BIRKHOFF SİSTEMLERİ ÜZERİNDE AYNI ANDA YAKLAŞIM VE İNTERPOLASYON İLİŞKİSİ

Gaziantep Üniversitesi
Matematik AnaBilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd.Doç.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ

Sıdıka Tuba COŞKUN
Temmuz 2005

ÖZ

BIRKHOFF SİSTEMLERİ ÜZERİNDE AYNI ANDA YAKLAŞIM VE İNTERPOLASYON İLİŞKİSİ

COŞKUN Sıdıka Tuba
Yüksek Lisans Tezi, MatematikAnaBilim Dalı
Tez Yöneticisi:Yrd.Doç.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ

Temmuz 2005, 45 sayfa

$0 = k_o < k_1 < ... < k_\rho$ birer tam sayı ve $\|.\|$ normu da bilinen Chebyshev normu olmak üzere derecesi en çok n olan polinomlarla türevlenebilir f fonksiyonuna

$$\|f\|_F = \max_{i=0,1,...,\rho} \left\|f^{(k_i)}\right\|$$

normu ile yaklaşıma aynı anda yaklaşım denir. f fonksiyonuna hem cebirsel hem de trigonometrik polinomlarla yaklaşılabilir.

Bu çalışmada, her iki yaklaşımda da aynı şekilde tanımlanan uç kümeler incelendi. Benzerlikleri ve farklılıkları ortaya konuldu. Ayrıca en iyi aynı anda yaklaşımın tekliği incelendi ve uygun koşullar altında cebirsel polinomlarla aynı anda yaklaşımın tek olup olmadığı araştırıldı.

Haar uzayında aynı anda yaklaşımın uç kümelerini ve en iyi yaklaşım polinomları kullanılarak bir incidence matris oluşturuldu. Bu matris için belirlenen Birkhoff interpolasyon problemi; matris üzerinde yapılan çeşitli değişiklikler ve Birkhoff koşulları olarak da bilinen Polya koşullarının ışığı altında çözüldü.

Anahtar Kelimeler – Aynı Anda Yaklaşım, Uç Küme, Incidence Matris, Birkhoff İnterpolasyonu

ABSTRACT

SIMULTANEOUS APPROXIMATION ON BIRKHOFF SYSTEMS AND RELATION WITH INTERPOLATION

COŞKUN Sıdıka Tuba
M.Sc.in Department of Mathematics.
Supervisor: Asst.Prof.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ
Temmuz 2005, 45 pages

By simultaneous approximation we mean the approximation of a differentiable function f by polinomials with respect to the semi-norm $\|.\|_F$ given by

$$\|f\|_F = \max_{i=0,1,\ldots,\rho} \left\| f^{(k_i)} \right\|,$$

where the k_i are integers satisfying $0 = k_o < k_1 < \ldots < k_\rho$. $\|.\|$ is the uniform norm.We can approximate to f with algebraic and trigonometric polynomials.

In this study, the extremal sets which have the same definations in algebraic and trigonometric approximation are examined. Then the differences and the similarities are discovered. Moreover, the uniqueness of best simultaneous approximation is investigated and the question ‘under sufficient condition, it can be unique?’ is answered.

In Haar space, an incidence matrice is existed by using the extremal sets and the best approximation polynomials. The Birkhoff interpolation problem which is decided for this incidence matrice, is solved by changing the matrice and using the Polya conditions which is known as the Birkhoff conditions.

Key Words – Simultaneous Approximation, Extremal Sets, Incidence Matrice, Birkhoff Interpolations.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada benden yardımlarını esirgemeyen, bana her konuda hiçbir fedakarlıktan kaçınmadan destek olan kıymetli hocam sayın Yrd.Doç.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ'e, katkılarından dolayı değerli eşime, çok sevdiğim kardeşlerim Ebru ve Bahadır'a, gölgelerini her zaman arkamda hissettiğim aileme en içten sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

I.BÖLÜM
GİRİŞ

1.1.Temel Tanımlar ve Amaçlar

$k \leq n$ ve n-tek olmak üzere k ve n pozitif tamsayıları ile $1 \leq i \leq k$ ve $0 \leq j \leq \infty$ olacak şekilde n-tane (i,j) sıralı ikililerinin bir I kümesi verilsin.

$0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < 2\pi$ olacak şekilde k-tane $x_1, x_2, ..., x_k$ noktaları ve $(i,j) \in I$ için i ler satırları, j ler sütunları belirtmek üzere

$$P^{(j)}(x_i) = 0$$

şartına interpolasyon şartı denir.

Bu şartı sağlayan $P(x)$; derecesi en çok $\frac{n-1}{2}$ olan gerçel ya da trigonometrik polinomlar uzayını ve bunun bir alt uzayını belirler.

İnterpolasyon şartı genellikle $(k \times \infty)$ tipinde yarı-sonsuz matris tarafından belirlenir.

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in I \ \ ise \\ 0, & (i,j) \notin I \ \ ise \end{cases}$$

olmak üzere

$$E = \left\| e_{ij} \right\|_{i=1,\ j=0}^{k,\infty}$$

şeklinde gösterilen bu E matrisine, verilen Hermite-Birkhoff interpolasyon problemi ile belirlenen n-incidence matris denir[1].

Tanım 1.1.1: E matrisinin zorunlu(essential) sütunları ile; içinde sıfırdan farklı eleman bulunan sütunlarla onlardan önceki sütunları kastediyoruz. Yani, E nin q nuncu sütunu E nin içinde bir tane 1 e sahip olan sütun ise o zaman E matrisinin zorunlu(essential) sütunları ilk $q+1$ tane sütundur.

Tanım 1.1.2: $E=\|e_{i,j}\|$ matrisi, k-tane satır ve q tane zorunlu(essential) sütuna sahip bir n incidence matris olup $v=0,1,...,q-1$ olmak üzere

$$m_v = \sum_{\mu=1}^{k} e_{\mu v}$$

ve

$$M_v = \sum_{\mu=0}^{v} m_v$$

sayılarını tanımlayalım. Bu durumda

i) $m_0 = M_0 > 0$ ise E ye zayıf Polya koşulunu

ii) $M_v \geq v+1 \quad (v=0,1,...,q-1)$ ise E ye Poyla koşullarını,

iii) $M_v \geq v+2 \quad (v=0,1,...,q-2)$ ise E ye kuvvetli Polya koşulunu sağlar denir[1].

Burada, k-tane satır ve q-tane zorunlu(essential) sütuna sahip E n-incidence matrisi

$$E=\|e_{i,j}\| = \begin{Vmatrix} e_{10} & e_{11} & e_{12} & . & . & . & e_{1\,q-1} \\ e_{20} & e_{21} & e_{22} & . & . & . & e_{2\,q-1} \\ e_{30} & e_{31} & e_{32} & . & . & . & e_{3\,q-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ e_{k0} & e_{k1} & e_{k2} & . & . & . & e_{k\,q-1} \end{Vmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.3: Bir $E=\|e_{i,j}\|$ incidence matrisinde, E nin herhangi bir satırındaki ardışık 1 lerin en büyüğüne (uzunluğa bağlı olarak) dizi denir.

Eş değer olarak eğer $e_{iv}=1 \quad (v=j,\dots,p)$ iken

$$e_{i,j-1} = 0 = e_{i,p+1}$$

ise E, i-inci satırında

$$p-(j-1) = p-j+1$$

uzunluğunda bir diziye sahiptir. Bu dizi

$$e_{i,j},\dots,e_{i,p}$$

dir. $e_{i,j},\dots,e_{i,p}$ dizisine kısaca E nin (i,j) dizisi denir. Eğer $p-j+1$ tek ise bu diziye tek dizi, aksi halde çift dizi denir.

Tanım 1.1.4: $\mu \neq 1$ ve $v < j$ olmak üzere E nin bir $e_{\mu,v}$ elemanının 1 olması durumunda (i, j) dizisine trigonometrik olarak destekli denir.

Eğer; $\mu < i < j$ ve $v, \tau < j$ olmak üzere

$$e_{\mu,v} = e_{p,\tau} = 1$$

olacak şekilde E nin iki tane $e_{\mu,v}$ ve $e_{p,\tau}$ eleman varsa bu (i, j) dizisine cebirsel olarak destekli denir.

Tanım 1.1.5: Bir $(2n+1)$ - incidence matrisinin alt uzayının boyutu sıfır ise bu matrise dengeli matris (poised) denir.

Başka bir şekilde ifade edecek olursak;

Derecesi en çok n olan trigonometrik polinomlardan interpolasyon koşullarını sağlayan tek trigonometrik polinom sıfır polinomu ise $(2n+1)$ - incidence matrisine dengeli metris (poised) denir.

Tanım 1.1.6: Eğer $\dim H = n$ olmak üzere; sıfırdan farklı her $h \in H$ nin $[a,b]$ üzerinde en çok $"n-1"$ sıfırı var ise veya buna denk olarak, H nin her $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ bazı ve $[a,b]$ de farklı $t_1, t_2, \ldots t_n$ n lisi için

$$\begin{vmatrix} h_1(t_1) & h_2(t_2) & . & . & . & h_1(t_n) \\ h_2(t_1) & h_2(t_2) & . & . & . & h_2(t_n) \\ . & . & . & . & . & . \\ h_n(t_1) & h_n(t_2) & . & . & . & h_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

ise $H \subset C[a,b]$ alt uzayı Haar Şartını sağlıyor denir$[2]$.

Yaklaşım teorisi, çok geniş uygulama alanları olan bir aralık üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara, daha basit yapıdaki polinomlarla yaklaşma üzerine kurulan bir konudur. Analizden de bilindiği üzere; Taylor serisi var olan bir fonksiyonun yaklaşımı olarak, bu serinin kısmi toplamları alınabilir.

Bu çalışmada Yaklaşım teorisinin uygulama alanlarından biri olan aynı anda yaklaşım incelenecektir. Çalışmanın amacı verilen tanımların ışığı altında aynı anda yaklaşımın karakterize edilerek, Birkhoff sistemleri ve interpolasyonla olan ilişkisini ortaya çıkartmaktır.

1.2. Kaynak Özetleri

K. Atkinson ve A.Sharma [1], 1969 yılında yaptıkları çalışmada Hermite-Birkhoff interpolasyon probleminde;

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in I \\ 0, & (i,j) \notin I \end{cases}$$

olmak üzere

$$E = \left\| e_{ij} \right\|_{i=1,\, j=0}^{k,\infty}$$

şeklinde tanımlanan E incidence matrisine Polya şartlarını sağlatarak dengeli olduğunu göstermiştir.

Y. Ikebe [2], 1973 yılında Haar Şartını farklı açılardan ele alarak Haar uzaylarını ve Hermite-Birkhoff interpolasyon probleminin bu uzaylar üzerindeki değişimlerini incelemiştir.

Darell J.Johnson [3], 1975 yılında cebirsel polinomların Hermite-Birkhoff interpolasyon problemini trigonometrik polinomlar için incelemiştir. Yaptığı çalışmada, k ve n pozitif tam sayıları için $1 \le i \le k$ ve $0 \le j < \infty$ olacak şekilde n tane (i, j) sıralı ikilisi verildiğinde derecesi en çok $\dfrac{n-1}{2}$ olan ve

$$P^{(j)}(x_i) = 0$$

konumunu sağlayan tek trigonometrik polinom uzayının sıfır uzayı olduğunu göstermiştir.

R.A.Lorentz [5], 1975 yılında yaptığı çalışmasında; $F = \{k_0, k_1, \ldots, k_p\}$ ve $0 = k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan $\|\,.\,\|$ - Chebyshev normunu ele alarak tanımladığı

$$\|f\|_F = \max_{i=0,1,\ldots,p} \left\| f^{(k_i)} \right\|$$

normuyla Π_n cebirsel polinomlarıyla türevlenebilir fonksiyonlara yaklaşımı incelemiştir. Elde ettiği temel sonuç, F - normunda en iyi yaklaşık polinomlarının belirlenmesi olmuştur. Bu belirleme

$$G = \{k_i \in F : V_i(f) \neq 0\}$$

ve

$$q = \min_{k_i \in G}\{k_i\}$$

olmak üzere q nun karakterizasyonu ile yapılmıştır.

Darell J. Jonhnson $[4]$, 1976 yılında da türevlenebilen fonksiyonlara aynı anda yaklaşımı derecesi en çok n olan T_n trigonometrik polinomlarıyla incelemiş ve bir en iyi yaklaşık trigonometrik polinomun var olması durumunda diğer en iyi yaklaşıkların bilindiği gerçeğinden hareket ederek en iyi yaklaşık trigonometrik polinomların kümesini belirlemiştir.

L.L. Keener $[7]$, 1980 yılında yaptığı çalışmada Haar uzayındaki elemanlarla Hermite ve Hermite-Birkhoff interpolasyonu üzerine bazı temel sonuçlara ulaşmıştır ve bu sonuçları bir fonksiyon ve türevlerine yaklaşım problemine uygulamıştır.

