ÖZ

BİR FONKSİYON VE TÜREVLERİNE AYNI ANDA YAKLAŞIM

KILIÇ Bülent
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Yönetcisi:Yrd.Doç.Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Ağustos 2007, 53 sayfa

Bir fonksiyon ve bu fonksiyonun her mertebeden türevleri belli ise n. dereceden bir polinom ile bu fonksiyona yaklaşmak mümkündür. Ayrıca polinomların özellikleri bilindiğinden ve kolay işlem yapılabildiğinden, fonksiyon yerine onu temsil eden bir polinom kullanmak bazı avantajlar sağlar.

Kim-Pin Lim, aşağıdaki polinomlar ile bazı genel sonuçlar elde etmiştir.

$$p_0 = \left\{ p(x) : p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \, , \; r \geq 1 , \; c \neq 0 , \; n \geq r+1 \right\}$$

Morsund ise bu polinomlar ile bir fonksiyon ve türevlerine aynı anda yaklaşım problemini incelemiştir.

Bu master tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, en iyi aynı anda yaklaşım normlu lineer uzaylarda ve Banach uzaylarında verilmiştir.

İkinci bölümde, normlu lineer uzaylarda konveks kümelerin elemanları ile kompakt kümelere aynı anda yaklaşım verilmiştir.

Üçüncü bölümde, fonksiyonlara ve fonksiyonların aritmetik ortalamalarına aynı anda L_1 -yaklaşımı verilmiştir.

Son bölümde ise bir fonksiyon ve türevlerine aynı anda yaklaşım verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Aynı anda yaklaşım, En iyi aynı anda yaklaşım, Aynı anda L_1-yaklaşımı

ABSTRACT

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF A FUNCTION AND ITS DERIVATIVES

KILIÇ Bülent

M.Sc.in Department of Mathematics.

Supervisor:Asst.Prof.Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

August 2007, 53 pages

If a function and its derivatives of all degrees are certain then its possible to approximate this function by a n. degree polynomial. Furthermore, using a polynomial representing a function provides more advantageous as the properties of the polynomial are known and its transection can easily be done.

Kim-Pin Lim had some general results by polynomial as below.

$$p_0 = \left\{ p(x) : p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, r \geq 1, c \neq 0, n \geq r+1 \right\}$$

Morsund has also considered simultaneous approximation of a function and its derivatives by this polynomials.

This master thesis is formed from four parts.

In the first part, best simultaneous approximation in normed linear spaces and in Banach spaces is given.

In the second, part simultaneous approximation of compact sets by elements of convex sets in normed linear spaces is given.

In the third part, best simultaneous L_1 approximation of a function and its arithmetic average is given.

In the last part simultaneous approximation of a function and its derivatives is given.

Key Words: Simultaneous Approximation, Best Simultaneous Approximation, L_1 -Approximation

TEŞEKKÜR

Tez konumun seçilmesi, hazırlanması ve tamamlanması aşamalarında çok değerli rehberliğinden dolayı Yrd.Doç.Dr. Mehmet AÇIKGÖZ'e en içten minnettarlığımı sunmak istiyorum. Faydalı görüşleri, tezimi geliştirme yollarındaki önerileri, bana güvenmesi ve en önemlisi sadece tavsiye veren biri değil aynı zamanda bir arkadaş olduğu için O'na teşekkür etmek istiyorum. Ayrıca eşime, aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1.1 ……………………………………………………………………18
Şekil 3.1.2 ……………………………………………………………………19

İÇİNDEKİLER

ÖZ...i

ABSTRACT...ii

TEŞEKKÜR iii

ŞEKİL LİSTESİ iv

I.BÖLÜM: GİRİŞ 1

1.1. Temel Tanımlar ve Amaç 1

1.2. Kaynak Özetleri 3

II. BÖLÜM: EN İYİ AYNI ANDA YAKLAŞIM 5

2.1. En İyi Aynı Anda Yaklaşım 5

2.2. Normlu Lineer Uzaylarda En İyi Aynı Anda Yaklaşım..........................6

2.3 Banach Uzaylarında En İyi Aynı Anda Yaklaşım 9

III. BÖLÜM: NORMLU LİNEER UZAYLARDA KONVEKS KÜMELERİN ELEMANLARI İLE KOMPAKT KÜMELERE AYNI ANDA YAKLAŞIM PROBLEMİ..11

3.1. Giriş..13

3.2. Genel Karakterizasyon Teoremi 20

IV. BÖLÜM: FONKSİYONLARA VE BU FONKSİYONLARIN ARİTMETİK ORTALAMASINA EN İYİ L_1 YAKLAŞIMLARI..27

4.1.Giriş..27

4.1. L_1 Yaklaşımı Üzerine Tanımlar 27

4.3. Teoremler...32

V.BÖLÜM:BİR FONKSİYON VE TÜREVLERİNE AYNI ANDA YAKLAŞIM……………………………………………………………………..36
5.1. Giriş 36
5.2. Teklik... 36
5.3. Sıfıra Yaklaşım 38
5.4. X^n ye Yaklaşım:... 43

VI. BÖLÜM: SONUÇLAR... 47

KAYNAKLAR 53

I.BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Amaç

Yaklaşım teorisinin genel amacı; bir aralık üzerinde tanımlı olan sürekli fonksiyonlara daha basit yapıdaki fonksiyonlarla yaklaşılması ve bu yaklaşım yapılırken yaklaşım elemanı var mı, varsa da tek mi problemidir?

Weierstrass temel teoremine göre herhangi bir sürekli fonksiyonun çok yakınında daima bir polinom vardır. Diğer bir deyişle polinomlar uzayı sürekli fonksiyonlar uzayı içinde yoğundur. Yani $[a,b]$ de sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu ve $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in [a,b]$ olmak üzere $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $p(x)$ bulunabilir.

Bu çalışmada bir fonksiyon ve türevlerine aynı anda yaklaşım problemi incelenecektir.

Tanım 1.1.1: M , $[a,b]$ üzerinde düzgün sınırlı integrallenebilir fonksiyonların bir kümesi ve $S \subset L_1[a,b]$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer

$$\inf_{s\in S} \int_a^b \sup_{f\in M} |f(x) - s(x)| dx = \int_a^b \sup_{f\in M} |f(x) - s^*(x)| dx$$

olacak şekilde bir $s^* \in S$ varsa buna L_1 uzayında M ye bir en iyi aynı anda yaklaşık denir[10].

Tanım 1.1.2: $p \geq 1$ bir tek doğal sayı ve $S \subset L_p[a,b]$ gerçel değerli fonksiyonların boş olmayan bir kümesi olsun. Ayrıca $f_1, f_2 \in L_p[a,b]$ fonksiyonları verilsin.

$$\inf_{s\in S} \left[\|f_1 - s\|_p^p + \|f_2 - s\|_p^p \right] = \|f_1 - s^*\|_p^p + \|f_2 - s^*\|_p^p$$

olacak şekilde $s^* \in S$ varsa buna L_p de f_1 ve f_2 fonksiyonlarına en iyi aynı anda yaklaşık denir[10].

Tanım 1.1.3: R gerçel sayılar kümesi $[a,b] \subset R$ ve $f:[a,b] \to R$ olsun. $p \geq 1$ olmak üzere $|f|^p$ integrallenebilir ise bu durumda f fonksiyonları kümesinde

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

normu tanımlandığında elde edilen normlu uzaya L_p uzayı denir[10].

Bu çalışma yaklaşım teorisi konusu altında biraz önce verdiğimiz tanımlar ile aynı anda yaklaşım, en iyi aynı anda yaklaşım ve L_p uzaylarında yaklaşım kavramlarına dayalı olacaktır.

Bu çalışmanın amacı bir fonksiyona ve türevlerine aynı anda yaklaşım problemini L_p uzayında incelemek ve bazı sonuçlar elde etmektir. p nin seçilişine göre yaklaşımın varlığı ve tekliği üzerine genellemeler oluşturmaktır.

1.2. Kaynak Özetleri

1964 yılında D. G. Moursund [5], bir fonksiyon ve türevlerine yaklaşımı Chebyshev yaklaşımı ile ele almıştır.

1965 yılında D. G. Moursund ve A. H. Stroud [6], bir fonksiyon ve türevlerine en iyi yaklaşımı $n+2$ nokta üzerine incelemiştir. Moursund , $C^r[a,b]$ uzayı içindeki gerçel değerli sürekli fonksiyonlar için bu problemi ele almıştır.

Morsund bir fonksiyon ve onun ilk r türevlerine düzgün yaklaşım problemini bir polinom ve onun ilk r türevleriyle aynı anda yaklaşımı ile ele almıştır. Bu polinomların karakteristiğini ve tekliğini incelemiştir. Morsund tarafından ele alınan örnekler bir fonksiyona düzgün yaklaşım problemi ile bir fonksiyon ve onun ilk r türevlerine aynı anda yaklaşım problemleri arasında bir fark olduğunu göstermiştir. Bu farkın genelde en iyi aynı anda yaklaşım polinomunun tek olmayışından meydana geldiğini göstermiştir.

1966 yılında**,** A. Meir and A. Sharma [1], bir fonksiyon ve onun türevlerine aynı anda yaklaşım problemini L_p normunda ele almıştır. En iyi yaklaşım polinomunun tekliğini sağlamak yerine yaklaşım polinomları ailesinin katsayıları üzerinde belirli lineer koşullar gerektiğini göstermiştir.

1967 yılında C. B. Dunham [3], bir aralık üzerinde fonksiyonların aynı anda Chebyshev yaklaşımını incelemiştir.

1969 yılında C.B. Dunham [4], reel Chebyshev yaklaşımı için bir karakterizasyon ve teklik teoremi vermiştir.

1969 yılında J.B. Diaz ve H.W. Mclaughlin [12], sınırlı reel değerli fonksiyonların bir kümesinin aynı anda yaklaşımını incelemiştir. Bu makalede belirli kapalı bir aralıkta değerler alan bir fonksiyona yaklaşımın mümkün olduğu ve sınırlılık bahsi üzerinde tekliğin sağlandığı gösterilmiştir.

1970 yılında I. Singer [11], lineer alt uzayların elemanları ile normlu lineer uzaylarda en iyi yaklaşımı incelemiştir ve genel sonuçlar elde etmiştir.

1972 yılında J.B. Diaz ve H.W. Mclaughlin [13], yine farklı bir makale ile aynı anda yaklaşımı Chebyshev yaklaşımı ve toplamsal ölçü ile Chebyshev yaklaşımı olarak incelemiştir.

1974 yılında D.S.Goel, A.S.B. Holland, C.Nasım ve B.N.Sahney [7], normlu lineer uzaylarda en iyi aynı anda yaklaşım üzerine bir çalışma yapmış ve bu çalışmada en iyi aynı anda yaklaşım elemanının tekliği için belirli koşullar vermişlerdir.

1974 yılında Kim-Pin Lim [14], normlu lineer uzaylarda konveks kümelerin elemanları ile kompakt kümelerin aynı anda yaklaşımını incelemiştir.

Yaklaşım problemi, bir fonksiyona ve bu fonksiyonun türevlerine yaklaşım olarak ele alınmıştır. Bu anlamda bir fonksiyon ve türevlerine en iyi aynı anda yaklaşım Kim-Pin Lim tarafından incelenmiştir. Dunham'dan sonra Diaz ve Mclauglin boş olmayan herhangi bir F ailesi için bazı önemli sonuçlar bulmuş ve tüm bu sonuçların daha genel bir teoremin özel halleri olup olamayacağı sorusu ortaya çıkmıştır. Bu soruya verilen yanıt olumlu olmuş yani G ve F kümeleri daha genel bir uzayın alt kümeleri ve bu kümelerdeki fonksiyonların türevleri genel uzaydaki sürekli dönüşümler olarak düşünülmüştür. Bu çalışma, bu durumu daha genel problemler için ele almıştır. X ve Y gerçel normlu lineer iki uzay, F, X in kompakt bir alt kümesi, G, X in konveks bir alt kümesi ve $A : X \to Y$ sürekli bir dönüşümü için $f \in G$ ve $g \in G$ olmak üzere, $\max\left(\max\limits_{f \in F} P_1(f-g), \max\limits_{f \in F} P_2(Af - Ag) \right)$ değerini minimum yapan $g' \in G$ elemanları bulunmaya çalışılmıştır.

1975 yılında W.H.Ling [16], aynı anda Chevbyshev yaklaşım tanımlarını vererek bu yaklaşımı toplam normunda ele almıştır.

1976 yılında Kim-Pin Lim [15], bir fonksiyon ve türevlerine anda yaklaşımı incelemiş, yaklaşım elemanının tekliği üzerine bazı genellemeler yapmıştır.

1976 yılında G.M. Phillips ve B.N. Sahney [10], L_p uzaylarında bir norm tanımlayarak bu uzaylarda yaklaşımı incelemiştir. L_1 ve L_2 normlarında en iyi aynı anda yaklaşım üzerine sonuçlar vermiş, belirli koşullar altında bu normlarda yaklaşım elemanının varlığını ve tekliğini ispatlamıştır.

II. BÖLÜM

EN İYİ AYNI ANDA YAKLAŞIM

2.1. En İyi Aynı Anda Yaklaşım

Bu kısımda en iyi aynı anda yaklaşım tanımı verilerek Diaz ve Mc-Laughlin [13] in bu konu üzerine verdiği teoremlerin basamakları arasında ilişki kurulacaktır.

Tanım 2.1.1: K, X normlu lineer uzayın bir alt kümesi ve F, X in herhangi sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d(F,K)=\inf_{k\in K}\sup_{f\in F}\|f-k\|$$

$$d(F,K)=\sup_{f\in F}\|f-k^*\|$$

ise $k^*\in K$ ya en iyi aynı anda yaklaşım elemanı denir. X in herhangi kompakt bir F alt kümesinde en iyi aynı anda yaklaşım yapılabilir[7].

Teorem 2.1.1: K, X kesin konveks normlu lineer uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. Bu durumda K nın elemanlarından X in herhangi kompakt alt kümesi F ye bir ve ancak bir en iyi aynı anda yaklaşım elemanı vardır.

Teorem 2.1.2: K, X düzgün konveks Banach uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi ise X in herhangi bir F kompakt alt kümesi için K nın elemanlarından F ye bir tek en iyi aynı anda yaklaşım elemanı vardır[7].

Lemma 2.1.1: $k\in X$ ve F, X in sınırlı bir alt kümesi ise

$$\Phi(k)\equiv\sup_{f\in F}\|f-k\|$$

fonksiyonu X üzerinde süreklidir.

Lemma 2.1.2: K, X normlu lineer uzayın sonlu boyutlu bir alt uzayı ise X in herhangi kompakt F alt kümesine $k^* \in K$ elemanlarından bir en iyi aynı anda yaklaşım vardır[7].

