GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT NOKTA TEOREMLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞAZİYE GÜNDOĞDU
EYLÜL-2005

Sabit Nokta Teoremleri

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
M.Sc. Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Şaziye GÜNDOĞDU
Eylül-2005

ÖZET

SABİT NOKTA TEOREMLERİ

GÜNDOĞDU, Şaziye
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Eylül 2005, 45 Sayfa

Bu çalışmada, önemli bazı Sabit Nokta Teoremleri incelenmiş ve sunulmuştur.

İlk olarak en eski Sabit Nokta Teoremlerinden birisi olan Banach Teoremi adı ile de bilinen Daraltma Dönüşümü Teoremi incelenmiştir. Teoremin çeşitli ispatları üzerinde durulmadan önce gerekli tanımlar ve yardımcı bilgiler işlenmiştir. Ayrıca Banach Teoreminin adi diferensiyel denklemlere uygulanması üzerinde durulmuştur.

Çekme dönüşümü tanımından faydalanarak Sabit Nokta Teorisinin Başlangıç teoremlerinden Brouwer Sabit Nokta Teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Son olarak Brouwer Teoreminin genelleştirilmiş biçimi tartışılmış ve Schauder'in sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, daraltma dönüşümü, Lipsehitz koşulu, geriye dönüşüm, büzülme…

ABSTRACT

FİXED POİNT THEOREMS

GÜNDOĞDU, Şaziye
M. Sc. İn Deparment of Mathematics.
Süpervisor: Asst. Prof. Dr. Sabri BİRLİK

In this thesis, some main fixed point theorems have been both analyzied and proven.

At first, contraction Mapping Theorem which is one of the oldest fixed point theorem also known as Banach Fixed Point Theorem, has been searched. Before mentioning the different proofs of the theorem, necessary descriptions and source information have been worked out. Besides, ordinary differantial equations of Banach Fixed Point Theorem have been intensified.

By the help of retraction, Brouwer fixed Point Theorem which is the initial theorem of Fixed Point Theory has been given and proven.

At last, we generalize of Brouwer's Theorem which has been discused and the proof of Schauder's Theorem has been given.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmamın sonuca ulaşmasında yol gösterici olan Sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK'e ve her zaman desteklerini yaşadığım aileme ve Atilla'ya teşekkürler….

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

1.1. GİRİŞ

Herhangi bir X uzayında tanımlı bir $\varphi : X \to X$ fonksiyonu verilmiş olsun. Diyebiliriz ki; $\varphi(x) = x$ denklemini sağlayan noktalara φ fonksiyonunun sabit noktaları denir. Böyle bir fonksiyonun sabit noktalarının varlığını, nitelikleri ve sayısı hakkında bilgi veren çok değişik teoremler vardır. Ve bu teoremler Sabit Nokta Teoremleri olarak adlandırılır. Sabit nokta teoremleri uygulama alanı son derece geniş olan teoremlerdir. Biz bu çalışmada sabit noktanın varlığını veren bazı teoremler üzerinde duracağız. Bütün denklemlerin çözümü aslında bir sabit nokta problemi olarak düşünülebilir.

(X, d) bir metrik uzay olsun ve

$f : X \to X$ fonksiyonu verilsin. Belli bir $0 \le r \langle 1$ sayısı için

$d(f(x), f(y)) \le r.d(x, y)$ eşitsizliği X uzayındaki her x ve y için geçerliyse, f fonksiyonuna bir daraltma dönüşümü denir. Böyle bir dönüşümün X üzerinde düzgün sürekli olduğu tanımdan bellidir. $f : X \to X$ şeklinde bir daraltma dönüşümü seçelim ve $x_0 \in X$ ile başlayarak;

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad , \quad n = 1,2...$$

şeklinde bir dizi tanımlayalım. y ile f dönüşümünün bir sabit noktasını gösterelim. $f(y) = y$ ifadesini kabul etmiş olduk. Buna göre;

$$d(x_n, y) = d(f(x_{x-1}), f(y)) \le rd(x_{n-1}, y)$$

eşitsizliği elde edilir. Ardı ardına uygulanan bu eşitsizlik sonucunda

$$d(x_n, y) \leq r^n d(x_0, y)$$

elde edilir.

$0 \leq r \langle 1$ olduğundan, x_0 ne olursa olsun $\lim x_n = y$ olduğunu gördük. Sonuçta bir daraltma dönüşümünün bir ve yalnız bir sabit noktası olabileceğini görmüş olduk. Ayrıca herhangi bir x_0 noktasına dönüşümün ardışık olarak uygulanması sonucu elde edilecek dizinin limiti de bize aynı sabit noktayı verir. Banach'ın daraltma dönüşümü teoremi olarak da adlandırılan ve 2. bölümde ele aldığımız bu teorem gereğince sabit noktanın varlığı ile yukarıda bahsi geçen dizinin yakınsak olması aynı anlama gelir. 2. bölümde Daraltma Dönüşümü Teoreminin yanı sıra bu teoremin uygulanması ile Adi Diferensiyel Denklemlerin çözümünün oluşturabileceği ortaya konulacaktır.

Matematikte topolojik kavramları kullanarak ispatlanan daha genel sabit nokta teoremlerinin varlığı bilinmektedir. Bu Teoremlere sonlu boyutlu uzaylarda Brouwer Teoremi, normlu uzaylarda Schauder teoremi örnek olarak gösterilebilir.

Sürekli olarak türevlenebilir bir f fonksiyonu verildiğinde

$$d_y / d_x = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

diferensiyel denkleminin çözümünün var ve tek olduğu Cauchy (1844) tarafından kanıtlanmıştır.

Daha sonra Cauchy'in kanıtında kullandığı teknik Lipschitz (1877) tarafından "Lipschitz koşulu"nu sağlayan fonksiyonlar kullanılarak genelleştirilmiştir. Daha sonra çeşitli zamanlarda çalışılan uzaylar ve fonksiyonlar değişikliğiyle varlık ve teklik teoremleri kanıtlanmıştır. Tezimizde değinilen Picard, (1890) bunlardan biridir.

“ D sonlu boyutlu X normlu vektör uzayının kapalı, dış bükey bir alt kümesi olsun. $A : D \to X$ operatörü sürekli ve $A(D) \subset D$ ise, A nın D üzerinde bir sabit noktası vardır” şeklinde de ifade edilebilen Brouwer Sabit Nokta Teoreminin çeşitli kompleks ispatları mevcuttur. Tezimizde bu teorem çekme dönüşümü tanımı ve yardımıyla ifade ve ispat bulmuştur.

Ayrıca bu çalışmada verilen sabit nokta teoremleri için gerekli olan tanım ve kavramlar incelenerek, gerekli örneklendirmelere gidilmiştir.

1.2. TANIMLAR VE GENEL KAVRAMLAR

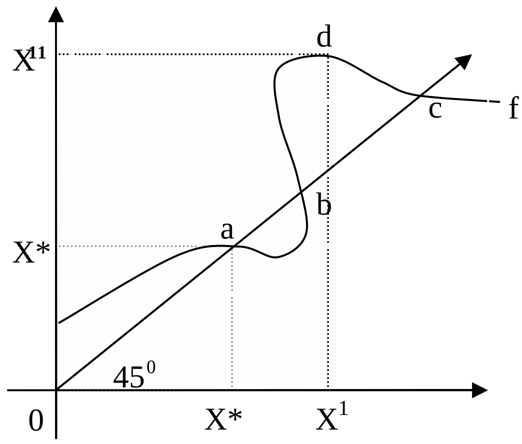
Bu bölümde tezin anlaşılabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla gerekli tanım ve kavramlar üzerinde durulmuştu**r.**

Tanım1.2.1: Bir M kümesinin yine M kümesi içine bir fonksiyona M nin kendi içine bir dönüşümü denir.

f fonksiyonu M nin kendi içine bir dönüşümü olsun. M nin

$f\ (x) = x$ koşulunu sağlayan bir x elemanına f nin bir **sabit noktası** denir.

