GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin Niyazi UĞURLUER

ARALIK - 2007

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Fuzzy Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Öğrencinin Adı Soyadı: Hüseyin Niyazi UĞURLUER

Tez Savunma Tarihi: 3 Aralık 2007

Prof. Dr. Sadettin ÖZYAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	**İmzası**
Prof. Dr. Adil KILIÇ	______________________
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	______________________
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	______________________
Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	______________________
Yrd. Doç. Dr. Metin BEDİR	______________________
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN(Yedek)	______________________

Merhum babam Yük. Müh. Mimar Orhan UĞURLUER' e ithafen

ÖZET

FUZZY METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Hüseyin Niyazi UĞURLUER
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Aralık 2007, 54 sayfa

Bu çalışmada, sabit noktanın tanımı , sabit nokta ile ilgili geçmiş yıllarda yapılan birtakım çalışmalar , bu çalışmaların kimler tarafından yapıldığından bahsedilmiş; daha sonra metrik uzay, fuzzy metrik uzay , sezgisel (intuitionistic) metrik uzayların tanımları ve bu uzaylardaki sabit nokta teoremleri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise iki farklı fuzzy metrik uzayda iki ayrı sabit nokta teoremi ile bu teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: metrik uzay, fuzzy metrik uzay, sezgisel fuzzy metrik uzay, sabit nokta.

ABSTRACT

FIXED POİNT THEOREMS IN FUZZY METRIC SPACES

Hüseyin Niyazi UĞURLUER
M. Sc. in Mathematic
Supervasor: Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

December 2007, 54 pages

In this study, the definition of fixed point theorem and some studies and the persons about these studies which are made in the past years are given, then metric space, fuzzy metric space and intuitionistic fuzzy metric space are defined, some definitions and theorems of fixed point theorems in these spaces are described. At the last section two different fixed point theorems and their proofs in two fuzzy metric spaces are mentioned.

Key Words: metric space, fuzzy metric space, intuitionistic fuzzy metric space, fixed point.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyerek bana çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK' e, Sabit Nokta Teoremleri ile ilgili birçok çalışma yapmış olan ve bu çalışmalarından faydalanmamıza imkan sağlayan Gazi Üniversitesi öğretim görevlilerinden Sayın Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na, fuzzy kümeler konusunda yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Şahin' e, yüksek lisans ve tez çalışmalarım süresince bana destek olan eşim G. Burcu UĞURLUER ve ablam Yrd. Doç. Dr. Gamze UĞURLUER' e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Rightarrow$	Gerektirir
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$*$	Üçgen norm
$\Diamond$	Üçgen conorm
(X,d)	Metrik uzay
$(X,M,*)$	Fuzzy metrik uzay
$(X,M,N,*,\Diamond)$	Sezgisel fuzzy metrik uzay
I^X	$X \to [0,1]$ tüm dönüşümlerin kümesi
d	Metrik
A^C	A fuzzy kümesinin tümleyeni
μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
$\vee$	En küçük üst sınır (ek
üs)
$\wedge$	En büyük alt sınır (ebas)
$\mu \in [0,1]^X$	X ten $[0,1]$ e olan fonksiyon
$\bigcup_{i\in I} A_i$	X in fuzzy kümeler ailesinin birleşimi
$\bigcap_{i\in I} A_i$	X in fuzzy kümeler ailesinin arakesiti

Kısaltmalar	**Açıklama**
t-norm	Üçgen norm
t-conorm	Üçgen conorm

I.BÖLÜM
GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Giriş

Sabit nokta teorisi 1912 yılında L.E.J. Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, "$\Re^n$ nin kapalı birim yuvarından yine aynı kapalı birim yuvar üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün en az bir sabit noktasının varlığını" göstermiştir. J. Schauder 1930 yılında bu sonucu genelleştirerek: "Bir Banach uzayının boş olmayan kompakt, konveks her alt kümesinden kendisi üzerine tanımlı sürekli her fonksiyonun en az bir sabit noktası vardır." teoremini kanıtladı. 1922'de Banach, Banach sabit nokta teoremi veya büzülme ilkesi olarak bilinen aşağıdaki teoremi verdi.

"f bir (X,d) tam metrik uzayından yine kendisi üzerine tanımlanan bir büzülme dönüşümü ise f nin X de bir tek sabit noktası vardır ve ayrıca her bir $x \in X$ için $\left(f^n{}_{(x)}\right)$ Picard iterasyonları bu sabit noktaya yakınsar."

Diferansiyel ve integral denklemlerinin çözümlerinin varlığının ve tekliğinin araştırılmasında sabit nokta teoremleri önemli yer tutar. Sabit nokta teoremleri yalnız diferansiyel ve integral denklemler için değil, çeşitli denklemler için de kullanılabilen ilginç bir yöntemdir. Picard yöntemi yardımı ile çözülebilen diferansiyel denklemler, Banach sabit nokta teoreminin sağladığı kolaylıkla çözülmektedir.

Boş kümeden farklı bir küme üzerinde, metrik veya boş kümeden farklı bir kümenin iki noktası arasındaki uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı, matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. 1906 yılında Frechet, boş kümeden farklı bir kümenin üzerindeki metrik yapı üzerinde çalışmış, kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstermiş, nokta çiftleri olarak dağılım fonksiyonu kavramını vermiştir. Wong, Li, Gao ve Iseki 1984'te çeşitli genelleme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri elde etmiş ve (Rhoades,1985) ile (Taniguchi,1989) ise bu teoremleri dönüşüm çiftleri olarak genelleştirmişlerdir.

Fuzzy kümeler teorisi ise ilk olarak 1965'te L. A. Zadeh tarafından oluşturulmuş ve o günden beri bilimin birçok dalında önemli uygulama alanları bulmuştur. Matematiğin birçok dalında da Fuzzy kümeler kavramı kullanılarak çok önemli bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Gerek klasik metrik uzaylarda, gerekse fuzzy metrik uzaylarda birden fazla dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı araştırılırken, genellikle verilen dönüşümler arasında bazı özelliklerin olması istenir. Bu özellikler dönüşümlerin ortak sabit noktalarını garanti etmektedir. Klasik metrik uzaylarda, ilk olarak 1982'de S.Sessa, verilen dönüşüm çiftleri için zayıf değişmeli dönüşüm tanımını vererek daha önce sadece değişmeli dönüşümler için verilen ortak sabit nokta teoremlerini, bu tür dönüşümler sınıfına dahil etmiştir. 1986'da Jungck, zayıf değişmeli dönüşümler tanımını daha da genişleterek bağdaşık dönüşümleri tanımlamıştır. Bu sayede daha geniş fonksiyon sınıfı için ortak sabit nokta teoremleri elde edilebilmiştir.

1965 yılında L. A. Zadeh (Fuzzy Sets) tarafından sonsuz değerler $[0,1]$ arasında tanımlanarak fuzzy mantığı oluşturulmuştur. Bu çalışma "Information and Control", 8, (338-353), 1965 dergisinde yayınlanmış ve böylelikle bu çalışmada bilinen küme teorisi genişletilmiştir.

L.A. Zadeh bir Elektrik-Elektronik Mühendisi olduğu halde böyle bir çalışmayı yapmakla fuzzy küme kavramının teknoloji ile gerçekte ne kadar yakın ilgili olduğunu göstermiştir. "Probability Measures of fuzzy Events, J.Math. Anal. Appl., 23, 421-427, (1968)" adlı çalışmasında önceki bulgularına bağlı olarak bir fuzzy olayı (fuzzy event),

$$P(A) = \int_X A(X)dP(X)$$

olarak tanımladı. Bu, bilinen klasik olasılık teorisine bir genişletme getirmiştir.

Fuzzy kümeler ilk olarak "Journal of Math. Anal. And Appl. 18, 145-174 (1967)" dergisinde yayınlanan "*L*- Fuzzy Sets" adlı çalışması ile J.A. Goguen tarafından genelleştirilmiştir. Bu çalışmada, genelleştirilmiş kümelerin bir halkası üzerinde ölçülebilirlik tanımlandı. Ölçülebilirliğin yöntemi amaçlandı.

Fuzzy metrik kavramı Kavela, Seikkala ve Abu Osman tarafından birbirinden bağımsız iki yaklaşım ile tanımlandı. Abu Osman aynı zamanda Banach'ın klasik sabit nokta teoremini fuzzyleştirdi. Sabit fuzzy kümesinde sayı teoremleri başka bir çok bilim adamı tarafından çalışıldı. [14]

Bu çalışmada, sabit nokta teoreminin genel tanımı ile birlikte günümüzde yapılan çalışmalar ışığında, sabit nokta teoremlerinin metrik, fuzzy metrik ve sezgisel fuzzy metrik uzaylardaki kullanılışları ile ilgili tanım ve teoremlere, son bölümde ise iki farklı fuzzy metrik uzay üzerindeki sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

1.2 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde tezin ileri bölümlerinde adı geçen temel tanımlar ve bazı temel kavramlar üzerinde durulmuştur.

Tanım 1.2.1: X boş olmayan bir küme ve $f : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, bu x_0 noktasına *f* nin bir sabit noktası denir. Yani $f(x_0) = x_0$ ($x_0 \in X$) fonksiyon denkleminin çözümü, *f* nin bir sabit noktasıdır. [9]

Dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının birden fazla sabit noktası var olabilir.

Örnek 1.2.1: $f : R \to R$ **,** $f(x) = x^3$ fonksiyonunun *0, 1 ve -1* olmak üzere üç sabit noktası vardır.

Örnek 1.2.2: $X = [1,2]$ olmak üzere $T : X \to X$, $Tx = 3 - 2x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = 1$ dir.

Örnek 1.2.3: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I : X \to X$ şeklindeki birim fonksiyon için tüm noktalar birer sabit noktadır.

Örnek 1.2.4: $f : (0,1] \to (0,1]$ **,** $f(x) = \dfrac{x}{5}$ fonksiyonunun sabit noktası yoktur. Çünkü sabit nokta tanımına bu fonksiyon için uyan tek nokta $x = 5$ noktası için $5 \notin (0,1]$ dir.

Teorem 1.2.2: *X, Y* topolojik uzayları verilsin. Eğer $h : X \to Y$ bir homeomorfizma ve *X* de sabit nokta özelliğini sağlıyorsa, *Y* de sabit nokta özelliğini sağlar. [10]

İspat: $f : X \to X$ sürekli fonksiyon olsun. *X* sabit nokta özelliğini sağladığından $f(x_0) = x_0$ şartını sağlayan en az bir $x_0 \in X$ sayısı vardır.

$h: X \to Y$ bir homeomorfizma olduğundan $g = h \circ f \circ h^{-1}$ ve g fonksiyonu süreklidir. $f(x_0) = x_0$ eşitliğinden

$$h(x_0) = y_0 \in Y \quad \Rightarrow \quad x_0 = h^{-1}(y_0)$$

$$\begin{aligned} g(y_0) = \left(h \circ f \circ h^{-1}\right)_{(y_0)} &= h\left(f\left(h^{-1}(y_0)\right)\right) \\ &= h\left(f(x_0)\right) \\ &= h(x_0) \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Bu durumda $g(y_0) = y_0$ olduğundan Y nin de sabit nokta özelliğini sağladığı görülür.

II.BÖLÜM
METRİK UZAY VE METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

2.1 METRİK UZAY:

Tanım 2.1.1: $X \neq \varnothing$ ve $d : X \times X \to R$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

(i) $\quad d(x, y) \geq 0,$
(ii) $\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
(iii) $\quad d(x, y) = d(y, x)$
(iv) $\quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlayan *d* ye *X* üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Örnek 2.1.1: R reel sayılar kümesi için $\forall x, y \in R$ iken $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan *d* fonksiyonu her dört koşulu da sağladığından *R* üzerinde bir metrik uzaydır. Bu metriğe alışılmış metrik, (R, d) ikilisine de alışılmış metrik uzay denir.

