir birine denk olan elementer diferansiyeller birlikte gruplandırılırsa (2.3.7,q) nun yeni bir açılımı elde edilir ki bu da teoremdaki üçüncü eşitliği gösterir.

Faà di Bruno Formülü

y_1 nümerik çözümün ve g_j nin q 'nuncu türevini almak için öncelikle $f(g_j)$ nin türevlerinin bilinmesi gerekir. Bunun içinde öncelikle (2.3.6,1) ve (2.3.6,2) formüllerinin genelleştirmesi gerekir. Bu genelleştirme şekil 1.2 deki yöntemle elde edilecektir. Şöyle ki;

(2.3.6,2) deki formül iki terim içerir. Bu iki terime kök haricinde hiçbir yerde dallanma olmayacak şekilde yeni dallar eklenirse yeni terimler elde edilir. Burada iki terimden birincisi üç terim, ikincisi ise iki terim oluşturur. Böylelikle (2.3.6,2) nin türevi beş terim içerir ve (2.3.6,3) oluşur. Bu şekilde devam edilerek (2.3.6,3) ünde türevi alınır. (Şekil 2.3.2)

Şekil 2.3.2 deki (2.3.6,3) satırında bulunan ağaçlara karşılık gelen elementer diferansiyeller gösterilmiş ve dolayısıyla $(f^J(g))^{(3)}$ türevi elde edilmiştir.

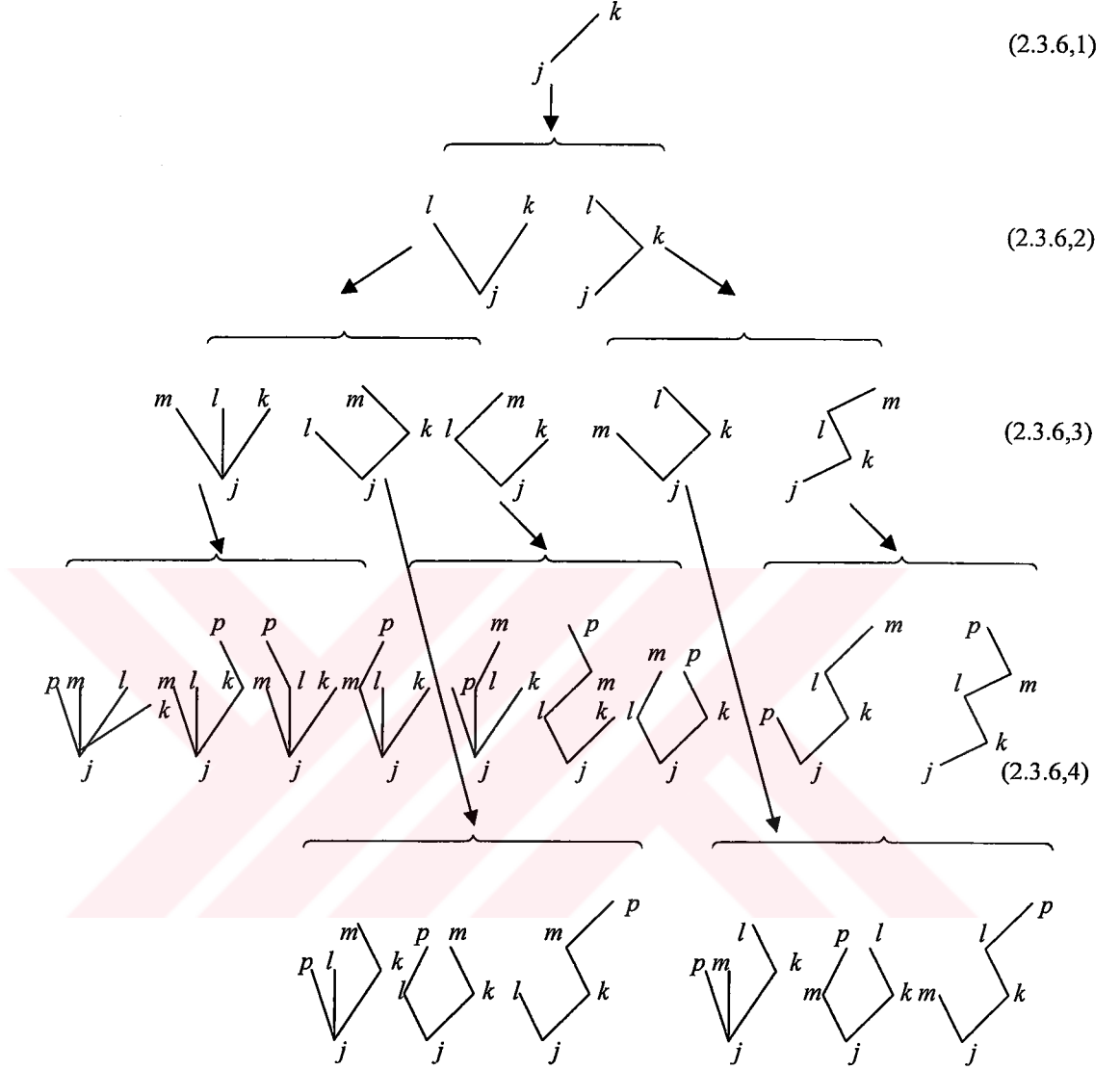
$$\begin{aligned}
 (f^J(g))^{(3)} = & \sum_{K,L,M} f_{KLM}^J(g) \cdot (g^K)^{(1)} (g^L)^{(1)} (g^M)^{(1)} \\
 & + \sum_{K,L} f_{KL}^J(g) \cdot (g^K)^{(2)} (g^L)^{(1)} + \sum_{K,L} f_{KL}^J(g) \cdot (g^K)^{(1)} (g^L)^{(2)} \\
 & + \sum_{K,M} f_{KM}^J(g) \cdot (g^K)^{(2)} (g^M)^{(1)} + \sum_K f_K^J(g) \cdot (g^K)^{(3)} \quad (2.3.6,3)
 \end{aligned}$$

Normal yollarla türev alınırken her defasında aşağıdakiler yapılmak zorundadır.

i) f_K^J ilk teriminin türevi alınır.(Bu j köküne yeni bir dal eklemek demektir.)

ii) Her bir g nin türev derecesi 1 artırılır.(Bu da bu türevlere karşılık gelen dallara yeni dallar eklemek demektir.)

Bu şekilde elde edilen ve kök haricinde hiçbir şekilde dallanmayan bu tür ağaçlara özel ağaçlar denilecektir.



Şekil 2.3.2. $f^J(g)$ nin türevleri

Tanım 2.3.7. Kök dışında hiçbir yerde dallanmayan q mertebeden ağaçlara özel etiketlenmiş ağaç denir ve LS_q ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.3.8. (Faà di Bruno Formülü) $q \geq 1$ için;

$$(f^J(g))^{(q-1)} = \sum_{u \in LS_q} \sum_{K_1 \dots K_m} f_{K_1 \dots K_m}^J(g) \cdot (g^{K_1})^{(\delta_1)} \dots (g^{K_m})^{(\delta_m)} \quad (2.3.6,q-1)$$

dir. Burada $u \in LS_q$ için m sayısı kökten ayrılan kol sayısı, $\delta_1 \dots \delta_m$ ise her bir koldaki nokta (düğüm) sayısıdır. Öyleki $q = 1 + \delta_1 + \dots + \delta_m$ dir. [1]

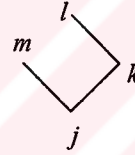
Örneğin Şekil 2.3.2 de, (2.3.6,3) deki



ağacı için $m = 3$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 1$ ve $q = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ dür. Buradan buna karşılık gelen elementer diferansiyel aşağıdaki şekildedir.

$$\sum_{K,L,M} f_{KLM}^J(g) \cdot (g^K)^{(1)} (g^L)^{(1)} (g^M)^{(1)}$$

Yine Şekil 2.3.2 de (2.3.6,3) deki diğer bir ağaç için ise,



$m = 2$, $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 1$ ve yine $q = 1 + 2 + 1 = 4$ dür. Buradan da buna karşılık gelen elementer diferansiyel

$$\sum_{K,L} f_{KL}^J(g) \cdot (g^K)^{(2)} (g^L)^{(1)}$$

şeklindedir. Böyle devam edilerek (2.3.6,3) deki tüm ağaçların elementer diferansiyelleri yazılır ve $(f^J(g))^{(3)}$ türevi elde edilmiş olur.

Nümerik Çözümün Türevleri

(2.3.5,1-3) formüllerini genelleştirmek için öncelikle aşağıdaki tanım gereklidir.

