GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİNDE CARATHEODORY GENİŞLEME TEOREMİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDAT KAHYAOĞLU
TEMMUZ 2008

Bulanık Ölçüm Teorisinde Caratheodory Genişleme Teoremi

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
M.Sc. Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Sedat KAHYAOĞLU
Temmuz 2008

ÖZET

BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİNDE CARATHEODORY GENİŞLEME TEOREMİ

KAHYAOĞLU, Sedat
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Temmuz 2008, 59 sayfa

Bu tezde, klasik ölçüm teorisinde yazılmış olan Caratheodory genişleme teoremi bulanık ölçümler üzerinde incelenmiştir.

İlk olarak küme sınıflarının cebirsel yapıları ile bulanık kümeler ve bu kümeler üzerindeki cebirsel yapılar üzerinde durulmuştur. Daha sonra klasik ölçüm ve bulanık ölçümler ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Son olarak ölçümün genişlemesi, bulanık ölçümlerin genişlemesi ile ilgili teoremler ve Caratheodory genişleme teoreminin bazı bulanık ölçümler üzerindeki ifadesi ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ölçüm, bulanık ölçüm, bulanık ölçümlerin genişlemesi, bulanık ölçümlerde Caratheodory ölçülebilirlik, bulanık ölçümlerde Caratheodory genişleme teoremi.

ABSTRACT

CARATHEODORY'S EXTENSION THEOREM ON FUZZY MEASURE THEORY

KAHYAOĞLU, Sedat
M. Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Asst Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN

July 2008, 59 pages

In this thesis on Caratheodory's extension theorem, written in clasiccal measure theory, is studied on fuzzy measure theory.

Firstly, algebraic structure of clases of sets, fuzzy sets and algebraic structure about this fuzzy sets is analyzied. Then basic definitions and theorems that are clasiccal measure and fuzzy measures are mentioned.

Lastly, the theorems about extension of measures, extension of fuzzy measures and the studies which is related to explanation of Caratheodory's extension theorems about some fuzzy measures are studied.

Key Words: Measure, fuzzy measure, extension of fuzzy measures, Caratheodory measurability on fuzzy measures, Caratheodory's extension theorem on fuzzy measures.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma süresince gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN’e ve sabırlarıyla destek olan kıymetli aileme teşekkür ederim…

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Ölçüm kavramı matematiğin temel konularından biridir. Önceleri sürüdeki koyunların sayısı, ipin uzunluğu, tarlanın alanı, küpün hacmi gibi basit, sonlu kümelerle ifade edilebilen kavramlar için ölçüm kuralları bulunmuş ancak sonraları bilimin, özellikle matematiğin gelişmesiyle karşılaşılan, sonsuz kümelerle ifade edilebilen daha karmaşık yapıların veya olayların ölçümü için çalışılmıştır. Örneğin reel doğru üzeride '0' ile '1' arasındaki reel sayıların kümesinin ([0,1] kapalı aralığı) ölçümünün ne olacağı, bu kümeden '0' ve '1' in çıkarılmasıyla oluşan kümenin ((0,1) açık aralığı veya reel doğru üzerindeki herhangi bir açık aralık) ölçümünün ne olacağı veya bu kümeden bütün rasyonel sayıların çıkarılmasıyla oluşan kümenin ölçümünün ne olacağı gibi sorular üzerinde durulmuştur. Ayrıca basit yapılar için belirlenmiş olan ölçüm kurallarının bunları kapsayan daha karmaşık yapılara nasıl genişletileceği önemli bir sorun olmuştur.

Bu konularda özellikle Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesgue (1875-1941) in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin temelini oluşturmuştur. Klasik ölçüm teorisindeki ölçümün toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçümlere toplamsal ölçüm denilmiştir.

Toplamsal ölçümlerin cebirsel ifadesiyle ilgili olarak Yunan matematikçi Constantine Caratheodory'nin yaptığı çalışmalar önemli bir yer tutmuştur. Özellikle Caratheodory tarafından geliştirilen ''bir küme üzerindeki ölçümün bu kümedeki sonuçlar aynı kalmak üzere onu kapsayan bir kümede de ölçüm olma şartlarını sağlayacak şekilde genişletilmesiyle'' ilgili çalışma toplamsal ölçümler için önemli katkı sağlamıştır.

Bilimin hızla ilerleyişine bağlı olarak toplamsallık şartının çoğu zaman kısıtlayıcı olduğu görülmüştür. Buna bağlı olarak toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik gibi daha esnek şartlar kullanılarak oluşturulan ölçüm kuralları oluşturulmuştur. Bu konuda özellikle G.Choquet, Dempster, Shafer, Sugeno ve Zadeh tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu ölçümler genel olarak bulanık ölçüm olarak adlandırılır.

Bulanık ölçümler klasik ölçümlerin genelleştirilmiş halidir. Özellikle Zadeh tarafından geliştirilen bulanık küme teorisiyle birlikte klasik kümelerin gerçek olaylarla daha çok örtüşen bulanık kümelere genelleştirilmesine bağlı olarak klasik ölçümlerinde bulanık ölçümlere genelleştirilmesi önemli bir konu olmuştur.[25]

Son yıllarda yapılan çalışmalarla toplamsal ölçümün birçok özelliği bulanık ölçümler içinde düzenlenebilmiştir. Ancak bulanık ölçümlerin genişlemesi için birçok çalışma yapılmasına rağmen Caratheodory'nin toplamsal ölçümlerde yaptığı gibi genel bir genişleme teoremi yazılamamıştır. Bununla beraber bu tezin konusu olan klasik ölçümdeki Caratheodory Genişleme Teoremi'nin bulanık ölçümler için genelleştirilmesiyle ilgili çeşitli makaleler yayınlanmıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde küme sınıfları, bulanık küme kavramı, bulanık kümeler üzerindeki bazı cebirsel yapılar hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde klasik ölçüm ile bulanık ölçümlerle ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise bulanık ölçümler üzerindeki genişleme teoremleri ile Caratheodory Genişleme Teoremi'nin bu ölçümlerdeki ifadesiyle ilgili yapılan çalışmalar üzerinde durulmuştur.

2. BÖLÜM

KÜME BİLGİLERİ

Ölçüm kavramı bir küme fonksiyonu olduğundan dolayı kümelerin cebirsel yapıları önemlidir. Bu bölümde, üzerinde ölçüm kuramının tanımlanacağı küme sınıfları ve bu küme sınıflarının ürettikleri halkalar ve cebirler ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde çalışılmıştır. Bu bölümün küme sınıfları ile ilgili kısmı [25, 4, 15], bulanık kümeler ile ilgili kısmı Zadeh'in [28] çalışmasından derlenmiştir.

2.1. Küme Sınıfları

Tanım 2.1.1. X kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu küme *kuvvet kümesi* olarak adlandırılır ve *P(X)* ile gösterilir. *P(X)* in alt kümelerine *sınıf* denir.

Tanım 2.1.2. Boş olmayan bir R sınıfına aşağıdaki şartları sağlıyorsa *halka* denir,

$$\forall\, E, F \in R; \quad E \cup F \in R \;\; ve \;\; E - F \in R. \tag{2.1.1}$$

Önerme 2.1.1. Boş küme halkanın bir elemanıdır.

Teorem 2.1.1. Her halka birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalıdır ve tersten birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalı olan boştan farklı her küme sınıfı bir halkadır.

İspat.

$$E\Delta F = (E - F) \cup (F - E) \quad \text{ve} \quad E \cap F = (E \cup F) - (E\Delta F).$$

Tersten,

$$E \cup F = (E\Delta F)\Delta(E \cap F) \quad \text{ve} \quad E - F = (E\Delta F) \cap E. \qquad \blacksquare$$

Teorem 2.1.2. Boş olmayan ve kesişim, fark ve ayrık kümelerin birleşimi altında kapalı olan her sınıf bir halkadır.

İspat. Teorem 2.1.1. ve aşağıdaki eşitlik kullanıldığında ispat yapılmış olur.

$$E\Delta F = [E - (E \cap F)] \cup [F - (E \cap F)]. \qquad \blacksquare$$

Örnek 2.1.1. Sınırlı bir X kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıf bir halkadır.

Örnek 2.1.2. X bir reel doğru olsun,

$$X = (\infty, \infty) = \{x| - \infty < x < \infty\}.$$

Bütün sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sonlu birleşimleri,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x| - \infty < a_i \leq x < b_i < \infty\},$$

bir halkadır.

Tanım 2.1.3. Boş olmayan bir R sınıfına aşağıdaki şartları sağlıyorsa *cebir* denir,

$$\forall E, F \in R \text{ için } E \cup F \in R \text{ ve } \bar{E} \in R.$$

Teorem 2.1.3. Cebir, X kümesini içeren bir halkadır, tersten, X kümesini içeren bir halka, cebirdir.

İspat. R bir cebir olsun. $E - F = E \cap \bar{F} = \left(\overline{\bar{E} \cup F}\right)$, eğer $E \in R$ ise $X = E \cup \bar{E} \in R$ olduğundan teoremin birinci kısmı gösterilmiş olur.

Tersten, eğer R, X kümesini içeren bir halka ise $\forall E \in R$ için $\bar{E} = X - E \in R$ olduğundan ikinci kısımda gösterilmiş olur. $\blacksquare$

Örnek 2.1.3. Bütün sonlu kümeler ve bunların tümleyenlerinden oluşan sınıf bir cebirdir.

Tanım 2.1.4. Aşağıdaki şartları sağlayan ve boş olmayan bir S küme sınıfına *yarı halka* denir.

1) $\forall E, F \in S$ için $E \cap F \in S$,

2) $\forall E \subset F \in S,\ i = 1,2, \dots, n$ için $E = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = F,\ D_i = C_i - C_{i-1} \in S$ olacak biçimde S'nin içinde sonlu bir $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ küme sınıfı vardır.

Her halka bir yarı halkadır ve boş küme her yarı halkanın bir elemanıdır.

Örnek 2.1.4. *X* kümesinin tek elemanlı bütün alt kümelerini ve boş kümeyi içeren küme sınıfı bir yarı halkadır.

Örnek 2.1.5. *X* kümesi bir reel doğru olsun. Bütün sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sınıfı bir yarı halkadır.

Tanım 2.1.5. Boş olmayan bir $\mathcal{F}$ küme sınıfına aşağıdaki şartları sağlarsa *σ-halka* denir,

1) $\forall E, F \in \mathcal{F}$ için $E - F \in \mathcal{F}$,

2) $\forall E_i \in \mathcal{F}, i = 1,2, \dots,$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

Bir σ-halka sayılabilir birleşim altında kapalı olan bir halkadır.

Önerme 2.1.2. Bir σ-halka sayılabilir kesişim altında kapalıdır. Bundan dolayı eğer $\mathcal{F}$ bir σ-halka ve $\{E_n\} \in \mathcal{F}$ bir küme dizisi ise,

$$\lim_n \sup E_n \in \mathcal{F} \text{ ve } \lim_n \inf E_n \in \mathcal{F} \qquad (2.1.2.)$$

olur.

Örnek 2.1.6. Sayılabilir kümelerin sınıfı bir σ-halkadır.

Tanım 2.1.6 *X* kümesini içeren bir σ-halkaya *σ-cebiri* denir.

Örnek 2.1.7. Sayılabilir kümelerden ve bunların tümleyenlerinden oluşan küme sınıfı bir σ-cebiridir.

Önerme 2.1.3. Eğer $\mathcal{F}$ bir σ-halka ise $\mathcal{F} \cup \{E | \bar{E} \in \mathcal{F}\}$ bir σ-cebiridir.

Tanım 2.1.7. Boş olmayan ve her $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ monoton küme dizisi için eğer $\lim_n E_n \in \mathcal{M}$ ise $\mathcal{M}$ küme sınıfına *monoton sınıf* denir.

Önerme 2.1.4. Bir σ-halka bir monoton sınıftır.

Önerme 2.1.5. Bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise bu bir σ-halkadır.

Örnek 2.1.8. X reel doğru olsun. Bütün aralıkların sınıfı bir monoton sınıftır. (Boş küme ve tek elemanlı küme: $\emptyset = (a, a]$ ve $\{a\} = [a, a]$)

Tanım 2.1.8. T herhangi bir indeks kümesi olmak üzere $\forall \{E_t | t \in T\} \subset \mathcal{F}_p$ için $\bigcup_t E_t \in \mathcal{F}_p$ ve $\bigcap_t E_t \in \mathcal{F}_p$ ise boş olmayan $\mathcal{F}_p$ sınıfına *düzenli sınıf* denir.

Önerme 2.1.6. Düzenli sınıf bir monoton sınıftır.

Örnek 2.1.9. X = [0,1] olsun. $a \in$ [0,1] olmak üzere [0,a) veya [0,a] biçimindeki bütün kümelerin sınıfı bir düzgün sınıftır.

Önerme 2.1.7. E sabit bir küme olmak üzere, eğer $\mathcal{S}$ küme sınıfı bir σ-halka ise $\mathcal{S} \cap E$ de bir σ-halkadır.

Teorem 2.1.4. $\mathcal{S}$ bir sınıf olsun. $\mathcal{S}$ sınıfını kapsayan en küçük bir $\mathcal{R}_0$ halkası vardır. Her $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{S}$ için $\mathcal{R} \supset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R} \supset \mathcal{R}_0$.

$\mathcal{R}_o$, $\mathcal{S}$ sınıfının *ürettiği halka* olarak adlandırılır ve $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ ile gösterilir.

İspat. *P(X),* $\mathcal{S}$ sınıfını kapsayan bir halkadır. $\mathcal{S}$ yi kapsayan halkaların kesişimide yine $\mathcal{S}$ yi kapsayan bir halkadır. Bu $\mathcal{R}_0$ halkasıdır. $\mathcal{R}_0$ ın tekliği aşikârdır. ■

Benzer şekilde $\mathcal{S}$ nin ürettiği σ-halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf tanımlanıp sırasıyla, $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, $\mathcal{M}(\mathcal{S})$, $\mathcal{F}_p(\mathcal{S})$ ile gösterilebilir.

Örnek 2.1.10. X bir sonsuz küme olsun. Eğer $\mathcal{S}$ bütün tek elemanlı kümelerin sınıfı ise $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ bütün sonlu kümlerin ve $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ bütün sayılabilir kümelerin sınıfıdır.

Örnek 2.1.11. X reel doğru olsun. Eğer $\mathcal{S}$ bütün açık aralıkların sınıfı ise $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ bütün aralıkların sınıfı ve $\mathcal{F}_p(\mathcal{S})=P(X)$ dir.

Önerme 2.1.8. Eğer $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ ise $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{K}(\mathcal{S}_2)$ dir, burada $\mathcal{K}$ yerine $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$ veya $\mathcal{F}_p$ den herhangi biri alınabilir.

Teorem 2.1.5. $\mathcal{S}$ bir yarı halka olsun. $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ deki bütün kümelerin sonlu, ayrık birleşimlerinin sınıfıdır.

Teorem 2.1.6. $\mathcal{F}(\mathcal{S})=\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathcal{S}))$.