Örnek 2.1.2: $X = \{a, b, c\}$ **,** $d : X \times X \to R$

$d = \{((a,a),0),((b,b),0),((c,c),0),((a,b),3),((b,a),3),((a,c),4),((c,a),4),((b,c),5),((c,b),5)\}$

fonksiyonunun *X* üzerinde bir metrik olma şartlarını sağlar. Dolayısıyla (X, d) bir metrik uzaydır. (X, d) metrik uzayında *a* ve *c* noktaları arasındaki uzaklık $d(a, c) = 4$ tür. $(((a, c), 4) \in d)$

Örnek 2.1.3: X boş olmayan herhangi bir küme olsun. Bu durumda

$$d_0 : X \times X \to R \ , \ (\mathrm{x},\mathrm{y}) \to d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ x \neq y \\ 0 & , \ x = y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X in ayrık (discrete) metriği denir.

$x, y \in X$ verildiğinde $d_0(x,y)=0$ ise d_0 ın tanımı gereğince $x = y$, yine $x = y$ iken $d_0(x,y)=0$ olacağından (i) sağlanır.

$\forall x, y \in X$ için,

$$\left.\begin{array}{l} x = y \Rightarrow d_0(x,y) = 0 = d_0(y,x) \\ x \neq y \Rightarrow d_0(x,y) = 1 = d_0(y,x) \end{array}\right.$$ olduğundan (ii) sağlanır.

$\forall x, y, z \in X$ için

1. Eğer $x = z$ ise (i) gereğince $d_0(x,z) = 0$ olup $d_0(x,y) = d_0(y,z)$
2. Eğer $x \neq z$ ise en azından $x \neq y$ veya $y \neq z$ olmalıdır. Böylece $d_0(x,y) + d_0(y,z)$ toplamı 1 veya 2 dir. Halbuki $d_0(x,z) = 1$ dir. O halde $d_0(x,y) + d_0(y,z) \geq d_0(x,z)$ olur.

1. ve 2. gereğince (iv) sağlanır. Böylece d_0 X üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.4: $X = R^2$ üzerinde $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_2(x,y) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanan d_1, d_2, d_∞ fonksiyonları birer metriktirler.

Metrik tanımının bir sonucu olarak aşağıdaki özellik yazılabilir;

Sonuç 2.1.2: d, X üzerinde bir metrik ve $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ dır.

İspat: $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2.d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq 0$ elde edilir.

Tanım 2.1.3: *d, ,X* üzerinde bir metrik ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. O zaman $A \neq \varnothing$ olmak üzere bir $a \in X$ noktasının *A* ya uzaklığı diye

$$\inf\{d(x,a) \mid x \in A\}$$

reel sayısına denir ve bu sayı $d(a,A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.5.: R üzerinde $d_1(x,y) = |x-y|$ metriği verilsin. O zaman $a = 3$ ve $A = [0,1]$ olmak üzere $d_1(a,A) = 2$ dir.

Teorem 2.1.4: *d, X* üzerinde bir metrik ve $A \subset X$ ise $x, y \in X$ için

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \text{ dir.}$$

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $a \in A$ elemanını
$d(y,a) \leq d(y,a) + \varepsilon$ olacak şekilde seçelim, böylece
$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \leq d(x,y) + d(y,a) + \varepsilon$ yazılabilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan
$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$ dir. Benzer şekilde
$-(d(x,A) - d(y,A)) = d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y)$ yazılabileceğinden
$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ bulunur.

Burada $A = \{a\}$ ise Teorem 2.1.4 ü: “Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları farkı, üçüncü kenar uzunluğundan küçüktür.” şeklinde özetleyebiliriz.

Tanım 2.1.5: (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) X te bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

$$\exists N(\varepsilon) \in N \ni \forall p,q \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa bu (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Örnek 2.1.6:

a) Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.
b) R de her Cauchy dizisi yakınsaktır.
c) θ, R deki metriğinin ürettiği metrik ile düşünülürse $x_0 = 1$, ve $x_{n+1} : \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ ile tanımlı (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Bu dizi θ da yakınsak değildir, fakat R de $\sqrt{2}$ ye yakınsar.

2.2 TAM METRİK UZAYLAR VE BANACH UZAYLARI:

Tanım 2.2.1: Bir (X,d) metrik uzayında eğer her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Örnek 2.2.1: R nin $(0,1]$, $[1,\infty)$ alt uzayları tam metrik uzay değillerdir. Z tamsayılar alt uzayı tamdır. Çünkü bir tamsayı dizisinin Cauchy dizisi olması için bir yerden itibaren sonsuz tekrarlanması gerekir ve yeterlidir. Böyle bir dizinin ise sonsuz tekrarlayan noktasına yakınsayacağı besbellidir.

Tanım 2.2.2: B bir normlu lineer uzay ve metriğini normdan alan bir tam metrik uzay ise, buna bir Banach uzayı denir.

Örnek 2.2.2: $\forall n \in N$ için R^n, C^n Banach uzaylardır.

$R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) | x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in R\}$

$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \in R^n$

$\alpha \in R \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n)$,

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \ldots \alpha x_n,)$ işlemleri ile R^n kümesi bir lineer uzaydır.

$$\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_n}^2}$$

alışılmış ya da Euclidean norm olmak üzere

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

alışılmış normdan elde edilen alışılmış ya da Euclidean metriktir. O halde R^n bir Banach uzayıdır. Bu uzaya n boyutlu Euclidean uzay denir.

2.3 TAM METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ:

Teorem 2.3.1: (X,d) tam metrik uzay *f* ve *g*, X üzerinde tanımlı sürekli ve örten dönüşümler olsun. Eğer *X* deki tüm *x, y* ler için

(1)……..

$$d^2(f(x), g(y)) \geq k.\min\{d^2(x, f(x)), d^2(\mathbf{y}, g(y)), d(x, f(x)).d(x,y), d(y.g(y)).d(x,y)\}$$

olacak biçimde bir $k > 1$ gerçel sayısı varsa, bu durumda *f* veya *g* nin bir sabit noktası var, ya da f ile g nin ortak bir sabit noktası vardır. [13]

İspat: x_0, *X'* de bir nokta olsun. *f* ve *g* örten dönüşümler olduğu için $x_1 \in f^{-1}(x_0)$ ve $x_2 \in g^{-1}(x_1)$ noktaları vardır. Böyle devam edilecek olursa, $x_{2n+1} \in f^{-1}(x_{2n})$ ve $x_{2n+2} \in g^{-1}(x_{2n+1})$ olacak şekilde bir x_n dizisi elde edilir. Eğer herhangi bir *n* için $x_n = x_{n+1}$ ise o zaman f veya g nin bir sabit noktası vardır. O halde her *n* için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu varsayarsak bu durumda (1) den,

$$d^2(x_{2n},x_{2n+1}) = d^2(f(x_{2n+1}),g(x_{2n+2})) \geq k.\min\{d^2(x_{2n+1},f(x_{2n+1})),d^2(f(x_{2n+2}),g(x_{2n+2})),$$
$$d(x_{2n+1},f(x_{2n+1})).d(x_{2n+1},x_{2n+2}),d(x_{2n+2},g(x_{2n+2})).d(x_{2n+1},x_{2n+2})\}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$d^2(x_{2n},x_{2n+1}) \geq k.\min\{d^2(x_{2n+1},x_{2n}),d^2(x_{2n+2},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n}).d(x_{2n+1},x_{2n+2})\}$$

veya $k > 1$ olduğu için,

$$= k.\min\{d^2(x_{2n+2},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n}).d(x_{2n+1},x_{2n+2})\}$$
$$= k.d(x_{2n+1},x_{2n+2}).\min\{d(x_{2n+1},x_{2n+2}).d(x_{2n+1},x_{2n})\}$$

olur. Bu durumda, ya

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \geq k.d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \geq \sqrt{k}.d(x_{2n+1},x_{2n+2})$$

ya da,

$$d^2(x_{2n},x_{2n+1}) \geq k.d^2(x_{2n+1},x_{2n+2})$$

olur ki, bu

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \geq \sqrt{k}.d(x_{2n+1},x_{2n+2})$$

ve benzer şekilde

$$d(x_{2n-1},x_{2n}) \geq \sqrt{k}.d(x_{2n},x_{2n+1})$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla,

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.d(x_{2n},x_{2n+1}) \leq \ldots \leq \frac{1}{\left(\sqrt{k}\right)^{2n}}.d(x_0,x_1)$$

elde edilir. O halde x_n bir Cauchy dizisidir ve bir $x_1 \in X$ noktasına yakınsar. $f(x_{2n+1}) = x_{2n}$, $g(x_{2n+2}) = x_{2n+1}$ ve f , g sürekli olduğu için $x = f(x) = g(x)$ olur. Şu halde *x, f* ve *g'* nin bir ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 2.3.2: (X,d) tam metrik uzay, *f,* X üzerinde tanımlı sürekli, örten bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d^2(f(x), f(y)) \geq k.\min\{d^2(x, f(x)), d^2(\mathrm{y}, f(y)), d(x, f(x)).d(x, y), d(y.f(y)).d(x, y)\}$$

olacak biçimde bir $k<1$ gerçel sabiti varsa, bu durumda f nin bir sabit noktası vardır. (Popa, 1987)

Sonuç 2.3.3: (X,d) tam metrik uzay, *f,* X üzerinde tanımlı sürekli, örten bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d^2(f(x), f(y)) \geq k.\min\{d(x, f(x)).d(x, y), d(\mathbf{y}, f(y)).d(x, y), d(x, f(x)).d(x, f(x)).d(y.f(y))\}$$

olacak biçimde bir $k>1$ sabiti varsa, f nin bir sabit noktası vardır

Teorem 2.3.4: (X,d) tam metrik uzay, *f* ve *g,* X üzerinde tanımlı sürekli, örten bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X, (x \neq y)$ için

$$d(f(x), g(y)) \geq k.\frac{[d(x, f(x))]^2 + [d(y, g(y))]^2 + d(x, f(x)).d(y, g(y))}{d(x, f(x)) + d(y, g(y))}$$

$d(x, f(x)) + d(y, g(y)) \neq 0$ olacak şekilde bir $k \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ sabiti varsa, *f* ve g nin bir ortak sabit noktası vardır. [13]

İspat: x_0, *X'* de herhangi bir nokta olsun. x_n dizisini Teorem 2.3.1 deki gibi seçersek bazı *n* ler için $x_n = x_{n+1}$ ise o zaman, *f* ve *g*, ortak bir sabit noktaya sahiptir. Eğer her n için $x_n \neq x_{n+1}$ ise Teorem 2.3.4 deki eşitsizlik gereğince

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) = d(f(x_{2n+1}), g(x_{2n+2}))$$
$$\geq k.\frac{[d(x_{2n+1}, f(x_{2n+1}))]^2 + [d(x_{2n+2}, g(x_{2n+2}))]^2 + d(x_{2n+1}, f(x_{2n+1})).d(x_{2n+2}, g(x_{2n+2}))}{d(x_{2n+1}, f(x_{2n+1})) + d(x_{2n+2}, g(x_{2n+2}))}$$
$$= k.\frac{[d(x_{2n+1}, x_{2n})]^2 + [d(x_{2n+2}, x_{2n+1})]^2 + d(x_{2n+1}, x_{2n1}).d(x_{2n+2}, x_{2n+1})}{d(x_{2n+1}, x_{2n}) + d(x_{2n+2}, x_{2n+1})}$$

olur. O halde,

$$0 \geq k.[d(x_{2n+2}, x_{2n+1})]^2 + (k-1).d(x_{2n+1}, x_{2n}).d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + (k-1).[d(x_{2n+1}, x_{2n})]^2$$

dir. Dolayısıyla $t = \dfrac{d(x_{2n+2}, x_{2n+1})}{d(x_{2n+1}, x_{2n})}$ olmak üzere $k.t^2 + (k+1).t + (k-1) \leq 0$ elde edilir

Şimdi $F(t) = k.t^2 + (k+1).t + (k-1)$ ile $F:[0,\infty] \to \Re$, $k \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$ fonksiyonu tanımlanırsa, $F(0) = k-1 < 0$ ve $F(1) = 3k-2 > 0$ olur. Eğer $0 < r < 1$, $F(t) = 0$ denkleminin bir kökü ise, $t \leq r$ için $F(t) \leq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d(x, x_{2n+1}) &= d(fy, g(x_{2n+2})) \\ &\geq k.\frac{[d(y, f(y))]^2 + [d(x_{2n+2}, g(x_{2n+2}))]^2 + d(y, f(y)).d(x_{2n+2}, g(x_{2n+2}))}{d(y, f(y)) + d(x_{2n+2}, g(x_{2n+2}))} \\ &= k.\frac{[d(y,x)]^2 + [d(x_{2n+2}, x_{2n+1})]^2 + d(y,x).d(x_{2n+2}, x_{2n+1})}{d(y,x) + d(x_{2n+2}, x_{2n+1})} \end{aligned}$$

olur. $n \to \infty$ için $0 \geq k.d(y,x)$ elde edilir ki bu $y = x$ olmasını gerektirir. $x = f(y)$ olduğu için $x = f(x)$ dir. Benzer şekilde $x = g(x)$ dir. Dolayısıyla *x*, *f* ve *g* nin bir ortak sabit noktasıdır.

