1.BÖLÜM
GİRİŞ

1.1 Evrensel Modüllerin Tarihi ve Gelişimi

Cebirsel kümeler ve onların koordinat halkaları ile ilgili sonuçları ispatlamak için kullanılan yöntemlerden birisi de evrensel diferansiyel operatörleri çalışmaktır. Bu şekilde cebirsel kümelerle ilgili problemler modül teorisine taşınmış olur.

Evrensel modüller ilk kez 1960 yılında Nakai [7,8] tarafından tanımlanmıştır. Nakai, bu çalışmasında evrensel modüllerle ilgili bir takım sonuçlar elde etmiştir. Örneğin R, indirgenemez sonlu üretilmiş cebire karşılık gelen bir koordinat halkası olmak üzere R nin regüler halka olması ile $\Omega_1(R)$ nin projektif modül olmasının birbirine denk olduğunu göstermiştir.

$\Omega_1(R)$ nin homolojik boyutu ile ilgili en önemli çalışmaları Vanconcelos yapmıştır. Vanconcelos [14] 1968 yılında yapmış olduğu çalışmasında R afin tamlık bölgesi ve $hd\Omega_1(R)<\infty$ olduğunda R nin normal halka olması ile $hd\Omega_1(R)\leq 1$ in denk olduğunu göstermiştir. Matsuoka (1977) [5] bazı koşullar altında $\Omega_1(R)$ nin homolojik boyutunun sonsuz olduğunu göstermiştir. Daha sonra Vasconcelos (1978) [15], $\Omega_1(R)$ nin homolojik boyutunun sıfır, bir veya sonsuz olduğunu göstermiştir.

Bir cebirin yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin evrensel modülleri ise ilk defa 1967 yılında Osborn [10] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra benzer tanımlar 1969 yılında yapılan Heyneman ve Sweedler'in [12] çalışmalarında görülmektedir. Bu konuda en kapsamlı çalışma ise 1970 yılında Nakai [7] tarafından yapılmıştır. Nakai bu çalışmasında yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin evrensel modüllerinin bazı homolojik özelliklerini incelemiştir.

Daha sonraki yıllarda ise yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin evrensel modülleri ile ilgili çalışmaları Erdoğan'nın [2] 1993 yılında ve Olgun'un [9] 2005 yılında yapmış oldukları çalışmalarında görmekteyiz.

Tezde ilk olarak evrensel modüllerin tarihi ve gelişimi ve önemi anlatılarak giriş yapılmıştır. İkinci bölümde modül tanımı, özellikleri ve temel teoremleri verilerek evrensel modüllerin tanımı, belli başlı özellikleri ve evrensel modüllerle ilgili bilinen sonuçlar, bazılarının ispatıyla birlikte verilmiştir.

Tezde son olarak evrensel modüllerin homolojik boyutlarının bulunması ile ilgili bazı temel bilgiler ve bu bilgilerin örnekler üzerinde uygulanması verilmiştir.

2.BÖLÜM
MODÜLLER

Tanım 2.1.1 : R değişmeli bir halka, M değişmeli bir grup olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan M ye R-modül denir.

$$\cdot : R \times M \to M$$

i) Her $r \in R$, $m, m' \in M$ için $r(m+m') = rm + rm'$

ii) Her $r, r' \in R$, $m \in M$ için $(r+r')m = rm + r'm$

iii) Her $r, r' \in R$, $m \in M$ için $(r.r')m = r(r'm)$

iv) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

Örnek 2.1.2: Bir K cismi üzerinde modül, K üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.1.3: 1- Her değişmeli halka, tamsayılar halkası üzerinde bir Z-modül olarak düşünülebilir. G değişmeli halka olsun.

$$\mu : Z \times G \to G$$

$$(n,g) \to \mu(n,g) = ng = \underbrace{g + g + ... + g}_{n \text{ tane}} \,,\; g \in G, \;\; n \in Z$$

modül yapısı vardır.

2- R değişmeli halka, $I \lhd R$

i) R nin kendisi R-modüldür.

ii) I , R-modüldür.

iii) R/I bölüm halkası bir R-modüldür. R/I bir doğal değişmeli grup yapısına sahiptir. $r \in R$ ve R/I içinde $s, s' \in R$ $s + I = s' + I$

$$\Rightarrow s - s' \in I \Rightarrow rs - rs' = r(s - s') \in I \Rightarrow rs + I = rs' + I$$

$$\begin{array}{l} R\times R/I\to R/I \\ (r,s+I)\to rs+I \end{array} \quad R\text{-modül yapısı vardır.}$$

3- R değişmeli halka ve $f:R\to S$ halka homomorfizması yapısı ile S bir R cebir olsun. O zaman S bir R-modüldür ve

$$\begin{array}{l} R\times S\to S \\ (r,s)\to f(r)s \end{array}$$

yapısı kurulur.

4- R,S değişmeli halka ve $f:R\to S$ halka homomorfizması olsun. Eğer G, S-modül ise G aynı zamanda R-modüldür.

$$\begin{array}{l} R\times G\to G \\ (r,g)\to f(r)g \end{array}$$

Tanım 2.1.4 : M R-modül ve $G\subseteq M$ olsun. G R-modül ise G ye M nin alt modülü denir.

Önerme 2.1.5 : R değişmeli halka ve G,M R-modülünün bir alt kümesi olsun. O zaman G,M nin alt modülüdür. $\Leftrightarrow \forall g_1,g_2\in G$ ve $\forall r\in R$ için $g_1+g_2\in G$ ve $rg\in G$ dir.

Not 2.1.6 : M nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin kesişimi yine bir alt modüldür.