İspat. İlk olarak $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$ olduğundan Önerme 2.1.8.'e göre,

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathcal{S})).$$

İkinci olarak $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \supset \mathcal{S}$ ve $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ bir halka olduğundan $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \supset \mathcal{R}(\mathcal{S})$ olur. Ayrıca $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ bir σ-halka olduğundan,

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \supset \mathcal{F}\big(\mathcal{R}(\mathcal{S})\big),$$

olur. Böylece,

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathcal{S})). \qquad \blacksquare$$

Örnek 2.1.12. X reel doğru ve $\mathcal{S}$ de Örnek 2.1.5. deki yarı halka olsun. Bu durumda $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ ye *Borel cebiri* denir ve $\mathcal{B}$ ile gösterilir. $\mathcal{B}$ deki kümeler *Borel kümesi* olarak adlandırılır. $\mathcal{B}$ aynı zamanda sırasıyla bütün açık aralıkların sınıfı, bütün kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan açık sağdan kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan kapalı sağdan açık aralıkların sınıfı veya bütün aralıkların sınıfı tarafından üretilen bir σ-halkadır.

Teorem 2.1.7. $\mathcal{S}$ bir küme sınıfı ise
$\mathcal{F}_p(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S_t} E_s \,|\, E_s \in \mathcal{S}, S_t \text{ ve } T \text{ herhangi indeks kümeleri} \right\}$ olur.

İspat. Eşitliğin sağ tarafı $\mathfrak{F}$ ile gösterilsin.

i) S_t ve T tek elemanlı olabileceklerinden $\mathfrak{F} \supset \mathcal{S}$.

ii) Bileşke işleminin birleşme özelliğinden $\mathfrak{F}$, bileşke işlemine göre kapalıdır.

iii) $\mathcal{S}$ deki kesişim ve bileşke işleminin yer değiştirebilmesinden ve kesişimin birleşme özelliğinden, $\mathfrak{F}$ kesişim işlemine göre kapalıdır.

Bu yüzden $\mathfrak{F}$, $\mathcal{S}$ yi içeren bir düzgün sınıftır ve $\mathfrak{F} \supset \mathcal{F}_p(\mathcal{S})$. Tersten, $\mathcal{S}$ yi kapsayan her düzgün sınıf $\mathfrak{F}$ yi de kapsar buradan $\mathcal{F}_p(\mathcal{S}) \supset \mathfrak{F}$. Sonuç olarak $\mathcal{F}_p(\mathcal{S}) = \mathfrak{F}$ bulunur. ■

Teorem 2.1.8. Eğer $\mathcal{S}$ herhangi bir sınıf ve A herhangi bir küme ise,

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \cap A = \mathcal{F}(\mathcal{S} \cap A)\ . \tag{2.1.4}$$

Benzer şekilde halka, monoton sınıf ve düzgün sınıf içinde aynı ifade geçerlidir.

İspat.

i) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \cap A$ bir σ-halkadır ve $\mathcal{S} \cap A$ yı kapsar, bu yüzden

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \cap A \supset \mathcal{F}(\mathcal{S} \cap A)$$

olur.

ii) $\mathfrak{F} = \{E | E \cap A \in \mathcal{F}(\mathcal{S} \cap A), E \in \mathcal{F}(\mathcal{S})\}$ olsun, $\mathfrak{F}$ bir σ-halka ve $\mathfrak{F} \supset \mathcal{S}$ olur. $\mathfrak{F} \supset \mathcal{F}(\mathcal{S})$ olduğundan $\forall E \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ için $E \cap A \in \mathcal{F}(\mathcal{S} \cap A)$ olur. Buradan

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \cap A \subset \mathcal{F}(\mathcal{S} \cap A)$$

bulunur, sonuç olarak

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \cap A = \mathcal{F}(\mathcal{S} \cap A).$$

elde edilir. ■

Örnek 2.1.13. $\mathcal{B}$ reel doğru üzerinde bir Borel cebiri olsun. $\mathcal{B} \cap [0,1]$, birim aralık üzerindeki Borel cebiri olarak adlandırılır. Bu, [0,1] deki bütün aralıkların sınıfı tarafından üretilen σ-halkadır.

Teorem 1.9. Eğer $\mathcal{R}$ bir halka ise $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{F}(\mathcal{R})$ olur.

Sonuç 2.1.1. Bir halkayı kapsayan bir monoton sınıf, bu halkanın ürettiği σ-halkayı da kapsar.

2.2. Bağıntı, Sıralı Kümeler ve Latisler

Tanım 2.2.1. *E* ve *F* boş olmayan kümeler olsun. $E \times F$ kartezyen çarpımının bir R altkümesine *E* kümesinden *F* kümesine bir *bağıntı* denir. Eğer $(a, b) \in R$ ise "a ve b, *R* ile *bağlıdır*" denir ve *aRb* ile gösterilir.

Örnek 2.2.1. *X* boş olmayan bir küme olsun. Bir küme işlemi olan '⊂' işlemi *P(X)* de bir bağıntıdır.

Tanım 2.2.2. *R*, *E* den *F* ye bir bağıntı olsun. *F* den *E ye* $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$ bağıntısına *R* nin *tersi* denir ve aşağıdaki gibi gösterilir;

$$aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a.$$

Önerme 2.2.1. $(R^{-1})^{-1} = R$

Tanım 2.2.3. *R*, *E* kümesinde bir bağıntı olsun. *R* bağıntısına $\forall a, b, c \in R$ için;

1) *aRa* ise *yansıyan*,

2) *aRb* iken *bRa* ise *simetrik*,

3) *aRb* ve *bRc* iken *aRc* ise *geçişken* denir.

Tanım 2.2.4. *E* kümesindeki bir *R* bağıntısına eğer yansıyan, simetrik ve geçişken ise *denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.2.5. E kümesinin ikişer ikişer ayrık alt kümelerinden oluşan $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ küme sınıfına eğer $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$ ise E nin bir *parçalanışı* denir.

Tanım 2.2.6. R, E kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall x \in E$ için $[x] = \{y|xRy\}$ sınıfına E deki bir *denklik sınıfı* denir. R tarafından oluşturulan E deki bütün denklik sınıfları E/R ile gösterilir ve E nin R tarafından *bölümü* denir.

Önerme 2.2.2. R, E kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y \in E$ için

$$[x] = [y] \Leftrightarrow xRy$$

olur ve *E/R*, *E* nin bir parçalanışıdır.

Tanım 2.2.7. E kümesindeki bir R bağıntısına, her $a, b \in E$ için aRb ve bRa iken $a = b$ ise *anti simetriktir* denir.

Tanım 2.2.8. R, E kümesinde bir bağıntı olsun. Eğer R bağıntısı yansıyan, anti simetrik ve geçişken ise R ye *kısmi sıralama bağıntısı* denir.

Örnek 2.2.2. $(P(X), \subset)$ bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.2.9. $(P, \leq)$ bir kısmi sıralama bağıntısı ve $E \subset P$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $a \in P$ ve $x \leq a$ ise a ya E kümesinin *üst sınırı* denir. Eğer E kümesinin her b *üst sınırı* için $a \leq b$ ise a ya *en küçük üst sınır* veya $supremum$ denir. E kümesinin *en küçük üst sınırı* '$sup\ E$' veya '$\bigvee E$' ile gösterilir.

Benzer şekilde, eğer her $x \in E$ için $a \in P$ ve $a \leq x$ ise a ya E kümesinin *alt sınırı* denir. Eğer E kümesinin her b *alt sınırı* için $b \leq a$ ise a ya *en büyük alt sınır* veya $infumum$ denir. E kümesinin *en büyük alt sınırı* , '$infE$' veya '$\bigwedge E$' ile gösterilir. Eğe E sadece x ve y gibi iki elemandan oluşuyorsa $\bigvee\{x, y\}$ yerine $x \vee y$ ve $\bigwedge\{x, y\}$ yerine $x \wedge y$ kullanılır.

Önerme 2.2.3. Eğer $E \subset P$ kümesinin bir supremumu veya infumumu varsa bu tektir.

Tanım 2.2.10. $(P, \leq)$ bağıntısı *kısmi sıralı* olsun. Eğer $x, y \in P$ için $x \vee y$ veya $x \wedge y$ varsa $(P, \leq)$ bağıntısına sırasıyla *üst yarı latis* veya *alt yarı latis* denir. Eğer hem üst yarı latis hem de alt yarı latis ise *latis* denir.

Örnek 2.2.3. $(P(X), \subset)$ bağıntısı bir latisdir. Her $E, F \subset X$ için $E \cup F = sup\{E, F\}$ ve $E \cap F = inf\ \{E, F\}$ olur.

Tanım 2.2.11. $(P, \leq)$ bağıntısı kısmi sıralı olsun. Her $x, y\ \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ e *tam sıralama bağıntısı* denir.

Örnek 2.2.4. Reel sayılar kümesinde '$\leq$' işlemi bir tam sıralama bağıntısıdır.

2.3. Bulanık Kümeler

Bulanık Küme, 1961 yılında Azeri bilim adamı Zadeh tarafından temelleri oluşturulan bir mantık yapısıdır. Klasik yaklaşımda bir varlık ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Matematiksel olarak ifade edildiğinde varlık küme ile olan üyelik ilişkisi bakımından kümenin elemanı olduğunda '1' kümenin elemanı olmadığı zaman '0' değerini alır. Bulanık küme, klasik küme gösteriminin genişletilmesidir. Bulanık kümede her bir elemanın üyelik derecesi vardır. Elemanların üyelik derecesi, [0,1] aralığında herhangi bir değer olabilir ve bu $\mu(x)$ üyelik fonksiyonu ile gösterilir.

Örnek olarak normal oda sıcaklığı 23 derece olarak kabul edilirse, klasik küme kuramına göre 23 derecenin üzerindeki sıcaklık dereceleri sıcak olarak kabul edilir ve bu derecelerin sıcak kümesindeki üyelik dereceleri '1' olur. 23'ün altındaki sıcaklık dereceleri ise soğuktur ve sıcak kümesindeki üyelik dereceleri '0' olur. Soğuk kümesi temel alındığında bu değerler tersine döner. Bulanık Küme yaklaşımında üyelik değerleri [0,1] aralığında değerler almaktadır. Örneğin 14 derecelik sıcaklık için üyelik derecesi '0', 23 sıcaklık derecesi için üyelik değeri '0,25' olabilir.

Bu kısımda Zadeh'in [28] çalışmasından yararlanılarak bulanık küme kavramı ile bulanık kümelerde temel işlemler üzerinde durulmuştur.

X boş olmayan bir küme olsun. X kümesindeki bir bulanık küme (veya X in bir bulanık alt kümesi) $\mu: X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Eğer,

$$\sup_{x \in X} \mu(x) = 1$$

ise bulanık kümeye *normal* denir. Klasik kümelerde olduğu gibi bulanık kümeler $A, B, C, \ldots$ gibi büyük harflerle ve bunların üyelik fonksiyonları $\mu_A, \mu_B, \mu_C, \ldots$ ile gösterilir. $\mu_A(x)$ e x elemanının A kümesindeki üyelik derecesi denir. X in bütün bulanık alt kümelerin sınıfı $\mathfrak{F}(X)$ ile gösterilir. $P(X)$ deki klasik E kümesi bir $\chi_E: X \to \{0,1\}$ karakteristik fonksiyonu ile gösterilebildiğinden özel bir bulanık kümedir dolayısıyla $P(X) \subset \mathfrak{F}(X)$ olur.

Tanım 2.3.1. Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $A \subset B$ denir.

Tanım 2.3.2. Bulanık kümelerde bileşke işlemi, $A \cup B$, '$\vee$' en büyük işlemcisi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad \forall x \in X. \tag{2.3.1}$$

Tanım 2.3.4. Bulanık kümelerde kesişim işlemi, $A \cap B$, '$\wedge$' en küçük işlemcisi olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \forall x \in X\,. \tag{2.3.2}$$

Benzer biçimde eğer $\{A_t | t \in T\}$ bulanık kümelerin bir sınıfı ise $\bigcup_{t \in T} A_t$ ve $\bigcap_{t \in T} A_t$ bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak $\sup_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$ ve $\inf_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$ ile bulunur.

Tanım 2.3.5. A bir bulanık küme olsun. A nın tümleyeni, $\bar{A}$, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X. \tag{2.3.3}$$

Teorem 2.3.1. Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir;

Tümleme: $\bar{\bar{A}} = A$

Tek kuvvet: $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Değişme: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Yutma: $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Evrensel ve boş küme de yutma: $A \cup X = X$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

Özdeşlik: $A \cap X = A$

$A \cup \emptyset = A$

Birleşme: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma $B \cap (\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T}(B \cap A_t)$

$B \cup (\bigcap_{t \in T} A_t) = \bigcap_{t \in T}(B \cup A_t)$

De Morgan kuralları: $\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}$

$\overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}$

Klasik kümelerdekinden farklı olarak $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq \mu_X(x)$, $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq \mu_\emptyset(x)$ olabilir.

Örnek 2.3.1. $X = \{a, b, c\}$ ve A, B, C bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları için bunların küme işlemleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0.7, & x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0.6, & x = a \\ 1, & x = b \\ 0.2, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0.1, & x = a \\ 0, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{A\cup C}(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0.7, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{A\cap C}(x) = \begin{cases} 0.1, & x = a \\ 0, & x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0, & x = b \\ 0.8, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0.6, & x = a \\ 0.3, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{A\cup \bar{A}}(x) = \begin{cases} 0.6, & x = a \\ 0.7, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A\cap \bar{A}}(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0.3, & x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

$$\neq \mu_\emptyset(x).$$

Örnek 2.3.2. $X = [0,100]$, insanların yaş dönemlerinin aralığı olsun. Buna göre insanların G, ‘genç’ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu;

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 25 \\ (40-x)/15, & 25 < x < 40 \\ 0 & , \quad x \geq 40 \end{cases}$$

ve Y, 'yaşlı' bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu;

$$\mu_Y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 50 \\ (x-50)/15, & 50 < x < 65 \\ 1 & , \quad x \geq 65 \end{cases}$$

ise 28 yaşın G bulanık kümesine üyelik derecesi 0.8 iken 45 yaşın hem G bulanık kümesine hem de Y bulanık kümesine üyelik derecesi 0 olduğu görülür. Dolayısıyla 45 yaşındaki birisine genç denilemeyeceği gibi yaşlıda denilemez. Bu üyelik fonksiyonlarına göre 'genç değil', 'yaşlı değil', 'genç değil ve yaşlı değil' kümeleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_{\bar{G}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 25 \\ (x-25)/15, & 25 < x < 40 \\ 1 & , \quad x \geq 40 \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 50 \\ (65-x)/15, & 50 < x < 65 \\ 0 & , \quad x \geq 65 \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{G} \cap \bar{Y}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 25 \\ (x-25)/15, & 25 < x < 40 \\ 1 & , \quad 40 \leq x \leq 50 \\ (65-x)/15, & 50 < x < 65 \\ 0 & , \quad x \geq 65 \end{cases}$$

böylece $Y \subset \overline{\mathrm{G}}$ yani 'yaşlı' ise 'genç değildir' olduğu anlaşılır. Bu üyelik fonksiyonlarına göre 32 yaşındaki bir insanın 'Genç' bulanık kümesine ait üyelik derecesi yaklaşık 0.6, 'Yaşlı' bulanık kümesine ait üyelik derecesi 0 olur.