Teorem 2.3.5: (X, d) tam metrik uzay, *f* ve *g*, X üzerinde tanımlı sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X, (x \neq y)$ için

$$d(f(x), g(y)) \geq \frac{a.d(x, f(x)).d(x,y) + b.d(y, g(y)).d(x,y) + c.d(x, f(x)).d(y, g(y))}{d(x, f(x)) + d(y, g(y))}$$

$d(x, f(x)) + d(y, g(y)) \neq 0$ olacak şekilde negatif olmayan *a, b* ve *c*, *a+b+c>2* gerçel sayıları varsa *f* ve *g* nin bir ortak sabit noktası vardır. [13]

İspat: Teorem 2.3.4 e benzer olarak yapılır.

Sonuç 2.3.6: (X, d) tam metrik uzay, *f*, X üzerinde tanımlı sürekli ve örten dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X, (x \neq y)$ için

$$d(f(x), f(y)) \geq \frac{a.d(x, f(x)).d(x, y) + b.d(y, f(y)).d(x, y) + c.d(x, f(x)).d(y, f(y))}{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}$$

$d(x, f(x)) + d(y, f(y)) \neq 0$ olacak şekilde negatif olmayan *a, b* ve *c*, *a+b+c>2* gerçel sayıları varsa f nin bir sabit noktası vardır. (Popa, 1986; Teorem 2)

Teorem 2.3.7: (X, d) tam metrik uzay, *f* ve *g*, X üzerinde tanımlı sürekli, örten birer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X, (x \neq y)$ için

$$d^2(f(x), g(y)) \geq a.d(x, f(x)).d(x, y) + b.d(y, g(y)).d(x, y) + c.d(x, f(x)).d(y, g(y))$$

olacak şekilde negatif olmayan *a, b* ve *c,* $a > 0$ veya $b > 0$ ve $a + b + c > 1$, gerçel sayıları varsa f ve g nin bir ortak sabit noktası vardır. [13]

İspat: Teorem 2.3.4 e benzer olarak yapılır.

Sonuç 2.3.8: (X, d) tam metrik uzay, f, X üzerinde tanımlı sürekli, örten bir, dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X, (x \neq y)$ için

$$d^2(f(x), f(y)) \geq a.d(x, f(x)).d(x, y) + b.d(y, f(y)).d(x, y) + c.d(x, f(x)).d(y, f(y))$$

olacak şekilde negatif olmayan *a, b* ve *c,* $a > 0$ veya $b > 0$ ve $a + b + c > 1$, gerçel sayıları varsa f nin bir ortak sabit noktası vardır. (Popa, 1986; Teorem 1)

2.4 BANACH DARALMA İLKESİ:

Teorem 2.4.1: $[a,b]$, R de bir kapalı aralık ve $f:[a,b]\to[a,b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c)=c$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında bir c sayısı vardır. [9]

İspat: $\forall x\in[a,b]$ için $T(x)=x-f(x)$ olacak şekilde bir $T:[a,b]\to R$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda, T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a)\geq a$ olacağından $T(a)\leq 0$ olur. Benzer şekilde, $f(b)\leq b$ olacağından $T(b)\geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c)=0$ olacağından, $f(c)=c$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında bir c sayısı vardır.

Tanım 2.4.2 (M,d) bir metrik uzay ve f fonksiyonu M nin kendi içine bir dönüşüm olsun. $\forall x,y\in M$ için

$$d(f(x),f(y))\leq k.d(x,y)$$

olacak şekilde bir $0\leq k<1$ sayısı varsa f ye bir daraltan dönüşüm denir.

Teorem 2.4.3 (Banach Daralma İlkesi): (Khamsi ve Kırk, 2001) (M,d) tam metrik uzay ve $T:M\to M$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir ve $\forall x\in M$ için

$$\lim_{n\to\infty}T^n(x)=x_0$$

dır. Ayrıca

$$d\left(T^n(x),x_0\right)\leq\frac{k^n}{1-k}d(x,T(x)) \text{ olur. [11]}$$

İspat: T bir daraltan dönüşüm olduğuna göre $\forall x\in M$ için

$$d\left(T(x),T^2(x)\right)\leq k.d(x,T(x))$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafına $d(x,T(x))$ ilave edilirse,

$$d(x,T(x))+d\left(T(x),T^2(x)\right)\leq d(x,T(x))+k.d(x,T(x))$$

bulunur. Buradan,

$$d(x,T(x))-k.d(x,T(x))\leq d(x,T(x))-d\left(T(x),T^2(x)\right)$$

olur. Bu son ifade,

$$d(x,T(x)) \le (1-k)^{-1}\left[d(x,T(x)) - d\left(T(x),T^2(x)\right)\right]$$

eşitsizliğine denktir. Şimdi $\phi : M \to R^+$, $\phi(x) = (1-k)^{-1} d(x,T(x))$ şeklinde bir fonksiyon tanımlarsak

$$d(x,T(x)) \le \phi(x) - \phi(T(x))$$

olur. Buradan $x \in M$ ve $m,n \in N$ ise,

$$d\left(T(x),T^{m+1}(x)\right) \le \sum_{i=n}^{m} d\left(T^i(x),T^{i+1}(x)\right) \le \phi\left(T^n(x)\right) - \phi\left(T^{m+1}(x)\right)$$

yazılır. Özellikle $n=1$ alınarak $m \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\sum_{i=n}^{m} d\left(T^i(x),T^{i+1}(x)\right) \le \phi(T(x)) < \infty$$

olur. Bu ise $\left(T^n(x)\right)$ in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. *M* bir tam metrik uzay olduğu için, $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0$ olacak şekilde $x_0 \in M$ vardır. *T* sürekli olduğu için,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = x_0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (*)$$

yazılabilir. Bu son ifade x_0 noktasının *T* nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. Teoremin ispatını tamamlayabilmek için x_0 ın tek olduğunun gösterilmesi gereklidir. y , *T* nin başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda $(*)$ dan,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} T^n(y) = y$$

dir. Diğer taraftan

$$d\left(T^n(x),T^{m+1}(x)\right) \le \phi\left(T^n(x)\right) - \phi\left(T^{m+1}(x)\right)$$

eşitsizliğinde $m \to \infty$ için limit alınırsa,

$$d\left(T^n(x),x_0\right) \le \phi\left(T^n(x)\right) = (1-k)^{-1} d\left(T^n(x),T^{n+1}(x)\right)$$

elde edilir.

$$(1-k)^{-1} d\left(T^n(x),T^{n+1}(x)\right) \le \frac{k^n}{1-k} d(x,T(x))$$

olduğundan,

$$d\left(T^n(x),x_0\right) \le \frac{k^n}{1-k} d(x,T(x))$$

sonucu bulunur.

Örnek 2.4.1: $X=[a,b]$, $d(\mathrm{x},\mathrm{y})=|x-y|$ ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T , $[a,b]$ de sürekli (a,b) de türevlenebilir bir dönüşüm ve $\forall x\in[a,b]$ için,

$$|T'(x)|\leq k<1$$

ise, T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden $\forall x,y\in[a,b]$ için $c\in(x,y)$ olmak üzere,

$$|T(x)-T(y)|=|T'(c)(x-y)|\leq k|x-y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 2.4.2: $X=(0,1]$ ve $T:X\to X$, $T(x)=\dfrac{x}{2}$ dönüşümü verilsin. Ayrıca X kümesi üzerinde alışılmış metrik tanımlansın. Bu durumda,

$$d(T(x),T(y))=\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|=\frac{1}{2}|x-y|=\frac{1}{2}d(x,y)$$

olacağından, T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin, X de bir sabit noktası yoktur.

III. BÖLÜM
FUZZY KÜMELER , FUZZY METRİK UZAYLAR VE FUZZY METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ:

3.1. Fuzzy Küme Kavramı: Şimdiye kadar, bir kümenin belirtilmesi, bu kümenin iyi tanımlanmış olması koşuluna bağlıydı. Başka bir deyişle, A kümesinin tanımlı olması için, evrensel kümeden seçtiğimiz bir x elemanı A kümesinin elemanı mıdır? Sorusuna kesinlikle evet ya da hayır demek gerekirdi. Bunu evrensel küme X olmak üzere, A kümesinin

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in A \text{ ise} \\ 0 \ , & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : X \to [0,1]$ üyelik (karakteristik) fonksiyonu ile ifade ediliyordu. Zadeh' in de ortaya koyduğu aşağıdaki tanıma göre, $0 \le r \le 1$ olmak üzere, $x \in X$ elemanı, A kümesinin üyelik derecesi r olan bir elemanı olmaktadır. [14]

Tanım 3.1.1: $X = \{x : x \in X\}$ evrensel kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

fonksiyonu ile tanımlı

$A = \{(x|\mu_A(x)) : x \in X\}$ kümesine, X in A fuzzy alt kümesi denir. μ_A fonksiyonuna A fuzzy alt kümesinin üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine x in üyelik derecesi veya değeri ve $\mu_A(X)$ kümesine de A fuzzy alt kümesine ait elemanların üyelik derecelerinin kümesi denir. Bundan böyle "A kümesi" deyimi belirtili kümeyi ifade edecek. Fuzzy kümeler için, "A fuzzy kümesi" tabiri kullanılacaktır.

0 ve 1 sayıları, $[0,1]$ aralığının elemanları olduğundan her belirtili küme bir fuzzy küme gibi düşünülebilir. Örneğin, X evrensel kümesi, $\varnothing$ boş kümesi ve A kümesi

$$X = \{(x|1) : x \in X\}$$
$$\varnothing = \{(x|0) : x \in X\}$$
$$A = \{(x|\mu_A(x)) : x \in X\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Her A fuzzy kümesi, $X \times [0,1]$ kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi olduğundan, A fuzzy kümesine, X den $[0,1]$ aralığına tanımlanmış bir fonksiyon gözüyle de bakılabilir. Kuşkusuz bu fonksiyon, A fuzzy kümesinin μ_A üyelik fonksiyonudur. Bunun için çoğu yazarlar A fuzzy kümesi ile μ_A fonksiyonunu özdeşleştirmişlerdir. Başka bir deyişle "A fuzzy kümesi" tabiri yerine "μ_A fuzzy kümesi" tabirini kullanmışlardır. Bu bölümde her iki tabir de kullanılacaktır. Özellikle, μ_A fuzzy kümesi dediğimiz zaman A fuzzy kümesinin kastedildiği anlaşılacaktır.

Tanım 3.1.2: $A_1, A_2, ..., A_n$ boş olmayan kümeler ise,

$$A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in A_i, i = 1,2,...,n\}$$

kümesine n- boyutlu çarpım kümesi denir ve

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3: $\{A_t : t \in T\}$, boş olmayan kümelerin ailesi ise

$$A = \{x_t, t \in T : x_t \in A_t \text{ her } t \in T \text{ için}\}$$

kümesine sonsuz boyutlu çarpım kümesi denir. Burada T bir sonsuz indeks kümesidir.