Örnek1.2.1.1:



$s = [0,1]$

$f : s \to s$, f sürekli. a noktasında $f(x^{*}) = x^{*}$ olduğundan a noktası f nin sabit noktasıdır. b ve c noktaları da aynı özellikten sabit noktadır.

Fakat $f(x') = x''$ ve $x' \neq x''$ olduğundan d noktası f fonksiyonunun bir sabit noktası değildir.

Fonksiyonların sabit noktalarının varlığının iddia eden teoremler mevcuttur.

Örnek 1.2.1.2: $f : \Re \to \Re$

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun 0 ile 1 olmak üzere iki sabit noktası vardır.

Örnek 1.2.1.3: $f : \Re^2 \to \Re$

$f(x, y) = x$ izdüşümünün x ekseninin bütün noktaları olmak üzere sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

Sabit noktaların ne kadar önemli bir yer işgal ettiğini görmek için, her bir bilinmeyenli, kat sayıları kompleks sayılar olan polinom denkleminin çözümünü bir sabit noktayı bulmaya indirgenebileceğini görmek yeterlidir.

Örnek1.2.1.4: $P(x)$ komplex katsayılı bir polinom ise $P(x)=0$ denklemini çözmek $f(x)=P(x)+x$ fonksiyonun sabit noktalarını bulmaya denktir.

Bir M kümesinin f gibi kendi içine bir dönüşümünün sabit noktalarının varlığını iddia eden teoremler M ve f ile ilgili şu hipotezlerin sağlanması ile mümkündür:

1) $M \neq \emptyset$

2) M ’nin bir kompakt veya tam topolojik uzay olması benimsenir.

3) f ’nin sürekli olması istenir.

Problem1.2.1.5: $f(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli ve $\forall t \in [0,1]$ için $f(t) \in [0,1]$ veya $f([0,1]) \subset [0,1]$ olsun. Bu durumda f nin sabit noktası, yani $f(t_0)=t_0$ olacak biçimde en az bir $t_0 \in [0,1]$ noktası vardır. Gösteriniz. ,

Çözüm:

$[0,1]$ üzerinde sürekli $\varphi(t)=t-f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\varphi(0)=-f(0)\leq 0$ ve $\varphi(1)=1-f(1)\geq 0$ olduğu açıktır.

$f(0)=0$ ise 0 f nin sabit noktasıdır.

$f(1)=1$ ise 1 f nin sabit noktasıdır.

$f(0)\rangle 0$ ve $f(1)\langle 1$ olduğu durumlarda

$\varphi(0)\langle 0$ ve $\varphi(1)\rangle 0$ olduğundan

Ara değer teoremi dolayısıyla $\varphi(t_0)=0$ veya $t_0 = f(t_0)$ olacak biçimde en az bir $t_0 \in (0,1)$ noktası vardır.

Böylece bu durumlarda da f nin sabit noktaya sahip olduğu elde edilir.

Teorem1.2.1.6. (Ara Değer Teoremi):

$f:[0,1]\to\Re$ sürekli bir fonksiyon olsun.

Eğer $a,b\in[0,1]$ ve $f(a)\langle c\langle f(b)$ ise $f(x)=c$ olacak şekilde bir $x\in(0,1)$ vardır.

Tanım1.2.2: $X \neq \phi$ bir küme olsun.

$d: X\times X \to \Re$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x,y,z\in X$ için

$\dot{I}]d(x,y)\geq 0$

$\dot{I}\dot{I}]d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$\dot{I}\dot{I}\dot{I}]d(x,y)=d(y,x)$ (simetri özelliği)

$\dot{I}v]d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

oluyorsa d ’ye X üzerinde bir **Metrik,** (X,d) ikilisine de **Metrik Uzay** denir.

Uyarı1.2.2.1: $i],iii],iv]$ metrik aksiyomlarını sağlayan $d: X\times X \to \Re$ fonksiyonuna X üzerinde bir **yarı metrik** denir. Eğer d fonksiyonu $i],iii],iv]$ aksiyomlarını ve $ii]$’nin yalnızca yeter şartını sağlıyorsa , d metriğine X üzerinde bir **pseudo metrik (metrikimsi)** denir.

Örnek1.2.2.2: $\forall x, y \in \Re$ için $d(x,y)=|x-y|$ şeklinde tanımlanan bir $d:\Re x \Re \to \Re$ fonksiyonu $\Re$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\Re$'nin **mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer)** metriği denir.

Örnek1.2.2.3: $\Re^2 x \Re^2 \to \Re$ fonksiyonu, $\forall x=(x_1, x_2)$ ve $y=(y_1, y_2)\in \Re^2, d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde d fonksiyonu $\Re^2$ üzerinde bir metriktir.

Örnek1.2.2.4: $d:\Re^2 x \Re^2 \to \Re$ fonksiyonu, $\forall x=(x_1, x_2)$ ve $y=(y_1, y_2)\in \Re^2$ için $d(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]^{1/2}$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde d fonksiyonu $\Re^2$'nin alışılmış (doğal) metriği veya $\Re^2$'deki **öklid metriği** denir.

Örnek1.2.2.5: $X \neq \emptyset$ kümesi verilsin. $d: X \times X \to \Re$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ için $x=y$ ise $d(x,y)=0$ ve $x \neq y$ ise $d(x,y)=1$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe **diskret (discrete, noktasal, trivial) metrik** denir.

Tanım 1.2.3: (X,τ) uzayı verilsin. Eğer X kümesinin $\forall$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına **kompakt uzay** denir.

$A \subset X$ iken (A, τ_A) alt uzayı kompakt ise A'ya X'in bir kompakt alt kümesi denir.

Örnek1.2.3.1: $\Re$**,** reel sayılar kümesi, alışılmış topolojiye göre kompakt değildir.

Gerçekten, $\{(-n, n) \subset \Re \mid n \in N\}$ açık aralıklar ailesi, $\Re$'nin bir açık örtüsüdür, fakat bu aileden $\Re$'yi örten sonlu bir alt aile seçilemez.

Örnek1.2.3.2: Sonsuz bir X kümesi, üzerinde tanımlanan her topolojiye göre, kompakt bir kümedir.

Çözüm:

$(A_i)_{i \in I}$ ailesi , X uzayının bir açık örtüsü olsun. X 'in bir A_j açık alt kümesini alalım. Bu durumda $X - A_j$ kümesi sonludur. Buradan $X - A_j = \{a_1, ..., a_n\}$ şeklinde gösterilebilir. Bu taktirde $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$ olacak şekilde sonlu tane $A_1, ..., A_n$ açık kümeleri vardır. Böylece $X = A_j \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$ elde edilir. Dolayısıyla X uzayını sonlu tane açık kümelerle örttüğümüzden , X bir kompakt uzaydır.

Uyarı 1.2.3.3: Bir X uzayının her ayrık kapalı alt kümeler ailesinin sonlu ayrık bir alt ailesi varsa, X bir kompakt uzaydır.

Tanım 1.2.4: (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x)$ noktasının her $V \subset Y$ komşuluğu için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U \subset X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında **süreklidir** denir.

$f, x \in X$ ' te süreklidir $\Leftrightarrow \forall v \in V(f(x))$ için $\exists U \in V(x) \ni f(U) \subset V$

$f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu, X kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X üzerinde sürekli veya kısaca f fonksiyonuna süreklidir denir.

Tanım1.2.5: $(x_n), (X, d)$ metrik uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon \rangle 0$ için,

$\exists m \in N \ni \forall n \geq m$ için $d(x, x_n) \langle \varepsilon$ ya da $x_n \in B(x, \varepsilon)$ oluyorsa $(x_n), x$ 'e **yakınsıyor** denir.

Tanım1.2.6: $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun.

$\varepsilon \rangle 0$ için , $m, n \rangle N$ olmak üzere

$$d(x_m, x_n) \langle \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $\{x_n\}$ dizisine **Cauchy Dizisi** denir.

