GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK VE FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDAT BULU
ARALIK 2006

Topolojik ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Yakınsaklık

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
M.Sc. Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Sedat BULU
Aralık 2006

ÖZET

TOPOLOJİK VE FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK

BULU Sedat

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Aralık 2006, 64 sayfa

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci ve ikinci bölümlerde topolojik önbilgiler ve topolojik uzaylardaki dizi, ağ ve filtre kavramları ile bunların yakınsaklıklarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Fuzzy nokta, Fuzzy küme ve Fuzzy topolojisi incelenmiş ve bu kavramlarla ilgili detaylara inilmiştir.

Dördüncü bölümde Fuzzy topolojik uzaylardaki Fuzzy dizi, Fuzzy ağ ve Fuzzy filtre kavramları ele alınmış ve bu kavramların yakınsaklıkları ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Son bölümde ise Fuzzy ağlar ile Fuzzy filtrelerin yakınsaklıkları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Fuzzy nokta, Fuzzy küme, Q- komşuluk, Fuzzy dizi, Fuzzy ağ, Fuzzy filtre, adherent nokta, limit, Fuzzy Yakınsaklık.

ABSTRACT

CONVERGENCE IN TOPOLOGICAL AND FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

BULU Sedat
M. Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Asist. Prof. Sabri BİRLİK
December 2006, 64 page

This study includes five chapters. The first and second chapters present topological preliminaries and sequences, nets, and filters concepts in topological spaces, and their convergence.

In the third chapter, detailed information about Fuzzy point, Fuzzy set, and Fuzzy topology was given.

In the fourth chapter, Fuzzy sequence, Fuzzy nets, and Fuzzy filters concepts in Fuzzy topological spaces were handled, and their convergences were analyzed in details.

In the last chapter, the relation between the convergence of Fuzzy nets and the convergence of Fuzzy filters was analyzed.

Keywords: Fuzzy point, Fuzzy set, Q- neighbourhood, Fuzzy sequences, Fuzzy nets, Fuzzy filters, adherent point, limit, Fuzzy convergence.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda yardımlarını esirgemeyen ve beni yönlendiren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK'e, manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen anneme, babama ve değerli eşim Dr. Meltem BULU'ya, kaynak edinmemde yardımcı olan değerli ağabeyim Semih BULU'ya, tezin yazımı esnasında yardımcı olan değerli kardeşlerim Elektrik- Elektronik Mühendisi M. Fatih GÜNEY ve Elektrik- Elektronik Mühendisi Menderes YENİNCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
A^{o}	A kümesinin içi
A^{c}	A kümesinin tümleyeni
$\mathcal{U}(x)$	x noktasının komşuluklar ailesi
$\tilde{A}$	A'nın yığılma noktalarının kümesi
cl(A)	A F-kümesinin yığılma F-noktalarının kümesi
τ	Topoloji
β	Topoloji tabanı
$\mathbb{R}^{n}$	Öklit uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
Λ	Yönlendirilmiş küme
(x_n)	Dizi
$\mathcal{F}$	Filtre
$\prec$	X kümesinde bir bağıntı
L	Latis
supA	A'nın en küçük üst sınırı
infA	A'nın en büyük alt sınırı
M(L)	L latisindeki moleküllerin kümesi
I^{X}	X den I = [0,1] üzerine tanımlı fonksiyonların kümesi
f_A	A Fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
suppA	A Fuzzy kümesinin desteği
$\leq$	Fuzzy alt küme
$\vee$	Fuzzy birleşim
$\wedge$	Fuzzy kesişim
F-nokta, x_λ	Fuzzy noktası

F-küme	Fuzzy kümesi
F-ağ	Fuzzy ağ
F-filtre	Fuzzy filtre
χ	Fuzzy noktalarının kümesi
f. t. u.	Fuzzy topolojik uzayı
τ_{∞}	Sonlu tümleyenler Fuzzy topolojisi
q	Çakışımsı
$N^{Q}_{x_{\lambda}}$	x_{λ}'nın Q- komşuluklarının ailesi
FT_2	Fuzzy Hausdorff uzayı
adh(A)	A'nın adherent noktalarının kümesi
$\mathcal{N}$, $x^{n}_{\lambda_n}$	Fuzzy ağ
∞	Adherent
$\mathcal{U}$	Örtü
$\mathcal{P}$	Asal Fuzzy filtre
lim(A)	A'nın bütün limit noktalarının kümesi

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Komplike sistemlerin kontrol problemleri üzerinde çalışmalar yapmak isteyen Azeri elektrik-elektronik mühendisi L.A. Zadeh, 1879 yılında Cantor tarafından tanımlanan küme kavramının gerçek hayattaki olayları açıklamaya yetmediğini görüp, 1965 yılında Fuzzy (bulanık) küme kavramını tanımlayarak klasik küme kavramını genişletmiştir. Örneğin 24 saati gece ve gündüz olarak ikiye ayırırsak bu kati olmaz, çünkü akşam karanlığı tam karanlık değil, sabah aydınlığı da tam aydınlık değildir. Bunlar ışığın yoğunluğuna göre derecelendirilebilirler. Ya da uzun boylu insanların kümesini oluşturmak istersek bu kümenin elemanlarını tam olarak belirleyemeyiz. Çünkü bir bölgeye göre uzun sayılabilen bir insan başka bir bölgeye göre uzun olmayabilir. Bu durumda uzun boylu insanların kümesi farklı bölgelerde farklı olarak tanımlanabilir. Ancak Fuzzy küme kavramında, uzun boylu insanların kümeye ait olma derecelerine göre değer kümesi [0,1] aralığındaki reel sayılar olan üyelik fonksiyonları ile her yerde aynı olacak şekilde uzun boylu insanların kümesi oluşturulur. Fuzzy mantığı üzerine yapılan çalışmalar Japonya'da oldukça fazladır. Özellikle fuzzy process controller olarak adlandırılan özel amaçlı mikroişlemci çipin üretilmesine çalışılmaktadır. Bu teknoloji fotoğraf makineleri, bulaşık makineleri, klimalar ve otomatik iletim hatları gibi uygulamalarda kullanılmaktadır. Dünyanın en gelişmiş metrosu olarak kabul edilen Japonya'daki Senday Metrosu'nun çalışma prensibi fuzzy mantığına dayanmaktadır. Yaklaşık 14 km. boyunca 16 istasyonda duran bu metro o kadar yumuşak hareket etmektedir ki ayakta hiçbir yere tutunmadan kahvenizi içebilirsiniz. Bundan başka uzay araştırmaları ve havacılık endüstrisinde de kullanılmaktadır.

16. yüzyıldan beri olasılık teorisi belirsizliğin bir çeşidi olarak çalışılmıştır. Belirsizlik bir olayın meydana gelip gelmemesidir, fakat olayın kendisi tamamen kesindir, tek belirsiz şey olayın olup olmayacağıdır, nedensellik net değildir. Bununla beraber bazı olaylar için, belirsizliğin bir başka çeşidi de mevcuttur, fuzzy. Bu olayların bağlı olduğu durumlar tamamen belirlenemez. Onlar siyah ya da beyaz olmayan bir statüdedirler.

Matematikte bir A kümesi kendi karakteristik fonksiyonuyla temsil edilebilir. Şöyle ki; X evrensel kümesinden iki değerli $\{0,1\}$ kümesine, A'yı içeren bir X_A dönüşümünü düşünelim; bunun anlamı x∈ A ⇔ $X_A(x)=1$ ve x∉ A ⇔ $X_A(x)=0$'dır. Fakat fuzzy kümelerinde A ile x arasındaki aitlik ilişkisi sadece 0 ya da 1 değildir. Aitliğin bir derecesi vardır-üyelik derecesi. Mesela 0,7 gibi. Bu nedenle değer kümesi $\{0,1\}$'den [0,1]'e genişletilmiştir. 1965 yılında L.A. Zadeh [33] tarafından, boştan farklı bir kümeden [0,1] aralığına tanımlanan fonksiyonlar olarak ele alınan fuzzy küme kavramı 1967 yılında J.A. Goguen [11] tarafından [0,1] aralığı yerine L latis kullanılarak fuzzy küme kavramı genişletilmiş ve L-fuzzy kümeleri olarak adlandırılmıştır.

Çünkü bütün üyelik dereceleri, matematiksel gösterimde, bir sıralı yapı formundadır, yani latisdir. X'ten bir L latisine olan bir A dönüşümü bir kümenin belirtisizliğini genelleştirilmiş karakteristik fonksiyon olarak tanımlar. Yani bir L-fuzzy kümesi X'ten bir L latisine olan bir dönüşümdür. Bu şekilde fuzzy kümesi temel matematik kavramını genişletmiştir. 1989'da N. Nakajima [20] ve 2005'de Mehmet Şahin [26], [27] üyelik fonksiyonuna bağlı olmaksızın fuzzy kümelerin elde edilişi üzerine çalışmalar ortaya koyarak fuzzy küme kavramını genelleştirmişlerdir.

Fuzzy matematiği geliştirilmiş bir çeşit matematik ve fuzzy topolojisi de fuzzy kümeleri üzerinde geliştirilmiş bir çeşit topolojidir. Fuzzy topolojisi üzerine ilk çalışmalar 1968'de C. L. Chang [4] tarafından yapılmıştır. Daha sonra çeşitli matematikçiler tarafından fuzzy topolojisi üzerine çalışmalar ortaya koyulmuştur. 1974'de C. K. Wong [29], 1980'de Y. M. Liu [23], 1985'de A. P. Šostak [25] ve T. Kubiak [13], 1991'de Mingsheng-Ying [18].

Yakınsaklık konusu ise analizin temel kavramlarından biridir. Genel topolojide iki farklı yakınsaklık teorisi kullanılır. Bunlardan birincisi 1922'de Moore ve Smith'e [19] kadar uzanan ve bir ağ kavramından elde edilen yakınsaklıktır. Diğeri ise, 1937'de Cartan [3] ve 1940'da Bourbaki'ye [2] kadar uzanan ve bir filtreden elde edilen yakınsaklıktır. 1955'de Bartle [1] filtre ve ağların yakınsaklığı arasındaki ilişki üzerine çalıştı ve ikisinin birbirine denk olduğunu ispatladı. 1979'da Lowen [15] fuzzy topolojik uzaylardaki fuzzy filtrelerin yakınsaklığı üzerine çalıştı ve sonuçlarını fuzzy kompaktlık ve fuzzy sürekliliğin tanımlanmasında uyguladı. Bu çalışma, daha genişletilmiş bir şekilde çeşitli matematikçiler tarafından farklı noktalardan hareketle takip edildi, [17], [7–10], [16], [24], [5], [6], [10]. Ancak bu yaklaşımlarda Q-bağıntısı ve Q-komşuluk kavramları kullanılmamıştı. 1980'de Pu ve Liu [23], bir fuzzy topolojik uzaydaki bir fuzzy noktanın Q-komşuluğu kavramını kullanarak fuzzy ağlar için yakınsaklık tanımını verdi.

Bu tezde fuzzy filtrelerin ve fuzzy ağların yakınsaklığı ve adherent noktası kavramları geniş bir şekilde ele alınacak ve bu iki yapının yakınsaklıkları arasındaki ilişkinin, topolojik uzaylardaki ağ ve filtrelerin yakınsaklığına benzer olduğu gösterilecek.

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Topolojik Bilgiler

1.1.1 Tanım. $X \neq \emptyset$ ve τ, X'in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere;

T- 1. X ve $\emptyset$ τ**'**ya aittir

T- 2. τ**'**nun elemanlarının keyfi birleşimleri τ**'**ya aittir.

T- 3. τ**'**nun elemanlarının sonlu kesişimi τ**'**ya aittir.

Yukarıdaki aksiyomları sağlayan τ**'**nun her bir elemanına X'de bir açık küme, bu açık kümelerin tümleyenlerine de X'de bir kapalı küme ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

1.1.2 Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin X'teki kapanışı

$$\overline{A} = \bigcap \{K \subset X: \text{K kapalıdır ve } A \subset K\}$$

Tanımdan anlaşılacağı gibi $\overline{A}$ kapalıdır ve $\overline{A}$, A'yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.

1.1.3 Teorem.[32] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B \subset X$ alt kümesi verilsin.

$$\text{A kümesi kapalıdır} \Leftrightarrow A = \overline{A}$$

1.1.4 Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

$$\overline{A} = X$$

ise, A kümesine (X,τ) uzayı içinde her yerde yoğundur denir.

1.1.5 Tanım. Bir (X,τ) topolojik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya ayrılabilir uzay denir.

1.1.6 Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesinin içi

$$A^o = \bigcup \{G\subset X: \text{G açıktır ve } G\subset A\}$$

1.1.1. Tanımdaki T–2 aksiyomundan A^o kümesi açıktır. A^o kümesi A'yı kapsayan en geniş kümedir.

1.1.7 Teorem.[32] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ alt kümesi verilsin.

A kümesi açıktır $\Leftrightarrow$ $A=A^o$

İspat: A kümesi açık olsun. O halde $A\in\tau$'dur.2.1.5. Tanımdan $A\subset A^o$ olur. $A^o\subset A$ olduğundan $A=A^o$ elde edilir.

Tersine, $A=A^o$ olsun. A^o açık olduğundan A'nın da açık olduğu elde edilir.

1.2 Komşuluk

1.2.1 Tanım.[32] (X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. x noktasını içeren bir açık kümeyi kapsayan her $U\subset X$ alt kümesine x noktasının bir komşuluğu denir.

U, x noktasının bir komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists\, A\in\tau \ni x\in A\subset U$

Bir x noktasının bütün komşuluklarından oluşan aileyi $\mathcal{U}(x)$ simgesi ile gösterip buna x noktasının komşuluklar ailesi diyeceğiz.

1.2.2 Teorem.[28] (X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. x noktasının $\mathcal{U}(x)$ komşuluklar ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

N–1. $U\in\mathcal{U}(x)$ ise $x\in U$'dur.

N–2. $U, S\in\mathcal{U}(x)$ ise $U\cap S\in\mathcal{U}(x)$'dir.

N–3. $U\in\mathcal{U}(x)$ ve $U\subset S$ ise $S\in\mathcal{U}(x)$'dir.

N–4. Her $U\in\mathcal{U}(x)$ için en az bir $S\in\mathcal{U}(x)$ vardır öyle ki her $y\in S$ için $U\in\mathcal{U}(y)$ dir.

İspat: N–1. 1.2.1. Tanımdan her $U\in\mathcal{U}(x)$ komşuluğu için, $x\in A\subset U$ olduğundan $x\in U$ olur.

N–2. U, S$\in \mathcal{U}$(x) verilsin. O halde x$\in$ U^o ve $x \in S^o$, böylece x$\in$ $U^o \cap S^o = (U \cap S)^o$

ve buradan $U \cap S \in \mathcal{U}$(x) elde edilir.

N–3. U$\in \mathcal{U}$(x) ise x$\in$ U^o 'dır. $U \subset S$ ise $U^o \subset S^o$, böylece x$\in$ S^o olur. Buradan S$\in$ U^o elde edilir.

N–4. U$\in$ U^o olsun ve S= U^o seçelim. O halde her y$\in$ S için y$\in$ U^o olur ve böylece U$\in \mathcal{U}$(y) elde edilir.

1.2.3.Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda, A'nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A kümesinin bir kapanış noktası denir.

$$x, \text{A'nın bir kapanış noktasıdır} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) \text{ için, } A \cap U \neq \varnothing$$

1.2.4.Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğu, A kümesinin x'ten farklı bir noktasını içeriyorsa, x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir.

$$x, \text{A'nın bir yığılma noktasıdır} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) \text{ için, } A \cap (U - \{x\}) \neq \varnothing$$

A kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesini bundan sonra $\tilde{A}$ ile göstereceğiz.

Yukarıda verilen iki tanım karşılaştırıldığında $\tilde{A} \subset \overline{A}$ olduğu açıktır. Bunun anlamı bir topolojik uzayda her yığılma noktası kapanış noktasıdır fakat bunun tersi genellikle doğru değildir.

1.2.5. Teorem.[28] (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi için;

$$\overline{A} = A \cup \tilde{A}$$

İspat: $\tilde{A} \subset \overline{A}$ ve $A \subset \overline{A}$ olduğundan, birleşme işleminden dolayı

$$A \cup \tilde{A} \subset \overline{A} \qquad (1)$$

elde edilir. Diğer taraftan x in bütün komşulukları A ile kesişir ise yani $x \in \overline{A}$ ise o halde ya $x \in$ A'dır ya da x in her komşuluğu x ten farklı bir noktada A ile kesişir, böylece

$$x \in A \cup \tilde{A} \text{ yani } \overline{A} \subset A \cup \tilde{A} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2)'den $\overline{A} = A \cup \tilde{A}$ olur.

1.3. Topoloji Tabanı

1.3.1. Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset P(X)$ olsun.

$$\tau = \{A \subset X: A = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ ve } \forall i \in I \text{ için, } B_i \in \beta\}$$

oluyorsa β'ya τ için bir tabandır denir. Yani τ'nun her elemanı β'nın elemanlarının keyfi birleşimleri şeklinde yazılabiliyorsa β, τ için bir taban olur.

1.3.2. Teorem.[28] X boş olmayan bir küme ve $\beta \subset P(X)$ olsun. β'nın X üzerindeki bir topolojiye taban olması için gerek ve yeter koşul;

(i) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$

(ii) Her B_1, $B_2 \in \beta$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists\, B_3$ vardır öyle ki $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

1.3.3. Tanım. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer τ topolojisinin sayılabilir bir tabanı varsa, (X, τ) uzayına ikinci sayılabilir uzay denir.

1.3.4. Teorem.[32] Bir (X, τ) topolojik uzayı, ikinci sayılabilir ise (X, τ) uzayı ayrılabilir bir uzaydır.

İspat: β ailesi τ topolojisinin sayılabilir bir tabanı olsun. β ailesinin boş olmayan her kümesinden bir nokta seçerek, A kümesini oluşturalım. 1.3.3. Tanımdan dolayı, β ailesi sayılabilir olduğundan, A kümesi de sayılabilirdir. Şimdi $\overline{A} = X$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\overline{A} \neq X$ olsun. Tümleme işleminden $(X - \overline{A}) \neq \varnothing$ ve dolayısıyla $(X - \overline{A}) = (X - A)^o \neq \varnothing$ olur. Bir $x \in (X - A)^o$ seçelim. Ayrıca $(X - A)^o = (X - \overline{A})$ kümesi açıktır. $\beta \subset \tau$ olduğundan, 1.3.1. Tanım gereği $x \in B \subset (X - \overline{A})$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır. Böylece, $x \in B \subset (X - A)^o \subset (X - \overline{A})$ olup, dolayısıyla $x \notin A$'dır. Bu ise, A kümesinin seçimiyle çelişir. O halde, $\overline{A} = X$'dır. Sonuç olarak, A kümesi 1.1.4. Tanım gereği (X, τ) uzayında her yerde yoğundur. (X, τ) uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olduğundan 1.1.5. Tanım gereği bir ayrılabilir uzaydır.

1.3.5. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olmak üzere, eğer her $U\in\mathcal{U}(x)$ komşuluğu için, $V\subset U$ olacak şekilde bir $V\in\mathcal{V}(x)$ kümesi varsa, $\mathcal{V}(x)$ ailesine, x noktasının bir komşuluklar tabanı denir.

1.3.6. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x\in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, (X,τ) uzayına birinci sayılabilir uzay denir.

1.3.7.Teorem.[32] (X,τ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olmak üzere, $\{U_1,U_2,...,U_n,...\}$ ailesi, x noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı ise, $x\in X$ noktasının iç içe azalan bir $\{V_1,V_2,...,V_n,...\}$ komşuluklar tabanı vardır.

İspat: İç içe azalan demek, her $n\in N$ için, $V_{n+1}\subset V_n$ olması demektir. $\{U_1,U_2,...,U_n,...\}$ sayılabilir komşuluklar tabanından

$$V_1=U_1,\ \ V_2=U_1\cap U_2,\ \dots,\ V_n=U_1\cap U_2\cap...\cap U_n,\ \dots$$

elde edilen $\{V_1,V_2,...,V_n,...\}$ kümeler dizisi istenileni sağlar.

1.3.8. Teorem.[32] İkinci sayılabilir her (X,τ) uzayı, birinci sayılabilirdir.

İspat: (X,τ) topolojik uzayı ve $\beta\subset\tau$ topoloji tabanı verilsin. (X,τ) uzayı ikinci sayılabilir olduğundan, $\beta\subset\tau$ tabanı sayılabilirdir. Her $x\in X$ noktası için

$$\mathcal{V}(x)=\{B\subset X:\ x\in B\in\beta\}$$

ailesi, x noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Buradan $\mathcal{V}(x)\subset\beta$ olduğundan $\mathcal{V}(x)$ ailesi de sayılabilirdir. Sonuç olarak 1.3.7. Tanım gereği, (X,τ) uzayı birinci sayılabilirdir.

1.3.9 Tanım. X ve Y birer topolojik uzay ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun.
f, $x\in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $f(x)$'in her $V\subset Y$ komşuluğu için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U\subset X$ komşuluğu vardır.

2.BÖLÜM

TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK

2.1. Dizilerin Yakınsaklığı

2.1.1. Tanım.[28] (X,τ) bir topolojik uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun.

(x_n) dizisi bir $x \in X$'e yakınsar $\Leftrightarrow$ x'in her U komşuluğu için, öyle bir n_o pozitif tamsayısı vardır ki $n \geq n_o$ için $x_n \in U$'dur. Bu durum $x_n \to x$ ile gösterilir.

2.1.2. Teorem.[28] X birinci sayılabilir bir uzay ve $A \subset X$ olsun. O halde;

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x_n \to x$ olacak şekilde bir $x_n \subset A$ vardır

İspat. $x \in \overline{A}$ ise, X'te bir sayılabilir $\{U_n : n=1, 2, \ldots\}$ komşuluk tabanı seçelim. Gerektiğinde, U_n'in yerine $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ alarak;

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots$$

olduğunu kabul edebiliriz. Her n için $U_n \cap A \neq \varnothing$'dir. Bundan dolayı $x_n \in U_n \cap A$ seçebiliriz. Sonuç olarak A'daki bir (x_n) dizisinin x'e yakınsadığı açıktır.