Tanım 3.1.4: $0 < r \leq 1$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad p(x) = \begin{cases} r, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $p : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonunun belirttiği *p* fuzzy kümesine, *X* in fuzzy noktası, x_0 a p fuzzy noktasının dayanağı, *r* ye de *p* fuzzy noktasının değeri denir.

Tanım 3.1.5: Bir *A* fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu μ_A olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$p(x) \leq \mu_A(x)$$

ise, *p* fuzzy noktası *A* fuzzy kümesine aittir denir.

Tanım 3.1.6: *A* ve *B, X* in fuzzy alt kümeleri ve bu fuzzy kümelerin üyelik fonksiyonları μ_A ve μ_B olsun.

i. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise $A = B$ dir.

ii. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $A \subseteq B$ dir.

X in üyelik fonksiyonu olarak $\forall x \in X$ için $\mu_x(x) = 1$ ve boş kümenin üyelik fonksiyonu olarak da $\mu_\varnothing(x) = 0$ alalım.

X in *A* ve *B* fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonlarını μ_A ve μ_B ile gösterelim. $\forall x \in X$ için,

$$\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_A \vee \mu_B(x)$$

ve

$$\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A \wedge \mu_B(x)$$

şeklinde gösterilecektir.

Tanım 3.1.7: *A* ve *B* fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları sırası ile μ_A ve μ_B olsun. Bu durumda,

i. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ ise $A \cup B = C$.

ii. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_K(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ ise $A \cap B = K$.

Tanım 3.1.8: X in fuzzy kümelerinin bir ailesi $\{A_i\}_{i\in I}$ olmak üzere bunların birleşimi ve arakesiti

i. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_C(x) = \vee \mu_{A_i}(x) = \underset{i\in I}{ek\ddot{u}s}\, \mu_{A_i}(x)$ ise $C = \bigcup_{i\in I} A_i$

ii. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_K(x) = \wedge \mu_{A_i}(x) = \underset{i\in I}{ebas}\, \mu_{A_i}(x)$ ise $K = \bigcap_{i\in I} A_i$

şeklinde ifade edilir. (eküs: en küçük üst sınır, ebas: en büyük alt sınır)

Tanım 3.1.9: X in bir fuzzy kümesi A ve bunun üyelik fonksiyonu μ_A ise, A nın A^C komplementi

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

olmak üzere $\mu_{A^C} : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile verilir. [2]

Tanım 3.1.10: X in A ve B fuzzy kümeleri için,

$$A \setminus B = A \cap B^C \quad , \quad A \Delta B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$$

olarak tanımlanır. [17]

X in fuzzy kümeleri arasındaki birleşim ve arakesit işlemlerindeki özellikler, belirtili kümelerin birleşim ve arakesit işlemlerindeki özelliklerle aşağıdaki iki özellik hariç aynıdır.

Belirtili kümelerde;

$$A \cap A^C = \varnothing \text{ ve } A \cup A^C = X$$

olmasına karşın fuzzy kümelerde

$$A \cap A^C \neq \varnothing \text{ ve } A \cup A^C \neq X$$

olabilir.

Örnek 3.1.1: $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \dfrac{1}{3}$ ise $\mu_{A^C}(x) = \dfrac{2}{3}$ olur.

$$\mu_{A\cap A^C} = \min\{\mu_A(x), \mu_{A^C}(x)\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A \cap A^C \neq \varnothing$$

$$\mu_{A\cup A^C} = \max\{\mu_A(x), \mu_{A^C}(x)\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A \cup A^C \neq X$$

X üzerinde tanımlı bütün fuzzy kümelerin ailesi $M(X)$ ile gösterilecektir. Yani

$$M(X) = [0,1]^X$$

Ayrıca $M(X)$ kümesi sonsuz bir kümedir. $(X \neq \varnothing)$

Tanım 3.1.11: X in $A_1, A_2, ..., A_n$ fuzzy kümeleri göz önüne alınsın. X^n nin $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ fuzzy kümesi

$$\mu_A(x_1, x_2, ... x_n) = \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \{\mu_{A_i}(x_i)\}$$

olmak üzere $\mu_A : X^n \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile verilir.

Önerme 3.1.12:

1) $\mu_{\bigcup_{t \in T} A_t} = \sup_{t \in T} \mu_{A_t}$

özel olarak $\mu_{A \cup B} = \max\{\mu_A, \mu_B\}$

2) $\mu_{\bigcap_{t \in T} B_t} = \inf_{t \in T} \mu_{B_t}$

özel olarak $\mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A, \mu_B\}$

3) $\mu_{A^C} = 1 - \mu_A$

4) $\mu_{A-B} = \mu_A - \min\{\mu_A, \mu_B\} = \min\{\mu_A, 1 - \mu_B\} = \max\{0, \mu_A - \mu_B\}$

5) $\mu_{\limsup_n A_n} = \lim_n \sup \mu_{A_n}$

$\mu_{\liminf_n A_n} = \lim_n \inf \mu_{A_n}$

ve eğer $\lim_n A_n$ varsa o zaman $\mu_{\lim_n A_n} = \lim_n \mu_{A_n}$ dir.

Tanım 3.1.13: $M \in [0,1]^X$, X in bir fuzzy alt kümesi olmak üzere

$$\mu^0 = \{(x, y) \in X \times [0,1], y < \mu(x)\}$$

ifadesine, μ üyelik fonksiyonu altındaki alan denir.

Tanım 3.1.14: X boş olmayan bir küme ve $I = [0,1] \subseteq R$ olsun. X kümesinden $[0,1]$ kapalı aralığı içine bütün fonksiyonların kümesi I^X olmak üzere, I^X ailesinin her bir elemanına X de bir fuzzy küme denir. X kümesini karakterize eden $\mu : A \to [0,1]$, $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ fonksiyonu alınırsa X kümesi;

$$X = \{(x,1) : x \in X\}$$

kümesi olarak alınabilir. Benzer olarak $\mu_{\varnothing} : X \to [0,1]$, $\forall x \in X$ için $\mu_{\varnothing}(x) = 0$ alınırsa;

$$\varnothing = \{(x,0) : x \in X\}$$

fuzzy kümesi olarak alınabilir. Her belirtili küme bir fuzzy kümesidir. (Zadeh, 1965)

Tanım 3.1.15: $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \alpha$ olsun. Burada μ_A fuzzy kümesine sabit fuzzy küme denir. (Zadeh, 1965)

3.2 Fuzzy Metrik Uzaylar: Fuzzy metrik uzay kavramı Kavela, Seikkala ve Abu Osman tarafından birbirinden bağımsız iki farklı yaklaşım ile tanımlandı. Abu Osman aynı zamanda Banach' ın klasik sabit nokta teoremini de fuzzyleştirdi. Sabit fuzzy kümesinde sayı teoremlerini başka birçok bilim adamı da çalıştı.

Tanım 3.2.1: (Abu Osman, 1983) I^X üzerinde $\mu_x : I^X \times I^X \to [0,1]$ ve $\mu_X(A,B) = \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|$ olarak tanımlı μ_X metriği göz önüne alınsın. Bu durumda μ_A, X üzerinde bir fuzzy metrik ve (I^X, μ_X), X de bir fuzzy metrik uzay olarak adlandırılır. [1]

Tanım 3.2.2: (Schweizer, Skaler 1960) Bir $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi verilsin. Eğer * işlemi;

i. Birleşmeli ve değişmeli,
ii. Sürekli,
iii. $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$
iv. $a \le c$ ve $b \le d$ özelliğini sağlayan $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ için $a * b \le c * d$

koşullarını sağlıyorsa, * işlemine sürekli t-norm denir. [9]

Örnek 3.2.1: $a * b = a.b$ ve $x * y = \min(x,y)$ biçiminde tanımlanan * işlemleri birer sürekli t-norm dur.

Tanım 3.2.3: (Kramosil ve Michalek, 1975) X boş kümeden farklı herhangi bir küme, *, bir sürekli t-norm ve M de $X \times X \times [0,\infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. Eğer M, $\forall x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir.

i. $M(x, y, 0) = 0$,

ii. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

iv. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

v. $M(x, y, \cdot) : [0,\infty) \to [0,1]$, soldan sürekli.

Eğer $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ise M ye X üzerinde bir fuzzy metriktir denir. [6]

1994 yılında George ve Veeramani yukarıdaki tanımı fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff topolojisini elde etmek için aşağıdaki şekilde geliştirdiler.

Tanım 3.2.4: (George ve Veeramani, 1994) $X \neq \emptyset$ **,** $*$**,** sürekli t-norm, ve M de $X \times X \times [0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy küme olsun. $\forall x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için;

i. $M(x, y, 0) = 0$

ii. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

iv. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

v. $M(x, y, \cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$, sürekli

Bu taktirde $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir. [6]

Örnek 3.2.2: R alışılmış metrik uzay olmak üzere $\forall a.b \in R$ için $a * b = a.b$, $\forall x, y \in R$ ve $\forall t > 0$ için

$$M(x,y,t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t} \right) \right]^{-1}$$

olsun. Bu taktirde $(R, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Gerçekten,

(1) $\forall x, y \in R$ ve $t > 0$ için $M(x,y,t) = \left[e^{\left(\frac{|x-y|}{t}\right)} \right]^{-1} = \dfrac{1}{e^{\left(\frac{|x-y|}{t}\right)}} > 0$

(2) $M(x,y,t) = 1$ olsun.

$$M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\left(\frac{|x-y|}{t}\right)}} = 1 \Leftrightarrow e^{\left(\frac{|x-y|}{t}\right)} = 1 = e^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-y|}{t} = 0, t > 0$$

$$\Leftrightarrow |x-y| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

(3) $M(x,y,t) = \dfrac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \dfrac{1}{e^{\frac{|y-x|}{t}}} = M(y,x,t)$

(4) $|x-z| = |x-z+y-y| \le |x-y| + |y-z|$

$\dfrac{t+s}{t} = 1 + \dfrac{s}{t} > 1$ ve $\dfrac{t+s}{t} = 1 + \dfrac{t}{s} > 1$ olduğundan

$|x-z| \le \left(\dfrac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\dfrac{t+s}{t}\right)|y-z|$ ve $\left|\dfrac{x-z}{t+s}\right| \le \left|\dfrac{x-y}{t}\right| + \left|\dfrac{y-z}{s}\right|$ olur.

$$\frac{1}{e^{\frac{x-z}{t+s}}} \ge \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{|y-z|}{s}}} \Rightarrow M(x,y,t+s) \ge M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

(5) $\lim\limits_{t \to a} M(x,y,t) = M(x,y,a)$

$$\Rightarrow \lim_{t \to a} \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{\lim e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{\lim\limits_{t \to a} t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{a}}} = M(x,y,a)$$

O halde $M(x,y,\cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

Örnek 3.2.3: $X = N$ olmak üzere $\forall a, b \in N$ için $a * b = a.b$, $\forall x, y \in N$ ve $\forall t > 0$ için

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & , \quad x \le y \text{ ise} \\ \dfrac{y}{x} & , \quad \mathrm{y} \le x \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. bu taktirde $(N, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. Ancak N üzerinde $M(x, y, t) = \dfrac{1}{t + d(x, y)}$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir *d* metriği yoktur.

Örnek 3.2.4: (X, d)bir metrik uzay, $a * b = a.b$ ve $\forall k, m, n \in R^{+}$ için $M(x, y, t) = \dfrac{kt^{n}}{kt^{n} + md(x, y)}$ olsun. Buna göre $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Tanım 3.2.5: $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam fuzzy metrik uzay denir. $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında, her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise bu uzaya dizisel kompakt uzay ve dolayısıyla kompakt uzaydır denir.