Örnek1.2.6.1: $\Re$ 'nin mutlak değer metriğine göre, doğal sayılardan oluşan $(X_n) = (n)$ dizisi bir Cauchy Dizisi değildir. Çünkü $\forall m, n \in N$ için $m \neq n$ olduğundan, $d(m, n) = |m - n| \geq 1$ olur.

Teorem1.2.6.2: Bir metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy Dizisidir.

İspat:

Bir (x_n) dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsıyorsa, $\forall \varepsilon \rangle 0$ ve her $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) \langle \varepsilon / 2$ olacak şekilde, $\exists n_0 \in N$ vardır. $x_n \rightarrow x$ olduğundan , benzer şekilde;

$\forall \varepsilon \rangle 0$ ve her $m \geq n_0$ için $d(x_{m,} x) \langle \varepsilon / 2$ yazabiliriz.

Dolayısıyla $iv]$ metrik aksiyomu (üçgen eşitsizliği) gereğince $\forall m, n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \langle \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$ olur. O halde x_n dizisi bir Cauchy Dizisidir.

Örnek1.2.6.3: $\Re$ üzerinde mutlak değer metriği verilsin. $\Re$ ’deki $(X_n) = (1/n)$ dizisi $0 \in \Re$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla (X_n) dizisi bir Cauchy Dizisidir.

Tanım 1.2.7: Bir X uzayındaki her Cauchy Dizisi uzayın bir elamanına yakınsıyorsa, X ’e **tam uzay** denir.

Özel olarak; (X, d) metrik uzayı içerisindeki $\forall$ Cauchy Dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa (X, d)’ye bir **tam metrik uzay** denir.

Örnek1.2.7.1: $\Re^n$ kümesi verilsin.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1 y_2, ..., y_n) \in \Re^n$ olmak üzere;

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ metriği tam metrik uzaydır.

Örnek1.2.7.2: $[m, n]$ aralığında sürekli fonksiyonlar,

$d(x,y) = \max\limits_{m \le t \le n} |x(t) - y(t)|$ metriğine göre tam uzaydır.

Tanım1.2.8: (X,τ) ve (Y,υ) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa f fonksiyonuna **homeomorfizm** denir.

1) f fonksiyonu birebir ve örten

2) f ve f^{-1} fonksiyonları süreklidir.

Teorem1.2.8.1: X,Y topolojik uzayları verilsin. Eğer $h : X \to Y$ bir homeomorfizma ve X de sabit nokta özelliğini sağlıyorsa, Y de sabit nokta özelliğini sağlar.

İspat:

$f : X \to X$ sürekli fonksiyon olsun.

X sabit nokta özelliğini sağladığından;

$\exists x_0 \in X$ için $f(x_0) = x_0$ olur.

$h : X \to Y$ homeomorfizma olduğundan;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h^{-1}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[u, "g"] & X \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

Şekil 1.2.8.1

Tabloyu incelersek ; $g = hof\ oh^{-1}$ elde edilir ve g fonksiyonu süreklidir.

$f(x_0) = x_0$ şartını sağlayan x_0 noktası için,,

$h(x_0) = y_0 \in Y$ dir $\Rightarrow x_0 = h^{-1}(y_0)$

$$
\begin{aligned}
g(y_0) = (hofoh^{-1})(y_0) &= h\left(f\left(h^{-1}(y_0)\right)\right) \\
&= h(f(x_0)) \\
&= h(x_0) \\
&= y_0
\end{aligned}
$$

$g(y_0) = y_0$ görülür. Buradan Y sabit nokta özelliğini sağlar.

2. BÖLÜM

2.1. GEREKLİ KAVRAMLAR VE DARALTMA DÖNÜŞÜMÜ TEOREMİ

Tanım2.1.1: Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X,\|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya **Banach uzayı** denir.

Yani bir $(X,\|.\|)$ normlu uzayının Banach uzayı olduğunu ispatlamak için, X 'de keyfi bir (X_n) Cauchy dizisi alıp bunun X 'de yakınsak olduğunu göstermek gerekir.

X Banach uzayı ve $A: X \to X$ olmak üzere;

$$x = Ax \qquad (2.1)$$

denklemi verilsin.

$A: X \to X$ operatörünün bir sabit noktasının varlığı aynı zamanda (2.1) denkleminin bir çözümünün varlığı demektir.

Ardışık yaklaşımlar yöntemi (2.1) şeklindeki denklemlerin çözümü için en çok kullanılan bir yöntemdir. Bu yönteme göre:

$x_0 \in X$ başlangıç noktası olmak üzere, terimleri:

$$x_n = Ax_{n-1} \quad , \quad n = 1,2...... \qquad (2.2)$$

şeklinde olan (x_n) tahmini çözümler dizisi oluşturulur.

Eğer $x_1 \in X$ vektörü (x_n) dizisinin bir limiti ve A operatörü x_1 noktasında sürekli ise o zaman $(2.2.)$ ye göre x_1 de (2.1) denkleminin bir çözümüdür.

Dolayısıyla (x_n) dizisinin yakınsaklık koşulları aynı zamanda (2.1) denkleminin çözümünün varlığının koşulları olur.

Yaklaşık ikibin yıldan fazla tarihe sahip olan Ardışık yaklaşımlar yöntemini ilk kez İtalyan matematikçi Picard kullanarak adi diferensiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünü araştırmıştır. Picard varlık teoremi ilerde verilecektir. Bu sahada ilk teorik sonuç Polonya'lı matematikçi S.Banach'a aittir ve "Daraltma Dönüşümü Teoremi" veya "Banach Sabit nokta Teoremi" adı ile bilinir.

Sabit nokta teoremleri içerisinde en iyi bilinen teoremlerden biri olan Daraltma dönüşümü Teoremini vermeden önce gerekli ön bilgiler üzerinde duralım.

Tanım2.1.2: (M,d) bir metrik uzay ve f fonksiyonu M nin kendi içine bir dönüşümü olsun. M 'deki her x, y için

$$d\ \ (f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

ve $0 \leq k \langle 1$ koşulunu sağlayan bir k sayısı varsa $f\,'$ye bir **daraltma dönüşümü** denir.

Teorem2.1.3. (DARALTMA DÖNÜŞÜMÜ TEOREMİ):

f, $M \neq \phi$ olan tam metrik uzayının kendi içine bir daraltma dönüşümü olsun. f nin M nin içinde bir ve bir tek sabit noktası vardır.

İspat: Önce sabit noktanın tekliğini gösterelim. Eğer x ve y gibi f nin iki sabit noktası varsa,

$$x = f(x)$$

$y = f(y)$

$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$

$(1-k)\ d\ (x, y) \leq 0$ ve

dolayısıyla $d\ (x, y) = 0$ olur.

Buradan $x = y$ elde edilir.

Sabit nokta tektir.

Şimdi bir sabit noktanın varlığını gösterelim:

(M, d) bir tam metrik uzay ve f bunun üzerinde bir daraltma dönüşümü olarak verilsin. M de herhangi bir x_0 seçelim.

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\quad n = 0,1,2...........$

olmak üzere M içinde bir (x_n) dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin bir cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için;

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\ (f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k.d.(x_{n-1}, x_n)$$

$(0 \langle k \langle 1,\ n = 1,2............$ olduğuna dikkat edelim$)$

Bu şekilde devam ettirilerek;

$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$ bulunur.