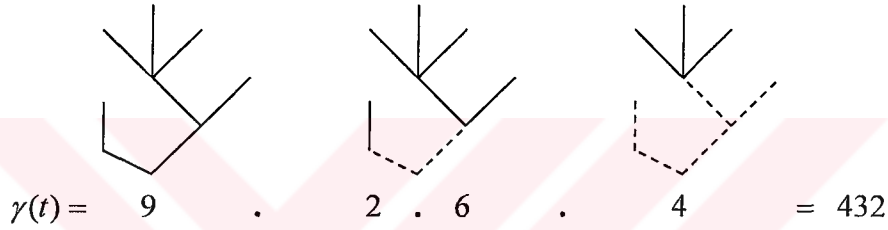
Tanım 2.3.9. t , kökü j olan etiketlenmiş bir ağaç olsun. k, l, \dots gibi $q - 1$ tane indis üzerinden tanımlı $\Phi_j(t)$ toplamı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\Phi_j(t) = \sum_{k,l,\dots} a_{jk} a_{\dots}$$

Burada toplam, $q-1$ tane a' lı terimden oluşmuştur. (Tanım 2.3.3 gibi) Ayrıca burada tüm babalar kendine ait tüm oğullarıyla ayrı ayrı ikişer ikişer a nın alt indisi olurlar. Eğer indis kümesi olarak (2.3.10) da tanımlanan A_q kümesi düşünülürse yukarıdaki toplam aşağıdaki şekilde olur.

$$\Phi_{j_1}(t) = \sum_{j_2, \dots, j_q} a_{t(j_2), j_2} \dots a_{t(j_q), j_q} \quad (2.3.13)$$

Tanım 2.3.10. $t \in LT_q$ için, $\gamma(t)$, $\rho(t)$ lerin çarpımı olarak tanımlanacaktır. Burada $\rho(t)$ herhangi bir ağaçta alttan başlayarak kök silindiğinde ortaya çıkan ağaçların mertebeleridir. (Şekil 2.3.3 e veya (2.3.17) denkleminde bakınız.)



Şekil 2.3.3. $\gamma(t)$ nin tanımı ile ilgili örnek.

Teorem 2.3.11. g_i^J nin türevleri

$$(g_i^J)^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{t \in LT_q} \gamma(t) \sum_j a_{ij} \Phi_j(t) F^J(t)(y_0) \quad (2.3.5,q)$$

şeklindedir. Buradan da (2.3.3) deki y_1^J nümerik çözümü aşağıdaki şekilde olur. [1]

$$\begin{aligned} (y_1^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= \sum_{t \in LT_q} \gamma(t) \sum_j b_j \Phi_j(t) F^J(t)(y_0) \\ &= \sum_{t \in T_q} \alpha(t) \gamma(t) \sum_j b_j \Phi_j(t) F^J(t)(y_0) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

İspat: y_1 ve g_i deki benzerlikten dolayı ((2.3.3) e bakınız) ilk denklemin ispatlanması yeterli olacaktır. Bu ispat da tümevarımdan yapılacaktır. Öncelikle $q = 1, 2, 3$ için teoremin doğruluğu (2.3.5,1-3) ifadelerinden açıkça görülmektedir.

Şimdi de $q-1$ için doğru olduğu kabul edilsin. (2.3.4) deki Leibniz formülü (2.3.3) deki g_i denkleminde uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(g_i^J)^{(q)} = q \sum_j a_{ij} (f^J(g_j))^{(q-1)} \Big|_{y=y_0} \quad (1.15)$$

Burada $(f^J(g_j))^{(q-1)}$ yerine Faà di Bruno formülü (Yardımcı Teorem 2.3.8) kullanılırsa ve bu kullanımdan sonra meydana çıkan $(g_j^{K_s})^{(\delta_s)}$ değerleri için de $\delta_s < q$ olduğundan (2.3.5,q-1) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} (g_i^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= q \sum_j a_{ij} \sum_{u \in LS_q} \sum_{K_1, \dots, K_m} f_{K_1, \dots, K_m}^J(g_j) (g_j^{K_1})^{(\delta_1)} \dots (g_j^{K_m})^{(\delta_m)} \\ &= q \sum_j a_{ij} \sum_{u \in LS_q} \sum_{K_1, \dots, K_m} f_{K_1, \dots, K_m}^J(g_j) \sum_{t_1 \in LT_{\delta_1}} \gamma(t_1) \sum_{k_1} a_{jk_1} \Phi_{k_1}(t_1) F^{K_1}(t_1)(y_0) \\ &\quad \dots \sum_{t_m \in LT_{\delta_m}} \gamma(t_m) \sum_{k_m} a_{jk_m} \Phi_{k_m}(t_m) F^{K_m}(t_m)(y_0) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki toplamlar yeniden düzenlenirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} (g_i^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= q \sum_{u \in LS_q} \sum_{t_1 \in LT_{\delta_1}} \dots \sum_{t_m \in LT_{\delta_m}} \gamma(t_1) \dots \gamma(t_m). \\ &\quad \sum_j a_{ij} \sum_{k_1} a_{jk_1} \Phi_{k_1}(t_1) \dots \sum_{k_m} a_{jk_m} \Phi_{k_m}(t_m). \\ &\quad \sum_{K_1, \dots, K_m} f_{K_1, \dots, K_m}^J(y_0) F^{K_1}(t_1)(y_0) \dots F^{K_m}(t_m)(y_0) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

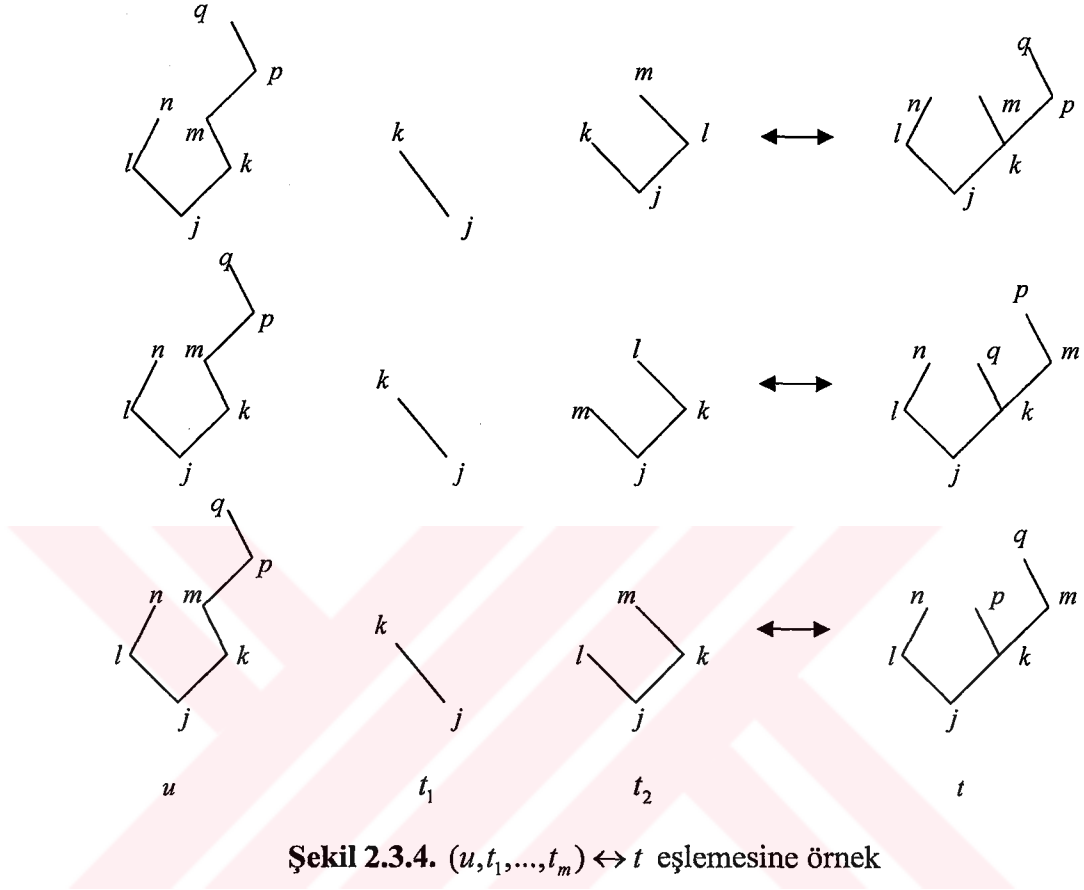
Burada her (u, t_1, \dots, t_m) , $u \in LS_q$, $t_1 \in LT_{\delta_1}$ sıralısı için buna karşılık gelen bir $t \in LT_q$ etiketlenmiş ağacı vardır öyleki;

$$\gamma(t) = q \cdot \gamma(t_1) \dots \gamma(t_m) \quad (2.3.17)$$

$$F^J(t)(y) = \sum_{K_1, \dots, K_m} f_{K_1, \dots, K_m}^J(y) F^{K_1}(t_1)(y) \dots F^{K_m}(t_m)(y) \quad (2.3.18)$$

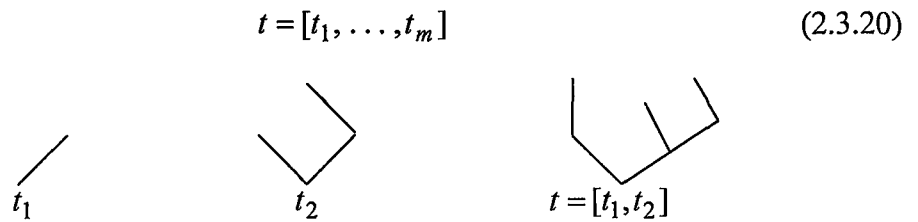
$$\Phi_j(t) = \sum_{k_1, \dots, k_m} a_{jk_1} \dots a_{jk_m} \Phi_{k_1}(t_1) \dots \Phi_{k_m}(t_m) \quad (2.3.19)$$

dir. Bu t ağacı, u nun dallarının t_1, \dots, t_m ağaçları ile yer değiştirmesiyle elde edilir. Bununla ilgili örnek Şekil 2.3.4 de verilmiştir. Bu yolla tüm $t \in LT_q$ ağaçları yalnız bir kez elde edilir. Buradan (2.3.17), (2.3.18) ve (2.3.19) denklemleri (2.3.16) denkleminde yerleştirilirse (2.3.16) denklemi (2.3.5,q) olur ve ispat biter.