Tanım 3.2.6: Bir $\Diamond : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi verilsin. Eğer $\Diamond$ işlemi;

i. Birleşmeli ve değişmeli,

ii. Sürekli,

iii. $\forall a \in [0,1]$ için $a \Diamond 0 = 0$,

iv. $a \le c$ ve $b \le d$ özelliğini sağlayan $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \Diamond b \le c \Diamond d$

koşullarını sağlıyorsa, $\Diamond$ işlemine bir sürekli t-conorm denir. [15]

Uyarı 3.2.7: Üçgensel norm ve conormların (t-norm , t-conorm) görüşü, fuzzy arakesitleri ve birleşimlerini ayrı ayrı karakterize etmek için kullandığımız aksiyom temelleri olarak bilinir. Bu görüşler Menger tarafından çalışması olan *İstatistiksel Metrik Uzaylar* da orijinal olarak gösterilmiştir. Birtakım örneklerde birçok yazar tarafından bu görüşler ileri sürülmüştür. Aşağıdaki tanım Alaca, Türkoğlu ve Yıldız tarafından verilen Kramosil ve Michalek' in sezgisel (intuitionistic) fuzzy metrik uzayı ve sezgisel metrik uzayın temel özellikleridir.

Tanım 3.2.8. X keyfi bir küme iken $(X, M, N, *, \Diamond)$ beşli değişkenler grubuna bir intuitionistic fuzzy metrik uzayı denir. $*$, bir sürekli t-norm, $\Diamond$, bir sürekli t-conorm, ve *M, N* aşağıdaki şartları sağlayan $X \times X \times [0, \infty)$ üzerinde fuzzy kümeleri, $\forall x, y \in X$ ve $t, s > 0$ için;

i. $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$

ii. $M(x, y, 0) = 0$

iii. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow \text{x} = \text{y}$

iv. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

v. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

vi. $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \to [0,1]$, soldan sürekli.

vii. $\lim\limits_{t \to \infty} M(x, y, t) = 1$

viii. $N(x, y, 0) = 1$

ix. $N(x, y, t) = 0 \Leftrightarrow x = y$

x. $N(x, y, t) = N(y, x, t)$

xi. $N(x, y, t) \Diamond N(y, z, s) \geq N(x, z, t + s)$

xii. $N(x, y, \cdot) : [0, \infty) \to [0,1]$, sağdan sürekli.

xiii. $\lim\limits_{t \to \infty} N(x, y, t) = 1$

Bu durumda (M, N), X üzerinde bir sezgisel metrik uzaydır. $M(x, y, t)$ ve $N(x, y, t)$ fonksiyonları yakınlığın derecesini ve *x* ile *y* arasında ayrı ayrı *t* ye olan uzaklığın derecesini belirtir. [15]

Uyarı 3.2.9: Her $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı, $(X, M, 1 - M, *, \Diamond)$ formunun bir sezgisel metrik uzayıdır, öyle ki $*$, sürekli t-norm ve $\Diamond$, t-conormu $\forall x, y \in X$ için $x \Diamond y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$

Uyarı 3.2.10: $\forall x, y \in X$ için X sezgisel fuzzy metrik uzaylarda $M(x, y, \cdot)$ azalmayan, $N(x, y, \cdot)$ artmayandır.

Tanım 3.2.11: $(X, M, N, *, \Diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda;

(a) $\forall t > 0$ ve $p > 0$ için X üzerindeki bir $\{x_n\}$ dizilişine Cauchy dizilişidir denir.

$$\lim_{n \to \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} N(x_{n+p}, x_n, t) = 0$$

(b) $\forall t > 0$ için X içerisindeki bir $\{x_n\}$ dizilişine $x \in X$ noktasına yakınsar denir.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} M(x_n, x, t) = 1 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} N(x_n, x, t) = 0$$

$*$ ve $\Diamond$ sürekli iken limit eşsiz olarak (v) ve (vi) dan ayrı ayrı sınırlanır. [15]

Tanım 3.2.12: Eğer X içerisindeki tüm Cauchy dizileri X içerisinde yakınsak ise $(X, M, N, *, \Diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı tamdır denir. [15]

Tanım 3.2.13: Eğer X içerisindeki her dizi bir yakınsak alt dizi içeriyorsa $(X, M, N, *, \Diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı dizisel kompakt veya kompakttır denir. [15]

Örnek 3.2.5: (X, d) bir metrik uzay olsun. $a, b \in [0,1]$ için $a * b = a.b$ ve $\forall x, y \in X$, $t, s > 0$ olmak üzere M_d , $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

biçiminde tanımlanan $(X, M_d, *)$ bir G-V fuzzy metrik uzaydır ve bu biçimde tanımlanan fuzzy metriğine *d* tarafından indirgenen standart fuzzy metrik denir.

İspat:

i. $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M_d(x,y,t) > 0$.

ii. $M_d(x,y,t) = \dfrac{t}{t + d(x,y)} = 1 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii. $d(x,y) = d(y,x)$ olduğundan $M_d(x,y,t) = M_d(y,x,t)$.

iv. $M_d(x,y,t) * M_d(y,z,s) = \dfrac{t}{t + d(x,y)} \cdot \dfrac{s}{s + d(y,z)}$

$$\leq \frac{t+s}{t+s+d(x,y)} \cdot \frac{s+t}{s+t+d(y,z)}$$

$$= \frac{(t+s)^2}{(t+s)^2 + (t+s).d(y,z) + (t+s).d(x,y) + d(x,y).d(y,z)}$$

$$\leq \frac{(t+s)^2}{(t+s)^2 + (t+s)d(x,z)} = \frac{t+s}{t+s+d(x,z)} = M(x,z,t+s)$$

v. $M(x,y,\cdot) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ süreklidir. (George ve Veeramani, 1994)

3.3 Fuzzy Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri:

Bu bölümde V. George ve P. Veeramani anlamındaki $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaylar göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.3.1: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$, $t > 0$ için,

$$\frac{1}{M(T(x), T(y), t)} - 1 \leq k.\left(\frac{1}{M(x,y,t)} - 1\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sayısı varsa, T ye G-S fuzzy daraltan dönüşüm, k ya da, T nin daraltan sabiti denir.

Önerme 3.3.2: (X,d) bir metrik uzay olsun. (X,d) üzerinde bir $T:X\to X$ dönüşümünün daraltan sabiti *k* olan bir daraltan dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, d ile indirgenen $(X,M_d,*)$ standart fuzzy metrik uzayı üzerinde, *T* nin daraltan sabiti *k* olan bir G-S fuzzy daraltan dönüşüm olmasıdır.

Teorem 3.3.3: (Gregori ve Sapena, 2002) $(X,M,*)$ fuzzy daraltan dizilerin G-V Cauchy dizisi olduğu bir G-V tam fuzzy metrik uzay olsun. $T:X\to X$, daraltan sabiti *k* olan bir G-S fuzzy daraltan dönüşümü ise o zaman *T* nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. [8]

İspat: Sabit bir $x\in X$ alınsın ve $\{x_n\}$ dizisi $n\in N$ olmak üzere $x_n=T^n(x)$ biçiminde tanımlansın. Her $t>0$, $n\in N$ için

$$\frac{1}{M\left(T(x),T^2(x),t\right)}-1\le k.\left(\frac{1}{M(x,x_1,t)}-1\right)$$

olup tümevarımla

$$\frac{1}{M(x_{n+1},x_{n+2},t)}-1\le k.\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n+1},t)}-1\right)$$

bulunur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi G-V Cauchy dizisi olup, $(X,M,*)$, G-V tam olduğundan bir $y\in X$ e yakınsar. $n\to\infty$ için

$$\frac{1}{M(T(y),T(x_n),t)}-1\le k.\left(\frac{1}{M(y,x_n,t)}-1\right)\to 0$$

olduğundan $\forall t>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}M(T(y),T(x_n),t)=1$$

olur. Buradan

$$T(y)=\lim_{n\to\infty}T(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=y$$

bulunur. Yani y , T nin bir sabit noktasıdır. Ayrıca, bu y noktası T nin tek bir sabit noktasıdır. Gerçekten $T(z)=z$ olacak biçimde T nin başka bir $z\in X$ sabit noktası olsaydı,

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(y,z,t)}-1&=\frac{1}{M(T(y),T(z),t)}-1\\&\le k.\left(\frac{1}{M(y,z,t)}-1\right)=k.\left(\frac{1}{M(T(y),T(z),t)}-1\right)\\&\le k^2.\left(\frac{1}{M(y,z,t)}-1\right)\le\ldots\le k^n.\left(\frac{1}{M(T(y),T(z),t)}-1\right)\end{aligned}$$

olurdu. Burada $n\to\infty$ için limite geçildiğinde, $k\in(0,1)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}k^n=0$ olur ki buradan

$$M(y,z,t)=1\Rightarrow y=z$$

bulunur.

Sonuç 3.3.4: $(X,M_d,*)$ d metriği tarafından indirgenen bir tam standart fuzzy metrik uzay ve $T:X\to X$ bir G-S fuzzy daraltan dönüşüm olsun. O zaman T nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

3.4 Değiştirme Eşlemeleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Aşağıdaki teoremler Banach' ın metrik uzaylarda daraltma prensibinin bir genelleştirilmesi olarak Jungck tarafından verilmiştir.

Teorem 3.4.1: f ; (X,d) tam metrik uzayının içine, sürekli bir eşlemesi olsun ve $g:X\to X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir eşleme olsun *i.* $g(X) \subseteq f(X)$.

ii. g ; f ile değiştirilebilir.

iii. $\forall x, y \in X$ için $\exists\ 0 < k < 1 \ni d(g(x), g(y)) \le k.d(f(x), f(y))$.

bu durumda f ve g nin tek bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.4.1 sezgisel fuzzy metrik uzaylarda aşağıdaki gibi kanıtlanabilir.

Teorem 3.4.2: $(X, M, N, *, \lozenge)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay ve $g : X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir eşleme olsun.

i. $g(X) \subseteq f(X)$.

ii. f sürekli.

iii. $\forall x, y \in X$ için öyle bir $k \in (0,1)$ sayısı vardır ki

$$\begin{aligned} M(g(x), g(y), kt) &\ge M(f(x), f(y), t) \\ N(g(x), g(y), kt) &\le N(f(x), f(y), t) \end{aligned}.$$

Bu durumda X kümesinde tanımlı f ve g dönüşümlerinin tek bir sabit noktası vardır. [15]

İspat: $x_0 \in X$ olsun. Teoremdeki (i) den dolayı $f(x_1) = g(x_0)$ şartını sağlayacak bir x_1 sayısı bulabiliriz. Tümevarım yöntemi ile X içerisinde $f(x_n) = g(x_{n-1})$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayabiliriz. Yine tümevarım yöntemi ile

$$\begin{aligned} M(f(x_n), f(x_{n+1}), t) &= M(g(x_{n-1}), g(x_n), t) \\ &\ge M\left(f(x_{n-1}), f(x_n), \frac{t}{k} \right) \\ &\ge \dots \\ &\ge M\left(f(x_0), f(x_1), \frac{t}{k^n} \right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+1}\right), t\right) &= N\left(g\left(x_{n-1}\right), g\left(x_{n}\right), t\right) \\
&\leq \mathrm{N}\left(f\left(x_{n-1}\right), f\left(x_{n}\right), \frac{t}{k}\right) \\
&\leq \ldots \\
&\leq \mathrm{N}\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{k^{n}}\right)
\end{aligned}
$$

Bunun sonucu olarak, herhangi pozitif p tamsayısı için;

$$
\begin{aligned}
&M\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+p}\right), t\right) \\
&\geq M\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+1}\right), \frac{t}{k}\right) * \underbrace{\ldots}_{(p\, defa)} * M\left(f\left(x_{n+p-1}\right), f\left(x_{n+p}\right), \frac{t}{k}\right) \\
&\geq M\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{pk^{n}}\right) * \underbrace{\ldots}_{(p\, defa)} * M\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{pk^{n+p-1}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+p}\right), t\right) \\
&\leq N\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+1}\right), \frac{t}{k}\right) * \underbrace{\ldots}_{(p\, defa)} * M\left(f\left(x_{n+p-1}\right), f\left(x_{n+p}\right), \frac{t}{k}\right) \\
&\leq N\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{pk^{n}}\right) * \underbrace{\ldots}_{(p\, defa)} * M\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{pk^{n+p-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Tanım 3.2.8 , (vii) ve $(xiii)$ den dolayı

$$
\lim_{n \to \infty} M\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{pk^{n}}\right) = 1 \ , \ \lim_{n \to \infty} N\left(f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right), \frac{t}{pk^{n}}\right) = 0
$$

bu şekilde devam edilirse,

$$
\lim_{n \to \infty} M\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+p}\right), t\right) \geq 1 * \ldots * 1 \geq 1
$$

ve

$$
\lim_{n \to \infty} N\left(f\left(x_{n}\right), f\left(x_{n+p}\right), t\right) \leq 0 \lozenge \ldots \lozenge \leq 0.
$$