Eğer $q \rangle p \geq 0$ tam sayılar ise

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{n=p}^{q-1} d(x_n, x_{n+1})$$

$$\leq \sum_{n=p}^{q-1} k^n d(x_0 x_1)$$

$$\leq d(x_0, x_1).(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1})$$

$$\leq d(x_0, x_1) k^p . \frac{1-k^{q-p}}{1-k}$$

dolayısıyla

$$d(x_p, x_q) \langle d(x_0, x_1) k^p .(1-k)^{-1}$$

bulunur. P $\rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı 0 limitine yaklaşır. O halde (x_n) bir Cauchy dizisidir. (M, d) tam olduğundan (x_n) dizisinin M içinde bir x limiti vardır. M de bulunan bu limit nokta f nin bir sabit noktasıdır. Çünkü

$$d(f(x_n), f(x)) \leq kd(x_n, x)$$

dır. $d(x_n, x) \rightarrow 0$ olduğundan

$d(f(x_n,), f(x)) \rightarrow 0$ olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x, f(x)) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(x))$$

$$\leq d(x, x_{n+1}) + d(f(x_n), f(x))$$

$$\leq d(x, x_{n+1}) + kd(x_n, x)$$

bulunur.

Sağ taraf $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaştığından $d(x, \ f(x)) = 0$ olur.

Dolayısıyla

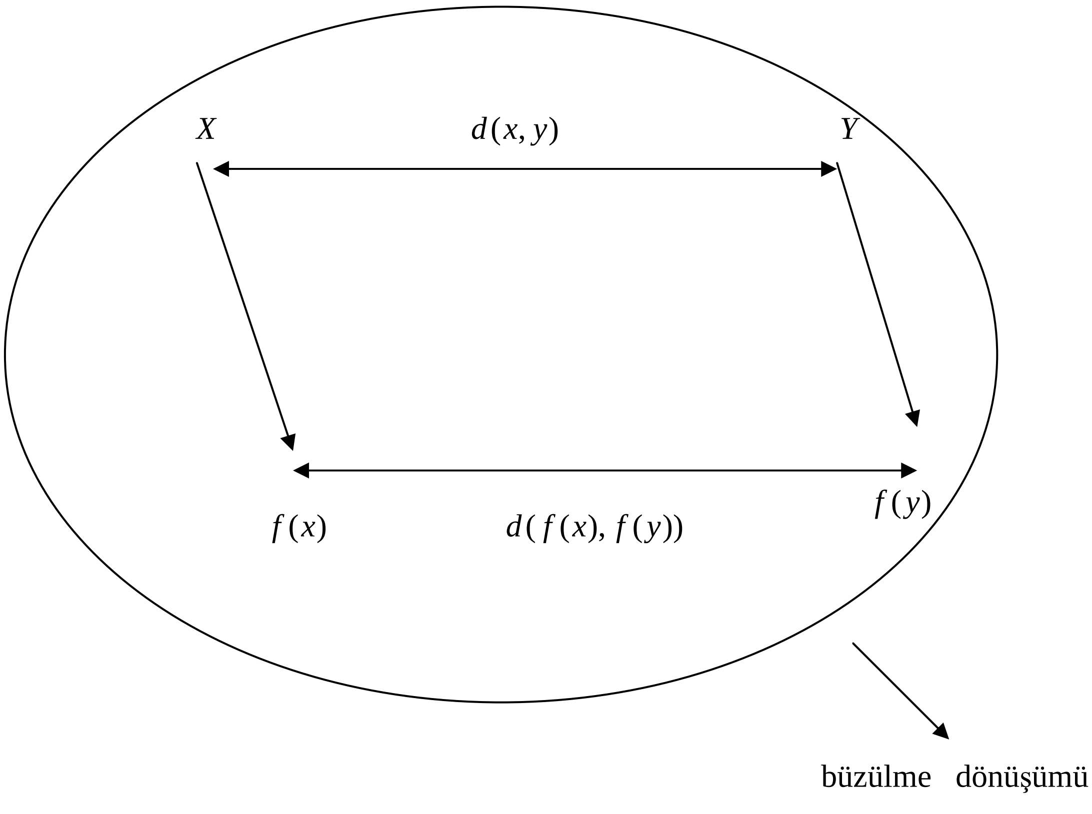
$x = f(x)$ bulunur.

Şimdi de Büzülme Dönüşümü tanımından faydalanılarak Banach Sabit nokta teoreminin ifadesi ve ispatı üzerinde duralım:

Tanım2.1.4: (X,d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \to X$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in X$ için $d\big(f(x), f(y)\big) \leq k.d(x,y)$ bağlantısını sağlayan bir k sabiti varsa f ye **Lipschitz koşulunu** sağlar denir.

Eğer $k\langle 1$ ise bu durumda f 'ye büzülme dönüşümü denir.

Bu bağlantıda eşitsizlik mevcut ve $k = 1$ ise zayıf büzülme dönüşümü denir.



Şekil 2.1.4.

f dönüşümünün X üzerinde düzgün sürekli olduğu görülerek, $f : X \to X$ daraltma dönüşümünü alalım. Ve herhangi bir $x_0 \in X$ ile başlayarak

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1,2,...$$

şeklinde bir (x_n) dizisi tanımlayalım. y nin f nin bir sabit noktası olduğunu kabul edelim. Yani $f(y) = y$ olsun. Buradan daraltma dönüşümü tanımından;

$$d(x_n, y) = d(f(x_{n-1}), f(y)) \leq k.d(x_{n-1}, y)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik ard arda uygulandığında;

$$d(x_n, y) \leq k^n d(x_0, y)$$

bulunur.

$0 \leq k \langle 1$ olduğundan, x_0 ne olursa olsun $\lim x_n = y$

olduğunu gördük. Sonuç olarak, bir daraltma dönüşümünün en fazla bir sabit noktası olabileceğini bulmuş olduk. Ayrıca böyle bir nokta varsa, herhangi bir x_0 noktasına f dönüşümünü ardışık olarak uygulayarak elde edilen dizinin limiti bize aynı sabit noktayı verir. dolayısıyla en önemli sonuç; bu yöntemde sabit noktanın varlığı ile yukarıda söz konusu edilen dizinin yakınsak olması eş değerdir.

Teorem 2.1.5: (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : (X, d) \to (X, d)$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f ' nin bir $x \in X$ sabit çözüm noktası vardır ki, herhangi bir $x_0 \in X$ için

$x_n = f^n(x_0)$ $(n = 1,2........)$ olarak tanımlandığında

i) $\lim x_n = x_0$

ii) x sabit noktası tektir.

İspat: Sabit noktanın varlığını araştıralım:

i) $x_0 \in X$ olmak üzere, (x_n) dizisini;

$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), ..., x_n = f^n(x_0) \ldots$olarak tanımlarsak.

$(\ x_n\ )$ bir cauchy dizisidir. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d\left(f(x_n), f(x_{n-1})\right) \\
&\leq k.d(x_n, x_{n-1}) \\
&= k.d\left(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})\right) \\
&\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\leq k^n d\left(x_1, x_0\right)
\end{aligned}
$$

$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ dir.

Şimdi $m \rangle n$ alalım. Üçgen eşitsizliğinden;

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + ... + d\left(x_{m-1}, x_m\right)$$

$$\leq \left(k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1}\right) d\left(x_0, x_1\right)$$

$= k^n . \dfrac{1-k^{m-n}}{1-k} . d(x_0, x_1)$ bulunur.

$0\langle k\langle 1$ olduğundan $1-k^{m-n}\langle 1$ dir.

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k}.d(x_0, x_1) \qquad n\rangle m$$

böylece (x_n) cauchy dizisi olur.

X tam olduğundan lim $x_n = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. f sürekli olduğundan,

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$x = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(x)$$

Buradan $f(x) = x$ olur. Yani x, f ‘nin sabit noktasıdır. lim $x_n = x$ olduğu açıktır.

ii) f ’ nin sabit noktasının tekliğini gösterelim.

f ’nin başka bir sabit noktası y olsun:

$d(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leq k.d(x,y)$ olur.

buradan $d(x,y)=0$ olması ile mümkündür. Buradan $x = y$ dir.

Teorem2.1.6: (X,d) bir tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere bir m tam sayısı için;

$f^m = fofo.........of$ bir büzülme dönüşümü ise f, X de tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat:

f^m büzülme dönüşümü olduğundan, Banach sabit nokta teoremi gereğince f^m tek bir $f^m(x_0) = x_0$ sabit noktası vardır.