R değişmeli halka, M R-modül, $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ tarafından üretilen M nin alt modüllerinin toplamını $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ile göstereceğiz. $\Lambda=\varnothing$ ise $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda=0$ dır.

i) $\sum_{i=1}^{n} G_i=\left\{\sum_{i=1}^{n} g_i : g_i\in G_i \quad \text{için} \quad i=1,...,n\right\}$

ii) $j_1,j_2,...,j_n\in M$ olsun. $j_1,j_2,...,j_n$ tarafından üretilen M nin alt modülü $Rj_1+Rj_2+...+Rj_n$ dır.

Tanım 2.1.7 : R değişmeli halka, M R-modül, I, $I' \lhd R$ ve IM, M nin alt modül olsun. IM, $\{rg \ : \ r \in I, \ g \in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \ : \ r_i \in I, \ g_i \in M, \ n \in N \right\}$

ii) $I(I'M) = (II')M$

iii) $a \in R$ için (Ra) nın yerine aM yazılır.

$(Ra)M = \{am \ : \ m \in M\}$

Tanım 2.1.8 : R değişmeli halka, M R-modül, G M nin bir alt modülü ve $J \subseteq M$ olacak şekilde $J \neq \varnothing$ olsun.

$$(G : J) = (G :_R J) = \{ \ r \in R \ : \forall \, j \in J \ için \ rj \in G\}$$

ideal olarak tanımlanır.

Eğer N, J tarafından üretilen M nin alt modülü ise $(G : J) = (G : N)$ dir. $m \in M$ için $(G : \{m\})$ nin yerine $(G : m)$ yazılır.

Eğer $G = 0$ ise $(0 : J) = \{ \ r \in R : \forall \, j \in J \ \ için \ rj = 0\}$ kümesine J nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m \in M$ için m nin sıfırlayanı (0:m) ile gösterilir..

Önerme 2.1.9: $I \lhd R$ değişmeli halka olsun. $I = Ann_R(R/I) = (0 :_R 1 + I)$

Önerme 2.1.10: R değişmeli halka, M R $-$ modül ve N, N', G M nin alt modülü ve $(G_\lambda)_{\lambda \in n}$ ve $(N_\theta)_{\theta \in \phi}$ M nin alt modülerinin iki ailesi olsun.

i) $(\bigcap_{\lambda \in n} G_\lambda : N) = \bigcap_{\lambda \in n} (G_\lambda : N)$

ii) $(G : \sum_{\theta \in \phi} N_\theta) = \bigcap_{\theta \in \phi} (G : N_\theta)$ (veya $Ann \ \ (N + N') \ = \ Ann(N) \cap \ Ann(N')$)

Tanım 2.1.11 : R değişmeli halka , M R- modül ve I, $I \subset Ann(M)$ olacak şekilde R nin ideali olsun. M üzerinde R/I modül yapısı kuralım.

$r, r' \in R$ $\ r + I = r' + I$ ve $m \in M$ olsun. O zaman $r - r' \in I \subseteq Ann(M)$ ve böylece $(r - r')m = 0$ ve $rm = r'm$ olur.

Böylece $\begin{array}{l} R/I \times M \to M \\ (r+I, m) \to rm \end{array}$ bir dönüşüm tanımlanabilir.

M üzerinde R-modül ve R/I-modül yapıları aşağıdaki yolla yapılır.

Her $r \in R$, $m \in M$ için $(r+I)m = rm$

G M nin bir alt R- modülüdür $\Leftrightarrow$ G M nin bir alt R/I modüldür.

Tanım 2.1.12 : R değişmeli halka, M R-modül , G M nin alt modülü $I \lhd R$ olsun. O zaman $(G :_m I)$, $\{m \in M \ : \forall r \in I \ için \ rm \in G\}$ M nin alt modülü ve $G \subseteq (G :_m I)$ dir.

Eğer $G = 0 \Rightarrow (0 :_m I) = \{ \ m \in M : \forall r \in I \ için \ rm = 0\}$ dır.

Önerme 2.1.13 : R değişmeli halka, M R-modül, G M nin alt modülü $(G_\theta)_{\theta \in \theta}$ M nin alt modüllerinin bir ailesi, $K, I, J \lhd R$, $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R nin ideallerinin bir ailesi olsun.

i) $((G :_m J) :_m K) = (G :_m JK) = ((G :_m K) :_m J)$

ii) $(\bigcap_{\theta \in \theta} G_\theta :_m I) = \bigcap_{\theta \in \theta} (G_\theta :_m I)$

ii) $(G :_m \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (G :_m I_\lambda)$

Tanım 2.1.14 : R değişmeli halka, M R-modül ve G, M nin bir alt modülü olsun. G, M toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur. $M/G = \{m + G \ : \ m \in M\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$m + G = m' + G \Leftrightarrow m - m' \in G$
her $m, x \in G$ için $(m+G) + (x+G) = (m+x) + G$

Böylece $\begin{array}{l} R \times M/G \to M/G \\ (r, m+G) \to rm + G \end{array}$

M/G değişmeli grubu bir R-modüldür. Bu M , R-modüle M nin bölüm modülü denir ve M/G ile gösterilir.

Önerme 2.1.15 : R değişmeli halka, M R-modül ve $I \lhd R$ olsun.O zaman $I \subseteq Ann_R(M/IM)$ ve M/IM , her $r \in R$ ve $m \in M$ için $(r+I)(m+IM) = rm + IM$

ile R/I yapısına sahiptir.

Önerme 2.1.16 : R değişmeli halka, M R-modül ve G, M nin bir alt modülü
i) G', M nin alt modülü yani $G' \supseteq G$ ise G'/G , M/G nin bir alt modülüdür.
ii) M/G nin herhangi bir alt modülü $G'' \supset G$ gibi M nin G'' bir alt modülü için G''/G şeklindedir.
iii) G_1, G_2 G yi içeren M nin alt modülleri

$$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1/G \subseteq G_2/G$$

Önerme 2.1.17 : R değişmeli halka, M R-modül, G_1, G_2 M nin alt modülleri olsun. O zaman $Ann((G_1 + G_2)/G_1) = (G_1 : G_2)$ dır.