R.A.Lorentz $[9]$,1983 yılında Haar uzayları üzerinde aynı anda yaklaşımı incelemiştir. Bir fonksiyona aynı anda yaklaşım kümesinin hiçbir zaman boş olmadığı ve her zaman birden fazla elemanı kapsadığından yola çıkarak bu kümenin boyutunu araştırmış ve $\|.\|_F$ normu ile yaklaşım probleminin daha basit yarı normlarla yaklaşım ile değiştirilip değiştirilemeyeceğini bulmaya çalışmıştır.Bunu yaparken de Birkhoff Sistemlerinden yararlanmıştır.

2.BÖLÜM
AYNI ANDA YAKLAŞIM

2.1. Trigonometrik Polinomlarla Aynı Anda Yaklaşım

Derecesi en çok n olan T_n trigonometrik polinomlarıyla türevlenebilir fonksiyonlara

$$\|f\|_F = \max_{i=0,1,\ldots,p} \left\|f^{(k_i)}\right\|$$

normu ile yaklaşıma aynı anda yaklaşım denir.Burada $0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_p$ birer tamsayı ve $\|\,.\,\|$ normu da, $T = [-\pi, \pi]$ olmak üzere $C(T)$ üzerinde bilinen Chebyshev normu olup

$$\|f\| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$$

şeklindedir. O halde

$$\|f\|_F = \max_{i=0,1,\ldots,p} \left(\max_{x\in[-\pi,\pi]} \left|f^{(ki)}(x)\right| \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_\rho$ ve $F = \{k_o, k_1, \ldots, k_\rho\}$ olmak üzere; B_F; $[-\pi, \pi\ ]$ birim çemberi üzerinde, yukarıda tanımlanan $\|\,.\,\|_F$ normunda k_ρ kere sürekli türevlenebilen gerçel değerli fonksiyonların bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.1: $(X, \|\,.\,\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık;

$$n_0 \le n, m \quad \text{için} \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Ayrıca normlu uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.2: Bir $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayı içinde olan her dizi yine bu uzay içinde bir elemana yakınsıyor ise $(X, \|\,.\,\|)$ uzayına tam uzay denir**.**

Tanım 2.1.3: Bir $\left(X,\ \|\,.\,\|\right)$ normlu uzayı tam ise yani bu uzay içinde alınan her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Yukarda verilen tanımların ışığı altında B_F nin bir Banach uzayı olduğunu göstermek zor değildir.

Bu durumda eğer $f \in B_F$ ise $f^{(k_i)} \in C[-\pi,\pi]$ olur. $f \in B_F$ verildiğinde $\forall q \in T_n$ için

$$\left\|f - q^*\right\|_F \leq \left\|f - q\right\|_F$$

olacak şekilde her zaman en az bir $q^* \in T_n$ vardır. Weierstrass temel teoremine göre, belli aralıktaki sürekli fonksiyonların yakınında daima bir polinom bulunur. Yani polinom uzayı bu uzay içinde yoğundur. Bu durumda $f:[a,b]\to R$, sürekli bir fonksiyon ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|f - p\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $p(x)$ polinomu bulunabilir.

Tanım 2.1.4: $f \in B_F$ fonksiyonuna $q \in T_n$ polinomları ile $\|\,.\,\|_F$ normunda en iyi yaklaşıkların kümesi $\Omega(f)$ ile gösterilir ve

$$\Omega(f) = \left\{\ p \in T_n :\ \|f - p\|_F = \inf_{q\in T_n} \|f - p\|_F\ \right\}$$
$$= \left\{\ p \in T_n :\ \|f - p\|_F\ \leq\ \|f - q\|_F\ ,\ \forall q \in T_n\ \right\}$$

şeklinde tanımlanır.Ayrıca $\forall f \in B_F$ için $\Omega(f) \neq 0$ dır.

Diğer bir deyişle bu $\Omega(f)$ kümesi; $f, f^{(k_1)}, \ldots, f^{(k_\rho)}$ fonksiyonlarına $q \in T_n$ polinomları ile Chebyshev normunda en iyi aynı anda yaklaşımların kümesidir. Buradan

$$\Lambda(f) = \left\|f - q^*\right\|_F\ ,\ \ q^* \in \Omega(f)$$
$$\Lambda(f) = \inf_{q\in T_n}\ \|f - q\|_F$$

iyi tanımlıdır ve eğer;

$$f \in T_n \quad ise \quad \Lambda(f) = 0$$
$$f \notin T_n \quad ise \quad \Lambda(f) > 0$$

dır.

Tanım 2.1.5: $\left|(f-p)^{(k_i)}\ (x)\right|$ fonksiyonunun maksimum değerleri aldığı noktaların kümesine uç(extremal) küme denir ve

$$U_i\,(p)=\left\{x\in[-\pi,\pi\ ):\left|(f-p)^{(k_i)}\ (x)\right|=\|f-p\|_F\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$U_i(q)$ uç kümelerinin bazı özelliklerini inceleyelim. Önce $\forall\, U_i(q)$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Kompaktlık tanımını hatırlayacak olursak; kümedeki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahipse bu küme kompakttır. Ayrıca kompakt bir küme kapalı ve sınırlıdır. $U_i(q)$ kümesini

$$U_i\,(q)=\left\{x\in[-\pi,\pi\ ):\left|(f-q)^{(k_i)}(x)\right|=\|f-q\|_F\right\}$$

şeklinde tanımlamıştık. Bu tanımda da görüldüğü gibi; $U_i(q)$ kümesi, $\{\|f-q\|_F\}$ kümesinin sürekli $\left|(f-q)^{(k_i)}\ (x)\right|$ fonksiyonu altındaki ters görüntüsüdür.

$$\{\|f-q\|_F\}\subset R$$

tek elemanlı bir küme olup R de kapalıdır. 'Kapalı bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki ters görüntüsü de kapalı' olacağından $U_i(q)$ kapalıdır.

$T=[-\pi,\pi]$ kümesi kompakt olup $U_i(q)\subset T$ dir.'Kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri de kompakt' olacağından $U_i(q)$ kompakttır.

Şimdi Lindelöf Teoremini hatırlayarak bu teoremin $U_i(q)$ uç kümelerine uyarlanışını inceleyelim.

Teorem 2.1.1(Lindelöf): E, reel sayıların açık kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{o\in E}O=\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i$$

olacak şekilde. E nin bir $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ sayılabilir alt koleksiyonu vardır.

Sonuç 2.1.1: Herhangi iki reel sayı arası; $x<y$ iken $x<r<y$ olacak şekilde uygun bir r nin varlığı için uygundur.

Bu teoremi $U_i(q)$ uç kümelerine uyarlayalım.

$$U_i=\bigcap\{U_i(g):g\in\Omega(f)\}$$

olsun.Bu durumda $\forall_i=0,1,...\rho$ için

$$U_i = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} U_i(q_\nu) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $\{q_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \Omega(f)$ dizisi vardır.

Şöyle ki;

$U_i(q)$ lar kapalı olup, kapalı kümelerin sonlu kesişimi de kapalı olacağından;

$$U_i = \bigcap_{q\in\Omega(f)} U_i(q)$$

kapalıdır. Her iki tarafın da tümleyeni alınırsa

$$U_i^c = \bigcup_{q\in\Omega(f)} U_i^c(q) \tag{2.2}$$

açık kümesi elde edilir.Lindelöf teoreminden;

$$\bigcup_{q\in\Omega(f)} U_i^c(q) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_i^c(q_\nu)$$

dir. Bu eşitlik **(2.2)** de yerine yazılırsa

$$U_i^c = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_i^c(q_\nu)$$

elde edilir. Tekrar her iki tarafın tümleyeni alınırsa

$$U_i = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} U_i(q_\nu)$$

olur ve bu da **(2.1)** eşitliğinin kendisidir.

Lemma 2.1.1: $\forall q \in \Omega(f) \quad ve \quad \forall i = 0,1,...,\rho$ için

$$U_i(q^*) \subset U_i(q)$$

ve

$$x \in U_i(q^*)$$

ise o zaman

$$(q^*)^{(k_i)}(x) = q^{(k_i)}(x)$$

olacak şekilde bir $q^* \in \Omega(f)$ vardır.

Lemmayı ispatlamak için

$$q^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} q_\nu = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2^2}q_2 + ... + \frac{1}{2^n}q_n + ...$$

olarak tanımlayalım ve q^* *ın* T_n *nin* elemanı olup olmadığını araştıralım. Önce q^*ın düzgün yakınsaklığını inceleyelim. Düzgün yakınsaklık için Weierstrass M-Testini hatırlayalım.

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ bir E kümesi üzerinde reel değerli fonksiyonların bir serisi olsun. Eğer,

$$\forall x \in E \text{ ve } \forall n \geq N_1 \text{ için } |U_n(x)| \leq \mu_n$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$$

olacak şekilde bir $N_1 \in N$ doğal sayısı ve bir (μ_n) pozitif reel sayılar dizisi varsa $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ serisi E üzerinde düzgün yakınsaktır.

$q_v \in T_n$ için $A_{kv}, B_{kv} \in R$ olmak üzere

$$q_v = A_{ov} + \sum_{k=1}^{n} (A_{kv} \cos kt + B_{kv} \sin kt)$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca;

$$2^{-v} q_v = U_n(x)$$

dersek

$$\sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v} q_v = \sum_{v=1}^{\infty} U_n(x)$$

olup, buradan

$$|U_n(x)| = \left|2^{-v} q_v\right| = \left| \frac{A_{ov} + \sum_{k=1}^{n} (A_{kv} \cos kt + B_{kv} \sin kt)}{2^v} \right|$$

olur. Sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının en büyük değerini alıp üçgen eşitsizliğini uygularsak

$$|U_n(x)| \leq \frac{1}{2^v} \left[|A_{ov}| + \sum_{k=1}^{n} \left(|A_{kv}| + |B_{kv}| \right) \right] \tag{2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\|q_v\|_F = \|q_v - f + f\|_F \leq \|q_v - f\|_F + \|f\|_F$$

olup

$$\|q_v\|_F \leq sabit$$

olduğundan en az bir μ sabiti vardır öyle ki

$$|A_{kv}| < \mu_1 \text{ ve } |B_{kv}| < \mu_2$$

dir. Bu durumda

$$\left[|A_{ov}| + \sum_{k=1}^{n} \left(|A_{kv}| + |B_{kv}| \right) \right] < a \;\; sabit \qquad \textbf{(2.4)}$$

olmalıdır. Aksi halde $\|q_v\|_F$ normu sabit olmazdı. **(2.4)** ifadesini **(2.3)** de yerine yazarsak

$$|U_n(x)| \leq \frac{1}{2^v}.a$$

olur. Eğer

$$\mu_n = \frac{a}{2^v}$$

olarak alırsak

$$|U_n(x)| = |2^{-v} q_v| \leq \mu_n \qquad \textbf{(2.5)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Weierstrass M-Testinin birinci şartını sağlamış olur. Buradan

$$\sum_{v=1}^{\infty} \mu_n = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a}{2^v} = a \in R < \infty$$

elde edilir. Böylece

$$q^* = \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v} q_v$$

serisi için

$$|2^{-v} q_v| \leq \frac{a}{2^v} = \mu_n$$

ve

$$\sum_{v=1}^{\infty} \mu_n = a \;\; sabit < \infty$$

olacak şekilde bir $a \in R$ ve bir (μ_n) pozitif reel sayılar dizisi olduğundan Weierstrass M-Testinden dolayı q^* serisi düzgün yakınsaktır. q^* ın düzgün yakınsaklığını gösterdikten sonra şimdi $q^* \in T_n$ olduğunu gösterebiliriz.

$$q^* = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{q_v}{2^v} = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A_{ov} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{kv} \cos kt + B_{kv} \sin kt \right)}{2^v} \right)$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_{ov}}{2^v} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_{kv}}{2^v} \right) \cos kt + \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{B_{kv}}{2^v} \right) \sin kt \right]$$

$$q^* = c_o + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos kt + D_k \sin kt$$

eşitliği elde edilir. Böylece $q^* \in T_n$ dir.

Şimdi $q^* \in \Omega(f)$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce $\Omega(f)$ nin konveks olup olmadığını inceleyelim.

Eğer

$$q_1, q_2 \in \Omega(f) \Rightarrow \|q_1 - f\|_F \leq \|q - f\|_F$$
$$\|q_2 - f\|_F \leq \|q - f\|_F \tag{2.6}$$

dir.

Buradan

$$\|\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 - f\|_F = \|\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 - (\alpha + (1-\alpha)) f\|_F$$
$$\leq \alpha \|q_1 - f\|_F + (1-\alpha) \|q_2 - f\|_F$$

elde edilir. **(2.6)** eşitsizliklerini yerine yazarsak

$$\|\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 - f\|_F \leq \|q - f\|_F$$

olup $\Omega(f)$ nin tanımından

$$\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 \in \Omega(f)$$

dir.Bu durumda $\Omega(f)$ konvekstir.