Tersine, (x_n) A'da bir dizi ve $x_n \to x$ olsun. O halde; x'in her komşuluğu (x_n) dizisinin bir uzantısını kapsar ve bu yüzden A ile kesişir, böylece $x \in \overline{A}$ olur.

2.1.3. Sonuç. X ve Y birinci sayılabilir uzaylar olsunlar. O halde;

a) $U \subset X$ kümesi açıktır $\Leftrightarrow$ $x_n \to x \in U$ olduğunda $(x_n) \subset A$'dır

b) $K \subset X$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow$ $(x_n) \subset K$ ve $x_n \to x$ olduğunda $x \in K$'dır.

c) $f : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir $\Leftrightarrow$ X'de $x_n \to x$ olduğunda, Y'de $f(x_n) \to f(x)$'dir.

2.1.3. Sonuç'tan anlaşılacağı gibi birinci sayılabilir bir X uzayı üzerinde diziler yardımıyla bir topoloji kurulabilir. Ancak her uzay birinci sayılabilir olmadığından diziler burada yetersiz kalmaktadır. Bu sebeple dizilerin genelleştirilmiş bir hali olan ve ilk kez 1915'te E. H. Moore'un bahsettiği ağ kavramı ortaya çıkmıştır.

2.2. Ağlar ve Ağların Yakınsaklığı

En basit yakınsaklık $\mathbb{R}^n$-Öklit uzayındaki bilinen dizisel yakınsaklıktır. Ağ yakınsaklığının kavram ve yöntemi dizisel yakınsaklığın sadece bir genelleştirilmesidir.

2.2.1. Tanım.[28] Bir Λ kümesi yönlendirilmiş bir kümedir $\Leftrightarrow$ Λ kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir "$\leq$" bağıntısı vardır.

a) Her $\lambda \in \Lambda$ için, $\lambda \leq \lambda$

b) $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ ise, $\lambda_1 \leq \lambda_3$

c) λ_1, $\lambda_2 \in \Lambda$ ise $\lambda_1 \leq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ olacak şekilde bir $\lambda_3 \in \Lambda$ vardır.

2.2.2. Tanım. Herhangi bir X kümesi ve $f:\Lambda \to X$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda her $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda)=x_n$ şeklinde tanımlanan $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ kümesine X kümesi içinde bir ağ denir ve (x_n) şeklinde gösterilir.

2.2.3. Tanım.[28] (x_n), X uzayında bir ağ olsun. x'in her U komşuluğu için en az bir $\lambda_o \in \Lambda$ var öyle ki $\lambda \geq \lambda_o$ için $x_n \in U$ oluyorsa (x_n), x$\in$ X'e yakınsıyor denir. Yani, (x_n)'in x'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul x'in her komşuluğu (x_n)'nın bir uzantısını içermesidir. Diğer bir ifadeyle;

(x_n), x'in her komşuluğunda sonunda kalıyorsa (x_n), x'e yakınsıyor denir.

2.2.4. Tanım.[28] (x_n) ağının, bir yığılma noktası olarak bir x noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşul, x'in her U komşuluğu ve her $\lambda_o \in \Lambda$ için, en az bir $\lambda \geq \lambda_o$ vardır öyle ki $x_n \in U$ dur.

Diğer bir ifadeyle;

(x_n), bir x yığılma noktasına sahiptir $\Leftrightarrow$ (x_n), x'in her komşuluğunda sıkça kalır.

2.2.5. Teorem.[28] Bir ağın, bir y yığılma noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşul y'ye yakınsayan bir alt ağa sahip olmasıdır.

İspat. y, (x_n)'nın bir yığılma noktası olsun. M={(λ, U): $\lambda \in \Lambda$ ve U, $x_n \in$ U olacak şekilde y'nin bir komşuluğudur} tanımlayalım ve M'yi aşağıdaki gibi sıralayalım:

$$(\lambda_1, U_1) \leq (\lambda_2, U_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ ve } U_2 \subset U_1 .$$

Bu sıralama M'nin bir yönlendirme olduğunu doğrular.

φ: M $\rightarrow \Lambda$, $\varphi(\lambda$, U)=λ tanımlayalım. O halde φ sonunda Λ'dadır, böylece φ, (x_n)'nin bir alt ağını tanımlar. U_o, y'nin herhangi bir komşuluğu ve $\lambda_o \in \Lambda$ olsun öyle ki $x_{\lambda_o} \in U_o$. O halde $(\lambda_o, U_o) \in$ M ve ayrıca $(\lambda$,U)$\geq(\lambda_o, U_o)$, U$\subset U_o$ olduğunu gösterir, öyle ki $x_\lambda \in$ U$\subset U_o$. Bu da gösteriri ki φ ile tanımlanan alt ağ y'ye yakınsar.

φ: M $\rightarrow \Lambda$'nin, y'ye yakınsayan (x_n)'nin bir alt ağ tanımladığını varsayalım. O halde y'nin her U komşuluğu için, M'de bazı u_U elemanları vardır öyle ki, $u \geq u_U$ olması $x_{\varphi(u)} \in$ U olduğunu gösterir. Şimdi y'nin bir U komşuluğunun ve Λ'da bir λ_o noktasının verildiğini kabul edelim. φ(M) sonunda Λ'da olduğundan bir $u_o \in$ M vardır öyle ki $\varphi(u_o) \geq \lambda_o$'dır. Fakat bir de $u_U \in$ M vardır öyle ki $u \geq u_U$, $x_{\varphi(u)} \in$ U olmasını gerektirir. $u^* \geq u_o$ ve $u^* \geq u_U$ olacak şekilde bir $u^* \in$ M seçelim. O halde, $\varphi(u^*) \geq \varphi(u_o)$ olduğundan $\varphi(u^*) = \lambda^* \geq \lambda_o$ ve $u^* \geq u_U$ olduğundan $x_{\lambda^*} = x_{\varphi(u^*)} \in$ U dur. Böylece y'nin herhangi bir U komşuluğu ve $\lambda_o \in \Lambda$ için, $x_{\lambda^*} \in$ U olacak şekilde bir $\lambda^* \geq \lambda_o$ vardır. Bu da gösterir ki y, (x_n)'nin bir yığılma noktasıdır.

2.2.6. Teorem.[28] E$\subset$X verilsin.

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow \text{E'de, } x_\lambda \rightarrow x \text{ olacak şekilde bir } (x_n) \text{ ağı vardır.}$$

İspat: x$\in \overline{E}$ ise, x'in her U komşuluğu E ile en az bir x_U noktasında kesişir. O halde (x_U), E içerisinde, x'e yakınsayan bir ağdır.

Tersine (x_n), E içerinde x'e yakınsayan bir ağ ise, o halde y'nin her komşuluğu ((x_n)'nın bir uzantısındaki) E ile kesişir ve buradan $x \in \overline{E}$'dır.

2.2.7. Teorem.[28] $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

f, $x_o \in X$'de süreklidir $\Leftrightarrow$ X'de $x_n \to x_o$ ise Y'de $f(x_n) \to f(x_o)$'dir.

İspat: f'nin x_o'da sürekli olduğunu ve $x_n \to x_o$ olduğunu kabul edelim. $f(x_o)$'ın bir V komşuluğu verilsin, $f^{-1}(V)$ x_o'ın bir komşuluğudur, böylece λ_o için, $\lambda \geq \lambda_o$ olması, $x_n \in f^{-1}(V)$'i gerektirir. Buradan $\lambda \geq \lambda_o$ olması, $f(x_n) \in V$'yi gerektirir, bu da gösteriyor ki, $f(x_n) \to f(x_o)$'dır.

Diğer taraftan, eğer f, x_o'da sürekli değilse, o halde, $f(x_o)$'ın bazı V komşulukları ve x_o'ın herhangi bir U komşuluğu için, $f(U) \not\subset V$ olur. Buradan, x_o'ın her U komşuluğu için, $f(x_U) \notin V$ olacak şekilde bir $x_U \in U$ seçebiliriz. Fakat x_U, X'de bir ağdır ve $f(x_U) \not\to f(x_o)$ iken $x_U \to x_o$'dır.

2.2.8. Tanım. (x_n), X'de bir ağ olsun.

(x_n), bir ultra ağdır $\Leftrightarrow$ X'in her E alt kümesi için, (x_n) ya E'de ya da X-E'dedir.

Yani, eğer bir ultra ağ sıkça E'de ise, o halde kalanlı E'dedir. Özellikle bir topolojik uzaydaki bir ultra ağ kendisinin her yığılma noktasına yakınsamak zorundadır.

Herhangi bir Λ yönlenmiş kümesi ve her $\lambda \in \Lambda$ için, P(λ)=x ile tanımlanan P: $\Lambda \to X$ dönüşümü X üzerinde bir ultra ağdır ve trivial ultra ağ olarak adlandırılır. Trivial olmayan ultra ağların varlığı ispat edilebilir fakat hiçbiri şimdiye kadar açık bir şekilde yapılandırılmadı. Ultra ağlarla ilgili gerçeklerin çoğunun en iyi şekilde geliştirilmesi filtreler kullanılarak yapılmıştır.

2.2.9. Teorem.[28] (x_n), X'de bir ultra ağ ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. O halde $f(x_n)$, Y'de bir ultra ağdır.

İspat: A$\subset$Y ise f^{-1}(A)=X- f^{-1}(Y-A), böylece$\left(x_n\right)$, sonunda ya f^{-1}(A)'dadır ya da f^{-1}(Y-A)'dadır, buradan $f\,(x_n)$'nin sonunda ya A'da ya da Y-A'da olduğu çıkar. Bundan dolayı $f\,(x_n)$ bir ultra ağdır.

2.3 Filtreler ve Filtrelerin Yakınsaklığı

2.3.1. Tanım. X üzerinde tanımlanan bir $\mathcal{F}$ filtresi, aşağıdaki özellikleri sağlayan ve X'in boş olmayan alt kümelerinin boş olmayan bir ailesidir.

a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ 'dir.

b) $F \in \mathcal{F}$ ve $F \subset F'$ ise $F' \subset \mathcal{F}$ 'dir.

F_1 ve F_2 **,** X üzerinde tanımlı filtreler olsun. Bu takdirde;

F_1**,** F_2**'**den daha incedir $\Leftrightarrow$ $F_2 \subset F_1$

X üzerinde tanımlı bir $\mathcal{F}$ filtresi verilsin. Bu takdirde,

F sabittir $\Leftrightarrow$ $\cap F \neq \varnothing$ ve F serbesttir $\Leftrightarrow$ $\cap F = \varnothing$

2.3.2. Tanım. $\mathcal{F}$ 'nin bir β alt ailesi $\mathcal{F}$ 'ye bir filtre tabanı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F}$ 'nin her elemanının β**'**nın en az bir elemanını kapsamasıdır.

Açıktır ki, X'in boş olmayan alt kümelerinin, boş olmayan bir β ailesinin, X üzerindeki bir filtreye taban olması için gerek ve yeter koşul:

$B_1,\ B_2 \in \beta$ ise $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ bulunmasıdır.

2.3.3.Tanım. Bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlı bir $\mathcal{F}$ filtresinin x'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F}$ 'nin, x'in komşuluklar filtresini kapsamasıdır, diğer bir ifadeyle $\mathcal{F}$, x'in komşuluk filtresinden daha incedir.

2.3.4. Tanım. $\mathcal{F}$ 'nin bir x yığılma noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşul her $F\in \mathcal{F}$ 'nin her U$\in$ U_x ile kesişmesidir. Bu nedenle;

x, $\mathcal{F}$ 'nin bir yığılma noktasıdır $\Leftrightarrow$ x$\in \bigcap\{\overline{F} : F\in \mathcal{F}\}$

Açıktır ki; $\mathcal{F}\rightarrow$x ise, x, $\mathcal{F}$ 'nin yığılma noktasıdır.

2.3.5. Teorem.[28] E$\subset$X verilsin.

x$\in \overline{\text{E}}$ $\Leftrightarrow$ E$\in \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $\mathcal{F}$ filtresi vardır ve $\mathcal{F}\rightarrow$x

İspat: y$\in \overline{\text{E}}$ ise, δ={U$\cap$E: U$\in U_y$ } bir filtre tabanıdır. Bu tabanla üretilen filtre E kapsar ve y'ye yakınsar.

Tersine, E$\in$ $\mathcal{F}$ $\rightarrow$x ise y, $\mathcal{F}$ 'nin bir yığılma noktasıdır ve buradan da y$\in \overline{\text{E}}$

2.3.6. Tanım. $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre olsun ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. f ($\mathcal{F}$), Y üzerinde ve $F\in \mathcal{F}$ olacak şekilde, f (F) kümelerinden oluşan bir tabana sahip olan bir filtredir.

2.3.7. Teorem.[28] $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin.

f **,** $x_o\in$X'de süreklidir$\Leftrightarrow$ X'de $\mathcal{F}\rightarrow x_o$ ise Y'de f ($\mathcal{F}$)$\rightarrow f$ (x_o)'dır.

İspat: f **,** x_o**'**da sürekli ve $\mathcal{F}$ $\rightarrow x_o$ olsun. Y'de f (x_o)'ın herhangi bir V komşuluğu verilsin. Bu durumda, X'de x_o'ın bazı U komşulukları için, f (U)$\subset$V'dir. O halde, U$\in \mathcal{F}$ olduğundan V$\in$ f ($\mathcal{F}$) olur.

Tersine, X'de $\mathcal{F}\rightarrow x_o$ olduğunda, Y'de f ($\mathcal{F}$)$\rightarrow f$ (x_o) olsun. X'de x_o**'**ın bütün komşuluklarının $\mathcal{F}$ filtresi verilsin. Bu durumda, f (x_o)'ın her V komşuluğu f ($\mathcal{F}$)'e aittir, böylece x_o'ın bazı U komşulukları için f (U)$\subset$V olur. Bundan dolayı da f **,** x_o**'**da süreklidir.

2.3.8. Tanım. X kümesi üzerindeki bir $\mathcal{F}$ filtresinde daha ince bir filtre yoksa F filtresine ultra filtre denir.

2.3.9. Teorem.[28]X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ filtresinin ultra filtre olması için gerek ve yeter koşul her $E \subset X$ için, ya $E \in \mathcal{F}$ ya da $X\text{-}E \in \mathcal{F}$ 'dir.

İspat: $\mathcal{F}$ bir ultra filtre ve $E \subset X$ olsun. $\mathcal{F}$ 'nin her F elemanı ya E ile ya da X-E ile kesişir. Diyelim ki, $\mathcal{F}$ 'nin her F elemanı için $F \cap E \neq \varnothing$ olsun. O halde,

$$\{ F \cap E : F \in \mathcal{F} \}$$

kümesi, E'yi kapsayan $\mathcal{F}$ 'den daha ince olan bir $\mathcal{G}$ filtresi için bir filtre tabanıdır. $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ 'den kesin olarak daha ince olamayacağından, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ 'dir ve buradan $E \in \mathcal{F}$ 'dir.

Tersine, her $E \subset X$ için $\mathcal{F}$, E'yi veya X-E'yi kapsasın. Eğer, $\mathcal{G}$ kesin olarak $\mathcal{F}$ 'den daha ince ise bazı $A \in \mathcal{G}$ için $A \notin \mathcal{F}$ 'dir. Fakat şarttan dolayı $X\text{-}A \in \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ olduğundan imkânsız bir durum elde ederiz ki, A ve X-A'nın ikisi de $\mathcal{G}$ 'ye ait olur. Bu sebeple, $\mathcal{F}$ ultra filtre olmalıdır.

2.3.10. Tanım. (x_n), X'de bir ağ olsun. $\lambda_o \in \Lambda$ için, $B_{\lambda_o} = \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_o\}$ kümelerini içeren $\mathcal{G}$ filtre tabanı tarafından üretilen filtreye, (x_n) tarafından üretilen filtre denir.

2.3.11. Tanım. $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre ve $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$ olsun. O halde;

$\Lambda_{\mathcal{F}}$, $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ bağıntısıyla yönlendirilmiştir $\Leftrightarrow$ $F_2 \subset F_1$ olmasıdır. Böylece, $P(x, F) = x$ ile tanımlanan $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \to X$ dönüşümü, X üzerinde bir ağdır ve $\mathcal{F}$ üzerindeki ağ tabanı olarak adlandırılır.

2.3.12. Teorem.[28] $X \neq \varnothing$ ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre olmak üzere,

a) Bir $\mathcal{F}$ filtresinin $x \in X$'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F}$ üzerindeki ağ tabanının x'e yakınsamasıdır.

b) Bir (x_n) ağının $x \in X$'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul (x_n) tarafından üretilen filtrenin x'e yakınsamasıdır.

İspat: a) $\mathcal{F} \to$ x olsun. U, x'in bir komşuluğu ise U$\in$ $\mathcal{F}$ 'dir. p$\in$ U seçelim. O halde, (p,U)$\in$ $\Lambda_{\mathcal{F}}$ 'dir ve (q,F)$\geq$(p,U) ise, q$\in$ $F \subset$ U'dur. Bu sebeple $\mathcal{F}$ üzerindeki ağ tabanı x'e yakınsar.

Tersine, $\mathcal{F}$ üzerindeki ağ tabanı x'e yakınsasın. U, x'in bir komşuluğu olsun. O halde, $(p_o, F_o) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ için, p$\in$ U olmasını gerektiren, (p, F)$\geq (p_o, F_o)$ vardır. Bununla birlikte $F_o \subset$ U'dur; aksi takdirde, bir q$\in$ F_o-U vardır ve (q, F_o) $\geq (p_o, F_o)$ dir, fakat q$\notin$ U'dur. Buradan U$\in$ $\mathcal{F}$ ve böylece $\mathcal{F} \to$ x'dir.

b) Bir (x_n) ağının x'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul x'in her komşuluğunun, (x_n)'nın bir uzantısını içermesidir. (x_n)'nın uzantısı, (x_n) tarafından üretilen filtre için bir taban olduğundan sonuç çıkar.

Benzer sonuçlar yığılma noktaları, alt ağlar ve ince filtreler arasındaki ilişkiler ve ultra ağlar ve ultra filtreler arasındaki ilişkiler için de doğrudur.

3. BÖLÜM

FUZYY TOPOLOJİK UZAYLARI

3.1. Latis

Boş olmayan bir küme üzerinde değişik bağıntılar tanımlamak mümkündür, üzerinde tanımlanan bu bağıntılara göre de kümeye değişik isimler verilir. Şimdi bazı önemli bağıntıları inceleyelim:

3.1.1. Tanım. $X \neq \emptyset$ olsun. $X \times X$'in boş olmayan her alt kümesine X'de bir bağıntı denir.

3.1.2. Tanım.[30] $X \neq \emptyset$ ve "$\prec$" X üzerinde bir bağıntı olsun.

(i) $\forall x \in X$ için $x \prec x$ ise "$\prec$" bağıntısı yansıyandır.

(ii) $\forall x,y \in X$ için $x \prec y$ ve $y \prec x$ iken $x=y$ ise "$\prec$" bağıntısı ters-simetriktir.

(iii) $\forall x,y,z \in X$ için $x \prec y$ ve $y \prec z$ iken $x \prec z$ ise "$\prec$" bağıntısı geçişkendir.

3.1.3. Tanım.[30] $X \neq \emptyset$ ve "$\prec$" X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\prec$ bağıntısı X üzerinde yansıyan ve geçişken ise $\prec$ bağıntısına X kümesi üzerinde bir ön sıralama bağıntısı, X kümesine de ön sıralı küme denir. Ön sıralı bir kümede x, y iki elemanı için $x \prec y$ ya da $y \prec x$ ise x ve y' ye karşılaştırılabilir denir aksi halde karşılaştırılamaz denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

$(X, \prec)$ ön sıralı bir küme ve "$\prec$" de X üzerinde ön sıralama bağıntısı olsun. Eğer $\prec$ bağıntısı X üzerinde ters-simetrik ise $\prec$ bağıntısına X üzerinde kısmi sıralama bağıntısı, X'e de kısmi sıralı küme denir.

$(X, \prec)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X kümesinin bütün elemanları birbiriyle karşılaştırılabilir ise x kümesine tam sıralı küme veya zincir denir.

$(X, \prec)$ kısmi sıralı bir küme, $A \subset X$ ve $A \neq \emptyset$ olsun. $\forall a \in A$ için $a_0 \prec a$ olacak şekilde bir $a_0 \in A$ varsa X kümesine iyi sıralı küme denir.

3.1.4. Tanım.[30] X ön sıralı bir küme, $A \subset X$ ve $a \in A$ olsun.

(i) $b \prec a$ ve $b \neq a$ olacak şekilde bir $b \in A$ yoksa a'ya A'nın bir minimum elemanı denir.

(ii) $\forall b \in A$ için $b \geq a$ ise a'ya A'nın en küçük elemanı denir ve $\min A = a$ ile gösterilir.

(iii) $a \prec b$ ve $b \neq a$ olacak şekilde bir $b \in A$ yoksa a'ya A'nın bir maksimum elemanı denir.

(iv) $\forall b \in A$ için $b \prec a$ ise a'ya A'nın en büyük elemanı denir ve $\text{maks}A = a$ ile gösterilir.

3.1.5. Önerme.[30] $X \neq \varnothing$ olsun. O halde;

X iyi sıralıdır $\Rightarrow$ X zincirdir $\Rightarrow$ X kısmi sıralıdır $\Rightarrow$ X ön sıralıdır

İspat: İyi sıralı, zincir, kısmi sıralı ve ön sıralı küme tanımlarından açıktır.

3.1.6. Tanım.[30] X ön sıralı bir küme ve $A \subset X$ olsun.

(i) $\forall\, a \in A$ için $a \prec b$ ise b'ye A'nın bir üst sınırı,

(ii) $\forall\, a \in A$ için $b \prec a$ ise b'ye A'nın bir alt sınırı denir.

3.1.7. Tanım.[30] X kısmi sıralı bir küme, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer;

(i) x, A'nın bir üst sınırı

(ii) y, A için bir üst sınır ise $x \prec y$

şartları sağlanıyor ise x'e A'nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve supA ile gösterilir.