Ayrıca burada t nin denklik sınıfı (Şekil 2.3.4 deki) yalnızca t_1, \dots, t_m nin denklik sınıfına eşittir. Buradan yinelemeli tanım denilen aşağıdaki tanıma geçiş yapılacaktır.

Tanım 2.3.12. t_1, \dots, t_m ağaçlarının köklerinin yeni dallar kullanılarak ortak bir köke bağlanmasıyla elde edilen yeni ağaç aşağıdaki şekilde gösterilir.



(2.3.20) kullanılarak tüm ağaçlar τ nun terimleri şeklinde gösterilebilir. Örneğin aşağıdakiler gibi,

$$t_{21} = [\tau], \quad t_{31} = [\tau, \tau], \quad t_{32} = [[\tau]] \dots \text{v.s.}$$

Teorem 2.3.13. 2'nci bölüm (1.3.1) de tanımlanan Runge-Kutta metoduna p 'ncinci mertebededir denir. Ancak ve ancak

$$\sum_j b_j \Phi_j(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$$

eşitliği, mertebesi p den küçük ve eşit tüm ağaçlar için sağlanıyor ise [1,2,9]

Tablo 2.3.2 den her bir p mertebesi için meydana gelecek mertebeye şartlarının sayısı elde edilebilir. (Tablo 2.3.3'e bakınız.)

Tablo 2.3.3. Mertebeye şartlarının sayısı

p mertebesi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mertebeye şartlarının sayısı	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Örnek 2.3.14. Daha önce Örnek 1.3 de 2 basamaklı Heun metodunun mertebesi incelenmişti. Şimdi de bu metodun mertebesi grafik yöntemi ile aşağıdaki şekilde belirlenir. Heun metodunun katsayıları

$$a_{21} = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{2}{3}, b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{3}{4} \quad (2.3.22)$$

şeklindedir. Tablo 2.3.1 den, derecesi 2 den küçük ve eşit tüm ağaçlar için

$$q = 1, t = \tau \text{ için } \sum_j b_j \Phi_j(\tau) = \frac{1}{\gamma(\tau)} \Rightarrow \sum_j b_j \cdot 1 = \sum_j b_j = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 = 1 \quad (2.3.23.1)$$

$$q = 2, t = t_{21} \text{ için } \sum_j b_j \Phi_j(t_{21}) = \frac{1}{\gamma(t_{21})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \quad (2.3.23.2)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler aynı zamanda bu metodun mertebeye şartlarıdır ve (2.3.22) de verilen değerler bu denklemleri sağlarlar.

$$b_1 + b_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \qquad b_2 a_{21} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Sonuç olarak Heun metodu, derecesi 2 ve 2 den küçük tüm ağaçlar için Teorem 2.3.13 deki eşitliği sağladığından bu metot 2'nci mertebededir. Görüldüğü gibi bu bölümün (3.1) kısmında uzun işlemlerle elde edilen Heun metodunun mertebesi burada daha kısa ve basit bir şekilde bulunmuştur.

Örnek 2.3.15. 2'nci bölüm (1.2.13) de açık şekli ve Tablo 1.3.2 de de tablo gösterimi verilen 4 basamaklı klasik Runge-Kutta metodunun mertebe şartları Tablo 2.3.1, Teorem 2.3.13 ve 2'nci bölümdeki (1.3.1) kabulleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q = 1$$

$t = \tau$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(\tau) = \frac{1}{\gamma(\tau)} \Rightarrow \sum_j b_j \cdot 1 = \sum_j b_j = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \quad (2.3.24.1)$$

$$q = 2$$

$t = t_{21}$ ağacı için

$$\begin{aligned} \sum_j b_j \Phi_j(t_{21}) &= \frac{1}{\gamma(t_{21})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} = b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) + b_4 (a_{41} + a_{42} + a_{43}) \\ &= b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.3.24.2)$$

$$q = 3$$

$t = t_{31}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{31}) = \frac{1}{\gamma(t_{31})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{jl} = b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = \frac{1}{3} \quad (2.3.24.3)$$

$t = t_{32}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{32}) = \frac{1}{\gamma(t_{32})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} = b_3 a_{32} c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{6} \quad (2.3.24.4)$$

$$q = 4$$

$t = t_{41}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{41}) = \frac{1}{\gamma(t_{41})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{jl} a_{jm} = b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = \frac{1}{4} \quad (2.3.24.5)$$

$t = t_{42}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{42}) = \frac{1}{\gamma(t_{42})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} a_{jm} = b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{8} \quad (2.3.24.6)$$

$t = t_{43}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{43}) = \frac{1}{\gamma(t_{43})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} a_{km} = b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) = \frac{1}{12} \quad (2.3.24.7)$$

$t = t_{44}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{44}) = \frac{1}{\gamma(t_{44})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} a_{lm} = b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24} \quad (2.3.24.8)$$

Ayrıca 2'nci bölüm (1.2.13) de gösterildiği gibi klasik Runge-Kutta metodunda katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$a_{21} = \frac{1}{2}, a_{31} = 0, a_{32} = \frac{1}{2}, a_{41} = 0, a_{42} = 0, a_{43} = 1$$

$$c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2}, c_4 = 1, b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{2}{6}, b_3 = \frac{2}{6}, b_4 = \frac{1}{6}$$

Bu katsayılar yukarıdaki (2.3.24.1-8) denklemlerini sağlarlar. Örneğin (2.3.24.1) denklemini için

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

veya (2.3.24.8) denklemini için

$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

sağlandığı görülür.

Buradan klasik Runge-Kutta metodu için yine Teorem 2.3.13 deki eşitlik, derecesi 4'den küçük ve eşit tüm ağaçlar için sağlandığından bu metodun mertebesi 4'tür.

Örnek 2.3.16. 2'nci bölüm Tablo 1.3.3 de verilen Kutta-Merson metodu, 5 basamaklı bir metottur. Burada örnek olarak $t = t_{59}$ ağacına bakılırsa

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{59}) = \frac{1}{\gamma(t_{59})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{mp} = \frac{1}{120}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Ancak gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_j b_j a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{mp} = b_5 a_{54} a_{43} a_{32} a_{21} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{144} \neq \frac{1}{120}$$

eşitliğin sağlanmadığı görülür. O zaman Gill metodunun mertebesi 5'den küçüktür. Aynı şeyler 4'üncü, 3'üncü, 2'nci ve 1'inci dereceden ağaçlar için de yapılırsa, bu ağaçlar için eşitliklerin sağlandığı ve dolayısıyla bu metodun mertebesinin 4 olduğu görülür. Zaten Butcher bariyerlerinden 5 basamaklı bu metodun mertebesinin 5'den küçük olması doğaldır.