Buna göre;

$f(x_0) = f\left(f^m(x_0)\right) = f^m\left(f(x_0)\right)$

olur. Fakat f^m in tek bir sabit noktası var ve o nokta da x_0 olduğundan,

$f(x_0) = x_0$ olur.

Bir tam metrik uzay üzerinde tanımlanan, zayıf büzülme dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmayabilir.

Örnek2.1.7: $X = \{x \in \Re^+\}$ kümesinde tanımlı $d(x,y) = |x-y|$ metriğini alalım.

$f : X \to X$ ve $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ olsun.

$d(f(x), f(y)) \langle d(x,y)$ olduğundan zayıf büzülme dönüşümüdür. Fakat $\forall x \in X$ için $f(x) \neq x$ olduğundan f nin bir sabit noktası yoktur.

2.2. DARALTMA DÖNÜŞÜMÜ TEOREMİNİN UYGULAMASI :

Bu kısımda Daraltma Dönüşümü Teoreminin önemli bir uygulaması olan adi diferansiyel denklemlerin varlık teoreminin İspatını vereceğiz.

2.2.1. Adi Diferensiyel Denklemlerin Çözümünün Varlığının Daraltma Dönüşümü Teoreminin Uygulanması İle İspatlanması

$\dfrac{dy}{dt} = y'$ alacağız.

$y_1' = f_1(t, y_1..............., y_n)$

.

.

.

$y_n' = f_n(t, y_1..............., y_n)$

adi diferensiyel denklem sistemini ele alalım.

Bu denklem kısaca

$Y'(t) = F(t, Y(t))$ şeklinde yazalım.

Burada $Y = (y_1 y_2 .... y_n)$ ve

$F = (f_1, f_2 .... f_n)$ alınmıştır.

$x = (x_1, ..., x_n) \in \Re^n$ olduğuna göre

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

şeklinde belirtebiliriz.

S kümesi $\Re x \Re^n$ nin bir açık alt kümesi $(a, B) \in S$ ve $F : S \to \Re^n$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$J \subseteq \Re, a$ noktasını içeren bir açık aralık ve

$Y : J \rightarrow \Re^n$ fonksiyonu sürekli türevi olan bir fonksiyon olsun.

$\forall t \in J$ için $(t, Y(t)) \in S$ ve

$$\left.\begin{array}{l} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(a) = B \end{array}\right\} *$$

oluyorsa Y ye $*$ denklem sisteminin bir çözümü denir.

Tanım 2.2.1.1.(Lipschitz Koşulu):

Bir $T : [a,b] \rightarrow [a,b]$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in [a,b]$ için,

$$|T_x - T_y| \leq k|x - y|$$

olacak şekilde bir k sabiti varsa, T dönüşümü k Lipschitz katsayılı Lipschitz koşulunu gerçekler denir.

Teorem2.2.1.2: S kümesi $\Re x \Re^n$ nin bir açık alt kümesi, $(a, B) \in S$ ve $F : S \rightarrow \Re^n$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$k \rangle 0$ sabit bir sayı olduğuna göre F fonksiyonu

(t, X) ve $(t, Y) \in S$ için

$$|F(t, X) - F(t, Y)| \leq k\|X - Y\|$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman

$$\begin{array}{l} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(a) = B \end{array}$$

sisteminin bir Y çözümü vardır.

İspat: Önce (a,B) nın S içinde bir N gibi bir kompakt komşuluğunu alalım.

F sürekli olduğundan N üzerinde sınırlıdır. O halde bir $L\rangle 0$ sayısı ile $\forall (t,X)\in N$ için

$\left|F(t,X)\right|\leq L$

dir. N kümesi (a,B) nin bir komşuluğu olduğundan öyle $u\rangle 0, v\rangle 0$ sayıları vardır ki $\left|t-a\right|\leq u, X\in \Re^n$ ve $\left\|X-B\right\|\leq V$ ise

$(t,X)\in N$ dır.

$d\rangle 0$ sayısını $kd\langle 1$ ve $Ld\langle V, d\leq u$ olacak şekilde seçelim. Ayrıca

$I=\left[a-d, a+d\right]$,

$S_v(B)=\left\{x\in \Re^n : \left\|x-B\right\|\leq V\right\}$ ve

$H=C(I,S_v(B))$ olsun.

$f,g\in H$ için f ve g arasındaki uzaklık $\left\|f-g\right\|$ şeklinde tanımlanırsa, H bu metrik ile tam metrik uzay olur. $Y\in H$ için

$T(Y)(t)=B+\int_a^t F(S,Y(S))ds, (t\in I)$ olarak tanımlayalım.

$s\in I$ için $Y(s)\in S_v(B)$ olduğundan $(s,Y(s))\in N$ olur. Dolayısıyla $F(s,Y(s))$ anlamlıdır. F sürekli olduğundan $T(Y)$ de süreklidir.

Ayrıca $t\in I$ ise

$$\|T(Y)(t) - B\| \leq \left|\int_a^t \|F(s,Y(s))\| ds\right|$$

$$\leq |t-a| L \leq Ld \leq V$$

olur.

Dolayısıyla $T(Y) \in H$ dir. O halde T fonksiyonu H nin kendi içine f bir dönüşümüdür. Şimdi T nin bir daraltma dönüşümü olduğunu gösterelim.

Bunun için $Y, Z \in H$ ve $t \in I$ alalım.

$$\|T(Y)(t) - T(Z)(t)\| \leq \left|\int_a^t \|F(s,Y(s)) - F(s,Z(s))\| ds\right|$$

$$\leq \left|\int_a^t k \|Y(s) - Z(s)\| ds\right|$$

$$\leq |t-a| k \|Y - Z\|$$

$$\leq kd\|Y - Z\|$$

$kd \leq 1$ olduğundan T bir daraltma dönüşümüdür. Daraltma Dönüşümü Teoremi dolayısıyla T dönüşümünün bir sabit Y noktası vardır. Bu sabit Y noktası için

$$Y(t) = B + \int_a^t F(S,Y(s))ds, (t \in I)$$

olduğundan

$$Y(a) = B$$

$Y^1(t) = F(t,Y(t),(t \in I)$ dır.

$J = (a-d, a+d)$ alınırsa Y fonksiyonunun J üzerinde diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğu görülür.

Teeorem2.2.1.3. (Picard Varlık Teoremi): (x_0, y_0) noktalarını f' nin bazı

$$R = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d \ \}$$

kapalı bölgesinde sürekli fonksiyon olduğu durumda

$$y(x_0) = y_0$$

başlangıç koşulu ile

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

adi diferensiyel denklemi için başlangıç değer problemi olduğunu düşünelim. Eğer f bazı $K \in \Re$ ler ve bütün $(x, y_1)(x, y_2) \in \Re$ ler için

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le K \left| y_1 - y_2 \right|$$

Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu durumda $y(x_0) = y_0$ ve $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 'nin $y = \varphi(x)$ tek çözüm mevcuttur.

İspat: $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$

integral denkleminin her çözümünün $y(x_0) = y_0$ ve $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$'u sağladığını ve tersini düşünelim. $\varphi([a,b])$ üzerinde

$$(T\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t)) dt$$

ile tanımlanmış T operatörünü düşünelim.

$M = \sup\{ |f(x,y)| : (x,y) \in R \}$

olsun ve $\varepsilon \rangle 0$ seçelim öyle ki $K\varepsilon \langle 1$ ve $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a,b]$ olsun. Eğer

$S = \{\phi(x) \in \phi([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\ ]) : |\phi(x) - y_0| \leq M\varepsilon,$

bütün $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\ \}$

olursa bu durumda

$S, \varphi([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$

Banach Uzayının

$\|\phi\| = \sup\limits_{[x_0-\varepsilon, x_0-\varepsilon]} |\phi(x)|$ alt normu ile kapalı bir alt kümesidir.