3.1.8. Tanım.[30] X kısmi sıralı bir küme, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer;

(i) x, A'nın bir alt sınırı

(ii) y, A için bir alt sınır ise $y \prec x$

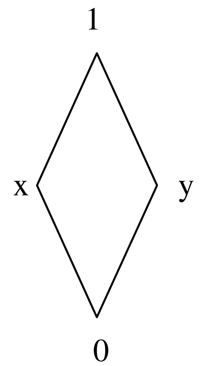
şartları sağlanıyor ise x' e A' nın en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve infA ile gösterilir.

3.1.9. Tanım.[30] X kısmi sıralı bir küme olsun. X'in infimumu ve supremumu X'in içinde ise X kümesine latis denir. Bundan böyle latis L ile gösterilecektir.

3.1.10. Örnek.

(i) [0,1] reel birim aralığı kendi kısmi sıralama bağıntısına (aslında tam sıralama bağıntısı Önerme.3.1.5.) göre tipik bir latis örneğidir.

(ii) L={0,x,y,l} alalım ve L üzerinde aşağıdaki gibi bir kısmi sıralama tanımlayalım:



x, y$\in$ L için sup{x,y}=1$\in$ L ve inf{x,y}=0$\in$ L olduğundan L kümesi latisdir. Bu latis diamond tipi latis olarak adlandırılır ve L-fuzzy topolojide sıkça kullanılır.

3.1.11. Tanım.[30] L bir latis ve x$\in$ L olsun. Bu takdirde;

(i) x <1 ve her y, z$\in$ L için $x \geq y \wedge z \Rightarrow x \geq y$ veya $x \geq z$ ise x asaldır denir.

(ii)x <1 ve her y, z$\in$ L için $x = y \wedge z \Rightarrow x = y$ veya $x = z$ ise x indirgenemezdir denir.

(iii) L'nin bir birleşik indirgenemez elemanına L'de bir molekül denir.

(iv) L-{0}'daki bir minimal elemana L'de bir atom denir.

L'deki bütün moleküllerin kümesi M(L) ile gösterilir.

3.1.12. Önerme.[30] L bir latis olsun. Bu takdirde,

(i) L'nin her atomu bir moleküldür.

(ii) L'nin her asal elemanı indirgenemezdir.

İspat:(i): x, L'de bir atom ve $x = y \vee z$ olsun. $x \neq y$ ise x > y, z'dir. y, $z \neq 0$ olduğu kesindir. O halde, bu L-{0}'ın minimalliği ile çelişir.

(ii): x, L'nin asal elemanı ve $x = y \wedge z$ olsun, bu durumda $x \geq y$ veya $x \geq z$ olur. Fakat $x = y \wedge z \leq y$, z buradan da x = y veya x = z'dir. x, L'nin asal elemanı ve $x \neq 1$ olduğundan x indirgenemezdir.

3.2. Fuzzy Kümeleri ve Fuzzy Kümeleri Üzerinde İşlemler

3.2.1. Tanım.[22] $X \neq \emptyset$ olsun. X'den I = [0,1] kapalı aralığına tanımlanan her bir fonksiyona X'de bir fuzzy kümesi ya da kısaca F-kümesi denir ve bu fonksiyonların kümesi I^X ile gösterilir. Yani $\forall x \in X$ için, $f_A : X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen,

$$A = \{(x, f_A(x)) : x \in X\}$$

sıralı ikili kümesine X'de bir A fuzzy kümesi denir. $f_A(x)$ değerine x'in A'daki üyelik derecesi (uygunluk derecesi ya da gerçeklik derecesi) denir.
Bir ikiliden oluşan A F-kümesi bir fonksiyon olduğundan ($f_A : X \rightarrow I = [0, 1]$) bundan böyle kimi zaman f_A yerine A, $f_A(x)$ yerinede A(x) alabiliriz.

3.2.2. Tanım.[30] $A \in I^X$ olsun. A'nın sıfır değeri almadığı X'in alt kümesine A F-kümesinin desteği denir ve $\text{supp}A = \{x \in X : A(x) > 0\}$ ile gösterilir.
Yukarıda yaptığımız tanımlar ışığında X ve $\emptyset$ kümeleri üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan F-kümeleridir:

$$\forall x \in X \text{ için } f_X(x) = 1, \quad \forall x \in X \text{ için } f_\emptyset(x) = 0$$

Kümeler cebirinde kullandığımız alt küme, eşitlik, birleşim, kesişim sembolleri yerine F-kümeleri için sırası ile $\leq$, =, $\vee$, $\wedge$ sembolleri kullanılacaktır.[33]
Yukarıda yaptığımız tanımları şimdide L-fuzzy küme kavramına genişletelim.

3.2.3. Tanım.[30] $X \neq \emptyset$ ve sıralı bir küme, L bir latis olsun. X'den L'ye tanımlanan bütün fonksiyonlar X üzerinde bir L-fuzzy kümesidir ve bu fonksiyonların kümesi L^X ile gösterilir. Yani $\forall x \in X$ için,

$$f_A : X \rightarrow L$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$A = \{(x, f_A(x)) : x \in X\}$$

sıralı ikili kümesine X de bir L-fuzzy kümesi denir. İleriki bölümlerde zaman zaman Latis Fuzzy topolojik uzaylardaki bazı tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

3.2.4. Tanım.[33] $X \neq \varnothing$ ve $A,B \in I^X$ olsun. A ve B kümeleri için aşağıdaki işlemleri tanımlayabiliriz

1. $\forall x \in X$ için $(A \wedge B)(x)=\min\{A(x), B(x)\}$
2. $\forall x \in X$ için $(A \vee B)(x)=\text{maks}\{A(x), B(x)\}$
3. $\forall x \in X$ için $A \leq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x)$
4. $\forall x \in X$ için $A^c(x)=1-A(x)$
5. $\forall x \in X$ için $f: X \to Y$, $A \in I^x$, $B \in I^Y$ olsun. Bu durumda $f(A)$, Y'de aşağıdaki gibi tanımlanan bir kümedir;

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup\{A(x): x \in f^{-1}(y)\} & ; f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & ; f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

ve $f^{-1}(B)$, X'de aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x)),\ x \in X$$

6. $A \in I^x$, $B \in I^Y$ olsun. Bu durumda $X \times Y$'de $A \times B$ ile gösterilen fuzzy kümesi

$\forall x, y \in X \times Y$ için $(A \times B)(x,y)=\min\{A(x), B(x)\}$ şeklindedir.

$\{A_i : i \in I\}$ F-kümeler ailesi olmak üzere $\bigwedge_{i \in I} A_i = \inf\{A_i(x)\}$ ve $\bigvee_{i \in I} B_i = \sup\{B_i(x)\}$ dir.

3.2.5. Örnek. X={x,y,z,t} ve X'deki iki alt fuzzy kümesi,

A={(x/0, 4), (y/0, 9), (z/0, 3), (t/0, 0)}

B={(x/0, 6), (y/0, 5), (z/0, 2), (d/1, 0)}

olarak verilsin. Şimdi A ve B F-kümelerinin kesişim ve birleşim kümelerini verelim:

$A \wedge B$={(x/0, 4), (y/0, 5), (z/0, 2), (t/0, 0)}

$A \vee B$={(x/0, 6), (y/0, 9), (z/0, 3), (d/1, 0)}

A^c=1-A={(x/0, 6), (y/0, 1), (z/0, 7), (z/1, 0)}

B^c=1-B={(x/0, 4), (y/0, 5), (z/0, 8), (t/0, 0)}

3.2.6. Özellik.[33] $X \neq \varnothing$ ve $A, B \in I^X$ olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \leq B \Leftrightarrow B^c \leq A^c$
2. $(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$ ve $(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$
3. $(A^c)^c = A$

4. $A \leq A^c$ veya $A^c \leq A$

5. $X^c = \varnothing$ ve $\varnothing^c = X$

6. $\left(\underset{i\in I}{\wedge} A_i\right)^c = \underset{i\in I}{\vee} A_i^c$

7. $\left(\underset{i\in I}{\vee} A_i\right)^c = \underset{i\in I}{\wedge} A_i^c$

3.2.7. Teorem.[14] $X \neq \varnothing$ ve $A \in I^X$ olsun. $A \wedge A^c = \varnothing$ ve $A \vee A^c = X$ olmak zorunda değildir.

İspat: $A \wedge A^c = \varnothing$ olduğunu gösterelim:

$A \in I^X$ olmak üzere $A^c = 1 - A$ ve $A^c \in I^X$ olduğunu biliyoruz. O halde;

(i) A=X olsun. Bu durumda $A = X = \{(x,1): x \in X\}$ olur. $A^c = X^c = \varnothing = \{(x,0):\ x \in X\}$ olur. O halde $A \wedge A^c = A \wedge \varnothing = \varnothing$ olur.

(ii) $A = \varnothing$ olsun. O halde $A \wedge A^c = \varnothing \wedge A^c = \varnothing$

(iii) $A \neq \varnothing$ ve $A \neq X$ olsun. Kabul edelim ki $A \wedge A^c = \varnothing$ olsun. Bu durumda üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için $f_{A \wedge A^c}(x) = f_{\varnothing} = 0 = \min\{f_A(x), f_{A^c}(x)\}$ elde edilir. Burada iki durum söz konusudur;

a. $\forall x \in X$ için $f_A(x) = 0$ ise $A = \varnothing$ olur ki bu da kabulümüz ile çelişir. O halde $A \wedge A^c \neq \varnothing$ olmalıdır.

b. $\forall x \in X$ için $f_{A^c}(x) = 0$ $A^c = \varnothing$ olur ki bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $A \wedge A^c \neq \varnothing$ olmalıdır.

$A \vee A^c = X$ olmak zorunda olmadığı da benzer şekilde ispat edilebilir.

3.2.8. Örnek. 3.2.5. Örnekten,

$A \vee A^c = \{(x/0, 6), (y/0, 9), (z/0, 7), (t/1, 0)\} \neq X$

$A \wedge A^c = \{(x/0, 4), (y/0, 1), (z/0, 3), (t/0, 0)\} \neq \varnothing$ olduğu görülmektedir.

3.2.9. Teorem.[16] $X \neq \varnothing$ ve $A, B \in I^X$ olsun.

(i) $A \wedge B$ F-kümesi, A ve B F-kümeleri tarafından kapsanan en büyük F-kümesidir.

(ii) $A \vee B$ F-kümesi, A ve B F-kümelerini kapsayan en küçük F-kümesidir.

İspat: (i): A ve B kümelerini temsil eden üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olsun.

$A \wedge B=K \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f_K(x)=\min\{f_A(x), f_B(x)\}$ olduğundan $K\leq A$ ve $K\leq B$'dir. Kabul edelim ki, A ve B tarafından kapsanan en büyük F-küme D olsun. O halde, $\forall x\in X$ için, $f_K(x)\leq f_D(x)\leq f_A(x)$, $f_K(x)\leq f_D(x)\leq f_B(x)$ olur. Bu durumda $f_K(x)=f_{A\wedge B}(x)=\min\{f_A(x), f_B(x)\}\geq f_D(x)$'dir. Yani, $\forall x\in X$ için $f_K(x)\geq f_D(x)$ dir. O halde, $K=D=A\wedge B$ olur.

(ii): İspat (i) şıkkına benzer şekilde yapılır.

3.2.10. Özellik.[14] $X\neq\varnothing$ ve $A, B\in I^X$ için aşağıdakiler doğrudur.

(i) $A\vee\varnothing=A$, $A\wedge\varnothing=\varnothing$, $A\vee X=X$, $A\wedge X=X$

(ii) $A\vee B=B\vee A$, $A\wedge B=B\wedge A$, $A\vee A=A\wedge A=A$

(iii)$A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$, $A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$

(iv)$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$, $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

(v) $A\leq B\Rightarrow A\vee B=B$, $A\leq B\Rightarrow A\wedge B=A$

3.2.11. Tanım.[22] $X\neq\varnothing$ olsun. X'in bir F-kümesi, eğer $x\in X$ noktası hariç her $y\in X$'de sıfır değerini alıyorsa bu F-kümesine X'de bir Fuzzy nokta veya kısaca F-nokta denir. Yani; $0<\lambda\leq 1$ olmak üzere X'de bir x_λ noktası, üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan bir F-kümesidir:

$$x_\lambda(y)=\begin{cases} 0 \ , & x=y \\ \lambda \ , & x\neq y \end{cases}$$

X'in bütün x_λ F-noktalarının kümesi χ ile gösterilir.

x_λ F-noktası bir A F-kümesi tarafından kapsanır veya A'ya aittir $\Leftrightarrow$ $\lambda\leq A(x)$

Açıktır ki; her A F-kümesi A'ya ait olan bütün F-noktalarının birleşimi olarak ifade edilebilir.

F-noktasının sıfır değeri almadığı $x\in X$ noktasına F-noktasının desteği denir.

3.2.12. Tanım.[30] $X\neq\varnothing$ olsun. X'in bir L-Fuzzy kümesi, eğer $x\in X$ noktası hariç her $y\in X$'de sıfır değerini alıyorsa bu L-Fuzzy kümesine X'de bir L-Fuzzy nokta veya kısaca LF-nokta denir. Yani; $0<\lambda\leq 1$ olmak üzere X'de bir x_λ noktası, üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan bir L-Fuzzy kümesidir:

$$x_\lambda(y)= \begin{cases} 0 & , x=y \\ \lambda & , x\neq y \end{cases}$$

X in bütün x_λ LF-noktalarının kümesi L(χ) ile gösterilir.

3.3 Fuzzy Topolojisi

Fuzzy topolojik uzaylarla ilgili ilk tanımı 1968 yılında C.L. Chang vermiştir. Chang'a göre bir fuzzy topolojik uzay, X bir küme ve τ onun üzerinde bir fuzzy topolojisi olan (X,τ) şeklindeki bir ikilidir.

3.3.1. Tanım.[4] $X\neq\varnothing$ ve $\tau\subseteq I^X$ olmak üzere;

(FT_1) $\bar{0},\bar{1}\in\tau$. $\bar{0},\bar{1}$ ile sırasıyla $\chi_\varnothing,\chi_X$ karakteristik fonksiyonlar kastediliyor.

(FT_2) A, B$\in\tau\Rightarrow A\wedge B\in\tau$

(FT_3) $\{A_j : j\in J\}\leq\tau\Rightarrow\vee\{A_j : j\in J\}\in\tau$

aksiyomlarını sağlayan (X,τ) ikilisine bir fuzzy topolojik uzay denir. Bundan sonra fuzzy topolojik uzayı kısaca f.t.u. ile göstereceğiz.
Burada τ'nun her elemanına F-açık kümesi ve tümleyeni F-açık olan kümeye de F-kapalı küme denir.

3.3.2. Örnek. X={a, b} olsun. X üzerinde bir A F-kümesi A={a/(0, 5), b/(0, 4)} olarak tanımlansın. Bu takdirde τ={$\bar{0},\bar{1}$, A} bir fuzzy topolojisidir ve (X,τ) ikilisi de bir fuzzy topolojik uzaydır.

3.3.3. Örnek. (X, T) bir f.t.u. , $\mu\in I^X$ ve $A\subseteq X$ olsun. O halde;

T_1 ={X,$\varnothing$} bir fuzzy topolojisidir ve (X,T_1) ayrık olmayan f.t.u. olarak adlandırılır

$T_2=I^X$ bir fuzzy topolojisidir ve (X,T_2) ayrık f.t.u. olarak adlandırılır

T_3={$\mu\in I^X$: supp(μ)$\in$ T}

T_4={1_A : A$\in$ T} kümeleri birer fuzzy topolojisidir.

$A\subseteq X$ için 1_A, X'in {0, 1} üzerine olan karakteristik fonksiyonudur.

3.3.4. Örnek. X bir sonsuz küme olmak üzere;

τ_∞={ $\mu \in I^X$: supp(μ^c) sonludur} $\vee$ { $\varnothing$ } kümesi X üzerinde bir fuzzy topolojisidir ve X üzerinde sonlu tümleyenler fuzzy topolojisi olarak adlandırılır.

3.3.5. Örnek. X={a, b, c} olsun.

A={(a/0, 2), (b/0, 1), (c/0, 4)}

B={(a/0, 5), (b/0, 3), (c/0, 7)}

C={(a/0, 5), (b/0, 7), (c/0, 8)}

D={(a/0, 6), (b/0, 8), (c/0, 9)}

kümeleri X'de F-kümeleri olsun. Bu durumda τ={ X, $\varnothing$, A, B, C, D} ailesinin X üzerinde bir Fuzzy topolojik yapı meydana getirdiğini gösterelim.

(FT_1) X, $\varnothing \in \tau$ olduğu açıktır.

(FT_2) $\varnothing \in \tau$ F-kümesinin τ'ya ait F-kümeleri ile arakesiti $\varnothing$; X $\in \tau$ F-kümesinin τ'ya ait F-kümeleri ile arakesiti ise arakesite giren F-kümenin kendisini vereceği açıktır.

$A \wedge B$={(a/0, 2), (b/0,1), (c/0, 4)}=A $\in \tau$

$A \wedge C$={(a/0, 2), (b/0,1), (c/0, 4)} =A $\in \tau$

$A \wedge D$={(a/0, 2), (b/0,1), (c/0, 4)} =A $\in \tau$

$B \wedge C$={(a/0, 5), (b/0, 3), (c/0, 7)}=B $\in \tau$

$B \wedge D$={(a/0, 5), (b/0, 3), (c/0, 7)} =B $\in \tau$

$C \wedge D$={(a/0, 5), (b/0, 7), (c/0, 8)}=C $\in \tau$

$A \wedge B \wedge C$={(a/0, 2), (b/0, 1), (c/0, 4)} =A $\in \tau$

$A \wedge B \wedge D$={(a/0, 2), (b/0, 1), (c/0, 4)} =A $\in \tau$

$B \wedge C \wedge D$={(a/0, 5), (b/0, 3), (c/0, 7)} =B $\in \tau$

$A \wedge B \wedge C \wedge D$={(a/0, 2), (b/0, 1), (c/0, 4)} =A $\in \tau$

(FT_3) $\varnothing \in \tau$ F-kümesinin τ'ya ait F-kümeleri ile birleşimi, birleşime giren F-kümeyi; X $\in \tau$ F-kümesinin τ'ya ait F-kümeler ile birleşimi de X F-kümesini vereceği açıktır.

$A \vee B$={(a/0, 5), (b/0, 3), (c/0, 7)}=B $\in \tau$

$A \vee C$={(a/0, 5), (b/0, 7), (c/0, 8)}=C $\in \tau$

$A \vee D$={(a/0, 6), (b/0, 8), (c/0, 9)}=D $\in \tau$

$B \vee C$={(a/0, 5), (b/0, 7), (c/0, 8)}=C $\in \tau$

$B \vee D=\{(a/0,6), (b/0,8), (c/0,9)\} = D \in \tau$

$C \vee D=\{(a/0,6), (b/0,8), (c/0,9)\} = D \in \tau$

$A \vee B \vee C=\{(a/0,5), (b/0,7), (c/0,8)\}=C \in \tau$

$A \vee B \vee D=\{(a/0,6), (b/0,8), (c/0,9)\} = D \in \tau$

$B \vee C \vee D=\{(a/0,6), (b/0,8), (c/0,9)\} = D \in \tau$

$A \vee B \vee C \vee D=\{(a/0,6), (b/0,8), (c/0,9)\} = D \in \tau$

Bu durumda τ ailesi X üzerinde bir Fuzzy topolojik yapı meydana getirir. O halde (X,τ) ikilisi bir f. t. u.'dır.

X üzerinde sayılabilir çoklukta topoloji kurulabilir iken sonsuz sayıda Fuzzy topolojisi kurulabilir. Çünkü a, b, $c \in X$ olmak üzere f_A üyelik fonksiyonu I'da sonsuz çoklukta değer alır.

3.3.6. Tanım.[22] (X,τ) bir f.t.u. ve A, $B \in I^X$ olsun. Bu takdirde;

(i) $A(x) > B^c(x)$ ya da A(x) + B(x) > 1 olacak şekilde bir $x \in X$ varsa A ve B F-kümeleri çakışımsıdır denir ve AqB ile gösterilir.

(ii) $A \in I^X$ ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde;

$\lambda > A^c(x)$ ya da λ + A(x) > 1 ise λ ve A F-kümesi çakışımsıdır denir ve λqA ile gösterilir.

3.3.7. Teorem.[22] $X \neq \emptyset$, A, $B \in I^X$ ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde;

(i) $A \leq B \Leftrightarrow A \not{q}\, B^c$

(ii) $x_\lambda \in A \Leftrightarrow x_\lambda \not{q}\, A^c$

İspat: (i) $A \leq B \Rightarrow$ her $x \in X$ için $A(x) \leq B(x)$

$\Rightarrow 1 + A(x) \leq B(x) + 1$

$\Rightarrow 1 + A(x) - B(x) \leq 1$

$\Rightarrow A(x) + B^c(x) \leq 1$

$\Rightarrow A \not{q}\, B^c$

Tersine, $A \not{q}\, B^c \Rightarrow A(x) + B^c(x) \leq 1$

$\Rightarrow A(x) \leq 1 - B^c(x)$

$\Rightarrow A(x) \leq B(x)$

$\Rightarrow A \leq B$

(ii): (i)'deki gibi yapılır.

3.3.8. Tanım.[22] (X,τ) bir f.t.u. ve $A\in I^X$ olsun. Bu takdirde;

(i) A F-kümesinin kapanışı $\overline{A}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{A}=\inf\{B:\ A\leq B,\ B^c\in\tau\}$$

(ii) A F-kümesinin içi A^o ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A^o=\sup\{B:\ B\leq A,\ B\in\tau\}$$

3.3.9. Örnek. A, B ve C I^X'de aşağıdaki gibi tanımlanan fuzzy kümeleri olsun:

$$A(x)=\begin{cases} 0 & 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x\leq \frac{1}{4} \\ -4x+2 & \frac{1}{4}\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$$C(x)=\begin{cases} 0 & 0\leq x\leq \frac{1}{4} \\ (4x-1)/3 & \frac{1}{4}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Bu takdirde, $\tau=\{\bar{0},\ \bar{1},\ A,\ B,\ A\vee B\}$ bir topolojidir. $\overline{A}=B^c$, $\overline{A\vee B}=\bar{1}$, $(A^c)^o=B$, $(B^c)^o=A$ ve $\left[(A\vee B)^c\right]^o=\bar{0}$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz.