Lemma 2.1.3: K, X in konveks bir alt kümesi ve $F \subseteq X$ olsun. Eğer $k_1, k_2 \in K$ elemanları F ye en iyi aynı anda yaklaşımlar ise

$$\bar{k} = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

elemanı da F ye bir en iyi aynı anda yaklaşımdır[7].

2.2. Normlu Lineer Uzaylarda En İyi Aynı Anda Yaklaşım

Diaz Mc-Laughlin ve Dunham[12] [*a,b*] üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonlar ailesi S nin elemanları ile f_1 ve f_2 sürekli fonksiyonlarına aynı anda yaklaşım problemini ele aldı. $\|.\|$ supremum normu olmak üzere

$$\max\left(\|f_1 - s^*\|, \|f_2 - s^*\|\right) = \inf_{s \in S} \max\left(\|f_1 - s\|, \|f_2 - s\|\right)$$

olacak şekilde $s^* \in S$ varsa bu elemana aynı anda yaklaşım elemanı denir. Bu problem normlu lineer uzaylarda incelenecektir.

Tanım 2.2.1: X normlu lineer uzay ve k, X in alt kümesi olsun. $x_1, x_2 \in X$ elemanları için

$$d(x_1, x_2; k) = \inf_{k \in K} \max\left(\|x_1 - k\|, \|x_2 - k\|\right)$$

$$d(x_1, x_2; k) = \max\left(\|x_1 - k^*\|, \|x_2 - k^*\|\right)$$

$k^* \in K$ elemanına x_1 ve x_2 ye en iyi aynı anda yaklaşım denir[7].

Lemma 2.2.1: $x_1, x_2 \in X$ ve $k \in X$ olsun.

$$\Phi(k) = \max\left(\|x_1 - k\|, \|x_2 - k\|\right)$$

X üzerinde bir sürekli fonksiyondur[7].

İspat: $\|x_1 - k\|$, $\|x_2 - k\|$ normları X üzerinde K nın sürekli fonksiyonelleri olduğundan $\Phi(k)$ nın sürekli fonksiyonel olduğu açıktır.

Lemma 2.2.2: K, X normlu lineer uzayın sonlu boyutlu alt uzayı ise $k^* \in K$ $x_1, x_2 \in X$ elemanlarına en iyi aynı anda yaklaşımdır [7].

İspat: $\rho = \max\left(\|x_1\|, \|x_2\|\right)$ olsun. $s(x_1, \rho)$ ve $s(x_2, \rho)$, K içinde yuvarlar ve

$$S = s(x_1, \rho) \cup s(x_2, \rho)$$

ise

$$\inf_{k \in S} \max\left(\|x_1 - k\|, \|x_2 - k\|\right) = \inf_{k \in K} \max\left(\|x_1 - k\|, \|x_2 - k\|\right)$$

dir. S nin kompaktlığından S üzerinde tanımlı $\Phi(k)$ sürekli fonksiyoneli S de minimum değerini alır. $\min \Phi(k) = \Phi(k^*)$ ise k^* elemanı x_1 *ve* x_2 ye en iyi aynı anda yaklaşımdır.

Lemma 2.2.3: K, X in konveks bir alt kümesi ve $x_1, x_2 \in X$ olsun. Eğer $k_1, k_2 \in K$ elemanları x_1, x_2 ye K nın elemanlarından en iyi aynı anda yaklaşımlar ise

$$\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2 = \bar{k} \in K \quad (0 \le \lambda \le 1)$$

de x_1, x_2 ye bir en iyi aynı anda yaklaşımdır[7].

İspat:

$$\begin{aligned}
&\max\left(\|x_1 - k\|, \|x_2 - k\|\right) \\
&= \max\left(\left\|\lambda(x_1 - k_1) + (1-\lambda)(x_1 - k_2)\right\|, \left\|\lambda(x_2 - k_1) + (1-\lambda)(x_2 - k_2)\right\|\right) \\
&< \max\left(\lambda\|x_1 - k_1\| + (1-\lambda)\|x_1 - k_2\|, \lambda\|x_2 - k_1\| + (1-\lambda)\|x_2 - k_2\|\right) \\
&\le \lambda \max\left(\|x_1 - k_1\| + \left(\|x_2 + k_2\|\right) + (1-\lambda)\max\left(\|x_1 - k_2\|, \|x_2 - k_2\|\right)\right) \\
&\le \lambda d(x_1, x_2; k) + (1-\lambda) d(x_1, x_2; k) \\
&= d(x_1, x_2; k)
\end{aligned}$$

ve eşitliğin tersi vardır ve buradan

$$\max\left(\left\|x_1 - \bar{k}\right\|, \left\|x_2 - \bar{k}\right\|\right) = d(x_1, x_2, k)$$

elde edilir.

Önerme 2.2.1: K, X kesin konveks lineer uzayın bir alt uzayı ise K nın elemanlarından $x_1, x_2 \in X$ herhangi iki elemanına en çok bir tane en iyi aynı anda yaklaşım vardır[7].

İspat: k_1 in x_1, x_2 ye en iyi aynı anda yaklaşım olduğunu varsayalım $d = \max\left(\| x_1 - k_i \|, \| x_2 - k_i\right) \quad \left(i = 1,2\right)$ ise düşünülecek iki hal vardır.

a) $\|x_1 - k_1\| = d$ ve $\|x_2 - k_1\| = \ell < d$

ve $d - \ell = \varepsilon$ ise k_1 in $U \subset K$ konveks komşuluğunu bulabiliriz öyle ki

$$d - \varepsilon/4 \le \|x_1 - k\| \le d + \varepsilon/4$$
$$\ell - \varepsilon/4 \le \|x_2 - k\| \le \ell + \varepsilon/4 \quad , \forall k \in U$$

dir. Böylece $\forall k \in U$ için $\max\left(\|x_1 - k\|, \|x_2 - k\|\right) = \|x - k\|$ ve $\|x_1 - k\| > d$ dir.

Sıfırdan farklı yeterince küçük λ için $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 = \bar{k} \in U$ dur.

Lemma 2.2.1 ile $\bar{k}$ de en iyi aynı anda yaklaşım olduğundan $\|x_1 - \bar{k}\| = d$ elde edilir. Bununla beraber $\|x_1 - k_1\|$ ve $\left\|x - \left(\dfrac{k_1 + \bar{k}}{2}\right)\right\| = d$ dir. Son üç bağıntıdan ve normun kesin konveksliğinden $k_1 = k_2$ olur.

b) $\|x_1 - k_1\| = \|x_1 - k_2\| = d$ ve $\|x_1 - k_1\| = \|x_2 - k_2\| = d$ ve $\bar{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ dir.

Burada üç durum vardır.

i) $\|x_1 - \bar{k}\| = \|x_2 - \bar{k}\| = d$

ii) $\|x_1 - \bar{k}\| = d$ ve $\|x_2 - \bar{k}\| < d$, veya

iii) $\|x_1 - \bar{k}\| < d$ ve $\|x_2 - \bar{k}\| = d$

Bu üç durumdan da

$$\|x_1 - k_1\| = \|x_1 - k_2\| = \left\|x_1 - \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)\right\|$$

veya

$$\|x_1 - k_1\| = \|x_2 - k_2\| = \left\|x_2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)\right\|$$

veya ikisini de elde ederiz. Normun kesin konveksliğinden $k_1 = k_2$ dir.

Önerme 2.2.2: K, X Banach uzayının kapalı ve konveks alt kümesi ve *X* düzgün konveks ise *X* in her elemanı *K* nın elemanlarından bir tek en iyi aynı anda yaklaşıma sahiptir[7].

2.3 Banach Uzaylarında En İyi Aynı Anda Yaklaşım

Tanım 2.3.1: *C*, *X* normlu lineer uzayın alt kümesi ve *F*, *X* içinde verilen herhangi sınırlı bir alt kümesi

$$d(F,C) = \inf_{c\in C} \sup_{f\in F} \|f-c\|$$

için *C* nin içinde c^* elemanı var ve $d(F,C) = \sup_{f\in F}\|f-c^*\|$ eşitliğini sağlarsa c^* a F kümesine en iyi aynı anda yaklaşım elemanı denir.

X düzgün konveks Banach uzayı ve *C*, *X* in kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi ise *X* in kompakt alt kümesi için *C* nin elemanlarından *F* ye bir tek en iyi aynı anda yaklaşım vardır.

Teorem 2.3.1: X kesin konveks Banach uzayı olsun. *C*, X in zayıf kompakt konveks alt kümesi ise *C* den *F* ye $(F \subset X)$ bir tek en iyi aynı anda yaklaşım elemanı vardır[14].

İspat: $c^* \in C$ tanımı ile $d(F,C) = \sup_{f\in F}\|f-c^*\|$ dır. Sürekli ve konveks Φ fonksiyonu "$\Phi(c) = \sup_{f\in F}\|f-c\|$" için C nin kompaktlığından $\Phi(c^*) = \sup_{f\in F}\|f-c^*\|$ olur. En iyi aynı anda yaklaşım elemanının tekliğini göstermek için c_1, c_2 $(c_1 \neq c_2)$ ile F nin elemanlarına yaklaşalım.

$$\sup_{f\in F}\|f-c_1\| = \sup_{f\in F}\|f-c_2\| = d$$

için

$$\sup_{f\in F}\left\| f - \frac{(c_1+c_2)}{2} \right\| = d$$

olur.

F kompakt olduğundan

$$\sup_{f\in F}\left\| f-\frac{c_1+c_2}{2}\right\| = \left\| f^*-\frac{c_1+c_2}{2}\right\| = d$$

olacak şekilde $f^*\in F$ vardır. Buradan

$$\left\| f^*-c_1\right\| = d \text{ ve } \left\| f^*-c_2\right\| = d$$

dir. X in sıkı konveksliğinden $c_1 = c_2$ elde edilir.

C, X in düzgün konveks Banach uzayının kapalı sınırlı ve konveks alt kümesi olsun. X in herhangi bir F kompakt alt kümesi için C nin elemanlarından F ye bir tek en iyi aynı anda yaklaşım vardır.

Düzgün konveks Banach uzayı sıkı konveks ve yansımalı olduğundan ve C nin kompaktlığından ve Teorem 2.3.1 den aşağıdaki sonuç çıkarılır.

C, X in sıkı konveks normlu lineer uzayın sonlu boyutlu alt kümesi ise C nin elemanlarından X in herhangi kompakt F alt kümesine bir ve ancak bir tane en iyi aynı anda yaklaşım vardır.

Bu teoremden doğal olarak şu soru akla gelir. Hipotez de sonlu boyutluluk gerekli midir? Bunu aşağıda görelim.

Teorem 2.3.2: X sıkı konveks normlu lineer uzay ve C, X in yansımalı alt uzayı ise X in boştan farklı herhangi kompakt alt kümesi için C de bir ve ancak bir en iyi aynı anda yaklaşım vardır[14].

İspat:

$$\Phi : C \to R$$
$$\Phi(c) = \sup_{f\in F}\left\| f-c\right\|$$

ile tanımlı Φ fonksiyonu C üzerinde sürekli konveks ve F nin kompaktlığından her $f\in F$ için $\left\| f\right\| \le M$ elde edilir. $B \equiv B(0,2M) \subset C$ yuvarı alınırsa

$$\inf_{c\in B}\sup_{f\in F}\left\| f-c\right\| = \inf_{c\in C}\sup_{f\in F}\left\| f-c\right\| \le M$$

elde edilir ve B yuvarı kompakt ve Φ, B üzerinde alttan yarı sürekli fonksiyondur. Buradan $c^*\in B$ için B nin içinde Φ infimumunu alır ve c^* en iyi aynı anda yaklaşımdır. Yani $d(F,C) = \sup_{f\in F}\left\| f-c^*\right\|$ olur.

III. BÖLÜM
NORMLU LİNEER UZAYLARDA
KONVEKS KÜMELERİN ELEMANLARI İLE KOMPAKT KÜMELERE
AYNI ANDA YAKLAŞIM PROBLEMİ

Genelde bir yaklaşım probleminin çözümü önce varlık ve tekliğin saptanması, ardından da bu çerçevede en iyi yaklaşımın bulunması olarak formüle edilebilir. Bu çerçevede ele alındığında, verilen herhangi bir fonksiyona en iyi yaklaşım elemanının varlığı ve tekliği problemi yaklaşım teorisinin en önemli aşamasını oluşturur. O halde doğal olarak problemin çözümünde aşağıda verilen düzenleme yapılmalıdır.

$\left(X,\|.\|\right)$ normlu vektör uzayı, Y de X in boş olmayan bir alt uzayı olsun. Verilen bir $x\in X$ elemanına $y\in Y$ ile yaklaşılmak isteniliyor. Buna göre

$$D\left(x,Y\right)=\underset{y\in Y}{Inf}\|x-y\|=\delta$$

x in Y ye olan uzaklığını gösterdiğine göre $\|x-y_0\|=\delta$ olacak şekilde bir $y_0\in Y$ bulunabiliyorsa, y_0 , Y nin dışındaki $x\in X$ elemanına en iyi yaklaşım elemanıdır. Görüldüğü gibi, y_0 , x e en kısa uzaklıktaki noktadır. Böyle bir $y_0\in Y$ var olabilir yada olmayabilir. Bunun araştırılması, yaklaşım probleminin varlık problemi aşamasını oluşturur. Verilen bir x ve $Y\subset X$ için genelde birden çok en iyi yaklaşım elemanı bulunabildiği için teklik problemi aşaması özel bir önem taşımakta ve uygulama alanında geniş bir şekilde yer almaktadır.

S , X normlu lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Verilen herhangi bir $F\subset X$ sınırlı altkümesi için

$$d\left(F,S\right)=\inf_{x\in S}\sup_{y\in F}\|y-x\|$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$d\left(F,S\right)=\sup_{y\in F}\left\|y-x^*\right\|$$

olacak şekilde S de bir x^* varsa bu x^* a F ye bir en iyi aynı anda yaklaşım elemanı denir.

İki yada daha çok elemana aynı anda yaklaşım fonksiyon uzaylarında veya diğer normlu uzaylarda farklı tanımlar ve bu tanımlara dayanan teoremler içerir.