Ayrıca, eğer $\phi \in S$ ve $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ise, o zaman

$$|(T\phi)(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t)dt\right| \leq M\varepsilon$$

olur ve böylece T, S ’yi kendi kendi içine tasvir eder. Sonuç olarak,

$\phi_1, \phi_2 \in S$ için

$$\|T\phi_1 - T\phi_2\| = \sup_{[x_0-\varepsilon, x_0-\varepsilon]} \left|\int_{x_0}^{x} \left(f(1, \phi_1(t)\right) - f(1, \phi_2(t))dt\right| \leq K\varepsilon\|\phi_1 - \phi_2\|$$

olur. Böylece $K\varepsilon\langle 1$ olduğundan T bir büzülmedir. Bu yüzden teorem $Tx = x$ göz önünün de bulundurularak $T\phi = \phi$ denkleminin ϕ çözümü tektir. Örneğin

$\phi,\ \phi(x) y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, \phi(t))dt$

nin tek çözümüdür.

3.BÖLÜM

3.1. GEREKLİ KAVRAMLAR VE BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde önemli sonuçları olan Brouwer sabit Nokta Teoreminden bahsedilecektir. Bu teorem ilk olarak 1886'da H. Poincare tarafından kanıtlanmış, daha sonra 1912'de Brouwer tarafından ispatlanmış ve bu isimle adlandırılmıştır.

Brouwer sabit nokta teoreminin pek çok değişik ispatı vardır. C.B. Garcia ve J.W. Milnor'un ispatları bu teoremin anlaşılması kolay elemanter ispatlarındandır.

Öncelikle bu teorem için gerekli ön bilgileri hatırlatalım:

Tanım3.1.1.: (X,d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere, bir $x_0 \in X$ ve $r \rangle 0$ gerçel sayısı verildiğinde;

$B(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)\langle r\}$ kümesi, merkezi x ve yarıçapı r olan açık yuvar;

$B[x_0,r]=\{x\in X : d(x_0,x)\leq r\}$ kümesi, merkezi x ve yarıçapı r olan kapalı yuvar;

$S[x_0,r]=\{x\in X : d(x_0,x)= r\}$ kümesi, merkezi x ve yarıçapı r olan küre (yuvar yüzeyi) denir.

Tanım3.1.2: (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt uzayı verilsin. Her $a\in A$ için $r(a)=a$ ile tanımlanan sürekli bir $r: X\to A$ fonksiyonu varsa, A ya X in geriye dönüşü (çekilmesi, retractı) denir. r fonksiyonuna da X den A ya bir **geriye dönüşüm (çekme dönüşümü, retraction)** denir.

Teorem3.1.3: $r : X \to Y$ fonksiyonunda X uzayı sabit nokta özelliği sağlasın. Y, X in bir geriye dönüşü ise Y de sabit nokta özelliğini sağlar.

İspat:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[u, "g"] & Y \arrow[l, "r^{-1}"] \end{tikzcd}$$

tabloyu incelersek;

$g : X \to X$

$x \to g(x) = f(r(x))$ olarak tanımlanabilir. Bu taktirde g süreklidir.

X sabit nokta özelliğini sağladığından;

$\exists x_0 \in X \ni g(x_0) = x_0$ dir.

Burada $x_0 \in Y$ olduğu açık r çekme dönüşümü olduğundan;

$r(x_0) = x_0$ olur. Burdan;

$g(x_0) = f(r(x_0)) = f(x_0) = x_0$ olur.

Dolayısıyla Y sabit nokta özelliğini sağlar.

Teorem3.1.4. (BROUWER SABİT NOKTA TEOREMİ):

Brouwer sabit nokta teoreminin birkaç tanımından biri de şudur: $\{x : \|x\| \leq 1 : x \in \Re^n\}$ den $\{x : \|x\| = 1 : x \in \Re^n\}$e sürekli olarak türevlenebilir bir çekme dönüşümü yoktur.

İspat:

Olmayana ergi yöntemi ile sürekli olarak türevlenebilir $r(.)$ dönüşümünün varlığını kabul edelim.

$r_1 : B^n[0,1] \rightarrow B^n[0,1]$

$r_1(x) = -r(x)$ şeklinde tanımlarsak dönüşüm süreklidir.

r_1 in sabit noktası bulunmadığından teoremin ifadesiyle çelişir.

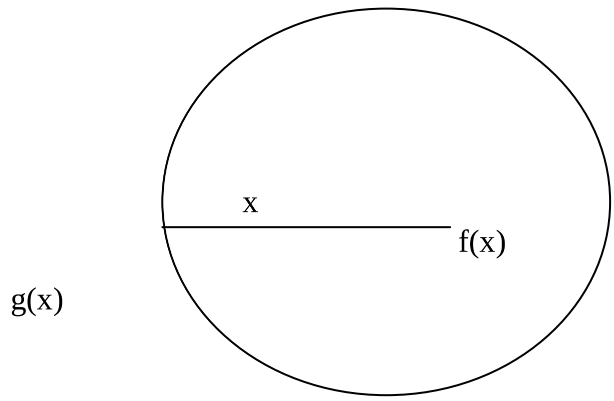
Tersini düşünecek olursak; $r : B^n[0,1] \rightarrow S^n[0,1]$ biçiminde sürekli olarak türevlenebilir bir r çekme dönüşümü olmasın.

Bu durumda

$f : B^n[0,1] \rightarrow B^n[0,1]$ için $x \in B^n[0,1]$ ve $f(x) = x$ in sağlandığını göstermemiz yeterlidir.

Varsayalım bu durumda $f(x) \neq x$ olsun.

x ve $f(x)$ noktalarından geçen doğruyu $\{x : \|x\| = 1\}$ ile kestirirsek bu kesişimden bir nokta ortaya çıkar.



Şekil3.2.2.2

Bu nokta $g(x)$ olsun. Her $x \in \{x : \|x\| = 1\}$ için $g(x) = x$ dir.

g 'nin sürekli olarak türevlenebilir olduğunu göstermeliyiz. x ve $f(x)$ arasındaki doğru

$\alpha(x)x + (1-\alpha(x))f(x)$ biçimindedir.

$\alpha(x)$ in sürekli türevlenebilir olduğunu göstermeliyiz.

$\forall x \in \{x : \|x\| = 1\}$ için

$\langle \alpha(x)x + (1-\alpha(x))f(x), \alpha(x)x + (1-\alpha(x))f(x) \rangle = 1$ dir.

Bunu açalım:

$\alpha(x)^2 \|x\|^2 + 2\alpha(x)(1-\alpha(x))\langle x, f(x) \rangle + (1-\alpha(x))^2 \|f(x)\|^2 = 1$

bulunur.

$\alpha(x)$, katsayıları sürekli olarak türevlenebilir bir denklemin çözümü olacağından, $\alpha(x)$ de sürekli olarak türevlenebilirler. Dolayısıyla sabit nokta vardır.

4. BÖLÜM

4.1. GEREKLİ KAVRAMLAR VE SCHAUDER SABİT NOKTA TOREMİ

Schauder sabit nokta teoremi, sabit nokta teorisinde önemli bir yer tutmakla birlikte Brouwer sabit nokta teoreminin Banach uzaylarına bir genellemesi şeklinde de düşünülebilir.

Bu teorem üzerinde durmadan önce anlamayı kolaylaştırıcı tanım ve kavramları vereceğiz:

Tanım4.1.1. Normlu Uzay (Banach Uzayı) : $\|.\| : B \to [0, \infty]$ fonksiyonu;

1) $x \in B$ ise $\|x\| \rangle 0$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\alpha \in \Re$ ve $x \in B$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir.