3.3.10. Teorem.[23] (X,τ) bir f.t.u. ve $A\in I^X$ olsun. O halde,

$$\text{Her } \mu\in\tau \text{ için } \mu qA \Leftrightarrow \mu q\overline{A}$$

3.3.11. Tanım. (X,τ) bir f.t.u. ve $\beta\leq\tau$ olsun. Her $A\in\tau$ için $A=\bigvee_{j\in J} B_j$ olacak şekilde $B_j\leq\beta$ alt ailesi varsa, β'ya τ için bir taban denir.

3.3.12. Teorem.[14] (X, τ) bir f.t.u. ve $\beta \leq \tau$ olsun.

β, τ için bir tabandır $\Leftrightarrow$ (i) $X = \underset{j \in J}{\vee} B_j$

(ii)Her B_1, $B_2 \in \beta$ ve her $x_\lambda \leq B_1 \wedge B_2$ için $x_\lambda \leq B \leq B_1 \wedge B_2$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır.

İspat: 3.3.10 Tanımdan açıktır.

3.3.13. Tanım. (X, τ) bir f.t.u. ve $A \leq \tau$ olsun. Eğer A'nın elemanlarının her sonlu kesişiminin meydana getirdiği aile, τ için bir taban teşkil ediyorsa A'ya τ için bir alt taban denir.

3.3.14. Tanım. (X, τ) bir f.t.u. ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde, x_λ F-noktasını içeren her $A \in \tau$ F-kümesini kapsayan V F-kümesine x_λ F-noktasının Fuzzy komşuluğu denir.

V, x_λ'nın F-komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists A \in \tau \ni x_\lambda \leq A \leq V$

x_λ'nın tüm F-komşuluklarının ailesi $\mathcal{V}(x_\lambda)$ ile gösterilir.

3.3.15. Tanım. (X, τ) bir f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun. A F-kümesini içeren her $A \in \tau$ F-kümesini kapsayan V F-kümesine, A F-kümesinin F-komşuluğu denir.

3.3.16. Teorem.[16] (X, τ) bir f.t.u. ve $A \in \tau$ olsun.

A F-açıktır $\Leftrightarrow$ $B \leq A$ olacak şekilde her $B \in I^X$'nin F-komşuluğu olmasıdır

İspat: 3.3.14. Tanımdan açıktır.

3.3.17.Teorem.[16] (X, τ) bir f.t.u. ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu durumda x_λ'nın F-komşuluklar ailesi $\mathcal{V}(x_\lambda)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Her $V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ için $x_\lambda \leq V$

(ii) Her $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ için $V_1 \wedge V_2 \in \mathcal{V}(x_\lambda)$

(iii)$V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ ve $V \leq K \Rightarrow K \in \mathcal{V}(x_\lambda)$

(iv) $V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ olsun. $T \leq V$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ vardır öyle ki, her $y_\lambda \leq T$ F-noktası için $V \in \mathcal{V}(y_\lambda)$'dır.

İspat: (i) Her $V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ olsun. Bu durumda $x_\lambda \leq A \leq V$ olacak şekilde $A \in \tau$ vardır. O halde $x_\lambda \leq V$ olur.

(ii) Her $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ olsun. Bu takdirde $x_\lambda \leq A_1 \leq V_1$ ve $x_\lambda \leq A_2 \leq V_2$ olacak şekilde $A_1, A_2 \in \tau$ vardır. Buradan $x_\lambda \leq A_1 \wedge A_2$ ve $A_1 \wedge A_2 \in \tau$'dur. $x_\lambda \leq A_1 \wedge A_2 \leq V_1 \wedge V_2$ olup buradan $V_1 \wedge V_2 \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ olur.

(iii) $V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ ve $V \leq K$ olsun. Bu durumda $x_\lambda \leq A \leq V \leq K$ olacak şekilde $A \in \tau$ vardır. Buradan $x_\lambda \leq A \leq K$ olacak şekilde $A \in \tau$ bulunmuş olur. Bu durumda $B \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ olur.

(iv) $V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ olsun. Bu durumda $x_\lambda \leq T \leq V$ olacak şekilde $T \in \tau$ vardır. $y_\lambda \leq T$ ve $T \in \tau$ olduğundan $T \in \mathcal{V}(y_\lambda)$ olur. $T \leq V$ olduğundan (iii)'den $V \in \mathcal{V}(y_\lambda)$ olur.

3.3.18. Tanım.[23] (X, τ) bir f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun. Bu takdirde;

$x_\lambda q V$ ve $V \leq A$ olacak şekilde $V \in \tau$ varsa A, x_λ F-noktasının çakışımsı F-komşuluğudur ya da kısaca Q-komşuluğudur denir. x_λ'nın Q-komşuluklarının kümesi $N^Q_{x_\lambda}$ ile gösterilir.

$x_\lambda \in \overline{A} \Leftrightarrow x_\lambda$'nın her Q-komşuluğu A ile çakışımsıdır.

$x_\lambda \in A^o \Leftrightarrow x_\lambda$, A tarafından kapsanan bir V komşuluğuna sahiptir.

3.3.19. Teorem.[23] (X, τ) bir f.t.u. ve $A \in I^X$ ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde;

A açıktır $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda q A$ için $B \leq A$ olacak şekilde $\exists B \in N^Q_{x_\lambda}$ vardır.

Bir F-noktasının Q-komşuluğunun bu F-noktasını içermesi gerekmez. Seçilen noktayı dışarıda bırakabilen benzer bir komşuluk yapısı 1916'da M. Frechet tarafından incelendi ve W. Sierpinski tarafından (V)-uzayı teorisine özetlendi. Fakat temel bir bilgi olan bir kümenin kendi tümleyeni ile kesişmemesi özelliği F-kümelerinde korunmaz.

3.3.20. Tanım.[21] (X,τ) bir f.t.u., $x_\lambda, y_\varepsilon \in \chi$ ve $x \neq y$ olsun. Bu takdirde, $\mu \wedge \eta = \varnothing$ olacak şekilde $\exists\mu \in N^{Q}_{x_\lambda}$ ve $\exists\eta \in N^{Q}_{y_\varepsilon}$ varsa bu f.t.u.'a bir fuzzy Hausdorff uzayı veya kısaca FT_2 denir.

3.3.21. Tanım.[30] (X,τ) bir f.t.u., $A \in I^X$ ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde, her $\mu \in N^{Q}_{x_\lambda}$ için, μ qA ise x_λ A'nın bir adherent noktasıdır ve $A \infty x_\lambda$ ile gösterilir.

3.3.22. Tanım.[23] (X,τ) bir f.t.u. , $\mathcal{V}(x_\lambda)$, x_λ'nın F-komşuluklar ailesi ve $E(x_\lambda)$, $\mathcal{V}(x_\lambda)$'nın bir alt ailesi olsun. Bu takdirde, $\mathcal{V}(x_\lambda)$'nın her V elemanına karşılık $E \leq V$ olacak şekilde bir $E \in E(x_\lambda)$ varsa, $E(x_\lambda)$ ailesine x_λ F-noktasının F-komşuluklar tabanı ya da F-yerel tabanı denir.

3.3.23. Teorem.[14] (X,τ) bir f.t.u. ve β, τ'nun alt ailesi olsun. Bu takdirde, β'nın τ'ya taban olması için gerek ve yeter koşul her $x_\lambda \in X$ için $E(x_\lambda)=\{E \in \beta : x_\lambda \in E\}$ ailesinin x_λ F-noktası için komşuluklar F-tabanı olmasıdır.

3.3.24 Tanım.[14] (X,τ) bir f.t.u. olsun. Eğer her $x_\lambda \in \chi$ F-noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa (X,τ) f.t.u.'na birinci sayılabilirdir denir.

3.3.25. Teorem.[23] (X,τ) birinci sayılabilir f.t.u. ise X'deki her x_λ F-noktası iç-içe azalan komşuluklar tabanına sahiptir.

İspat: (X,τ) birinci sayılabilir f.t.u. olduğundan x_λ'nın $\beta(x_\lambda)=\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ şekline sayılabilir F-komşuluklar tabanı vardır. Kabul edelim ki bunlar iç-içe azalan olmasın. Bu takdirde;

$$E_1 = B_1$$

$$E_2 = B_1 \wedge B_2$$

.

.

$$E_n = \bigwedge_{i=1}^{n} B_i$$

şeklinde tanımlanırsa elde edilen $\{ E_1, E_2, \dots, E_n \}$ kümesi istenileni sağlar.

3.3.26. Tanım.[14] (X,τ) birinci sayılabilir f.t.u. olsun. (X,τ) f. t. u. sayılabilir bir tabana sahip ise, bu uzaya ikinci sayılabilir f. t. u. uzaydır denir.

3.3.27. Teorem.[14] İkinci sayılabilir her Fuzzy topolojik uzayı, birinci sayılabilir Fuzzy topolojik uzayıdır.

İspat: (X,τ) ikinci sayılabilir bir f.t.u ve $\beta \subset \tau$ tabanı verilsin. (X,τ) f.t.u. ikinci sayılabilir olduğundan β sayılabilirdir. Her $x_\lambda \in X$ noktası için

$$E(x_\lambda)=\{B \subset X : x \in B \in \beta\}$$

ailesi, x noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Buradan $E(x) \subset \beta$ olduğundan E(x) ailesi de sayılabilirdir. Sonuç olarak 3.3.24. Tanım gereği (X,τ) uzayı birinci sayılabilirdir.

3.3.28. Tanım.[14] (X,τ) bir f.t.u., $x_\lambda \in \chi$ ve $A \in I^X$ olsun. Bu takdirde;

x_λ, A'nın kapanış F-noktasıdır $\Leftrightarrow$ Her $B \in \tau$ ve her $x_\lambda \in B$ için $(A \wedge B)(y_\lambda) \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $y_\lambda \in \chi$ vardır.

3.3.29. Tanım.[14] (X,τ) bir f.t.u. , $x_\lambda \in \chi$ ve $A \in I^X$ olsun. Bu takdirde;

x_λ, A'nın yığılma F-noktasıdır $\Leftrightarrow$ Her $B \in \tau$, $x_\lambda \in B$ ve üyelik fonksiyonu, her $y_\lambda \in \chi$ olmak üzere;

$$f_{A_{x_\lambda}} = \begin{cases} 0 & , \ x=y \\ f_A(y_\lambda) & , \ x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlı A_{x_λ} F-kümesi için $B \wedge A_{x_\lambda} \neq \varnothing$ olmasıdır. A'nın bütün yığılma F-noktalarının kümesi cl(A) ile gösterilir.

3.3.30. Teorem.[14] Her yığılma F-noktası kapanış F-noktasıdır fakat bunun tersi doğru değildir.

İspat: $X \neq \varnothing$, $A \in I^X$ ve A'nın yığılma F-noktalarının kümesi cl(A) olsun. Her yığılma F-noktasının kapanış F-noktası olduğunu gösterelim:

Her $x_\lambda \in cl(A)$ olsun. Bu durumda $x_\lambda \in B$ olacak şekilde her $B \in \tau$ için üyelik fonksiyonu her $y_\lambda \in \chi$ olmak üzere;

$$f_{A_{x_\lambda}} = \begin{cases} 0 & , \quad x=y \\ f_A(y_\lambda) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olan A_{x_λ} F-kümesi için $A_{x_\lambda} \wedge B \neq \varnothing$'dir. A_{x_λ} F-kümesinin üyelik fonksiyonu tanımı gereğince $A_{x_\lambda} \leq A$'dır. O halde $A_{x_\lambda} \wedge B \neq \varnothing$ ve $A_{x_\lambda} \leq A$ olduğundan $A \wedge B \neq \varnothing$ olur. Böylece x_λ, A'nın bir kapanış F-noktasıdır.

Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir. Gerçekten, $X \neq \varnothing$ olmak üzere, X'deki F-kümelerinin ailesini τ^* ile gösterirsek (X, τ^*) ikilsinin bir f.t.u olduğu açıktır. Şimdi X'in boş olmayan A alt F-kümesini ve A'nın x_λ F-noktasını alalım. Bu takdirde, $x_\lambda \in B$ olacak şekilde her $B \in \tau^*$ için $A \wedge B \neq \varnothing$'dır. x_λ F-noktası aynı zamanda F-küme ve $x_\lambda \in B$ olduğundan x_λ, X'in açık F-kümesidir. Diğer taraftan $\lambda \leq \lambda$ olduğundan $x_\lambda \leq x_\lambda$, yani x_λ kendisinin bir açık F-komşuluğudur. A_{x_λ} F-kümesini, her $y_\lambda \in \chi$ olmak üzere;

$$f_{A_{x_\lambda}} = \begin{cases} 0 & , \quad x=y \\ f_A(y_\lambda) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlayalım. Eğer x_λ, A'nın kapanış F-noktası iken aynı zamanda A'nın yığılma F-noktası oluyorsa $x_\lambda \in B$ olacak şekilde her $B \in \tau^*$ için $A_{x_\lambda} \wedge B \neq \varnothing$ olmalıdır. x_λ kendisinin bir açık F-komşuluğu olduğundan $B = x_\lambda$ alınırsa her $y_\lambda \in \chi$ için,

$$f_{A_{x_\lambda} \wedge x_\lambda}(y) = \min\{ f_{A_{x_\lambda}}(y), f_{x_\lambda} \} = 0 \Rightarrow A_{x_\lambda} \wedge x_\lambda = \varnothing$$

olur ki, $A_{x_\lambda} \wedge B = \varnothing$ olacak şekilde bir $B = x_\lambda \in \tau^*$ vardır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde x_λ, A'nın bir yığılma F-noktası değildir.

4. BÖLÜM

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK

4.1. Fuzzy Diziler ve Fuzzy Dizilerin Yakınsaklığı

4.1.1. Tanım. (X,τ) bir f. t. u. $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde,

$$f:\mathbb{N} \to \chi$$
$$n \to f(n) = (x_\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona X'de bir fuzzy dizi denir ve (x_n) ile gösterilir.

Şimdi bu tanımı L-fuzzy topolojik uzayına göre yeniden verelim.

4.1.1'. Tanım. (X,τ_L) L-f. t. u. $x_\lambda \in L(\chi)$ olsun. Bu takdirde,

$$f:\mathbb{N} \to L(\chi)$$
$$n \to f(n) = (x_\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona X'de bir L-fuzzy dizi denir (x_n) ile gösterilir.

4.1.2. Tanım. (X,τ) bir f. t. u. , (x_n) X de bir F-dizi ve $A\in I^X$ olsun. Bu takdirde,

(i) (x_n) F-dizisi sonunda A'dadır $\Leftrightarrow$ $\forall n \geq m$ için $\exists$ $m\in \mathbb{N} \ni x_n < A$

(ii) (x_n) F-dizisi sıkça A'dadır $\Leftrightarrow$ $\forall$ $m\in \mathbb{N}$ için $n \geq m$ olacak şekilde $\exists n\in \mathbb{N} \ni x_n < A$

(iii) (x_n) F-dizisi x_λ F-noktasına yakınsar $\Leftrightarrow$ (x_n) F-dizisi sonunda x_λ'nın her komşuluğundadır.

4.1.2.Tanım fuzzy komşulukları için yapılmıştır. Şimdi bu tanımı Q-fuzzy komşuluklarına göre ifade edelim.

4.1.2'. Tanım. (X,τ) bir f. t. u. , (x_n) X de bir F-dizi ve $A\in I^X$ olsun. Bu takdirde,

(i) (x_n) F-dizisi A F-kümesi ile sonunda çakışımsıdır $\Leftrightarrow$ $\forall n\geq m$ için $\exists m\in \mathbb{N} \ni x_n qA$

(ii) (x_n) F-dizisi A F-kümesi ile sıkça çakışımsıdır $\Leftrightarrow$ $\forall m\in \mathbb{N}$ için $n\geq m$ olacak şekilde $\exists n\in \mathbb{N} \ni x_n qA$

(iii) (x_n) F-dizisi x_λ F-noktasına yakınsar $\Leftrightarrow$ (x_n) F-dizisi x_λ'nın her Q-fuzzy komşuluğuyla sonunda çakışımsıdır.

4.1.3. Tanım. (X,τ) bir f. t. u. , (x_n) n = 1, 2, … destekli F-noktalarının bir F-dizisi ve x_λ, n_0 herhangi bir sayı olmak üzere $\forall n\geq n_0$ için desteği $x\neq x_n$ olan bir F-nokta olsun. Bu takdirde (x_n) F-dizisi x_λ F-noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_\lambda$ şeklinde gösterilir $\Leftrightarrow$ $x_\lambda \in A$ olacak şekilde τ'nun her A elemanı için $\exists m\in \mathbb{N} \ni \forall n\geq m$ için $x_n \in A$.

Eğer x_{λ_0}, A'nın bir yığılma F-noktası ise aynı x_0 destekli ve $\varepsilon\geq\lambda$, $\varepsilon\in(0,1]$ değerli tüm $x_{\varepsilon_0}\in\chi$'da A'nın yığılma noktasıdır.

4.1.4. Teorem.[14] (X,τ) bir f. t. u. , $x_\lambda\in\chi$ ve $A\in I^X$ olsun. $(x_n)\leq A$ ve $x_n\rightarrow x_\lambda$ olacak şekilde (x_n) F-dizisi var ise x_λ, A'nın yığılma noktasıdır.

İspat: $x_\lambda\in B$ ve $B\in\tau$ olsun. Bu durumda $B\in\mathcal{V}(x_\lambda)$ ve $x_n\rightarrow x_\lambda \Rightarrow \forall n\geq m$ için $\exists m\in\mathbb{N}\ni x_n\in B$. 4.1.2. Tanım gereği $x_n\in A$ ve x_n, $\forall n\geq n_0$ için x_λ'nın desteğinden farklı bir desteğe sahip olduğundan $\forall n\geq n_0$ için $x_n\in A_{x_\lambda}$ olup $n\geq \text{maks}\{n_0, m\}$ için $x_n\in A_{x_\lambda}\wedge B$ olur ki bu da $A_{x_\lambda}\wedge B\neq\varnothing$ anlamına gelir. Bu durumda x_λ, A'nın bir yığılma noktasıdır.

4.1.5. Teorem.[14] (X,τ) birinci sayılabilir f. t. u. , $A\in I^X$ ve $x_\lambda\in\chi$ olsun. Bu takdirde,

$$x_\lambda\in cl(A) \Leftrightarrow (x_n)\leq A \text{ ve } x_n\rightarrow x_\lambda$$

İspat: X birinci sayılabilir olduğundan 3.3.22. Teorem gereği x_λ, $\{B_i : i\in \mathbb{N}\}$ şeklinde iç-içe azalan komşuluklar tabanına sahiptir. Ayrıca $x_\lambda \in cl(A)$ olduğundan $\forall i\in \mathbb{N}$ için $B_i \wedge A_{x_\lambda} \neq \varnothing$. $f_{B_i\wedge A_{x_\lambda}}(x_{\lambda_i}) > 0$ olacak şekilde $x_{\lambda_i} \in X$ olsun.

$$f_{x_{\lambda_i}}(x) = \begin{cases} 1/2\cdot f_{B_i\wedge A_{x_\lambda}}(x) & x = x_{\lambda_i} \\ 0 & x \neq x_{\lambda_i} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı x_{λ_i} F-noktasını alalım. Bu takdirde $x_{\lambda_i} \in B_i \wedge A_{x_\lambda}$ ve x_{λ_i}, her i için x_λ'nın desteğinden farklı desteğe sahiptir. Diğer taraftan T$\in \tau$ ve $x_\lambda \in$ T alalım.

Bu takdirde, $\forall m\in \mathbb{N}$ için $x_{\lambda_i} \in B_m \leq$ T. Ancak $\forall i \geq m$ için $B_i \leq B_m$ olduğundan sonuç olarak $\forall i \geq m$ için $x_{\lambda_i} \in B_m \leq T$ olur. Buradan da $x_n \to x_\lambda$ sonucu çıkar.

Tersine, $(x_n) \leq A$ ve $x_n \to x_\lambda$ olsun. Bu takdirde, 4.1.4.Teoremden $x_\lambda \in cl(A)$.

4.1.6. Tanım. (X,τ) bir f. t. u. olsun. A$\neq \varnothing$ ve A$\in \tau$ olmak üzere $x_{\lambda_i} \in A$ olacak şekilde X'de x_{λ_i} F-noktalarının sayılabilir bir F-dizisi var ise X'e ayrılabilir fuzzy topolojik uzayı denir.

4.1.7. Teorem.[14] (X,τ) f. t. u. ikinci sayılabilir ise (X,τ) f. t. u. ayrılabilirdir.

İspat: (X,τ) f. t. u. ikinci sayılabilir olduğundan τ, $\beta = \{B_i : i\in \mathbb{N}\}$ şeklinde sayılabilir bir tabana sahiptir. $B_i \neq \varnothing$ için $f_{B_i}(x_{\lambda_i}) > 0$ olacak şekilde $x_{\lambda_i} \in X$ vardır.

$$f_{x_{\lambda_i}}(x) = \begin{cases} 1/2\cdot f_{B_i\wedge A_{x_\lambda}}(x) & x = x_{\lambda_i} \\ 0 & x \neq x_{\lambda_i} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı x_{λ_i} F-noktasını alalım. $x_{\lambda_i} \in B_i$ olduğu açıktır. x_{λ_i} sayılabilir F-dizisi (X,τ) f. t. u.'nın ayrılabilir f. t. u. olması için gerekli olan F-dizi değildir, çünkü τ'nun her A elemanı β'nın bir elemanını kapsar, yani $B_i \leq$A. Sonuç olarak $x_{\lambda_i} \in$ A.

4.1.8. Tanım. (X, τ) f. t. u. , (x_i) ve (x_n) X de birer F-dizi olsun. Bu takdirde,

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \chi$$

$$i \rightarrow g(i) \rightarrow f(g(i)) = x_{\lambda_{g(i)}} = x_i$$

olup $(x_{\lambda_{g(i)}})$ F-dizisi (x_n) F-dizisinin alt F-dizisidir.