Yukarıdaki üyelik fonksiyonları yaşın hangi alanla ilgili olduğuna göre düzenlenebilir. Örneğin bir insanın futbolcu olmasına göre 32 yaşındaki birisine genç denilemez dolayısıyla 'Genç' bulanık kümesine üyelik derecesi 0, 'Yaşlı' bulanık kümesine üyelik derecesi 1 olabilecekken yine aynı yaştaki bir insana bir şirkette üst düzey yönetici olması ile ilgili olarak yaşlı denilemez dolayısıyla üyelik dereceleri

‘Genç’ bulanık kümesi için 1, ‘Yaşlı’ bulanık kümesi için 0 olacak şekilde düzenlenebilir.

Tanım 2.3.6. $A \in \mathfrak{F}(X)$ olsun. $\{x | \mu_A(x) > 0\}$ klasik kümesi A nın desteği olarak isimlendirilir ve $suppA$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.7. $A \in \mathfrak{F}(X)$ olsun. Her $\alpha \in [0,1]$ için $\{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ve $\{x | \mu_A(x) > \alpha\}$ klasik kümelerine $\alpha -$ kesim ve güçlü $\alpha -$ kesim kümeleri denir ve sırasıyla A_α, A_{α^+} ile gösterilir.

Örnek 2.3.3. Yukarıdaki örnekte G bulanık kümesi için 0.2 ve 0.6 kesim kümeleri $G_{0.2} = [0,37]$ ve $G_{0.6} = [0,31]$ olur.

Tanım 2.3.8. $X = (-\infty, \infty)$ olsun. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için A_α bir sonlu kapalı aralık ise $A \in \mathfrak{F}(X)$ bulanık kümesine bulanık sayı denir. Eğer A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu a, b reel sayı ve $b \geq 0$ olmak üzere

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a - b \ veya \ x > a + b \\ (x - a + b)/b, & a - b \leq x < a \\ (a + b - x)/b, & a \leq x < a + b \\ 1 & , \quad x = a \end{cases}$$

ise A ya üçgensel bulanık sayı denir.

Her üçgensel bulanık sayı bir bulanık sayı, her reel sayı özel bir üçgensel bulanık sayı ve buradan her reel sayı aynı zamanda bulanık sayıdır.

Tanım 2.3.9. $X = (-\infty, \infty)$ olsun. Eğer her $x_1, x_2, x_3 \in X$ için $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ iken

$$\mu_A(x_2) = \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_3)$$

ise $A \in \mathfrak{F}(X)$ bulanık kümesine *konveks* denir.

Teorem 2.3.2. Her bulanık sayı, $(-\infty, \infty)$ un konveks bulanık alt kümesidir ve bunların üyelik fonksiyonları üstten yarı süreklidir.

Tanım 2.3.10. A, B bulanık sayılar olsun. Bu durumda $A + B, A - B, A.B, A/B$ aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{x+y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)],$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{x-y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)],$$

$$\mu_{A.B}(z) = \sup_{x.y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)],$$

$$\mu_{\frac{A}{B}}(z) = \sup_{\frac{x}{y}=z, y\neq 0} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

2.4. $L -$ Bulanık Kümeler

Bulanık kümeler ilk olarak " L- Fuzzy Sets" adlı yazısı ile J.A. Goguen [9] tarafından genelleştirilmiştir. Yazarın çalışması L.A. Zadeh tarafından incelendikten sonra yayınlanmıştır. Burada, latis değerli fonksiyonlar kullanılmıştır. [0,1] aralığının özel bir latis olmasına karşılık, genel anlamda latisler düşünülmüştür.

Tanım 2.4.1. Bir X kümesi üzerinde bir L- bulanık kümesi $\mu: X \to L$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur, burada L bir latisdir. Böylece bulanık kümelerin eşitliği onların fonksiyonlar olarak eşitliği olur.

Tanım 2.4.2. L^X, X den L latisine olan fonksiyonların kümesi olsun. $\mu, \vartheta \in L^X$, $x \in X$ için

$$(\mu \vee \vartheta)(x) = \mu(x) \vee \vartheta(x)$$

ve

$$(\mu \wedge \vartheta)(x) = \mu(x) \wedge \vartheta(x)$$

ifadeleriyle L^X in kendisi de bir latis olur.

L^X deki sıralama $\mu \leq \vartheta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \vartheta(x)$ olarak verilir.

Tam latisler için homomorfizma kavramı genel latislerden daha özeldir. L_1, L_2 tam latisler $l: L_1 \to L_2$ ye tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer

$$l(\vee_{i\in I} a_i) = \vee_{i\in I} l(a_i) \tag{2.4.1}$$

ise l nin bir homomorfizma olduğu bilinmektedir. Yukarıdaki ifadenin duali de geçerlidir.

En büyük ve en küçük eşitsizliği herhangi bir latis için geçerlidir. Bu durum, tam latislerde indislerin sonsuz olması halinde de doğrudur.

$$\wedge_{i=1}^{m}(\vee_{j=1}^{n} a_{i,j}) \geq \vee_{i=1}^{m}(\wedge_{j=1}^{n} a_{i,j}). \quad (2.4.2.)$$

Önerme 2.4.1. L dağılımlı latis ise, L^X de dağılımlı latistir.

İspat: $f, g, h \in L^X$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\big((f \wedge g) \vee h\big)(t) = ((f(t) \wedge g(t)) \vee h)(t)$$

$$= \big(f(t) \vee h(t)\big) \wedge \big(g(t) \vee h(t)\big)$$

$$= (f \vee h) \wedge (g \vee h)(t).$$

■

2.5. Bulanık Cebir

X kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan bir σ ⊂ $\mathcal{F}$(X) sınıfına aşağıdaki şartları sağlıyorsa bulanık cebir denir

i) 0_X ∈ σ (her $x \in X, c \in [0,1]$ için $c_X(x) = c$)

ii) A ∈ σ ise A' ∈ σ

iii) A, B ∈ σ ise $A \cup B$ ∈ σ. Burada eğer iii) $\{A_n\}_{n\in N}$ ∈ σ ise $\bigcup_{n\in N} A_n$ ∈ σ olursa bulanık σ-cebiri denir.[13]

3. BÖLÜM

ÖLÇÜM

Bu bölümde klasik anlamdaki ölçüm kavramı ile bulanık ölçümler hakkında genel tanım ve teoremler incelenmiştir.

3.1. Klasik Ölçüm

Klasik anlamdaki ölçümler toplamsal ölçümler olarak da adlandırılır. Bu konuda Emile Borel, Henry Lebesgue'in çalışmaları temel kaynaklar olmuştur. Daha sonra Caratheodory [1] bu çalışmaları cebirsel yapıda incelemiş ve ölçülebilirlik ve genişleme teoremlerini yazmıştır. Klasik ölçümlerle ilgili olarak [10], [15] önemli kaynaklardır.

Tanım 3.1.1. $\mathcal{A}, X$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve μ, $\mathcal{A}$ cebirinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde μ ye *ölçüm* denir;

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$,

iii) $\forall A_n \in \mathcal{A}$ ikişer ikişer ayrık dizisi ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ için
$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (*sayılabilir toplamsallık* özelliği)

Eğer $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$ alınırsa *sonlu toplamsallık özelliği* denir.

Önerme 3.1.1. $\mu, \mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

i) $A \subset B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \leq \mu(B)$.

ii) Eğer $A_n \in \mathcal{A}, 1 \leq n < \infty$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ için; $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (*sayılabilir alt toplamsallık özelliği*).

İspat.

i) $B = A \cup (B - A)$; buradan $A_1 = A,\ A_2 = B - A,$ ve $n > 2$ için $A_n = \emptyset$ ise μ nün sayılabilir toplamsallığından $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ve $\mu(B) \geq \mu(A)$olur.

ii) $n > 1$ için $A_1 = B_1$ ve $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ olsun. $\forall\, n$ için $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \subset A_n$ ve B_n ler ikişer ikişer ayrık kümeler ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Buradan,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Önerme 3.1.2. $\mu, \mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

i) Eğer $A_n \subset A_{n+1},\ A_n \in \mathcal{A}, 1 \leq n < \infty$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$ ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3.1.1}$$

ii) Eğer $A_n \supset A_{n+1},\ A_n \in \mathcal{A}, 1 \leq n < \infty, \mu(A_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3.1.2}$$

Ayrıca, i) den sonlu toplamsal μ için sayılabilir toplamsallık bulunur.

3.2. Bulanık Ölçümler

Bulanık ölçümlerle ilgili çeşitli tanım ve kavramlar geliştirilmiştir. Bulanık ölçüm düşüncesi ilk olarak Sugeno [20,21] tarafından tasarlanmıştır. Sugeno aynı zamanda *λ-bulanık ölçüm*ün de yazarıdır. Benzerlik ölçümü Wang [23] tarafından düzenlenmiştir. Makul ve güvenirlik ölçümleri Shafer [19] tarafından geliştirilmiş ve Dempster[3] tarafından alt ve üst olasılıklar olarak düzenlenmiştir. Bunlar Dempster-Shafer kanıt teorisi olarak da bilinir. Bu teorinin bulanıklaştırılması ile ilgili daha sonra başta Höhle [11], Dubois ve Prade [5], Yen [27] olmak üzere çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Olanak ve gereklilik ölçümleri makul ve güvenirlik ölçümlerinin özel bir hali olarak Shafer [18,19] ve bulanık küme bağlamında Zadeh [29] tarafından düzenlenmiştir. Ayrıca bu ölçümler olanak teorisi adı altında Dubois ve Prade [6,7,8] de kapsamlı olarak incelenmiştir.

3.2.1. Bulanık ölçüm ve yarı sürekli bulanık ölçüm

X boş olmayan bir küme, $\mathcal{S}, X$ kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir sınıfı ve $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty]$ genişletilmiş reel değerli, pozitif bir küme fonksiyonu olsun.

Tanım 3.2.1 μ , $(X, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty)$ a bir küme fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa μ ye *monoton ölçüm* denir:

1) $\mu(\emptyset) = 0,$

2) $E \in \mathcal{S}, F \in \mathcal{S}$ ve $E \subseteq F$ ise $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Tanım 3.2.2. μ , $(X, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa μ küme fonksiyonuna *bulanık ölçüm* denir.

i) $\mu(\emptyset) = 0,\ \emptyset \in \mathcal{S}$ ise

ii) $E \in \mathcal{S}, F \in \mathcal{S}$ ve $E \subset F$ ise $\mu(E) \leq \mu(F)$ (monotonluk)

iii) $\{E_n\} \subset \mathcal{S},\quad E_1 \subset E_2 \subset \cdots,$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$ ise
$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ (üstten süreklilik)

iv) $\{E_n\} \subset \mathcal{S},\quad E_1 \supset E_2 \supset \cdots,\quad \mu(E_1) < \infty,$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$ ise
$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ (alttan süreklilik)

i), ii), iii) veya i), ii), iv) özellikleri sağlanırsa, μ fonksiyonuna sırasıyla *azalan* veya *artan yarı sürekli bulanık ölçüm* denir. İkisine de kısaca *yarı sürekli bulanık ölçüm* denir. Ayrıca bulanık ölçüm veya yarı sürekli bulanık ölçüm μ için $X \in \mathcal{S}$ ve $\mu(X) = 1$ ise μ fonksiyonuna *normal* denir.

Genelde μ fonksiyonunun tanımlandığı $\mathcal{S}$ sınıfı bir monoton sınıf, yarı halka, halka, cebir, σ-halka, σ-cebiri veya kuvvet kümesi olarak göz önüne alınır. Eğer μ, $(X, \mathcal{F})$ de bir bulanık ölçüm (veya yarı sürekli bulanık ölçüm) ise $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ye bir bulanık ölçüm uzayı (veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayı) denir.

Bir yarı halka üzerindeki bulanık ölçümde, klasik ölçümdeki toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik ve boş kümede sıfır olma gelir. Bunun yanında bulanık ölçüme toplamsal olmayan ölçüm de denir.

Örnek 3.2.1. $\mu, (X, \mathcal{F})$ üzerinde tanımlı ve her $E \in \mathcal{F}$ için x_0 , X kümesinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan Dirac ölçümü bir *normal bulanık ölçümdür*.

$\mathcal{R}, X$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve $\mu, (X, \mathcal{R})$ üzerinde tanımlı bir normal bulanık ölçüm (normal artan yarı sürekli veya normal azalan yarı sürekli bulanık ölçüm) olsun. Eğer υ, $(X, \mathcal{R})$ de bir küme fonksiyonu ve

$$\upsilon(E) = 1 - \mu\,(\bar{\mathrm{E}})$$

ise υ de bir normal bulanık ölçüm (sırasıyla, normal artan yarı sürekli veya normal azalan yarı sürekli bulanık ölçüm) dür. υ ye μ nün eş bulanık ölçümü denir.

3.2.2 λ-Bulanık ölçüm

Tanım 3.2.3. $\sup \mu = \sup_{E \in \mathcal{S}} \mu(\mathrm{E})$ ve $\lambda \in \left(-\frac{1}{\sup \mu}, \infty\right) \cup \{0\}$ olmak üzere,

$$E \in \mathcal{S}, F \in \mathcal{S}, \qquad E \cup F \in \mathcal{S} \ ve\ E \cap F = \emptyset,$$

$$\mu(E \cup F) = \mu(\mathrm{E}) + \mu(\mathrm{F}) + \lambda.\mu(\mathrm{E}).\mu(\mathrm{F}) \tag{3.2.1}$$

ise μ küme fonksiyonu, $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde λ –kuralını sağlar denir. Eğer,

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} \mathrm{E_i}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\{\prod_{i=1}^{n}[1 + \lambda.\mu(\mathrm{E_i})] - 1\}, & \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathrm{E_i}), & \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

ise birleşimleri de $\mathcal{S}$ de olan her sonlu ayrık $\{E_1, \dots, E_n\}$ küme sınıfı için μ, $\mathcal{S}$ üzerinde sonlu λ –kuralını sağlar.

Eğer,

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\{\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda.\mu(E_i)]-1\}, & \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i), & \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

ise birleşimleri de $\mathcal{S}$ küme sınıfında olan her ayrık $\{E_n\}$ küme dizisi için $\mu, \mathcal{S}$ üzerinde σ- λ –kuralını sağlar.

$\lambda = 0$ olduğunda λ–kuralı, sonlu λ–kuralı, σ-λ–kuralı sırasıyla *toplamsal, sonlu toplamsal, σ-toplamsal* olur.

Teorem 3.2.1. Eğer $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ bir halka ve $\mu,$ λ–kuralını sağlıyorsa sonlu λ–kuralınıda sağlar.

Örnek 3.2.2. $X = \{a, b\}$ ve $\mathcal{S} = P(X)$ olsun. Eğer,

$$\mu = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ 0.2\,, & E = \{a\} \\ 0.4\,, & E = \{b\} \\ 1\,, & E = X \end{cases}$$

ise $\lambda = 5$ olduğunda $\mu,$ λ–kuralını sağlar. $\mathcal{S}$ sınıfı bir sonlu halka olduğundan $\mu,$ sonlu λ –kuralınıda sağlar.

Tanım 3.2.4. Eğer μ, $\mu(E) < \infty$ olacak biçimde en az bir $E \in \mathcal{S}$ kümesi varken $\mathcal{S}$ de σ-λ–kuralını sağlıyorsa μ küme fonksiyonuna $\mathcal{S}$ üzerinde *λ-bulanık ölçüm* denir.