3.2.4. Rosenbrock Tipi Metotların Grafik Yöntemi İle Mertebesinin Bulunması

2'inci bölüm (1.6.4) deki Rosenbrock Tipi Metotların genel (tensör) gösterimi aşağıdaki şekildedir. [3]

$$\begin{aligned} k_j^J &= hf(g_j) + h \sum_K f_K^J(y_0) \sum_k \gamma_{jk} k_k^K \\ g_i^J &= y_0^J + \sum_j \alpha_{ij} k_j^J \\ y_1^J &= y_0^J + \sum_j b_j k_j^J \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Daha önce yapıldığı gibi burada da (2.4.4) deki Leibniz kuralı uygulanırsa,

$$(k_j^J)^{(q)} \Big|_{h=0} = q(f^J(g_j))^{(q-1)} \Big|_{h=0} + q \sum_K f_K^J(y_0) \sum_k \gamma_{jk} (k_k^K)^{(q-1)} \Big|_{h=0} \quad (2.4.2)$$

olur ve zincir kuralından daha önce elde edilen (2.3.6,1), (2.3.6,2) değerleri

$$(f^J(g_j))' = \sum_K f_K^J(g_j)(g_j^K)'$$

$$(f^J(g_j))'' = \sum_{K,L} f_{KL}^J(g_j)(g_j^K)'(g_j^L)' + \sum_K f_K^J(g_j)(g_j^K)''$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler (2.4.2) de kullanılırsa aşağıdaki türevler elde edilir.

$$(k_j^J)^{(0)} \Big|_{h=0} = 0 \quad (2.4.3,0)$$

$$(k_j^J)^{(1)} \Big|_{h=0} = f^J \quad (2.4.3,1)$$

$$\begin{aligned} (k_j^J)^{(2)} \Big|_{h=0} &= 2 \sum_K f_K^J \sum_k \alpha_{jk} f^K + 2 \sum_K f_K^J \sum_k \gamma_{jk} f^K \\ &= 2 \sum_K f_K^J f^K \sum_k \alpha_{jk} + 2 \sum_K f_K^J f^K \sum_k \gamma_{jk} \\ &= 2 \sum_K f_K^J f^K \sum_k (\alpha_{jk} + \gamma_{jk}) \end{aligned} \quad (2.4.3,2)$$

$$\begin{aligned} (k_j^J)^{(3)} \Big|_{h=0} &= 3(f^J(g_j))^{(2)} + 3 \sum_K f_K^J(y_0) \sum_k \gamma_{jk} (k_k^K)^{(2)} \\ &= 3 \sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L \sum_{k,l} \alpha_{jk} \alpha_{jl} + 3 \sum_K f_K^J \sum_k \alpha_{jk} 2 \sum_{K,L} f_L^K f^L \sum_k (\alpha_{kl} + \gamma_{kl}) \\ &\quad + 3 \sum_K f_K^J \sum_k \gamma_{jk} 2 \sum_{K,L} f_L^K f^L \sum_k (\alpha_{kl} + \gamma_{kl}) \\ &= 3 \sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L \sum_{k,l} \alpha_{jk} \alpha_{jl} + 3.2 \sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L \sum_{k,l} (\alpha_{jk} + \gamma_{jk})(\alpha_{kl} + \gamma_{kl}) \end{aligned} \quad (2.4.3,3)$$

Bu türevler kullanılarak $q \geq 1$ için (2.4.1) deki y_1^J nümerik çözümünün türevleri aşağıdaki gibi olur.

$$(y_1^J)^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_j b_j (k_j^J)^{(q)} \Big|_{h=0} \quad (2.4.4)$$

(2.4.4) deki nümerik çözümün türevleri, daha önce elde edilen (2.3.7,1), (2.3.7,2) ve (2.3.7,3) formüllerindeki gerçek çözüm ile karşılaştırılırsa aşağıdaki mertebe şartlarına ulaşılır.

$$\begin{aligned}
& \cdot j \quad \sum b_j = 1 \\
& \begin{array}{c} \diagup \\ j \end{array} \begin{array}{c} k \\ \diagdown \end{array} \quad \sum b_j (\alpha_{jk} + \gamma_{jk}) = \frac{1}{2} \\
& \begin{array}{c} l \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \end{array} \quad \sum b_j \alpha_{jk} \gamma_{jl} = \frac{1}{3} \\
& \begin{array}{c} l \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad k \end{array} \quad \sum b_j (\alpha_{jk} + \gamma_{jk})(\alpha_{kl} + \gamma_{kl}) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Buradaki durum daha önce bahsedilen Runge-Kutta metodundaki mertebeye şartlarından farklıdır. Bazı durumlarda α_{jk} değeri $\alpha_{jk} + \gamma_{jk}$ ile yer değiştirmektedir. Peki hangi durumlarda bu yer değiştirme olmaktadır? Bu aşağıdaki tanımla açıklanacaktır.

Tanım 2.4.1. t , q mertebeden, kökü j olan bir etiketlenmiş ağaç olsun. k, l, \dots gibi $q-1$ tane indis üzerinden tanımlı $\Phi_j(t)$ toplamı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\Phi_j(t) = \sum_{k, l, \dots} \varphi_{j, k, l, \dots}$$

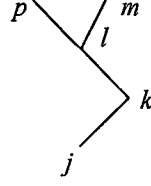
Eğer l , k nın bir tek oğlu ise $\alpha_{kl} + \gamma_{kl}$

Eğer l , k nın oğlu ve k nın l dışında en az bir oğlu daha var ise α_{kl}

Ayrıca Tanım 2.3.12 deki ağaçların yinelemeli tanımı ve (2.3.19) ifadesi kullanılarak $\Phi_j(t)$ nin tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir. Burada 1'inci mertebeden ağaç için $\Phi_j(t) = 1$ dir.

$$\Phi_j(t) = \begin{cases} t = [t_1 \dots t_m], m \geq 2 \text{ ise} & \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{jk_1} \dots \alpha_{jk_m} \Phi_{k_1}(t_1) \dots \Phi_{k_m}(t_m) \\ t = [t_1] \text{ ise} & \sum_k (\alpha_{jk} + \gamma_{jk} \Phi_k)(t_1) \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Örnek 2.4.2. Aşağıdaki ağacın hem Tanım 2.4.1 hem de (2.4.5) ifadesi kullanılarak elementer diferansiyeli aşağıdaki şekilde elde edilir.



Tanım 2.4.1 kullanılarak:

k , j nin tek oğlu olduğundan $\alpha_{jk} + \gamma_{jk}$

l , k nin tek oğlu olduğundan $\alpha_{kl} + \gamma_{kl}$

m , l nin iki oğlundan biri olduğundan α_{lm}

p , l nin iki oğlundan diğeri olduğundan α_{lp}

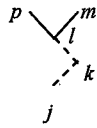
olur. Şimdi de bunların çarpımından

$$\sum (\alpha_{jk} + \gamma_{jk})(\alpha_{kl} + \gamma_{kl})\alpha_{lm}\alpha_{lp}$$

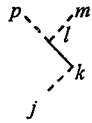
elde edilir.

(2.4.5) ifadesi kullanılarak:

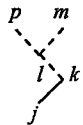
Ağacın genel gösterimi $[[[T,T]]]$ dir.



$$\Rightarrow [T,T] \Rightarrow (2.4.5) \text{ den } \Rightarrow \alpha_{lm}\alpha_{lp}$$



$$\Rightarrow [T] \Rightarrow (2.4.5) \text{ den } \Rightarrow \alpha_{kl} + \gamma_{kl}$$



$$\Rightarrow [T] \Rightarrow (2.4.5) \text{ den } \Rightarrow \alpha_{jk} + \gamma_{jk}$$

olur. Buradan da yine bunlar çarpılırsa

$$\sum (\alpha_{jk} + \gamma_{jk})(\alpha_{kl} + \gamma_{kl})\alpha_{lm}\alpha_{lp}$$

elementer diferansiyeli elde edilir ki bu da daha önce Tanım 2.4.1 kullanılarak elde edilen elementer diferansiyelle aynıdır.

Teorem 2.4.3. (2.4.1) de verilen k_j^J nin türevleri aşağıdaki ifadeyi sağlar.

$$(k_j^J)^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{t \in LT_q} \gamma(t) \Phi_j(t) F^J(t)(y_0) \quad (2.4.3,q)$$

ve y_1^J nümerik çözüm aşağıdaki denklemi sağlar. [3]

$$(y_1^J)^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{t \in LT_q} \gamma(t) \sum_j b_j \Phi_j(t) F^J(t)(y_0) \quad (2.4.6)$$

İspat: (2.4.4) den dolayı sadece ilk ifadenin ispatlanması yeterli olacaktır. Bu da Teorem 2.3.11 in ispatına benzer şekilde tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. Bunun için (2.4.2) deki $f^J(g_j)^{(q-1)}$ değeri yerine Faà di Bruno formülündeki ifade (Yardımcı Teorem 2.3.8) yazılırsa

$$\begin{aligned} (k_i^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= q(f^J(g_j))^{(q-1)} \Big|_{h=0} + q \sum_K f_K^J(y_0) \sum_k \gamma_{jk} (k_k^K)^{(q-1)} \Big|_{h=0} \\ &= q \sum_{u \in LS_q} \sum_{K_1 \dots K_m} f_{K_1 \dots K_m}^J(g_j) (g^{K_1})^{(\delta_1)} \dots (g^{K_m})^{(\delta_m)} + q \sum_K f_K^J \sum_k \gamma_{jk} (k_k^K) \Big|_{h=0} \end{aligned}$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Burada $(g^K)^{(\delta)}$ değerleri yerine

$$(g_j^K)^{(\delta)} = \sum_k \alpha_{jk} (k_k^K)^{(\delta)}$$

ifadesi ve $(k_k^K)^{(q-1)}$ değeri yerine de tümevarımdan dolayı teoremin ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} (k_i^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= q \sum_{u \in LS_q} \sum_{K_1 \dots K_m} f_{K_1 \dots K_m}^J(g_j) \sum_{k_1} \alpha_{jk_1} (k_{k_1}^{K_1})^{(\delta_1)} \dots \sum_{k_m} \alpha_{jk_m} (k_{k_m}^{K_m})^{(\delta_m)} \\ &\quad + q \sum_K f_K^J \sum_k \gamma_{jk} \sum_{t_1 \in LT_{q-1}} \gamma(t_1) \Phi_k(t_1) F^k(t_1)(y_0) \end{aligned}$$

değeri elde edilir. Buradaki tüm $(k_k^K)^{(\delta)}$ değerleri için $\delta_s < q$ olduğundan yine tümevarım gereğince bunların yerine teoremin ifadesindeki eşitlik kullanılabilir.