Şartlarını sağlıyorsa B uzayı **normlu uzaydır.** B uzayı üzerinde, $x, y \in B$ için

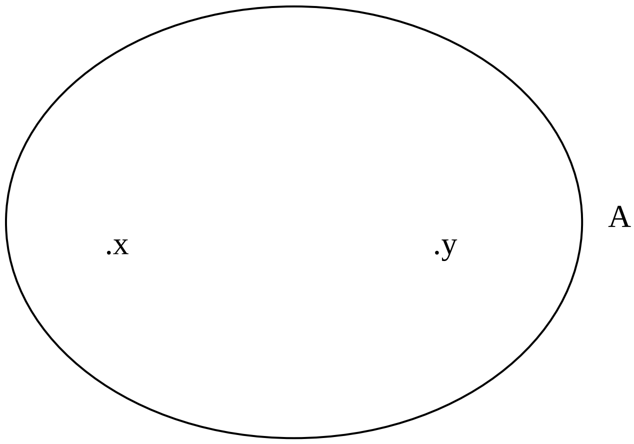
$d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan fonksiyon yukarıda belirtilen 4 özellik dolayısıyla bir metriktir.

B, bu metriğe göre bir tam metrik uzay ise, B'ye bir **Banach uzayı** denir.

Örnek4.1.1: $a \langle b$ gerçek sayılar ve $B = C([a, b])$ olsun. $f \in B$ için

$\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ normu ile B bir Banach uzayıdır.

Tanım 4.1.2: $\Re^n$ öklid uzayının bir A alt kümesi verilsin. $x, y \in$ A için $\overline{xy}$ doğru parçasını A kümesi kapsıyorsa A **konveks** bir kümedir.



Şekil 4.1.2

Tanım 4.1.3: (X,τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer x noktasının her komşuluğu, A kümesinin x noktasından farklı bir noktasını içerirse, x noktasına A kümesinin bir **yığılma noktası** denir.

x, A nın yığılma noktasıdır. $\Leftrightarrow \forall V \in \vartheta(x)$ için $A \cap V \neq \phi$ ve $\exists y \in A \cap V \ni y \neq x$

Lemma4.1.4: B bir Banach uzayı ve $y_0, y_1, \ldots. y_n$ bu Banach uzayının noktaları ve

$$C = \{\theta_0 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \theta_n y_n : \sum \theta_i = 1, \forall \theta_i \geq 0 \}$$

olsun. Bir $m \geq 0$ için C kümesi $\Re^n$ nin kompakt ve konveks bir alt kümesine homeomorfdur.

İspat:

$y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ nin B içinde doğurduğu alt uzay L olsun. L olsun. L sonlu boyutludur. L nin boyutu m ve L nin bir bazı $\{b_1, \ldots\ldots\ldots, b_m\}$ olsun.

$\varphi : L \to \Re^m$ fonksiyonunu

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} C_1 b_i\right) = (c_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_m)$$

olarak tanımlayalım. φ bir cebirsel izomorfizma olduğundan $1-1$ ve üzerindedir. φ nin tersi

$$\varphi(c_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$$

dir. $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \beta_n) \in \Re^m$ ise,

$$\begin{aligned}
\|\psi(\alpha) - \psi(\beta)\| &= \left\|\sum (\alpha_i - \beta_i) b_i\right\| \\
&\leq \sum |\alpha_1 - \beta_i| \| b_i \| \\
&\leq \max \|b_i\| \sum |\alpha_i - \beta_i| \\
&\leq \max \|b_i\| \sqrt{n} \|\alpha - \beta\|
\end{aligned}$$

olduğundan ψ süreklidir.

$$S = \left\{\alpha \in \Re^n : \sum \alpha_i^{\,2} = 1\right\}$$

koyalım.

$$M = \inf\left\{\left\|\sum \alpha_i b_i\right\| ; \alpha \in S\right\}$$

olsun. $M \rangle 0$ dır. Aksine $M=0$ olduğunu varsayalım. O zaman S nin bir $\alpha^{(k)}$ dizisi için

$$\left\|\alpha_i^{(k)} b_i\right\| \to 0$$

dır. $S \subseteq \Re^n$ kompakttır. O halde $\alpha^{(k)}$ nin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği kaybetmeksizin $\alpha^{(k)}$ nın $\alpha \in S$ ye yakınsadığını varsayalım. ψ sürekli olduğundan

$$\lim \psi(\alpha^{(k)}) = \psi(\alpha)$$

dır. Fakat

$$\left\|\psi\left(\alpha^k\right)\right\| = \left\|\sum \alpha_i^{(k)} b_i\right\| \to 0$$

olduğundan $\psi(\alpha)=0$ bulunur. O halde $\alpha=0$ dır. Bu ise $\|\alpha\|=1$

$$\left\|\psi\left(\alpha^{(k)}\right)\right\| = \left\|\sum \alpha_i^{(k)} b_i\right\| \to 0$$

olduğundan $\psi(\alpha)=0$ bulunur. O halde $\alpha=0$ dır. Bu ise $\|\alpha\|=1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $M \rangle 0$ dır. $\alpha \neq \beta$ için

$$\begin{aligned}
\left\|\sum \alpha_i b_i - \sum \beta_i b_i\right\| &= \left\|\sum (\alpha_i - \beta_i) b_i\right\| \\
&\geq \|\alpha-\beta\| \left\|\sum \frac{\alpha_i - \beta_i}{\|\alpha-\beta\|} b_i\right\| \\
&\geq \|\alpha-\beta\| M \\
&= M \left\|\varphi\left(\sum \alpha_i b_i\right) - \varphi\left(\sum \beta_i b_i\right)\right\|
\end{aligned}$$

olduğundan φ sürekli olur.

Teorem 4.1.5. (SCHAUDER SABİT NOKTA TEOREMİ):

X bir Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve Y, X in kompakt bir alt kümesi olsun. $f : X \to Y$ içine sürekli bir fonksiyon ise, f nin bir sabit noktası vardır.

İspat:

$\varepsilon \rangle 0$ verilsin. Y nin sonlu bir $\{y_1, ..., y_n\}$

alt kümesi için

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)$$

dir. Burada

$$B_\varepsilon(z) = \{y \in Y : \|y - z\| \langle \varepsilon\}$$

dır. Bu iddiamızı görebilmek için Y nin bu özelliği olan hiçbir sonlu alt kümesi olmadığını varsayalım. O zaman Y içinde $i \neq j$ için

$$\|y_1 - y_j\| \geq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir y_n dizisi bulunabilir. Y kompakt olduğundan (y_n) dizisinin $y \in Y$ gibi bir yığılma noktası vardır. O halde bir k için

$$\|y_k - y\| \langle \frac{\varepsilon}{4}$$

ve $\ell \rangle k$ için

$$\|y_\ell - y\| \langle \frac{\varepsilon}{4}$$ dir. Buradan

$$\varepsilon \leq \|y_k - y\| \langle \frac{\varepsilon}{2}$$

çelişkisi elde edilir. O halde Y içinde $\{y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n\}$ gibi bir sonlu küme için

$Y = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} B_\varepsilon(y_i)$ dir.

$x_\varepsilon = \{\theta_1 y_1 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n y_n : \sum \theta_i = 1, her \theta_i \geq 0\}$

olarak tanımlayalım. X_ε, X in bir konveks alt kümesidir. (Diğer taraftan X_ε nun Y nin alt kümesi olması gerekmez. Çünkü Y nin konveks olduğu varsayılmamıştır.) Şimdi $P_\varepsilon : Y \to X$ sürekli fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$1 \leq i \leq n$ ve $y \in Y$ için

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} o, \|y_i - y\| \geq \varepsilon \\ \varepsilon - \|y_i - y\|, \|y_i - y\| \langle \varepsilon \end{cases}$$

olsun. Kolayca görüleceği gibi $\varphi_i : Y \to [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $Y \in Y$ ise, bir y_i için $\varphi_i(y) \rangle 0$ olur.

$$S_y = \varphi_1(y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_n(y) \rangle 0$$

ve

$$\theta_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{S(y)} (1 \leq i \leq n, y \in Y)$$

koyalım. Her i için $\theta; \geq 0$ ve $\sum \theta_i = 1$ dir. $y \in Y$ için

$$P_\varepsilon(y) = \theta_1(y) y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \theta_n(y) y_n$$

fonksiyonu Y den X_ε içine sürekli bir fonksiyondur. φ_i lerin tanımı nedeni ile

$|y_i - y| \langle \varepsilon$ değilse,

$\varphi_i(y) = 0$

dır. O halde

$$|P_\varepsilon(y) - y| = \left|\sum \theta_i(y)(y_i - y)\right|$$

$$\leq \sum \theta_i(y)|(y_i - y)| \langle \varepsilon$$

olur.