λ-bulanık ölçüm genellikle g_λ ile gösterilir. $\mathcal{S}$, σ-cebir ve $g_\lambda(X) = 1$ olduğunda λ-bulanık ölçüm *Sugeno ölçümü* olarak da adlandırılır. Yukarıdaki örnekteki küme fonksiyonu bir Sugeno ölçümüdür.

Teorem 3.2.2 Eğer g_λ, boş kümeyi içeren $\mathcal{S}$ küme sınıfında bir λ-bulanık ölçüm ise $g(\emptyset) = 0$ ve g_λ, sonlu λ –kuralını sağlar.

Teorem 3.2.3. Eğer g_λ bir $\mathcal{S}$ yarı halkası üzerinde bir λ-bulanık ölçüm ise g_λ monotondur.

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 den λ-bulanık ölçümlerin sürekli ve buradan bir yarı halka üzerindeki λ-bulanık ölçümlerin bir bulanık ölçüm oldukları anlaşılır.

Teorem 3.2.4. g_λ bir $\mathcal{S}$ yarı halkası üzerinde bir λ-bulanık ölçüm olsun. g_λ, $\lambda < 0$ ise alt toplamsal, $\lambda > 0$ ise üst toplamsal ve $\lambda = 0$ ise toplamsaldır.

Teorem 3.2.5. g_λ, $\mathcal{R}$ halkası üzerinde bir λ-bulanık ölçüm olsun. Buradan her $E, F \in \mathcal{R}$ için,

1) $g_\lambda(E - F) = \frac{g_\lambda(E) - g_\lambda(E \cap F)}{1 + \lambda . g_\lambda(E \cap F)}$,

2) $g_\lambda(E \cup F) = \frac{g_\lambda(E) + g_\lambda(F) - g_\lambda(E \cap F) + \lambda . g_\lambda(E) . g_\lambda(F)}{1 + \lambda . g_\lambda(E \cap F)}$,

3) $g_\lambda(\overline{E}) = \frac{1 - g_\lambda(E)}{1 + \lambda . g_\lambda(E)}$ ($\mathcal{R}$ bir cebir ve g_λ normal ise)

özellikleri sağlanır.

3.2.3. Benzerlik Ölçümü

Tanım 3.2.5. $a \in [0, \infty)$ olsun, genişletilmiş reel değerli $\theta : [0, a] \to [0, \infty]$ fonksiyonu sürekli, kesin artan ve a nın sonlu olup olmamasına göre $\theta(0) = 0$ ve $\theta^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset$ veya $\{\infty\}$ ise θ ya *T-fonksiyonu* denir .

Tanım 3.2.6. Tanım bölgesi μ yü içeren bir θ T-fonksiyonu varsa ve her $E \in \mathcal{S}$ için S üzerinde tanımlanmış $(\theta \circ \mu) = \theta(\mu(E))$, fonksiyonu toplamsal ise μ ye benzer-toplamsal denir. $\mathcal{S}$ sınıfında tanımlanmış $\theta \circ \mu$ fonksiyonu bir klasik ölçüm olacak şekilde θ T-fonksiyonu varsa μ ye benzerlik ölçümü denir.θ T- fonksiyonu na μ nün uygun T-fonksiyonu denir.

Bir normal benzerlik ölçümü, benzerlik olasılığı olarak adlandırılır. Her klasik ölçüm uygun T-fonksiyonuna özdeş fonksiyon ile benzerlik ölçümüdür.

Teorem 3.2.6. Bir yarı halka üzerindeki her benzerlik ölçümü benzer toplamsal bulanık ölçümdür.

Teorem 3.2.7. μ, $\mathcal{R}$ halkası üzerinde benzer toplamsal ve $\mu(\emptyset) = 0$ olsun. Eğer μ, $\mathcal{R}$ de alttan sürekli (veya üstten sürekli) ve sonlu ise benzerlik ölçümüdür.

Sonuç 3.2.1. Bir halka üzerindeki her benzer toplamsal bulanık ölçüm bir benzerlik ölçümü dür.

Teorem 3.2.8. $\lambda \neq 0$ olsun. Her λ-bulanık ölçüm k herhangi bir sonlu pozitif reel sayı olmak üzere aşağıdaki uygun T-fonksiyonu ile g_λ bir benzerlik ölçümüdür,

$$\theta_\lambda(x) = \frac{\ln(1+\lambda y)}{k\lambda}, \quad y \in [0, sup g_\lambda]. \tag{3.2.4}$$

Tersten eğer μ bir klasik ölçüm ise $\theta_\lambda^{-1} \circ \mu$ bir λ-bulanık ölçüm dür,

$$\theta_\lambda^{-1}(x) = \frac{e^{k\lambda x} - 1}{\lambda}, \quad x \in [0, \infty], \tag{3.2.5}$$

k herhangi bir sonlu pozitif reel sayı

Sonuç 3.2.2. Bir yarı halka üzerindeki λ –kuralı sonlu λ –kuralı ile eşdeğerdir.

Sonuç 3.2.3. Bir yarı halka üzerindeki her λ –bulanık ölçüm süreklidir.

Sonuç 3.2.4. Bir halka üzerinde λ–kuralı ile süreklilik birlikte σ-λ–kuralına eşdeğerdir. Bu yüzden bir halka üzerinde λ –kuralını sağlayan her bulanık ölçüm bir λ-bulanık ölçümdür.

Klasik ölçümdekine benzer biçimde bir yarı halka üzerinde λ –kuralını (veya benzer toplamsallığı) sağlayan bir bulanık ölçüm σ-λ–kuralını sağlamayabilir (veya benzerlik ölçümü olmayabilir).

Sonuç 3.2.5. Eğer g_λ, $\mathcal{R}$ cebiri üzerinde bir normal λ-bulanık ölçüm ise aşağıdaki gibi tanımlanmış μ eş bulanık ölçüm $\mu(E) = 1 - g_\lambda(\bar{E})$, her $E \in \mathcal{R}$ için aynı zamanda $\mathcal{R}$ üzerinde bir normal λ-bulanık ölçümdür ve $\lambda' = \frac{-\lambda}{\lambda+1}$ dir.

3.2.4. Güvenirlik ve makul ölçümleri

Tanım 3.2.7. $P(P(X))$, $P(X)$ in kuvvet kümesi olsun. Eğer $p, (P(X), P(P(X)))$ de bir ayrık olasılık ölçüm ve $p(\{\emptyset\}) = 0$ ise $m: P(X) \to [0,1]$ ve her $E \in P(X)$ için

$$m(E) = p(\{E\})$$

biçiminde tanımlanmış m küme fonksiyonuna $P(X)$ de bir *temel olasılık ataması* denir.

Teorem 3.2.9. $m: P(X) \to [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki şartlar sağlanırsa ancak ve ancak bir temel olasılık atamasıdır;

1) $m(\emptyset) = 0$

2) $\sum_{E \in P(X)} m(E) = 1$.

Tanım 3.2.8. $m, P(X)$ de bir temel olasılık ataması ise $Bel: P(X) \to [0,1]$ ve $E \in P(X)$ için $Bel(E) = \sum_{F \subset R} m(F)$ biçiminde tanımlanan fonksiyona *güvenirlik ölçümü* denir.

Teorem 3.2.10. Bel, $(X, P(X))$ de bir güvenirlik ölçümü ise aşağıdakiler sağlanır;

1) $Bel(\emptyset) = 0$

2) $Bel(X) = 1$

3) $Bel(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \geq \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel(\bigcap_{i \in I} E_i)$ $\{E_1, \dots E_n\}$, *P(X)*'in herhangi bir sonlu alt sınıfı ve $|I|$, I'nın kardinalitesi

4) *Bel* üstten süreklidir.

Teorem 3.2.11. Her güvenirlik ölçümü monoton ve üst toplamsaldır.

Tanım 3.2.9 Eğer $m, P(X)$ de bir temel olasılık ataması ise $Pl: P(X) \to [0,1]$ ve her $E \in P(X)$ için $Pl(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F)$ biçiminde tanımlanan Pl küme fonksiyonu $(X, P(X))$ de bir *makul ölçüm* olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.12. Eğer *Bel* ve Pl aynı temel olasılık ataması ile düzenlenmiş güvenirlik ve makul ölçümler ise her $E \subset F$ için aşağıdakiler sağlanır

$$Bel(E) = 1 - Pl(\bar{E}) \text{ ve } Bel(E) \leq Pl(E). \tag{3.2.6}$$

Teorem 3.2.13. Eğer *Pl*, $(X, P(X))$ de bir makul ölçümü ise aşağıdakiler sağlanır;

1) $Pl(\emptyset) = 0$

2) $Pl(X) = 1$

3) $Pl(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Pl(\bigcup_{i \in I} E_i)$, $\{E_1, \dots, E_n\}$, *P(X)*'in herhangi bir sonlu alt sınıfı.

4) Pl alttan süreklidir.

Teorem 3.2.14. Her makul ölçüm monoton ve alt toplamsaldır.

Teorem 3.2.15. $(X, P(X))$ deki her ayrık olasılık ölçümü p, hem güvenirlik hem de makul ölçümdür. Temel olasılık atamasının benzeri $P(X)$ in tek elemanlı kümelerinde odaklanır. Tersten, $(X, P(X))$ deki olasılık ölçümünün sonucu olarak eğer $m, P(X)$ in tek elemanlı kümelerinde bir temel olasılık atamasının odaklanması ise m ile düzenlenmiş güvenirlik ve makul ölçümler çakışır.

Teorem 3.2.15. *Bel* ve Pl temel olasılık ataması m ile düzenlenmiş olsun. Eğer *Bel* Pl ile çakışırsa m sadece tek elemanlı kümelere odaklanır.

$P(X)$ de tanımlanmış Sugeno ölçümleri, X sayılabilir olduğunda güvenirlik ve makul ölçümlerin özel örnekleridir.

Teorem 3.2.16. X sayılabilir ve g_λ $(\lambda \neq 0)$, $(X, P(X))$ de Sugeno ölçümü olsun. Bu durumda g_λ, $\lambda > 0$ iken bir güvenirlik ölçümü, $\lambda < 0$ iken bir makul ölçümdür.

3.2.5. Olanak ve gereklilik ölçümleri

Tanım 3.2.10. T herhangi bir indeks kümesi ve birleşimleri de $\mathcal{S}$ de olan $\mathcal{S}$ sınıfının her $\{E_t|t \in T\}$ alt sınıfı için $\mu(\bigcup_{t\in T} E_t) = \sup_{t\in T} \mu(E_t)$ ise μ ye $\mathcal{S}$ üzerinde *bulanık toplamsal (f-toplamsal)* denir.

Eğer $\mathcal{S}$ bir sonlu sınıf ise $E_1 \in \mathcal{S}, E_2 \in \mathcal{S}$ ve $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{S}$ olmak üzere μ nün $\mathcal{S}$ deki f-toplamsallığı daha basit bir eşitlik olarak, $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) \vee \mu(E_2)$ haline dönüşür.

Tanım 3.2.11 $\mu(E) < \infty$ olacak şekilde $E \in \mathcal{S}$ var ve μ, $\mathcal{S}$ de *f-toplamsal* ise μ *genelleştirilmiş olanak ölçümü* olarak adlandırılır. Genellikle genelleştirilmiş olanak ölçümü π ile gösterilir.

Tanım 3.2.12. Eğer $\pi, P(X)$ de bir genelleştirilmiş olanak ölçümü ise her $x \in X$ için

$$f(x) = \pi(\{x\}) \tag{3.2.7}$$

biçiminde X üzerinde tanımlanmış f fonksiyonuna *yoğunluk fonksiyonu* denir.

Teorem 3.2.17. Her genelleştirilmiş olanak ölçümü π bir azalan yarı sürekli bulanık ölçüm dür.

Tanım 3.2.13. $P(X)$ de tanımlanmış bir normal genelleştirilmiş olanak ölçümü π ye olanak ölçümü denir.

Teorem 3.2.18. Eğer f , bir olanak ölçümü π nin yoğunluk fonksiyonu ise

$$\sup_{x\in X} f(x) = 1.$$

Tersten, eğer $f(x): X \to [0,1]$ fonksiyonu yukarıdaki şartı sağlarsa *f*, bir olanak ölçümü π olarak benzersiz biçimde düzenlenebilir ve *f*, π nin yoğunluk fonksiyonudur. Benzer bir sonuca genelleştirilmiş olanak ölçümleri için ulaşılabilir: Her $f(x): X \to [0, \infty)$ fonksiyonu benzersiz biçimde $P(X)$ de bir genelleştirilmiş olanak ölçümü π olarak belirlenebilir her $E \in P(X)$ için $\pi(E) = \sup_{x\in E} f(x)$ olur.

Tanım 3.2.14. Eğer π , $P(X)$ de bir olanak ölçümü ise her $E \in P(X)$ için

$$\upsilon(E) = 1 - \pi(\bar{E})$$

fonksiyonu $P(X)$ de *gereklilik ölçümü* olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.19. Bir $\upsilon: P(X) \to [0,1]$ küme fonksiyonu bir gereklilik ölçümüdür ancak ve ancak T bir indeks kümesi, $\{E_t | t \in T\}$, $P(X)$ in bir alt sınıfı ve $\upsilon(\emptyset) = 0$ için aşağıdaki sağlanır;

$$\upsilon(\bigcap_{t\in T} E_t) = \inf_{t\in T} \upsilon(E_t).$$

Teorem 3.2.20. Her gereklilik ölçümü bir artan yarı sürekli bulanık ölçüm dür.

3.2.5. Sonlu bulanık ölçümlerin özellikleri

Bu bölümde $\mathcal{S}$ sınıfı olarak σ-halka $\mathcal{F}$ alınacaktır.

Teorem 3.2.21. Eğer μ bir sonlu bulanık ölçüm ise limiti olan her $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$ dizisi için

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n)$$

olur.

Tanım 3.2.15. Eğer $\mathcal{F}$ deki her ayrık $\{E_n\}$ dizisi için

$$\lim_n \mu(E_n) = 0$$

ise μ ye *tam* denir.

Teorem 3.2.22. Eğer μ bir sonlu artan yarı sürekli bulanık ölçüm ise tamdır.

Sonuç 3.2.6. Ölçülebilir uzaydaki her sonlu bulanık ölçüm tamdır.

4.BÖLÜM

ÖLÇÜMÜN GENİŞLEMESİ

Bu bölümde önce genişlemenin tanımı ardından toplamsal ölçümlerde Caratheodory anlamında dış ölçüm, ölçülebilirlik ve genişleme teoremi, daha sonra bulanık ölçümlerin genişlemesi ile ilgili bazı tanım ve teoremler son olarak Caratheodory anlamında genişlemenin bulanık ölçümler üzerinde yazılması ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar incelenmiştir.

4.1. Klasik Ölçümde Caratheodory Genişleme Teoremi

Tanım 4.1.1. $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$, X kümesininin alt kümelerinden oluşan küme sınıfları, $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ ve μ_1, μ_2 fonksiyonları sırasıyla $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ de tanımlanmış birer ölçüm olsun. Eğer $\mu_1(E)=\mu_2(E)$ ise μ_2 ye μ_1 in bir genişlemesi denir.