Buradan, $\Omega(f)$ nin konveksliğinden ve her bir $q_v \in \Omega(f)$ olmasından dolayı $q^* \in \Omega(f)$ dir çünkü

$$\|q^* - f\|_F = \left\| \sum_{v=1}^{\infty} \frac{q_v}{2^v} - f \right\|_F$$
$$\leq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \|q_v - f\|_F \tag{2.7}$$
$$\leq \|q_v - f\|_F$$

dir. $q_v \in \Omega(f)$ olduğundan dolayı

$$\|q_v - f\|_F \leq \|q - f\|_F \ , \quad \forall q \in T_n$$

eşitsizliği sağlanır. **(2.7)** de bunu kullanırsak

$$\left\|q^* - f\right\|_F \leq \left\|q - f\right\|_F$$

olur.Bu durumda $q^* \in \Omega(f)$ dir.

Sonuç 2.1.2: Eğer p^* *ve* q^* polinomlarının her ikisi de bir f fonksiyonun en iyi minimal yaklaşım polinomları ise $\forall i = 0,1,...,\rho$ için

$$U_i(p^*) = U_i(q^*)$$

$$\text{ve} \quad \forall x \in U_i(p^*) = U_i(q^*) \quad \text{için}$$

$$p^*(x) = q^*(x)$$

dir. Notasyonları gözardı ederek; her bir $i = 0,1,...,\rho$ için q^* ın f fonksiyonunun en iyi minimal yaklaşığı ve

$$U_i(f) \equiv U_i(q^*)$$

olduğunu kabul edelim. İster istemez en az bir $j \in \{0,1,...,\rho\}$ için

$$U_j \neq \varnothing$$

dir. Bundan sonra eğer q^*, f ye en iyi minimal yaklaşım polinomu ise

$$U_i(f) \equiv U_i(q^*)$$

eşitliğini kullanacağız.

Tanım 2.1.6: $\forall q \in \Omega(f)$, $\forall i = 0,1,...,\rho$ *ve bir* $q^* \in \Omega(f)$ polinomu için

$$U_i(q^*) \subset U_i(q)$$

ve $x \in U_i(q^*)$ için

$$\left(q^*\right)^{(k_i)}(x) = q^{(k_i)}(x)$$

şartları sağlanıyorsa bu q^* polinomuna f ye bir en iyi minimal yaklaşım polinomu denir.

Lemma 2.1.2: Bir q^* fonksiyonunun bir $f \in B_F - T_n$ fonksiyonuna en iyi minimal yaklaşım polinomu olması için gerek ve yeter koşul

$$\max_{i=0,1,...,\rho}\left\{\sup\left[\left(f - q^*\right)^{(k_i)} . \, q^{(k_i)}\right](x) : x \in U_i\left(q^*\right),\, k_i \in F\right\} \leq 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

olacak şekilde bir $q \in T_n$ polinomunun bulunmaması ve bazı $j \in \{0,1,...,\rho\}$ ve bazı $x_j \in U_j\left(q^*\right)$ için

$$\left[\left(f-q^{*}\right)^{(k_j)} q^{(k_j)}\right]_{(x_j)} \leq 0 \qquad \textbf{(2.9)}$$

kesin eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Lemmanın ispatını Kolmogoroff Karakterizasyon teoreminin ispatından faydalanarak yapalım.

Gerek Şart: q^* bir $f \in B_F \left| T_n\right.$ fonksiyonu en iyi minimal yaklaşım polinomu olsun. Bu durumda

$$\Lambda(f) = \left\| f - q^* \right\|_F$$

dir. $\forall q$ polinomu için

$$\max_{i=0,1,\ldots,\rho} \left\{ \sup_{x \in U_i(f)} \left[(f-q^*)^{(k_i)} .\ q^{(k_i)} \right] (x) \right\} \leq 0$$

olsun. (Olmayana Ergi Metodu) Bu durumda

$$\max_{i=0,1,\ldots,\rho} \left\{ \sup_{x \in U_i(f)} \left[(f-q^*)^{(k_i)} .\ q^{(k_i)} \right] (x) \right\} = -2\varepsilon$$

olacak şekilde $q(x)$ vardır. Fonksiyonun sürekliliğinden

$$\left[\left(f(x)-q^*(x)\right)^{(k_i)} .q^{(k_i)}(x)\right] < -\varepsilon, \qquad x \in G$$

ve $U_i(f) \subset G$ olacak şekilde $T = [-\pi, \pi]$ nin bir G açık alt kümesi vardır.

$\lambda > 0$ için $q_\lambda = q^* - \lambda q$ olsun ve

$$M = \max_{x \in [-\pi,\pi]} \left\| q^{(k_i)}(x) \right\|$$

alalım.

$x \in G$ için

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\alpha\beta + |\beta|^2$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| f^{(k_i)}(x) - q_\lambda^{(k_i)}(x) \right\|^2 &= \left\| f^{(k_i)}(x) - q^{*(k_i)}(x) + \lambda q^{(k_i)}(x) \right\|^2 \\ &< \Lambda^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2 M^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer

$$\lambda < M^{-2}\varepsilon$$

alırsak

$$\left\| f^{(k_i)}(x) - q_\lambda^{(k_i)}(x) \right\|^2 < \Lambda^2 = \left\| f^{(k_i)}(x) - q^{*(k_1)}(x) \right\|^2$$

$$\left\| f^{(k_i)}(x) - q_\lambda^{(k_i)}(x) \right\| < \left\| f^{(k_i)}(x) - q^{*(k_1)}(x) \right\|$$

$$\left\| f - q_\lambda \right\|_F < \left\| f - q^* \right\|_F$$

olup q_λ , f ye q^* dan daha yakındır (veya f ye q^* dan daha az bir hata ile yaklaşır).Buda kabulümüzle çelişir.

$x \in G$ için $F = T \mid G$ olup F kapalıdır. F üzerinde $\left\| f^{(k_i)}(x) - q^{*(k_i)}(x) \right\| < \Lambda$ kalır.

Bir $\lambda > 0$ için $\left\| f^{(k_i)}(x) - q^{(k_i)}(x) \right\|$ *ve* Λ gerçel sayıları arasında kalacak şekilde bir δ bulabiliriz. Şöyle ki;

$$\left\| f^{(k_i)}(x) - q^{(k_i)}(x) \right\| < \Lambda - \delta < \Lambda \quad , \quad x \in F$$

dir. $\lambda < (2M)^{-1}\,\delta$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} \left\| f^{(k_i)}(x) - q_\lambda^{(k_i)}(x) \right\| &= \left\| f^{(k_i)}(x) - q^{(k_i)}(x) + \lambda\, q^{(k_i)}(x) \right\| \\ &< \Lambda - \delta + \lambda M < \Lambda = \left\| f^{(k_i)}(x) - q^{(k_i)}(x) \right\| \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\left\| f - q_\lambda \right\|_F < \left\| f - q \right\|_F$$

olup q_λ , q^* dan f ye daha yakındır. Buda bir çelişkidir.

Yeter Şart: $\forall q \in T_n$ için

$$\max_{i=0,1,\ldots,\rho} \left\{ \sup_{x \in U_i(f)} \left[f^{(k_i)}(x) - q^{*(k_i)}(x) \right] q^{(k_i)}(x) \right\} \geq 0 \;, \quad j \in \{0,1,\ldots,\rho\}$$

olsun. Keyfi bir $q = q^* - q_\lambda$ olmak üzere $x_j \in U_j(f)$ için

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| f^{k_j}(x_j) - q_\lambda^{(k_j)}(x_j) \right\|^2 &= \left\| f^{k_j}(x_j) - q^{*(k_j)}(x_j) + q^{(k_j)}(x_j) \right\|^2 \\ &\geq \left\| f^{k_j}(x_j) - q^{*(k_j)}(x_j) \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\left\| f^{k_j}(x_j) - q_\lambda^{(k_j)}(x_j) \right\| \geq \left\| f^{k_j}(x_j) - q^{*(k_j)}(x_j) \right\|$$

dır ve

$$\| f - q_\lambda \|_F \geq \| f - q^* \|_F$$

olup, q^* ; f ye en iyi minimal yaklaşım polinomudur.

Lemma 2.1.3: Eğer $f \in B_F | T_n$; $[-\pi, \pi]$ üzerinde $(k_i + 1)$ kere türevlenebilir ise $p \in \Omega(f)$ ve $x \in U_i(p)$ için

$$(f - p)^{(k_i+1)}(x) = 0$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$k_i + 1 = k_{i+1} \Rightarrow U_i(p) \cap U_{i+1}(p) = \varnothing$$

dir.

İspat:

$$x \in U_i(p) = \left\{ x \in [-\pi, \pi] : \left| (f - p)^{(k_i)}(x) \right| = \| f - p \|_f \right\}$$

olması; $(f - p)^{(k_i)}$ nin x de bir minimum yada maximuma sahip olmasını gerektirir. Extremum noktalarında birinci türev sıfır olacağından

$$(f - p)^{(k_i+1)}(x) = \left[(f - p)^{(k_i)}(x) \right]' = 0$$

olur.

Ayrıca eğer $k_i + 1 = k_{i+1}$ ise $x \in U_i(p) \cap U_{i+1}(p)$ olması

$$\Lambda(f) = \| f - p \|_F = \left| (f - p)^{(k_i+1)}(x) \right| = \left| (f - p)^{(k_{i+1})}(x) \right| = 0$$

olmasını gerektirir. $f \notin T_n$ olduğundan $\Lambda(f) > 0$ olmalıdır. Bu da bir çelişkidir. O halde $x \notin U_i(p) \cap U_{i+1}(p)$ olup $U_i(p) \cap U_{i+1}(p) = \varnothing$ dir.

Şimdi

$$G \equiv \left\{ k_i \in F : U_i(f) \neq \varnothing \right\}$$

kümesini ve

$$q \equiv \min\left\{ k_i : k_i \in G \right\}$$

polinomunu ele alalım.

Teorem 2.1.2: $f \in B_F | T_n$, $k_\rho + 1$ kere türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

i) $q = 0$ ise f fonksiyonu F - normunda bir tek en iyi yaklaşığa sahiptir. Yani $\Omega(f)$ tek elemanlıdır.

ii) $q > 0$ ise $\Omega(f)$ bir boyutlu konveks kümedir.

iii) F - normunda bir en iyi yaklaşım türevi daima tektir. Yani, $\Omega(f)$ nin elemanlarının türevi daima tektir**.**

İspat: $p^{*}\in\Omega(f)$; f ye bir en iyi minimal yaklaşım polinomu olsun ve $p\in\Omega(f)$ elemanını alalım.

Lemma 2.1.1 den, her bir $k_i\in G$ ve $x\in U_i(f)$ için

$$p^{(k_i)}(x)=p^{*(k_i)}(x)$$

dir. Lemma 2.1.3 de; $x\in U_i(f)$ ve $k_i\in G$ için

$$p^{(k_i+1)}(x)=p^{*\,(k_i+1)}(x)$$

olmasını gerektirir.

$$r=(p-p^{*})\in T_n$$

olsun. O zaman r ; $x\in U_i(f)$ ve $k_i\in G$ için

$$r^{(k_i)}(x)=r^{(k_i+1)}(x)=0 \qquad \textbf{(2.10)}$$

özelliğini sağlar. Lemma 2.1.2 den $k_i\in G$ için $U_i(f)$ en az $n+1$ nokta içermek zorundadır.(Bir noktası bir diğer $U_i(f)$ tarafından içeriliyorsa tekrar sağlayacak.) Bu durumda

$$r^{(k_i)}(x)=r^{(k_i+1)}(x)=0\,,\quad x\in U_i(f)\,,\ k_i\in G$$

için

$$r^{(k_i)}(x_1)=r^{(k_i+1)}(x_1)=0$$

$$r^{(k_i)}(x_2)=r^{(k_i+1)}(x_2)=0$$

$$\vdots$$

$$r^{(k_i)}(x_n)=r^{(k_i+1)}(x_n)=0$$

$$r^{(k_i)}(x_{n+1})=r^{(k_i+1)}(x_{n+1})=0$$

eşitlikleri en az $n+1$ nokta için sağlanır**.**

Eğer $k_{i+1}=k_i+1$ ise $U_i(f)\cap U_{i+1}(f)=\varnothing$ olacağından, Lemma 2.1.3 den dolayı sınırlama sayısı en az $2n+2$ olur. Çünkü i yerine $i+1$ yazarsak **(2.10)** eşitliği;

$$r^{(k_{i+1})}(x^{t})=r^{(k_{i+1}+1)}(x^{t})=0 \qquad \textbf{(2.11)}$$

eşitliğine dönüşür. Bu durumda $U_{i+1}(f)$ kümesi de en az $n+1$ nokta içereceğinden

$$\left.\begin{array}{l} r^{(k_{i+1})}(x_1^{\prime}) = 0 \\ r^{(k_{i+1})}(x_2^{\prime}) = 0 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ r^{(k_{i+1})}(x_{n+1}^{\prime}) = 0 \end{array}\right\} \quad x_l^{\prime} \in U_{i+1}(f), \; l = 1, 2, \; \ldots \; , n+1$$

olur. $k_{i+1} = k_i + 1$ olması ile birlikte Lemma 2.1.3 den dolayı

$$U_i(f) \cap U_{i+1}(f) = \varnothing$$

olacağından **(2.11)** i sağlayan $U_{i+1}(f)$ nin elemanları $U_i(f)$ nin **(2.11)**i sağlayan elamanları olamaz.