Bu genel bilgiler ışığında yaklaşım problemine başlarken bir fonksiyona ve bu fonksiyonun türevlerine yaklaşımın tekliği ele alınacaktır. Bu anlamda bir fonksiyon ve türevlerine en iyi aynı anda yaklaşım Kim-Pin-Lim [13], tarafından incelenmiştir. Moursund [1,2], $C^r[a,b]$ uzayı içindeki gerçel değerli sürekli fonksiyonlar için bu problem ile ilgilenmiş ve daha sonra Dunham [5], verilen herhangi bir F kümesinin elemanlarına, gerçel değerli fonksiyonlar ailesi ile aynı anda yaklaşım problemi üzerinde çalışmış ve bir takım sonuçlar elde etmiştir. Dunhamdan sonra Diaz ve Mclauglin [6], boş olmayan herhangi bir F ailesi için bazı önemli sonuçlar bulmuş ve bu aşamada, tüm bu sonuçların daha genel bir teoremin özel halleri olup olamayacağı sorusu ortaya atılmıştır. Bu soruya verilen yanıt olumlu olmuştur yani G ve F kümeleri daha genel bir uzayın alt kümeleri ve bu kümelerdeki fonksiyonların türevleri genel uzaydaki sürekli dönüşümler olarak düşünülebilir. Bu çalışmada bu durum daha genel problemler için ele alınacaktır. X ve Y gerçel normlu lineer iki uzay olsunlar. F, X in kompakt bir alt kümesi, G, X in konveks bir alt kümesi ve $A : X \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. $f \in F$ ve $g \in G$ olmak üzere, $\max\left(\max_{f\in F} P_1(f-g), \max_{f\in F} P_2(Af-Ag)\right)$ değerini minimum yapan $g' \in G$ elemanları bulunmaya çalışılacaktır. Burada $P_1(\cdot)$ ve $P_2(\cdot)$, sırasıyla X ve Y üzerinde sürekli yarı normları $P_1(f) = \max_{k\in K}(k,f)$ $f \in X$, $P_2(y) = \max_{\tilde{k}\in\tilde{K}}(\tilde{k},y)$ $y \in Y$ ve F, X in kompakt bir alt kümesi olmak üzere bir $g \in X$ için $d_1(g) = \max_{f\in F} P_1(f-g)$, $d_2(g) = \max_{f\in F} P_2(Af-Ag)$ ve $d_F(g) = \max(d_1(g), d_2(g))$ olarak tanımlansın ve G, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Burada amaç $d_F(g') = \inf_{g\in G} d_F(g)$ olacak biçimde bir $g' \in G$ bulmaktır. Böylece X normlu lineer uzayının bir G konveks kümesi ile X in kompakt bir F alt kümesine aynı anda en iyi yaklaşım elemanı bulunmuş olur. Bulduğumuz $g' \in G$ elemanına G den F ye en iyi aynı anda yaklaşım elemanı denilir [14].

3.1. Giriş

X ve Y normlu lineer iki gerçel uzay; F ve G X in sırasıyla kompakt ve konveks birer alt kümeleri ve $A: X \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. $f \in F$ ve $g \in G$ olmak üzere $\max\left(\max_{f\in F} P_1(f-g), \max_{f\in F} P_2(Af-Ag)\right)$ değerini minimum yapan $g' \in G$ bulunmaya çalışılacaktır. X^* ve Y^* sırasıyla X ve Y nin dual uzayları olsunlar. X^*(ya da Y^*) daki k (yada $\tilde{k}$) lineer ve sürekli fonksiyonelinin X(ya da Y) içindeki bir x(yada y) noktasında aldığı değeri (k,x) (yada $(\tilde{k},y)$) ile gösterilsin. $\sigma(X^*,X)-$ kompakt, (ya da $\sigma(Y^*,Y)-$ kompakt) norm-sınırlı kümesi ile simetrik olan K (yada $\tilde{K}$) kümesi X^*(veya Y^*) ın bir alt kümesi olsun. X ve Y üzerindeki P_1 ve P_2 sürekli yarı normları

$$f \in X \quad \text{için} \quad P_1(f) = \max_{k\in K}(k,f) \quad \text{ve} \quad y \in Y \quad \text{için} \quad P_2(y) = \max_{\tilde{k}\in\tilde{K}}(\tilde{k},y)$$

ve F ,X in kompakt bir alt kümesi, $g \in X$ için $d_1(g) = \max_{f\in F} P_1(f-g)$, $d_2(g) = \max_{f\in F} P_2(Af-Ag)$ ve $d_F(g) = \max(d_1(g), d_2(g))$ olarak tanımlansın ve G de X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Amacımız $d_F(g') = \inf_{g\in G} d_F(g)$ olacak biçimde bir $g' \in G$ bulmaktır. Böylece X normlu lineer uzayının bir G konveks alt kümesi ile X in kompakt bir F alt kümesine aynı anda en iyi yaklaşımı bulunmuş olacaktır. Bulunan bu $g' \in G$ elemanına G den F ye aynı anda en iyi yaklaşım elemanı denilecektir. g' nün varlığından bahsedilebilir çünkü $d_1(g)$ ve $d_2(g)$ nin sürekli fonksiyonlar ailesinin supremumu(ma*x*imumu) olduğu tanımdan biliniyor. Böylece P_1 ve P_2 yarı sürekli norm olduklarından $d_1(g)$ ve $d_2(g)$ de yarı sürekli olacaktır. Dolayısıyla $d_F(g) = \max(d_1(g), d_2(g))$ olduğundan $d_F(g)$ de alttan yarı süreklidir. Böylece $d_F(g)$ nin kompakt bir F kümesi üzerinde infimum değerini aldığı söylenebilir. O halde $\inf_{g\in G} d_F(g)$ vardır. $d_F(g') = \inf_{g\in G} d_F(g)$

olduğundan bir $g' \in G$ elemanının varlığından bahsedilebilir. O halde X ve Y üzerindeki P_1 ve P_2 sürekli yarı normlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$P_1(f) = \max_{k \in K}(k, f) \qquad f \in X$$

$$P_2(y) = \max_{\tilde{k} \in \tilde{K}}(\tilde{k}, y) \qquad y \in Y$$

ve F , X in kompakt bir alt kümesi olsun. Bir $g \in X$ için,

$$d_1(g) = \max_{f \in F} P_1(f - g)$$

$$d_2(g) = \max_{f \in F} P_2(Af - Ag)$$

ve

$$d_F(g) = \max(d_1(g), d_2(g))$$

olarak tanımlansın.

G, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Burada amaç

$$d_F(g') = \inf_{g \in G} d_F(g)$$

olacak biçimde bir $g' \in G$ bulmaktır. Böylece X normlu lineer uzayının bir G konveks alt kümesi ile X in kompakt bir F alt kümesine aynı anda en iyi yaklaşımı bulunacaktır. Bulunan bu $g' \in G$ elemanına G den F ye aynı anda en iyi yaklaşım elemanı denir. g' nün varlığından bahsedebilmek için öncelikle $d_1(g)$ ve $d_2(g)$ nin sürekli fonksiyonlar ailesinin supremumu(maximumu) olduğunu hatırlayalım(tanımdan). Böylece P_1 ve P_2 yarı sürekli norm olduklarından $d_1(g)$ ve $d_2(g)$ de yarı sürekli olacaktır. $d_1(g)$ ve $d_2(g)$ yarı sürekli ve

$$d_F(g) = \max(d_1(g), d_2(g))$$

olduğundan $d_F(g)$ de alttan yarı süreklidir. Böylece $d_F(g)$ nin kompakt bir F kümesi üzerinde infimum değerini aldığı söylenebilir. O halde

$$\inf_{g \in G} d_F(g)$$

vardır ve

$$d_F(g') = \inf_{g \in G} d_F(g)$$

olduğundan bir $g' \in G$ elemanının varlığı söylenebilir.

Böylece aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.1.1: G , X in n boyutlu bir alt uzayı olsun ve $P_1(\cdot)$ in kısıtlanışı G de bir norm olsun. Bu durumda

$$d_F(g') = \inf_{g \in G} d_F(g)$$

olacak şekilde bir $g' \in G$ vardır[14].

İspat: G de bir (g_i) dizisi alalım ve

$$\lim_{i \to \infty} d_F(g_i) = \inf_{g \in G} d_F(g)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$P_1(g_i) = P_1(g_i - f + f) \leq P_1(f - g_i) + P_1(f)$$

$$\leq \max_{f \in F} P_1(f - g_i) + \max_{f \in f} P_1(f)$$

ve

$$\max_{f \in F} P_1(f - g_i) \leq d_F(g_i)$$

olduğundan

$$d_F(g_i) = \max_{f \in F}(d_1(g_i), d_2(g_i))$$

$$= \max_{f \in F}(\max P_1(f - g_i), \max P_2(Af - Ag_i))$$

$$\max_{f \in F} P_1(f - g_i) \leq d_F(g_i)$$

dir. Ayrıca $\max_{f \in F} \underbrace{P_1(f)}_{norm}$ sabit bir sayı olduğundan

$$P_1(g_i) \leq \max_{f \in F} P_1(f - g_i) + \max_{f \in F} P_1(f) \leq d_F(g_i) + m \leq M$$

olacak biçimde bir M gerçel sayısı vardır.

$P_1(\cdot)$ in kısıtlanışı bir norm olduğundan $P_1(g_i) \leq M$ ise $\{g_i\}$, G de sınırlı bir dizidir. Sınırlı her dizi yakınsak olduğundan $g_i \to g'$ olacak biçimde bir $g' \in G$ vardır. Ayrıca her i için

$$0 \leq d_F(g') - \inf_{g \in G} d_F(g) \leq d_F(g') - d_F(g_i) + (d_F(g_i) - \inf d_F(g))$$

sağlanır. Bu eşitsizlikte $i \to \infty$ için limit alınırsa $d_F(\cdot)$ yarı sürekli ve $g_i \to g'$ olduğundan

$$d_F(g_i) \to d_F(g')$$

olur.

$$0 \le d_F(g') - \inf d_F(g) \le 0$$

sıkıştırma teoreminden

$$d_F(g') = \inf_{g \in G} d_F(g)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Görüldüğü gibi eğer $d_1(g)$ veya $d_2(g)$ den birinin minimumu g' ise $d_F(g') = d_1(g')$ veya $d_F(g') = d_2(g')$ olur. Böylece yaklaşım problemi çözülür. Yani g' en iyi yaklaşım elemanıdır ve

$$\max\left(\inf_{g \in G} d_1(g), \inf_{g \in G} d_2(g)\right) \le \inf_{g \in G} \max(d_1(g), d_2(g))$$

dır. Bu durumda eşitlik sağlandı. Eşitsizliğin sağlandığı daha genel durumlarda aşağıdaki yararlı sonucu lemma olarak verelim.

Lemma 3.1.2:

$$\max\left(\inf_{g \in G} d_1(g), \inf_{g \in G} d_2(g)\right) < \inf_{g \in G} \max(d_1(g), d_2(g))$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$d_2(g) = \max_{f \in F} P_2(Af - Ag)$$

G deki her g için konveks ve g' en iyi yaklaşım elemanı ise

$$d_1(g') = d_2(g')$$

dir[14].

İspat: $d_2(g') - d_1(g') = \varepsilon > 0$ olsun. ($\varepsilon < 0$ olarak alınırsa da aynı yol izlenir) . Bu durumda g', d_2 nin minimumu olamaz. Gerçekten

$$U = \left\{ g \in G : P_1(g - g') \le \frac{1}{2}\varepsilon \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $g \in U$ için,

$$d_1(g) \le \max\{P_1(f - g') + P_1(g' - g)\} \le d_1(g') + \frac{1}{2}\varepsilon$$

bulunur. Çünkü $d_2(g)$ konveks ve g', d_2 nin minimumu değildir. Böylece konveks fonksiyonların minimum özelliğinden $d_2(g_1) < d_2(g')$ olacak biçimde bir $g_1 \in U$ vardır. Ancak bu durumda g_1, g' den daha iyi bir yaklaşım olur ki bu g' nün en iyi aynı anda yaklaşım elemanı olması ile çelişir. O halde $d_1(g') = d_2(g')$ olmalıdır.

$d_2(g)$ üzerinde kabul edilen konveksliğin sağlanmasından dolayı, örneğin, A lineer dönüşümü için açıkça görüldüğü gibi problemlerin büyük bir kısmında $d_1(g') = d_2(g')$ olacak biçimde bir en iyi yaklaşım bulunabilir. Ancak bu durum bazen sağlanmaz. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 3.1.1: $X = Y = C\,[-1,1]$ üzerinde Chebyshev normu tanımlanan iki uzay olsun. Açıktır ki Chebyshev normu, C^* ın $\{\pm(x \text{ noktasındaki fonksiyonel değeri}) : -1 \le x \le 1\}$ bir alt kümesi ile belirlenmiştir. $C\,[-1,1]$ de bir A dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım. Herhangi bir $h(x) \in C[-1,1]$ için

$$A(h)(x) = \begin{cases} 1\,, & h(x) = 1/2 \\ 3/4\,, & h(x) = 3/4 \\ 3/4\,, & h(x) = 1/4 \\ (7/4) - 4h(x)\,, & h(x) \le 1/4 \\ h(x)\,, & h(x) \ge 3/4 \\ 3/2 - h(x)\,, & 1/2 \le h(x) \le 3/4 \\ 1/2 + h(x)\,, & 1/4 \le h(x) \le 1/2 \end{cases}$$

Bu durumda A, $C\,[-1,1]$ üzerinde sürekli bir dönüşümdür.

$F = \{ f(x) = 1 - x^2 \}$ fonksiyonuna gerçel sabitlerle yaklaşılabildiğini varsayalım. Bu durumda $g = a$ sabiti için

$$d_F(a) = \max\left(\left\|1 - x^2 - a\right\|_\infty , \left\|A(1 - x^2) - Aa\right\|_\infty \right)$$

olur. Çünkü $f(x) = 1 - x^2$ ve $g(x) = a$ ise

$$d_1(g) = \max_{f\in F} P_1(f - g) = \max_{f\in F} \left\|f - g\right\| = \max \left\|1 - x^2 - a\right\|_x$$

$$d_2(g) = \max_{f\in F} P_2(Af - Ag) = \max_{f\in F} \left\|Af - Ag\right\| = \max \left\|A(1 - x^2) - Aa\right\|_x$$

olduğundan

$$d_F(a) = \max\left(d_1(g), d_2(g)\right)$$

$$\Rightarrow d_F(a) = \max\left(\left\|1 - x^2 - a\right\|_\infty \, , \, \left\|A(1 - x^2) - Aa\right\|_\infty \right)$$

bulunur.