Bu yüzden $\{f(x_n)\}$ bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla, X in tamlığından $\{f(x_n)\}$, y gibi bir noktaya yakınsar ve $f(x_n)=g(x_{n-1})$ de aynı y noktasına yakınsar. (iii) den dolayı f nin sürekliliği, g nin sürekliliğini gerektirir. Bundan dolayı $\{g\{f(x_n)\}\}$, dizisi $g(y)$ noktasına yakınsar. Bununla birlikte, f ve g , X üzerinde eşlemeler olduğundan $\{g\{f(x_n)\}\}=\{f\{g(x_n)\}\}$ ve dolayısıyla $\{f\{g(x_n)\}\}$ dizisi $f(y)$ ye yakınsar. Limitlerin tekliği ile, $f(y)=g(y)$ dir ve bu eşitlikten $f(f(y))=f(g(y))$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
M(g(y),g(g(y)),t) &\geq M\left(f(y),f(g(y)),\frac{t}{k}\right)\\
&\geq M\left(g(y),g(g(y)),\frac{t}{k}\right)\\
&\geq \ldots\\
&\geq M\left(g(y),g(g(y)),\frac{t}{k^n}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(g(y),g(g(y)),t) &\leq N\left(f(y),f(g(y)),\frac{t}{k}\right)\\
&\leq N\left(g(y),g(g(y)),\frac{t}{k}\right)\\
&\leq \ldots\\
&\leq N\left(g(y),g(g(y)),\frac{t}{k^n}\right).
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, Tanım 3.2.8 , (iii) , (ix) , (vii) ve $(xiii)$ en dolayı $g(y)=g(g(y))$ şeklinde devam eder. Böylece $g(y)=g(g(y))=f(g(y))$ eşitliğinden $g(y)$, f *ve* g nin ortak sabit noktasıdır.

Eğer y ve z , f *ve* g nin ortak iki sabit noktası ise,

$$
\begin{aligned}
1 &\geq M(y,z,t) \\
&= M(g(y),g(z),t) \geq M\left(f(y),f(z),\frac{t}{k}\right) \\
&= M\left(y,z,\frac{t}{k}\right) \geq \ldots \geq M\left(y,z,\frac{t}{k^n}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq N(y,z,t) \\
&= M(g(y),g(z),t) \leq N\left(f(y),f(z),\frac{t}{k}\right) \\
&= N\left(y,z,\frac{t}{k}\right) \leq \ldots \leq N\left(y,z,\frac{t}{k^n}\right)
\end{aligned}
$$

Tanım 3.2.8 (vii) ve $(xiii)$ den dolayı

$$\lim_{n\to\infty} M\left(y,z,\frac{t}{k^n}\right) = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} N\left(y,z,\frac{t}{k^n}\right) = 0$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$1 \geq M(y,z,t) \geq 1 \quad , \quad 0 \leq \mathrm{N}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t}) \leq 0 \ ,$$

elde edilir ki bu da $y = z$ eşitliğini gerektirir.

Jungck kendi teoreminin , Banach' ın daraltma prensibinden daha genel olduğunu bir örnek yolu ile göstermiştir. Dolayısıyla Teorem 3.5.2 aynı zamanda Grabiec' in sonucunun genişlemesidir.

Örnek 3.4.1: $d(x,y) = x - y$ olmak üzere $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} \cup \{0\}$ d metriği ile birlikte olsun. $\forall x, y \in X$ ve $t \in [0,\infty)$ için,

$$M(x,y,t)=\begin{cases} 0 & , \ t=0 \ \ ise \\ \dfrac{t}{t+|x\text{-}y|} & , \ t>0 \ \ ise \end{cases}$$

$$N(x,y,t)=\begin{cases} 1 & , \ t=0 \ \ ise \\ \dfrac{|x\text{-}y|}{kt+|x\text{-}y|} & , \ k,t>0 \ \ ise \end{cases}$$

$*$; $a*b=a.b$, $\Diamond$; $a\Diamond b=\min\{1,a+b\}$ şeklinde tanımlanmışken açıkça $(X,M,N,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy metriktir. $g(X)\subseteq f(X)$ olduğu aşikardır. Aynı zamanda $k=\dfrac{1}{3}$ için,

$$M\left(g(x),g(y),\frac{t}{3}\right)=\frac{\dfrac{t}{3}}{\dfrac{t}{3}+\dfrac{|x-y|}{12}}=\frac{4t}{4t+|x-y|}\geq\frac{t}{t+\dfrac{|x-y|}{4}}=\frac{4t}{4t+|x-y|}$$

$$=M(f(x),f(y),t)$$

$$N\left(g(x),g(y),\frac{t}{3}\right)=\frac{\dfrac{|x-y|}{12}}{\dfrac{kt}{3}+\dfrac{|x-y|}{12}}=\frac{|x-y|}{4kt+|x-y|}\leq\frac{\dfrac{|x-y|}{4}}{kt+\dfrac{|x-y|}{4}}=\frac{|x-y|}{4kt+|x-y|}$$

$$=N(f(x),f(y),t)$$

Bu sebepten Teorem 3.4.2 nin tüm şartları sağlanmış ve dolayısıyla f ve g, sıfır(0) ortak sabit noktasına sahiptir.

Daha sonraki bir çalışmada Jungck, f ve g eşlemelerinin değişmeli hipotezini zayıflatmıştır. Jungck' ın eşlemelerin uyumluluğunun belirli sezgisel fuzzy metrik uzay kullanarak Teorem 3.4.2 deki f ve g nin değişmeliliğini zayıflatılır.

3.5 K-M Fuzzy Metrik Uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi

Bu kesimde Kramosil ve Michalek anlamındaki fuzzy metrik uzaylar göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.5.1: $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $0<k<1$ olmak üzere eğer T, $\forall x,y\in X$ için

$$M(Tx,Ty,kt)\geq M(x,y,t)$$

şartını sağlıyorsa *T* ye fuzzy G daraltan dönüşüm denir. (Grabiec, 1988)

Teorem 3.5.2: $(X,M,*)$ G tam K-M fuzzy metrik uzay olmak üzere $\forall x,y\in X$ için,

$$\lim_{t\to\infty} M(x,y,t)=1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (*)$$

özelliği sağlansın. Eğer $T:X\to X$ fuzzy G daraltan dönüşüm ise, *X* de *T* nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. (Grabiec, 1988)

İspat: Herhangi bir $x\in X$ alınsın ve $\{x_n\}$ dizisi, $n\in N$ için $x_n=T^n(x)$ biçiminde tanımlansın. O zaman, her $n\in N$ ve $t>0$ için tümevarımla

$$M(x_n,x_{n+1},t)\geq M\left(x,x_1,\frac{t}{k^n}\right)$$

elde edilir. Böylece, pozitif bir *p* sayısı için fuzzy metrik uzay tanımındaki eşitsizlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned} M(x_n,x_{n+p},t) &\geq M\left(x_n,x_{n+1},\frac{t}{p}\right)*\ldots*M\left(x_{n+p-1},x_{n+p},\frac{t}{p}\right)\\ &\geq M\left(x,x_1,\frac{t}{pk^n}\right)*\ldots*M\left(x\;\;,x_1,\frac{t}{pk^{n+p-1}}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. $(*)$ dan

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x_n, t\right) \geq 1 * \ldots * = 1$$

bulunur ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x_n, t\right) = 1$$

elde edilir. Bu ise, $\{x_n\}$ dizisinin G Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $(X, M, *)$ G tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X de bir y noktasına yakınsar. Böylece:

$$\begin{aligned} M(Ty, y, t) &\geq M\left(Ty, Tx_n, \frac{t}{2}\right) * M\left(x_{n+1}, y, \frac{t}{2}\right) \\ &\geq M\left(y, x_n, \frac{t}{2k}\right) * M\left(x_{n+1}, y, \frac{t}{2}\right) \to 1 * 1 = 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan $Ty = y$ bulunur. Ayrıca T nin bu sabit noktası tektir. Gerçekten $Tz = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ olsaydı,

$$\begin{aligned} 1 &\geq M(z, y, t) = M(Tz, Ty, t) \\ &\geq M\left(z, y, \frac{t}{k}\right) = M\left(Tz, Ty, \frac{t}{k}\right) \geq M\left(z, y, \frac{t}{k^2}\right) \geq \ldots \geq M\left(z, y, \frac{t}{kn}\right) \to 1 \end{aligned}$$

$n \to \infty$ olup $M(z, y, t) = 1$ bulunur ki, bu ise $z = y$ olduğunu gösterir.

IV.BÖLÜM
İKİ FARKLI FUZZY METRİK UZAYDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1 Regüler Fuzzy Metrik Üzerinde Sabit Nokta Teoremi:

Bu bölümde, Fischer ve Murthy' nin klasik anlamda farklı iki metrik uzayda, iki dönüşüm çifti için vermiş oldukları sabit nokta teoremini K-M fuzzy metrik uzaya genişletecektir. Bunun için önce bazı tanım ve önteoremlere ihtiyaç vardır.

Önteorem 4.1.1: $(X, M, *)$ bir K-M fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi, X de bir x noktasına yakınsıyor, ve $t > 0$ için $M(x, y, \cdot)$ sağdan sürekli ise o zaman $\forall t > 0$ için,

$$\lim_{n \to \infty} M(x_n, y, t) = M(x, y, t) \quad \text{olur. [9]}$$

Tanım 4.1.2: $(X, M, *)$ bir K-M fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer X de bir x noktasına yakınsayan her fuzzy daraltan $\{x_n\} \subset X$ dizisi $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} M(x_n, y, t) = M(x, y, t)$$

özelliğini taşıyorsa $M(x, y, t)$ fuzzy kümesine regülerdir denir. Bu tanım iki farklı fuzzy metrik uzay için aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 4.1.3: $(X,M,*)$ ve $(Y,N,*')$ iki K-M fuzzy metrik uzay, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ de sırası ile X ve Y de iki dizi olsun. $\forall n \in N$ için, $0 < c < 1$ olmak üzere,

$$i. \qquad \left(\frac{1}{M(x_{n+1},x_n,t)}-1\right) \le c.\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n-1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{M(y_n,y_{n-1},t)}-1\right)\right\}$$

ve

$$ii. \qquad \left(\frac{1}{N(y_{n+1},y_n,t)}-1\right) \le c.\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n-1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_n,y_{n-1},t)}-1\right)\right\}$$

koşulları sağlanıyorsa $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerine bağlantılı fuzzy daraltan diziler denir.

Bu tanımda eğer $(X,M,*) = (Y,N,*')$ ve $\{x_n\} = \{y_n\}$ alınırsa $\{x_n\}$ dizisi tanım gereği bir fuzzy daraltan dizi olur.

Tanım 4.1.4: $(X,M,*)$ ve $(Y,N,*')$ iki K-M fuzzy metrik uzay olsun. Eğer X de $x \in X$ noktasına yakınsayan ve Y de $y \in Y$ noktasına yakınsayan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ bağlantılı fuzzy daraltan dizileri için $v \in X$ ve $w \in Y$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n,v,t) = M(x,v,t)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} M(y_n,w,t) = M(y,w,t)$$

ise M ve N ye bağlantılı regüler fuzzy metrik denir.

Önerme 4.1.5: $(X,M,*)$ ve $(Y,N,*')$ iki K-M fuzzy metrik uzay olsun. Eğer $M(x,y,\cdot)$ ve $N(u,v,\cdot)$, $\forall t > 0$ için sağdan sürekli iseler, M ve N bağlantılı regülerdir.