$$\begin{aligned} (k_i^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= q \sum_{u \in LS_q} \sum_{K_1 \dots K_m} f_{K_1 \dots K_m}^J(g_j) \sum_{k_1} \alpha_{jk_1} \sum_{t_1 \in LT_{\delta_1}} \gamma(t_1) \Phi_{k_1}(t_1) F^{K_1}(t_1)(y_0) \dots \\ &\dots \sum_{k_m} \alpha_{jk_m} \sum_{t_m \in LT_{\delta_m}} \gamma(t_m) \Phi_{k_m}(t_m) F^{K_m}(t_m)(y_0) \\ &+ q \sum_{t_1 \in LT_{q-1}} \gamma(t_1) \sum_k \gamma_{jk} \Phi_k(t_1) \sum_K f_K^J(y_0) F^K(t_1)(y_0) \end{aligned}$$

Son olarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (k_j^J)^{(q)} \Big|_{h=0} &= q \sum_{u \in LS_q} \sum_{t_1 \in LT_{\delta_1}} \dots \sum_{t_m \in LT_{\delta_m}} \gamma(t_1) \dots \gamma(t_m) \\ &\cdot \sum_{k_1} \alpha_{jk_1} \Phi_{k_1}(t_1) \dots \sum_{k_m} \alpha_{jk_m} \Phi_{k_m}(t_m) \\ &\cdot \sum_{K_1 \dots K_m} f_{K_1 \dots K_m}^J(y_0) F^{K_1}(t_1)(y_0) \dots F^{K_m}(t_m)(y_0) \\ &+ q \sum_{t_1 \in LT_{q-1}} \gamma(t_1) \sum_k \gamma_{jk}(t_1) \sum_K f_K^J(y_0) F^K(t_1)(y_0) \end{aligned}$$



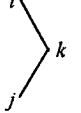
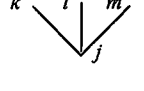
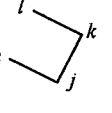
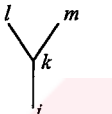


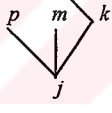
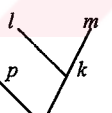
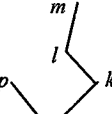
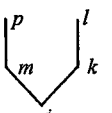
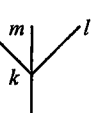
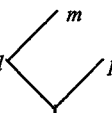
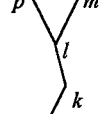

olur. Buradan (2.4.5) deki yinelemeli tanım, (2.3.17), (2.3.18) ve (2.3.19) eşitlikleri kullanılarak elde edilen LT_q ile $\{(u, t_1, \dots, t_m) \mid u \in LS_q, t_j \in T_{\delta_j}\}$ kümesi arasındaki bire-bir eşleme sonucunu verir.

Teorem 2.4.4. $J = f'(y_0)$ olmak üzere 2'nci bölüm (1.6.4) de tanımlanan Rosenbrock metodu için eğer aşağıdaki eşitlik sağlanıyor ise, o zaman bu metoda p 'nci mertebededir denir. [3]

$$\sum_j b_j \Phi_j(t) = \frac{1}{\gamma(t)} \quad (\text{tüm } \rho(t) \leq p \text{ için}) \quad (2.4.7)$$

$\Phi_j(t)$ ifadelerini daha da basitleştirmek için bundan sonra $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij}$ kısaltması kullanılacaktır. 5'inci mertebeye kadar olan mertebe şartları Tablo 2.4.1 de verilmiştir.

Tablo 2.4.1. Beşinci dereceye kadar olan ağaçlar ve elementer diferansiyeller

q	t	Grafik	$\gamma(t)$	$\Phi_j(t)$
1	τ	\cdot_j	1	1
2	t_{21}		2	$\sum_j \beta_{jk}$
3	t_{31}		3	$\sum_{k,l} \alpha_{jk} \alpha_{jl}$
	t_{32}		6	$\sum_{k,l} \beta_{jk} \beta_{kl}$
4	t_{41}		4	$\sum_{k,l,m} \alpha_{jk} \alpha_{jl} \alpha_{jm}$
	t_{42}		8	$\sum_{k,l,m} \alpha_{jk} \beta_{kl} \alpha_{jm}$
	t_{43}		12	$\sum_{k,l,m} \beta_{jk} \alpha_{kl} \alpha_{km}$
	t_{44}		24	$\sum_{k,l,m} \beta_{jk} \beta_{kl} \beta_{lm}$
5	t_{51}		5	$\sum \alpha_{jk} \alpha_{jl} \alpha_{jm} \alpha_{jp}$
	t_{52}		10	$\sum \alpha_{jk} \beta_{kl} \alpha_{jm} \alpha_{jp}$
	t_{53}		15	$\sum \alpha_{jk} \alpha_{kl} \alpha_{km} \alpha_{jp}$
	t_{54}		30	$\sum \alpha_{jk} \beta_{kl} \beta_{lm} \alpha_{jp}$
	t_{55}		20	$\sum \alpha_{jk} \beta_{kl} \alpha_{jm} \beta_{mp}$
	t_{56}		20	$\sum \beta_{jk} \alpha_{kl} \alpha_{km} \alpha_{kp}$
	t_{57}		40	$\sum \beta_{jk} \alpha_{kl} \beta_{lm} \alpha_{kp}$
	t_{58}		60	$\sum \beta_{jk} \beta_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{lp}$
	t_{59}		120	$\sum \beta_{jk} \beta_{kl} \beta_{lm} \beta_{mp}$

4. BÖLÜM

ÇOK ADIMLI ROSENBROCK TİPİ BİR METODUN MERTEBE ve KARARLILIK ANALİZİ ve SAYISAL SONUÇLARI

4.1. GJ METODU

İki Fonksiyon Değerli Üçüncü Mertebeden Metot

Bu bölümde $y' = f(x, y)$ probleminin çözümü için çok adımlı, Rosenbrock tipi yeni bir metottan bahsedilecektir. Öncelikle f ve f' değerlerinin hesaplanabildiği kabul edilecektir. Buradaki yenilik Runge-Kutta metodundaki f değerini f' değeri ile değiştirip metodun mertebesini yükseltmektir. f' değeri hem yaklaşık olarak hem de tam olarak bulunabilir. Bu yüzden eğer f değeri f' nün yaklaşık değeri ile değiştirilirse, metot çok adımlı olarak düşünülebilir.

Runge-Kutta metotlarının mertebelerini arttırmak için Taylor seri açılımındaki terim sayısını arttırmak, dolayısıyla metottaki fonksiyon sayısını arttırmak gerekirdi. Ancak bahsedilecek olan bu metot, Runge-Kutta metodundaki k_i ($i > 1$) değerlerinin içine f nin türevini yerleştirerek fonksiyon sayısını arttırmadan mertebeyi yükseltmektedir. $y' = f(y)$ şeklindeki otonom problemler için iki fonksiyon değerli metodun genel formu aşağıdaki şekildedir. [10,11]

$$k_1 = hf(y_n) \text{ ve } k_2 = hf(y_n + a_{21}k_1 + ha_{22}f_y(y_n)k_1) \quad (1.1,a)$$

$$y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2 \quad (1.1,b)$$

Bu metotlara GJ3 metotları denir. Yukarıdaki ifadelerde mevcut olan b_1, b_2, a_{21}, a_{22} parametrelerini bulmak için yine bu ifadelerin Taylor seri açılımları yapıp gerçek çözümün açılımı ile karşılaştırılmalıdır. Ancak kolaylık açısından yukarıdaki metot aşağıdaki şekilde yazılıp daha sonra türevleri alınacaktır.

$$k_1 = f(y_n) \text{ ve } k_2 = f(y_n + a_{21}hf(y_n)) + h^2 a_{22}f_y(y_n)f(y_n) \quad (1.2,a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2) \quad (1.2,b)$$

Bu yazımın metotta herhangi bir değişiklik meydana getirmediği açıktır. k_1 ifadesinin Taylor açılımı

$$k_1|_{h=0} = f(y_n) \quad (1.3)$$

şeklindedir. k_2 ifadesinin Taylor açılımı ise aşağıdaki gibidir.