Şimdi en iyi yaklaşım elemanının "a" olduğunu gösterelim. Gerçekten $a = 1/2$ için,

$$d_F(1/2)=\max_{x\in[-1,1]}\left(\left\|1-x^2-1/2\right\|_x,\left\|A(1-x^2)-A.1/2\right\|_x\right)$$
$$=\max\left(\left\|\underbrace{1/2-x^2}_{1/2}\right\|_x,\left\|\underbrace{7/4-1}_{3/4}\right\|_x\right)$$
$$=3/4$$

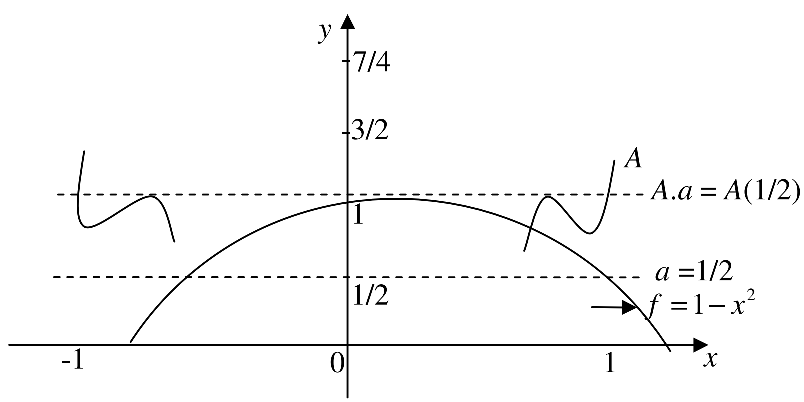
bulunur. Yani,

$$d_2\frac{1}{2}\neq d_1(1/2)$$

dir. Böylece genel olarak

$$\max\left(\inf_{a\in R} d_1(a)\ ,\ \inf_{a\in R} d_2(a)\right)<\inf d_F(a)$$

bulunur. Bu durumu şekille ifade edelim



Şekil 3.1.1

O halde $a=1/2$ en iyi yaklaşımdır.

Yukarıda tanımlanan en iyi yaklaşım için bazı özel durumlar ele alınacaktır. Bazı $g_0\in G$ ve $k\in K$ (veya $\tilde{k}\in\tilde{K}$) için

$$(k,f_1-g_0)=d_F(g_0)\quad \text{ve}\quad (k,f_2-g_0)=-d_F(g_0)$$

$$\left(\text{veya } (\tilde{k},Af_1-Ag_0)=d_F(g_0)\quad \text{ve}\quad (\tilde{k},Af_2-Ag_0)=-d_F(g_0)\right)$$

olacak biçimde $f_1,f_2\in F$ olduğunu varsayalım. Burada, k daki hatayı en küçük yapan g_0 en iyi yaklaşımdır ve g_0 dan başka k daki hatayı en küçük yapan başka değer (yaklaşım) yoktur.

Örneğin $X = C^{(v)}[0,\pi]$, $(v \geq 1)$ $\max\left(\|f\|_\infty , \|Df\|_\infty\right)$ normu ile $Y = C[0,\pi]$, $F = \left\{e^{-x}, \sin x - 1\right\}$ verilsin. A 1. türev dönüşümü olsun.

$$P_1(f) = P_2(f) = \max_{x\in[0,\pi]} \left|f(x)\right|$$

normu tanımlansın. a ve b gerçel sayılar olmak üzere $ax+b$ ile F kompakt kümesine yaklaşalım.

$a=0$, $b=0$ ise $ax+b$ ile F ye yaklaşılabilir. Çünkü bu durumda $x_0 = x_1 = 0$ iken

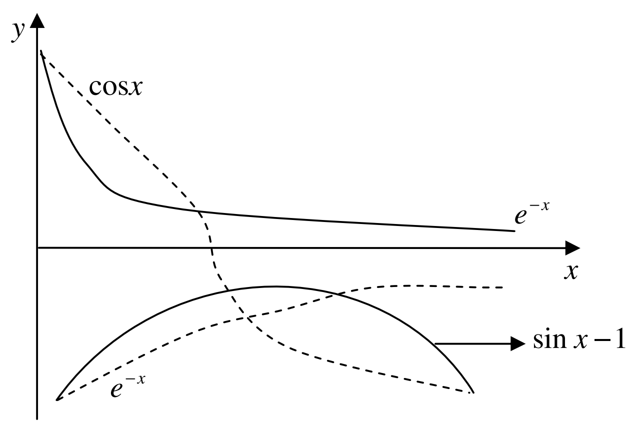
$$d_F(0) = \max\left|f(0)\right| = \max\left|Df(0)\right| = 1$$

ve

$$\left(e^{-0}\right).\left(\sin 0 - 1\right) < 0$$

$$\left(-e^{-0}\right).\left(\cos 0\right) < 0$$

olur. Şekille ifade edersek



Şekil 3.1.2

olur. Yukarıdaki şekilden de kolayca görüldüğü gibi a ve b den başka $x_0 = x_1 = 0$ noktasında hatayı daha küçük yapan bir başka değer yoktur. O halde a ve b en iyi yaklaşım elemanıdır. Yani $ax+b$ ile F ye yaklaşılabilir.

3.2. Genel Karakterizasyon Teoremi

$g' \in G$ olmak üzere

$$B_{g'} = \{k \in K : \exists\, f \in F \text{ için } (k, f - g') = d_F(g')\}$$

$$\tilde{B}_{g'} = \{\tilde{k} \in \tilde{K} : \exists\, f \in F \text{ için } (\tilde{k}, Af - Ag') = d_F(g')\}$$

kümeleri sırasıyla K ve $\tilde{K}$ kümelerinin alt kümeleri olsunlar.

$$d_1(g) = \max_{f \in F} \max_{k \in K} (k, f - g) = \max_{k \in K} \max_{f \in F} (k, f - g)$$

için kompaktlık tanımı gereği $d_1(g) = (k, f - g)$ olacak biçimde bir $k \in K$ ve $f \in F$ vardır. Aynı durum $d_2(g)$ için de geçerlidir. Eğer $d_1(g') \neq d_2(g')$ ise $B_{g'}$, $\tilde{B}_{g'}$ boştur.

Lemma 3.2.1: $g' \in G$ ve $M \subset G$, $\tilde{M} \subset K$ kapalı alt kümeler olsunlar. Ayrıca

$$\max_{f \in F} (k, f - g') \geq 0 \qquad \forall k \in M$$

$$\max(\tilde{k}, Af - Ag') \geq 0 \quad \forall k \in \tilde{M}$$

ve

$$\inf\left((k, g - g'), (\tilde{k}, Ag - Ag')\right) \leq 0 \quad \forall g \in G$$

olsun. Bu durumda

$$\eta = \inf_{g \in G} d_F(g) \geq \inf_{k \in M, \tilde{k} \in \tilde{M}} \left(\max_{f \in F} (k, f - g'), \max(\tilde{k}, Af - Ag') \right)$$

olur[14].

İspat: $k \in M$ için $\max(k, f - g') = 0$ veya $\tilde{k} \in \tilde{M}$ $\max(\tilde{k}, Af - Ag') = 0$ olsun. Bu durumda Lemmanın sağlandığı açıktır. $\forall k \in M$ için

$$\max_{f \in F} (k, f - g') > 0$$

ve $\forall \tilde{k} \in M$

$$\max_{f \in F} (k, Af - Ag') > 0$$

olsun. Varsayalım ki

$$\inf_{k \in M, \tilde{k} \in \tilde{M}} \left(\max_{f \in F} (k, f - g'), \max(\tilde{k}, Af - Ag') \right) > \eta$$

olsun. Bu durumda,

$$\eta \leq d_F(g) < \inf\left(\max(k, f-g'), \max(\tilde{k}, Af - Ag')\right)$$

olacak biçimde bir $g \in G$ vardır.

O halde

$$d_1(g) < \max(k, f-g') \quad , \ \forall k \in M \ \text{ için}$$

ve

$$d_2(g) < \max(\tilde{k}, Af - Ag') \quad , \ \forall \tilde{k} \in \tilde{M} \ \text{ için}$$

olur. Çünkü

$$d_F(g) = \max(d_1(g), d_2(g))$$

idi. Buradan $k \in M$ için

$$(k, f_1 - g) < (k, f_1 - g')$$

olur ve dolayısıyla

$$(k, g - g') > 0$$

olacak biçimde bir $f_1 \in F$ vardır denilir. Ancak bu durum hipotez ile çelişir. Çünkü

$$\inf(k, g-g', \tilde{k}, Ag - Ag') \leq 0$$

kabul edilmişti. O halde varsayım yanlıştır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1: Eğer $g' \in G$, $d_1(g') = d_2(g')$ ve

$$\inf\left((k, g-g'), (\tilde{k}, Ag - Ag')\right) \leq 0 \quad g \in G \qquad (2.1)$$

ise g' en iyi yaklaşımdır[14].

İspat: Yukarıda ispatlanan Lemma 3.2.1 den dolayı

$$\underset{g' \in G}{d_F}(g') \leq \underset{g \in G}{d_F}(g)$$

olduğundan dolayı g' en iyi yaklaşımdır. Bu teorem Lemma 3.2.1 in bir sonucu olarak düşünülebilir ve $d_1(g') \neq d_2(g')$ ise $B_{g'}$ veya $\tilde{B}_{g'}$ dan biri ya da ikisi boştur. Boş olmaması için bu bölümde ki bütün teoremlerde Teorem 3.2.1 de olduğu gibi $d_1(g') = d_2(g')$ olarak alınacaktır.

Örnek 3.2.1: $X = Y = C[0,1]$ ve $A : X \to Y \quad Ah(x) = xh^2(x)$ olsun. $K = \widetilde{K} = \{\pm \hat{x} : x \in (0,1)\}$ olarak kabul edelim. Bu durumda

$$P_1(f) = P_2(f) = |f|_x = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad , \ 0 \le x \le 1$$

olur. F kompakt kümesi sadece $f(x) = x$ fonksiyonlarını içersin ve F ye $g = a$ gerçel sabitleriyle yaklaşıldığını varsayalım. O halde

$$d_F(a) = \max\left(\|x-a\|_\infty , \|x^3 - a^2 x\|_\infty\right)$$

olur. Çünkü

$$d_2(g) = \max_{f\in F} \|Af - Ag\| \Rightarrow d_2(a) = \max_{x\in[0,1]} \|A(x) - A(a)\|$$

$$A(x) = x.x^2 = x^3 \quad \text{ve} \quad A(a) = x.a^2$$

olduğundan

$$d_2(a) = \max \|x^3 - xa^2\|$$

ise

$$d_F(a) = \max\left(d_1(g), d_2(g)\right)$$

ve buradan

$$d_F(a) = \max\left(\|x-a\|_\infty , \|x^3 - a^2 x\|\right)$$

elde edilir. Bu durumda a yı bulmaya çalışalım.

$d_1(a) = d_2(a)$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu durumda $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ için

$$d_F\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \max_{x\in[0,1]}\left(\left\|x - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\|_\infty , \left\|x^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 .x\right\|_\infty\right)$$

ve $x = 0$ için

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = d_1\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = d_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

bulunur. O halde $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ en iyi yaklaşım elemanıdır. Yani $g' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dir.

Uç fonksiyonellerin B_a kümesi sadece $x = 0$ ve negatif f değerli fonksiyonellerden oluşur yani

$$B_a = \{\hat{x} : (\hat{x}, h) = -h(x) \quad \forall h \in C[0,1] \ \text{ ve } \ x = 0\}$$

dir. Benzer şekilde $\tilde{B}_a$ sadece $x=1$ de pozitif değer alan fonksiyonellerden oluşur. Yani

$$\tilde{B}_a = \{\hat{x} : (\hat{x},h) = h(x) \quad \forall h \in C[0,1] \text{ ve } x=1\}$$

dir. Herhangi bir $c \in R$ için örneğin $c=-2$ ise

$$(\hat{x}, c-a) = -\left(-2-(-1+\sqrt{5}/2\right) > 0 \quad \forall \hat{x} \in B_a$$

ve

$$\left(\hat{x}, \underbrace{Ac}_{c^2x} - \underbrace{Aa}_{a^2x}\right) = \left(c^2-a^2\right)x = (-2)^2 - \left(-(-1+\sqrt{5}/2)^2\right) > 0$$

bulunur. Ancak bu (2.1) eşitsizliğini sağlamaz. Çünkü

$$\inf\left((\underbrace{k}_{\hat{x}}, \underbrace{g-g'}_{c-a}), (\underbrace{\tilde{k}}_{\hat{x}}, \underbrace{Ag}_{Ac} - \underbrace{Ag'}_{Aa}) \right) \leq 0$$

olmalıdır. Bu olumsuz sonuc incelenince (2.1) in şartlarının ancak hipotez kısıtlanınca sağlandığı görülür.

Burada (2.1) i sağlayan özel durum tanımlanacaktır. Bu durum Dunham tarafından incelenen kapalı işaret özelliğinin bir genelleştirilmesidir.

Tanım 3.2.1: G, X in konveks bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $h \in G$ ve $W \subset \tilde{K}$ kapalı alt kümesi için

$$\left(w, Ah-Ag\right) \neq 0 \quad \forall w \in W \text{ için } t \in (0,\delta]$$

ve $g_t = g + t(h-g)$ iken

$$\operatorname{sgn}(w, Ah-Ag) = \operatorname{sgn}(w, Ag_t - Ag) \quad \forall w \in W$$

olacak biçimde bir $1 > \delta > 0$ sayısı varsa $g \in G$ de kapalı işaret özelliği vardır denir. Eğer A, G nin her noktasında yani $\forall g \in G$ için yukarıdaki şartı sağlıyorsa A, G üzerinde kapalı işarete sahiptir denilir[14]. Tanımı daha iyi anlayabilmek için $X = Y = C[0,1]$ ve $A: X \to Y \quad Ah = h^2$ olarak alalım. G konveks kümesi

$$G = \{ax : a \geq 0\} \quad \text{ve} \quad \tilde{K} = \{\mp \hat{x} : x \in [0,1]\}$$

olsun. Burada $\hat{x}$, fonksiyonelin x deki değerini gösteren noktadır. Bu durumda G nin herhangi a_1x, a_2x elemanı ve $\tilde{K}$ nın kapalı bir w alt kümesi için

$$\left(\hat{x}, Aa_1x - Aa_2x\right) = \mp(a_1-a_2)(a_1+a_2)x^2 \neq 0 \quad \forall \hat{x} \in w$$

bulunur. Çünkü

$$Aa_1 x = (a_1 x)^2 \quad \text{ve} \quad Aa_2 x = (a_2 x)^2$$

dir.

$$Aa_1 x - Aa_2 x = (a_1 x)^2 - (a_2 x)^2 = (a_1^2 - a_2^2)x^2 = (a_1 - a_2)x^2$$

ve

$$a_t = a_2 + t(a_1 - a_2)$$

olarak alınırsa

$$\left(\hat{x}, Aa_1 x - Aa_2 x\right) = \mp\, t(a_1 - a_2)(2a_2 + t(a_1 - a_2)x^2$$

bulunur.

$a_2 = 0$ için açıkça görüldüğü gibi

$$\operatorname{sgn}(\hat{x}, Aa_1 x - Aa_2 x) = \operatorname{sgn}(\hat{x}, Aa_1 x - Aa_2 x)$$

olur.