$\mathcal{S}$ bir yarı halka ve $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ yarı halkasının ürettiği bir halka olsun. $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ deki her küme $\mathcal{S}$ yarı halkasındaki ayrık kümelerin sonlu bir birleşimi olarak yazılabileceğinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.1. μ, $\mathcal{S}$ yarı halkasında bir ölçüm ise $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ de μ nün genişlemesi olan sadece bir $\bar{\mu}$ ölçümü vardır. Eğer μ sonlu veya σ- sonlu ise $\bar{\mu}$ de öyledir.

Tanım 4.1.2. X kümesinin bütün alt kümelerinin sınıfı (2^X) üzerinde tanımlanmış genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olan μ^* a aşağıdaki şartları sağlarsa *dış ölçüm* denir;

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

ii) $A \subset B$ için, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Buradan açıkça görülür ki bir dış ölçüm her zaman pozitiftir.

Önerme 4.1.1. $\mathcal{F}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan ve boş kümeyi içeren bir sınıf olsun öyle ki her $A \subset X$ için $\mathcal{F}$ de $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olacak şekilde bir $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. τ, $\mathcal{F}$ cebirinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun öyle ki $A \in \mathcal{F}$ için $\tau(\emptyset) = 0$ ve $\tau(A) \geq 0$. Bu durumda 2^X de aşağıdaki gibi tanımlanmış bir dış ölçümdür;

$$\mu^*(A) = \inf\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau(B_n) : B_n \in \mathcal{F}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\}. \qquad (4.1.1)$$

İspat. $\mu^*(\emptyset) = 0$ olduğu açıktır. Eğer $A_1 \subset A_2$ ve $A_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ise $A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Buradan $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$.

Son olarak, her n doğal sayısı için $E_n \subset X$ olsun. Bazı n değerleri için $\mu^*(E_n) = \infty$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Her n için $\mu^*(E_n) < \infty$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{F}$ de $(B_{nm})_{m=1}^{\infty}$ vardır öyle ki;

$$E_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{nm}$$

ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tau(B_{nm}) < \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n.$$

Şimdi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{nm}$$

ve bundan dolayı,

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(B_{nm}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ispat tamamlanır. ■

Tanım 4.1.3 Her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \qquad (4.1.2)$$

ise $E \subset X$ e μ^*-ölçülebilir denir.

Teorem 4.1.2. μ^*-ölçülebilir $\mathcal{B}$ sınıfı bir σ-cebridir. Bununla beraber $\bar{\mu}$, μ^* ın $\mathcal{B}$ ye kısıtlanışı olan bir ölçümdür.

Teorem 4.1.3. (*Caratheodory Genişleme Teoremi).* μ, $\mathcal{A} \subset 2^X$ cebrinde bir ölçüm ve varsayalım

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{A}\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir;

a) μ^* bir dış ölçümdür.

b) $E \in \mathcal{A}$ ise $\mu(E) = \mu^*(E)$.

c) $E \in \mathcal{A}$ ise E, μ^*-ölçülebilirdir.

d) μ^* ın μ^*-ölçülebilir kümeye kısıtlanışı olan $\bar{\mu}$, μ nün $\mathcal{A}$ yı kapsayan bir *σ-cebri*ne genişlemesidir.

e) Eğer μ *σ-sonlu* ise $\bar{\mu}$ ($\mathcal{A}$'yı kapsayan en küçük *σ-cebri*nde) μ nün genişlemesi olan tek ölçümdür.

İspat. a) Önerme 4.1.1 de gösterildi.

b) $E \in \mathcal{A}$ olsun. $\mu^*(E) \leq \mu(E)$ olduğu açıktır. Tersten, verilen bir $\varepsilon > 0$ için $E_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i < \infty$ vardır öyleki;

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Fakat

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap E_i).$$

Buradan

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap E_i).$$

Bu ise $\mu(E) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$ demektir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan b) ispatlanır.

c) $E \in \mathcal{A}$ olsun. E nin μ^*-ölçülebilir olduğunu ispatlamak için aşağıdakileri göstermek yeterlidir:

$$A \subset X \text{ için } \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \qquad (4.1.3)$$

verilen bir $\varepsilon > 0$ için $A_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i < \infty$ vardır öyleki;

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon. \qquad (4.1.4)$$

Şimdi $A \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap E)$ ve $A \cap E^c \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap E^c)$. (4.1.5)

Buradan

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E) \qquad (4.1.6)$$

ve

$$\mu^*(A \cap E^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E^c). \qquad (4.1.7)$$

Eşitsizlik (4.1.4) ve (4.1.7) den (4.1.3) elde edilir.

d) bu maddenin ispatı yukarıdan ve Teorem 4.1.2 den elde edilir.

e) $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ sınıfını kapsayan en küçük σ-cebiri ve μ_1, $\mathcal{B}$ de başka bir ölçüm öyle ki $E \in A$, $\mu_1(E) = \mu(E)$. Aşağıdakinin gösterilmesi gerekir;

$$A \in \mathcal{B} \text{ için } \mu_1(A) = \bar{\mu}(A). \qquad (4.1.8)$$

μ, σ-sonlu olduğundan $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j)$ ve $\mu(E_i) < \infty$, $1 \leq i < \infty$ alınabilir. $A \in \mathcal{B}$ için,

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A \cap E_i) \text{ ve } \mu_1(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A \cap E_i).$$

(4.1.8.) denklemini ispatlamak için aşağıdakini göstermek yeterlidir.

$$A \in \mathcal{B} \text{ için } \mu_1(A) = \bar{\mu}(A), \quad \bar{\mu}(A) < \infty . \qquad (4.1.9)$$

$A \in \mathcal{B}$ ve $\bar{\mu}(A) < \infty$ olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $E_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i < \infty$
$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ vardır ve

$$\bar{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \bar{\mu}(A) + \varepsilon. \qquad (4.1.10)$$

$$\mu_1(A) \leq \mu_1(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

olduğundan eşitsizlik (4.1.10) dan görülür ki

$$\mu_1(A) \leq \bar{\mu}(A). \qquad (4.1.11)$$

Şimdi (4.1.10) eşitsizliğindeki E_i gözönüne alınırsa , $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$ ve bu yüzden F, μ^*-ölçülebilirdir. $A \subset F$ olduğundan $\bar{\mu}(F) = \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(F - A)$ veya $\bar{\mu}(F - A) = \bar{\mu}(F) - \bar{\mu}(A) < \varepsilon$ olur.

Her $E \in \mathcal{A}$ için $\mu_1(E) = \bar{\mu}(E)$ olduğundan $\mu_1(F) = \bar{\mu}(F)$ elde edilir.

Buradan aşağıdaki ifade bulunur

$$\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(F) = \mu_1(F) = \mu_1(A) + \mu_1(F - A) \leq \mu_1(A) + \mu_1(F - A) \qquad (4.1.12).$$

Eşitsizlik (4.1.12) de $\bar{\mu}(A) \leq \mu_1(A)$ olduğu görülür. Bu eşitsizlik (4.1.11) eşitsizliğiyle beraber alındığında ispat tamamlanır.

4.2. Bulanık Ölçümün Genişlemesi

Olanak ve gereklilik ölçümlerinin genişlemesi ilk olarak Wang ve Zhang [26] tarafından düzenlenmiş ve Wang [24] tarafından geliştirilmiştir. Benzerlik ölçümünün genişlemesini ilk olarak Wang [23] çalışmıştır. Yarı sürekli bulanık ölçümlerin genişlemesi ise Qiao [17] ve Wang'ın [23] çalışmaları ile düzenlenmiştir. Bütün bu çalışmalar [25]'de toparlanmış ve örneklerle geliştirilmiştir.

Genişleme bir bulanık ölçümü σ-cebirinde inşa etmenin önemli bir yoludur. Bununla beraber bir $\mathcal{R}$ halkası üzerinde tanımlanmış her bulanık ölçüm bir σ-halka olan $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ye genişletilemez. Aşağıdaki bulanık ölçüm gereken genişlemenin olmadığına bir örnektir.

Örnek 4.2.1. $X = \{1,2,\dots\}$ ve $\mathcal{R}$, X kümesinin bütün sonlu alt kümelerinin sınıfı olsun. Bilindiği gibi $\mathcal{F}(\mathcal{R})$=*P(X) dir*. $\mathcal{R}$ de aşağıdaki gibi tanımlanan küme fonksiyonu bir sonlu bulanık ölçümdür

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E \neq \emptyset \\ 1 & E = \emptyset \end{cases} \quad \forall E \in \mathcal{R}.$$

Eğer $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ üzerinde negatif olmayan bir μ' küme fonksiyonu μ nün bir genişlemesi ise $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ deki her sonsuz E kümesi için $\mu'(E) \geq 1$ olur.

$$E_n = \{n, n+1, \dots\}, \qquad n = 1,2,\dots \text{ olsun.}$$

Eğer $\mu'(E_{n_0}) = \infty$ olacak biçimde bazı E_{n_0} varsa

$$F_i = \{n_0, n_0 + 1, \dots n_0 + i - 1\}, \quad i = 1,2,\dots \text{ alındığında}$$

$F_i \nearrow E_{n_0}$ ve her $i = 1,2,\dots$ için $\mu'(F_i) = \mu(F_i) = 1$ elde edilir. Bu gösterir ki μ' alttan sürekli değildir. Diğer taraftan her $n = 1,2,\dots$ için $\mu'(E_n) < \infty$ ise $E_n \searrow \emptyset$ ve $\mu'(E_n) \geq 1$ dolayısıyla μ' üstten sürekli değildir. Sonuç olarak $\mu', \mathcal{F}(\mathcal{R})$ üzerinde bir bulanık ölçüm değildir.

Bu örnekten anlaşılırki bulanık ölçümde klasik ölçümdeki gibi tek bir genişleme teoremi yazılamaz. Bazı bulanık ölçümlerde özel sınıflar için genişleme teoremleri yazılabilir.

4.3. Benzerlik Ölçümü ve λ-Bulanık Ölçümün Genişlemesi

Teorem 4.3.1. μ bir $\mathcal{S}$ yarı halkasında uygun θ T-fonksiyonu ile σ-sonlu benzerlik ölçümü olsun. Bu durumda μ bir benzerlik ölçümü olarak aynı uygun θ T-fonksiyonu ile $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ ye tek bir şekilde genişletilebilir.

Teoremdeki "aynı uygun θ T-fonksiyonu ile" sınırlaması gereklidir. Aksi halde μ nün genişlemesi tek olmaz. Aşağıdaki örnek bu sınırlama olmadan $\mathcal{S}$ deki bir benzerlik ölçümünün sadece $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ ye bile tek olarak genişletilemeyeceğini gösterir.

Örnek 4.3.1. $X = \{a, b, c\}$ olsun. $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ bir yarı halkadır. Her $E \in \mathcal{S}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ \dfrac{1}{3}, & E \neq \emptyset \end{cases}$$

ise μ, $\mathcal{S}$ sınıfında bir klasik ölçümdür. Elbette aynı zamanda $\theta(y) = y$ uygun T-fonksiyonu ile benzerlik ölçümüdür. $\mathcal{S}$ tarafından üretilen halka

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}.$$

Eğer her $E \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ için

$$\mu^{'}(E) = \begin{cases} \mu(E), & E \in \mathcal{S} \\ 1 \quad , & E = X \\ \dfrac{2}{3} \quad , & değilse \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa μ', $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ de uygun T-fonksiyonu $\theta^{'}(y) = \theta(y) = y$ ile bir benzerlik ölçümü ve μ nün $\mathcal{S}$ den $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ ye bir genişlemesidir. Bununla beraber eğer her $E \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ için

$$\mu^{''}(E) = \begin{cases} \mu(E), & E = \mathcal{S} \\ 1 \quad , & E = X \\ \dfrac{1}{2} \quad , & değilse \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\mu^{''}$, μ nün $\mathcal{S}$ den $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ ye bir genişlemesi ve bununla beraber $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ de bir benzerlik ölçümüdür, fakat başka bir uygun T-fonksiyonu

$$\theta^{''}(y) = \begin{cases} y & , \quad 0 \leq y \leq 1/3 \\ \dfrac{1 + [1 - 6(\frac{1}{2} - y)]^{1/2}}{3}, & y > 1/3 \end{cases}$$

ile $\mu^{'}$ ve μ'' normaldir fakat $\mu^{'}$ ile μ'' farklıdır.

Buna rağmen bir $\mathcal{R}$ cebrinde tanımlanan sonlu benzerlik ölçümü "aynı uygun θ T-fonksiyonu ile" sınırlaması olmadan $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ye genişletilebilir.

Teorem 4.3.2. $\mathcal{R}$ bir cebir olsun. Eğer $\mu: \mathcal{R} \to [0, \infty)$ bir σ-sonlu benzerlik ölçümü ise bir benzerlik ölçümü olarak $\mathcal{R}$ den $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ye tek bir şekilde genişletilebilir.

İspat. Burada sadece tekliğin gösterilmesi gereklidir. Klasik ölçümdeki metot kullanılarak μ için önce σ-sonlu yerine sonlu alınır. $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ de μ' ve μ'' iki genişleme olsun, bu durumda μ' ve μ'', μ gibi sonludur. Eğer

$$\mathcal{M} = \{E \big| E \in \mathcal{F}(\mathcal{R}), \qquad \mu'(E) = \mu''(E)\},$$

alınırsa μ' ve μ'' nün sonsuz olduğu düşünülerek $\mathcal{M}$ deki her monoton $\{E_i\}$ küme dizisi için,

$$\mu'\left(\lim_i E_i\right) = \lim_i \mu'(E_i)$$

$$= \lim_i \mu''(E_i)$$

$$= \mu''(\lim_i E_i)\,;$$

buradan,

$$\lim_i E_i \in \mathcal{M}.$$

Böylece $\mathcal{M}$ monoton sınıftır. Her $E \in \mathcal{R}$ için $\mu'(E) = \mu''(E)$ olduğundan

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{R},$$

ve

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{F}(\mathcal{R})$$

elde edilir.

Sonuç olarak her $E \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ için $\mu'(E) = \mu''(E)$. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.4. Yarı Sürekli Bulanık Ölçümün Genişlemesi

$\mathcal{R}$, *P(X)* in kümelerinden oluşan bir cebir olsun. $\mathcal{R}$ deki kümelerin artan bir dizisinin limiti olarak ifade edilebilen bütün kümelerin sınıfı $\mathcal{R}_\sigma$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\mathcal{R}$ deki kümelerin azalan bir dizisinin limiti olarak ifade edilebilen bütün kümelerin sınıfı $\mathcal{R}_\delta$ ile gösterilir. Açıktır ki $\mathcal{R}_\delta = \{E|\bar{E} \in \mathcal{R}_\sigma\}$, ve terside doğrudur. Basitliği korumak için bu bölümdeki küme fonksiyonları sonlu varsayılacaktır.

Tanım 4.4.1 Azalmayan bir küme fonksiyonu $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty)$ ye alttan (veya üstten) tutarlı denir ancak ve ancak her $F \in \mathcal{S}$ ve $\{E_n\} \subset \mathcal{S}$ için,

$$E_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset F \tag{4.4.1}$$

ise

$$\lim_n \mu(E_n) \geq \mu(F), \tag{4.4.2}$$

veya

$$E_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset F \tag{4.4.3}$$

ise

$$\lim_n \mu(E_n) \leq \mu(F) \tag{4.4.5}$$

oluyorsa.