$$k_2 = f(y_n + a_{21}hf(y_n)) + h^2 a_{22}f_y(y_n)f(y_n)$$

$$k_2^{(0)}|_{h=0} = f \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} k_2^{(1)}|_{h=0} &= f_y(a_{21}f + 2ha_{22}f_yf)|_{h=0} \\ &= a_{21}ff_y \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} k_2^{(2)}|_{h=0} &= (f_y(a_{21}f + 2ha_{22}f_yf))^{(1)}|_{h=0} \\ &= (f_{yy}(a_{21}f + 2ha_{22}f_yf)^2 + f_y(2a_{22}f_yf))|_{h=0} \\ &= a_{21}^2 f^2 f_{yy} + 2a_{22}ff_{yy} \end{aligned} \quad (1.6)$$

(1.4), (1.5) ve (1.6) değerleri aşağıdaki ifadede yerlerine yazılırsa k_2 ifadesinin Taylor açılımı elde edilmiş olur.

$$k_2 = k_2^{(0)} + hk_2^{(1)} + \frac{h^2}{2}k_2^{(2)} + \dots$$

$$k_2 = f + ha_{21}ff_y + \frac{h^2}{2}a_{21}^2 f^2 f_{yy} + h^2 a_{22}ff_{yy} + \dots \quad (1.7)$$

Bulunan (1.3) ve (1.7) ifadeleri (1.2,b) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_{n+1} = y_n + h[b_1f + b_2(f + ha_{21}ff_y + \frac{h^2}{2}a_{21}^2 f^2 f_{yy} + h^2 a_{22}ff_{yy} + \dots)]$$

$$y_{n+1} = y_n + hb_1f + hb_2f + h^2b_2a_{21}ff_y + \frac{h^3}{2}b_2a_{21}^2f^2f_{yy} + h^3b_2a_{22}ff_{yy} + \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 + b_2)f + h^2b_2a_{21}ff_y + h^3\frac{b_2a_{21}^2}{2}f^2f_{yy} + h^3b_2a_{22}ff_{yy} + \dots \quad (1.8)$$

olur. Bu son ifade gerçek çözümün Taylor açılımı olan

$$y_{n+1} = y_n + hf + h^2\frac{1}{2}ff_y + h^3\frac{1}{6}f^2f_{yy} + h^3\frac{1}{6}ff_{yy} + \dots \quad (1.9)$$

ifadesiyle karşılaştırılırsa aşağıdaki 4 bilinmeyenli 4 denklem elde edilir.

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (1.10,a)$$

$$b_2a_{21} = \frac{1}{2} \quad (1.10,b)$$

$$b_2a_{21}^2 = \frac{1}{3} \quad (1.10,c)$$

$$b_2a_{22} = \frac{1}{6} \quad (1.10,d)$$

Bu denklemler aynı zamanda bu metodun merteye şartlarıdır. (1.10,b) ve (1.10,c) değerleri oranlanıp a_{21} değeri bulunur ve daha sonra bu değerden faydalanarak diğer parametreler bulunursa aşağıdaki değerler elde edilir.

$$b_1 = \frac{1}{4} \quad b_2 = \frac{3}{4} \quad a_{21} = \frac{2}{3} \quad a_{22} = \frac{2}{9} \quad (1.11)$$

Sonuç olarak (1.1) de genel ifadesiyle verilen metottan, (1.11) deki parametrelerin seçilmesiyle aşağıdaki metot elde edilir.

$$k_1 = hf(y_n) \text{ ve } k_2 = hf(y_n + \frac{2}{3}k_1 + h\frac{2}{9}f_y(y_n)k_1) \quad (1.12,a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \quad (1.12,b)$$

Bu metoda GJ3 metodu denilecektir. Burada verilen başlangıç değer problemi otonom olduğundan $f_x = 0$ ve $y'' = f' = f_y f$ dir. Ayrıca $k_1 = hf(y_n)$ ve

$$hf_y(y_n)k_1 = hf_y(y_n)f = h^2f'(y_n) = h^2f'_n = h^2f'$$

olduğundan k_2 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$k_2 = hf(y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}hf_y k_1) = hf(y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}h^2 f_y f) = hf(y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}h^2 f')$$

Burada ki f' değeri iki şekilde bulunur. Eğer f' türevi biliniyor ise k_2 vektörünün değer aldığı nokta

$$y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}hf_y k_1 = y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}h^2 f'_n$$

şeklindedir. Eğer f' türevi f nin bazı noktalarından elde edilirse, o zaman da k_2 vektörünün değer aldığı nokta aşağıdaki şekilde olur.

$$y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}hf_y k_1 = y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}h^2 \hat{f}'_n, \quad \hat{f}'_n = \frac{f(y_n) - f(y_{n-1})}{h}$$

Buradan metot aşağıdaki çok adımlı metoda dönüşür.

$$k_1 = hf(y_n) \text{ ve } k_2 = hf(y_n + \frac{2}{3}k_1 + h\frac{2}{9}(f(y_n) - f(y_{n-1})))$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \quad (1.13)$$

Üç Fonksiyon Değerli Dördüncü Mertebeden Metot

Dördüncü mertebeden GJ metotlarının genel formu aşağıdaki şekildedir. [10,11]

$$k_1 = hf(y_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + a_{21}k_1 + ha_{22}f_y(y_n)k_1)$$

$$k_3 = hf(y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + ha_{33}f_y(y_n)k_1 + ha_{34}f_y(y_n)k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3)$$

Bu tür metotlara özel olarak GJ4 metotları denilecektir. Burada da yine Taylor seri açılımları karşılaştırılarak bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümleri $a_{34} = 0$ olmak üzere aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1.1. GJ4 Metodunun Mertebe Şartlarının Çözüm Kümesi

b_1	b_2	b_3	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	-1	2	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	3	-2	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{25}{24}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{5}{18}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{35}{24}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$

Otonom Olmayan Problemler İçin Metot

$y' = f(x, y)$ tipindeki otonom olmayan denklem için metot aşağıdaki şekilde olur.

Burada sadece $f_y k_1$ teriminin içine hf_x yerleştirilir.

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + hc_{21}, y_n + a_{21}k_1 + ha_{22}(f_y(x_n, y_n)k_1 + hf_x(x_n, y_n)))$$

$$y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2$$

Yine daha önce yapıldığı gibi Taylor seri açılımları karşılaştırma tekniğinden, metot aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{9}h(f_y(x_n, y_n)k_1 + hf_x(x_n, y_n)))$$

$$y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2$$

4.2. GJ METODUNUN MERTEBE ANALİZİ

GJ metotlarının genel gösterimi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$g_i^J = y_0^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^J + h \sum_{j=1}^{i-1} a_m f_K^J(y_0) k_j^J \quad (n = i + j - 1) \quad (2.1)$$

$$k_j^J = h f^J(g_j) \quad (2.2)$$

$$y_1^J = y_0^J + \sum_{j=1}^s b_j k_j^J \quad (2.3)$$

Leibniz formülünden (2.2) denkleminin türevleri

$$(k_j^J)^{(q)} \Big|_{h=0} = q(f^J(g_j))^{(q-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca daha önce elde edilen

$$(f^J(g_j))^{(1)} = \sum_K f_K^J(g_j) \cdot (g_j^K)^{(1)}$$

$$(f^J(g_j))^{(2)} = \sum_{K,L} f_{KL}^J(g_j) \cdot (g_j^K)^{(1)} \cdot (g_j^L)^{(1)} + \sum_K f_K^J(g_j) \cdot (g_j^K)^{(2)}$$

değerleri yine burada kullanılacaktır. Şimdi Leibniz formülünden

$$(k_j^J)^{(0)} \Big|_{h=0} = 0$$

$$(k_j^J)^{(1)} \Big|_{h=0} = f^J(g_j)$$

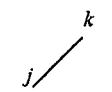
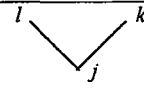
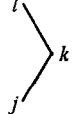
$$\begin{aligned} (g_i^J)^{(1)} \Big|_{h=0} &= \sum_j a_{ij} (k_j^J)^{(1)} + \sum_j a_m f_K^J(y_0) k_j^J \\ &= \sum_j a_{ij} f^J(g_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k_j^J)^{(2)} \Big|_{h=0} &= 2(f^J(g_j))^{(1)} \\ &= 2 \sum_K f_K^J(g_j) (g_j^K)' \\ &= 2 \sum_K f_K^J(g_j) \sum_k a_{jk} f^K \\ &= 2 \sum_k a_{jk} \sum_K f_K^J f^K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_i^J)^{(2)}\Big|_{h=0} &= \sum_j a_{ij} (k_j^J)^{(2)} + 2 \sum_j a_{in} f_K^J(y_0) (k_j^J)^{(1)} \\
&= \sum_j a_{ij} 2 \sum_k a_{jk} \sum_K f_K^J f^K + 2 \sum_j a_{in} f_K^J f^J \\
&= 2 \sum_{j,k} a_{ij} a_{jk} \sum_K f_K^J f^K + 2 \sum_j a_{in} f_K^J f^J \\
(k_j^J)^{(3)}\Big|_{h=0} &= 3 (f^J(g_j))^{(2)} \\
&= 3 \left[\sum_K f_{KL}^J(g_j) (g_j^K)' (g_j^L)' + \sum_K f_K^J(g_j) (g_j^K)'' \right] \\
&= 3 \sum_K f_{KL}^J(g_j) \sum_k a_{jk} f^K \sum_l a_{jl} f^L \\
&\quad + 3 \sum_K f_K^J \left[2 \sum_{k,l} a_{jk} a_{kl} \sum_K f_L^K f^L + 2 \sum_k a_{jm} f_L^K f^L \right] \quad (m = j+k-1) \\
&= 3 \sum_{k,l} a_{jk} a_{jl} \sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L + 6 \sum_{k,l} (a_{jk} a_{kl} + a_{jm}) \sum_K f_K^J f_L^K f^L
\end{aligned}$$

türevleri elde edilir. Buradan $q = 1, 2, 3$ için tablo aşağıdaki şekilde elde edilir.