Böylece **(2.10)** u sağlayan $n+1$ tane $U_i(f)$ nin elemanı ve **(2.11)**i sağlayan $n+1$ tane $U_{i+1}(f)$ nin elamanı olmak üzere $2n+2$ tane denklem oluşur.

$\ell = 1, 2, \ldots, n+1$ için

i) $r^{(k_i)}(x) = r^{(k_i+1)}(x) = 0$ **,** $x_\ell \in U_i(f)$

ii) $r^{(k_i+1)}(x') = 0$**,** $x_l' \in U_{i+1}(f)$ $\qquad l = 1, 2, \ldots, n+1$

Buradan, bir $x_q \in U_q(f)$ seçerek ve $r^{(q)}(x_q) = 0$ sınırlamasında yerine koyarak ($r^{(q+1)}(x_q) = 0$ sınırlamasını atlayarak) ve sonra

$$r^{(k_i)}(x_v) = r^{(k_i+1)}(x_v) = 0$$

$$x_v \in U_i(f), \; k_i \in G \qquad \textbf{(2.12)}$$

şeklindeki sınırlamaların diğer n çiftlerini seçerek bir $E', (2n+1)$ incidence matrisi oluşturabiliriz [3].

Şimdi bu çiftlerin $n+1$ tanesini yukarıda söylendiği gibi $x_q \in U_q(f)$, $q \in G$ olacak şekilde seçelim. Bu çiftler

$$(1, q), (2, q), \ldots, (n, q), (n+1, q)$$

şeklinde olsun. Geriye kalan

$$(2n+1) - (n+1) = n$$

tane çifti ise $k_i \in G$ *ve* $x_v \in U_i(f)$ olacak şekilde

$$(1, k_i), (2, k_i), \ldots, (n, k_i)$$

şeklinde oluşturalım. Bu durumda I nın toplam eleman sayısı

$$(n+1)+n=(2n+1)$$

olur.

Şimdi E' matrisini, $n+1$ satırlı, $(2n+1)$ incidence matris olacak şekilde oluşturalım

$$E'=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{Vmatrix}$$

Eğer E' nün ilk q sütunu silinirse aşağıdaki E $(2n+1)$ incidence matrisi elde edilir.

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{Vmatrix}$$

matrisi zayıf Polya koşulunu sağlar Çünkü

$$\begin{aligned} m_o=\sum_{\mu=1}^{n+1} e_{\mu,0} &= e_{1,0}+e_{1,2}+...+e_{n+1,0} \\ &=1+1+...+1 \\ &=n+1 \end{aligned}$$

ve

$$M_0=m_0=n+1>0$$

dır.

E matrisi kuvvetli konservativedir çünkü dizi sıfırıncı sütunla başlıyor[3].

E matrisi derecesi en çok n olan trigonometrik polinoma göre dengelidir[3]

Diğer taraftan

$$s \equiv r^{(q)} \in T_n$$

polinomu, E incidence matrisini sağlayan bir polinom olduğundan dengelilik tanımına göre

$$s \equiv 0$$

olmalıdır.

Derecesi en çok n olan trigonometrik polinomun q nuncu türevi bir sıfır polinomu ise (veya herhangi bir türevi) polinomun kendisi sabittir. Bu durumda $r \in T_n$, n inci dereceden bir sabit trigonometrik polinomdur.

Eğer $q = 0$ ise

$$r = r^{(0)} = 0 = s$$

ve

$$r = p - p^* = 0 \Rightarrow p = p^*$$

olarak bulunur. Böylece f ye F normunda en iyi yaklaşık tektir ve bu durumda bu minimal en iyi yaklaşıktır.

Eğer $q > 0$ ise

$$r = p - p^*$$

sabit polinom olup sıfırıncı dereceden bir trigonometrik polinomdur. p ve p^* da r ile aynı dereceden olduklarından p ve p^* da sabit polinomdurlar.(yani sıfırıncı dereceden) Böylece

$$p\,(sbt) - p^*\,(stb) = a$$

olup $\Omega\,(f)$, sıfır dahil bütün sabitlerden oluşan bir boyutlu konveks bir kümedir$[4]$.

2.2 Cebirsel Polinomlarla Aynı Anda Yaklaşım

Trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşımı inceledik. Şimdi ise $0=k_1 < k_2 < ... < k_\rho$ *ve* $\|.\|$ normu, $[a,b]$ üzerinden Chebyshev normu olmak üzere

$$\|f\|_F = \max_{i=1,2,...,\rho} \|f^{(k_i)}\|$$

normu ile π_n-cebirsel polinomlarıyla türevlenebilir fonksiyonlara yaklaşımı inceleyeceğiz. Amacımız; trigonometrik ve cebirsel polinomlarla aynı anda yaklaşımı karşılaştırarak benzerliklerini ve farklılıklarını ortaya koymak ve Birkhoff interpolasyonu ile ilgili bazı teoremleri incelemektir. Burada bir en iyi yaklaşım polinomunun varlığını göstereceğiz. Eğer böyle bir polinom yoksa en iyi yaklaşım polinomlarının hepsini karakterize edeceğiz[5].

$\Omega(f)$, π_n den $f\in B$ ye en iyi yaklaşıkların kümesi ve

$$\Lambda_{n,F}(f) = \inf_{p\in\pi_n}\{\|f-p\|_F\}$$

kümesi de sıfırdan farklı bir küme olsun. Bu durumda $\Omega(f)$ kümesini

$$\Omega(f) = \{p \mid p\in\pi_n \ , \ \|f-p\|_F = \Lambda_{n,F}(f)\}$$

şeklinde ve $U_i(p)$ uç kümelerini

$$U_i(p) = U_i(p,f) = \{x\in[a,b] \,/\, |f^{(k_i)}(x) - p^{(k_i)}(x)| = \Lambda_{n,F}(f)\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Uç kümelerin kompakt olduğu açıkça görülmektedir.

Konveks $\Omega(f)$ nin cebirsel iç noktaları olan minimal polinomlardan yararlanarak aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 2.2.1: $\forall p\in\Omega(f)$ ve $i=0,1,...,\rho$ için

$$U_i(\overline{p}\,,\,f)\subset U_i(p,f)$$

$$\overline{p}(x)=p(x)\ ,\ x\in U_i(p,f)$$

şartlarını sağlayan bir $\overline{p}\in\Omega(f)$ minimal polinomu vardır.

Burada $U_i(\overline{p},f)$ kümeleri $\overline{p}$ nin seçiminden bağımsız olduklarından bu kümeleri $U_i(f)$ şeklinde göstereceğiz.

Lemma 2.2.2: Bir $p\in\Omega(f)$ polinomunun $f\in B$ fonksiyonuna en iyi minimal yaklaşım polinomu olması için gerek ve yeter şart

$$\max_{i=0,1,...,\rho}\ \sup_{x\in U_i(f)}\{f^{(k_i)}(x)-p^{(k_i)}(x)\}Q^{(k_i)}(x)\le 0$$

olacak şekilde bir $Q \in \Pi_n$ polinomunun bulunmaması ve bazı $0 \le i_0 \le p$ şeklinde i_0 lar ve $x_{i_0} \in U_{i_0}(f)$ ler için

$$\left\{ f^{(k_{i_0})}(x_{i_0}) - p^{(k_{i_0})}(x_{i_0}) \right\} Q^{(k_{i_0})}(x_{i_0}) < 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Lemmanın ispatı; Lemma 2.1.2 de olduğu gibi Kolmogoroff Karakterizasyon teoreminden faydalanılarak yapılabilir.

Tanım 2.2.1:

$$G = \left\{ k_i \,\middle|\, k_i \in F \,,\, U_i(f) \neq \varnothing \right\}$$

ve

$$q = \max_{k_i \in G} \{k_i\}$$

olmak üzere $G - q$ kümesi

$$G - q = \left\{ k_i - q \,\middle|\, k_i \in G \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $0 \in G - q$ olduğu kolayca görülebilir.

Verilen bir $f \in B_F$ için

$$\Lambda = \min_{Q \in \Pi_n} \left\{ \max_{k_i \in G} \left\| f^{(k_i)} - Q^{(k_i)} \right\| \right\} \qquad \textbf{(2.13)}$$

eşitliğini göz önünde tutarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.1: (2.13) te tanımlanan Λ sayısı $\Lambda(f)$ ye eşittir ve bu her $Q \in \Omega(f)$ ile elde edilebilir.

İspat: $\Lambda \le \Lambda(f)$ olduğu açıktır. Geriye sadece **(2.13)** te verilen maksimumun $\forall Q \in \Omega(f)$ için en azından $\Lambda(f)$ ye eşit olduğunu göstermek kalır. Aksi halde bazı $\delta > 0$ ve bazı $Q \in \Omega(f)$ için

$$\left\| f^{(k_i)} - Q^{(k_i)} \right\| \le \Lambda(f) - \delta \,,\; k_i \in G$$

olur. Bütün $k_i \in F$ için

$$\max \left\| f^{(k_i)} \right\| = M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısını alalım. Eğer $\overline{p}$ bir minimal polinom ise

$$\left\| f^{(k_i)} - \overline{p}^{(k_i)} \right\| = \Lambda(f) \,,\; k_i \in G$$

$$\left\| f^{(k_i)} - p^{(k_i)} \right\| \le \Lambda(f) - \varepsilon \,, k_i \in F \middle| G$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır.

$0<\lambda<\frac{1}{2}$ olacak şekilde yeteri kadar küçük $\lambda<\varepsilon(4M)^{-1}$ sayısını alalım. $Q_1=\lambda\, Q+(1-\lambda)\overline{p}$ polinomu ile f fonksiyonuna yaklaşımın derecesini bulmaya çalışalım.

Eğer $k_i \in G$ ise

$$\begin{aligned}\left\| f^{(k_i)} - Q_1^{(k_i)} \right\| &= \left\| f^{(k_i)} - \lambda Q^{(k_i)} - (1-\lambda)\overline{p}^{(k_i)} \right\| \\ &\le \lambda \left\| f^{(k_i)} - Q^{(k_i)} \right\| + (1-\lambda) \left\| f^{(k_i)} - \overline{p}^{(k_i)} \right\| \\ &< \lambda\left(\Lambda(f)-\delta\right)+(1-\lambda)\Lambda(f)=\Lambda(f)-\lambda\,\delta<\Lambda(f)\end{aligned}$$

olup

$$\left\| f^{(k_i)} - Q_1^{(k_i)} \right\| < \Lambda(f) \qquad \textbf{(2.14)}$$

elde edilir.

Diğer taraftan eğer $k_i \in F \,|\, G$ ise

$$\begin{aligned}\left\| f^{(k_i)} - Q_1^{(k_i)} \right\| &< 2M\lambda+(1-\lambda)\left(\Lambda(f)-\varepsilon\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\Lambda(f)-(1-\lambda)\varepsilon<\Lambda(f)\end{aligned}$$

olup

$$\left\| f^{(k_i)} - Q_1^{(k_i)} \right\| < \Lambda(f) \qquad \textbf{(2.15)}$$

elde edilir. Özdeş olan **(2.14)** ve **(2.15)** eşitsizliklerinin her iki tarafında maksimum alırsak

$$\left\| f - Q_1 \right\|_F < \Lambda(f)$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Şimdi vereceğimiz teorem, $\|\,.\,\|_F$ normunda f ye yaklaşımın tekliği konusunda bize yeterli şartı sağlayacaktır.

Teorem 2.2.2: Eğer $k_\rho+1$ kere türevlenebilir f fonksiyonu için $U_0(f)\neq\emptyset$ olacak şekilde $q=0$ varsa f, $\|\,.\,\|_F$ normunda bir tek en iyi yaklaşım polinomuna sahiptir.

İspat: $p\in\Omega(f)$ ve $\overline{p}$, $\overline{p}=p$ olacak şekilde bir minimal polinom olsun. Minimal polinomun tanımından dolayı $x\in U_i$ ve $i=0,1,\ldots,\rho$ için

$$\overline{p}^{(k_i)}(x) = p^{(k_i)}(x)$$

dir. Buradan

$$\overline{p}^{(k_i+1)}(x) = f^{(k_i+1)}) = p^{(k_{i+1})}(x), \quad x \in U_i(f) \cap (a,b), \qquad i = 0,1,\ldots,\rho$$

yazılabilir.