4.1.9. Tanım. (X, τ) f. t. u. ve $A \in I^X$ olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \rightarrow I^X$$

$$n \rightarrow f(n) = A_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona X'de F-kümelerinin oluşturduğu fuzzy dizisi denir ve (A_n) ile gösterilir.

4.1.10. Tanım. (X, τ) f. t. u., (x_n) X de bir F-dizi ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde, (x_n) F-dizisi x_λ'nın her komşuluğunda sıkça ise x_λ'ya (x_n)'nin kapanış F-noktası veya limit noktası denir.

Her F-noktasının aynı zamanda bir F-kümesi olduğunu biliyoruz. O halde 4.1.10. Tanıma göre eğer F-kümeler dizisi, A'nın her komşuluğunda sıkça ise A F-kümesine, F-kümeler dizisinin kapanış F-kümesi denir.

4.1.11. Teorem.[14] (X, τ) birinci sayılabilir f. t. u. ve $A \in I^X$ olsun. Bu takdirde;

(i) A, F-açıktır $\Leftrightarrow$ A F-kümesinin kapsadığı B F-kümesine yakınsayan $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ F-kümelerinin bir F-dizisi sonunda A'dadır.

(ii) A F-kümesi, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ F-dizisinin kapanış F-kümesi ise A'ya yakınsayan $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ F-dizisinin bir alt F-dizisi vardır.

İspat: (i) $A \in \tau$ olsun. $B \leq A$ olduğundan A, B'nin bir açık F-komşuluğudur ve $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, B'ye yakınsadığından $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ F-dizisi sonunda A'dadır.

Tersine, (X, τ) birinci sayılabilir f. t. u. olsun. Bu takdirde, her $B \leq A$ için $U_1 \geq U_2 \geq ... \geq U_n \geq ...$ olacak şekilde $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ B'nin F-komşuluklar tabanı olsun.

$$V = \bigwedge_{i=1}^{n} \{U_i\}$$

alalım. $V_1, V_2, ..., V_n, ...$ bir F-dizi olup B'nin F- komşuluklar dizisidir, ayrıca B'ye yakınsar ve iç-içe azalandır. Böylece bir $m \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq m$ için $V_n \leq A$, yani V_n'ler B'nin F-komşuluklar tabanıdır. $V_n \leq A$ olduğundan F-komşuluk aksiyomları gereğinde A'da B'nin F-komşuluğudur. Bu ifade her $B \in I^X$ için geçerli olduğundan A F-açıktır.

(ii) $K_1, K_2, ..., K_n, ...$ A'nın F- komşuluklar tabanı olsun.

$$T_n = \bigvee_{i=1}^{n} \{K_i\}$$

alalım. Bu takdirde, $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ bir F-dizisi olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n \leq T_{n+1}$ olur. $g(i) \geq i$ ve $A_{g(i)} \leq T_i$ olacak şekilde $i \in \mathbb{N}$ için $g(i)$ seçelim. Bu takdirde, $\left(A_{g(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ F-dizisi $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ F-dizisini bir alt F-dizisi olup bu F-dizinin A'ya yakınsadığı açıktır.

4.1.12. Teorem.[14] (X, τ) birinci sayılabilir f. t. u. , $A \in I^X$ ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde;

(i) $x_\lambda \in \overline{A} \Leftrightarrow$ A'da x_λ F-noktasına yakınsayan bir F-dizisi vardır.

(ii) A F-kapalıdır $\Leftrightarrow$ A'daki yakınsak her F-dizinin limiti A'dadır.

(iii) $x_\lambda \in cl(A) \Leftrightarrow$ (A- x_λ)'de x_λ'ya yakınsamayan bir F-dizi vardır.

İspat: (i) $x_\lambda \in \overline{A}$ olsun. (X, τ) birinci sayılabilir f. t. u. olduğundan x_λ'nın iç-içe azalan E(x_λ) ={ V_n : $n \in \mathbb{N}$ } F-komşuluklar tabanı vardır. Ayrıca x_λ, A'nın kapanış olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \wedge V_n \neq \emptyset$. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{\lambda_n} \in A \wedge V_n$ seçerek (x_{λ_n})$\leq$A F-dizisi oluşturulur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{\lambda_n} \leq V_n$ olduğundan $x_{\lambda_n} \to x_\lambda$.

Tersine, $x_{\lambda_n} \to x_\lambda$ olduğundan $\exists m \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq m$ ve $\forall V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ için $x_\lambda \in V$. (x_{λ_n})$\leq$A olduğundan $x_{\lambda_n} \in A \wedge V$. Bu durumda $\forall V \in \mathcal{V}(x_\lambda)$ için $A \wedge V \neq \emptyset$ ve buradan $x_\lambda \in \overline{A}$.

(ii) A F-kapalı olsun. Bu durumda A=$\overline{A}$. (i)'den dolayı A'nın elemanlarından oluşan ve x_λ F-noktasına yakınsayan her F-dizini limiti $\overline{A}$'dadır. Yani $x_\lambda \in \overline{A} = A$

Tersine, $(x_{\lambda_n}) \leq A$ ve $x_{\lambda_n} \to x_\lambda$ olduğundan ve (i)'den dolayı $x_\lambda \in \overline{A}$. $x_\lambda \in A$ varsayımından dolayı $\overline{A} \leq A$. Diğer taraftan $A \leq \overline{A}$ olduğundan $A = \overline{A}$ yani A F-kapalıdır.

(iii) $x_\lambda \in cl(A)$ olsun. Bu durumda, $\forall B \in \tau$ ve $x_\lambda \in B$ için $B \wedge A_{x_\lambda} \neq \emptyset$. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{\lambda_n} \in B \wedge A_{x_\lambda}$ seçersek $x_{\lambda_n} \in A_{x_\lambda}$ ve $x_{\lambda_n} \to x_\lambda$.

Tersine, $x_{\lambda_n} \in (A\text{-}x_\lambda)$ ve $x_{\lambda_n} \to x_\lambda$ olsun. $x_{\lambda_n} \to x_\lambda$ olduğundan $\forall B \in \tau$ ve $x_\lambda \in B$ için $\exists m \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq m$ için $x_{\lambda_n} \in B$. $x_{\lambda_n} \in (A\text{-}x_\lambda)$ olduğundan $n_0 = \text{maks}\{m, n\}$ için $\forall n \geq n_0$ iken $x_{\lambda_{n_0}} \in B \wedge A_{x_\lambda}$ olur buradan da $x_\lambda \in cl(A)$ elde edilir.

2. Bölümde incelediğimiz topolojik uzaylardaki dizilerin yakınsaklığı ile ilgili yetersizliğin aynısı fuzzy topolojik uzaylardaki F-dizilerin yakınsaklığında da görülmüştür.

4.1.11. ve 4.1.12. Teoremlerde görüldüğü gibi F-dizilerin yakınsaklığı ile bir X kümesinin F-açık ya da F-kapalı kümelerini tanımlamak mümkündür. Ancak bu tanımlama için X uzayının birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzay olması gereklidir. Fakat bütün fuzzy topolojik uzaylar birinci sayılabilir olmadığından F-dizilerin yakınsaklığı fuzzy topolojik yapıların kurulmasında yeterli değildir. Bu yetersizliğin ortadan kalkması için F-dizilerin genelleştirilmiş hali olan F-ağ kavramı ortaya konulmuştur.

4.2. Fuzzy Ağlar ve Fuzzy Ağlarda Yakınsaklık

1980'de Pu ve Liu fuzzy ağları kavramını ortaya attı ve fuzzy topolojik uzaylardaki komşuluk yapısının özelliklerini yansıtabilen Q-komşuluğu diye yeni bir kavram verildi. Bu yeni komşuluk yapısıyla Moore-Smith yakınsaklık teorisi kanıtlandı.

Bu bölümde fuzzy ağlar için Pu ve Liu tarafından ilk verilenden farklı olarak yakınsaklığın yeni bir kavramı verilecek. Bu yeni kavrama göre fuzzy filtreler ve fuzzy ağlarla bunların yakınsaklığı arasındaki ilişki, topolojik uzaylardaki filtreler ve ağlarla bunların yakınsaklıkları arasındaki ilişki aynıdır.

Ayrıca yine bu bölümde fuzzy molekül ağı kavramı verilecek ve bu kavramla ilgili teoremlere değinilecek.

4.2.1. Tanım.[23] $X\neq\emptyset$ ve D yönlendirilmiş bir küme olsun. Bu takdirde, $\mathcal{N}: D\rightarrow\chi$ dönüşümüne X üzerinde bir Fuzzy ağ ya da kısaca F-ağ denir ve $\mathcal{N}$={S(n): $n\in D$} olarak ifade edilir. $x\in X$, $n\in D$ ve $\lambda_n\in(0, 1]$ olmak üzere her $n\in D$ için S(n)= $x^n_{\lambda_n}$ ise, $\mathcal{N}$ F-ağı { $x^n_{\lambda_n}$: $n\in D$} ya da basitçe $x^n_{\lambda_n}$ ile gösterilir.

4.2.2. Tanım.[23] $X\neq\emptyset$ ve $\mathcal{N}$ ={ $x^n_{\lambda_n}$: $n\in D$} X üzerinde bir F-ağ olsun. Bu durumda, X üzerindeki bir $\mathcal{T}$={ $y^m_{\lambda_m}$: $m\in E$} F-ağının $\mathcal{N}$ F-ağına ait bir alt F-ağ olması için gerek ve yeter koşul f: $E\rightarrow D$ için aşağıdaki koşulları sağlamasıdır.

(i) $\mathcal{T}=\mathcal{N}\circ f$

(ii) Her $n\in D$ için $m\in E$ vardır öyle ki, eğer $p\geq m$ olacak şekilde $p\in E$ ise $f(p)\geq m$.

Bir { $x^n_{\lambda_n}$: $n\in D$} F-ağının bir alt F-ağını { $x^{f(m)}_{\lambda_{f(m)}}$: $m\in E$} gösterilebileceği tanımdan açıktır.

4.2.3. Tanım.[23] (X,τ) bir f.t.u., $\mathcal{N}$ ={ x^n_{λ}: $n\in D$} X üzerinde bir F-ağ ve $\mu\in I^X$ olsun. Bu takdirde:

(i) $\mathcal{N}$, μ'dedir $\Leftrightarrow$ $\forall$ $n\in D$ için $x^n_{\lambda_n}\leq\mu$.

(ii) $\mathcal{N}$, sonunda μ'dedir $\Leftrightarrow$ $\forall n\in D$ için $n\geq m$ olacak şekilde $\exists m\in D\ni x^n_{\lambda_n}\leq\mu$.

(iii) $\mathcal{N}$, sık sık μ'dedir $\Leftrightarrow$ $\forall m\in D$ için $\exists n\in D\ni x^n_{\lambda_n}\leq\mu$.

(iv) $\mathcal{N}$, üniversaldır $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\eta,\sigma\in I^X$ için $\mathcal{N}$ sonunda $\eta\vee\sigma$ ise $\mathcal{N}$ sonunda η veya σ'dadır.

4.2.4. Örnek. (i) X=(0, 1] ve τ, X üzerinde { $a_{(x,1]}$: $x\in X$ ve $a\in I$} tabanıyla üretilmiş fuzzy topoloji olsun. Bu takdirde, (X,τ) bir fuzzy topolojik uzaydır.

D, (0,1) aralığındaki bütün rasyonel sayıların kümesi olsun. Her $r\in(0, 1)$ rasyonel sayısı $r=\frac{m}{n}$ şeklinde azaltılmış uygun bir kesir olarak ifade edilebildiğinden her $r \in D$ için $S(r)=r_{\frac{n}{n+1}}$ alabiliriz. Bu durumda $\mathcal{N}$: $D \to \chi$ (X,τ)'da bir F-ağdır ve $\mathcal{N} \to 1$.

Çarpım kısmi sıralamayla düzenlenmiş $E=(0,\ 1)\times\mathbb{N}$ alalım ve her $(t,n)\in E$ için $N(t,r) = \min\{\frac{m}{n+1}:\ m\in\{1,\ \dots\ ,\ n\},\ \left|t-\frac{m}{n+1}\right| \le \left|\frac{1}{n+1}\right|\}$ olacak şekilde $N\colon E \to D$ alalım. Bu durumda E yönlendirilmiş bir kümedir, $T = \mathcal{N}\circ N$, $\mathcal{N}$'nin bir alt F-ağıdır ve T'de 1'e yakınsar.

(ii) (X,τ) f.t.u ve $\mathcal{N}$'yi (i) de ki gibi alalım fakat $E=\mathbb{N}$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $N(n) = \frac{n}{n+1}$ olacak şekilde $N\colon E \to D$ tanımlayalım. Bu takdirde, $T = \mathcal{N}\circ N\colon E \to \chi$ $\mathcal{N}$'nin bir alt F-ağıdır ve T 'de 1'e yakınsar. Gerçekten, Her $n\in\mathbb{N}$ için,

$T(n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{\frac{n}{n+1}} \in \chi$'dir.

Yukarıda gösterilen iki örnekte her iki alt F-ağlar da üst F-ağlarının aynı limit noktasına yakınsıyor.

4.2.5. Tanım.[21] (X,τ) bir f.t.u. $\mathcal{N}=\{x^n_\lambda:\ n\in D\}$ X üzerinde bir F-ağ ve $x_\lambda\in\chi$ olsun. Bu takdirde,

$\forall\eta\in N^Q_{x_\lambda}$ için $\exists m\in D$ ve $\forall n\in D$ için $n\ge m$ olacak şekilde $x^n_{\lambda_n}\le\eta \Rightarrow \mathcal{N}$, x_λ'ya yakınsar ve $\mathcal{N}\to x_\lambda$ şeklinde yazılır.

$\mathcal{N}$ F-ağının limiti $\lim(N)=\vee\{x_\lambda\in\chi : N\to x_\lambda\}$ ile tanımlanır.

4.2.6. Yardımcı Teorem.[21] (X,τ) bir f.t.u. ve $\mathcal{N}=\{x^n_{\lambda_n}:\ n\in D\}$ X'de bir F-ağ olsun. Bu takdirde;

(i) $x_\lambda \le \lim(\mathcal{N}) \Leftrightarrow \mathcal{N}\to x_\lambda$

(ii) $\lim(\mathcal{N})$ kapalı F-kümesidir.

İspat: (i) 4.2.5. Tanımdan çıkar.

(ii) $\lim(\mathcal{N}) \leq cl(\lim(\mathcal{N}))$ olduğundan $cl(\lim(\mathcal{N})) \leq \lim(\mathcal{N})$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x_\lambda \leq cl(\lim(\mathcal{N}))$ ve $\eta \in N^Q_{x_\lambda}$ olsun. Bu durumda, $\eta \, q \lim(\mathcal{N})$ yani η(y)+lim($\mathcal{N}$)(y)>1 olacak şekilde $y \in X$ vardır. t = lim($\mathcal{N}$)(y) alalım. Bu durumda, $y_t \, q \eta$ ve $y_t \leq \lim(\mathcal{N})$ ve böylece $x^n_\lambda \leq \eta$ olmasını gerektiren $\forall \sigma \in N^Q_{y_t}$ için $\exists m \in D$ ve $\forall n \in D$ için $n \geq m$ olacak şekilde $x^n_\lambda \leq \sigma$ vardır. Böylece $x_\lambda \leq \lim(\mathcal{N})$. Buradan $cl(\lim(\mathcal{N})) \leq \lim(\mathcal{N})$. Böylece lim($\mathcal{N}$) kapalı F-kümesidir.

4.2.7. Teorem.[21] (X, τ) bir f.t.u. , $x_\lambda \in \chi$ ve $\mu \in I^X$ olsun. Bu takdirde;
$x_\lambda \leq cl(\mu) \Leftrightarrow \forall n \in D$ için $x^n_{\lambda_n} q \mu$ olacak şekilde x_λ'ya yakınsayan bir $\mathcal{N}$={ x^n_λ :n$\in D$} F-ağ mevcuttur.

İspat: $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$ ve her n için $x^n_{\lambda_n} q \mu$ olsun. $\eta \in N^Q_{x_\lambda}$ ise bazı n için $x^n_{\lambda_n} \leq \eta$ ve böylece $\eta \, q \mu$. Buradan $x_\lambda \leq cl(\mu)$. Tersine, $x_\lambda \leq cl(\mu)$ olsun. Bu durumda, her $\eta \in N^Q_{x_\lambda}$ için $\eta \, q \mu$. Şöyle ki $y^\eta_{t_\eta} \leq \eta$ ve $y^\eta_{t_\eta} q \mu$ olacak şekilde $y \in supp(\eta)$ ve $0 < t_\eta \leq \eta(y)$ olacak şekilde bir t_η reel sayısı vardır. $D = N^Q_{x_\lambda}$ olsun. Bu durumda (D, $\leq$) ikilisi kapsama bağıntısı altında yönlendirilmiştir. Bu durumda,
$\mathcal{N}$={ $y^\eta_{t_\eta} \leq \eta$: $y^\eta_{t_\eta} q \mu$, $\eta \in D$} bir F-ağdır öyle ki $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$.

4.2.8. Yardımcı Teorem.[21] (X, τ) bir f.t.u. $x_\lambda \in \chi$ ve $\mathcal{N}$ ={ $x^n_{x_\lambda}$: n$\in$ D} verilsin. $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$ ise $\mathcal{N}$'nin her F-alt ağı da x_λ'a yakınsar.

İspat: $\mathcal{N}$ ={ $x^n_{\lambda_n}$: n$\in D$ } X'de bir F-ağ olsun öyle ki $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$. T={ $y^m_{t_m}$: m$\in E$} $\mathcal{N}$'nin bir alt F-ağı ve $\eta \in N^Q_{x_\lambda}$ olsun. Bu durumda $\forall n \in D$ için $n \geq m$ olacak şekilde $m \in D$ vardır ki $x^n_{\lambda_n} \leq \eta$. T'nin tanımından bu m için en az bir $l \in E$ vardır öyle ki her $p \in E$ için $p \geq l$ ve f: $E \rightarrow D$ için $f(p) \geq m$. Şimdi $y^p_{t_p} = x^{f(p)}_{\lambda_{f(p)}}$. Bu durumda her $p \geq l$ için $y^p_{t_p} \leq \eta$ ve böylece $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$.

4.2.9. Teorem.[21] $\mathcal{N}=\{x_\lambda^n : n\in D\}$ F-ağı x_λ'a yakınsar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{N}$'nin her üniversal F-alt ağı x_λ'a yakınsar.

İspat: $\mathcal{N}\to x_\lambda$ ise 4.2.8. Yardımcı Teoremden dolayı $\mathcal{N}$'nin her üniversal F-alt ağı x_λ'a yakınsar. Tersine, varsayalım ki şart sağlandı ve $\mathcal{N}$ x_λ'a yakınsamasın. Bu durumda $\forall$ $m\in D$ için $n\geq m$ olacak şekilde $\exists\, n\in D$ vardır ve $\exists\, \sigma\in N_{x_\lambda}^Q$ vardır öyle ki $\sigma(x^n)<x_\lambda^n(x^n)$. Bu yüzden her $n\in D$ için $\sigma(x^n)<x_\lambda^n(x^n)$ olduğunu varsayabiliriz. Fakat bu durumda, $\mathcal{N}$'nin üniversal alt ağı var olmasına rağmen öyle bir alt ağ x_λ'a yakınsayamaz.

4.2.10. Tanım.[21] (X,τ) bir f.t.u. , $x_\lambda\in\chi$ ve $\mathcal{N}=\{x_\lambda^n : n\in D\}$ X de bir F-ağ olsun. Bu takdirde:

$\forall$ $n\in D$ ve $\forall$ $\eta\in N_{x_\lambda}^Q$ için $m\geq n$ olacak şekilde $\exists\, m\in D$ vardır öyle ki $x_{\lambda_m}^m\leq\eta$ ise x_λ $\mathcal{N}$ F-ağının bir adherent noktası olarak adlandırılır ve $\mathcal{N}\infty x_\lambda$ olarak yazılır.

$\mathcal{N}$ F-ağının adherent noktalarının kümesi $\mathrm{adh}(\mathcal{N})=\vee\{x_\lambda\in\chi : \mathcal{N}\infty x_\lambda\}$ ile tanımlanır.

Şimdi adherent noktaları ile F-alt ağlar arasındaki ilişkiyi gösterelim.

4.2.11. Yardımcı Teorem.[21] (X,τ) bir f.t.u. ve $\mathcal{N}=\{x_\lambda^n : n\in D\}$ X de bir F-ağ olsun. Bu takdirde,

(i) $x_\lambda\leq\mathrm{adh}(\mathcal{N})\Leftrightarrow\mathcal{N}\infty x_\lambda$

(ii) $\mathrm{adh}(\mathcal{N})$ kümesi kapalı F-kümesidir.

İspat: 4.2.6. Yardımcı Teoreme benzer şekilde yapılır.

4.2.12. Teorem.[21] x_λ'nın bir $\mathcal{N}=\{x_{\lambda_n}^n : n\in D\}$ F-ağının adherent noktası olması için gerek yeter koşul $\mathcal{N}$'nin x_λ'a yakınsayan bir T alt F-ağının bulunmasıdır.

İspat: $x_\lambda\leq\mathrm{adh}(\mathcal{N})$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $\mu\in N_{x_\lambda}^Q$ için $x_{\lambda_n}^n\leq\mu$ olacak şekilde $\mathcal{N}$ F-ağının bir $x_{\lambda_n}^n$ elemanı vardır. $E=\{(n,\mu) : n\in D\ ,\mu\in N_{x_\lambda}^Q$ ve $x_{\lambda_n}^n\leq\mu\}$

olsun. Bu durumda, (m,μ)$\gg$(n,σ) $\Leftrightarrow D$ de m$\geq$n ve $N^{Q}_{x_\lambda}$ da $\mu \leq \sigma$ olacak şekilde ($E,\gg$) ikilisi yönlendirilmiş bir kümedir. O halde, T(m,μ)= $x^{m}_{\lambda_m}$ ile verilen T: $E \to \chi$ dönüşümü $\mathcal{N}$'nin bir F-alt ağı tarafından sağlanabilir. $T \to x_\lambda$ olduğunu göstermek için $\eta \in N^{Q}_{x_\lambda}$ olsun. Bu durumda, (n,η)$\in E$ olacak şekilde n$\in D$ vardır ve $x^{n}_{\lambda_n} \leq \eta$'dir. Böylece, (m,$\mu$)$\gg$(n,$\eta$) olacak şekilde herhangi bir (m,μ)$\in E$ için T(m,μ)= $x^{m}_{\lambda_m} \leq \mu \leq \eta$. Buradan, $T \to x_\lambda$. Tersi açıktır.