Diğer durumda $\forall t \in (0, \delta]$ için $2a_2 + t(a_1 - a_2) > 0$ olacak biçimde $1 > \delta > 0$ vardır. O halde bu δ için

$$\operatorname{sgn}(\hat{x}, Aa_1 x - Aa_2 x) = \operatorname{sgn}(\hat{x}, Aa_t x - Aa_2 x) \ , \ \hat{x} \in w \ , \ t \in (0, \delta]$$

elde edilir. Bu da bize A dönüşümünün kapalı işaret özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Şimdi Örnek 3.2.1 e geri dönelim. Örnekte A dönüşümü $a = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ noktasında kapalı işaret özelliğine sahiptir. Çünkü bu durumda

$$\operatorname{sgn}(w, Ah - Aa) = \operatorname{sgn}(w, Ag_t - Aa) \quad \forall w \in W$$

koşulu sağlanır. Gerçekten Teorem 3.2.1 in (2.1) şartı g' nin en iyi yaklaşım elemanı olması için gerekli değildir. Ancak bu iki durum bağlantılıdır. Bu bağlantıyı aşağıdaki Teoremle verelim.

Teorem 3.2.2: A, $g' \in G$ noktasında kapalı işaret özelliğine sahip ve $d_1(g') = d_2(g')$ olsun. Bu durumda eğer g' en iyi yaklaşım ise

$$\inf_{k \in B_{g'}, \tilde{k} \in \tilde{B}_{g'}} \left((k, g - g'), (\tilde{k}, Ag - Ag')\right) \le 0 \quad \forall g \in G$$

dir[14].

İspat: Varsayalım ki

$$\inf_{k\in B_{g'},\tilde{k}\in\tilde{B}_{g'}}\Big((k, g_1-g'),(\tilde{k}, Ag_1-Ag')\Big)>0 \tag{2.2}$$

olacak biçime bir $g_1\in G$ var olsun. Bu durumda g' nün en iyi yaklaşım olmadığını gösterelim.

$$B_{g'}, \tilde{B}_{g'} \quad \sigma(X^*, X)-\text{kompakt (ya da } \sigma(Y^*, Y)-\text{ kompakt)}$$

olduğundan (2.2) eşitsizliğinden $B_{g'}$, $\tilde{B}_{g'}$ leri içeren $K, \tilde{K}$ nın açık bağlantılı U ve $\tilde{U}$ alt kümelerinin varlığından bahsedilebilir. O halde

$$\inf_{k\in U,\tilde{k}\in\tilde{U}}\Big((k, g_1-g'),(\tilde{k}, Ag_1-Ag')\Big)\geq a \quad \text{bazı } a>0$$

dir. U , $\tilde{U}$ $k,\tilde{k}$ de açık bağlantılı ve $B_{g'}\subset \mathrm{U}$, $\tilde{B}_{g'}\subset\tilde{U}$ oldu

$$d_1(g')-\max_{k\in K/U}\max_{f\in F}(k, f-g')\geq c \tag{2.3}$$

$$d_2(g')-\max_{\tilde{k}\in\tilde{K}/\tilde{U}}\max_{f\in F}(\tilde{k}, Af-Ag')\geq c \tag{2.4}$$

olacak biçimde $c>0$ gerçel sayısı vardır.

$k\in U$, $0<t<1$ için $g_t=g'+t(g_1-g')$ iken

$$\max_{f\in F}(k, f-g_t)=\max(k, f-g')-t(k, g_1-g')$$

$$<\max_{f\in F}(k, f-g')\leq d_1(g') \tag{2.5}$$

bulunur. $k\in K/U$ için t>0 iken

$$\max_{f\in F}(k, f-g_t)\leq\max(k, f-g')-tP_1(g_1-g')$$

$$\leq d_1(g')-c+tP_1(g_1-g')<d_1(g') \tag{2.6}$$

bulunur. $\overline{\tilde{U}}$, $\tilde{U}$ nın kapanışı olsun. A sürekli dönüşüm olduğundan

$$(\tilde{k}, Ag_1-Ag')\geq a \ , \ \forall\tilde{k}\in\tilde{U}$$

bulunur. O halde A, g' de kapalı işaret özelliğine sahiptir ve $k\in\overline{\tilde{U}}$ için $(\tilde{k}, Ag_t-Ag')>0$ elde edilir. $\tilde{k}\in\tilde{U}$ için

$$\max(\tilde{k}, Af-Ag_t)=\max(\tilde{k}, Af-Ag')-(\tilde{k}, Ag_t-Ag')$$

$$<\max_{f\in F}(\tilde{k}, Aa-Ag')\leq d_2(g') \tag{2.7}$$

dir ve $\tilde{k}\in\tilde{K}/\tilde{U}$ için

$$\max(\tilde{k}, Af - Ag_t) \leq \max_{f \in F}(\tilde{k}, Af - Ag') + P_2(Ag' - Ag_t)$$

$$\leq d_2(g') - c + P_2(Ag' - Ag_t) < d_2(g') \quad (2.8)$$

bulunur. $t > 0$ için A nın sürekliliği P_2, (2.5) , (2.6) , (2.7) ve (2.8) birleştirilirse

$$d_F(g_t) < d_F(g')$$

bulunur. Bu da g' nın en iyi yaklaşım olmadığını gösterir. O halde varsayım yanlıştır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Not: Eğer *A* lineer dönüşüm ise *A* nın *G* üzerinde kapalı işaret özelliğine sahip olduğu açıktır.

IV. BÖLÜM

FONKSİYONLARA VE BU FONKSİYONLARIN ARİTMETİK ORTALAMASINA EN İYİ L_1 YAKLAŞIMLARI

4.1.Giriş

$C[a,b]$ nin bir S alt kümesinin elemanları ile $C[a,b]$ ye ait f_1 ve f_2 fonksiyonlarına aynı anda en iyi yaklaşımları Diaz ve McLaughlin [6] ve Ling [12] supremum normunda, Phillips ve Sahney [16] da L_1 ve L_2 normlarında çalışmışlardır. Bu çalışmalarda $n \geq 2$ olmak üzere n tane fonksiyona en iyi aynı anda yaklaşımın ilgili normda n fonksiyonunun aritmetik ortalamasına en iyi yaklaşım ile aynı olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışmada amaç n fonksiyona en iyi aynı anda L_1-yaklaşımının farklı tanımlarını vererek n fonksiyona en iyi aynı anda L_1-yaklaşımı ile n fonksiyonun aritmetik ortalamasına en iyi yaklaşımın aynı olup olamayacağını göstermekdir.

4.1. L_1 Yaklaşımı Üzerine Tanımlar

Tanım 4.1.1:

$f_1, f_2, ..., f_n \in C[a,b]$ *ve* $S \subset C[a,b]$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için

$$\max_j \left\| f_j - s^* \right\| \leq \max_j \left\| f_j - s \right\|$$

olacak şekilde bir $s^* \in S$ varsa, buna $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarına bir en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı denir. Burada $\|.\|$, $C[a,b]$ üzerinde L_1 normunu gösterir[10].

Tanım 4.1.2:

$f_1, f_2, ..., f_n \in C[a,b]$ ve $S \subset C[a,b]$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için

$$\int_a^b \max_j \left| f_j(x) - s^*(x) \right| dx \le \int_a^b \max_j \left| f_j(x) - s(x) \right| dx$$

olacak şekilde bir $s^* \in S$ varsa, buna $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarına bir en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı denir[10].

Tanım 4.1.3:

$f_1, f_2, ..., f_n \in C[a,b]$ ve $S \subset C[a,b]$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| f_i - s^* \right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left\| f_i - s \right\| \tag{3}$$

olacak şekilde bir $s^* \in S$ varsa, buna $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarına bir en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı denir[].

Tanım 4.1.2 anlamında iki fonksiyona en iyi aynı anda yaklaşım ile bu fonksiyonların aritmetik ortalamasına olan en iyi L_1-yaklaşımının aynı olduğu Philips ve Sahney [12] tarafından gösterildiğinden öncelikle en iyi aynı anda L_1-yaklaşımlarını Tanım 4.1.1 anlamında incelenecektir.

Genelde kullanılacak bir not olarak aşağıdaki ifade verilebilir;

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - s \right\| = \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{ns}{n} \right\| = \left\| \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - ns}{n} \right\| = \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} (f_i - s) \right\|}{n}$$

$$\le \frac{1}{n}\left(\max_j \left\| f_j - s \right\| + \underset{j}{...} + \max_j \left\| f_j - s \right\| \right)$$

$$= \frac{n \max_j \left\| f_j - s \right\|}{n} = \max_j \left\| f_j - s \right\|$$

S üzerinde infimum alınırsa ortalamaya en iyi L_1-yaklaşımının sapmasına yukarıdan bir üst sınır olarak Tanım 4.1.1 anlamında en iyi aynı anda yaklaşımının sapması bulunur. Yani

$$\inf_{s\in S}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - s\right\| \le \inf_{s\in S}\max_j \left\|f_j - s\right\|$$

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - s^*\right\| \le \max_j \left\|f_j - s\right\|$$

dir.

Genel olarak Tanım 4.1.1 anlamında en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı ortalamaya en iyi L_1-yaklaşığı ile çakışmaz. Bunu bir örnek ile gösterelim.

Örnek 4.1.1:

[0,1] üzerinde $f_1(x)=0$, $f_2(x)=x$ fonksiyonlarını ele alalım. S gerçel sayılar kümesi olmak üzere Tanım 4.1.1 e göre $\forall s\in S$ için

$$\max_j\left\{\left\|f_j - s^*\right\|\right\} \le \max_j\left\{\left\|f_j - s\right\|\right\}, \quad j=1,2$$

olacak şekilde bir $s_1^* \in S$ bulunmalıdır. O halde

$$\max_j\left\{\left\|s_1^*\right\|,\left\|x-s_1^*\right\|\right\} \le \max_j\left\{\left\|s\right\|,\left\|x-s\right\|\right\}$$

$$= \max\left\{\int_0^1 |s|dx, \int_0^1 |x-s|dx\right\} \tag{4}$$

dir.

Bu durumda $f(s)=|s|$ ve $g(s)=\int_0^1 |x-s|dx$ alalım. $s<0$, $0\le s\le 1$ *ve* $1\le s$ farklı durumları için $g(s)$ yi hesaplayalım.

$0<s$ için

$$g(s)=\int_0^1 (x-s)dx = \left.\frac{x^2}{2}-sx\right|_0^1 = \frac{1}{2}-s$$

$0<s<1$ *için*;

$$g(s)=\int_0^s (-x+s)dx + \int_s^1 (x-s)dx = \left.-\frac{x}{2}+sx\right|_0^s + \left.\frac{x^2}{2}-sx\right|_s^1$$

$$= -\frac{s^2}{2} + s^2 + \frac{1}{2} - s - \frac{s^2}{2} + s^2$$
$$= s^2 - s + \frac{1}{2}$$

$1 < s$ için

$$g(s) = \int_0^1 -(x-s)\,dx = -\frac{x^2}{2} + sx \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + s = s - \frac{1}{2}$$

ve böylece

$$f(s) = |s|, \qquad g(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} - s, & s \le 0 \text{ ise} \\ s^2 - s + \frac{1}{2}, & 0 \le s \le 1 \text{ ise} \\ s - \frac{1}{2}, & 1 \le s \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda öyle bir s_1^* gerçel sayısı bulacağız ki (4) in sağ tarafında hesaplanan bütün maksimumlar s_1^* için bulunan maksimumdan büyük olsunlar. f ve g nin kesiştikleri noktada bu iki fonksiyonun aynı olduğu ve dolayısıyla en küçük maksimum değerini verdiği görülür. Yani bu nokta solunda hesaplanan maksimum değerlerin sonuncusu ve en küçüğü ve sağında hesaplanan maksimum değerlerin birincisi ve en küçüğüdür. Bunu veren s_1^* ortak köktür. O halde $s = s^2 - s + \frac{1}{2}$ ise $2s^2 - 4s + 1 = 0$ ve buradan $s_1^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak bulunur. $\frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{0 + x}{2} = \frac{x}{2}$ ye en iyi L_1-yaklaşığı ise

$$\underset{s \in S}{Inf} \left\| \frac{x}{2} - s_2 \right\| = \left\| \frac{x}{2} - s_2^* \right\|_1$$

olacak şekilde bir s_2^* aranırsa $x = 0$ ve $s = 0$ için $\frac{x}{2} - s = 0$ olduğundan sol taraftaki kümenin infimumu 0 dır. O halde $\left\| \frac{x}{2} - s_2^* \right\| = 0$ olacak şekilde s_2^* bulunur.

$$g(s) = \left\| \frac{x}{2} - s \right\| \qquad s \in S = R, x \in [0,1]$$

fonksiyonunu minimum yapan s yi bulalım.

$$g(s)=\left\|\frac{x}{2}-s\right\|=\int_0^1\left|\frac{x}{2}-s\right|dx=\frac{1}{2}\int_0^1|x-2s|dx$$

$s<0$ için

$$g(s)=\frac{1}{2}\int_0^1|x-2s|dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2sx\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2s\right)=\frac{1}{4}-s$$

$0\le s\le 1$ için

$$g(s)=\frac{1}{2}\int_0^1|-x+2s|dx+\frac{1}{2}\int_{2s}^1(x-2s)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+2sx\right)\Bigg|_0^{2s}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2sx\right)\Bigg|_{2s}^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(4s^2-2s+\frac{1}{2}\right)=2s^2-s+\frac{1}{4}$$

$1\le s$ için

$$g(s)=\frac{1}{2}\int_0^1(-x+2s)dx=s-\frac{1}{4}$$

$$g(s)=\begin{cases}\frac{1}{4}-s, & s\le 0 \text{ ise}\\ 2s^2-s+\frac{1}{4}, & 0\le s\le 1 \text{ ise}\\ s-\frac{1}{4}, & 1\le s \text{ ise}\end{cases}$$

$g'(s)=0$ için $4s-1=0$ buradan $s=\frac{1}{4}$ elde edilir. Elde edilen bu $s=\frac{1}{4}$ için $g(s)$ minimumunu alır. Böylece $s_2^*=\frac{1}{4}$ olarak bulunmuş olur. Görüldüğü gibi $s_1^*\neq s_2^*$ olur. Yani Tanım 4.1.1 anlamında en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı ile ortalamaya en iyi L_1-yaklaşığı çakışmaz.

Tanım 4.1.1 anlamında en iyi aynı anda yaklaşımı inceledikten sonra Tanım 4.1.2 anlamında en iyi aynı anda yaklaşımı inceleyelim.

4.3. Teoremler

Teorem 4.3.1: $f_1, f_2 \in C[a,b]$ ve $S \subset C[a,b]$ olsun. s^* ın Tanım 4.1.2 anlamında f_1 ve f_2 ye bir en iyi aynı anda yaklaşık olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ye bir en iyi L_1- yaklaşığı olmasıdır[10].

Bu teoremin ikiden çok fonksiyona doğrudan doğruya genişletilemeyeceğini gösterelim.

Teorem 4.3.2:

Eğer $s^* \in S$ den $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$ aritmetik ortalamasına bir en iyi L_1-yaklaşığı ve $n > 2$ ise genelde s^* , Tanım 4.1.2 anlamında $f_1, f_2, ..., f_n$ ye bir en iyi aynı anda yaklaşık değildir[10].