Tanım 2.1.18 : R değişmeli halka, M R-modül, $m \in M$ için $\exists\, 0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ ise m ye M nin torsion elemanı denir.

$$\tau(M) = \{m \in M : 0 \neq r \in R \ için \ rm = 0\}$$

Önerme 2.1.19 : Eğer R tamlık bölgesi ise $\tau(M)$ M nin bir R-alt modülüdür ve bu torsion alt modül olarak bilinir.

$$R \times \tau(M) \to \tau(M)$$
$$(r,m) \to rm \qquad (r'(rm) = r(r'm) = 0 \quad r' \in R)$$

Not 2.1.20 : Eğer R tamlık bölgesi değil ise $\tau(M)$ alt modül olması gerekmez. Çünkü

$$x_1, x_2 \in \tau(M)$$
$$x_1 + x_2 \in \tau(M)$$
$$r_1 x_1 \neq r_2 x_2 = 0 \quad (r_1 r_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Örnek 2.1.21 : $\overline{2}.\overline{3} = \overline{0} \qquad R = Z_6 \qquad M(2) = \{0,2,4\} \qquad \tau(M) = \{0,2,4\}$

$$R = Z_6 \quad \Rightarrow \quad X = M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R \right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in \tau(X) \text{ fakat } A+B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin \tau(X)$$

Tanım 2.1.22 : i) $\tau(M)=M$ ise M ye torsion modül denir.
ii) $\tau(M)=0$ ise M ye torsion serbest modül denir.

Önerme 2.1.23 : R tamlık bölgesi olsun.
1) $\tau(R)=0$ dır.
2) R-modül ve $\tau(X)=X$ ve $M\subset X$ alt modül ise $\tau(M)=M$ dır.
3) $\tau(X)=0$ ve $M\subset X$ alt modül ise $\tau(M)=0$ dır.
4) $\tau(\tau(X))=\tau(X)$

Tanım 2.1.24 : M,N R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun. $f:M\rightarrow N$ dönüşümü

her $m,m'\in M$ için $f(m+m')=f(m)+f(m')$
her $m\in M$ ve $r\in R$ için $f(rm)=rf(m)$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme R-modül homomorfizması denir. $Z:M\rightarrow N$ dönüşümü her $m\in M$ için $Z(m)=0_N$ tanımlanarak bir R-modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve 0 ile gösterilir.

Tanım 2.1.25 : $f:M\rightarrow N$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $M\simeq N$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.26 : R değişmeli halka M,N R-modül ve $f:M\rightarrow N$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1}:N\rightarrow M$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $M\simeq N$ ile gösterilir.

$M\simeq M$ ise M nin kendi üzerine i_{d_M} özdeş dönüşümdür.

Önerme 2.1.27 : $f:M\rightarrow N$, $g:N\rightarrow G$ R-modül homomorfizmaları ve gof de R-modül homomorfizmasıdır.

$f:M\rightarrow N$, $g:N\rightarrow G$ R-modül izomorfizması ise gof de R-modül izomorfizmasıdır.

Tanım 2.1.28 : M R değişmeli halkası üzerinde modül ve G, M nin alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $m \to f(m) = m + G$ olarak tanımlanan $f : M \to M/G$ dönüşümü doğal (kanonik) homomorfizma diye adlandırılır ve f örtendir.

Tanım 2.1.29 : R değişmeli halka, M R-modül olsun.

i) N R-modül ve $f : M \to N$ R-modül homomorfizması ise f nin çekirdeği $Çekf = \{m \in M \ : f(m) = 0_N\}$ ile gösterilir. $Çekf$, M nin bir alt modülüdür. $Çekf = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. f nin görüntüsü $\operatorname{Im} f$ ile gösterilir ve $f(M) = \{f(m) \ : \ m \in M\}$ kümesi N nin alt kümesidir. $\operatorname{Im} f$ N nin alt modülüdür.

ii) $f : M \to M/G$, $Çekf = G$ ve $M/0 \simeq M$ dır.

iii) M nin bir H alt kümesi M nin bir altmodülüdür.$\Leftrightarrow$ M den M' ne bir R-modül homomorfizması vardır ki çekirdeği H a eşittir. Yani;

$$\Leftrightarrow \exists f : M \to M' \text{ homomorfizma } Çekf = H \text{ dır.}$$

Teorem 2.1.30 : R değişmeli halka M, N R-modül ve $f : M \to N$ R-modül homomorfizması olsun. O zaman f her $m \in M$ için $\overline{f}(m + Çekf) = f(m)$ olacak şekilde $\overline{f} : M/Çekf \to \operatorname{Im} f$ izomorfizması vardır.Yani; $M/Çekf \simeq \operatorname{Im} f$ dir.

Teorem 2.1.31 : R değişmeli halka, M R-modül, G, G' M nin $G' \supseteq G$ olacak şekilde alt modülleri olsun. G'/G, M/G R-modülünün bir alt modülüdür. O zaman burada her $m \in M$ için $\eta((m+G) + G'/G) = m + G'$ tanımıyla

$$\eta : (M/G)/(G'/G) \to (M/G')$$

izomorfizması vardır.

Teorem 2.1.32 : R değişmeli halka, M R-modül, G, H M nin alt modülleri olsun. O zaman burada her $g \in G$ için $\xi(g + G \cap H) = g + H$ tanımıyla

$$\xi : G/(G \cap H) \to (G + H)/H$$

izomorfizması vardır.