Teorem 4.1.6: M ve N bağlantılı regüler olmak üzere, $(X, M, *)$ ve $(Y, N, *')$ G tam K-M fuzzy metrik uzay ve $A, B : X \to Y$, $S, T : Y \to X$ dönüşümler olsun. $\forall x, x' \in X$, $\forall y, y' \in Y$ için $0 \le c < 1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1}{M(SAx, TBx', t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{M(x, x', t)} - 1\right), \left(\frac{1}{M(x, SAx, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{M(x', TBx', t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(Ax, Bx', t)} - 1\right)\right\} \ldots\ldots\ldots (i)$$

ve

$$\left(\frac{1}{N(BSy, ATy', t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{N(y, y', t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y, BSy, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y', ATy', t)} - 1\right), \left(\frac{1}{M(Sy, TY', t)} - 1\right)\right\} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

koşulları sağlansın. Eğer *A, B, S, T* dönüşümlerinden en az biri sürekli ise, o zaman bir $z \in X$, SA ve TB dönüşümlerinin, bir $w \in Y$, BS ve AT dönüşümlerinin tek bir ortak sabit noktasıdır. Ayrıca

$$Az = Bz = w \quad \text{ve} \quad Sw = Tw = z$$

dir.

İspat: X de herhangi bir x noktası alınsın.

$$Ax = y_1 \ , \ Sy_1 = x_1 \ , \ Bx_1 = y_2 \ , \ Ty_2 = x_2 \ , \ Ax_2 = y_3 \ldots$$

olmak üzere, genel olarak $n = 1,2,\ldots$ için

$$Sy_{2n-1} = x_{2n-1} \ , \ Bx_{2n-1} = y_{2n} \ , \ Bx_1 = y_2 \ , \ Ty_{2n} = x_{2n} \ , \ Ax_{2n} = y_{2n+1}$$

biçiminde tanımlansın. (i) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{1}{M(x_{2n+1}, x_{2n}, t)} - 1\right) = \left(\frac{1}{M(SAx_{2n}, TBx_{2n-1}, t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t)} - 1\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{M(x_{2n}, x_{2n+1}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{M(x_{2n-1}, x_{2n}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_{2n+1}, y_{2n}, t)} - 1\right)\right\}$$

olup, $0 \le c < 1$ olduğundan

$$\left(\frac{1}{M(x_{2n+1}, x_{2n}, t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_{2n+1}, y_{2n}, t)} - 1\right)\right\} ......(iii)$$

bulunur. Benzer biçimde tekrar (i) eşitsizliği kullanılarak

$$\left(\frac{1}{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n-1}, x_{2n-2}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_{2n}, x_{2n-1}, t)} - 1\right)\right\} ......(iv)$$

elde edilir. (ii) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{1}{N(y_{2n}, x_{2n+1}, t)} - 1\right) = \left(\frac{1}{N(BSy_{2n-1}, ATx_{2n}, t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{N(y_{2n-1}, y_{2n}, t)} - 1\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{N(y_{2n-1}, y_{2n}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_{2n}, y_{2n+1}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{M(x_{2n-1}, x_{2n}, t)} - 1\right)\right\}$$

olup, $0 \le c < 1$ olduğundan

$$\left(\frac{1}{N(y_{2n}, y_{2n+1}, t)} - 1\right) \le c \max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n-1}, x_{2n}, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_{2n-1}, y_{2n}, t)} - 1\right)\right\} ......(v)$$

bulunur ve benzer şekilde yine (ii) eşitsizliği kullanıldığında

$$\left(\frac{1}{N(y_{2n-1},y_{2n},t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n-1},x_{2n-2},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_{2n-1},y_{2n-2},t)}-1\right)\right\}......(vi)$$

elde edilir. (iii) ve (v) den

$$\left(\frac{1}{M(x_{2n+1},x_{2n},t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n},x_{2n-1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_{2n+1},y_{2n},t)}-1\right)\right.$$

$$\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n},x_{2n-1},t)}-1\right),c\left(\frac{1}{M(x_{2n-1},x_{2n},t)}-1\right),c\left(\frac{1}{N(y_{2n-1},y_{2n},t)}-1\right)\right\}$$

$$\leq \text{cmax}\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n},x_{2n-1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_{2n-1},y_{2n},t)}-1\right)\right\}......................(vii)$$

ve benzer biçimde (iv) ve (vi) dan

$$\left(\frac{1}{M(x_{2n},x_{2n-1},t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_{2n-1},x_{2n-2},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_{2n-1},y_{2n-2},t)}-1\right)\right\}......(viii)$$

bulunur. Böylece (v), (vi), (vii) ve $(viii)$ den

$$\left(\frac{1}{M(x_{n+1},x_n,t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n-1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_n,y_{n-1},t)}-1\right)\right\}$$

ve

$$\left(\frac{1}{N(y_{n+1},y_n,t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n-1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_n,y_{n-1},t)}-1\right)\right\}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yani $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri bağlantılı fuzzy daraltandır. Bu biçimde devam edilirse $\forall n = 1,2,\ldots$ için

$$\left(\frac{1}{M(x_{n+1}, x_n, t)} - 1\right) \le c^{n-1} \max\left\{\left(\frac{1}{M(x_1, x_2, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_1, y_2, t)} - 1\right)\right\}$$

$$\left(\frac{1}{N(y_{n+1}, y_n, t)} - 1\right) \le c^{n-1} \max\left\{\left(\frac{1}{M(x_1, x_2, t)} - 1\right), \left(\frac{1}{N(y_1, y_2, t)} - 1\right)\right\}$$

bulunur. Burada $0 \le c < 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M(x_{n+1}, x_n, t)} - 1\right) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N(y_{n+1}, y_n, t)} - 1\right) = 0$$

olur. Bu ise $\forall t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{n+1}, x_n, t) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} N(y_n, y_{n+1}, t) = 1$$

olmasını gerektirir. Bir $p \in N$ için

$$M(x_n, x_{n+p}, t) \ge M\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$
$$\to 1 * 1 * \ldots * 1 = 1 \qquad (\mathrm{n} \to \infty)$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+p}, t) = 1$ ve benzer biçimde $\lim_{n\to\infty} N(y_n, y_{n+p}, t) = 1$ bulunur. Bu ise $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin birer G Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $(X, M, *)$ ve $(Y, N, *')$ G tam fuzzy metrik uzay olduklarından $\{x_n\}$ G Cauchy dizisi X de bir z noktasına, $\{y_n\}$ G Cauchy dizisi de, Y de bir w noktasına yakınsar. A nın sürekli olduğu kabul edilirse,

$$\lim_{n\to\infty} Ax_{2n} = Az = \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = w$$

olup

$$Az = w$$

olduğu görülür. (i) eşitsizliği kullanıldığında

$$\left(\frac{1}{M(Sw,x_{2n},t)}-1\right)=\left(\frac{1}{M(SAz,TBx_{2n-1},t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(z,x_{2n-1},t)}-1\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{M(z,Sw,t)}-1\right),\left(\frac{1}{M(x_{2n-1},x_{2n},t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(w,y_{2n},t)}-1\right)\right\}$$

olur ve $n \to \infty$ için M ve N bağlantılı regüler olduğundan

$$\left(\frac{1}{M(Sw,z,t)}-1\right)\leq c\max\left\{0,\left(\frac{1}{M(z,Sw,t)}-1\right),0,0\right\}$$

ve

$$\left(\frac{1}{M(Sw,z,t)}-1\right)\leq c\left(\frac{1}{M(z,Sw,t)}-1\right)$$

bulunur. Burada $0 \leq c < 1$ olduğundan

$$Sw = z = SAz$$

dir. (ii) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{1}{N(Bz,y_{2n+1},t)}-1\right)=\left(\frac{1}{N(BSw,ATy_{2n},t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{N(w,y_{2n},t)}-1\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{N(w,Bz,t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(y_{2n},x_{2n+1},t)}-1\right),\left(\frac{1}{M(Sw,x_{2n},t)}-1\right)\right\}$$

olup, $n \to \infty$ için M ve N bağlantılı regüler olduğundan

$$\left(\frac{1}{N(Bz,w,t)}-1\right)\leq c\max\left\{0,\left(\frac{1}{N(w,Bz,t)}-1\right),0,0\right\}$$

ve

$$\left(\frac{1}{N(Bz,w,t)}-1\right)\leq c\left(\frac{1}{N(w,Bz,t)}-1\right)$$

dir ve $0\leq c<1$ olduğundan

$$Bz=w=BSw$$

bulunur. Tekrar (i) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\frac{1}{M(z,Tw,t)}-1\right)=\left(\frac{1}{M(SAz,TBz,t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{M(z,z,t)}-1\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{M(z,z,t)}-1\right),\left(\frac{1}{M(z,Tw,t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(w,w,t)}-1\right)\right\}$$

$$=c\max\left\{0,0,\left(\frac{1}{M(z,Tw,t)}-1\right),0\right\}=c\left(\frac{1}{M(z,Tw,t)}-1\right)$$

olur ve $0\leq c<1$ olduğundan

$$Tw=z=TBz$$

bulunur.

Ayrıca $Az=w$ ve $Tw=z$ olduğundan $ATw=w$ elde edilir. A dönüşümü yerine *B, S, T* dönüşümlerinin herhangi biri sürekli seçilirse de yine benzer biçimde aynı sonuçlar elde edilir.

SA ve *TB* dönüşümlerinin z den başka sabit noktası z' olsun. O zaman $Az'=Bz'$ dir. Gerçekten (ii) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{1}{N(Bz',Az',t)}-1\right)=\left(\frac{1}{N(BSAz',ATBz',t)}-1\right)\leq c\max\left\{\left(\frac{1}{N(Az',Bz',t)}-1\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{N(Az',Bz,t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(Bz',Az',t)}-1\right),\left(\frac{1}{M(z',z',t)}-1\right)\right\}$$

$$=c\left(\frac{1}{N(Az',Bz',t)}-1\right)$$

olup, $c<1$ olduğundan

$$Az' = Bz'$$

dir. (i) ve (ii) eşitsizliklerinden

$$\left(\frac{1}{M(z,z',t)}-1\right)=\left(\frac{1}{M(SAz,TBz',t)}-1\right)\le c\max\left\{\left(\frac{1}{M(z,z',t)}-1\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{M(z,z,t)}-1\right),\left(\frac{1}{M(z',z',t)}-1\right),\left(\frac{1}{N(Az,Bz',t)}-1\right)\right\}$$

$$=c\left(\frac{1}{N(Az,Bz',t)}-1\right)=c\left(\frac{1}{N(Bz,Az',t)}-1\right)=c\left(\frac{1}{N(BSAz,ATBz',t)}-1\right)$$

$$=c^2\left(\frac{1}{M(z,z',t)}-1\right)$$

bulunur ki, $c<1$ olduğundan

$$z = z'$$

dir.

BS ve AT dönüşümlerinin w den başka bir sabit noktası w' olsun. Benzer şekilde $Sw' = Tw'$ ve $w = w'$ olduğu görülür.

Sonuç 4.1.7: (X,d) ve (Y,p) iki tam metrik uzay ve $A,B: X \to Y$ ve $S,T: Y \to X$ dönüşümler olsun. $\forall x,x' \in X$, $\forall y,y' \in Y$ için $0 \le c < 1$ olmak üzere,

i. $d(SAx,TBx') \le c\max\{d(x,x'),d(x,SAx),d(x',TBx'),p(Ax,Bx')\}$

ii. $p(BSy,ATy') \le c\max\{d(y,y'),d(y,BSy),d(y',ATy'),d(Sy,Ty')\}$

koşulları sağlansın. Eğer *A,B,S* ve *T* dönüşümlerinden en az biri sürekli ise, o zaman bir $z \in X$, SA ve TB dönüşümlerinin, bir $w \in Y$, BS ve AT dönüşümlerinin tek bir ortak sabit noktasıdır. Ayrıca

$$Az = Bz = w \quad \text{ve} \quad Sw = Tw = z$$

dir.