Ön Teorem 4.4.1. $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty)$ azalmayan olsun. Eğer $\mathcal{S}$ sonlu kesişim (veya sonlu birleşim) altında kapalı ise μ için alttan (veya üstten) tutarlılık, alttan (veya üstten) sürekliliğe eştir.

İspat. Varsayalım μ alttan sürekli. Her $F \in \mathcal{S}$ ve her $\{E_n\} \subset \mathcal{S}$ için eğer

$$E_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset F,$$

ise

$$E_n \cap F \nearrow F,$$

elde edilir. μ nün $\mathcal{S}$ deki monotonluğu ve alttan sürekliliğinden;

$$\lim_n \mu(E_n) \geq \lim_n \mu(E_n \cap F)$$

$$= \mu(F)$$

olur, buradan μ alttan tutarlıdır. ■

Teorem 4.4.1. Eğer μ, $\mathcal{R}$ de bir alt yarı sürekli bulanık ölçüm ise $\mathcal{R}_\sigma$ ya bir alt yarı sürekli bulanık ölçüm olarak tek bir şekilde genişletilebilir.

Teorem 4.4.2. Eğer μ, $\mathcal{R}$ de bir üst yarı sürekli bulanık ölçüm ise $\mathcal{R}_\delta$ ya bir üst yarı sürekli bulanık ölçüm olarak tek bir şekilde genişletilebilir.

İspat. Eğer her $E \in \mathcal{R}$ için $\mathcal{R}$ de bir ϑ küme fonksiyonu;

$$\vartheta(E) = \mu(X) - \mu(\bar{E})$$

biçiminde tanımlanırsa ϑ bir azalan yarı sürekli bulanık ölçüm ve $\vartheta(X) = \mu(X)$ olur.

Yukarıdaki teoremden ϑ bir azalan yarı sürekli bulanık ölçüm ϑ' olarak $\mathcal{R}_\sigma$ ya genişletilebilir. $\mathcal{R}_\delta$ da tanımlı

$$\mu'(E) = \mu(X) - \vartheta'(\bar{E})$$

fonksiyonu μ nün bir genişlemesidir. Genişlemenin tekliği yukarıdaki teoremden sağlanır. ■

4.5. Mutlak Süreklilik ve Bulanık Ölçümün Genişlemesi

$\mathcal{R}$ bir cebir $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ yi kapsayan en küçük σ-cebir ve bu bölümdeki bütün küme fonksiyonların sonlu olduğu varsayılsın.

Tanım 4.5.1. μ ile ϑ, $\mathcal{S}$ üzerinde iki bulanık ölçüm olsun. Eğer $E \in \mathcal{S}, F \in \mathcal{S}, E \subset F$ iken her $\varepsilon > 0$ için $\mu(F) - \mu(E) < \varepsilon$ ve $\vartheta(F) - \vartheta(E) < \delta$ olacak biçimde $\delta > 0$ varsa μ, ϑ ye bağlı olarak mutlak süreklidir denir ve $\mu \ll \vartheta$ ile gösterilir.

Teorem 4.4.1. μ, $\mathcal{R}$ üzerinde bir bulanık ölçüm olsun. Eğer $\mathcal{R}_\sigma$ üzerinde $\mu \ll \vartheta$ olacak biçimde bir ϑ bulanık ölçümü varsa μ, $\mathcal{R}_\sigma$ ye genişletilebilir. Genişleme tektir ve ϑ ye bağlı olarak mutlak sürekliliği korur.

Tanım 4.5.2. $\mathcal{F}$ deki bir μ bulanık ölçüm $\mathcal{R}_\sigma$-yaklaşılabilirdir ancak ve ancak her $E \in \mathcal{F}$ ve $\varepsilon > 0$ için $F \supset E$ ve $\mu(F) \leq \mu(E) + \varepsilon$ olacak biçimde $F \in \mathcal{R}\sigma$ varsa.

Teorem 4.5.2. $\mathcal{R}$ deki bir μ bulanık ölçüm $\mathcal{F}$ deki bir $\mathcal{R}_\sigma$-yaklaşılabilir bulanık ölçüme genişletilebilir eğer $\mathcal{R}$ üzerinde $\mu \ll \vartheta$ olacak biçimde $\mathcal{F}$ de bir ϑ $\mathcal{R}_\sigma$-yaklaşılabilir bulanık ölçümü varsa. Genişleme tektir ve ϑ ye bağlı olarak mutlak sürekliliği korur.

$\mathcal{F}(\mathcal{R})$ de bir klasik ölçüm $\mathcal{R}_\sigma$-yaklaşılabilir olduğundan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.5.1. $\mathcal{R}$ deki bir μ bulanık ölçümü eğer $\mathcal{R}$ üzerinde $\mu \ll \vartheta$ olacak biçimde bir ϑ sonlu ölçümü varsa $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ye tek bir şekilde genişletilebilir.

Sonuç 4.5.2. $\mathcal{R}$ deki her benzerlik ölçümü, $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ye tek bir şekilde genişletilebilir.

4.6. Olanak ve Gereklilik Ölçümlerinin Genişlemesi

Bu bölümde değerleri [0,1] aralığında sınırlandırılmış küme fonksiyonları incelenecektir.

Tanım 4.6.1 Her T herhangi bir indeks kümesi $\{E_t | \, t \in T\} \subset \mathcal{S}$ ve $E \in \mathcal{S}$ için

$$E \subset \bigcup_{t \in T} E_t \tag{4.6.1}$$

iken

$$\mu(E) \leq \sup_{t \in T} \mu(E_t), \tag{4.6.2}$$

oluyorsa $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ küme fonksiyonuna P-tutarlı denir

Tanımdan eğer $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ P-tutarlı ve $\emptyset \in \mathcal{S}$ ise $\mu(\emptyset) = 0$. Gerçekten $\emptyset \subset \emptyset = \bigcup_{t\in\emptyset} \mathrm{E_t}$ olduğundan $\mu(\emptyset) \leq \sup_{t\in\emptyset} \mu(E_t) = 0$ olur.

Teorem 4.6.1. Eğer $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ P-tutarlı ise monoton ve f-toplamsaldır.

İspat. Eğer T indeks kümesine göre tek elemanlı kümeler alınırsa μ nün monotonluğu P-tutarlılığın tanımından elde edilir. Diğer taraftan $E = \bigcup_{\mathrm{t}\in\mathrm{T}} \mathrm{E_t}$ ise p-tutarlılığın tanımından

$$\mu(E) \leq \sup_{t\in T} \mu(E_t),$$

elde edilir diğer taraftan her $t \in T$ için $E \supset E_t$ olduğu için monotonluktan,

$\mu(E) \geq \mu(E_t)$ olur, böylece

$$\mu(E) \geq \sup_{t\in T} \mu(E_t).$$

Tersten

$$\mu(E) = \sup_{t\in T} \mu(E_t),$$

olsun, bu durumda μ f-toplamsaldır. ■

Genel olarak herhangi bir $\mathcal{S}$ sınıfı için P-tutarlılıkla f-toplamsallık aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi eş değildir.

Örnek 4.6.1. $X = \{a, b, c\}, \mathcal{S} = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\big\}$. Eğer μ, $\mathcal{S}$ üzerinde aşağıdaki gibi bir küme fonksiyonu ise

$$\mu(\{a\}) = 0.5,$$

$$\mu(\{a, b\}) = 0.7,$$

$$\mu(\{b, c\}) = 0.6,$$

f-toplamsaldır, fakat P-tutarlı değildir. Gerçekten $\{a\} \cup \{b,c\} \supset \{a,b\}$, fakat $\mu(\{a\}) \vee \mu(\{b,c\}) = 0.6 < 0.7 = \mu(\{a,b\})$ dir.

Buna rağmen eğer μ, $\mathcal{S}$ sınıfında birleşim altında kapalı olan ve negatif olmayan monoton bir küme fonksiyonu ise f-toplamsallık ve P-tutarlılık eşdeğerdir.

Teorem 4.6.2. $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ küme fonksiyonunun $P(X)$ deki bir genelleştirilmiş olanak ölçümü olan π ye genişletilebilir olması için gerek ve yeter koşul μ nün $\mathcal{S}$ de P-tutarlı olmasıdır.

Örnek 4.6.2. $X = \{a,b,c\}, \mathcal{S} = \{\{a\},\{a,b\},\{b,c\}\}$. Eğer μ, $\mathcal{S}$ üzerinde aşağıdaki gibi bir küme fonksiyonu ise P-tutarlıdır,

$$\mu(\{a\}) = 0.5,$$

$$\mu(\{a,b\}) = 0.7,$$

$$\mu(\{b,c\}) = 0.7,$$

ve bu yüzden *P(X)* deki bir genelleştirilmiş olanak ölçümü olan π ye genişletilebilir

$$\pi(\{a\}) = 0.5,$$

$$\pi(\{b\}) = 0.7,$$

$$\pi(\{c\}) = 0.7.$$

Genel olarak yukarıda bahsedilen genişleme tek olmayabilir. Genelleştirilmiş olanak ölçümü olan π nin yerine π':

$$\pi'(\{a\}) = 0.5,$$

$$\pi'(\{b\}) = 0.7,$$

$$\pi'(\{c\}) = 0.6,$$

$$\pi'(\{a,b\}) = 0.7,$$

$$\pi'(\{b,c\}) = 0.7,$$

$$\pi'(\{a,c\}) = 0.6,$$

$$\pi'(\emptyset) = 0,$$

$$\pi'(X) = 0.7,$$

yine μ nün bir genişlemesidir.

Bütün genelleştirilmiş olanak ölçümü $\mu : \mathcal{S} \to [0,1]$ genişlemelerinin kümesi $\mathcal{S}_\pi(\mu)$ ile gösterilsin. Bu durumda eğer μ, $\mathcal{S}$ sınıfında P-tutarlı ise $\mathcal{S}_\pi(\mu)$ boş değildir.

Verilen herhangi iki küme fonksiyonu $\mu_1 : P(X) \to [0,1]$ ve $\mu_2 : P(X) \to [0,1]$ ve her $E \in P(X)$ için

$$\mu_1 \leq \mu_2 \text{ ancak ve ancak } \mu_1(E) \leq \mu_2(E)$$

ise "$\leq$" bağıntısı $\mathcal{S}_\pi(\mu)$ de kısmi sıralıdır. Bununla beraber $E \in P(X)$ için

$$\bar{\mu}(E) = \sup\{\mu_1, \mu_2\}$$

ise

$$\bar{\mu}(E) = \mu_1(E) \vee \mu_2(E)$$

olur.

Teorem 4.6.3. $(\mathcal{S}_\pi(\mu), \leq)$ bir üst yarı latis ve

$$\pi : P(X) \to [0,1]$$

$$F \mapsto \sup_{x \in F} \inf_{E | x \in E \in \mathcal{S}} \mu(E)$$

biçiminde tanımlanan genişleme, $(\mathcal{S}_\pi(\mu), \leq)$ nün en büyük elemanıdır.

Eğer $\pi_1 \in \mathcal{S}_\pi(\mu), \pi_2 \in \mathcal{S}_\pi(\mu)$ ve $\pi_1 \leq \pi_2$, ise $P(X)$ deki $\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2$ şartını sağlayan her genelleştirilmiş olanak ölçümü olan π, μ nün bir genişlemesidir.

Bir önceki teoremden bir $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ küme fonksiyonunun $P(X)$ deki bir genelleştirilmiş olanak ölçümüne genişletilebilip genişletilemeyeceği kolayca belirlenebilir. Buradan üç durum oluşur:

1). Eğer $X \in \mathcal{S}$ ve $\mu(X) \neq 1$ ise μ P(X) deki herhangi bir olanak ölçümüne genişletilemez.

2). Eğer $X \in \mathcal{S}$ ve $\mu(X) = 1$ ise μ, $\mathcal{S}$ de P-tutarlı ise P(X) de bir olanak ölçümüne genişletilebilir.

3). Eğer $X \notin \mathcal{S}$ve $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{X\}$ ve $\mathcal{S}'$ ün de tanımlanan

$$\mu'(E) = \begin{cases} \mu(E), & E \in \mathcal{S} \\ 1 \quad , & E = X \end{cases}$$

ise μ', $\mathcal{S}'$ ün de P-tutarlı olduğu zaman μ, $P(X)$ de bir olanak ölçümüne genişletilebilir.

Yukarıda bahsedilen genişlemenin hangi koşullar altında tek olacağının cevabı için düzgün sınıf ve çekirdek kullanılır.

Ön Teorem 4.6.1. $\mathcal{S}$ bir AU-sınıf olsun. Eğer $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ küme fonksiyonu azalmayan ise bir genelleştirilmiş olanak ölçümü dür. Ayrıca eğer $\mathcal{S}$ bazı $\mathcal{S}'$ sınıflarının bütün çekirdeklerinin sınıfı, $\mathcal{S} = \mathcal{A}[\mathcal{S}']$, ise her azalmayan küme fonksiyonu $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$, $\mathcal{S}$ de P-tutarlıdır.

İspat. $\{E_t \mid t \in T\} \subset \mathcal{S}, \bigcup_{t\in T} E_t \in \mathcal{S}$ ise $\mathcal{S}$ bir AU-sınıf olduğundan $E_{t_0} = \bigcup_{t\in T} E_t$ olacak biçimde $t_0 \in T$ vardır. Bu yüzden,

$$\mu(\bigcup_{t\in T} E_t) = \mu(E_{t_0}) \leq sup_{t\in T}\, \mu(E_t).$$

μ nün azalmayan olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\mu(\bigcup_{t\in T} E_t) \geq sup_{t\in T}\, \mu(E_t).$$

Sonuç olarak

$$\mu(\bigcup_{t\in T} E_t) = sup_{t\in T}\, \mu(E_t),$$

elde edilir. Buradan μ, f-toplamsaldır. Ayrıca, $\mathcal{S} = \mathcal{A}[\mathcal{S}']$ olsun. Eğer

$A = A(x) \in \mathcal{A}[\mathcal{S}']$, $\{A_t | t \in T\} = \{A(x_t) | t \in T\} \subset \mathcal{A}[\mathcal{S}']$ ve $A \subset \bigcup_{t\in T} A_t$ ise $x \in A_{t_0}$ olacak şekilde $t_0 \in T$ vardır ve bundan dolayı $A \subset A_{t_0}$. Buradan

$$\mu(A) \le \mu(A_{t_0}) \le \sup_{t\in T} \mu(A_t).$$

Böylece μ, $\mathcal{A}[\mathcal{S}']$ ün de P-tutarlıdır. ■

Teorem 4.6.4. Her azalmayan küme fonksiyonu $\mu: \mathcal{A}[\mathcal{S}] \to [0,1]$, genelleştirilmiş olanak ölçümüdür ve $\mathcal{F}_p(\mathcal{S})$ de bir genelleştirilmiş olanak ölçümüne genişlemesi tek olarak yapılabilir.

Tanım 4.6.2. Her T herhangi bir indeks kümesi $\{E_t |\, t \in T\} \subset \mathcal{S}$ ve $E \in \mathcal{S}$ için

$$E \supset \bigcap_{t\in T} E_t \tag{4.6.3}$$

iken

$$\mu(E) \ge \inf_{t\in T} \mu(E_t), \tag{4.6.4}$$

oluyorsa $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ küme fonksiyonuna N-tutarlı denir .