Böylece sıfıra özdeş bir R polinomunun

$$R^{(k_i)}(x)=0, \; x \in U_i(f), \; i = 0,1,\ldots,\rho \qquad \textbf{(2.16)}$$

$$R^{(k_i+1)}(x)= 0, \; x \in U_i(f) \cap (a,b) \qquad \textbf{(2.17)}$$

şartlarını sağladığını göstermek yeterli olacaktır.

Teorem 2.1.2 nin ispatından ve Birkhoff İnterpolasyon problemi hakkında bilinen teoremlerden yararlanarak ispat yapılabilir.

Şimdi, Lemma 2.2.3 te kullanacağımız bazı notasyonları verelim[6].

$U_i = U_i(f)$ kümeleri sonsuz olabilir. Bunun sağlandığı her bir i için bazı $x \in U_i$ elemanlarını ihmal edip içlerinden keyfi $n+2$ tanesini alacağız ve yeni oluşan kümeleri de yine U_i ile göstereceğiz.

ℓ_i ile U_i deki noktaların sayısını

e_i ile U_i de a veya b olan elemanların sayısını ve

E ile de **(2.16)** ve **(2.17)** de verilen Birkhoff İnterpolasyon problemine karşılık gelen incidence matrisi göstereceğiz.

Lemma 2.2.3: E matrisi

$$N+1 = \sum_{i=0}^{\rho} (2l_i - e_i)$$

tane terime sahiptir ve derecesi N olan polinomların Birkhoff İnterpolasyon problemi için bağımsız bir matristir. Ayrıca $N \geq n+1$ dir.

İspat: Eğer bir incidence matris, destekli tek dizilere sahip değilse ve kuvvetli Polya şartını sağlıyorsa bu bağımsız bir matristir. Bununla beraber **(2.16)** ve **(2.17)** deki bütün koşulları $[a,b]$ içinde çakışmayan çiftlerden gelen noktaları ihtiva eder. Bununla şunu kastediyoruz; eğer E deki 1 lerden oluşan herhangi bir dizi E nin ilk ya da son satırında değil ise bu dizi çifttir.

Böylece geriye sadece E nin kuvvetli Polya koşulunu sağladığını göstermek kalır. Bu koşul

$$\sum_{s=0}^{k} m_s \geq k+2 \quad , \qquad 0 \leq k \leq N \qquad \textbf{(2.18)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada m_s, E nin s-ninci sütunundaki birlerin sayısıdır. Ya da başka bir değişle m_s; **(2.16)** eşitliğinde $k_i \leq s$ şeklindeki sayıları ve **(2.17)** eşitliğinde de $k_i+1 \leq s$ şeklindeki sayıları göstermektedir.

$k=0$ için **(2.18)** sağlanır bu $m_0 \geq 2$ demektir. Kabulümüzden dolayı $U_0 \neq \varnothing$ ve bu yüzden

$$\| f - \overline{p} \| = \Lambda(f)$$

dir. c bir sabit olmak üzere $\overline{p}+c$, $\overline{p}$ ile aynı türevlere sahiptir ve $\overline{p}+c$, polinomu f fonksiyonuna $\overline{p}$ den daha iyi bir Chebyshev yaklaşımı olamaz. Çünkü $\overline{p}+c$, $\overline{p}$ den daha küçük uç kümelere sahip olmalıdır.

$\left| f(x) - \overline{p}(x) \right|$, maksimuma en az iki noktada ulaşır ve bu yüzden $m_0 \geq 2$ dir.

(2.18) eşitsizliği bazı k lar için ihlal edilsin ve $\overline{k}$, k ların en küçüğü olsun. Buradan $1 \leq \overline{k} \leq n$ dir ve

$$\sum_{s=0}^{k+1} m_s \geq k+1$$

olur fakat

$$\sum_{s=0}^{\overline{k}} m_s \leq \overline{k}+1$$

idi. Bu da

$$\sum_{s=0}^{\overline{k}} m_s = \overline{k}+1$$

olmasını gerektirir ve böylece $m_{\overline{k}} = 0$ olur.

$\overline{E}$, E nin ilk $k+1$ sütunundan oluşan incidence matris olsun. $\overline{E}$ de E gibi destekli tek diziye sahip değildir. **(2.18)** den dolayı $\overline{E}$ kuvveli Polya koşullarını sağlar ve bu yüzden derecesi $\overline{k}$ yi geçmeyen polinomlar için bağımsızdır. Buradan derecesi en fazla $\overline{k}$ olan ve

$$R^{(k_s)}(x) = -\sigma\left[f^{(k_s)}(x) - \overline{p}^{(k_s)}(x) \right], x \in U_i \,, \; k_s \leq \overline{k}$$
$$R^{(k_s+1)}(x) = 0 \,, \quad x \in U_i \cap (a,b) \,, \; k_s+1 \leq \overline{k}$$

koşullarını sağlayan bir R polinomu bulunabilir. Burada $\sigma(\alpha), \alpha$ işaretini belirtir. En son bunlara ek olarak

$$R^{(k_s)}(x) = 0 , \quad k_s > \overline{k}$$

olur. Bu Lemma 2.2.2 ye tezat teşkil eder. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdiye kadar verdiğimiz teorem ve lemmalar aşağıda vereceğimiz teoreme zemin hazırlamak içindi. Bu teorem, trigonometrik ve cebirsel polinomlarla aynı anda yaklaşım arasındaki önemli bir farkı göstermesi açısından büyük bir önem teşkil etmektedir.

Teorem 2.2.3: f **,** $k_\rho + 1$ kere türevlenebilen bir fonksiyon, G ve q da Tanım2.2.1 deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\Omega(f)$, q boyutlu bir konveks kümedir ve ek olarak $p \in \Omega(f)$ için $p^{(q)}$ türevi tektir.

İspat:

$$\| f - p \|_F \leq \Lambda(f)$$

koşulu

$$\left\| f^{(k_s)} - p^{(k_s)} \right\| \leq \Lambda(f) , \quad k_s < q \tag{2.19}$$

ve

$$\left\| f^{(k_s)} - p^{(k_s)} \right\| \leq \Lambda(f) , \quad k_s \geq q \tag{2.20}$$

koşullarına denktir. Teorem 2.2.1 den; **(2.20)** koşulu bize $p^{(q)}$ nun $\| \, . \, \|_{G-q}$ normunda $f^{(q)}$ ya en iyi yaklaşım polinomu olduğunu gösterir. Bu $p^{(q)}$ yu en iyi şekilde tanımlar.

p , derecesi q yu geçmeyen polinomlar olarak tanımlandığından

$$\dim \Omega(f) \leq q$$

olur. Diğer taraftan $\overline{p} \in \Omega(f)$ bir minimal polinom olsun. Bu durumda

$$\left\| f^{(k_s)} - \overline{p}^{(k_s)} \right\| \leq \Lambda(f) , \quad k_s < q$$

olur. Eğer Q, yeteri kadar küçük katsayıları olan, derecesi q yu geçmeyen herhangi bir polinom ise **(2.19)** ve **(2.20)** koşulları $p = \overline{p} + Q$ için sağlanır.

III.BÖLÜM
HAAR UZAYINDA AYNI ANDA YAKLAŞIM
VE
BIRKHOFF İNTERPOLASYONU

3.1 Haar Uzayında Aynı Anda Yaklaşım

$f \in C^{(k_\rho)}[a,b]$ fonksiyonuna sonlu boyutlu $H \subset C^{(k_\rho)}[a,b]$ alt uzayında derecesi en çok n olan π_n cebirsel polinomlarıyla ve

$$\|f\|_F = \max_{k_i \in F} \left\| f^{(k_i)} \right\|$$

şeklinde tanımlanan $\|.\|_F$ yarı normu ile yaklaşımı inceleyeceğiz.

Burada

$$F = \{k_1, k_2, ..., k_\rho\}$$

dir, k_i ler

$$0 \le k_1 < k_2 < ... < k_\rho$$

şartını sağlayan tamsayılardır ve $\|.\|$ normu da $C[a,b]$ üzerinde bilinen Chebyshev norm olup

$$\|f\|_F = \max_{k_i \in F} \left(\max_{x \in [a,b]} \left| f^{(k_i)}(x) \right| \right)$$

dir.

$H^{(k_i)}$, $[a,b]$ üzerinde yukarıda tanımlanan F normunda k_ρ kere sürekli türevlenebilir, gerçel değerli fonksiyonların bir Haar uzayı ve $f \in H^{(k_i)}$ olsun. Bu durumda

$$f^{(k_1)}, f^{(k_2)}, ... f^{(k_\rho)}$$

türevleri mevcuttur ve

$$f^{(k_i)} \in C^{(k_\rho)}[a,b]$$

dir. $f \in H^{(k_i)}$ verildiğinde her zaman en az bir $q^* \in \pi_n$ vardır öyle ki $\forall q \in \pi_n$ için

$$\left\| f - q^* \right\|_F \le \left\| f - q \right\|_F$$

dir. $f \in H^{(k_i)}$ fonksiyonuna $q \in \pi_n$ polinomları ile $\| \,.\, \|_F$ normunda en iyi aynı anda yaklaşım olup

$$\left\| f - p \right\|_F = \inf_{q \in P_n} \left\| f - q \right\|_F$$

dir ve $\forall f \in H^{(k_i)}$ için $\Omega(f) \neq \varnothing$ dir. Burada

$$\Lambda(f) = \left\| f - q^* \right\|_F, \quad q^* \in \Omega(f)$$

iyi tanımlıdır ve eğer

$$f \notin \pi_n \quad \text{ise} \quad \Lambda(f) \text{ pozitif,}$$

$$f \in \pi_n \quad \text{ise} \quad \Lambda(f) = 0$$

dır.

f ye en iyi aynı anda yaklaşım kümesi olan $\Omega(f)$ hiçbir zaman boş olamaz ve her zaman birden fazla elemanı kapsar. Biz bu kümenin kesin boyutunu bulmak ve aynı zamanda $\| \,.\, \|_F$ ile yaklaşım probleminin daha basit yarı normlarla yaklaşım ile değiştirilip değiştirilemeyeceğini öğrenmek istiyoruz.

H nin elemanlarının türevlerinden oluşan $H^{(i)}$ uzaylarının tamamının $i \le m$ için Haar uzayları oldukları kabul edilir.

Keener [7], en iyi aynı anda yaklaşımın m inci türevinin kümesi olan $\Omega^{(m)}(f)$ kümesinin sadece bir elemandan oluştuğunu söyler veya zayıf bir tahmine göre

$$\dim H^{(m)} = n - m + 1$$

olup $\Omega^{(m)}(f)$ en fazla iki boyutludur.

Fakat $\Omega(f)$ nin boyutu, genellikle bu sonucun gösterdiğinden çok daha küçüktür. Gerçektende aynı anda en iyi yaklaşım tek olabilir.

Eğer H, yukarıdaki boyutsal durumları sağlayan bir Birkhoff sistemi ise $\Omega(f)$, H ın cebirsel polinomların kümesi olması durumunda sağladığı özelliklerin aynısı sağlar.

İspatlar ağırlıklı olarak Birkhoff interpolasyonu için varlık teoremlerine dayanır. Bizim yaklaşacağımız kümeler oldukça somut yapıya sahiptirler. π_n, derecesi n yi geçmeyen cebirsel polinomların kümesi olmak üzere

$$\dim H^{(i)} = n - i$$

ise

$$\pi_{i-1} \subset H$$

dır.Bununla birlikte eğer

$$\dim H^{(i)} = n - i$$

ve $H^{(i)}$ bir Haar uzayı ise $H^{(j)}$, bütün $0 \leq j \leq i$ içinde bir Haar uzayıdır.

Lemma 3.1.1: $H^{(m)}$ bir Haar uzayı ve $\dim H^{(m)} = n - m$ olacak şekilde H, $C^{(m)}\left[a,b\right]$ nin n boyutlu bir alt uzayı olsun. Bu durumda $i = 0,1,...,m$ için eğer H, yukarıdaki varsayımları sağlıyorsa $\left\{h_i^{(m)}\right\}$ geren uzayının bir Haar alt uzayı olması ve $P_{m-1} \in \pi_{m-1}$ olması durumunda

$$h = P_{m-1} + \sum_{i=1}^{n-m} a_i h_i$$

dir.

Şimdi;

$$E_F(f;H) = \inf_{h\in H} \left\| f - h \right\|_F$$

olarak alalım. Bu durumda

$$\Omega(f) = \Omega(f;H) = \left\{ h \in H : \left\| f - h \right\|_F = En(f) \right\}$$

dir. Kolaylıkla görülüyor ki $\Omega(f)$ konvekstir ve boş değildir.

f ye yaklaşımın uç kümeleri olan $U_i(f,h)$ kümeleri

$$U_i(f,h) = \left\{ x \in \left[a,b\right] : \left| f^{(k_o)}(x) - h^{(k_o)}(x) \right| = \left\| f - h \right\|_F \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uç kümeler 2.1 de incelediğimiz uç kümelerle aynı özellikleri gösterir.