Şimdi ise, F-ağların yakınsaklığını kullanarak Fuzzy topolojik uzaylar ile Fuzzy süreklilik arasındaki ilişkiyi ortaya koyacağız.

4.2.13. Teorem.[21] f: (X, τ)$\to$(Y,Δ) bir dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler eşdeğerdir:

(i) f, F-süreklidir.

(ii) $\mathcal{N} \to x_\lambda \Rightarrow f(\mathcal{N}) \to f(x_\lambda)$, her $x_\lambda \in \chi$ için.

(iii) X'de her $\mathcal{N}$ üniversal F-ağı için, $\mathcal{N} \to x_\lambda \Rightarrow f(\mathcal{N}) \to f(x_\lambda)$, $x_\lambda \in \chi$.

(iv) X'de her $\mathcal{N}$={ $x^{n}_{\lambda_n}$: n$\in D$} F-ağı için, $f(\lim(\mathcal{N})) \leq \lim(f(\mathcal{N}))$.

(v) X'de her $\mathcal{N}$ üniversal F-ağı için, $f(\lim(\mathcal{N})) \leq \lim(f(\mathcal{N}))$.

(vi) X'de $\mathcal{N}$ F-ağı için, $f(\mathrm{adh}(\mathcal{N})) \leq \mathrm{adh}(f(\mathcal{N}))$.

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii): $\mathcal{N}$={ $x^{n}_{\lambda_n}$: n$\in D$} X de, $\mathcal{N} \to x_\lambda$ olacak şekilde bir F-ağı olsun. $\eta \in N^{Q}_{f(x_\lambda)}$ ise (i)'den dolayı $f^{-1}(\eta) \in N^{Q}_{x_\lambda}$. $\mathcal{N} \to x_\lambda$'dan dolayı her n$\in D$ için n$\geq$m olacak şekilde en az bir m$\in D$ vardır öyle ki, $x^{n}_{\lambda_n} \leq f^{-1}(\eta)$ buradan da $f(x^{n}_{\lambda_n}) \leq \eta$. Böylece $f(\mathcal{N}) \to f(x_\lambda)$.

(ii)$\Rightarrow$(i): $\eta \in I^{Y}$ açık ve $x_\lambda q f^{-1}(\eta)$ olacak şekilde $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu durumda, $f(x_\lambda) q \eta$ ve böylece $\eta \in N^{Q}_{f(x_\lambda)}$. Her $\mu \in N^{Q}_{x_\lambda}$ için $\mu \not\leq f^{-1}(\eta)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, $x^{\mu} \in X$ için $\mu(x^{\mu}) > f^{-1}(\eta)(x^{\mu})$.

$x^{\mu}_{\lambda(\mu)}$'yı $x^{\mu}_{\lambda(\mu)}(x^{\mu}) = \mu(x^{\mu})$ olacak şekilde bir F-nokta olarak alalım. Bu takdirde $x^{\mu}_{\lambda(\mu)} \leq \mu$ ve $\lambda(\mu) > f^{-1}(\eta)(x^{\mu}) = \eta(f(x^{\mu}))$. D=($N^{Q}_{x_\lambda}$,$\leq$) olsun. Bu durumda

$\mathcal{N}$={ $x^{\mu}_{\lambda(\mu)}$: $\mu \in N^{Q}_{x_\lambda}$ } X'de bir F-ağdır. $\eta \in N^{Q}_{f(x_\lambda)}$ ve $f(x^{\mu}_{\lambda(\mu)}) \not\leq \eta$ olduğundan $\mathcal{N}$'nin x_λ'a yakınsadığı fakat $f(\mathcal{N})$'nin x_λ'a yakınsamadığını göstermek kolaydır. Bu çelişki gösteriyor ki, $\mu \leq f^{-1}(\eta)$ olacak şekilde $\mu \in N^{Q}_{x_\lambda}$ mevcuttur. Böylece, $f^{-1}(\eta)$ x_λ'nın açık bir Q-komşuluğudur ve dolayısıyla $f^{-1}(\eta)$ açık bir F-kümedir.

(ii)$\Rightarrow$(vi): $x_\lambda \leq$adh($\mathcal{N}$) olsun. 4.2.11.Yardımcı Teoremden, $T \rightarrow x_\lambda$ olacak şekilde $\mathcal{N}$'nin bir T alt F-ağı vardır. Bu durumda $f(T)$, $f(\mathcal{N})$'nin bir alt F-ağıdır ve (ii)'den, $f(T) \rightarrow f(x_\lambda)$ öyle ki 4.2.12.Teoremin gerekliliğinden $f(x_\lambda) \leq$adh($f(\mathcal{N})$). Böylece f(adh($\mathcal{N}$))$\leq$adh($f(\mathcal{N})$).

(vi)$\Rightarrow$(ii): Kabul edelim ki $f(\mathcal{N})$, $f(x_\lambda)$'ya yakınsamazken $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$ olacak şekilde bir $\mathcal{N}$={ $x^{n}_{\lambda_n}$: n$\in D$} F-ağ mevcut olsun. Bu durumda, her m$\in D$ için en az bir $\eta \in N^{Q}_{f(x_\lambda)}$ ve n$\geq$m olacak şekilde en az bir n$\in D$ vardır öyle ki, $f(x^{n}_{\lambda_n}) \not\leq \eta$. Bu takdirde, bütün n$\in D$ için $f(x^{n}_{\lambda_n}) \not\leq \eta$ olduğunu varsayabiliriz. $x_\lambda \leq$lim($\mathcal{N}$)$\leq$adh($\mathcal{N}$) olduğundan (vi)'den dolayı $f(x_\lambda) \leq$adh($f(\mathcal{N})$). Böylece, 4.2.12. Teoremden dolayı $f(\mathcal{N})$'nin $f(x_\lambda)$'a yakınsayan bir alt F-ağı vardır. Bu yüzden $f(\mathcal{N})$, $f(x_\lambda)$'a yakınsamalıdır.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Açıktır.

(iv)$\Rightarrow$(iii): $\mathcal{N}$ ={ $x^{n}_{\lambda_n}$: n$\in D$} X'de bir F-ağ olsun ve varsayalım ki $f(\mathcal{N})$, $f(x_\lambda)$'a yakınsamaz iken $\mathcal{N} \rightarrow x_\lambda$. Bu takdirde, her m$\in D$ için en az bir $\eta \in N^{Q}_{f(x_\lambda)}$ ve n$\geq$m olacak şekilde en az bir n$\in D$ vardır öyle ki, $f(x^{n}_{\lambda_n}) \not\leq \eta$. Bu durumda, bütün n$\in D$ için $f(x^{n}_{\lambda_n}) \not\leq \eta$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer T, $\mathcal{N}$'nin bir üniversal alt F-ağı ise $T \rightarrow x_\lambda$ fakat $f(T)$, $f(x_\lambda)$'a yakınsamaz ve bu (iv) ile bir çelişkidir.

4.2.14. Teorem.[30] (X,τ) bir L-f.t.u. ve $\mathcal{N}$ ={ x^{n}_{λ}: n$\in D$} X'de bir F-ağ ve $x_\lambda \in \chi$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\mathcal{N} \infty\ x_\lambda \geq y_\lambda \Rightarrow \mathcal{N} \infty\ y_\lambda$

(ii) $\mathcal{N} \to x_\lambda \geq y_\lambda \Rightarrow \mathcal{N} \to y_\lambda$

İspat: (i): $x_\lambda \geq y_\lambda$ olduğundan Q-komşuluğun tanımından $N^Q_{y_\lambda} \leq N^Q_{x_\lambda}$. Böylece $\mathcal{N} \infty\ x_\lambda$'den $\mathcal{N} \infty\ y_\lambda$.

(ii): (i)'deki gibi yapılır.

4.2.15. Tanım.[30] $X \neq \varnothing$ ve D yönlendirilmiş bir küme olsun. Bu takdirde, $\mathcal{N}: D \to M(L^X)$ dönüşümüne X üzerinde bir fuzzy molekül ağ denir.

4.2.16. Teorem.[30] (X, τ) bir L-f.t.u. ve $x_\lambda \in L(\chi)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

(i) X'deki her $\mathcal{N}$ F-ağı için, $\mathcal{N} \infty\ x_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{T} \to x_\lambda$ olacak şekilde $\mathcal{N}$'nin bir $\mathcal{T}$ alt F-ağı vardır.

(ii) X'deki her $\mathcal{N}$ F-ağı için, $\mathcal{N} \infty\ x_\lambda$ olacak şekilde x_λ'ya yakınsayan ve $\mathcal{N}$'nin alt F-ağı olan bir $\mathcal{T}$ F-ağı vardır.

(iii) X'deki her molekül $\mathcal{N}$ F-ağı için, $\mathcal{N} \infty\ x_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{T} \to x_\lambda$ olacak şekilde $\mathcal{N}$'nin bir $\mathcal{T}$ alt F-ağı vardır.

(iv) X'deki her molekül $\mathcal{N}$ F-ağı için, $\mathcal{N} \infty\ x_\lambda$ olacak şekilde x_λ'ya yakınsayan ve $\mathcal{N}$'nin alt F-ağı olan bir $\mathcal{T}$ F-ağı vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): 4.2.12. Teoremden açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sadece bir molekül $\mathcal{N}$ F-ağı için, $\mathcal{T} \to x_\lambda$ olacak şekilde $\mathcal{N}$'nin bir $\mathcal{T}$ alt F-ağı var $\Rightarrow \mathcal{N} \infty\ x_\lambda$ olduğunu göstermeliyiz. Bu ise 4.1.13. Teoremin ispatı ve 4.2.14. Teorem (i)'den çıkar.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Açıktır.

4.2.17. Teorem.[30] (X, τ) bir f.t.u. , x_λ, $A \in L^X$ olsun. Eğer $x_\lambda \in L(\chi)$ ise aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

(i) $x_\lambda \leq \overline{A}$

(ii) A'da $\mathcal{N} \infty x_\lambda$ olacak şekilde bir $\mathcal{N}$ F-ağı vardır.

(iii) A'da $\mathcal{N} \infty x_\lambda$ olacak şekilde bir molekül $\mathcal{N}$ F-ağı vardır.

Eğer $x_\lambda \in M(L^X)$ ise aşağıdaki ifadeler (i)'e eşdeğerdir.

(iv) x_λ, A'nın bir adherent noktasıdır.

(v) A'da $\mathcal{N} \infty x_\lambda$ olacak şekilde bir $\mathcal{N}$ F-ağı vardır.

(vi) A'da $\mathcal{N} \infty x_\lambda$ olacak şekilde bir molekül $\mathcal{N}$ F-ağı vardır.

4.2.18. Sonuç.[30] (X, τ) bir f.t.u. ve $A \in L^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

(i) $A = \overline{A}$

(ii) A'daki her $\mathcal{N}$ F-ağı ve her $x_\lambda \in \chi$ için, $\mathcal{N} \infty x_\lambda \Rightarrow x_\lambda \leq A$

(iii) A'daki her molekül $\mathcal{N}$ F-ağı ve her $x_\lambda \in \chi$ için, $\mathcal{N} \infty x_\lambda \Rightarrow x_\lambda \leq A$

(iv) A'daki her $\mathcal{N}$ F-ağı ve her $x_\lambda \in M(L^X)$ için, $\mathcal{N} \to x_\lambda \Rightarrow x_\lambda \leq A$

(v) A'daki her molekül $\mathcal{N}$ F-ağı ve her $x_\lambda \in M(L^X)$ için, $\mathcal{N} \to x_\lambda \Rightarrow x_\lambda \leq A$

4.2.17. Teorem, ağların Latis fuzzy topolojik uzaylarda adherent noktaları ve kapalı kümeleri nasıl karakterize ettiğini gösteriyor.

4.3. Fuzzy Filtreler ve Fuzzy Filtrelerin Yakınsaklığı

1979'da Lowen [15] fuzzy topolojik uzaylarda fuzzy filtreler için yakınsaklık teorisini ortaya attı ve elde ettiği sonuçlarını fuzzy süreklilik ve fuzzy kompaktlık tanımlarına uyguladı. Bu daha sonra farklı birkaç matematikçi tarafından değişik bakış açısıyla daha kapsamlı olarak ele alındı. Fakat Q-bağıntısı ve Q-komşuluk kavramları bu yaklaşımlarda kullanılmadı. 1980'de Pu ve Liu [23] bir fuzzy topolojik uzayda bir fuzzy noktanın Q-komşuluğu çerçevesinde fuzzy ağlar için yakınsaklık kavramını verdi. Yakınsaklığın iki türü arasındaki ilişki Lowen tarafından [16] çalışıldı.

Bu bölümde Pu ve Liu [23] tarafından verilen bir fuzzy noktanın Q-komşuluğu ve Q-bağıntısı kavramlarına bağlı kalınarak Ali Ahmet Nouh [21] tarafından çalışılan fuzzy filtreleri için adherent ve yakınsaklık kavramlarına yer verilecek.

4.3.1. Tanım.[15] (X,τ) bir f.t.u. ve boştan farklı $\mathcal{F}\subseteq \mathrm{I}^{\mathrm{X}}$ kümesi verilsin. Eğer;

(i) $\varnothing\notin\mathcal{F}$

(ii) $F_1, F_2\in \mathcal{F} \Rightarrow F_1\wedge F_2\in\mathcal{F}$

(iii) $F_1\in\mathcal{F}$ ve $F_1\leq F_2 \Rightarrow F_2\in\mathcal{F}$

aksiyomları sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ye X üzerinde bir Fuzzy filtre denir.

X üzerindeki bütün fuzzy filtreleri FL(I^{X}) ile göstereceğiz.

4.3.2. Örnek. $\mathrm{X}\neq\varnothing$ ve $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ verilsin. Her $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ için;

$$\lambda_{\mathrm{x}}:\mathrm{X}\to\mathrm{I},\ \lambda_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})=0,2$$

şeklinde tanımlanan λ_{x} F-noktasının oluşturduğu $\mathcal{F}=\{F\in \mathrm{I}^{\mathrm{X}}:\lambda_{\mathrm{x}}\leq F\}$ ailesi X üzerinde bir FL(I^{X})'dir. Gerçekten,

(F_1) Her $F\in\mathcal{F}$ ve her $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ için $0{,}2=\lambda_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\leq F(\mathrm{x})$ olduğundan $F\neq\varnothing$ olup $\varnothing\notin\mathcal{F}$

(F_2) Herhangi $F_1, F_2\in\mathcal{F}$ ve her $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ için $0,2=\lambda_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\leq F_1(\mathrm{x})$ ve $0,2=\lambda_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\leq F_2(\mathrm{x})$ olup $0,2=\lambda_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})\leq(F_1\wedge F_2)(\mathrm{x})=\min\{F_1(\mathrm{x}),F_2(\mathrm{x})\}$ olduğundan $F_1\wedge F_2\in\mathcal{F}$

(F_3) Her $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_1 \leq F_2$ ve her x$\in$ X için 0, 2=λ_x(x)$\leq F_1$(x)$\leq F_2$(x) olduğundan $F_2 \in \mathcal{F}$

4.3.3. Örnek. (X,τ) f.t.u., $\lambda \in \chi$ ve N(λ)'da λ F-noktasının F-komşuluklar ailesi olsun. N(λ) ailesi bir F-filtredir. Gerçekten,

(F_1) Her N$\in$N(λ) için komşuluk aksiyomlarından $\lambda \in$ N olduğundan N$\neq \varnothing \Rightarrow \varnothing \notin$ N(λ)

(F_2) Her $N_1, N_2 \in$ N(λ) için N_1 ve N_2 λ F-noktasının birer F-komşuluğu olduğundan $\lambda < K_1 \leq N_1$ ve $\lambda < K_2 \leq N_2$ olacak şekilde $K_1, K_2 \in \tau$ vardır. Kesişim işleminin özelliğinden $\lambda < K_1 \wedge K_2 \leq N_1 \wedge N_2$ olacak şekilde $K_1 \wedge K_2 \in \tau$. O halde $N_1 \wedge N_2 \in$ N(λ)

(F_3) Her $N_1 \in$ N(λ) ve $N_1 \leq N_2$ olsun. $N_1 \in$ N(λ) olduğundan λ<$K$$\leq N_1$ olacak şekilde $K\in \tau$ vardır. $N_1 \leq N_2$ olduğundan λ<$K$$\leq N_2$ olacak şekilde $K\in \tau$ bulunur. Buradan $N_2 \in$ N(λ)

O halde N(λ) ailesi bir F-filtre olup bu F-filtreye, λ F-noktasının F-komşuluklar filtresi denir.

4.3.4. Tanım.[15] X kümesi üzerinde boş olmayan $\beta \subseteq I^X$ ailesi verilsin.

$(b_1)\varnothing \notin \beta$

(b_2) B_1, $B_2 \in \beta$ için $B_3 \leq B_1 \wedge B_2$ olacak şekilde en az bir $B_3 \in \beta$ vardır.

Yukarıdaki koşulları sağlayan β alt ailesine X üzerinde tanımlı $\mathcal{F}$ F-filtresinin tabanı denir. O halde β tarafından üretilen $\mathcal{F}$ F-filtresi,

$$\mathcal{F} = \{F \in I^X : B \in \beta \text{ için } B \leq F\}$$

şeklinde tanımlanır ve <β> ile gösterilir.

4.3.5. Örnek. (X,τ) f.t.u., $\lambda \in \chi$ ve B(λ)'da λ F-noktasının F-komşuluklar tabanı olsun. Bu takdirde B(λ) ailesi b_1-b_2 özelliklerini sağlar. Gerçekten;

(b_1) B(λ), λ'nın komşuluklar tabanı olduğundan her B$\in$B(λ) için B$\leq$K olacak şekilde K$\in$B(λ) vardır. O halde her B$\in$B(λ) için B$\in$K(λ) ve $\varnothing\notin$K(λ) olduğundan B$\neq\varnothing$ olup $\varnothing\notin$B(λ)

(b_2) Herhangi B_1, $B_2\in$B(λ) için B_1, $B_2\in$K(λ) ve $B_1\wedge B_2\in$K(λ) olur. B(λ) F-komşuluklar tabanı olduğundan $B_1\wedge B_2\in$K(λ) için $B_3\leq B_1\wedge B_2$ olacak şekilde $B_3\in$B(λ) vardır. Böylece B(λ) ailesi X üzerinde bir F-filtresi üretir. Bu F-filtresi F-komşuluklar filtresidir. Ayrıca B(λ) ailesi (F_3) aksiyomunu sağlamadığından F-filtre değildir.

4.3.6.Örnek. X$\neq\varnothing$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X de bir F-dizi ve bu dizinin kuyruğu B_γ={(λ_n):n$\geq\gamma$} olmak üzere, β={ $B_\gamma:\gamma\in\mathbb{N}$ } ailesi X de bir F-filtresi için F-filtre tabanıdır.

(b_1) Her $\gamma\in\mathbb{N}$ için $B_\gamma\neq\varnothing$ olduğundan $\beta\neq\varnothing$ olup $\varnothing\notin\beta$

(b_2) Her $\gamma_1,\gamma_2\in$IN için $B_{\gamma_1},B_{\gamma_2}\in\beta$. γ=maks{ γ_1,γ_2 } alınırsa B_γ= $B_{\gamma_1}\wedge B_{\gamma_2}$ ve $B_\gamma\in\beta$ olup $B_\gamma\leq B_{\gamma_1}\wedge B_{\gamma_2}$. Böylece β ailesine (λ_n) F-dizisinin bileşen F-filtre tabanı denir.

Eğer $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-dizisi yerine, $(\lambda_i)_{i\in D}$ F-ağı alınırsa β={(λ_n):n$\in$D, λ_n F-ağın kuyruğu} ailesi de bir F-filtre tabanıdır. Bu filtre tabanının oluşturduğu $\mathcal{F}$ ={ A: $\exists$n$\in$D için $\lambda_n\leq$A }ailesi bir F-filtre olup bu F-filtreye $(\lambda_i)_{i\in D}$ F-ağının ürettiği F-filtresi denir.

4.3.7. Örnek. X$\neq\varnothing$, $\mathcal{F}$ X de F-filtre ve $D_{\mathcal{F}}$={(x_λ, K): $\lambda\in$K$\in$ $\mathcal{F}$ }$\leq\chi\times\mathcal{F}$ ailesi verilsin. Herhangi (x_λ, K_1), (x_μ, K_2)$\in D_{\mathcal{F}}$ için (x_λ, K_1)>>(x_μ, K_2)$\Leftrightarrow$ $K_2\leq K_1$ şeklinde tanımlanan ">>" bağıntısı $D_{\mathcal{F}}$ üzerinde yönlendirme bağıntısıdır.

(i) Her (x_λ, K) $\in D_{\mathcal{F}}$ için K$\leq$K olduğundan (x_λ, K)>> (x_λ, K)

(ii) Her (x_λ, K_1), (x_μ, K_2), (x_γ,K_3)$\in D_{\mathcal{F}}$ için (x_λ, K_1)>>(x_μ,K_2)$\Leftrightarrow$ $K_2\leq K_1$ ve (x_μ,K_2)>>(x_γ,K_3)$\Leftrightarrow$ $K_3\leq K_2$ olduğundan $K_3\leq K_1$ $\Leftrightarrow$ (x_λ,K_1)>>(x_γ,K_3)

(iii) (x_λ, K_1), (x_μ, K_2)$\in D_{\mathcal{F}}$ olsun. Bağıntının tanımından $K_1\wedge K_2\neq\varnothing$. O halde $K_1\wedge K_2$=K_1 veya $K_1\wedge K_2$=K_2 olur.