İspat: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$ mantığı ile ispat yapılırsa;

$p : s^*;\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$ ye bir en iyi L_1- yaklaşığı.

$q : s^*;\ f_1, f_2, ..., f_n$ ye Tanım 4.1.2 anlamında bir en iyi aynı anda yaklaşık değildir.

$q' : s^*;\ f_1, f_2, ..., f_n$ ye Tanım 4.1.2 anlamında bir en iyi aynı anda yaklaşıktır.

$p' : s^*;\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$ ye bir en iyi L_1-yaklaşığı değildir.

Öncelikle q' yü kabul ederek s^*, $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarına en iyi aynı anda yaklaşık olsun. Bu s^* , biri f_1 ve diğeri *n – 1* tanesi f_2 ye eşit olan n fonksiyona aynı anda yaklaşır. s^* yalnız $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ aritmetik ortalamasına en iyi yaklaşıktır ve aynı zamanda

$$\frac{1}{n}(f_1 + f_2 + ... + f_n) = \frac{1}{n} f_1 + \frac{n-1}{2} f_2$$

ortalamasına da en iyi yaklaşık olamaz. Yani

$$\inf_{s \in S}\left\| \frac{f_1 + f_2}{2} - s \right\| \neq \inf_{s \in S}\left\| \frac{1}{n} f_1 + \frac{n_1 - 1}{n} f_2 - s \right\|$$

dır. Tanım 4.1.2 anlamında $n > 2$ olmak üzere n fonksiyona aynı anda yaklaşım için bir sonuç elde etmek amacı ile

$$g_1(x) = \max_k \{f_k(x), \qquad k = 1,2,...,n\}$$

$$g_2(x) = \min_k \{f_k(x), \qquad k = 1,2,...,n\}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlara bağlı olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.3: $f_1, f_2, ..., f_n \in C[a,b]$ ve $S \subset C[a,b]$ olsun. $s^* \in S$ nin $f_1, f_2, ..., f_n$ ye Tanım 4.1.2 anlamında bir en iyi aynı anda yaklaşık olması için gerek ve yeter koşul Tanım 4.1.2 anlamında g_1 ve g_2 fonksiyonlarına bir en iyi aynı anda yaklaşık olmasıdır.

İspat: Herhangi bir x için

$$\max_k |f_k(x) - s(x)| = \max_k \left[|g_1(x) - s(x)|, |g_2(x) - s(x)|\right]$$

olduğu aşikardır. İki tarafın integrali ve S üzerinden infimumu alınırsa

$$\inf_{s \in S} \int_a^b k \max_k |f_k(x) - s(x)| dx \le \inf_{s \in S} \int_a^b \max_k \left[|g_1(x) - s(x)|, |g_2(x) - s(x)|\right] dx \qquad (5)$$

elde edilir.

$\Rightarrow$ eğer s^*, $f_k(x)$, $k = 1,2,...,n$ fonksiyonlarına bir en iyi aynı anda yaklaşık ise

$$\int_a^b \max_k |f_k(x) - s(x)| dx \le \inf_{s \in S} \int_a^b \max_k \left[|g_1(x) - s(x)|, |g_2(x) - s(x)|\right] dx$$

$$\le \int_a^b \max_k \left[|g_1(x) - s(x)|, g_2(x) - s(x)\right] dx$$

olduğundan s^* , g_1 ve g_2 fonksiyonlarına da bir en iyi aynı anda yaklaşıktır.

$\Leftarrow g_1$ ve g_2 fonksiyonlarına bir en iyi aynı anda yaklaşık s^* ise (5) de infimumların eşitliği nedeni ile s^* , f_k lara bir en iyi aynı anda yaklaşıktır.

4.1.1 ve 4.3.3 nolu teoremlerden aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.3.4: $f_1, f_2, ..., f_n \in C[a,b]$ ve $S \subset C[a,b]$ olsun. $s^* \in S$ nin $f_1, f_2, ..., f_n$ ye Tanım 4.1.2 anlamında bir en iyi aynı anda yaklaşık olması için gerek ve yeter koşul s^* ın $\max_k\{f_k(x)\}$ *ve* $\min_k\{f_k(x)\}$ in aritmetik ortalamasına bir en iyi yaklaşık olmasıdır[10].

Not: Dikkat edilecek olursa $n=2$ için

$$\frac{1}{2}\max_k\{f_k(x)\}+\frac{1}{2}\min_k\{f_k(x)\}=\frac{1}{2}\{f_1+f_2\}$$

olduğundan Teorem 4.3.4 ün Teorem 4.3.1 in genelleştirilmiş hali olduğu görülür.

Son olarak Tanım 4.1.3 anlamında en iyi aynı anda L_1-yaklaşımı inceleyelim.

Teorem 4.3.5: Eğer $\operatorname{sign}\left(s(x)-f_j(x)\right)$ fonksiyonları $\forall x\in[a,b], \forall j=1,2,...,n$ ve $\forall s\in S$ için daima pozitif (veya negatif) ise o zaman Tanım 4.1.3 anlamında $f_1, f_2,..., f_n$ fonksiyonlarına en iyi aynı anda yaklaşık $f_1, f_2,..., f_n$ fonksiyonlarının aritmetik ortalamasına en iyi L_1- yaklaşığı çakışır.

İspat: Hipoteze göre

$$\int_a^b\sum_{i=1}^n\left|f_i(x)-s(x)\right|dx=\int_a^b\left|\sum_{i=1}^n\left(f_i(x)-s(x)\right)\right|=n\int_a^b\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i(x)-s(x)\right|dx \quad (6)$$

dir. Dolayısıyla S üzerinden (6) ın sağ tarafından infimum alınarak

$$\inf_{s\in S} n\int_a^b\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_1(x)-s(x)\right|dx=n\inf_{s\in S}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i(x)-s(x)\right\|=n\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i(x)-s^*(x)\right\| \quad (7)$$

elde edilir. Burada infimumu sağlayan s elemanının s_1^* olduğunu varsaydık. Diğer yandan (6) nın sağ tarafında infumumdan hareket edilirse

$$\inf_{s\in S}\int_a^b\sum_{i=1}^n\left|f_1(x)-s(x)\right|dx=\inf_{s\in S}\sum_{i=1}^n\int_a^b\left|f_i(x)-s(x)\right|dx=\inf_{s\in S}\sum_{i=1}^n\left\|f_i(x)-s(x)\right\|$$

$$=\sum_{i=1}^n\left\|f_i(x)-s^*(x)\right\| \quad (8)$$

olur. (7) ve (8) eşit olduklarında (7) de s^* , aritmetik ortalamaya en iyi yaklaşık olurken (8) de aynı s^* , n tane fonksiyona en iyi aynı anda yaklaşık olmaktadır.

Tanım 4.1.3 anlamında f_1 ve f_2 ye bir en iyi aynı anda yaklaşımın genelde aritmetik ortalamaya en iyi L_1-yaklaşımı ile çakışmadığını bir örnek ile gösterelim.

Örnek 4.3.1: İlk verdiğimiz örnekte olduğu gibi $[0,1]$ üzerinde $f_1(x)=0,\quad f_2(x)=x$ fonksiyonlarını ele alalım. S gerçel sayılar kümesi olmak üzere Tanım 4.1.3 anlamında f_1 ve f_2 ye bir en iyi aynı anda yaklaşım sabit $s=0$ olduğu halde bu fonksiyonların aritmetik ortalamasına L_1-yaklaşığı önce de görüldüğü gibi $s=\dfrac{1}{4}$ dür.

Gerçekten Tanım 4.1.3, f_1 ve f_2 için yazılırsa;

$$\begin{aligned} g(s)=\sum_{i=1}^{n}\|f_i-s\| &= \|f_1-s\|+\|f_2-s\| \\ &= \|0-s\|+\|x-s\| \\ &= \int_0^1 |s|dx+\int_0^1 |x-s|dx \end{aligned}$$

elde edilir.

$s<0$ için

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^1 -sdx+\int_0^1 (x-s)dx \\ &= \frac{1}{2}-2s \end{aligned}$$

$0<s<1$ için

$$g(s)=\int_0^1 sdx+\int_0^s (-x+s)dx+\int_s^1 (x-s)dx$$

$1<s$ için

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^1 sdx+\int_0^1 (-x+s)dx \\ &= 2s-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$g(s)$ nin minimumu $g'(s)=s$ ise $g'(s)=0$ için $s=0$ olduğundan $g(0)=\dfrac{1}{2}$ olur.

Böylece $\min g(s)=\dfrac{1}{2}$ dir ve bu değeri $s=0$ için aldığından $s^*=0$ olduğu görülür.

V. BÖLÜM

BİR FONKSİYON VE TÜREVLERİNE AYNI ANDA YAKLAŞIM

5.1. Giriş

Morsund[6] bir fonksiyon ve onun ilk r türevlerine düzgün yaklaşım problemini bir polinom ve onun ilk r türevleriyle aynı anda yaklaşımı ile ele almış ve bu polinomların karakteristiğini ve tekliğini incelemiştir. Morsund tarafından ele alınan örnekler bir fonksiyona düzgün yaklaşım problemi ile bir fonksiyon ve onun ilk r türevlerine aynı anda yaklaşım problemleri arasında bir fark olduğunu göstermiştir. Bu farkın genelde en iyi aynı anda yaklaşım polinomunun tek olmayışından meydana geldiği görülmüştür.

Burada amacımız bir fonksiyon ve onun türevlerine aynı anda yaklaşım problemini L_p normunda ele almaktır. En iyi yaklaşım polinomunun tekliğini sağlamak yerine yaklaşım polinomları ailesinin katsayıları üzerinde belirli lineer koşullar oluşturmaktır. Katsayılar üzerindeki bu tür kısıtlamalar tamamen doğaldır ve bu Markov'un çalışmalarında ve özellikle son yıllarda Grebenyuk'un Chebyshev yaklaşım problemi ile ilgili çalışmasında görülmektedir.

Bu bölümde genelde teklik probleminin ve özellikle doğallığı(yapısı) bozulmuş lineer durumların karakteristiği incelenecektir. Sıfır fonksiyonuna yaklaşım durumları ele alınacaktır. $(n-1)$ dereceli polinomlarda L_2 normunda X^n ye aynı anda yaklaşım incelenecektir.

5.2. Teklik

n , r doğal sayılar $n \geq r-1$ ve $f \in C^r\left[-1,1\right]$ olsun. $\prod_n^*$:

$$\sum_{v=0}^{n} c_{jv} a_v = \beta_j \qquad \left(j = 0,1,...,r-1\right) \tag{2.1}$$

koşullarını sağlayan $p(x)=\sum_{v=0}^{n} a_v x^v$ formundaki polinomların sınıfın göstersin. Burada c_{jv} nin ilk r satır ve sütunundan oluşan kare alt matrisi singuler değildir. $w_k(x)$; $k=0,1,...,r$ için $[-1,1]$ de sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon ve bu aralıkta en çok sonlu sayıda sıfırı olsun.

$$\|f-p\|_{r,p}=\max_{0\le k\le r}\left\{\int_{-1}^{1}\left|f^{(k)}(x)-p^{(k)}(x)\right|^{p} w_k(x)\,dx\right\}^{1/p} \quad , p>1 \qquad (2.2)$$

için $\|g\|_{r,p}$ $C^v[-1,1]$ üzerinde bir normdur.

$$\rho_{r,p}^{(n)}(f)=\inf_{p\in\pi_n^*}\|f-p\|_{r,p} \qquad (2,3)$$

tanımı ile infimuma ulaşılmış olur.

Teorem 5.2.1: (2.3) ü minimize eden $p(x)\in\pi_n^*$ polinomu tektir[1].

İspat: p_1 ve p_2 *n.* dereceden en iyi yaklaşım polinomları ise

$$R=\frac{1}{2}(p_1+p_2)$$

olsun.

$$\left|f^{(k)}(x)-R^{(k)}(x)\right|^{p}=\frac{1}{2}\left|f^{(k)}(x)-p_1^{(k)}(x)\right|^{p}+\frac{1}{2}\left|f^{(k)}(x)-p_2^{(k)}(x)\right|^{p}$$

olduğu biliniyor ve eşitlik sadece $p_1^{(k)}(x)=p_2^{(k)}(x)$ olduğu zaman sağlanır. Eğer her $0\le k\le r$ için $p_1^{(k)}(x)\ne p_2^{(k)}(x)$ olsaydı $w_k(x)$ in $[-1,1]$ aralığında sürekli ve pozitif olmasından

$$\|f-R\|_{r,p}<\frac{1}{2}\|f-p_1\|+\frac{1}{2}\|f-p_2\|$$

eşitsizliği elde edilirdi. Buradan $0\le j\le r$ olmak üzere $p_1^{(j)}(x)\equiv p_2^{(j)}(x)$ koşulunu sağlayan bir j vardır. (2.1) eşitliği $p_1(x)\equiv p_2(x)$ olduğunu gösterir ki böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.2: n, r sabit tamsayılar $n \geq r-1$ ve $f \in C^r[-1,1]$ olsun. Herhangi bir $p>1$ için $p_p(x)$ (2.3) deki minimum polinom olsun. Bu durumda $p_j \to \infty$ için

$$\lim_{j\to\infty} p_{p_j}(x) = p^*(x)$$

olacak şekilde $\{p_j\}$ lerin sonsuz alt dizisi vardır ve $p^*(x)$ polinomu $\prod_n^*$ sınıfında $f(x),...,f^{(r)}(x)$ fonksiyonlarına en iyi aynı anda düzgün yaklaşımdır[1].

Teorem 5.2.3: $f \in C^r[-1,1]$ ve sabit bir $p>1$ için

$$-\sqrt[p]{p}+1 \leq \xi_0 \leq ... \leq \xi_{r-1} \leq \sqrt[p]{p}+1$$

olsun. Bu durumda $j = 0,1,2...,r-1$ olmak üzere ξ_j noktalarında f yi interpole eden n . dereceden bütün $p(x)$ polinomları arasında

$$\max_{0\leq k\leq r}\left\{\int_{-1}^{1}\left|f^{(k)}(x)-p^{(k)}(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}$$

yi minimize eden polinomu ile aynı sınıftan olan ve

$$\left\{\int_{-1}^{1}\left|f^{(r)}(x)-p^{(r)}(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}$$

yi minimize eden polinomu özdeştir[1].