Tablo 2.1. Üçüncü dereceye kadar GJ Metodu için ağaç ve elementer diferansiyeller

q	t	Grafik	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$F^J(t)(y)$	$\Phi_j(t)$
0	ϕ	ϕ	1	1	y^J	
1	τ	\cdot_j	1	1	f^J	1
2	t_{21}		2	1	$\sum_K f_K^J f^K$	$\sum_k a_{jk}$
3	t_{31}		3	1	$\sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{jl}$
	t_{32}		6	1	$\sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{kl} + a_{jm}$

Şimdi $q = 1, 2, 3$ için $\sum b_j \Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$q = 1$$

$t = \tau$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(\tau) = \frac{1}{\gamma(\tau)} \Rightarrow \sum_j b_j \cdot 1 = \sum_j b_j = b_1 + b_2 = 1$$

$$q = 2$$

$t = t_{21}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{21}) = \frac{1}{\gamma(t_{21})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} = b_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

$$q = 3$$

$t = t_{31}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{31}) = \frac{1}{\gamma(t_{31})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{jl} = b_2 a_{21} a_{21} = b_2 a_{21}^2 = \frac{1}{3}$$

$t = t_{32}$ ağacı için

$$\sum_j b_j \Phi_j(t_{32}) = \frac{1}{\gamma(t_{32})} \Rightarrow \sum_j b_j a_{jk} a_{kl} + b_j a_{jm} = b_2 a_{22} = \frac{1}{6}$$

şeklinde 3'üncü dereye kadar olan tüm ağaçlar için sağlandığı görülür. Burada ayrıca (1.10) daki mertbe şartları da elde edilmiş olur. Sonuç olarak GJ3 metodu 3'üncü mertebeden bir metottur.

4.3. GJ METODUNUN KARARLILIK ANALİZİ

Otonom problemler için uygulanan (3.1.12) deki GJ3 metodun da f' değerini, gerçek türev değeri alıp $y' = \lambda y$ test problemi uygulanırsa

$$k_1 = h\lambda y_n = zy_n$$

$$k_2 = h\lambda(y_n + \frac{2}{3}h\lambda y_n + \frac{2}{9}h\lambda.h\lambda y_n) = z(y_n + \frac{2}{3}zy_n + \frac{2}{9}z^2 y_n)$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \\
&= y_n + \frac{z}{4}y_n + \frac{3}{4}(zy_n + \frac{8}{9}z^2y_n - \frac{2}{9}z^2y_{n-1}) \\
&= (1 + z + \frac{2}{3}z^2)y_n - \frac{z^2}{6}y_{n-1}
\end{aligned}$$

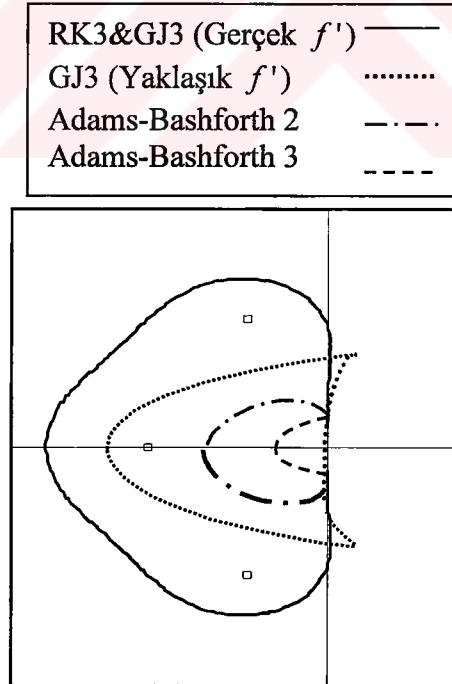
Burada $n \rightarrow n+1$ dönüşümü yapılırsa

$$y_{n+2} = (1 + z + \frac{2}{3}z^2)y_{n+1} - \frac{z^2}{6}y_n$$

değeri elde edilir. Şimdi de $y_{n+i} = \xi^i$ denirse

$$\xi^2 - (1 + z + \frac{2}{3}z^2)\xi - \frac{z^2}{6} = 0 \quad (3.1.14)$$

şeklinde ki kararlılık fonksiyonu elde edilir. Buradan bu metodun kararlılık bölgesi ve diğer metotların kararlılık bölgesi aşağıdaki şekildedir.



Şekil 3.2. GJ3 Metodu ve diğer metotların kararlılık bölgeleri

Şekil 3.2 de de görüldüğü üzere hem gerçek f' hem de yaklaşık f' alınarak oluşturulan GJ3 metotlarının kararlılık bölgeleri bazı Adams-Bashforth metotlarından daha büyüktür.

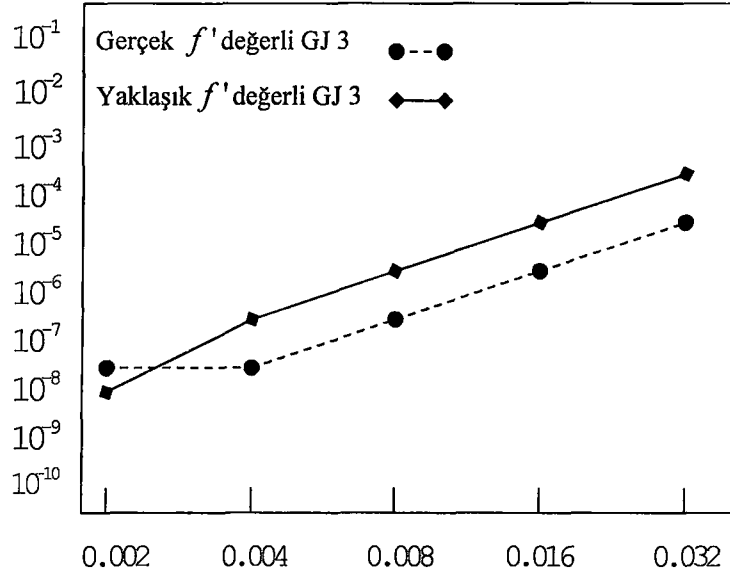
4.4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu kısımda GJ3 ve GJ4 metotları, bazı skaler otonom problemlere ve sistem otonom problemlere uygulanacak ve daha sonra bunlar aynı dereceden RK metotları ile karşılaştırılacaktır. Ayrıca GJ metodunda f' değeri, hem gerçek hem de yaklaşık değer alınarak bunların sonuçları karşılaştırılacak. Tüm karşılaştırmalarda adım uzunluğunun değişimine karşı göreceli hatanın değişimi incelenecektir. Kullanılacak olan test problemleri ve başlangıç şartları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 4.1. Test problemleri

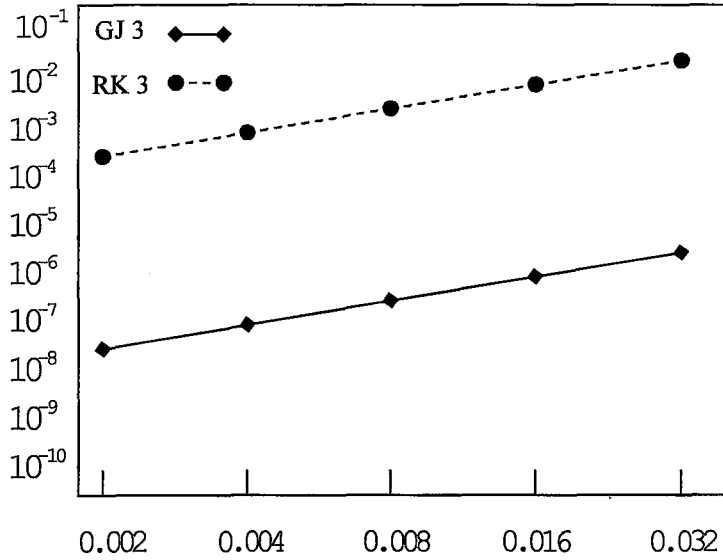
Fonksiyon	Çözüm	Başlangıç Şartı
$y' = y$	$y = e^t$	$y(0) = 1$
$y' = -\frac{y^2}{2}$	$y = \frac{2}{t+2}$	$y(0) = 1$
$\begin{cases} x' = y \\ y' = (1-x^2)y-1 \end{cases}$ (Van Der Pol)	ROS4 metodundan elde edilmiştir.	$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -0.66 \end{cases}$

İlk olarak GJ3 metodunda f' değerini gerçek ve yaklaşık değer olarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır. Burada $t = 20$ 'deki göreceli hatanın, adım uzunluğu karşısındaki değerleri karşılaştırılmıştır.