Tanım 2.1.33 : R değişmeli halka, G, M, N R-modüller ve $g : G \to M$ ve $f : M \to N$ R-modül homomorfizmaları olsun.

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

dizisinde $\operatorname{Im} g = Çekf$ ise bu diziye M R-modüllerin tam dizisi denir.

Genel olarak

$$\ldots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M_n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

dizisi her $M_n$de tam ise bu diziye R-modüllerin tam dizisi denir. Mesela $\operatorname{Im} d_n = Çekd_{n+1}$ iken

$$M_{n-1} \xrightarrow{d_n} M_n \xrightarrow{d_{n+1}} M_{n+1}$$

dizisi tamdır.

Önerme 2.1.34 : 1) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ tamdır. $\Leftrightarrow f$, $1-1$ ise

2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ tamdır. $\Leftrightarrow f$ örtendir.

3) $N \subseteq M$ alt modül ise $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ dizisi her zaman tamdır.

Genel olarak $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ dizisi için f, $1-1$, g, örten ve $\operatorname{Im} f = Çekg$ ise bu diziye kısa tam dizi denir

Tanım 2.1.35 : R değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R- modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi her $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (g'_\mu)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, $r \in R$ için

$$(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$
$$r(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

ile bir R- modüldür. Bu R- modüle $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin çarpımı denir.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ nin alt kümesi (her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda \in M_\lambda$ ile) $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesini içerir ve g_λ elemanlarının sonlu sayıdaki bileşenleri sıfırdan farklı olma özelliğiyle $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ nin bir R-alt modülüdür ve $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ ile gösterilir. Buna $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin direkt toplamıdır denir.

$\Lambda' = 0$ ise $\bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} M_{\lambda'}$ ve $\prod_{\lambda' \in \Lambda'} M_{\lambda'}$ her ikisi de sıfır R-modüldür.

Λ sonlu ise $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ elde ederiz.

Tanım 2.1.36 : M **,** R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ M nin alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ise her bir $m \in M$ elemanı $m = \sum_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}$ formunda ifade edilebilir ki burada $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, her $i = 1, 2, ..., n$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ ve Λ nın sonlu bir alt kümesidir.

M **,** $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modüllerinin ailesinin direkt toplamıdır ve her bir $m \in M$ elemanı için g_λ nın sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı ve her $\lambda \in \Lambda$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$ formunda tek türlü yazılabilir ve bu $M = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} G_\lambda$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.37 : M **,** $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alt modül ailesinin direkt toplamıdır.

$\Leftrightarrow$ i) $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = M$ ii) her bir $\nu \in \Lambda$ için $G_\nu \bigcap \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\nu}} G_\lambda = 0$ elde edilir.

Önerme 2.1.38 : R değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ R - modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Her bir $\mu \in \Lambda$ için M'_μ,

$M'_\mu = \left\{ (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda : g_\lambda = 0 \; her \; \lambda \in \Lambda \; ile \; \lambda \neq \mu \;\; için \right\}$ ile verilen $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ nin alt kümesi ile gösterilir. M'_μ, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ nın bir alt modülüdür ki M_μ izomorftur.

Tanım 2.1.39 : $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ R değişmeli halkası üzerinde modüllerin boş olmayan bir ailesi ve $\mu \in \Lambda$ olsun.

$M = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ kümesinden M_μ üzerine $P_\mu : M \to M_\mu$ dönüşümü her $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in M$ için $P_\mu((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = g_\mu$ tanımıyla kanonik izdüşüm dönüşümüdür.

M_μ den $M = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ içine $q_\mu : M_\mu \to M$ dönüşümü her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda = 0$ ile $\lambda \neq \mu$ ve $\forall z \in M_\mu$ $q_\mu = z$ için $q_\mu(z) = (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tanımıyla kanonik örten dönüşümdür.

Her iki P_μ ve q_μ R- modül homomorfizmasıdır. P_μ bir epimorfizma ve q_μ bir monomorfizmadır.

i) $p_\mu o q_\mu = 1d_{\mu_\lambda}$

ii) Her $\nu \in \Lambda$ ile $\nu \neq \mu$ için $p_\mu o q_\nu = 0$

iii) Λ sonlu iken $\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\mu o q_\mu = 1d_\mu$ dır.

Önerme 2.1.40 : $M, M_1, ..., M_n$ (ki burada $n \in \mathrm{N}$ ile $n \geq 2$) R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i \xrightarrow{P_1'} \overset{n}{\underset{i=2}{\oplus}} M_i \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizidir ki burada q_1 kanonik örten ve her $(m_1,...,m_n) \in \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ için $P_1'((m_1,...,m_n)) = (m_2,...,m_n)$ ile P_1' kanonik izdüşümdür.

Tanım 2.1.41 : R değişmeli halka ve L, M, N R-modül,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

R modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Bu diziye $\operatorname{Im} f = Çekg$, M nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split denir. Yani;

Dizi splittir $\Leftrightarrow M = Çekg \oplus G$ olacak şekilde M nin bir G alt modülü vardır.

Önerme 2.1.42 : i) $0 \longrightarrow H \longrightarrow M \longrightarrow M/H \longrightarrow 0$ kısa tam dizidir.

ii) $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ split kısa tam dizidir.

Önerme 2.1.43 : R değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun ki bu dizi splittir $\Leftrightarrow h : N \to M$ ve $e : M \to L$ R modül homomorfizmaları vardır yani

$eof = 1d_L$, $goh = 1d_N$, $eoh = 0$, $foe + hog = 1d_M$ dır.