4.2 İki Farklı Fuzzy Metrik Uzay İçin Başka Bir Sabit Nokta Teoremi:

Teorem 4.2.1: $(X, M, *)$ ve $(Y.N, *')$ $\forall x, y \in X$ için $\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$, $\forall u, v \in Y$ için $\lim_{t\to\infty} N(u, v, t) = 1$ ve X' de $x_n \to x$, Y de $u_n \to u$ dizileri için $y \in X, v \in Y$ olmak üzere $M(x_n, y, t) \to M(x, y, t)$ ve $N(u_n, v, t) \to N(u, v, t)$ $(n \to \infty)$ koşullarını sağlayan G tam K-M fuzzy metrik uzaylar ve $A, B : X \to Y$ ve $S, T : Y \to X$ dönüşümler olsun. $\forall x, x' \in X, \forall y, y' \in Y$ için $0 \le c < 1$ olmak üzere,

$$M(SAx, TBx', ct) \ge \min\{M(x, x', t), M(x, SAx, t), M(x', TBx', t), N(Ax, Bx', t)\} ....(1)$$

$$N(BSy, ATy', ct) \ge \min\{N(y, y', t), M(y, BSy, t), M(y', ATy', t), M(Sy, Ty', t)\} ....(2)$$

koşulları sağlansın. Eğer A, B, S, T dönüşümlerinin en az biri sürekli ise, o zaman bir $z \in X, SA$ ve TB dönüşümlerinin bir, $w \in Y, BS$ ve AT dönüşümlerinin tek bir ortak sabit noktasıdır. Ayrıca

$$Az = Bz = w \quad \text{ve} \quad Sw = Tw = z$$

dir. [9]

İspat: X de $\{x_n\}$, Y' de $\{y_n\}$ dizisi Teorem 4.1.6 nın kanıtındaki gibi tanımlansın. (1) eşitsizliği kullanıldığında

$$M(x_{2n+1}, x_{2n}, ct) = M(SAx_{2n}, TBx_{2n-1}, ct)$$

$$\ge \min\{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t), M(x_{2n}, x_{2n+1}, t), M(x_{2n-1}, x_{2n}, t), N(y_{2n+1}, y_{2n}, t)\}$$

ve buradan,

$$M(x_{2n+1}, x_{2n}, ct) \ge \min\{M(x_{2n}, x_{2n-1}, ct), N(y_{2n}, y_{2n+1}, t)\} ....(3)$$

bulunur. Benzer biçimde tekrar (1) eşitsizliği kullanılırsa

$$M(x_{2n-1}, x_{2n}, ct) \ge \min\{M(x_{2n-2}, x_{2n-1}, ct), N(y_{2n-1}, y_{2n}, t)\} ....(4)$$

elde edilir. (2) eşitsizliği kullanıldığında

$$N(y_{2n}, x_{2n+1}, ct) = N(BSy_{2n-1}, aTy_{2n}, ct)$$

$$\geq \min\{N(y_{2n-1}, x_{2n}, t), N(y_{2n-1}, y_{2n}, t), N(y_{2n}, y_{2n+1}, t), M(x_{2n-1}, x_{2n}, t)\}$$

ve buradan,

$$N(y_{2n}, y_{2n+1}, ct) \geq \min\{M(x_{2n-1}, x_{2n}, ct), N(y_{2n-1}, y_{2n}, t)\} \text{..........}(5)$$

elde edilir. Benzer biçimde tekrar (2) kullanılırsa

$$N(y_{2n-1}, y_{2n}, ct) \geq \min\{M(x_{2n-1}, x_{2n-2}, t), N(y_{2n-1}, y_{2n-2}, t)\} \text{..........}(6)$$

elde edilir. (3) ve (5) eşitsizliklerinden

$$M(x_{2n}, x_{2n+1}, ct) \geq \min\{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t), N(y_{2n}, y_{2n+1}, t)\}$$

$$\geq \min\left\{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t), M\left(x_{2n}, x_{2n-1}, \frac{t}{c}\right), N\left(y_{2n}, y_{2n-1}, \frac{t}{c}\right)\right\} \text{...........}(7)$$

$$\geq \min\{M(x_{2n}, x_{2n-1}, t), N(y_{2n}, y_{2n-1}, t)\}$$

bulunur. (4) ve (6) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$M(x_{2n-1}, x_{2n}, ct) \geq \min\{M(x_{2n-1}, x_{2n-2}, t), N(y_{2n-1}, y_{2n-2}, t)\} \text{..........}(8)$$

olur. (5), (6), (7) ve (8) eşitsizliklerinden

$$M(x_n, x_{n+1}, ct) \geq \min\{M(x_{n-1}, x_n, t), N(y_{n-1}, y_n, t)\}$$
$$N(y_n, y_{n+1}, ct) \geq \min\{M(x_{n-1}, x_n, t), N(y_{n-1}, y_n, t)\}$$

bulunur ve buradan,

$$M(x_n, x_{n+1}, t) \geq \min\left\{M\left(x_{n-1}, x_n, \frac{t}{c}\right), N\left(y_{n-1}, y_n, \frac{t}{c}\right)\right\}$$

$$\ldots \geq \min\left\{M\left(x_1, x_2, \frac{t}{c^{n-1}}\right), N\left(y_1, y_2, \frac{t}{c^{n-1}}\right)\right\}$$

ve

$$N(y_n, y_{n+1}, t) \geq \min\left\{M\left(x_{n-1}, x_n, \frac{t}{c}\right), N\left(y_{n-1}, y_n, \frac{t}{c}\right)\right\}$$

$$\ldots \geq \min\left\{M\left(x_1, x_2, \frac{t}{c^{n-1}}\right), N\left(y_1, y_2, \frac{t}{c^{n-1}}\right)\right\}$$

elde edilir. Buradan,

$$M(x_n, x_{n+p}, t) \geq M\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$$\geq \min\left\{M\left(x_0, x_1, \frac{t}{pc^n}\right), N\left(y_0, y_1, \frac{t}{pc^n}\right),\right\} * \ldots * \min\left\{M\left(x_0, x_1, \frac{t}{pc^{n+p-1}}\right), N\left(y_0, y_1, \frac{t}{pc^{n+p-1}}\right),\right\}$$

bulunur. $n \to \infty$ için $M(x_n, x_{n+p}, t) \to 1$ olduğundan $\{x_n\}$ G Cauchy dizisidir. Benzer biçimde $\{y_n\}$ dizisinin de G Cauchy dizisi olduğu görülebilir. $(X, M, *)$ ve $(Y, N, *')$ G tam K-M fuzzy metrik uzay olduklarından $\{x_n\}$ dizisi X de bir z noktasına, $\{y_n\}$ dizisi de, Y de bir w noktasına yakınsar.

A nın sürekli olduğu kabul edilirse,

$$\lim_{n\to\infty} Ax_{2n} = Az = \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = w$$

olup

$$Az = w$$

olduğu görülür. (1) eşitsizliğinden

$$M(Sw, x_{2n}, ct) = M(SAz, TBx_{2n-1}, ct)$$
$$\geq \min\{M(z, x_{2n-1}, t), M(z, Sw, t), M(x_{2n-1}, x_{2n}, t), N(w, y_{2n}, t)\}$$

olup $n \to \infty$ için

$$M(Sw, z, ct) \geq M(z, Sw, t)$$

dir. Buradan,

$$Bz = w = BSw$$

elde edilir. (1) eşitsizliği tekrar kullanılırsa

$$M(z, Tw, ct) = M(SAz, TBz, ct)$$
$$\geq \min\{M(z, z, t), M(z, z, t), M(z, Tw, t), N(Az, Bz, t)\}$$

ve buradan,

$$M(z, Tw, ct) \geq M(z, Tw, t)$$

dir. Yine buradan,

$$Tw = z = TBz$$

elde edilir.

A dönüşümü yerine *B, S, T* dönüşümlerinden herhangi biri sürekli seçilirse de yine benzer şekilde aynı sonuçlar elde edilir.

Bu sabit noktaların tekliği ise Teorem 4.1.6 nın ispatındaki ile benzer şekilde gösterilir.

.

V. BÖLÜM
SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının giriş kısmında sabit nokta teoreminin geçmiş yıllarda kimler tarafından işlendiğinden, genel tanımından ve matematikteki kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde metrik uzayın tanımı yapılarak tam metrik uzay ve Banach uzayının tanımı verilmiştir. Yine bu metrik uzaylarda sabit nokta teoreminin nasıl kullanılabileceğinden bahsedilmiş ve sabit nokta teoreminde önemli yer tutan Banach daralma ilkesi tanımlanmıştır.

Daha sonraki bölümde fuzzy (bulanık) kümenin tanımı yapılmış, fuzzy metrik uzayın özelliklerinden bahsedilmiştir. Fuzzy metrik uzayda sabit nokta teoremleri verilmiş bu teoremlerin ispatları gösterilmiştir. Yine fuzzy metrik uzaylarda değiştirme eşlemeleri için kullanılan ortak sabit nokta teoremleri gösterilmiştir. Bu bölümde son olarak K-M (Kramosil ve Michalek) fuzzy metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Tezin son bölümünde ise son yıllarda üzerinde sık çalışılan iki farklı fuzzy metrik uzaydaki sabit nokta teoremleri ve bu teoremler için gerekli olan bazı tanım ve önteoremler verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **ABU OSMAN, M. T.**, Fuzzy metric spaces and fixed fuzzy sets theorem*,* *Bull. Malaysian Math. Soc.* , **6** (1983): 1-4,

[2] **Aydın, S.**, Belirtisiz Topolojik Uzayların Üzerinde Doğurduğu U-Topolojik Uzaylar, *Hacettepe Üniversitesi Doktora Tezi,* (1980)

[3] **BÜLBÜL, A. ; (**1994). *Genel Topoloji*

[4] **CIRIC, LJ. B.,** A Generalizition of Banach's Contraction Principle, *Proceedings of American Math. Soc.* ***45 No.2*** (Aug., 1974) *267-273*

[5] **CIRIC, LJ. B., SINISA N. JESIC, JEONG SHEOK UME ;** The existence theorems for fixed and periodic points of nonexpansive mappings in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solutions and Fractals,* (2006) *, baskıda.*

[6] **GEORGE, A., VEERAMANİ, P. ;** On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* ***64*** (1994) *365-368*

[7] **GOEBEL, K., KIRK, W. A.** Topics in metric fixed point theory (1990) , *Cambridge Stud. İn Adv. Math.* ***28***

[8] **GREGORİ, V. AND SAPENA, A. ;** On fixed-point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* ***125*** (2002) *245-252*

[9] **GÜNDOĞDU, F.,** Fuzzy metrik uzaylar ve sabit nokta teoremleri, *Trakya Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi,* (2004)

[10] **GÜNDOĞDU, Ş.,,** Sabit Nokta Teoremleri, *Gaziantep Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi,* (2005)

[11] **KHAMSI, M. A., KIRK, W. A.,** An ıntroduction to metric spaces and fixed point theory; (2002) *Pure and Appl. Math.* (Dec. 2002)

[12] **KÜTÜKÇÜ, S.,** Fuzzy metrik uzaylar ve sabit noktalar, *Gazi Üniversitesi Doktora Tezi,* (2006)

[13] **Popa, V.,** Some fixed point theorems of expension mappings, *Demonstratio Mathematica, **19*** (1986)*, 699-702*

[14] **ŞAHİN, M.,** Genelleştirilmiş σ cebirleri ve genelleştirilmiş bulanık ölçümler, *Karadeniz Teknik üniversitesi Doktora Tezi,* (2004)

[15] **TÜRKOĞLU, D., ALACA, C., CHO, Y. J., YILDIZ, C.,** Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces, *J. Appl. Math. & Computing **22*** (2006) *No.1-2, 411-424*

[16] **TÜRKOĞLU, D., RHOADES, B. E.,** A fixed fuzzy point for fuzzy mapping in complete metric spaces, *Mathematical Communications **10** (2005) No.2, 115-121*

[17] **Wang, Z. Ve Klir, G. J.,** Fuzzy Measure Theory, *New York-Binghamton,* (1989)

[18] **Willard, S.,** General Topology, (1970)

[19] **ZADEH, L. A.,** Fuzzy sets, Information and Control, **8** (1965) , 338-353