Lemma 3.1.2: $\forall g \in \Omega(f)$ ve tüm $i = 1,2,...,\rho$ için

$$U_i(f,h) \subset U_i(f,g)$$

ve $x \in U_i(f,h)$ için

$$h^{(k_i)}(x) = g^{(k_i)}(x)$$

özelliklerini sağlayan bir tane $h \in \Omega(f)$ vardır.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan herhangi bir $h \in \Omega(f)$ en iyi yaklaşım polinomuna f ye en iyi minimal yaklaşım polinomu denir.

Konveks $\Omega(f)$ kümesinin her cebirsel iç noktası zorunlu olarak bir en iyi minimal yaklaşımdır.

h nin her seçeneği için en iyi minimal yaklaşımda $U_i(f,h)$ kümeleri aynıdır ve biz bu ortak kümelere $U_i(f)$ diyeceğiz.

$$q = \min\{\, k_i : U_i(f) = \varnothing\}$$

şeklinde tanımlanan q , F ye bağlı olsun. $F - q$ yardımıyla

$$\{k_i - q \ : \ i = 1,2,...,\rho \ ; \ k_i - q \geq 0\}$$

kümesini tanımlayalım. Buradan $0 \in F - q$ olduğundan $\|\,.\,\|_{F-q}$ bir normdur.

Kolaylıkla görülüyor ki

$$h \in \Omega_F(f,H) \ \text{ise} \ \ h^{(q)} \in \Omega_{F-q}(f(q), H^{(q)})$$

dir.

Lemma 3.1.3: $f \in C^{(k_\rho)}$ için

$$G = \{\, k_i : k_i \in F, \ U_i(f) \neq \varnothing\}$$

ve

$$q = \min_{k_i \in G}\{k_i\}$$

olsun. Bu durumda

$$E_G(f,H) = E_F(f,H)$$
$$\Omega_G(f) \supset \Omega_F(f)$$

ve

$$\Omega_F^{(q)}(f,H) \subset \Omega_{G-q}(f(q), H^{(q)})$$

olur.

İspat : $G \subset F$ olduğundan

$$E_F(f,H) = \inf_{h\in H}\|f-H\|_G = \inf_{h\in H}\left\{\max_{k_i\in G}\left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\|\right\}$$
$$\le \inf_{h\in H}\left\{\max_{k_i\in F}\left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\|\right\}$$
$$= E_F(f,H)$$

dir. Eğer $h\in \Omega_F(f)$ ise her $k_i \in F|G$ için

$$\left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\| < E_F(f,H)$$

olur. Bu nedenle $h\in \Omega_F(f)$ için

$$E_F(f,H) = \|f-h\|_F = \max_{k_i\in F}\left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\|$$
$$= \max_{k_i\in G}\left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\|$$
$$= \|f-G\|$$

dir.Şimdi h ın $\Omega_G(f)$ ye ait olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\|f-v\|_G < \|f-h\|_G = E_F(f,H)$$

olacak şekilde bir $v\in H$ vardır. Aynı zamanda $0<\lambda<1$ şeklindeki her λ ve $k_i \in G$ için

$$\left\|f^{(k_i)}-\left[(1-\lambda)h+\lambda v\right]^{(k_i)}\right\| < \left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\| = E_F(f,H)$$

dir. Ayrıca yeterince küçük $\forall\lambda>0$ için

$$\left\|f^{(k_i)}-\left[(1-\lambda)h+\lambda v\right]^{(k_i)}\right\| \le (1-\lambda)\left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\| + \lambda\left\|f^{(k_i)}-v^{(k_i)}\right\| < E_F(f,H)$$

dır. Böylece $\forall\lambda>0$ için

$$\left\|f-\left[(1-\lambda)h+\lambda v\right]\right\|_F < \|f-h\|_F$$

olduğundan bu bir çelişkidir. Bu yüzden $h\in \Omega_G(f)$ olmalıdır.

Bu durumda

$$E_G(f,H) = E_F(f,H)$$

dır.

Eğer $h\in \Omega_F(f,H)$ ise $\forall k_i \in G$ için

$$\left\|f^{(k_i)}-v^{(k_i)}\right\| < E_F(f,H)$$

eşitsizliğini sağlayan $v\in H$ yoktur. Bu durumda, $\forall k_i - q\in G-q$ örneğin; $h^{(q)} \in \Omega_{G-q}(f^{(q)}, H^{(q)})$ için

$$\left\|[f^{(q)}]^{(k_i-q)} - w^{(k_i-q)}\right\| < \left\|f^{(k_i)}-h^{(k_i)}\right\| = E_F(f,H)$$

eşitsizliğini sağlayan $w \in H^{(q)}$ yoktur.

Bu lemmada şunu göstermeye çalıştık Eğer $\Omega_{G-q}(f^{(q)}, H^{(q)})$ bir elemandan oluşuyor ise herhangi bir $h \in \Omega_F(f, H)$ için $h^{(q)}$ bu elemandır. Örneğin; eğer $\| . \|_{G-q}$ ya göre $H^{(q)}$ den $f^{(q)}$ ya en iyi aynı anda yaklaşım tek ise, bu, $\| . \|_f$ ye göre H dan f ye herhangi en iyi aynı anda yaklaşımın q uncu türevidir. Bilhassa, herhangi g ve $h \in H$ için

$$g^{(q)} = h^{(q)}$$

dur.

Lemma 3.1.4: $h \in \Omega(f)$ olsun.

a) Eğer h ve f , $k_{(\rho)} + 1$ den daha yüksek derecede sürekli türevlere sahipse $\forall x \in U_i(f, h) \cap (a, b)$ ve $i = 1, 2, ..., \rho$ için

$$h^{(k_i+1)}(x) = f^{(k_i+1)}(x)$$

dir.

b) Eğer bazı i ler için $k_{i+1} = k_i + 1$ ise

$$U_i(f, h) \cap U_{i+1}(f, h) \cap (a, b) = \varnothing$$

dir.

3.2 Aynı Anda Yaklaşımda Birkhoff İnterpolasyon Problemi

$i = 1, ..., M$, $j = 0, 1, ... N-1$ olmak üzere $E = (e_{ij})$; sadece kökleri ve 1 leri olan $M\,x\,N$ tipinde bir matris olsun. H, $C^{(N-1)}[a, b]$ nin bir alt uzayı olsun. E için Birkhoff interpolasyon problemi verilen b_{ij} ve $i = 1, ..., M$ için x_i düğümleri ile $e_{ij} = 1$ i sağlayan bütün (i, j) ler için

$$h^{(j)}(x_i) = b_{ij}$$

eşitliğini sağlayacak $h \in H$; bulmaktır. E ye problemin incidence matrisi ve $X = \{x_1, x_2, ..., x_M\}$ kümesine de düğümlerin kümesi denir.

Eğer verilen bir E incidence matrisi için, interpolasyon problemi, her bir $\{b_{ij}\}$ kümesi ve $a \le x_1 < x_2 < ... < x_M \le b$ düğümleri için tek bir çözüme sahip ise E'ye düzenlidir, aksi halde tekildir denir. Verilen X - düğümler kümesi için, her bir $\{b_{ij}\}$

kümesinin tek bir çözümü varsa, (E,X) düzenlidir. Eğer $k_1 < i$, $k_2 > i$ ve $l_{1,}l_2 < j+1$ için

$$e_{k_1 l_1} = e_{k_2 l_2} = 1$$

eşitliğini sağlayan (k_1, l_1) ve (k_2, l_2) bulunabiliyorsa;

$$e_{ij} = 0, \quad e_{i,j+1} = e_{i,j+2} = ... = e_{i,j+q} = 1$$

ve

$$e_{i,j+q+1} = 0$$

ile verilen 1 lerin bir dizisi, 'destekli' olarak adlandırılır. Eğer q çift ise dizi çift, tek ise dizi tektir. Eğer her bir $k = 1,2,...,N$ için, ilk k sütunda bulunan 1 lerin sayısı en az k ise E incidence matrisi Polya Koşullarını sağlıyor denir. Eğer her bir $k = 1,2,...,N-1$ için ilk k sütunda bulunan 1 lerin sayısı en az $k+1$ ise E, Birkhoff koşullarını sağlıyor denir.

Karışmaması için, şunu vurgulayalım; E nin sütunları 0 dan $N-1$ e doğru numaralandırılmıştır. Bu durumda E nin ilk k sütunu, 0 dan $k-1$ e kadar numaralandırılmış sütunlardır.

Atkinson ve Sharma nın iyi bilinen teoremi şunu vurgular: Eğer E n tane 1 e sahipse Polya şartını sağlar ve eğer hiç destekli tek dizisi yoksa derecesi $n-1$' i geçmeyen cebirsel polinomların alt uzayı olan π_{n-1} için E düzenlidir$[1]$.

Bu tanımları kullanarak, aslı Keener'a ait olan fakat ispatı için Haussmann' nın orjinal teoreminin bazı fikirlerine ihtiyaç duyulan aşağıdaki teoremi Birkhoff interpolasyonu üzerine kurabiliriz$[8]$.

Teorem 3.2.1: $H, C^{(k)}[a,b]$ nin n boyutlu bir alt uzayı ve m , $0 \le m \le k$ şeklinde bir tamsayı olsun.

$\dim H^{(m)} = n-m$ ve $H^{(m)}$ nin Haar uzayı olduğunu kabul edelim. Eğer $m < k$ ise $H^{(i)}$ uzaylarının $m < i \le k$ için Haar uzayı olduklarını farz edelim. E, $M\,x\,(k+1)$ tipinde N tane 1 li bir inidence matris ve $X = \{x_1,...,x_M\}$ düğümlerin bir kümesi olsun. Bunlardan başka aşağıdakilerin sağladığını farz edelim;

a) E, Polya koşulunu sağlar. Eğer $N < k+1$ ise E'nin ilk N sütununun Polya şartını sağladığını kabul edelim.

b) E nin destekli tek dizisi yoktur.

c) $j \geq m+1$ ve $e_{ij} = 1$ olduğunda $e_{i,j-1} = 1$ dir

d)Eğer $m < k$ ise $A_k = \{x / x \in X, e_{i,k} = 1\}$ olduğunda $A_k \subset (a,b)$ olduğunu farz edelim.

Bu durumda eğer $N = n$ ise (E, X) H ye göre düzenlidir. Eğer $N \leq n$ ise birleşik interpolasyon problemi, herhangi bir $\{b_{ij}\}$ kümesi ve herhangi bir düzenlenmiş düğüm kümesi için (tek olması gerekmeyen) bir çözüme sahiptir.

Şimdi ilk ana teoremimizi verelim.

Teorem 3.2.2: $H^{(k\rho)}$ ve $H^{(k\rho+1)}$ uzaylarının Haar Uzaylar ve $\dim H^{(k\rho)} = n - k\rho$ olduğu durumlar için H nin $C^{(k\rho+1)}[a,b]$ nin n boyutlu bir alt uzayı olduğunu kabul edelim. $f \in C^{(k\rho+1)}[a,b]$ olsun ve F yi $k_1 = 0$ olacak şekilde alalım. Eğer $U_1(f) \neq \varnothing$ ise $\|.\|_F$ normu ile H den f ye en iyi aynı anda yaklaşım tektir.

İspat: Herhangi bir h en küçük en iyi yaklaşımı için

$$U_i(f) = U_i(f, h)$$

olduğunu biliyoruz. Herhangi bir $g \in \Omega(f)$ için

$$g - h \equiv 0$$

olduğunu göstereceğiz.

Lemma 3.1.4 (a) ve en iyi minimal yaklaşımın tanımından $i = 1, 2, ..., \rho$ için

$$g^{(ki)}(x) = h^{(ki)}(x), \quad x \in U_i(f)$$

$$g^{(k_i+1)}(x) = f^{(k_i+1)} = h^{(k_i+1)}(x), \; x \in U_i(f) - \{a,b\}$$

dir.

(E, X), bu eşitliklerle birleştirilmiş bir incidence matris olsun. Şimdi (E, X) in $k = k_\rho$ için Teorem 3.2.1 in tüm varsayımları sağladığını gösterelim.

Lemma 3.1.4 (b) den dolayı (a,b) eşitlikleri üst üste gelmeyen çiftlerden oluşmuştur. Böylece, (a,b) deki düğümlere denk gelen diziler çifttir. Açıkça görülüyor ki sadece (a,b) içindeki düğümler için $e_{i,k_\rho+1} = 1$ dir ve eğer $e_{i,k_\rho+1} = 1$ ise $e_{i,k_\rho} = 1$ dir.

$k_{\rho+2}$ tane sütuna sahip olan E nin, ilk k_ρ sütunu için Birkhoff şartlarını sağladığını gösterelim. $U_1(f) \neq \varnothing$ olması ve sabitlerin H içinde ihtiva edilmesinden dolayı $U_1(f) \geq 2$ dir.