İspat : Dizi split olsun. O zaman bazı $M' \subseteq M$ için $M = Çekg \oplus M'$ dır. Verilen herhangi bir $n \in N$ için $\exists m \in M$ $g(m) = n$ ile $h : N \to M$ tanımlandığından M ; $Çekg$ ve M' nin direkt toplamıdır. $\forall m \in M$ için $m_1 \in Çekg,\ m_2 \in M'$ $m = m_1 + m_2$ tek türlü olarak yazılır. Dahası $M' n Çekg = \{0\}$, $\begin{matrix} m = m_1 + m_2 \\ r = r_1 + r_2 \end{matrix}$ $r_1 \in Çekg,\ r_2 \in M'$

$g(m) = g(r) = n$ tek türlüdür. O zaman $g(m-r) = 0 \Rightarrow m - r \in Çekf \Rightarrow \underbrace{(m-r)}_{\in Çekg} =$

$\underbrace{(m_1 - r_1)}_{\in Çekg} + (m_2 - r_2) \Rightarrow m_2 - r_2 \in Çekg n M' = \{0\} \Rightarrow m_2 = r_2$ dır. $h(n) = m_2$ tanımı h iyi tanımlı yapar.

Verilen herhangi bir $m \in M$ için $k : M \to L$ tanımlansın. $\underbrace{m = m_1 + m_2}_{\in Çekg = \operatorname{Im} f}$ tek türlü $\Rightarrow$ $l \in L$ için $m_1 = f(l)$ dır.

Tanım 2.1.44 : R değişmeli halka, M $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tarafından üretilen bir R-modül olsun. Her $m \in M$ ve $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ olarak $r_\lambda \in R$, $m_\lambda \in M$ ile tek türlü yazılabiliyorsa $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, M için bir tabandır ve M, bir tabana sahip olduğundan bir serbest R-modüldür.

R nin kendisi 1_R elemanı tarafından bir tabana sahip olduğundan bir serbest R-modüldür.0 R-modül boş bir taban sahip olan serbest R-modüldür.

Önerme 2.1.45: R değişmeli halka, M R-modül ve $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ M nin bir ailesi olsun. O zaman $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$ için bir tabandır $\Leftrightarrow$ her zaman $(r_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R nin bir ailesi ile neredeyse her r_λ sıfırdır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda e_\lambda = 0 \Rightarrow r_\lambda = 0$ dır.

Önerme 2.1.46 : R değişmeli halka olsun.

i) $(R_\lambda)\lambda \in \Lambda$, her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ ile R-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman

$\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$, $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile serbest R-modüldür ki her $\mu\in\Lambda$ için $e_\mu \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ elemanı R_μ içinde kendisi 1 eşit ve diğer bütün elemanları sıfırdır.

$$\{(1,0,0,...)(0,1,0,0,...)(0,0,1,0,...),...\text{gibi}\}$$

ii) M R-modül, M serbest R-modüldür $\Leftrightarrow M$, (i) deki türden bir R-modüle izomorftur. M $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip ise $M \simeq \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ ki $R_\lambda = R$ dır. Burada $Rm_\lambda \simeq R$ dır.Böylece $Rm_\lambda \simeq R/(0:m_\lambda) \simeq R$ dır.

$$\begin{array}{l} f: R\to Rm_\lambda \\ \quad 1\to m_\lambda \end{array} \text{ olmak üzeri } R/(0:m_\lambda)\simeq Rm_\lambda \Rightarrow R\simeq Rm_\lambda$$

Böylece $M \simeq \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} Rm_\lambda$ dır.

Önerme 2.1.47 : F, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanı ile bir serbest R-modül olsun. M, R-modül ve $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ M nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall\lambda\in\Lambda$ için $f(e_\lambda)=m_\lambda$ tanımıyla $f:F\to M$ bir R- modül homomorfizması vardır.

İspat : M, $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tabanına sahip serbest R-modül olsun. $\Lambda=\varnothing$ ise açıktır. $\Lambda\neq\varnothing$ ise $\forall\lambda\in\Lambda$ $Rm_\lambda = R$, $\forall (r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda$ için $f((r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda m_\lambda$ tanımıyla $f: \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} R_\lambda \to M$ dönüşümüyle f bir R-modül homomorfizmasıdır. M, $\{m_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde f örtendir. $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ M nin tabanı olduğundan f,1-1 dır.

Önerme 2.1.48 : M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. F serbest R-modül ve $f:F\to M$ R-modül epimorfizması vardır.

Aynı zamanda M, n tane eleman tarafından sonlu olarak üretilirse F, n üyelerinin sonlu tabanına sahip bir serbest R-modül elde edilir.

Önerme 2.1.49 : $M \simeq F/Çekf$

Önerme 2.1.50 : $0 \neq R$ değişmeli halka, F sonlu taban ile serbest R-modül olsun. O zaman F için her taban sonludur ve F için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. F için bir taban içinde ki elemanların sayısına F nin $rank$ ı denir ve $rank(F)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.51 : $R \neq 0$ değişmeli halka, F serbest R-modül ve F sonlu üretilir olsun. O zaman F için her taban sonludur.

Tanım 2.1.52 : X R-modül eğer herhangi bir $g : A \to B$ R-modül epimorfizma ve herhangi bir $f : X \to B$ R- homomorfizması için $h : X \to A$ R- homomorfizması varsa X projektif diye adlandırılır.

Teorem 2.1.53 : Her serbest R-modül projektiftir.

Önerme 2.1.54 : X projektif ve $X = M \oplus N \Rightarrow M$ projektiftir.

Önerme 2.1.55 : Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.

Teorem 2.1.56 : X R-modül , $i : X \to X$ için aşağıdaki durumlar denktir.

i) X projektiftir.

ii) Her $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.

iii) X serbest R-modüllerinin direkt toplamına izomorftur.

iv) Her $g : A \to B$ epimorfizma için $g_x = Hom(i,g) : Hom(X,A) \to Hom(X,B)$ aynı zamanda bir epimorfizmadır.

v) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \longrightarrow Hom(X,A) \longrightarrow Hom(X,B) \longrightarrow Hom(X,C) \longrightarrow 0$ dizisi aynı zamanda kısa tam dizidir.