Teorem 4.6.5. $\emptyset \in \mathcal{S}$ olsun. $\mu(\emptyset) = 0$ iken $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ küme fonksiyonunun *P(X)* deki bir gereklilik ölçümü olan ϑ ye genişletilebilir olması için gerek ve yeter koşul μ nün $\mathcal{S}$ de N-tutarlı olmasıdır.

Bu genişleme tek olabilir. Yukarıdaki teoremde bahsedilen bütün $\mu: \mathcal{S} \to [0,1]$ gereklilik ölçümlerinin genişlemelerinin kümesi $\mathcal{S}_\vartheta(\mu)$ ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.6.6. $(\mathcal{S}_\vartheta(\mu), \leq)$ bir alt yarı latis ve $\vartheta: P(X) \to [0,1]$

$$F \mapsto \inf_{x \notin F} \sup_{E | x \notin F \in \mathcal{S}} \mu(E)$$

biçiminde tanımlanan küme fonksiyonu, $(\mathcal{S}_\vartheta(\mu), \leq)$ nün en küçük elemanıdır.

4.7. Olanak Ölçümü Tarafından Üretilen Olasılık Ölçümü

$\mu \in [0,1]^R$, $\sup\{\mu(x), x \in R\} = 1$ ve R deki klasik kümeler üzerindeki μ tarafından üretilen olanak ölçümü

$$\prod_\mu : P(R) \to [0,1] \text{ her } A \in P(R) \text{ için } \prod_\mu (A) = \sup\{\mu(x), x \in A\}$$

biçiminde tanımlanıyorsa aşağıdaki şartları sağlar;

1) $\prod_\mu (\emptyset) = 0$;

2) Her $A \subseteq B$ için $\prod_\mu (A) \leq \prod_\mu (B)$ (monotonluk);

3) $\prod_\mu (\bigcup_{n \in N} A_n) \leq \sum_{n \in N} \prod_\mu (A_n)$ (alt toplamsallık).

Buradan $\prod_\mu$ nün $\prod_\mu(R) = 1$ olacak biçimde bir Caratheodory dış ölçüm olduğu görülür.[2]

Teorem 4.7.1. Eğer $m: P(E) \to [0, \infty]$, $E \neq \emptyset$ için bir dış ölçüm ise

$$\mathcal{A} = \{A \in P(E) : \forall\, X \in P(E), m(X) = m(X \cap A) + M(X \cap A^c)\} \tag{4.7.1}$$

küme sınıfı bir σ-cebiridir ve m nin $\mathcal{A}$ ya kısıtlanışı bir σ-toplamsal ölçümdür.

Caratheodory yöntemi, bir $\prod_\mu$ genişletilmiş ölçümünün bir dönüştürülmüş olasılık üretmesinde aşağıdaki gibi kullanılır:

Teorem 4.7.2. $\mu \in [0,1]^E$, $\sup\{\mu(x), x \in R\} = 1$ ise μ nün desteği olan $supp(\mu) = \{x \in R, \mu(x) \neq 0\}$ için $\prod_\mu$ -ölçülebilir kümelerin sınıfı;

$$\mathcal{A} = \{A \in P(R), supp(\mu) \subset A \text{ } veya \text{ } A \subset (supp(\mu))^c\} \tag{4.7.2}$$

olur ve $\prod_{\mu}$ -ölçülebilir kümeye kısıtlanmış $\prod_{\mu}$ olanak ölçümü her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\prod_{\mu}(A) = \begin{cases} 0, & A \subset \left(supp(\mu)\right)^{c} \\ 1, & supp(\mu) \subset A \end{cases} \tag{4.7.3}$$

biçiminde tanımlanmış bir dönüştürülmüş olasılıktır.[2]

İspat. Öncelikle $\mathcal{A}$ sınıfının Caratheodory metodu ile kurulmuş bir σ-cebri olduğu gösterilmelidir;

$\mathcal{A}$ sınıfının bir σ-cebir olduğu açıktır. $\mathcal{A}$ sınıfının elemanları $\prod_{\mu}$ –ölçülebilirdir. Gerçekten $\prod_{\mu}(A^{c} \cap X) = 0$ iken her $X \subset R$ için eğer $supp(\mu) \subset A$ ise

$$\sup_{x \in X} \mu(x) = \sup_{x \in (A \cap X) \cup (A^{c} \cap X)} \mu(x) = \max\left(\sup_{x \in A \cap X} \mu(x), \sup_{x \in A^{c} \cap X} \mu(x) \right) = \sup_{x \in A \cap X} \mu(x)$$
$$= \prod_{\mu}(A \cap X) = \prod_{\mu}(A \cap X) + \prod_{\mu}(A^{c} \cap X)$$

olur. Benzer şekilde eğer $A \subset \left(supp(\mu)\right)^{c}$ ise A nın $\prod_{\mu}$ –ölçülebilir olduğu gösterilebilir. Ayrıca $\prod_{\mu}$ –ölçülebilir elemanların $\mathcal{A}$'nın elemanları olduğu gösterilirse: Eğer $A \subset R$ ise, özel olarak,

$$1 = \prod_{\mu}(R) = \prod_{\mu}(A) + \prod_{\mu}(A^{c})$$

elde edilir ve buradan aşağıdaki analizler yapılabilir:

1) $\mu(x_0) = 1$ olacak biçimde $x_0 \in R$ vardır. Eğer ayrıca $x_0 \in$ A alınırsa yukarıdaki eşitlikten $\prod_{\mu}(A^{c}) = 0$ olur, bu ise $A^{c} \subset \left(supp(\mu)\right)^{c}$ ve $supp(\mu) \subset A$, $A \in \mathcal{A}$ anlamına gelir. Benzer biçimde $x_0 \in A^{c}, A \subset \left(supp(\mu)\right)^{c}$ ve $A \in \mathcal{A}$ olur.

2) Bütün $x \in R, \mu(x) < 1$. Bu durumda $\mu, +\infty$ ve $-\infty$ da en büyük değerlerine ulaşır ve sonsuzdaki bu nokta A nın bir yığılma noktasıdır veya $x \in A'$, veya A^{c}. $x \in A'$ olsun bu durumda $\prod_{\mu}(A) = 1$ ve yukarıdaki eşitlikten $\prod_{\mu}(A^{c}) = 0$ olur, bu ise $supp(\mu) \subset A$, $A \in \mathcal{A}$ anlamına gelir. Eğer, benzer biçimde, μ nün enbüyük değerini aldığı sonsuzdaki nokta A^{c} nin bir yığılma noktası ise $A^{c} \subset \left(supp(\mu)\right)^{c}$ ve $A \in \mathcal{A}$ olur. ■

4.8. Bulanık Cebir Üzerinde Caratheodory Ölçülebilirlik

σ bir bulanık cebir ve m, σ'daki bulanık kümelerden R reel sayılar kümesine tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Bir $\sigma_m \subset \sigma$ sınıfı klasik ölçümde olduğu gibi Caratheodory anlamında ölçülebilir olarak adlandırılacak

$$\sigma_m = \{A \in \sigma;\ \forall B \in \sigma : m(B) = m(B \cap A) + m(B \cap A')\} \qquad (4.8.1)$$

Tanımlanan σ_m için şu sonuçlar elde edilir.[13]

Önerme 4.8.1.

i) σ_m tümleyen işlemine göre kapalıdır, $A \in \sigma_m \Rightarrow A' \in \sigma_m$

ii) σ_m boştan farklıdır $\Leftrightarrow m(0_X) = 0 \Leftrightarrow \{0_X; 1_X\} \subset \sigma_m$

iii) $A \in \sigma_m \Rightarrow m(A \cap A') = 0$ ve $m(A \cup A' = m(A) + m(A') = m(1_X)$,

iv) $\forall A \in \sigma$ için $(\frac{1}{2})_X \in \sigma_m \Leftrightarrow m(A) = 0$

İspat.

i) $(A')' = A$ olduğundan açıktır.

ii) $\sigma_m \neq \emptyset$ ise bir $A \in \sigma_m$ vardır ve buradan

$m(0_X) = m(0_X \cap A) + m(0_X \cap A') = 2m(0_X)$ ve sonuçta $m(0_X) = 0$.

Şimdi $m(0_X) = 0$ olsun, her $A \in \sigma$ için

$$m(A) = m(A \cap 0_X) + m(A \cap 1_X)$$

ve buradan $0_X, 1_X \in \sigma_m$ olur.

Son olarak $\{0_X; 1_X\} \subset \sigma_m$ ise σ_m nin boştan farklı olduğu açıkça görülür.

iii) $A \in \sigma_m$ olsun.

$$m(A \cap A') = m(A \cap A' \cap A) + m(A \cap A' \cap A') = 2m(A \cap A') = 0.$$

$$m(A \cup A') = m\Big((A \cup A') \cap A\Big) = m\Big((A \cup A') \cap A'\Big) = m(A) + m(A')$$

$$= m(1_X \cap A) + m(1_X \cap A') = m(1_X).$$

iv) $(\frac{1}{2})_X \in \sigma_m$ olsun. $(\frac{1}{2})'_X = (\frac{1}{2})_X$ ve her $A \in \sigma$ için

$$m(A) = m\left(A \cap \left(\frac{1}{2}\right)_X\right) + m\left(A \cap \left(\frac{1}{2}\right)'_X\right) = 2m\left(A \cap \left(\frac{1}{2}\right)_X\right) = 2.2m\left(A \cap \left(\frac{1}{2}\right)_X\right)$$

ve sonuçta $m(A) = 0$. Diğer taraftan, eğer $\forall A \in \sigma$ için $m(A) = 0$ ise $\sigma_m = \sigma$ ve buradan $(\frac{1}{2})_X \in \sigma$ ise $(\frac{1}{2})_X \in \sigma_m$ olur. ■

σ_m nin bulanık cebir olduğunu gösterilmesi için boştan farklı ve bulanık birleşim veya bulanık kesişim altında kapalı olduğu gösterilmelidir.[13]

Önerme 4.8.2. $m(0_X) = 0$ ve m;

$N \in \sigma, m(N) = 0 \Rightarrow \forall A \in \sigma$ için $m(A) = m(A \cup N)$ (sıfır toplamsallık) şartını sağlasın, bu durumda σ_m bir bulanık cebirdir.

İspat.

$A, B \in \sigma_m$ olsun. Her $C \in \sigma$ için

$$m(C) = m(C \cap A) + m(C \cap A') = m(C \cap A \cap B) + m(C \cap A \cap B') + m(C \cap A')$$

diğer taraftan,

$$\begin{aligned} m(C \cap (A \cap B)') &= m\Big((C \cap A') \cup (C \cap B')\Big) \\ &= m((C \cap A' \cap A) \cup (C \cap B' \cap A)) \\ &\quad + m\Big((C \cap A' \cap A') \cup (C \cap B' \cap A')\Big) \\ &= m(C \cap B' \cap A) + m(C \cap A'). \end{aligned}$$

Böylece $m(C) = m(C \cap (A \cap B)) + m(C \cap (A \cap B)')$ olur. Buradan $A \cap B \in \sigma_m$ bulunur. Dolayısıyla σ_m bir bulanık cebirdir. ■

Önerme 4.8.3. [13] $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \sigma_m$, $k \in N$ ikişer ikişer ayrık bulanık alt kümeler (w-ayrık) yani $i \neq j$ için $A_i \leq A_j{}'$ olmak üzere

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i)$$

olur.

Tanım 4.8.1. σ , bir soft (yani $(\frac{1}{2})_X \notin \sigma$) bulanık cebir (bulanık σ-cebiri) olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $p: \sigma \to [0,1]$ fonksiyonu bulanık olasılık ölçümü (P-ölçüm) olarak adlandırılır:

i) $A \in \sigma: p(A \cup A') = 1$

ii) $n \neq m, \forall\{A_n\} \subset \sigma, A_n \leq A_m'$ ve $(\bigcup A_n) \in \sigma$: $p(\bigcup A_n) = \sum p(A_n)$.

Sonuç 4.8.1. m, σ da sıfır toplamsal ve $m(0_X) = 0$, $m(1_X) = 1$ ise σ_m bir soft bulanık cebir ve eğer m alttan sürekli ise m'nin σ_m ye kısıtlanışı σ_m üzerinde bir bulanık olasılık ölçümüdür.[13]

İspat. m'nin σ_m ye kısıtlanışı için ii) yi göstermek yeterlidir. Sonlu diziler için önceki önermeden görülür. Sonsuz $\{A_n\}$ dizileri için m nin alttan süreklilik özelliğinden

$m(\bigcup A_n) = \lim_k m(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \lim_k \left(m(A_1) + \cdots + m(A_k)\right) = \sum m(A_n)$. ■

Önerme 4.8.4. (X, σ, p) bulanık olasılık ölçümü uzayı olsun. Bu durumda $\sigma_p = \sigma$.

İspat. $A, B \in \sigma$ için $(B \cap A) \leq (B \cap A')' = (B \cup A')$ buradan $(B \cap A)$ ve $(B \cap A')$, σ nın w-ayrık elemanları ise

$$p(A \cap B) + p(B \cap A') = p\left((B \cap A) \cup (B \cap A')\right) = p\left(B \cup (A \cap A')\right) = p(B)$$

ve sonuçta $A \in \sigma_p$ olur. ■

Yorum 4.8.1. Yukarıdaki önerme gösterir ki yukarıdaki sonucun şartları altında ve m nin bir bulanık P-ölçümü olması durumunda σ_m ,σ'nın en büyük soft bulanık alt cebridir. [13]

4.9. L-Bulanık Kümelerde Caratheodory Genişleme Teoremi

Bu bölümde latis değerli bulanık kümelerde caratheodory genişleme teoremi incelenecektir.[22]

Tanım 4.9.1. Eğer $\sigma \rightarrow R_+^* = R_+ \cup \{\infty\}$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa m ye bulanık ölçüm denir;

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) $\forall \mu, \vartheta \in \sigma, \mu \leq \vartheta$ ise $m(\mu \vee \vartheta) + m(\mu \wedge \vartheta) = m(\mu) + m(\vartheta)$

iii) $(\mu_n)_{n \in N} \subset \sigma^N$ ve $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ için $sup\mu_n = \mu \Longrightarrow m(lim\mu_n) = m(\mu)$

Tanım 4.9.2. $[0,1]^X$ de tanımlanmış m^* fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağlarsa bulanık dış ölçüm denir,

i) $m^*(0) = 0$

ii) $\mu_A \leq \mu_B$ için $m^*(\mu_A) \leq m^*(\mu_B)$

iii) $m^*(\vee_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n}) \leq \vee_{n=1}^{\infty} m^*(\mu_{E_n})$

Önerme 4.9.1. $\mathcal{F}$, her $\mu_A \leq \mu_X$ için boş kümeyi de içeren X in bulanık alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{F}$ de $\mu_A \leq \sup(\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty}$ olacak biçimde bir $(\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty}$dizisi vardır. τ, $\mathcal{F}$ de genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon ve $\mu_A \in \mathcal{F}$ için $\tau(0) = 0, \tau(\mu_A) \geq 0$ olsun. Bu durumda $[0,1]^X$ de tanımlanmış

$$m^*(\mu_A) = inf\{\tau(\vee_{n=1}^{\infty} \mu_{B_n}) : \mu_{B_n} \in \mathcal{F}\ ve\ \mu_A \leq \vee \mu_{B_n}\} \qquad (4.9.1)$$

fonksiyonu bir dış ölçümdür.