5.3. Sıfıra Yaklaşım

$f=0$, $p=2$, $r=1$ alındığında $w_0(x)=w_1(x)=1$ ise

$$\|f-p\|_{r,p} = \max_{0\leq k\leq r}\left\{\int_{-1}^{1}\left|f^{(k)}(x)-p^{(k)}(x)\right|^p w_k(x)\,dx\right\}^{1/p}, p>1 \qquad (2.2)$$

problemi derecesi $n \geq 2$ olan polinomlar arasından

$$\max\left(\int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx, \int_{-1}^{1} p'^2(x)\,dx\right) \qquad (4.1)$$

problemine dönüşür. Bu dönüşüm

$$a_0+\sum_{v=0}^{n} c_v a_v = \beta, \left(p(x)=\sum_{v=0}^{n} a_v x^v\right) \qquad (4.2)$$

koşulu altında olur. Gerçekten

$$\|f-p\|_{1,2} = \max_{0\le k\le r}\left\{\int_{-1}^{1}\left|0-p^{(0)}(x)\right|^2 w_0(x)\,dx, \int_{-1}^{1}\left|0-p^{(1)}(x)\right|^2 w_1(x)\,dx\right\}^{1/2}$$

$$= \max\left(\int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx, \int_{-1}^{1} p'^2(x)\,dx\right)$$

elde edilir.

Tanım 5.3.1: $w_k(x)$; $k=0,1,...,r$ olmak üzere $[-1,1]$ aralığında en çok sonlu sayıda sıfıra sahip negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur.

Şayet $v=0,1,...,n$ için $c_v=0$ ve $\beta=1$ yani $p(0)=1$ olması durumunda (4.1) ifadesini minimize eden polinomları karakterize edebiliriz.

Teorem 5.3.1: (4.1) i minimize eden $Q(x)$ polinomu $n\ge 2$ için

$$\int_{-1}^{1} Q^2(x)dx = \int_{-1}^{1} Q'^2(x)dx = \rho^2 \tag{4.3}$$

dır[1]. Burada $\rho=\rho_{1,2}^{(n)}(0)$ dır ve bu (2.3) eşitsizliğinden bulunmuştur.

İspat: (i) Varsayalım ki

$$\int_{-1}^{1} Q^2(x)dx < \int_{-1}^{1} Q'^2(x)dx = \rho^2 \tag{4.4}$$

olsun. Bu durumda $\rho>0$ ve dolayısıyla $Q'(x)\ne 0$ dır. Bundan dolayı

$$\mu_k = \int_{-1}^{1} Q'(x)x^k dx \ne 0$$

olacak şekilde $0\le k\le n-1$ aralığında mutlaka bir k vardır.

$R(x)=Q(x)-\dfrac{\lambda x^{k+1}}{\mu_k(k+1)}$ polinomu için $R(0)=1$ ve $\lambda\to 0$ iken

$$\int_{-1}^{1} R'^2(x)\,dx = \rho^2 - 2\lambda + O(\lambda^2)$$

$$\int_{-1}^{1} R^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} Q^2(x)\,dx + O(\lambda)$$

uygun pozitif küçük bir λ için

$$\max\left\{\int_{-1}^{1} R^2(x)\,dx, \int_{-1}^{1} R'^2(x)\,dx\right\} < \rho^2$$

dır. Bu da $Q(x)$ in en iyi polinom olmasıyla çelişir.

(ii) Diğer yandan

$$\rho^2 = \int_{-1}^{1} Q^2(x)dx > \int_{-1}^{1} Q'^2(x)dx \tag{4.5}$$

olduğunu varsayalım. $1 \le k \le n$ olmak üzere herhangi bir k için

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\,x^k\,dx \ne 0$$

ise (i) deki incelemeye benzer bir inceleme ile $Q(x)$ in en iyi polinom olmadığı görülür. Eğer $Q(x)$ en iyi polinom ise o zaman (4.5) bağıntısı

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\,x^k\,dx = 0\ ,\ \ k = 0,1,...,r \tag{4.6}$$

olmasını gerektirir. Burada (4.6) nın ve (4.5) ile çeliştiğini göstereceğiz. $Q(0)=1$ olduğundan (4.6) dan

$$\int_{-1}^{1} Q^2(x)dx = \int_{-1}^{1} Q(x)dx \tag{4.7}$$

$$\int_{-1}^{1} Q'^2(x)dx = Q(x)Q'(x)\Big|_{-1}^{1} - Q''(0)\int_{-1}^{1} Q(x)dx \tag{4.8}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 Q'^2(x)dx = Q(x)Q'(x)\Big|_{-1}^{1} \tag{4.9}$$

elde edilir.

(4.7), (4.8), (4.9) birleştirilirse

$$\int_{-1}^{1} Q'^2(x)dx \ge \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)Q'^2(x)dx = -Q''(0)\int_{-1}^{1} Q^2(x)dx \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. $k = 2v, v = 1,2,...,\left[\frac{n}{2}\right]$ ile (4.6) beraber kullanılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left\{\frac{Q^{(2j)}(0)}{(2j)}\frac{1}{2v+2j+1}\right\} + \frac{1}{2v+1} = 0, v = 1,2,...,\left[\frac{n}{2}\right] \tag{4.11}$$

Kramer kuralından

$$-\frac{1}{2}Q''(0)=\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7}\cdots & \frac{1}{2m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2m+1} & \cdots & \frac{1}{4m+1} \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{7}\cdots & \frac{1}{2m+3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2m+3} & \cdots & \frac{1}{4m+1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ dır. Bu determinantlar Cauchy tipi determinantlardır.

Burada $m\geq 1$ için

$$-\frac{1}{2}Q''(0)=\frac{2m(2m+3)}{3}\geq 1 \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.10) , (4.12) ifadeleri (4.5) ile çelişir. Bu da Teorem 5.3.1 in ispatını tamamlar.

Burada Teorem 5.3.1 ün L_p normunda genişletilip genişletilemeyeceği sorusu akla gelir. Böyle bir sonuca ulaşılamayabilir. Bunun ile birlikte aşağıdaki teoremlerde m pozitif bir sayı olmak üzere $p=2m$ için sağlanır.

Teorem 5.3.2: $p(0)=1$ ile n. dereceden bütün polinomlar arasında

$$\max\left\{\int_{-1}^{1} p^{2m}(x)\,dx, \int_{-1}^{1} p'^{2m}(x)\,dx\right\}$$

ifadesini minimize eden $Q(x)$ polinomu çifttir[1].

İspat: Eğer $Q(x)=R(x)+S(x)$ ve burada $R(x)$, $Q(x)$ in çift, $S(x)$ tek kısmı ise

$$\int_{-1}^{1} Q^{2m}(x)dx=\sum_{v=0}^{2m}\binom{2m}{v}\int_{-1}^{1} R^{2m-v}(x)\,S^{v}(x)dx$$

$$=\sum_{v=0}^{m}\binom{2m}{2v}\int_{-1}^{1} R^{2m-2v}(x)\,S^{2v}(x)dx$$

$$\geq \int_{-1}^{1} R^{2m}(x)\,dx$$

bulunur. Benzer bir şekilde

$$\int_{-1}^{1} Q'^{2m}(x)\,dx \geq \int_{-1}^{1} R'^{2m}(x)\,dx$$

elde edilir. Çünkü $R(0)=1$ olduğundan teklik teoremi $Q(x)=R(x)$ sonucunu verir. $n=0$ veya $n=1$ olduğu zaman Teorem 5.3.2, $Q(x)=1$ sonucunu verir. $n=2$ için (4.3) kullanılarak

$$Q(x)=1-ax^2,\ a=\frac{5}{17}\left(\sqrt{\frac{56}{5}}-1\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.3.3: Teorem 5.3.2 de geçen $Q(x)$ polinomunun $[-1,1]$ kapalı aralığında hiçbir sıfır yeri yoktur[1].

İspat: $Q(\eta)=0$ ve $|\eta|\leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{0}^{1} Q^{2m}(x)\,dx = \int_{0}^{1}\left(\int_{\eta}^{x} Q'(t)dt\right)^{2m}$$

$$\leq \int_{0}^{1}(x-\eta)^{2m-1}\left(\int_{\eta}^{x} Q'(t)dt\right)^{2m} dx$$

ve $Q(x)\neq 0$ olduğundan

$$\int_{0}^{1} Q^{2m}(x)\,dx < \frac{1}{2m}\int_{0}^{1} Q'^{2m}(x)\,dx$$

elde edilir. $[-1,0]$ aralığı içinde aynı argümanları kullanarak

$$\int_{-1}^{1} Q^{2m}(x)\,dx < \frac{1}{2m}\int_{-1}^{1} Q'^{2m}(x)\,dx \qquad (4.14)$$

benzer bir ifade bulunur. $Q(x)$ en iyi yaklaşım polinomu olduğu için (4.14) ten

$$\int_{-1}^{1}\left(Q'(x)\right)^{2m-1} x^k\,dx = 0,\ k=0,1,\ldots,n-1$$

eşitliği bulunur ve bu ifade (4.14) ile çelişir.

5.4. X^n ye Yaklaşım

$f(x)=x^n$, $n\geq 3$, $p=2$, $r=1$ ve $w_0(x)=w_1(x)=1$ $p(0)=1$ olmak üzere derecesi $n-1$ olan bütün $p(x)$ polinomları arasında (2.2) minimize edilmeye çalışılacaktır. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.4.1: $Q(x)$ polinomu için

$$\max\left\{\int_{-1}^{1}\left(x^n-p(x)\right)^2 dx, \int_{-1}^{1}\left(nx^n-p'(x)\right)^2 dx\right\}=\rho^2 \tag{5.1}$$

eşitliğinde gösterilen integraller $p(0)=1$ ile derecesi $n-1$ olan bütün $p(x)$ polinomları için eşittir[1].

İspat: (i) $x^n-Q(x)=R(x)$ alalım.

$$\int_{-1}^{1} Q^2(x)dx<\int_{-1}^{1} R'^2(x)dx \tag{5.2}$$

olsun. Bu durumda Teorem 5.3.3 de olduğu gibi (5.2) den

$$\int_{-1}^{1} R'(x)x^k dx=0,\quad k=0,1,2,...,n-2$$

elde edilir ve buradan

$$R'(x)=\lambda_n p_{n-1}(x),$$

$$\lambda_n=\frac{\left((n-1)!\right)^2 2^{n-1}}{(2n-2)!}$$

$$R(x)=-1+\lambda_n\int_0^x p_{n-1}(t)dt$$

olduğu kolayca görülür. $p_m(x)$ normalize edilmiş *n.* dereceden Legendre polinomunu $\left(p_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n\left(1-x^2\right)^n\right)$ gösterir.

$$\int_{-1}^{1} p_m{}^2(x)dx=\frac{2}{2m+1} \tag{5.3}$$

buradan

$$\int_{-1}^{1} R'^2(x)dx = \frac{2\lambda_n^2}{2n-1} \tag{5.4}$$

$$\int_{-1}^{1} R'^2(x)dx = 2 + \lambda_n^2 \int_{-1}^{1}\left(\int_0^x p_{n-1}(t)\,dt\right)^2 dx - 2\lambda_n \int_{-1}^{1} dx \int_0^x p_{n-1}(t)\,dt \tag{5.5}$$

elde edilir. Bilindiği gibi

$$p_n'(x) - p_{n-2}'(x) = (2n-1)\,p_{n-1}(x)$$

dir. Legendre polinomlarının ortagonalliği kullanılırsa

$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^x p_{n-1}(t)\,dt = -\frac{2}{2n-1}\{p_n(0) - p_{n-2}(0)\} \tag{5.6}$$

sonucu bulunur. Eğer n tek ise (5.5) teki en son integralin sağ tarafı sıfırdır. Dolayısıyla

$$\int_{-1}^{1} R^2(x)dx > 2 \tag{5.7}$$

olur. Diğer bir deyişle kolayca görülebileceği gibi n artarken $\frac{2\lambda_n^2}{2n-1}$ azalandır ve $n=3$ için $\frac{8}{5}$ e eşittir. Burada n tek olduğundan (5.4) ve (5.7) nın (5.2) ile çeliştiği sonucuna varılır. Eğer n çift ve $n \geq 4$ ise

$$\frac{2\lambda_n^2}{2n-1} \leq \frac{2\lambda_4^2}{7} = \frac{128}{175} < \frac{3}{4} \tag{5.8}$$

bulunur ve buradan

$$2\lambda_n < \sqrt{2n-1}\sqrt{\frac{3}{2}} \tag{5.9}$$

elde edilir. Bütün çift olan n ler için de $|p_n(x)| \leq \frac{1}{2}$ dır. (5.6) ve (5.9) a bakıldığında (5.5) teki son integralin sol tarafı mutlak değerce 1 den küçüktür. (5.4), (5.5) ve (5.8) den

$$\int_{-1}^{1} R^2(x)dx > 1 > \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} R'^2(x)dx$$

bulunur ve bu da (5.2) ile çelişir.

(ii) (5.2) yerine

$$\int_{-1}^{1} R'^2(x)dx \le \int_{-1}^{1} R^2(x)dx \tag{5.10}$$

eşitsizliğine sahip olduğumuzu varsayalım. (i) de olduğu gibi

$$\int_{-1}^{1} R(x)\,x^k dx = 0 \qquad k = 0,1,...,n-1 \tag{5.11}$$

elde edilir. $R(x)$ i (5.3) ile normalize edilen Legendre polinomlarının lineer kombinasyonları şeklinde yazılırsa

$$R(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j p_j(x) \quad 0 \le k \le n-1$$

için (5.11) den

$$\frac{2}{2k+1}\beta_k = \begin{cases} \int_{-1}^{1} R(x)\,p_k(x)\,dx, & k \quad tek \quad ise \\ p_k(0)\int_{-1}^{1} R(x)\,dx, & k \quad çift \quad ise \end{cases}$$

elde edilir. Buradan

$$R(x) = \beta_n p_n(x) - \frac{1}{2}\left\{ \sum_{-1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (4j+1)\,p_{2j}(0)\,p_{2j}(x) \right\} \int_{-1}^{1} Q(t)dt$$

ve Christoffel formülü

$$\left(K_n(x,x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^{\,2}(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}\left[p_n'(x)\,p_{n-1}(x) - p_n(x)\,p_{n-1}'(x) \right] \right)$$

$\left(p_n(x) = p_n(w,x) = \gamma_n x^n + ... \in \pi_n \right)$ kullanılırsa

$$\frac{2}{2k+1}\beta_k = \begin{cases} \int_{-1}^{1} R(x)\,p_k(x)\,dx, & k \quad \text{tek} \quad \text{ise} \\ p_k(0)\int_{-1}^{1} R(x)\,dx, & k \quad \text{çift} \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte β_n ve γ_n sabit sayılardır. $p_n(x)$ in sıfırları $(-1,1)$ aralığında ve orijine göre simetriktir. (5.12) den eğer n tek ve $n \ge 3$ ise $R(x)$ fonksiyonu $(-1,1)$ aralığında orijine göre simetrik olan en az iki sıfırı vardır.