Eğer varsa, ilk l sütunundaki 1 lerin sayısı $l+1$den küçük olacak şekilde l nin en küçük tamsayı olduğunu kabul edelim. $l \geq 2$ olduğunu göstermiştik. $l \leq k_p$ olduğunu kabul edelim. l nin seçiminden dolayı, ilk $l-1$ sütun en az l tane 1 e sahiptir. Aynı zamanda ilk l sütun, l tane birden daha fazlasına sahip değildir. Böylece, E nin ilk l sütunu tam olarak l tane 1 den oluşur ve l inci sütun sadece sıfırları ihtiva eder. $\overline{E}$, E nin ilk l sütunundan oluşan incidence matris olsun. Bu durumda $\overline{E}$, tam olarak l tane 1 içerir, destekli tek dizileri yoktur ve Polya (aynı zamanda-eş değer olarak Birkhoff) koşulunu sağlar. Böylece; Atkinson-Sharma$[1]$ teoremine göre E, derecesi $l-1$ i geçmeyen cebirsel polinomlara göre düzenlidir. Bu durumda $x \in U_i(f)$ ve $0 \leq k_i \leq l-1$ için

$$p^{(ki)}(x) = \left\{ f^{(ki)}(x) - h^{(ki)}(x) \right\}$$

olacak şekilde bir $p \in \pi_{l-1}$ bulmak mümkündür. $l \leq k_p$ olduğundan $\pi_{l-1} \subset H$ dir. Yeteri kadar küçük $\forall \lambda > 0$ için

$$\max_{0 \leq k_i \leq l-1} \left\| f^{(ki)} - (h + \lambda p)^{(ki)} \right\| < \| f - h \|_F$$

dir.

$j \geq l$ için $p^{(j)} \equiv 0$ olduğundan, $\forall \lambda > 0$ için $h + \lambda p$, f ye bir aynı anda yaklaşımdır. Fakat $U_1(f, h + \lambda p) = \varnothing$ ve $U_1(f) \neq \varnothing$ olması h nin en küçük oluşuyla çelişir. Sonuç olarak E, ilk k_p sütunu için Birkhoff şartını sağlar ve bu sebepten dolayı da ilk $k_p + 1$ sütunu içinde Polya şartını sağlar.

E nin N tane 1 i olsun. $N \geq k_p + 1$ olduğunu göstermiştik. Eğer $N \geq k_p + 2$ ise E, $k_p + 2$ sütununun tamamı için Polya şartını sağlar. $N \geq n+1$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $N \leq n$ ise (E, X), Teorem 3.2.1. in bütün şartlarını sağlayan incidence matris olur ve böylece $x \in U_i(f)$, $\quad i = 0,...,l$ için

$$v^{(k_i)}(x) = \left\{ f^{(k_i)}(x) = h^{(k_i)}(x) \right\}$$

eşitliğini sağlayan bir $v \in H$ bulunabilir. Fakat yeteri kadar küçük $\forall \lambda > 0$ için $h + \lambda v$ f ye h den daha iyi aynı anda yaklaşık olacaktır. Bu imkansız olup $N \geq n+1$ dir. O halde $h - g$, düzenli bir Birkhoff İnterpolasyon probleminin homojen çözümüdür. Böylece $h = g$ dir ve en iyi aynı anda yaklaşım tektir.

Teorem 3.2.3: $H^{(k_\rho)}$ ve $H^{(k_\rho+1)}$ uzayları Haar Uzay ve $\dim H^{(k_\rho)} = n-k\rho$ olacak şekilde H, $C^{(k\rho+1)}(a,b)$ nin $n-$boyutlu bir alt uzayı

$$f \in \subset^{(k_\rho+1)}\ (a,b)$$

ve

$$q = \min\{k_i\}/U_i(f) \neq \varnothing,$$

olsun. Buradan $\dim\Omega(f)=q$ ve herhangi $g,h\in\Omega(f)$ için $g^{(q)}=h^{(q)}$ dur. Bu durumda $\|\,.\,\|_F$ ye göre H den f ye en iyi aynı anda yaklaşımların tek olan q nuncu türevi

$$G = \{k_i - q / k_i \in F, U_i(f) \neq \varnothing\}$$

olacak şekilde $\|\,.\,\|_G$ ye göre $H^{(q)}$ dan $f^{(q)}$ ya tek olan en iyi aynı ana yaklaşımın kendisidir.

İspat: İlk iddia Teorem 3.2.2. ve Lemma3.1.3. ün sonucudur. Bütün $g\in\Omega(f)$, $p\in\pi_{q-1}$ ve $\forall\lambda>0$ için $\pi_{q-1}\subset H$ olduğundan $g+\lambda p\in\Omega(f)$ dir.

Bu yüzden $\dim\Omega(f)\geq q$ olur. Diğer yandan herhangi $g,h\in\Omega(f)$ için

$$g^{(q)} = h^{(q)}$$

olması $\dim\Omega(f)\leq q$ olduğunu gösterir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4: $f\in C^{(k_l+1)}[a,b]$ olsun**.**

$$\dim H^{(k\rho-1)} = n-k_\rho+1$$

ve

$$H^{(k\rho-1)}, H^{(k\rho)} \text{ ve } H^{(k\rho+1)} \text{ in}$$

Haar uzaylar olduklarını kabul edelim. Böylece $\dim\Omega(f)\leq k_\rho$ olur. Sonuç olarak $U_i(f)\neq\varnothing$ olacak şekilde eğer q, k_i lerin en küçüğü ise

a) $q\leq\dim\Omega(f)\leq q+2,\qquad 0\leq q\leq k_\rho-2$ için

b) $k_\rho-1\leq\dim\Omega(f)\leq k_\rho,\qquad q=k_\rho-1$ için

c) $\dim\Omega(f)=k_\rho-1,\qquad q=k_\rho$ için ve $\dim H^{(k_\rho)}=n-k_\rho+1$

d) $\dim\Omega(f)=k_\rho,\qquad q=k_\rho$ için ve $\dim H^{(k_\rho)}=n-k_\rho$

İspat: $k_1 = 0$ ve $U_1 \neq \varnothing$ olsun. Lemma 3.1.4 ten biliyoruz ki en küçük $h-g$ farkı ve f ye keyfi bir en iyi anda yaklaşım; $i = 1,...,\rho$ için

$$v^{(k_i)}(x) = 0, \quad x \in U_i(f)$$
$$v^{(k_i+1)}(x) = 0, \quad x \in U_i(f) - \{a,b\}$$

eşitliklerini sağlayan (E, X) incidence matrisinin üzerinde kaybolurlar. Bunlara ek olarak; H nin $k_\rho - 2$ den büyük derecede cebirsel polinomlar içermesinden dolayı E nin ilk $k_\rho - 1$ sütunu için Birkhoff şartını sağladığı sonucuna varabiliriz ve bu yüzden de ilk k_ρ sütunu için Polya koşulunu sağlar diyebiliriz. Eğer E, k_ρ olarak numaralandırılmış sütunda hiç 1 e sahip değilse k_ρ uncu E nin sıfır olmayan bütün elemanları ilk k_ρ satırda yoğunlaşır ve böylece Teorem 3.2.3 ün sonuçları sağlanmış olur. Eğer E, k_ρ numaralı sütununda bir tane 1 e sahipse; $k = k_\rho + 1$ ve $m = k_\rho - 1$ ile Teorem 3.2.1 i kullanmayı tercih ederiz. Bunu kullanabilmek için E yi değiştirmeliyiz. E nin M tane satır ve N tane 1 e sahip olduğunu farz edelim. $e_{i,k_{\rho-1}} = 0$, $e_{i,k_\rho} = 1$ ve $e_{i,k_{\rho+1}} = 1$ iken E matrisinde $(i, k_\rho - 1)$ pozisyonuna bir tane 1 ekleyerek ve $(i, k_\rho + 1)$ pozisyonundaki 1 i çıkartarak $M\,x\,(k_\rho + 2)$ tipinde $\overline{E}$ incidence matrisini oluşturalım. Ek olarak, eğer

$$e_{1,k_\rho+1} = 0, \quad e_{1,k_\rho} = 1 \quad \text{ve} \quad e_{1,k_{\rho+1}} = 0$$

ise ve ayrıca

$$e_{M,k_{\rho-1}} = 0, \; e_{M,k_\rho} = 1 \text{ ve } e_{M,k_{\upsilon+1}} = 0$$

ise sırasıyla $(1, k_\rho - 1)$ ve $(M, k_\rho - 1)$ pozisyonlarına birer tane 1 ekleyelim.

Bu durumda $\overline{E}$ incidence matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) Eğer $\overline{N}$, $\overline{E}$ deki 1 lerin sayısı ise $\overline{N} \leq N + 2$ dir.

(2) Eğer $\overline{N} \leq k_\rho + 1$ ise $\overline{E}$, ilk $k_\rho + 1$ sütunu için Polya şartını sağlar. Aksi halde $\overline{E}$, bütün $k_\rho + 2$ sütunları için Polya şartını sağlar.

(3) $\overline{E}$, $[a,b]$ nin içindeki düğümlere karşılık gelen satırlarda sadece çift dizilere sahiptir.

(4) $A_{k_\rho}+1=\left\{x_i / x_i \in X, e_{i,k_\rho+1}=1\right\}$ olsun. Bu durumda $A_{k_\rho+1}\subset(a,b)$ dir.

(5) Eğer $j \geq k_\rho$ için $e_{ij}=1$ ise $e_{i,j-1}=1$ dir

$\overline{N}\leq n$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.2.1 den dolayı eğer h bazı en iyi minimal yaklaşım ise, $x\in U_i(f)$, $i=1,...,\rho$ için

$$v^{(k_i)}(x)=f^{(k_i)}(x)-h^{(k_i)}(x)$$

eşitliğini sağlayan bir $v\in H$ ın varolduğu sonucuna varabiliriz. Bunlar $f-h$ ın bütün extremum noktaları olduğundan yeteri kadar küçük bütün $\lambda>0$ için, $h+\lambda v$ f ye h den daha iyi yaklaşımdır. Böylece $\overline{N}\geq n+1$ dir.

Şimdi, E nin değiştirilmiş bir hali olan E^* incidence matrisini tanımlayalım. E^* incidence matrisi; $e_{1,k_\rho-1}=0$, $e_{1,k_\rho}=0$ iken $(1,k_\rho-1)$ pozisyonuna bir tane 1 ekleyerek ve $e_{M,k_\rho-1}=0$, $e_{M,k_\rho}=1$ iken $\left(M,k_\rho-1\right)$ pozisyonuna bir tane 1 ekleyerek E den elde edilen $M\ x(k_\rho+2)$ tipinde bir matris olsun. E^* , $\overline{E}$ deki gibi birçok 1 e sahiptir. Yani $\overline{N}\geq n+1$ dir

Şimdi h, f ye bir en küçük ve g de f ye herhangi bir en iyi yaklaşım olsun. Biz $h-g$ nin (E,X) üzerinde kaybolduğunu biliyoruz. E nin $(1,k_\rho-1)$ pozisyonuna E^* elde etmek için bir tane 1 in eklendiği durumda v_1 in (E,X) üzerinde kaybolduğunu ve $v_1^{(k_\rho-1)}(a)\neq 0$ olacak şekilde $v_1\in H$ nin var olduğunu kabul edelim. Aynı şekilde E $(M,k_\rho-1)$ pozisyonuna E^* elde etmek için bir tane 1 eklediğimiz durumda $v_2^{(k_\rho-1)}(b)\neq 0$ hariç (E,X) üzerinde kaybolacak şekilde $v_2\in H$ olduğunu kabul edelim. Sonra; λ_1 , λ_2 nin uygun seçilmesi için $h-g-\lambda_1 v_1-\lambda_2 v_2$, (E,X) üzerinde kaybolur. Ardından

$$h-g\equiv\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$$

olur. Yani $\dim\Omega(f)=2$ dir. Şu da olabilir; E^* oluşturmak için E ye ikiden az 1 eklenmiştir ya da istenilen özelliklerde V_1 , V_2 bulunamaz. Başka bir durumda $\Omega(f)$ nin boyutu küçük olabilir.Böylece $\Omega(f)\leq 2$ dir.

Genel olarak; $\dim\Omega^{(q)}(f)\leq 2$ sonucunu bulmadan önce $q\geq 1$ uygulanabilir. Eğer $q\leq k_\rho-2$ ise $h+\lambda p$, λ ve $p\in\pi_{q-1}$ için yine en iyi yaklaşımdır. Böylece

$$q\leq \dim\Omega(f)\leq q+2\leq k_\rho$$

olur.

Eğer $q=k_\rho-1$ ise $f^{(k_\rho-1)}$ e $H^{(k_\rho-1)}$ in elemanları vasıtasıyla $\|\,.\,\|_G$ normuna göre $G=\{0,1\}$ veya $G=\{0\}$ ile yaklaşım problemine sahip oluruz.