Önerme 2.1.57 : R üzerinde her M modül

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

R üzerinde modüllerin bir kısa tam dizisi içinde yazılabilir ki burada X projektiftir. $(M \simeq X/Kerg)$

Tanım 2.1.58 : $M \in M_R$ nin projektif boyutu

$$pd(M) = pd_R(M) = \min(n : P^n[M] = 0)$$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir n yoksa $pd_R(M) = \infty$ dır. $pd(M) = 0$ ancak ve ancak M bir projektif modüldür.

Önerme 2.1.59 : $M \in M_R$ ve $n \geq 0$ için aşağıdaki durumlar denktir.

1) $pd_R(M) \leq n$

2) Herhangi projektif çözünürlüğü

$$P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$Çek\alpha_{n-1}$ in projektiftir.

$n = 0$ durumunda M projektif olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

3) Bir sonlu projektif çözünürlüğü vardır.

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Dahası , $n \geq 1$ için , $pd_R(M) = n$ dir ancak ve ancak (3) deki bir sonlu projektif vardır ki burada α_n split değildir.

Tanım 2.1.60 : R halkasının global boyutu

$$gl.\dim R = \sup\{pd_R(M) : M \in M_R\} \leq \infty$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.61 : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ M_R içinde bir tam dizi olsun. Eğer $pd(A)$, $pd(B)$, $pd(C)$ nin ikisi sonlu ise üçüncüde sonludur. Her bir durumda

(1) $pd(A) < pd(B)$ ise $pd(C) = pd(B)$ dir.

(2) $pd(A) > pd(B)$ ise $pd(C) = pd(A) + 1$ dir.

(3) $pd(A) = pd(B)$ ise $pd(C) \leq pd(A) + 1$ dir.

Sonuç 2.1.62 : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ M_R içinde bir tam dizi olsun. $pd(B) \leq \max\{pd(A), pd(C)\}$ iken $pd(C) = pd(A) + 1$ eşitliği vardır.

Sonuç 2.1.63 : $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$ B_R modülünün bir sonlu ayrışımı olsun. O zaman $pd(B) \leq \max\left\{ pd(B_{i+1}/B_i) \right\}$ dir.

Önerme 2.1.64 : $M = \oplus_i M_i$ olsun. O zaman $pd(M) = \sup\left\{ pd(M_i) \right\}$ dir.

3.BÖLÜM
EVRENSEL MODÜLLER

3.1. Diferansiyel Operatör Modülleri

Bu bölümde ilk olarak diferansiyel operatörlerin tanımı, özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte verilerek konuya başlangıç yapılacaktır. [9]

Bu çalışmada R ile birim elemanlı ve değişmeli bir halkayı gösterelim.

R karakteristiği sıfır olan bir k cismi üzerinde k-cebir ve M, N de R- modül olsun. $Hom_k(M,N)$, M den N ye k-lineer dönüşümlerin kümesi olsun. O zaman $f \in Hom_k(M,N)$, $m \in M$ ve $r \in R$ için

$$rf : m \to rf(m)$$
$$fr : m \to fr(m) = f(rm)$$

tanımları ile $Hom_k(M,N)$ üzerinde bir ikili R-modül yapısı kurulabilir.

$$fr(m) - rf(m) = \left[f, r\right](m)$$

olarak gösterelim. $\left[f, r\right] \in Hom_k(M,N)$ olur.

Tanım 3.1.1 : $Hom_k(M,N) = D_R^0(M,N) = \left\{ f \in Hom_k(M,N) \ : \ \left[f, r\right] = 0 \quad \forall r \in R \right\}$

olarak tanımlayalım. $D_R^{n-1}(M,N)$ tanımlanmış olsun. O zaman

$$D_R^n(M,N) = \left\{ f \in Hom_k(M,N) \ : \ \left[f, r\right] \in D_R^{n-1}(M,N) \quad \forall r \in R \right\}$$

ile tanımlanır ve $D_R^n(M,N)$ ye n-inci dereceden diferansiyel operatör modülü denir.

Önerme 3.1.2 : $D_R^n(M,N)$ modülü $\mathrm{Hom}_k(M,N)'nin$ bir alt R-modülüdür.

İspat : İspatı tümevarımla yapalım.

$n=0$ için $\mathrm{D}_R^n(M,N)=Hom_R(M,N)$ olup $R-$modüldür.

$n-1$ için önermeyi doğru kabul edelim.

$f,g\in D_R^n(M,N)$ olsun.

$$\begin{aligned}[f+g,r]&=(f+g)(r)-r(f+g)\\&=f(r)+g(r)-rf-rg\\&=f(r)-rf+g(r)-rg\\&=[f,r]+[g,r]\end{aligned}$$

$[f,r],[g,r]\in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $[f,r]+[g,r]\in D_R^{n-1}(M,N)$ dir. Böylece $f+g\in D_R^n(M,N)$ olur.

$s\in R$ ve $f\in D_R^n(M,N)$ olsun.

$$\begin{aligned}[sf,r]&=(sf)(r)-r(sf)\\&=sf(r)-rsf\\&=sf(r)-srf\\&=s(f(r)-rf)\\&=s[f,r]\end{aligned}$$

$[f,r]\in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $s[f,r]\in D_R^{n-1}(M,N)$ ve böylece $sf\in D_R^n(M,N)$ olur.

Bu tezde her sıfırdan küçük n tam sayısı için $D_R^n(M,N)=0$ olarak alacağız. Tanımdan dolayı

$$\begin{aligned}&D_R^0(M,M)=D_R^0(M)=End_R(M)\\&D_R^0(R,M)=Hom_R(R,M)\simeq M\\&D_R^0(R,R)\simeq R\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Önerme 3.1.3 : Her n tam sayısı için $D_R^n(M,N)\subseteq D_R^{n+1}(M,N)$ dir.