$K_1 \wedge K_2 = K_1$ olsun. $K_1 \leq K_1$ olduğundan (i)' den (x_λ, K_1)>>(x_λ, K_1)

$K_1 \leq K_2$ olduğundan (i)'den (x_μ, K_2)>>(x_λ, K_1) olacak şekilde (x_λ, K_1)$\in D_{\mathcal{F}}$ vardır.

$K_1 \wedge K_2 = K_2$ olsun.

$K_2 \leq K_2$ olduğundan (i)'den (x_λ, K_2)>>(x_λ, K_2)

$K_2 \leq K_1$ olduğundan (i)'den (x_λ, K_1)>>(x_μ, K_2) olacak şekilde (x_μ, K_2)$\in D_{\mathcal{F}}$ vardır. O halde ($D_{\mathcal{F}}$, >>) yönlendirilmiş kümedir. Bu durumda;

$$\delta_f : D_{\mathcal{F}} \to \chi$$

$$(x_\lambda, K) \to f(x_\lambda, K) = x_\lambda$$

fonksiyonu bir F-ağdır. Bu F-ağına $\mathcal{F}$ F-filtresine dayanan F-ağ denir.

4.3.8. Sonuç. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir F-ağ varsa bu küme üzerinde bir F-filtre üretilebilir. Eğer X üzerinde bir F-filtre varsa bu küme üzerinde bir F-ağ üretilebilir.

4.3.9. Tanım.[15] X$\neq \emptyset$, $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$ X üzerinde tanımlı F-filtreler olsun.

Her $F \in \mathcal{F}_2$ için $\varepsilon \leq F$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon \in \mathcal{F}_1$ varsa $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ den daha incedir denir ve $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2$ ile gösterilir.

4.3.10. Tanım.[15] X boş olmayan bir küme olsun. Bu takdirde;

(i) Her F_1, $F_2 \in I^X$ için $F_1 \vee F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow$ ya $F_1 \in \mathcal{F}$ ya da $F_2 \in \mathcal{F}$ oluyorsa, X üzerindeki $\mathcal{F}$ F-filtresi asal olarak adlandırılır.

(ii) X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ F-filtresi X üzerinde bir ultra F-filtredir$\Leftrightarrow \mathcal{F}$ kendisiyle karşılaştırılabilir her F-filtresinden daha incedir

(iii) X üzerindeki bir β F-filtre tabanı, X üzerindeki bir ultra F-filtre için taban oluyorsa, β ya X üzerinde bir maksimal F-filtre tabanı denir.

(iv)X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ F-filtresinin bir ε alt ailesi verilsin. Eğer;

ε'nun üyelerinin bütün sonlu kesişimlerinin ailesi $\mathcal{F}$ için taban ise, ε $\mathcal{F}$ için bir alt taban olur ve ε $\mathcal{F}$' yi üretir denir.

Eğer $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \underset{j\in J}{\wedge} \lim(\mathcal{F}_j)$, $\mathcal{F}$ den daha ince olan bütün prime F-filtrelerin ailesini gösteriyorsa

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}(\mathcal{F})} \mathcal{P}$$

olduğunu doğrulamak kolaydır.

4.3.11. Teorem.[31] $\mathcal{F}$, X üzerinde tanımlı bir ultra F-filtresi olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) $\mathcal{F}$, bir asal F-filtredir

(ii) Her $F\in I^X$ için ya $F\in \mathcal{F}$ ya da $1\text{-}F\in \mathcal{F}$

(iii) $F\in I^X$ olsun. $F\notin \mathcal{F}$ ise $F\wedge K=\emptyset$ olacak şekilde bir $K\in \mathcal{F}$ vardır

4.3.12.Teorem.[5] $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde;

(i)Eğer β, Xüzerinde bir F-filtre tabanı ise; $f(\beta)=\{f(\lambda):\lambda\in\beta\}$'de Y üzerinde bir F-filtre tabanıdır.

(ii)Eğer β, Y üzerinde bir F-filtre tabanı ve f örten ise; $f^{-1}(\beta)=\{f^{-1}(\lambda):\lambda\in\beta\}$'de X üzerinde bir F-filtre tabanıdır.

4.3.13. Tanım.[34] (X,τ) bir. f.t.u., $\lambda\in(0, 1]$ ve $\mu\in I^X$ olsun. Bu takdirde;

$\mathcal{U}=\{\eta_j : j\in J\}\subseteq\tau$ ailesi μ nün bir açık Q_λ-örtüsüdür $\Leftrightarrow$ $\mu(x)\geq\lambda$ olacak şekilde her $x\in X$ için $x_\lambda q \eta_j$ olacak şekilde $\exists j\in J$ vardır.

4.3.14. Tanım. Bir (X,τ) f.t.u. da ki bir $\mathcal{F}$ F-filtresi, bir x_λ F-noktasına yakınsar ve $\mathcal{F}\to x_\lambda$ ile gösterilir $\Leftrightarrow$ $\forall\eta\in N^Q_{x_\lambda}$ için $\mu\leq\eta$ olacak şekilde $\exists\mu\in\mathcal{F}$ vardır. Bir $\mathcal{F}$ F-filtre tabanının limiti $\lim(\mathcal{F})=\vee\{x_\lambda\in\chi : \mathcal{F}\to x_\lambda\}$ ile tanımlanır.

4.3.15. Tanım.[34] Bir (X,τ) f.t.u. da ki bir $\mathcal{F}$ F-filtresi, bir μ F- kümesine yakınsar ve $\mathcal{F}\rightarrow\mu$ ile gösterilir $\Leftrightarrow$ μ'nün her açık $\mathcal{U}$ Q_{λ}-örtüsü için, $F\leq\vee\{\eta:\eta\in\mathcal{U}_{\mathrm{o}}\}$ olacak şekilde $\mathcal{U}$'nun en az bir $\mathcal{U}_{\mathrm{o}}$ sonlu alt ailesi ve $F\in\mathcal{F}$ vardır.

4.3.16. Tanım.[21] (X,τ) bir. f.t.u., $\mathrm{x}_{\lambda}\in\chi$ ve $\mathcal{F}$ X üzerinde tanımlı bir F-filtre olsun. Bu takdirde;

(i) Her $\mathrm{U}\in N_{\mathrm{x}_{\lambda}}^{\mathrm{Q}}$ ve her $F\in\mathcal{F}$ için $\mathrm{U}\wedge F\neq\varnothing\Leftrightarrow\mathrm{x}_{\lambda}$, $\mathcal{F}$'nin bir adherent noktasıdır ve bu durum $\mathcal{F}\infty\ \mathrm{x}_{\lambda}$ ile gösterilir. $\mathcal{F}$ F-filtresinin adherent noktalarının kümesi $\mathrm{adh}(\mathcal{F})=\vee\{\mathrm{x}_{\lambda}\in\chi:\mathcal{F}\infty\ \mathrm{x}_{\lambda}\}$ ile tanımlanır.

(ii) $N_{\mathrm{x}_{\lambda}}^{\mathrm{Q}}\leq\mathcal{F}$ ise x_{λ}, $\mathcal{F}$'nin bir limit noktasıdır denir ve bu durum $\mathcal{F}\rightarrow\mathrm{x}_{\lambda}$ ile gösterilir. $\mathcal{F}$ F-filtresinin bütün limit noktalarının kümesi $\lim(\mathcal{F})$ ile belirtilir.

4.3.17. Teorem.[21] (X,τ) bir. f.t.u., $\mathrm{x}_{\lambda}\in\chi$, $\mu\in\mathrm{I}^{\mathrm{X}}$ ve $\mathcal{F}$ X üzerinde tanımlı bir F-filtre olsun. Bu takdirde;

(i) $\mathcal{F}\rightarrow\mathrm{x}_{\lambda}\Rightarrow\mathcal{F}\infty\ \mathrm{x}_{\lambda}$

(ii) $\lim(\mathcal{F})\leq\mathrm{adh}(\mathcal{F})$

(iii) $\mathcal{F}\infty\ \mathrm{x}_{\lambda}\Leftrightarrow\mathrm{x}_{\lambda}\leq\mathrm{adh}(\mathcal{F})$

(iv) $\mathcal{F}\rightarrow\mathrm{x}_{\lambda}\Leftrightarrow\mathrm{x}_{\lambda}\leq\lim(\mathcal{F})$

(v) β, X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ F-filtresi için bir taban ise bu durumda,

$\beta\rightarrow\mathrm{x}_{\lambda}(\beta\infty\ \mathrm{x}_{\lambda},\ \beta\rightarrow\mu)\Leftrightarrow\mathcal{F}\rightarrow\mathrm{x}_{\lambda}(\mathcal{F}\infty\ \mathrm{x}_{\lambda},\mathcal{F}\rightarrow\mu)$

(vi) $\mathcal{F}\rightarrow\mu\Rightarrow N_{\mu}^{\mathrm{Q}}<\mathcal{F}$, N_{μ}^{Q} X üzerinde bir F-filtre tabanı olduğunda.

(vii) $\mathcal{F}\rightarrow\mathrm{x}_{\lambda}$ ve $\mathrm{x}_{\lambda}\leq\mu\Rightarrow\mathcal{F}\rightarrow\mu$

4.3.18. Teorem.[21] (X,τ) bir. f.t.u., $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ X üzerinde tanımlı F-filtreler, $\mathrm{x}_\lambda \in \chi$ ve $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 'den daha ince olsun. Bu takdirde;

(i) $\mathcal{G} \to \mathrm{x}_\lambda \Rightarrow \mathcal{F} \to \mathrm{x}_\lambda$

(ii) $\lim(\mathcal{G}) \leq \lim(\mathcal{F})$

(iii) $\mathcal{F} \infty\, \mathrm{x}_\lambda \Rightarrow \mathcal{G} \infty\, \mathrm{x}_\lambda$

(iv) $\mathrm{adh}(\mathcal{F}) \leq \mathrm{adh}(\mathcal{G})$

4.3.19. Teorem.[21] (X,τ) bir. f.t.u., $\mathrm{x}_\lambda \in \chi$ ve β, X üzerinde tanımlı bir $\mathcal{F}$ F-filtresi için bir taban olsun. Bu takdirde,

$\mathrm{x}_\lambda, \beta$ için bir adherent noktasıdır $\Leftrightarrow$ $\beta^* < \beta$ olacak şekilde bir β^* F-filtre tabanı vardır ve $\beta^* \to \mathrm{x}_\lambda$

İspat: x_λ, β için bir adherent noktası ise, her $\mathrm{U} \in N^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{x}_\lambda}$ ve her $B \in \beta$ için $\mathrm{U} \wedge B \neq \varnothing$.
$\delta = \beta \vee N^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{x}_\lambda}$ ailesi, β 'dan daha ince olan ve X üzerinde tanımlı bir β^* F-filtre tabanı için bir alt tabandır ve $\beta^* \to \mathrm{x}_\lambda$.
Tersine, β 'dan daha ince olan ve X üzerinde tanımlı bir β^* F-filtre tabanı verilsin ve $\beta^* \to \mathrm{x}_\lambda$ olsun.. Bu durumda 4.3.17. Teorem (ii)'den dolayı $\beta^* \infty\, \mathrm{x}_\lambda$ ve 4.3.18. Teorem (ii)'den dolayı da $\beta \to \mathrm{x}_\lambda$.

4.3.20. Teorem.[21] (X,τ) bir. f.t.u., $\mathrm{x}_\lambda \in \chi$ ve $\mu \in \mathrm{I}^{\mathrm{X}}$ olsun. Bu takdirde;
$\mathrm{x}_\lambda \leq \overline{\mu} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to \mathrm{x}_\lambda$ olacak şekilde X üzerinde bir $\mathcal{F}$ F-filtresi vardır ve her $F \in \mathcal{F}$ için $Fq\mu$.

İspat: $\mathrm{x}_\lambda \leq \overline{\mu}$ olsun. O halde her $\eta \in N^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{x}_\lambda}$ için $\mu\, \mathrm{q}\, \eta$. Bu da $\mathcal{F} = N^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{x}_\lambda}$ almamız için yeterlidir.
Tersine $\mathcal{F} \to \mathrm{x}_\lambda$ ve her $F \in \mathcal{F}$ için $Fq\mu$ olsun. O halde $N^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{x}_\lambda} \leq \mathcal{F}$ ve böylece $\mathrm{x}_\lambda \leq \overline{\mu}$.

4.3.21. Teorem.[21] (X,τ) bir. f.t.u. ve $\mu \in I^X$ olsun. Bu takdirde;

$$\mu \text{ açıktır} \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{F}, \mathcal{F} \to x_\lambda \text{ ve } x_\lambda q \mu$$

İspat: $\mu \in I^X$ açık ve $\mathcal{F}$, X üzerinde tanımlı, $x_\lambda q \mu$ olacak şekilde x_λ'ya yakınsayan bir F-filtre tabanı olsun. $\mu \in N^Q_{x_\lambda}$ olduğundan, $\lambda \le \mu$ olacak şekilde $\lambda \in \mathcal{F}$ vardır. Buradan $\mu \in \mathcal{F}$ olur.

Tersine, her $x_\lambda q \mu$ için $\mathcal{F} = N^Q_{x_\lambda}$ diyelim. O halde, her $x_\lambda q \mu$ için μ $\forall m \in D \in N^Q_{x_\lambda}$ ve böylece $\mu \in \tau$.

Bir F-filtresine yakınsayan F-noktalarının kümesi genelde sonsuzdur. Ancak, desteklere bazı kısıtlamalar koyarsak yakınsaklığın tekliği ile ilgili bir sonuç elde edebiliriz.

4.3.22. Teorem.[21] Bir (X,τ) f.t.u. nın FT_2 olması için gerek ve yeter koşul farklı destekli iki F-noktasına yakınsayan ve X üzerinde tanımlı olan bir $\mathcal{F}$ F-filtresinin bulunmamasıdır.

İspat: (X,τ) bir FT_2-uzayı, $\mathcal{F}$ X üzerinde tanımlı ve $x \ne y$ olacak şekilde $\mathcal{F} \to x_\lambda$ ve $\mathcal{F} \to y_\varepsilon$ olsun. $\mathcal{F} \to x_\lambda$ olduğundan her $\mu \in N^Q_{x_\lambda}$ için $F_1 \le \mu$ olacak şekilde en az bir $F_1 \in \mathcal{F}$ vardır. Aynı şekilde $\mathcal{F} \to y_\varepsilon$ olduğundan her $\eta \in N^Q_{y_\varepsilon}$ için $F_2 \le \eta$ olacak şekilde en az bir $F_2 \in \mathcal{F}$ vardır. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olduğundan $F_3 = F_1 \wedge F_2 \in \mathcal{F}$ vardır öyle ki $F_3 \le \mu \wedge \eta$ ve üstelik $\mu \wedge \eta \ne \varnothing$, bir çelişki.

Tersine, kabul edelim ki farklı destekli iki F-noktasına yakınsayan ve X üzerinde tanımlı olan bir $\mathcal{F}$ F-filtresi yok ve (X,τ), FT_2-uzayı değil. O halde, her $\mu \in N^Q_{x_\lambda}$ ve her $\eta \in N^Q_{y_\varepsilon}$ için $\mu \wedge \eta \ne \varnothing$. Bu durumda $\beta = \{ \mu \wedge \eta : \mu \in N^Q_{x_\lambda}, \eta \in N^Q_{y_\varepsilon} \}$ ailesinin X üzerinde x_λ ve y_ε F-noktalarının her ikisine yakınsayan bir F-filtre tabanı olduğunu göstermek kolaydır. $\mathcal{F} = <\beta>$ olsun. O halde, 4.3.17.Teorem (v)'den dolayı $\mathcal{F}$, x_λ ve y_ε F-noktalarının her ikisine de yakınsar ve bu bir çelişkidir.

4.3.23. Teorem.[21] (X, τ) bir f.t.u ve $\mathcal{F}$ X üzerinde tanımlı bir F-filtre olsun. Bu takdirde;

(i) lim($\mathcal{F}$) ve adh($\mathcal{F}$) kapalı F-kümeleridir

(ii) $\mathcal{F}$ bir maksimal F-filtre $\Rightarrow$ lim($\mathcal{F}$) = adh($\mathcal{F}$)

İspat:(i) lim($\mathcal{F}$)$\leq \lim(\overline{\mathcal{F}})$ olduğundan $\lim(\overline{\mathcal{F}}) \leq$lim($\mathcal{F}$) olduğunu göstermek yeterlidir. $x_\lambda \leq \lim(\overline{\mathcal{F}})$ ve $\eta \in N^Q_{x_\lambda}$ olsun. O halde, η qlim$\mathcal{F}$ ve bundan dolayı η(y)+lim($\mathcal{F}$)(y)>1 olacak şekilde y$\in$ X vardır. lim($\mathcal{F}$)(y)=t alalım. O halde $\eta \in N^Q_{y_t}$ ve $y_t \leq$lim($\mathcal{F}$). Bu durumda, her $\mu \in N^Q_{y_t}$ için $\lambda \leq \mu$ olacak şekilde $\lambda \in \mathcal{F}$ vardır. Böylece $\lambda \leq \eta$ ve $x_\lambda \leq$lim($\mathcal{F}$). Bundan dolayı, $\lim(\overline{\mathcal{F}}) \leq$lim($\mathcal{F}$). Böylece, lim($\mathcal{F}$) kapalı bir F-kümedir. Benzer şekilde adh($\mathcal{F}$)' nin de kapalı F-kümesi olduğu gösterilir.

(ii) 4.3.17 Teorem(ii) ve 4.3.19 Teoremden çıkar.

4.3.24. Teorem.[21] $\{\mathcal{F}_j :\ j \in J\}$, X üzerinde tanımlı F-filtrelerin bir ailesi ve $\mathcal{F} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_j$ olsun. O halde,

(i) $\lim(\mathcal{F}) = \bigwedge_{j\in J} \lim(\mathcal{F}_j)$

(ii) $\mathcal{F} \to \mu \Leftrightarrow \mathcal{F}_j \to \mu$, her $j \in J$

İspat: (i) Her j$\in$ J için $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_j$ olduğundan, her j$\in$ J için lim($\mathcal{F}$)$\leq$lim($\mathcal{F}_j$) ve böylece

$$\lim(\mathcal{F}) \leq \bigwedge_{j\in J} \lim(\mathcal{F}_j)$$

Tersine, $x_\lambda \leq \bigwedge_{j\in J} \lim(\mathcal{F}_j)$ ise, her j$\in$ J için $x_\lambda \leq$lim($\mathcal{F}_j$) dir, o halde, her j$\in$ J için her $\eta \in N^Q_{x_\lambda}$ ve $\eta \in \mathcal{F}_j$. Böylece $\eta \in \mathcal{F}$ ve bundan dolayı $x_\lambda \leq$lim($\mathcal{F}$). Böylece,

$$\bigwedge_{j\in J} \lim(\mathcal{F}_j) \leq \lim(\mathcal{F})$$

(ii)Her j$\in$ J için $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_j$ olduğundan, 4.3.17. Teorem (i)'den dolayı her j$\in$ J için $\mathcal{F} \to \mu$ ise

$\mathcal{F}_j \to \mu$. Tersine, her j$\in$ J için, $\mathcal{F}_j \to \mu$ ise, μ nün her açık $\mathcal{U}$ Q_λ-örtüsü için $\mathcal{U}$ 'nun en az bir $\mathcal{U}_o$ sonlu alt ailesi ve her j$\in$ J için $\lambda_j \leq \vee \{\eta : \eta \in \mathcal{U}_o\}$ olacak şekilde bir $\lambda_j \leq \mathcal{F}_j$ vardır. Buradan, $\underset{j\in J}{\wedge} \lambda_j \leq \vee \{\eta : \eta \in \mathcal{U}_o\}$. $\lambda = \underset{j\in J}{\wedge} \lambda_j$ alalım. O halde $\lambda \in \mathcal{F}$ ve $\lambda \leq \vee \{\eta : \eta \in \mathcal{U}_o\}$. Bundan dolayı $\mathcal{F} \to \mu$.

4.3.25. Sonuç. (X, τ) bir f.t.u ve $\mathcal{F}$ X üzerinde tanımlı bir F-filtre olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{F} \to x_\lambda \ (\mathcal{F} \to \mu) \Leftrightarrow \text{her } \mathcal{P} \in P(\mathcal{F}) \text{ için } \mathcal{P} \to x_\lambda \ (\mathcal{P} \to \mu)$$

Sürekliliğin, filtre tabanının yakınsaklığıyla bütünüyle karakterize edilebildiği biliniyor. Aşağıda fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekliliği, fuzzy filtre tabanı yardımıyla karakterize edeceğiz.

4.3.26. Tanım.[23], [12] (X, τ), (Y, Δ) birer f.t.u ve *f*: $(X, \tau) \to (Y, \Delta)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde, her $x_\lambda \in \chi$ ve her $\mu \in N^Q_{f(x_\lambda)}$ için, $f(\eta) \leq \mu$ olacak şekilde $\exists\, \eta \in N^Q_{x_\lambda}$ var ise *f*, F-süreklidir denir.

4.3.27. Teorem.[21] (X, τ), (Y, Δ) birer f.t.u ve *f*: $(X, \tau) \to (Y, \Delta)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

(i) *f*, F-süreklidir

(ii) Her $x_\lambda \in \chi$ için $f(N^Q_{x_\lambda}) \to f(x_\lambda)$

(iii) X üzerindeki her β F-filtre tabanı ve her $x_\lambda \in \chi$ için, $\beta \to x_\lambda$ ise $f(\beta) \to f(x_\lambda)$

(iv) X üzerindeki her β F-filtre tabanı ve $\mu \in I^X$ için $\beta \to \mu$ ise $f(\beta) \to f(\mu)$

(v) $\mathcal{P}$, X üzerinde bir asal F-filtre olmak üzere, her $\mathcal{P}$ için, $\mathcal{P} \to x_\lambda$ ise $f(\mathcal{P}) \to f(x_\lambda)$

(vi) Her $\mathcal{P}$ için, $\mathcal{P} \to \mu$ ise $f(\mathcal{P}) \to f(\mu)$

(vii) X üzerindeki her β F-filtre tabanı için, $f(\lim(\beta)) \leq \lim(\beta)$

(viii) X üzerindeki her $\mathcal{P}$ asal F-filtresi için, $f(\lim(\mathcal{P})) \leq \lim(\mathcal{P})$

İspat: (i)$\Leftrightarrow$(ii): f, F-sürekliliğinden her $x_\lambda \in \chi$ ve her $\mu \in f(N^Q_{x_\lambda})$ için, $f(\eta) \leq \mu$ olacak şekilde $\exists\, \eta \in N^Q_{x_\lambda}$ var e bu durum kesinlikle gösterir ki, $f(N^Q_{x_\lambda}) \to f(x_\lambda)$.