$f_\varepsilon : x_\varepsilon - x_\varepsilon$

$$f_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(f(x))$$

olarak tanımlansın. İspat öncesi verilen Lemma dolayısıyla x_ε, bir m için $\Re^m$ nin kompakt ve konveks bir alt kümesine homeomorfdur. O halde f_ε nun $x_\varepsilon \in X_\varepsilon$ gibi bir sabit noktası vardır.

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$$

olduğundan

$$P_\varepsilon(f(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon| \langle \varepsilon$$

elde edilir.

$$y_n = f(x_{1/n}) \in Y$$

dir. Y kompakt bir metrik uzay olduğundan y_n nin yakınsak bir y_{n_k} alt dizisi vardır. $Y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ olsun.

$$\left|y_{n_k} - x_{1/n_k}\right| = \left|f(x_{1/n_k}) - x_{1/n_k}\right| \langle 1/n_k$$

olduğundan (x_{1/n_k}) dizisi de yakınsaktır, ve limiti y dir. O halde f nin de

sürekliliği göz önüne alınacak olursa,

$$f(y) = y$$

elde edilir.

5. BÖLÜM

5.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada sabit nokta teorisindeki varlık teoremleri incelenmiş ve sunulmuştur.

Sabit nokta tanımına istinaden her bir bilinmeyenli, katsayıları kompleks sayılar olan polinom denkleminin çözümünün bir sabit noktayı bulmaya indirgenebileceği saptanmıştır. 1. Bölümde bu yönde örnekler üzerinde durulmuştur. Sabit noktanın varlığını iddia eden teoremlerin kompaktlık veya tam topolojik uzay şartlarının sağlanmasıyla gerçeklendiği vurgulanmıştır. İlerki bölümlerdeki ifadelerin anlaşılması sebebiyle ilk bölümde metrik, kompaktlık, süreklilik, yakınsama, Cauchy Dizisi, Tam Uzay ve homeomorfizm gibi tanımlar ve örneklendirmeler üzerinde durulmuştur.

İlk olarak 2. bölümde en eski sabit nokta teoremlerinden birisi olan Banach' ın Daraltma Dönüşümü Teoremi incelenmiştir.

Banach Uzayında, verilen bir $x = A_x$ denkleminin çözümünün ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözüleceği gibi bu çözümün $A: X \to X$ dönüşümünün bir sabit noktasının varlığı ile denk olduğu incelenmiştir.

Adi diferensiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümü Picard varlık Teoreminde irdelenmiş ve bunun teorik sonucu olarak da Banach teoremi belirtilmiştir.

Ele alınan $f: X \to X$ daraltma dönüşümünde,

$x_0 \in X$ ile başlayan $x_n = f(x_{n-1})$ dizisi tanımlanarak f dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiştir.

Daraltma dönüşümü tanımıyla , $f(y)=y$ sonucunda elde edilen;

$d,(x_n,y)=d(f(x_{n-1}),f(y))\leq k.d(x_{n-1},y)$

eşitsizliği ard arda uygulandığında;

$d(x_n,y)\leq k^n d(x_0,y)$ olduğu gösterilmiştir.

$0\leq k\langle 1$ olduğundan x_0 ne olursa olsun

$\lim x_n = y$ olduğu görülmüştür. Buradan şu sonuç çıkarılmıştır ki; her hangi bir x_0 noktasına f dönüşümünü ardışık olarak uygulayarak elde edilen dizinin limiti bize aynı sabit noktayı verir. dolayısıyla söz konusu dizinin yakınsak olması ile sabit noktasının olması eşdeğerdir sonucuna varılmıştır.

Ayrıca bu çalışmada Banach Teoreminin adi diferensiyel denklemlere uygulaması irdelenmiştir.

Matematikte sonlu boyutlu uzaylarda Brouwer teoremi topolojik kavramları kullanarak ispatlanan genel teoremlerden biri olarak tanımlanmıştır. Sadece matematikte değil aynı zamanda ekonomide ve oyunlar teorisinde önemli bir araç olan şekillerde ifadesi ve çok çeşitli ispatları bulunduğu belirtilmiştir. Garsia'nın ve Milnor'un ispatları elemanter ispatlara örnek olarak verilebilir.

Brouwer teoremi, "$\Re^n$' nin kapalı birim yuvarı $B^n[0,1]$ olmak üzere eğer,

$f:B^n[0,1]\rightarrow B^n[0,1]$

sürekli bir fonksiyon ise

$\exists x_0\in B^n[0,1]\ni f(x_0)=x_0$ dir" olarak Brouwer tarafından verilmiş, daha sonra da değişik yöntemlerle farklı kişiler tarafından verilmiştir. Bu çalışmamızda geriye dönüşüm (çekme dönüşümü) tanımı kullanılarak bir ifade ve ispat üzerinde durulmuştur.

$r : X \to Y$ verilsin. Sabit nokta özelliğini sağlayan X için Y, X'in bir geriye dönüşü ise Y de sabit nokta özelliğini taşır ifadesi ispat bulmuştur.

Brouwer Sabit Nokta Teoreminin Banach uzaylarına bir genellemesi şeklinde ifade edilerek Schauder Sabit Nokta Teoremi incelenmiştir.

Bu teoremde Banach uzayında boştan farklı konveks ve Y gibi bir kompakt alt kümeye sahip olan X için; $f : X \to Y$ sürekli f için bir sabit noktanın varlığı irdelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] A. BÜLBÜL, 1994. *Genel Topoloji*

[2] C. H. Morales, S.A. Mutangadura, 1995. *On a Fixed Point Theorem of Kırk*

[3] Dugundji, T. 1966. *Topology.* (447.s)

[4] M. Edelstein, 1972. *The construction of asymtotic senter with a fixed point property.* (206-208 p.)

[5] Istratescu, V.I., 1981. *Fixed point theory* (466 p.)

[6] Janos, L. 1967. *A converse of Banach's Contraction Theorem,* (287-290 p)

[7]Kanan, 1971. *some results of fixed points*

[8] Karamardian, S. *Fixed Points,* 1977

[9] Kim C. Border, 1985. *Fixed Point theorems with Applications to Economics and Game Theorem*

[10]Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications.* (688 s.)

[11] Kiyoshi Iseki, 1974. *On common fixed points of mappings*(365-370 p.)

[12]Mill,J. Van *Norm Spaces and and Fixed Points of Cechy-Stone extensions, Topology and its Applications* 87, 1998 (21-27 p.)

[13]Prof. Dr. Binali MUSAYEV, Yrd. Doç. Dr. Murat ALP *Fonksiyonel Analiz,*

[14]Patterson, E.m. 1959. *Topology,* (127 s.)

[15]Robbins, H. *Some complements to Brouwer's fixed point theorem*, 1975 (213-218 s.)

[16]Royden, H.L. 1968. *Real Analysis* (349 s.)

[17] H. Scarf, 1973. *The Computation of Economic Equilibria*

[18] Simmons, G.F. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* (372 s.)

[19] Smart, D.R. 1974 *Fixed Point Theorems. Cambridge Üniversity Pres London.* (93. s)

[20] T. Terzioğlu, 1994 *An Introduction to Reel Analysis*

[21] Terzioğlu, T.1998 *Fonksiyonel Analizin Yöntemleri,*

[22] T. H. Chang, C. L. Yen, 1989. *Some fixed point Theorem in Banach spaces*

[23] Prof Dr. Şaziye YÜKSEL *Genel Topoloji,* 1998.

[24] E. Zeidler, 1995. *Applied Functional Analysis.*