İspat : $n<0$ için tanımdan dolayı açıktır.

$n=0$ ve $f\in D_R^0(M,N)=Hom_R(M,N)$ olsun. Tanımdan $[f,r]=0\in Hom_R(M,N)$ dir. Buradan $f\in D_R^1(M,N)$ olduğu görülür.

Şimdi $n-1$ için önermenin olduğunu kabul edelim. $D_R^{n-1}(M,N) \subseteq D_R^n(M,N)$ ve $f \in D_R^n(M,N)$ olsun. Tanımdan dolayı $[f,r] \in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $[f,r] \in D_R^n(M,N)$ ve yine tanımdan dolayı $f \in D_R^{n+1}(M,N)$ dir.

Diferansiyel operatör modülünün tanımına göre eğer $f \in D_R^0(M,N) = Hom_R(M,N)$ ise her $r_0 \in R$ ve her $m \in M$ için $[f,r_0](m) = f(r_0 m) - r_0 f(m) = r_0 f(m) - r_0 f(m) = 0$ dır.

Yani $f \in D_R^0(M,N)$ ise $[f,r_0] = 0$

$f \in D_R^1(M,N)$ ise $[[f,r_0],r_1] = 0$

…

…

…

Benzer şekilde devam edilirse

$r_0, r_1, ..., r_n \in R$ için $f \in D_R^n(M,N)$ ise $\left[...\left[\left[[f,r_0],r_1\right],...,r_n\right]\right] = 0$ bulunur.

Bundan sonra $\left[...\left[\left[[f,r_0],r_1\right],...,r_n\right]\right]$'yi $[f,r_0,r_1,...,r_n]$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.4 : M den N ye olan bütün $k-lineer$ diferansiyel operatörler uzayı

$$D_R(M,N) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_R^n(M,N)$$

ile tanımlanır.

Şimdi diferansiyel operatör modülleri ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 3.1.5 : $R = k[x]$ olsun.

$$D_R^0(R) \simeq k[x]$$

$$D_R^1(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}>$$

$$D_R^2(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}>$$

$$\dots$$

$$D_R^n(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial^n}{\partial x^n}>$$

Örnek 3.1.6 : $R = k[x, y]$ olsun.

$$D_R^1(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}>$$

$$D_R^2(R) = <1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}>$$

Örnek 3.1.7 : $R = k[x_1, ..., x_s]$ polinomlar cebiri olsun. $D_R^1(R)$, bazı

$$\left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_s}\right\}$$

olan bir serbest R -modülür. Bunu gösterelim.

$D \in D_R^1(R)$ ve $K = \left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_s}\right\}$ kümesi olsun. O zaman $i = 1, ..., s$ için $D(x_i^n) = n x_i^{n-1} D(x_i)$ dir. Böylece

$$(D - \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i})(x_i^{i_1} ... x_s^{i_s}) = 0$$

ve buradan da

$$(D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i})$$

elde edilir. Böylece $D \in < K >$ olduğu görülür. Bu küme aynı zamanda lineer bağımsız olduğundan K kümesi $D_R^1(R)$ nin bazıdır.

Örnek 3.1.8 : $R = k[x_1 ... x_s]$ polinomlar cebiri olsun. $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} : R \to R \;\; i, j = 1, 2, ..., s$ için $\partial_i(x_j) = \delta_{i,j}$ olsun. ($\delta_{i,j}$ Kronecker deltası) $x^\beta = x_1^{\beta_1} ... x_s^{\beta_s} \in R$ olmak üzere $|\alpha|$ inci dereceden $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_s^{\alpha_s}$ kısmi türevi

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}, & \beta \geq \alpha \\ 0, & \text{diger yerlerde} \end{cases}$$

R nin $|\alpha|$ inci dereceden diferansiyel operatörüdür.

Tanım 3.1.9 : $End_k(M)$ nin bir k- alt cebiri olan $D_R(M,M)$ ye M üzerinde diferansiyel operatörler halkası denir ve $D_R(M)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.10 : $f \in D_R^n(M,N)$ ve $g \in D_R^m(N,K)$ ise $gf \in D_R^{m+n}(M,K)$ dir.

İspat : İspatı $m+n$ üzerinden tümevarımla yapalım. $m+n=0$ alalım. Böylece $f \in Hom_R(M,N)$ ve $g \in Hom_R(N,K)$ dir. Buradan $gf \in Hom_R(M,K)$ olur.

$m+n-1$ için önerme doğru olsun.

$f \in D_R^n(M,N)$ ve $g \in D_R^m(N,K)$ olsun.

$$\begin{aligned}[gf,r] &= (gf)(r) - r(gf) \\ &= (gf)(r) - r(gf) + (g(rf) - g(rf)) \\ &= g(f(r)) - g(rf) + g(rf) - rg(f) \\ &= g(fr - rf) + (gr - rg)f \\ &= g[f,r] + [g,r]f\end{aligned}$$

$g \in D_R^m(N,K)$ ve $[f,r] \in D_R^{n-1}(M,N)$ olup hipotezden dolayı $g[f,r] \in D_R^{n+m-1}(M,K)$ dır.

Aynı şekilde $[g,r] \in D_R^{m-1}(N,K)$ ve $f \in D_R^n(M,N)$ olup $[g,r]f \in D_R^{n+m-1}(M,K)$ 'dır.

O halde $g[f,r]+[g,r]f \in D_R^{n+m-1}(M,K)$ olup $gf \in D_R^{n+m}(M,K)$ bulunur.