İspat.

$m^*(0) = 0$ olduğu açıktır. Eğer $\mu_{A_1} \leq \mu_{A_2}$ ve $\mu_{A_2} \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{B_n}$ ise $\mu_{A_1} \leq \bigvee \mu_{B_n}$ bu ise $m^*(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{A_1}) \leq m^*(A_2)$ demektir. Son olarak her n doğal sayısı için $\mu_{E_n} \leq \mu_X$ ise bazı n değerleri için $m^*(\mu_{E_n}) = \infty$, $m^*(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n}) \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} m^*(\mu_{E_n})$ olur. ■

Teorem 4.9.1. m bir $\sigma \subseteq [0,1]^X$ üzerinde bulanık ölçüm olsun. $\mu_E \leq \mu_X$ için;

$$m^*(\mu_E) = \inf\{m(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n}): \mu_E \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n}, \mu_{E_n} \in \sigma\}$$

aşağıdaki şartları sağlar;

i) m^* bir bulanık dış ölçümdür.

ii) $\mu_E \in \sigma$ ise $m(\mu_E) = m^*(\mu_E)$

iii) $\mu_E \in \sigma$ ise μ_E m^*-bulanık ölçüler dir

iv) m^* ın m^* bulanık ölçülebilir bir kümeye kısıtlanışı olan $\overline{m}$ aynı zamanda m nin σ yı içeren bir bulanık $\sigma -$ cebirine genişlemesidir.

v) Eğer m σ-sonlu ise $\overline{m}$, m nin σ yı içeren en küçük bulanık σ-cebir ne genişlemesi olan tek bulanık ölçümdür.[22]

4.10. Sezgisel Bulanık Kümelerde Caratheodory Dış Ölçüm

Bu bölümde [14] de çalışılmış olan sezgisel bulanık kümeler üzerinde Caratheodory teoremleri incelenmiştir.

Tanım 4.10.1. $\mu_A, \vartheta_A: \Omega \to [0,1]$ iki fonksiyon ve $\mu_A + \vartheta_A \leq 1$ olmak üzere. $A = (\mu_A, \vartheta_A)$ ikilisine sezgisel bulanık küme denir. Burada μ_A, ϑ_A sırasıyla A nın üye olma ve üye olmama fonksiyonlarıdır.

$\mathfrak{F} = \{(f_A, g_A): f_A, g_A: \Omega \to \langle 0,1 \rangle, f_A + g_A \leq 1\}$ kümesi aşağıdaki sıralamaya göre bir kısmi sıralı kümedir;

$$A = (f_A, g_A) \leq B = (f_B, g_B) \Leftrightarrow f_A \leq f_B,\ g_A \geq g_B.$$

Bu sıralamaya bağlı kalınarak

$$(f_A, g_A) \vee (f_B, g_B) = (f_A \vee f_B, g_A \wedge g_B)$$

$$(f_A, g_A) \wedge (f_B, g_B) = (f_A \wedge f_B, g_A \vee g_B)$$

işlemleri ile en küçük eleman (0,1) ve en büyük eleman (1,0) olmak üzere $\mathfrak{F}$ bir latistir.$R \times R\ de\ \dot{+}, \dot{-}$ ikili işlemleri;

$$A \dot{+} B = (f_A, g_A) \dot{+} (f_B, g_B) = (f_A + f_B, g_A + g_B - 1)$$

$$A \dot{-} B = (f_A, g_A) \dot{-} (f_B, g_B) = (f_A - f_B, g_A - g_B + 1).$$

formülleri ile düzenlenir. $(R \times R, \leq, \dot{+})$ nin bir latis sıralı grup ve $\mathfrak{F} \subset \{(f_A, g_A): (0,1) \leq (f_A, g_A) \leq (1,0)\}$ olduğu kolayca görülür. Bunun yanında $\mathfrak{F}$ de Lukasiewicz işlemleri

$$f_A \oplus f_B = (f_A + f_B) \wedge 1, \quad f_A \odot f_B = (f_A + f_B - 1) \vee 0,$$

$$A \oplus B = (f_A, g_A) \oplus (f_B, g_B) = (f_A \oplus f_B, g_A \odot g_B)$$

$$A \odot B = (f_A, g_A) \odot (f_B, g_B) = (f_A \odot f_B, g_A \oplus g_B)$$

biçiminde tanımlanır.[14]

Tanım 4.10.2. $\mathfrak{F}$ bir sezgisel bulanık küme (IF-küme) olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $\lambda^*: \mathfrak{F} \to \mathfrak{f}$ fonksiyonu dış ölçümdür:

1) $\lambda^*\big((0,1)\big) = \langle 0,0 \rangle = \{0\}$;

2) $\lambda^*\big((1,0)\big) = \langle 1,1 \rangle = \{1\}$;

3) Eğer $A \odot B = (0,1)$ ise $\lambda^*(A \oplus B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$;

4) $A \subset B$ ise $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Teorem 4.10.1. μ^* ve ϑ^* , Ω dan $\langle 0,1\rangle$ e tanımlı bütün fonksiyonların kümesinden $\langle 0,1\rangle$ kapalı aralığına tanımlı ve $\lambda^*: \mathfrak{F} \to \not{f}$, $\lambda^*\big((f,g)\big) = \langle \mu^*(f), 1-\vartheta^*(g)\rangle$ biçiminde ifade edilsin. Bu durumda λ^* bir dış ölçümdür anca ve ancak μ^* ve ϑ^* fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlarsa:

1) $\mu^*(0) = 0$;

2) $\mu^*(1) = 1$;

3) Eğer $f_A \odot f_B = 0$ ise $\mu^*(f_A \oplus f_B) \leq \mu^*(f_A) + \mu^*(f_B)$;

4) Eğer $f_A \leq f_B$ ise $\mu^*(f_A) \leq \mu^*(f_B)$;

5) $\vartheta^*(0) = 0$;

6) $\vartheta^*(1) = 1$;

7) Eğer $g_A \oplus g_B = 1$ ise $\vartheta^*(g_A \odot g_B) \geq \vartheta^*(g_A) + \vartheta^*(g_B) - 1$;

8) Eğer $g_A \leq g_B$ ise $\vartheta^*(g_A) \leq \vartheta^*(g_B)$.

Tanım 4.10.3. $\lambda^*: \mathfrak{F} \to \not{f}$ bir dış ölçüm olsun. Eğer her $H \in \mathfrak{F}$ için

$$\lambda^*(H) = \lambda^*(H \wedge A) + \lambda^*(H \dot{-} (H \wedge A)) \qquad (4.10.1)$$

ise $A \in \mathfrak{F}$ ye ölçülebilir denir.

Teorem 4.10.2. Bir $A = (f_A, g_A)$ elemanı ölçülebilirdir ancak ve ancak her $H = (f_H, g_H)$ için aşağıdakiler sağlanıyorsa

$$\mu^*(f_H) = \mu^*(f_H \wedge f_A) + \mu^*(f_H - f_H \wedge f_A)$$

$$\vartheta^*(g_H) = \vartheta^*(g_H \vee g_A) + \vartheta^*(g_H - g_H \vee g_A + 1) - 1.$$

Teorem 4.10.3. $\mathfrak{F}$'nin ölçülebilir elemanları latis biçimindedir.

Tanım 4.10.4. H_0, aşağıdaki şartları sağlayan $f: \Omega \to \langle 0,1 \rangle$ fonksiyonların kümesi olsun:

1) Eğer $f_A, f_B \in H_0$ ise $f_A \vee f_B \in H_0$;

2) Eğer $f_A, f_B \in H_0$ ise $f_A \wedge f_B \in H_0$;

3) Eğer $f_A \geq f_B$ ise $f_A - f_B \in H_0$.

Bu kısımda $\mathfrak{F}_0 = \{(f, g): f, g \in H_0; \; f + g \leq 1\}$ varsayılacaktır.

Tanım 4.10.5 $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}$'nin $\oplus$ ve $\ominus$ işlemleri altında kapalı olan bir alt kümesi olsun. $\mathfrak{F}_0$ daki bir $\lambda: \mathfrak{F}_0 \to \mathscr{f}$ dönüşümüne aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa ölçüm denir:

1) $\lambda\big((f, g)\big) = \langle \mu(f), 1 - \vartheta(g) \rangle$;

2) $\lambda\big((0,1)\big) = \langle 0,0 \rangle$, $\lambda\big((1,0)\big) = \langle 1,1 \rangle$;

3) Eğer $(f_A, g_A) \odot (f_B, g_B) = (0,1)$ ise

$$\lambda((f_A, g_A)) + \lambda((f_B, g_B)) = \lambda((f_A, g_A) \oplus (f_B, g_B)).$$

Teorem 4.10.4. μ ve ϑ, H_0 dan $\langle 0,1 \rangle$ e dönüşüm ve $\lambda\big((f, g)\big) = \langle \mu(f), 1 - \vartheta(g) \rangle$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

1) $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$;

2) $\vartheta(0) = 0$, $\vartheta(1) = 1$;

3) Eğer $f_A \odot f_B = 0$ ise $\mu(f_A) + \mu(f_B) = \mu(f_A \oplus f_B)$;

4) Eğer $g_A \oplus g_B = 1$ ise $\vartheta(g_A) + \vartheta(g_B) = \vartheta(g_A \odot g_B) + 1$;

Önerme 4.10.1. $A, B, C \in \mathfrak{F}_0$, $A = B \oplus C$ ise $\lambda(A) = \lambda(B) + \lambda(C)$.

Önerme 4.10.2. Eğer $A \leq B \oplus C$ ise $\lambda(A) \leq \lambda(B) + \lambda(C)$.

Teorem 4.10.5. μ ve ϑ, H_0 da tanımlı sonlu toplamsal alt ölçümler olsun.

$$\mu^*(f) = \wedge\{\mu(h)\colon\ f \le h;\ \ h \in H_0\},$$

$$\vartheta^*(f) = \vee\{\vartheta(h)\colon\ g \ge k;\ \ k \in H_0\},$$

olduğunda,

$$\lambda^*\big((f,g)\big) = \langle \mu^*(f), 1 - \vartheta^*(g)\rangle\ ,$$

ise λ^* bir dış ölçümdür.

Teorem 4.10.6. $\mathfrak{M}$, λ^* a bağlı bütün ölçülebilir elemanların kümesi olsun. Bu durumda $\lambda^*|_{\mathcal{M}}$ bir toplamsal ölçüm ve $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{M}$ dir.

Teorem 4.10.7. λ, $\mathfrak{F}_0$ da bir ölçüm olsun. Bu durumda $\lambda^*|_{\mathfrak{F}_0}$ bir ölçüm ve $\lambda^*|_{\mathfrak{F}_0} = \lambda$ olur.[14]

5. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışma boyunca görüldüğü gibi çeşitli cebirsel yapılar üzerinde bulanık ölçümlerin farklı tanımları yapılmıştır. Bu yüzden klasik ölçümdeki gibi tek bir genişleme teoremi yerine bulanık ölçümler üzerinde farklı genişleme teoremleri yapılmıştır.

Klasik ölçümde Caratheodory ölçülebilirlik, dış ölçüm ve genişleme teoremleri klasik ölçümün toplamsallık özelliğini kullanarak tanımlanmıştır. Bulanık ölçümlerde toplamsallık yerine monotonluk ve süreklilik gibi daha genel özellikler kullanıldığı için Caratheodory genişleme teoreminin ifadesinde farklılıklar kaçınılmaz olmuştur.

Sonuç olarak bulanık ölçümlerde Caratheodory genişleme teoremi, üzerinde çalışılan cebirsel yapının özelliklerine ve bulanık ölçümün tanımına göre bazı değişiklikler yapılarak ifade edilebilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Caratheodory, C. (1963). *Algebraic Theory of Measure and Integration*. New York, Chelsea Publishing.

[2] Castineira, E., Cubillo, S., and Trillas, E., (2007). On the coherence between probability and possibility measures. *International Journal ''Information Theories & Applications''*, **14**, 303-310

[3] Dempster, A.P. (1967). Upper and lower probabilities induced by multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 325-339.

[4] Dönmez, A. (2001). *Reel Analiz*. Ankara, Seçkin Yayıncılık.

[5] Dubois, D. and Prade, H. (1985). Evidence measures based on fuzzy information. *Automatica*, **21**, 547-562.

[6] Dubois, D. and Prade, H. (1988). *Possibility Theory*. New York: Plenum Press.

[7] Dubois, D. and Prade, H. (1990). Consanant approximations of belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, **4**, 419-449.

[8] Dubois, D. and Prade, H. (1992). When upper probabilities are possibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, **49**, 65-74.

[9] Goguen, J.A. (1967). L-Fuzzy Sets. J. Math. Anal. Appl., **18**, 145-174.

[10] Halmos, P.R. (1967). *Measure Theory*. New York, Van Nostrand.

[11] Höhle, U. (1984). Fuzzy Sets and Decision Analysis. In: Zimmerman, Zadeh, and Gainess (Eds.). *Fuzzy probability measures*. New York: North Holland, 83- 96

[13] Mesiar, R. and Piasecki, K. Caratheodory's measurability of fuzzy events. http://www.univ-savoie.fr/Portail/Groupes/LISTIC/busefal/Papers/56.zip/56_06.pdf. *Electronic Busefal*, **56**.

[14] Michalikova, A. (2008). Caratheodory outer measure on IF-sets. *Mathematica Slovaca*, **58**, 63-76

[15] Mukherja, A. and Pothoven, K. (1984). *Real and Functionaly Analysis Part A Real Analysis*. (2th ed). Universty of Florida, Florida: Plenum Press-New York and London.

[16] Piasecki, K. (1986) Fuzzy partitions of sets. *Busefal*, **25**, 52-60.

[17] Qiao, Z. (1988). The extensions of a class of semi-continuous fuzzy measures. *Busefal*, **33**, 86-94

[18] Shafer, G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. New Jersey, Princeton: Princeton Universty Press.

[19] Shafer, G. (1987). Analysis of fuzzy information, 3 volumes. In:Bezdek. *Belief function and possibility measures*. Florida: CRC Press, 51-83.

[20] Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*. Ph.D. dissertation. Tokyo: Institute of Technology.

[21] Sugeno, M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey. In: M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines (Eds.), *Fuzzy Automata and Decision Processes.* North-Holland, Amsterdam and New York, 89-102.

[22] Şahin, M. (2007). On Caratheodory extension theorem on fuzzy measure spaces. *Far East Journal of Mathematical Sciemces*, **26**, 311-317.

[23] Wang, Z. (1981). Une class de mesures flous-les quasi-measures. *Busefal*, **6**, 28-37.

[24] Wang, Z. (1985). Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches. In: Feng and Liu (Eds.), *Semi-lattice structure of all extensions of possibility measure and consonant belief function*. Beijing: Seismological Press, 332-336.

[25] Wang, Z. and Klir, G. J. (1992). *Fuzzy measure theory*. New York, Plenum Press.

[26] Wang, Z. and Zhang, Z. (1984). On the extension of possibility measures. *Busefal*, **18**, 26-32.

[27] Yen, J. (1990). Generalising the Dempster-Shafer theory to fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems,Man, and Cybernetics*, **20**, 559-570.

[28] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.

[29] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Sytems*, **4**, 3-28.