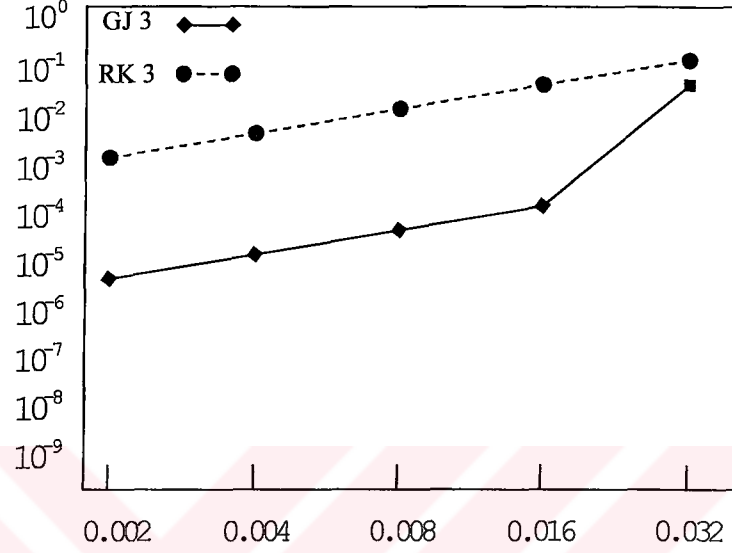
Şekil 4.1. $y' = y$ problemi ($t = 20$)

Şimdi de GJ3 ve RK3 metotları bir skaler denkleme uygulandığında elde edilen göreceli hatalar karşılaştırılacaktır. Burada GJ3 metodu için f' türevinin değeri gerçek değer olarak alınmıştır.



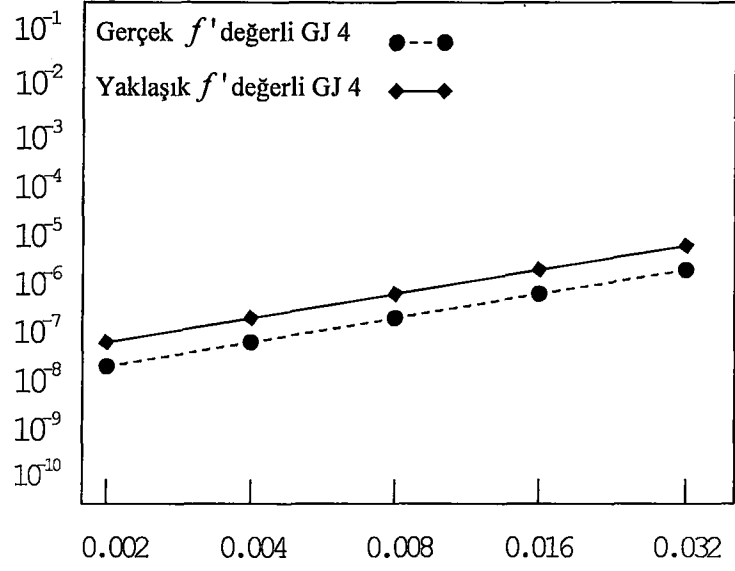
Şekil 4.2. $y' = -\frac{y^2}{2}$ problemi ($t = 20$)

Diğer bir grafik ise Van Der Pol diferansiyel denkleminin GJ3 ve RK3 metotları ile elde edilen sonuçlarının karşılaştırmasıdır. Burada $t = 2$ noktasında elde edilen göreceli hata değerleri karşılaştırılmıştır. Ayrıca metotların göreceli hataları bulunurken gereken gerçek değer ROS4 metodu kullanılarak elde edilmiştir. Burada da yine GJ3 metodu için f' değeri gerçek değer alınmıştır.



Şekil 4.3. Van Der Pol denklemi ($t = 2$)

Son olarak GJ4 metodunda f' değerini gerçek ve yaklaşık değer olarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır. Burada $t = 20$ 'deki göreceli hatanın, adım uzunluğu karşısındaki değerleri karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.4. $y' = -\frac{y^2}{2}$ denklemini ($t = 20$)

5. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışmada öncelikle başlangıç değer problemleri için kullanılan nümerik metotlar tanıtılarak bunlara ait özellikler verildi ve daha sonra metotların mertebe analizlerine geçildi. Metotların mertebelerini bulma yöntemlerinden bahsedildi ve önce klasik yöntem daha sonra grafik yöntemi anlatılarak bunlar arasındaki farklar incelendi. Daha sonra grafik yöntemi kullanılarak Runge-Kutta ve Rosenbrock metotlarının mertebeleri bulundu. Son bölümde ise çok adımlı Rosenbrock tipi bir metodun grafik yöntemi ile mertebe analizi yapıldı. Tüm bu incelemelerden aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

- Metotların mertebeleri iki yöntemle tespit edilir. Birincisi klasik yöntem diğeri ise grafik yöntemidir.
- Klasik yöntemde hem metodun hem de gerçek çözümün Taylor seri açılımları yapılır ve daha sonra bu açılımlarda uyuşan terim sayısına bakılır. Bu sayı metodun mertebesidir. Bu yöntemde Taylor seri açılımları yapılırken metodun türevlerinin alınması gerekir. Ancak bu her zaman kolay olmayabilir. Özellikle yüksek mertebeli metotların türevlerini alıp Taylor seri açılımlarını oluşturmak oldukça zordur.
- Klasik yöntemdeki zorluğu aşmak için grafik teorisinden faydalanılır ve çok uzun kısmi türevler içeren denklemler bazı grafiklerle sembolize edilerek bunlar üzerinden türevler alınır. Adına ağaç denilen bu grafiklere yeni dallar eklemek suretiyle çok uzun ve karışık denklemlerin istenilen dereceden türevleri alınabilir. Bu türevler yardımıyla da hem metodun hem de gerçek çözümün çok kolay bir şekilde Taylor açılımları elde edilir.
- Düşük mertebeli metotların mertebelerini bulurken grafik yöntemi ile klasik yöntem arasında kolaylık açısından çok fazla fark yoktur. Ancak bu fark yüksek mertebeli metotların mertebelerini bulurken ortaya çıkar. Yüksek mertebeli

metotlarda klasik yöntemle çok fazla işlem yaparak elde edilecek sonuç grafik yöntemi ile oldukça kısa ve basit bir şekilde elde edilir. Bu sebeple grafik yöntemi metotların mertebelerinin belirlenmesinde çok fazla kolaylık sağlayan oldukça faydalı bir yöntemdir.



KAYNAKLAR

- [1] Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner, G. (1987). *Solving ordinary differential equations I*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag
- [2] Butcher, J.C. (1987). *The numerical analysis of ordinary differential equations. Runge-Kutta and general linear methods*. London: John Wiley&Sons
- [3] Hairer, E., Wanner, G. (1991). *Solving ordinary differential equations II*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag
- [4] Hairer, E. (2002). *Geometric integration*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag
- [5] Fatunla, S.O. (1988). *Numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations*. London: Academic Press.
- [6] Bulirsch, R., Stoer, J. (2000). *Introduction to numerical analysis*. Berlin Heidelberg:Springer-Verlag
- [7] Bela, B. (1998). *Modern graph theory*. New York: Springer-Verlag
- [8] Reinhard, D. (2000). *Graph theory*. New York: Springer-Verlag
- [9] Folkman, B. (1991). Runge-Kutta methods, trees and mathematica. 1991 *Mathematics Subject Classification*. 65-01,65L06,65Y99
- [10] Goeken, D., Johnson, O. (1999). Fifth-order Runge-Kutta with higher order derivative approximations. *15-th Annual Conference of Differential Equations*, 2,1-9
- [11] Goeken, D., Johnson, O. (2000). Runge-Kutta with higher order derivative approximations. *Applied Numerical Mathematics*, 34, 207-218

- [12] Butcher, J.C. (1964). Implicit Runge-Kutta processes. *Math. Comput.*, **18**, 50-64
- [13] Butcher, J.C. (1964). On Runge-Kutta processes of high order. *Math. Soc.*, **4**, 179-194
- [14] Butcher, J.C. (1985). General linear methods. *Applied Numerical Mathematics*, **1**, 273-284
- [15] Collatz, L. (1960). *The numerical treatment of differential equations*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag
- [16] Wanner, G. (1973). Runge-Kutta methods with expansions in even powers of h . *Math. Comput.*, **11**, 81-85