Eğer $G=\{0,1\}$ ise $\dim\Omega_G(f^{(k_\rho-1)},H^{(k_\rho-1)})\leq 1$ den $\dim\Omega_F{}^{(k_\rho-1)}\leq 1$ olduğu Keener tarafından gösterilmiştir$[7]$.

$\pi_{k_\rho-2}\subset H$ olduğundan

$$k_\rho-1\leq \dim\Omega(f)\leq k_\rho$$

olur.

Eğer $q=k_\rho$ ise $G=\{0\}$ olur ve böylece Haar uzayının elemanları ile sürekli bir fonksiyona sıradan Chebyshev yaklaşımını elde ederiz. Böylece

$$\dim\Omega_G(f^{(k_\rho)},H^{(k_\rho)})=0$$

$$\dim\Omega_F{}^{(k_\rho)}(f)=0$$

dır.

Buradan eğer $\dim H^{(k_\rho)}=n-k_\rho+1$ ise $\dim\Omega(f)=k_\rho-1$ ve eğer $\dim H^{k_\rho}=n-k_\rho$ ise $\dim\Omega(f)=k_\rho$ dır.

$$\dim\Omega(f)\leq k_\rho$$

sonucuna varabiliriz.

Birkhoff sistemlerinin içerdiği ve polinom olmayan uzaylar için Birkhoff interpolasyon probleminin düzenliliği ile bağlantısı $[9]$ da Lorentz tarafından sunulmuştur. Bir Birkhoff sistemi, eğer $a\leq x_i\leq b$ olacak şekilde herhangi x_i ve $i=0,1,\ldots,n-1$ için

$$b^{(i)}(x_i)=0$$

olacak şekilde $b\in B$ varsa $b\equiv 0$ özelliğine sahip $C^{(n-1)}[a,b]$ nin n boyutu bir B alt uzayıdır. Polya koşullarını sağlayan, hiç destekli tek dizisi olmayan n tane 1 li herhangi incidence matrisin bir Birkhoff sistemi için düzenli olduğu gösterilebilir $[9]$. Birkhoff sistemlerinin örnekleri cebirsel polinomlar ve herhangi $a < \ln 2$ için $[1,1+a]$ üzerindeki $\{e^x, e^{2x}\}$ gerenidir.

Haar kümeleriyle birlikte eğer B, $\dim B^{(m)} = n-m$ olacak şekilde $C^{(n-1)}[a,b]$ nin n boyutlu bir alt uzayı ve bu $B^{(m)}$ bir Birkhoff sistemi ise bütün $i = 0,1,...,m$ için $B^{(i)}$, $n-i$ boyutlu bir Birkhoff sistemidir. Eğer B, n boyutlu bir Birkhoff sistemi ve $\dim B^{(m)} = n-m$ ise $i = 0,1,..,m$ için her bir $B^{(i)}, n-i$ boyutlu bir Birkhoff sistemidir. Bu Lorentz tarafından $[9]$ da belirtilmiştir.

Teorem 3.2.5: $f \in C^{(k_\rho+1)}$ ve B, $\dim B^{(k_\rho)} = n-k_\rho$ olacak şekilde n boyutlu bir Birkhoff sistemi olsun. Eğer q, $U_i \neq \varnothing$ için en küçük k_i ise $\dim \Omega(f) = q$ ve herhangi $g,h \in \Omega(f)$ için

$$g^{(q)} = h^{(q)}$$

dur. Özel olarak $\dim \Omega(f) \leq k_\rho$ olur.

Teorem3.2.6: $f \in C^{(k_\rho+1)}[a,b]$ ve

$$\dim B^{(k_\rho-1)} = \dim B^{(k_\rho)} = n-k_\rho+1$$

ve $B^{(k_\rho)}$ bir Haar kümesi olacak şekilde n boyutlu bir Birkhoff sistemi olsun. Eğer $U_i \neq \varnothing$ için q, k_i lerin en küçüğü ise $q \leq k_\rho - 1$ için $\dim \Omega(f) = q$ olur ve eğer $q = k_\rho$ ise $\dim \Omega(f) \leq k_\rho - 1$ dir. Bunlara ek olarak eğer $g,h \in \Omega(f)$ ise $g^{(k_\rho-1)} = h^{(k_\rho-1)}$ dir.

İspat: Teorem 3.2.2 de olduğu gibi, en küçük $h-g$ farkını ve f ye keyfi bir en iyi yaklaşımın; en az $n+1$ tane 1 i olan, destekli tek dizisi olmayan ve Polya koşullarını sağlayan (E,X) incidence matrisi üzerinde kaybolduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden (E,X), B ye göre düzenlenir. $g^{(k_\rho)}(a) = 0$ formunun koşullarında zorluklar olmaz çünkü bu, Birkhoff sistemine göre E nin düzenliliğini etkilemez.Bu da bizim, Teorem 3.2.5 ve 3.2.6 da; eğer $k_q \leq k_\rho - 1$ ise $\dim \Omega(f) = k_q$ olduğu sonucuna varmamızı sağlar. Eğer $k_\rho = q$ ise $B^{(k_\rho)}$ bir Haar kümesidir ve bu yüzden $\dim \Omega^{(k_\upsilon)}(f) = 0$ dır. Eğer yine $\dim B^{(k_\rho)} = n-k_\rho+1$ ise $\dim \Omega(f) = k_\rho - 1$

olmalıdır. Teorem 3.2.5 ve 3.2.6 nın diğer sonuçları bu gözlemleri takip eder.Keener $[1, 1+In2]$ üzerinde $H = \{e \ , e^{2x}\}$ geren uzayı için aynı anda yaklaşımı incelemiştir[8]. $\|f\|_F = \max(\|f\|, \|f'\|)$ normu için, $U_1(f) \neq \varnothing$ olmasına rağmen en iyi aynı anda yaklaşımların tek olmayabileceğini göstermiştir. Bu durumda göz önünde tutulan uzay bir Birkhoff sistemi değildir. Hatta, eğer tanım aralığı herhangi $1 < b < In2$ için $[1, b]$ olarak alınır ise H, bir Birkhoff sistemi olur ve $U_1(f) \neq \varnothing$ olması en iyi aynı anda yaklaşımın tek olmasını gerektirir.

IV. BÖLÜM

SONUÇLAR

1. $\left\| . \right\|_F$ normundaki yaklaşım; reel değerli bir f fonksiyonu ve bunun $f^{(k_i)}$ türevlerine p ve $p^{(k_i)}$ polinomlarıyla Chebyshev normunda aynı anda yaklaşımdır.

2. Cebirsel polinomlarla aynı anda yaklaşımda $\Omega(f)$ nin boyutu her zaman q dur. Trigonometrik polinomlarda ise $\Omega(f)$ nin boyutu, q nun herhangi bir değeri için en çok 1 dir.

3. Cebirsel polinomlarda f belli koşullar altında bir tek en iyi aynı anda yaklaşım polinomuna sahiptir. Fakat $\left\| . \right\|_F$ normunda bir en iyi trigonometrik yaklaşık tek olmayabilir. Bunu bir örnekle görebiliriz.

Örnek 2.3.1: $f \in C'[-\pi,\pi)$, $[-\pi,\pi)$ üzerinde bir kere türevlenebilir, sürekli gerçel değerli bir fonksiyon olsun ve

$$f(x)=\begin{cases} x+\pi & , \quad -\pi \le x \le \dfrac{-\pi}{2} \\ \left(-\dfrac{2}{\pi}\right)x^2 - x + \dfrac{\pi}{2} & , \quad \dfrac{-\pi}{2} \le x \le \dfrac{-\pi}{4} \\ \left(-\dfrac{10}{\pi}\right)x^2 - 5x & , \quad \dfrac{-\pi}{4} \le x \le 0 \\ -f(-x) & , \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$T_1' \equiv \left\langle \sin x, \cos x \right\rangle = \int \sin x \ \cos x \ dx$$

fonksiyonuna, f' yaklaşımını ele alalım. $f' \in C[-\pi,\pi)$ bir çift fonksiyon olduğundan f' nün en iyi tek yaklaşımı, Chebyshev normunda bir çift trigonometrik polinom olmalıdır. Bu da $\forall \alpha \in IR$ için

$$\alpha \cos x$$

formundadır.

Örneğin $\alpha = -3$ alalım. Buradan elde edilen

$$-3\cos\alpha$$

fonksiyonu, T_1' den f ye 2 sapma ile en iyi yaklaşımı verir. Başka bir deyişle

$$q(x)=-3\sin x$$

kesin olarak 2 den küçük olan $3-\frac{\pi}{2}$ (yaklaşık olarak) maksimum sapmaya sahiptir. Bu durumda, bu örnekte $q=1$ dir.

Ayrıca şunu da belirtmeliyiz ki

$$\varepsilon \cong -1+\frac{\pi}{2}$$

için

$$|c|<\varepsilon$$

olmak üzere

$$p(x)=-3\sin x+c$$

formundaki herhangi bir polinom, $F=\{0,1\}$ için F normunda f ye bir en iyi yaklaşıktır.

4. Teorem 2.2.3 den de anlaşılacağı gibi, cebirsel polinomlarda aynı anda yaklaşımın tek olması için $f\in B_F$ ve $U_0(f)\neq\varnothing$ olması yeterlidir. Ayrıca bu teoremden şu sonucu da çıkarabiliriz; $0\leq k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_\rho$ olmak üzere eğer f ve Q, $\max_i\left\{\left|\rho^{(k_i)}\right|\right\}$ yarı normuna göre bazı f fonksiyonlarına en iyi yaklaşım polinomları iseler

$$p^{(k_\rho)}=Q^{(k_\rho)}$$

olur.

KAYNAKLAR

[1] K.Atkinson and A.Sharma, (1969). A partial characterization of poised Hermite Birkhoff interpolation problems, SIAM J.Numer. Anal. 6,230-235.

[2] Y.Ikebe,(1973). Hermite-Birkhoff Interpolation problems in Haar subspaces, J.Approx. Theory 8, 142-149.

[3] D.J.Johnson,(1975). The Trigonometric Hermite-Birkhoff interpolation problem, 365-369.

[4] D.J.Johanson,(1976). Nonuniqueness of simultaneous aproximation by trigonometric polynomials, in “Approximation Theory II” (G.G.Lorentz, C.K.Chui and L.L.Scumaker, Eds), pp. 411-415, Academic Press, New york.

[5] R.A.Lorentz,(1975) .Nonuniqueness of simultaneous approximation by algebraic polynomials, J.Approx. Theory, 17-23.

[6] G.G.Lorentz, G.D.Birkhoff’s theory, preprint.

[7] G.G.Lorentz,(1972). Birkhoff interpolation and problem of free matrices, J.Approximation Theory 6, 283-290.

[8] L.L.Keener,(1980). Hermite-Birkhoff interpolation and approximation of a function and its derivatives, J.Approx. Theory 30, 129-38.

[9] G.G.Lorentz,(1980). Independent sets of knots and singularity of interpolation matrices, J.Approx. Theory 30, 208-225.

[10] W.Hausmann,(1978/1979). Differentiable Tchebycheff subspaces and Hermite interpolation, Ann.Acad.Sci.Fenn.Ser. A I Math. 4, 75-83.

[11] G.G.Lorentz,(1980). Independent sets of knots and singularity of interpolation matrices, J.Approx. Theory 30, 208-225.

[12] R.A.Lorentz,(1983). Simultaneous Approximation Int. and B.S.

[13] D.G.Moursund,(1964). Chebyshev approximation of a function and its derivatives, Math. Comp., 18, pp, 382-389.

[14] F.J.Schuurman,(1969). Uniqueness in the uniform approximation of a function and derivatives, SIAM J.Numer. Anal. G. 6, 305-315.

[15] H.Windhauer,(1974). On Birkhoff interpolation : Free Birkhoff nodes, SIAM J. Numer. Anal. 11, 173-175.

[16] G.G.Lorentz,(1979). Recent progress in Birkhoff interpolation, in "Approximation Theory and Functional Analysis" (J.B.Prolla, Ed), pp, 187-236, North-Holland, Amsterdam.

[17] R.A.Lorentz,(1983). Simultaneous approximation, interpolation and Birkhoff Systems, J.Approx. Theory 37, 125-136.

[18] R.A.Lorentz.(1985). Simultaneous approximation and Birkhoff interpolation II : The Periodic Case, J.Approx. Theory 44, 21-29.

[19] S.Gülşan,(1996).Stone-Weierstrass Yaklaşım Teoremi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi,7-11.

[20] M.Açıkgöz,(1997). Trigonometrik Polinomlarda Aynı Anda Yaklaşım,Doktora Tezi.

[21] Ü.Coşkun,(2004). Cebirsel ve Trigonometrik Polinomlarda Hermite-Birkhoff İnterpolasyon Problemi, Yüksek Lisans Tezi.