Eğer n çift ve $n \geq 4$ ise (5.11) den ve $k=2$ için $R(x)$ de çifttir ve $(-1,1)$ aralığında en az bir sıfır yeri olduğunu görülür. Bu durumda $R(x)$ in orijine göre simetrik olan en az iki sıfırı olduğu söyleyenebilir. Fakat n çift veya tek ise için $R(5)=R(-5)=0$ olacak biçimde bir ξ vardır. Buradan

$$\int_{-1}^{1} R^2(x)dx = \int_{0}^{1} dx\left(\int_{\xi}^{x} R'(t)\,dt\right)^2 \leq \frac{1}{2}\int_{0}^{1} R'^2(x)dx$$

olduğu Schwartz eşitliğinden elde edilir. Benzer bir eşitlik $(-1,0)$ aralığı için de bulunur.

$$\int_{0}^{1} R^2(x)dx \leq \int_{-1}^{1} R'^2(x)dx$$

elde edilir ve bu (5.10) ile çelişir ispat tamamlanır.

$n=1$ için problem bellidir ve $n=2$ tartışmalar yersizdir çünkü (5.8) $n=2$ için sağlanmamıştır. Aslında $R(x)=x^2-1$ olması durumunda (5.2) eşitsizliğini sağlanır.

VI. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışmada yaklaşım teorisinde aynı anda yaklaşım, en iyi aynı anda yaklaşım problemleri için bazı sonuçlar elde ettik.

1. Karşımıza çıkan teoremlerden; C, X in sıkı konveks normlu lineer uzayın sonlu boyutlu alt kümesi ise C nin elemanlarından X in herhangi kompakt F alt kümesine bir ve ancak bir tane en iyi aynı anda yaklaşım vardır. Bu teoremden doğal olarak şu soru akla gelir. Hipotez de sonlu boyutluluk gerekli midir? Bu sorunun cevabının C nin seçilişine göre değiştiği görüldü ve C, X in yansımalı bir alt uzayı ise sonlu boyutluluk şartının gerekli olmadığı Teorem 2.3.2 de görüldü.

2. Örneklerde normlu lineer uzaylarda konveks kümelerin elemanları ile kompakt kümelere aynı anda yaklaşım probleminin varlığı ve tekliği görüldü.

Örnek 3.1.1: $X = Y = C\,[-1,1]$ üzerinde Chebyshev normu tanımlanan iki uzay olsun. Açıktır ki Chebyshev normu, C^* ın $\{\pm(x$ noktasındaki fonksiyonel değeri$) : -1 \le x \le 1\}$ bir alt kümesi ile belirlenmiştir. $C\,[-1,1]$ de bir A dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım. Herhangi bir $h(x) \in C[-1,1]$ için

$$A(h)(x) = \begin{cases} 1\,, & h(x) = 1/2 \\ 3/4, & h(x) = 3/4 \\ 3/4\,, & h(x) = 1/4 \\ (7/4) - 4h(x), & h(x) \le 1/4 \\ h(x), & h(x) \ge 3/4 \\ 3/2 - h(x), & 1/2 \le h(x) \le 3/4 \\ 1/2 + h(x), & 1/4 \le h(x) \le 1/2 \end{cases}$$

A, $C\,[-1,1]$ üzerinde sürekli bir dönüşümdür. $F=\{f(x)=1-x^2\}$ fonksiyonuna gerçel sabitlerle yaklaşılabildiğini varsayalım. Bu durumda $g=a$ sabiti için

$$d_F(a)=\max\left(\ \left\|1-x^2-a\right\|_\infty,\left\|A(1-x^2)-Aa\right\|_\infty\right)$$

olur. Çünkü $f(x)=1-x^2$, $g(x)=a$ ise,

$$d_1(g)=\max_{f\in F}P_1(f-g)=\max_{f\in F}\left\|f-g\right\|=\max\left\|1-x^2-a\right\|_x$$

$$d_2(g)=\max_{f\in F}P_2(Af-Ag)=\max_{f\in F}\left\|Af-Ag\right\|=\max\left\|A(1-x^2)-Aa\right\|_x$$

olduğundan

$$d_F(a)=\max\left(d_1(g),d_2(g)\right)$$

$$\Rightarrow d_F(a)=\max\left(\ \left\|1-x^2-a\right\|_\infty\ ,\ \left\|A(1-x^2)-Aa\right\|_\infty\right)$$

bulunur. Şimdi en iyi yaklaşım elemanının a olduğunu gösterelim. Gerçekten $a=1/2$ için

$$\begin{aligned}d_F(1/2)&=\max_{x\in[-1,1]}\left(\left\|1-x^2-1/2\right\|_x,\left\|A(1-x^2)-A.1/2\right\|_x\right)\\&=\max\left(\left\|\underbrace{1/2-x^2}_{1/2}\right\|_x,\left\|\underbrace{7/4-1}_{3/4}\right\|_x\right)\\&=3/4\end{aligned}$$

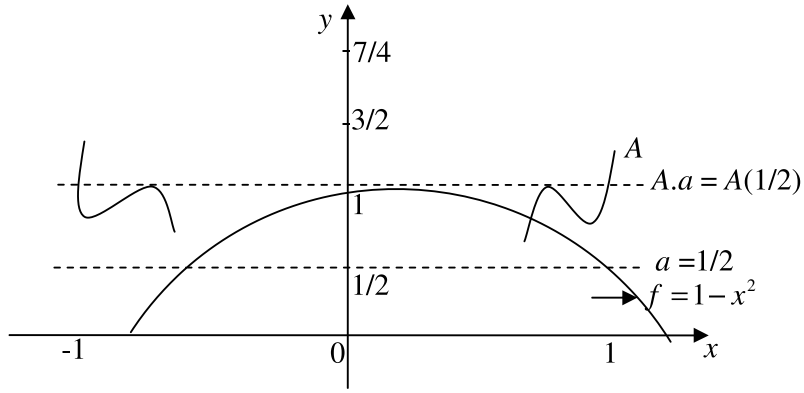
bulunur. Yani

$$d_2\frac{1}{2}\neq d_1(1/2)$$

dir. Böylece genel olarak

$$\max\left(\inf_{a\in R}d_1(a)\ ,\ \inf_{a\in R}d_2(a)\right)<\inf d_F(a)$$

bulunur. Bu durumu şekille ifade edelim



Şekil 3.1.1

olur. O halde $a = 1/2$ en iyi yaklaşımdır

3. Fonksiyonlara ve bu fonksiyonların aritmetik ortalamasına en iyi L_1-yaklaşımları probleminde genel olarak Tanım 4.1.1 anlamında en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı ortalamaya en iyi L_1- yaklaşığının çakışmadığı görüldü ve bu Örnek 4.2.1 ile gösterildi.

Örnek 4.2.1:

[0,1] üzerinde $f_1(x) = 0,\ \ f_2(x) = x$ fonksiyonlarını ele alalım. S gerçel sayılar kümesi olmak üzere Tanım 4.1.1 e göre $\forall s \in S$ için

$$\max_j \left\{ \left\| f_j - s^* \right\| \right\} \le \max_j \left\{ \left\| f_j - s \right\| \right\}, \quad j = 1,2$$

olacak şekilde bir $s_1^* \in S$ bulalım.O halde

$$\max_j \left\{ \left\| s_1^* \right\|, \left\| x - s_1^* \right\| \right\} \le \max_j \left\{ \left\| s \right\|, \left\| x - s \right\| \right\}$$

$$= \max \left\{ \int_0^1 |s| dx, \int_0^1 |x - s| dx \right\} \tag{4}$$

dir.

Bu durumda $f(s) = |s|$ ve $g(s) = \int_0^1 |x - s| dx$ alalım. $s < 0$, $0 \le s \le 1$ ve $1 \le s$ farklı durumları için $g(s)$ yi hesaplayalım.

$s < 0$ için;

$$g(s) = \int_0^1 (x - s) dx = \left. \frac{x^2}{2} - sx \right|_0^1 = \frac{1}{2} - s$$

$0 < s < 1$ için

$$g(s)=\int_0^s(-x+s)dx+\int_s^1(x-s)dx=-\frac{x}{2}+sx\Bigg|_0^s+\frac{x^2}{2}-sx\Bigg|_s^1$$

$$=-\frac{s^2}{2}+s^2+\frac{1}{2}-s-\frac{s^2}{2}+s^2$$

$$=s^2-s+\frac{1}{2}$$

$1 < s$ için

$$g(s)=\int_0^1-(x-s)\,dx=-\frac{x^2}{2}+sx\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}+s=s-\frac{1}{2}$$

ve böylece

$$f(s)=|s|,\qquad g(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}-s, & s\le 0 \text{ ise}\\ s^2-s+\frac{1}{2}, & 0\le s\le 1 \text{ ise}\\ s-\frac{1}{2}, & 1\le s \text{ ise}\end{cases}$$

elde edilir. Öyle ki (4) in sağ tarafında hesaplanan bütün maksimumlar bu s_1^* için bulunan maksimumdan büyük olsunlar. f ve g nin kesiştikleri noktada bu iki fonksiyonun aynı olduğu ve dolayısıyla en küçük maksimum değerini verdiği görülür. Yani bu nokta, solunda hesaplanan maksimum değerlerin sonuncusu ve en küçüğü ve sağında hesaplanan maksimum değerlerin birincisi ve en küçüğüdür. Bunu veren s_1^*, ortak köktür. O halde $s=s^2-s+\frac{1}{2}$ ise $2s^2-4s+1=0$ ve buradan $s_1^*=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak bulunur. $\frac{f_1+f_2}{2}=\frac{0+x}{2}=\frac{x}{2}$ ye en iyi L_1-yaklaşığı ise;

$$\operatorname*{Inf}_{s\in S}\left\|\frac{x}{2}-s_2\right\|=\left\|\frac{x}{2}-s_2^*\right\|_1$$

olacak şekilde bir s_2^* arıyoruz. $x=0$ ve $s=0$ için $\frac{x}{2}-s=0$ olduğundan sol taraftaki kümenin infimumu 0 dır. O halde $\left\|\frac{x}{2}-s_2^*\right\|=0$ olacak şekilde s_2^* bulalım.

$$g(s)=\left\|\frac{x}{2}-s\right\| \qquad s\in S=R, x\in[0,1]$$

fonksiyonunu minimum yapan s yi bulalım.

$$g(s)=\left\|\frac{x}{2}-s\right\|=\int_0^1\left|\frac{x}{2}-s\right|dx=\frac{1}{2}\int_0^1|x-2s|dx$$

$s<0$ için

$$g(s)=\frac{1}{2}\int_0^1|x-2s|dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2sx\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2s\right)=\frac{1}{4}-s$$

$0\le s\le 1$ için

$$g(s)=\frac{1}{2}\int_0^1|-x+2s|dx+\frac{1}{2}\int_{2s}^1(x-2s)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+2sx\right)\Bigg|_0^{2s}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2sx\right)\Bigg|_{2s}^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(4s^2-2s+\frac{1}{2}\right)=2s^2-s+\frac{1}{4}$$

$1\le s$ için

$$g(s)=\frac{1}{2}\int_0^1(-x+2s)dx=s-\frac{1}{4}$$

$$g(s)=\begin{cases}\frac{1}{4}-s, & s\le 0 \text{ ise}\\ 2s^2-s+\frac{1}{4}, & 0\le s\le 1 \text{ ise}\\ s-\frac{1}{4}, & 1\le s \text{ ise}\end{cases}$$

$g'(s)=0$ için $4s-1=0$ buradan $s=\frac{1}{4}$ elde edilir. Elde edilen bu $s=\frac{1}{4}$ için $g(s)$ minimumunu alır. Böylece $s_2^*=\frac{1}{4}$ olarak bulunmuş olur. Görüldüğü gibi $s_1^*\ne s_2^*$ olur. Yani Tanım 4.1.1 anlamında en iyi aynı anda L_1-yaklaşığı ile ortalamaya en iyi L_1-yaklaşığı çakışmaz.

4. Bir fonksiyon ve türevlerine aynı anda yaklaşım probleminde bir fonksiyona düzgün yaklaşım problemi ile bir fonksiyon ve türevlerine aynı anda yaklaşım için düzgün yaklaşımda yaklaşım elemanının tek olduğu fakat fonksiyon ve türevlerine aynı anda yaklaşımda tekliğin sağlanması için bazı lineer koşullar oluşturulması gerektiği görüldü.

KAYNAKLAR

[1]. A. Meir and A. Sharma, Simultaneous appro*x*imation of a function and its derivatives, Siam J. Numer. Anal. 3 (1966), 553-563.

[2]. A.S.B. Holland and B.N. Sahney, Some remarks on best simultaneous appro*x*imation, in "Theory of Appro*x*imation with Applications".

[3]. C. B. Dunham, Simultaneous Chebyshev appro*x*imation of functions on an interval, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 472-477.

[4]. C.B. Dunham**,** Characterizability and uniqueness in real Chebyshev appro*x*imation, J. Appro*x*imation Theory 2 (1969), 374-383.

[5]. D. G. Moursund, Chebyshev appro*x*imation of a function and its derivative, Math. Comp. 18(1964), 382-389.

[6]. D. G. Moursund and A. H. Stroud, The best appro*x*imation to a function and its derivatives on $n+2$ points, Sıam J. Numer. Anal.2 (1965), 15-23.

[7]. D.S.Goel, A.S.B. Holland, C.Nasım, and B.N.Sahney. On best simultaneous appro*x*imation in normed linear spaces, Canad. Math. Bull. 17 (1974), 523-527.

[8]. E.W. Cheney, "Introduction to Appro*x*imation Theory," McGraw-Hill, New York, 1966.

[9]. E.W. Cheney, J.H. Mccabe, and G.M. Phıllıps, On best simultaneous Chevbyshew appro*x*imation, to appear.

[10]. G.M. Phillips and B.N. Sahney, best simultaneous appro*x*imation in the L_1 and L_2 norms, in "Theory of Appro*x*imation with Applications". (A.G.Law and B.N. Sahney, Eds.), Academic Pres, New York, 1976.

[11]. I. Singer, " Best Appro*x*imation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces," Springer, New York, 1970.

[12]. J.B. Diaz and H.W. Mclaughlin, Simultaneous appro*x*imation of a set of bounded real function. Math. Comp. 23.(1969), 583-594.

[13]. J.B. Diaz and H.W. Mclaughlin, On Simultaneous Chebyshev appro*x*imation and Chebyshev appro*x*imation with additive weight, J. Appro*x*imation Theory 6 (1972), 68-71.

[14]. Kim-Pin Lim, "Simultaneous appro*x*imation of compact sets by elements of conve*x* sets in normed spaces", J. Appro*x*imation Theory 12 (1974), 332-351.

[15]. Kim-Pin Lim, "Simultaneous appro*x*imation of a function and its derivative ", J. Appro*x*imation Theory 18 (1976), 346-349.

[16]. W.H.Ling**,** On simultaneous Chevbyshew appro*x*imation in the "sum" norm, Proc.Amer.Math.Soc.48(1975), 185-188.