(i)$\Rightarrow$(iii) $\mu \in I^X$ ve $\beta \to \mu$ olacak şekilde β X üzerinde bir F-filtre tabanı olsun. Diğer taraftan, $\mathcal{U} = \{\eta_j : j \in J\}$ $f(\mu)$'nün açık bir Q_λ-örtüsü olsun. Bu durumda, $\mu(x) \geq \lambda$ olacak şekilde her $x \in X$ için en az bir $j \in J$ vardır öyle ki $\eta_j \in N^Q_{f(x_\lambda)}$. f'nin F-sürekliliğinden dolayı $f(\sigma_j) \leq \eta_j$ olacak şekilde $\exists\, \sigma_j \in N^Q_{x_\lambda}$ vardır. O halde $\{\sigma_j : j \in J\}$ ailesi μ'nün açık bir Q_λ-örtüsüdür. $\beta \to \mu$ olduğundan $\lambda \leq \vee\{\sigma_j : j \in J_o\}$ olacak şekilde, J'nin sonlu bir J_o alt kümesi ve bir $\lambda \in \beta$ vardır. O halde, $f(\lambda) \leq f(\vee\{\sigma_j : j \in J_o\}) \leq \vee\{f(\sigma_j) : j \in J_o\} \leq \vee\{\eta_j : j \in J\}$. Böylece, $f(\beta) \to f(\mu)$.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) ve (v)$\Leftrightarrow$(vi): Her $\mu \in I^X$ için $\mu = \vee\{x_\lambda : x_\lambda \leq \mu\}$ ve $f(\mu) = \{f(x_\lambda) : x_\lambda \leq \mu\}$ de kolaylıkla çıkar.

(iv)$\Leftrightarrow$(vii) ve (vi)$\Leftrightarrow$(viii): Tanımdan kolaylıkla çıkarılır.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Açıktır.

(vi)$\Rightarrow$(iii): $\beta \to \mu$ olacak şekilde β X üzerinde bir F-filtre tabanı ve $\mathcal{U} = \{\eta_j : j \in J\}$ $f(\mu)$ nün açık bir Q_λ-örtüsü olsun. $\mathcal{F} = \langle\beta\rangle$ alalım. Bu durumda $\mathcal{F}$, X üzerinde $\mathcal{F} \to \mu$ olacak şekilde bir F-filtredir. 4.3.25. Sonuçtan her $\mathcal{P} \in P(\mathcal{F})$ için $\mathcal{P} \to \mu$ ve (vi)'den dolayı da $f(\mathcal{P}) \to f(\mu)$. O halde, $f(\lambda) \leq \vee\{\eta_j : j \in J_o\}$ olacak şekilde J'nin sonlu bir J_o alt kümesi ve $\lambda \in \mathcal{P}$ vardır. Her $\mathcal{P} \in P(\mathcal{F})$ için $\lambda \in \mathcal{P}$ olduğundan $\lambda \in \mathcal{F}$ ve böylece $f(\lambda) \in f(\mathcal{F})$. Buradan da $f(\mathcal{F}) \to f(\mu)$.

(iv)$\Rightarrow$(i): $x_\lambda \in \chi$ ve $\eta \in N^Q_{f(x_\lambda)}$ olsun. $\beta = N^Q_{x_\lambda} \to x_\lambda$ olduğundan, (iv)'den dolayı $f(\beta) \to f(x_\lambda)$ ve böylece $\exists\sigma \in \beta$ için $f(\sigma) \leq \eta$. Bundan dolayı f F-süreklidir.

(X,τ), (Y,Δ) birer f.t.u ve f: $(X,\tau) \to (\sigma Y,\Delta)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

f süreklidir $\Leftrightarrow$ X üzerindeki herhangi bir $\mathcal{F}$ filtresi için, $f(\mathrm{adh}(\beta)) \leq \mathrm{adh}(f(\mathcal{F}))$

Bu özellik, aşağıdaki teoremin gösterdiği gibi fuzzy durumunda değerlendirilmemiştir.

4.3.28. Teorem.[21] Eğer bir f: $(X,\tau)\to(Y,\Delta)$ fonksiyonu F-sürekli ise, bu durumda X üzerindeki her β F-filtre tabanı için,

$$f(\text{adh}(\beta))\leq \text{adh}(f(\beta))$$

İspat: β, X üzerinde bir F-filtre tabanı, $x_\lambda \leq \text{adh}(\beta)$, $\sigma\in\beta$ ve $\eta\in N^{Q}_{f(x_\lambda)}$ olsun. Varsayımdan dolayı, $f(\mu)\leq\eta$ olacak şekilde $\mu\in N^{Q}_{x_\lambda}$ vardır. $\mu\, q\,\sigma$ olduğundan $\eta\, q f(\sigma)$. Böylece $f(x_\lambda)\leq \text{adh}(f(\beta))$.

4.3.29. Tanım.[11] $\{(X_j,\tau_j): j\in J\}$ fuzzy topolojik uzayların bir ailesi, X=$\prod_{j\in J} X_j$ ve τ, X üzerinde, her $j\in J$ için $P_j: X\to X_j$ izdüşüm dönüşümü olacak şekilde $\{P_j^{-1}(\eta_j):\eta_j\in\tau_j, j\in J\}$ alt tabanı tarafından üretilen fuzzy topoloji olsun. (X,τ) ikilisine, $\{(X_j,\tau_j): j\in J\}$ ailesinin fuzzy çarpım uzayı denir.

4.3.30. Teorem.[21] (X,τ), fuzzy topolojik uzayların bir $\{(X_j,\tau_j): j\in J\}$ ailesinin fuzzy çarpım uzayı, β X üzerinde bir F-filtre tabanı $\mu\in I^X$, $x_\lambda\in\chi$ ve $P_j: X\to X_j$ izdüşüm dönüşümü olsun. Bu takdirde;

(i) $\beta\to x_\lambda \Leftrightarrow P_j(\beta)\to P_j(x_\lambda)$, $\forall j\in J$

(ii) $\beta\to\mu \Leftrightarrow P_j(\beta)\to P_j(\mu)$, $\forall j\in J$

(iii) $\beta\infty x_\lambda \Rightarrow P_j(\beta)\infty P_j(x_\lambda)$, $\forall j\in J$

İspat: (i): Her P_j, F-sürekli olduğundan, 4.3.27. Teoremden dolayı her $j\in J$ için, $\beta\to x_\lambda$ ise $p_j(\beta)\to P_j(x_\lambda)$. Tersine, her $j\in J$ için $p_j(\beta)\to P_j(x_\lambda)$ olduğunu kabul edelim. (X,τ) da $\mu\in N^{Q}_{x_\lambda}$ olsun. Bu durumda $\sigma=\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} P_{j_k}^{-1}(\mu_k)$ ve $x_\lambda\, q\,\sigma$ olacak şekilde (X_{j_n},τ_{j_n}) de, $\mu_n\in N^{Q}_{x_\lambda^{j_n}}$ ve J de $j_1, j_2,..., j_n$ vardır. Her

$p_j(\beta) \to P_j(x_\lambda)$ olduğundan, $\mu_k \in P_{j_k}(\beta)$. $P_{j_k}(\sigma_k) = \mu_k$ olacak şekilde $\sigma_k \in \beta$ olsun. O halde $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge ... \wedge \sigma_n \leq \sigma \leq \mu$ ve bundan dolayı $\mu \in \beta$. Bu da gösterir ki, $\beta \to x_\lambda$.

(ii):Her P_j, F-sürekli olduğundan, 4.3.27. Teoremden dolayı $\beta \to \mu$ ise $P_j(\beta) \to P_j(\mu)$. Tersine kabul edelim ki $P_j(\beta) \to P_j(\mu)$ ve $\mathcal{U} = \{\eta_j : j \in J\}$ μ'nün açık bir Q_λ-örtüsü olsun. O halde, her $x \in X$ için $\mu(x) \geq \lambda$ olacak şekilde $\exists j_o \in J$ var öyle ki $x_\lambda q \eta_{j_o}$. $\eta_{j_o} \in \tau$ olduğundan $\sigma_o = \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} P_{j_i}^{-1}(\sigma_i) \leq \eta_{j_o}$ ve $\sigma_o q\ x_\lambda$ olacak şekilde J'de $j_1, j_2, ..., j_n$ ve $\sigma_i \in \tau_{j_i}$ vardır. Her i için $P_{j_i}(x_\lambda) q \sigma_i$ ve bundan dolayı $P_{j_i}(\lambda_i) \leq \sigma_i$ olacak şekilde $\lambda_i \in \beta$ vardır. $\lambda \leq \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \lambda_i$ olacak şekilde $\lambda \in \beta$ olsun. $\lambda_i \leq P_{j_i}^{-1}(\sigma_i)$ olduğundan $\lambda \leq \sigma_o \leq \eta_{j_o}$. Bundan dolayı $\lambda \leq \vee\{\eta_{j_i} : i=0,1,2,\ldots,n\}$ ve bu da gösterir ki $\beta \to \mu$.

(iii): (i) ve 4.3.19. Teoremden çıkar

5. BÖLÜM

FUZZY FİLTRELERİN VE FUZZY AĞLARIN YAKINSAKLIĞI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Genel topolojideki yakınsaklık teorisinde olduğu gibi, X'deki her ağ ile X bir filtre kurabiliriz ve tersini de yapabiliriz. Bu bölümde, bir fuzzy ağı ile üretilmiş fuzzy filtre tabanı ve bir fuzzy filtre üzerinde kurulmuş fuzzy ağ kavramlarını tanımlayacağız. Daha sonra bunların yakınsaklıkları arasındaki ilişki üzerinde duracağız.

5.1. Tanım. $\mathcal{N}=\{x^{n}_{\lambda_n}:\ n\in D\}$ X üzerinde bir F-ağ ve her $n\in D$ için $\mu_n=\vee\{x^{m}_{\lambda_m}: m\in D, m\geq n\}$ olsun. Bu takdirde, $\beta_{\mathcal{N}}=\{\mu_n:\ n\in D\}$ ailesi X üzerinde bir F-filtre tabanı teşkil eder ve $\mathcal{N}$ F-ağı tarafından üretilmiş F-filtre tabanı olarak adlandırılır.

5.2. Teorem.[21] (X,τ) bir f.t.u, $x_\lambda\in\chi$ ve $\mathcal{N}$, X de bir F-ağ olsun. Bu takdirde;

(i) $\mathcal{N}\to x_\lambda \Leftrightarrow \beta_{\mathcal{N}}\to x_\lambda$

(ii) $\mathcal{N}\propto x_\lambda \Leftrightarrow \beta_{\mathcal{N}}\propto x_\lambda$

İspat:(i): $\beta_{\mathcal{N}}=\{\mu\in I^X:\exists\ n\in D\ \ni\ \mu=\vee\{x^{m}_{\lambda_m}: m\in D, m\geq n\}\}$ olduğundan, $\beta_{\mathcal{N}}\to x_\lambda \Leftrightarrow \forall\eta\in N^{Q}_{x_\lambda}$ için $\exists\mu\in\beta_{\mathcal{N}}\ni\mu\leq\eta \Leftrightarrow \forall\eta\in N^{Q}_{x_\lambda}$ için $\exists\ n\in D \ni \mu=\bigvee_{m\geq n} x^{m}_{\lambda_m}\leq\eta \Leftrightarrow \forall\eta\in N^{Q}_{x_\lambda}$ için $\exists\ n\in D$ ve $\forall m\in D$ için $m\geq n$ ve $x^{m}_{\lambda_m}\leq\eta \Leftrightarrow$ $\mathcal{N}\to x_\lambda$.

(ii): $\beta_{\mathcal{N}} \infty x_{\lambda}$ olduğundan $\forall \eta \in N^{Q}_{x_{\lambda}}$ ve $\forall \mu \in \beta_{\mathcal{N}}$ için $\mu \wedge \eta \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \eta \in N^{Q}_{x_{\lambda}}$ ve $\forall\, n \in D$ için $\bigvee_{m \geq n} x^{m}_{\lambda_m} \wedge \eta \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \eta \in N^{Q}_{x_{\lambda}}$ ve $\forall\, n \in D$ için $\exists$ $m \in D$ $m \geq n$ ve $x^{m}_{\lambda_m} \leq \eta \Leftrightarrow \mathcal{N} \infty\, x_{\lambda}$

5.3. Tanım. β, X üzerinde bir F-filtre tabanı $x_\lambda \in \chi$ ve D_β={(α, x_λ): $x_\lambda \leq \alpha \in \beta$} olsun. D_β'da,

$$(x_\lambda^1, \alpha_1) \geq (x_\lambda^2, \alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$$

olacak şekilde "≥" bağıntısı tanımlayalım. Bu takdirde;
(D_β, ≥) ikilisi bir yönlendirilmiş kümedir.

$\mathcal{N}_\beta(x_\lambda, \alpha) = x_\lambda$ olacak şekilde $\mathcal{N}_\beta : D_\beta \to \chi$ tanımlayalım. Bu takdirde; $\mathcal{N}_\beta$, X üzerinde bir F-ağdır ve β F-filtre tabanı üzerinde kurulmuş F-ağ olarak adlandırılır.

5.4. Teorem.[21] (X, τ) bir f.t.u, $x_\lambda \in \chi$ ve β, X üzerinde bir F-filtre tabanı olsun. Bu durumda:

(i) $\beta \to x_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{N}_\beta \to x_\lambda$

(ii) $\mathcal{N} \infty\, x_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{N}_\beta \infty\, x_\lambda$

İspat:(i): $\beta \to x_\lambda$ ve $\mathcal{N}_\beta : D_\beta \to \chi$, D_β={(α, x_λ): $x_\lambda \leq \alpha \in \beta$} ve $\mathcal{N}_\beta(x_\lambda, \alpha) = x_\lambda$ olacak şekilde, β üzerinde kurulmuş F-ağ olsun. Eğer $\mu \in N_{x_\lambda}^Q$ ise, $\alpha \leq \mu$ olacak şekilde $\alpha \in \beta$ vardır. $(y_t, \alpha) \in D_\beta$ olacak şekilde $y_t \leq \alpha$ seçelim. Eğer $(z_r, \alpha_1) \geq (y_t, \alpha)$ olacak şekilde $(z_r, \alpha_1) \in D_\beta$ ise, $\mathcal{N}_\beta(z_r, \alpha_1) = z_r \leq \alpha_1$. $\alpha_1 \leq \alpha \leq \mu$ olduğundan $z_r \leq \mu$. Bundan dolayı, $\mathcal{N}_\beta(z_r, \alpha_1) \leq \mu$. Böylece, $\mathcal{N}_\beta \to x_\lambda$.

Tersine $\mathcal{N}_\beta \to x_\lambda$ ve $\mu \in N_{x_\lambda}^Q$ olsun. Bu takdirde, her $(y_t, \alpha) \in D_\beta$ için $(y_t, \alpha) \geq (z_r, \alpha_1)$ olacak şekilde $(z_r, \alpha_1) \in D_\beta$ var ve $\mathcal{N}_\beta(y_t, \alpha) = y_t \leq \mu$. Her $w_v \leq \alpha_1$ için $(w_v, \alpha_1) \geq (z_r, \alpha_1)$ ve bundan dolayı $\mathcal{N}_\beta(w_r, \alpha_1) = w_r \leq \mu$. Buradan $\alpha_1 \leq \mu$ ve böylece $\beta \to x_\lambda$.

(ii): $\beta \infty\, x_\lambda$ ve $\mathcal{N}_\beta : D_\beta \to \chi$, D_β={(α, x_λ): $x_\lambda \leq \alpha \in \beta$} ve $\mathcal{N}_\beta(x_\lambda, \alpha) = x_\lambda$ olacak şekilde, β üzerinde kurulmuş F-ağ olsun. Diğer taraftan $\mu \in N_{x_\lambda}^Q$ ve $(y_t, \alpha) \in D_\beta$ olsun. O halde $\alpha \wedge \mu \neq \emptyset$. $z_r \leq \alpha \wedge \mu$ ise, $(z_r, \alpha) \geq (y_t, \alpha)$ olacak şekilde $(z_r, \alpha) \in D_\beta$. Buradan, $\mathcal{N}_\beta(z_r, \alpha) = z_r \leq \mu$. Böylece $\mathcal{N}_\beta \infty\, x_\lambda$.

Tersine $\mathcal{N}_\beta \propto x_\lambda$, $\mu \in N_{x_\lambda}^{Q}$ ve $\lambda \in \beta$ olsun. $y_t \leq \alpha$ ise, $(y_t, \alpha) \in D_\beta$ ve buradan $(z_r, \alpha_1) \geq (y_t, \alpha)$ olacak şekilde $(z_r, \alpha_1) \in D_\beta$ var ve $\mathcal{N}_\beta(z_r, \alpha_1) = z_r \leq \mu$. $\alpha_1 \leq \alpha$ ve $z_r \leq \alpha_1 \wedge \mu$ olduğundan, $z_r \leq \alpha \wedge \mu$ ve böylece $\alpha \wedge \mu \neq \varnothing$. Buradan da $\beta \propto x_\lambda$.

KAYNAKLAR

[1] Bartle, R. G. (1955). Nets and Filters in Topology. *Amer. Math. Monthly* **62**, 551- 557

[2] Bourbaki, N. (1940). *Topologie Generale*. Ch. 1. Actualites Sci. Indust. Paris 858,

[3] Cartan, H. (1937). Theorie des filtres. *C. R. Acad. Sci. Paris* **205**, 595- 598

[4] Chang, C. L. (1968). Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **24**, 182-190

[5] De Prada Vicente, M. A. and Aranguren, M. S. (1988). Fuzzy filters. *J. Math. Anal. Appl.* **129**, 560- 568

[6] De Prada Vicente, M. A., Stadler, M. M. (1990). t-prefilter theory. *Fuzzy Sets and Systems.* **38**, 115- 124

[7] Eklund, P., Gähler, W. (1992). Applictions of category Theory to Fuzzy Subsets. "*Fuzzy filter functorsand convergence*". Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

[8] Gähler, W. (1995). Convergence. *Fuzzy Sets and Systems.* **73**, 97- 129

[9] Gähler, W. (1995). The general fuzzy filter approach to fuzzy topology. Part I. *Fuzzy Sets and Systems.* **76** 205- 224

[10] Gähler, W. (1995). The general fuzzy filter approach to fuzzy topology. Part II. *Fuzzy Sets and Systems.***76**, 225- 246

[11] Goguen, J. A. (1967). L-fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.* **18**, 145- 174

[12] Kandil, A., Kere, E., Nouh, A. A., and El- Shafei, M. E. (1992). Generalized mappings between fuzzy topological spaces. *Math. Panon.* **31**, 59- 71

[13] Kubiak, T. (1985). On Fuzzy Topologies. *Ph. D. Thesis.* Adam Mickewicz University, Pozman, Poland,.

[14] Kütükçü, S. (2001). Fuzzy topolojik uzaylarda yakınsaklık. *Yüksek lisans tezi.*

[15] Lowen, R. (1979). Convergence in fuzzy topological spaces. *Gen. Topol. Appl.* **10**, 147–160

[16] Lowen, R. (1983). The relation between filter and net convergence in fuzzy topological spaces. *Fuzzy Math.* **3**, 41- 52

[17] Ming, H. C. (1983). Theory of convergence in fuzzy topological spaces. *J. Fuzzy Math.* **1**, 1- 12

[18] Mingsheng, Y. (1991). A new approach for fuzzy topology (1). *Fuzzy Sets and Systems*. **39**, 303–321

[19] Moore, E. H.,Smith, H. L. (1922). A general theory of limits. *Amer. J. Math*. **44**, 102- 121

[20] Nakajima, N. (1989). Generalized Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **32** 307- 314

[21] Nouh, A. A. (2005). On Convergence Theory In Fuzzy Topological Spaces And Its Applications. *Czechoslovak Mathematical Journal*. **55(130)**, 195–316

[22] Palaniappan, N. (2002). *Fuzzy Topology*. CRC Pres.

[23] Pao- Ming, P. and Ying- Ming, L.(1980). Neighgbourhood structure of a fuzzy point and Moore- Smith convergence. Fuzzy Topology I. *J. Math. Anal. Appl.* **76**, 571- 599

[24] Stadler, M. M., De Prada Vicente, M. A. (1999). Fuzzy t-net theory. *Fuzzy Sets and Systems*. **37**, 225- 235

[25] Šostak, A. P. (1985). On A Fuzzy Topological Structure. *Suppl. Rent. Circ. Matem. Palermo. Sr. II.* **11**, 89- 103

[26] Şahin, M. (2005). Generalized Fuzzy Sets. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society.* **8,** 153- 158

[27] Şahin, M. (2004). Genelleştirilmiş σ - cebirleri ve genelleştirilmiş bulanık ölçümler. *Doktora tezi.* Karadeniz teknik üniversitesi, Trabzon,

[28] Willard, S. (1970). *General Topology*. Addison- Wesley Publishing.

[29] Wong, C. K. (1974). Covering Properties of Fuzzy Topological Spaces. Notices Amer. Math. Soc. **4**

[30] Ying- Ming, L. and Mao- Kang, L. (1997). *Fuzzy Topology*. World Scientific Publishing.

[31] Yong, L. B., Han, P. J., and Hun, P. B. (1993). Fuzzy convergence structures. *Fuzzy Sets and Systems*. **56**, 309- 315

[32] Yüksel, Ş. (2000). *Genel Topoloji*. Selçuk Üniversitesi Vakfı Yayınları.

[33] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*. **8**, 338- 353

[34] Zhongfu, L. (1984). Compactness in fuzzy topological spaces. *Kuxue Tongbao*. **29**, 582- 585