R, k-cebir ve $R \otimes_k R$ de R halkasının yine kendisiyle olan tensor çarpımını göstersin. $r_i, r_j, s_i, s_j \in R$ olmak üzere

$$(\sum_i r_i \otimes_k s_i).(\sum_j r_j \otimes_k s_j) = \sum_{i,j} r_i r_j \otimes_k s_i s_j$$

çarpımıyla $R \otimes_k R$ birim elemanlı değişmeli bir halkadır.

Her $r,s \in R$, $f \in Hom_k(M,N)$ ve $m \in M$ için

$$(r \otimes_k s)f : m \to rf(sm)$$

olarak tanımlanırsa, $Hom_k(M,N)$ üzerinde $R \otimes_k R$-modül yapısı kurulabilir.

$\theta : R \otimes_k R \to R$ çarpım dönüşümü

$$\sum_i r_i \otimes s_i \to \sum_i r_i s_i$$

ile tanımlansın. Bu dönüşüm hem halka hem de R-modül homomorfizması ve aynı zamanda örtendir.

$I = Çek\theta$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \otimes_k R \xrightarrow{\theta} R \longrightarrow 0$$

R-modül homomorfizmalarının bir tam dizisi elde edilir.

Önerme 3.1.11 : I ideali $\{1 \otimes r - r \otimes 1 : r \in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat : $\sum_i r_i \otimes s_i \in I$ olsun. O zaman $\sum_i r_i s_i = 0$ dır.Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_i r_i \otimes s_i &= \sum_i r_i \otimes s_i - (\sum_i r_i s_i) \otimes 1 \\
&= \sum_i (r_i \otimes s_i - r_i s_i \otimes 1) \\
&= \sum_i (r_i \otimes 1)(1 \otimes s_i - s_i \otimes 1) \\
&= \sum_i r_i (1 \otimes s_i - s_i \otimes 1)
\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

Önerme 3.1.12 : M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M, N)$ olsun.O zaman her $r \in R$ ve her $m \in M$ için

$$[f, r](m) = (1 \otimes r - r \otimes 1) f(m)$$

eşitliği vardır.

İspat : M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M, N)$ olsun. O zaman her $r \in R$ ve her $m \in M$ için

$$\begin{aligned}
[f, r](m) &= (fr)(m) - (rf)(m) \\
&= f(rm) - r(fm) \\
&= (1 \otimes r) f(m) - (r \otimes 1) f(m) \\
&= (1 \otimes r - r \otimes 1) f(m)
\end{aligned}$$

olup

$$[f, r] = (1 \otimes r - r \otimes 1) f$$

eşitliğini elde ederiz.

Yukarıdaki tanımlarda I ideali $R \otimes_k R$ nin bir ideali idi. O zaman I^{n+1} de $R \otimes_k R$ nin bir ideali olup

$$\left\{ \prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) : \ r_i \in R \right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

$$\prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|} (r_T \otimes r_{T'})$$

formülü ile verilir. Bu formülle $T^{'}$, T nin $\{0,1,\ldots,n\}$ kümesine göre tümleyenini, $r_T = \prod_{k \in T} r_k$ yı ve $|T|$ de T nin eleman sayısını gösteriyor. $r_{\varnothing} = 1$ olarak alınacaktır.

Önerme 3.1.13 : M, N R-modül ve $f \in Hom_k(M, N)$ olsun . f, n inci dereceden diferansiyel operatördür $\Leftrightarrow I^{n+1} f = 0$ dır.

İspat : f, n inci dereceden diferansiyel operatördür.

$\Leftrightarrow [f, r_0, r_1, \ldots, r_n]$ her $r_i \in R$, $i = 0,1,\ldots,n$

$\Leftrightarrow (\prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1)) f = 0$ her $r_i \in R$, $i = 0,1,\ldots,n$

$\Leftrightarrow I^{n+1} f = 0$

Sonuç 3.1.14 : $f \in D_R^n(M, N)$ olsun.

$$f(r_0 r_1 \ldots r_n m) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots,n\} \text{ ve } |T| \geq 1} (-1)^{|T|-1} r_T f(r_{T'} m)$$

dir.

İspat : Bir önceki önermeden dolayı $I^{n+1} f = 0$ dır. Böylece

$$0 = \left[\prod_{i=0}^{n} (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) f \right] (m)$$

$$= \left[\sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|} (r_T \otimes r_{T'}) f \right] (m)$$

$$= \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|} r_T f(r_{T'} m)$$

ve buradan

$$f(r_0 r_1 \ldots r_n m) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots,n\} \text{ ve } |T| \geq 1} (-1)^{|T|-1} f(r_{T'} m)$$

bulunur.

3.2 Evrensel Diferansiyel Modülleri

Bu bölümde, verilen herhangi bir M $R-$modül üzerinde evrensel modülün nasıl tanımlandığı gösterilecek. Evrensel modüllerin özellikleri, bazı örnekler ve diferansiyel modüllerle arasındaki bağıntılar verilecek.

M , $R-$modül ve $r\otimes s\in R\otimes_k R,\ r^{'}\otimes m\in R\otimes_k M$ için $r\otimes s)(r^{'}\otimes m)=rr^{'}\otimes sm$ ile $R\otimes_k M$ üzerinde $R\otimes_k R-$ modül yapısı tanımlanabilir.

$$\mu : M\to R\otimes_k M$$
$$m\to \mu(m)=1\otimes m$$

sağ çarpım dönüşümü ve

$$\pi : R\otimes_k M\to \frac{R\otimes_k M}{I^{n+1}(R\otimes_k M)}$$
$$r\otimes m\to \pi(r\otimes m)=\overline{r\otimes m}$$

doğal dönüşümü olsun.

Önerme 3.2.1 :
$$\pi\mu : M\to \frac{R\otimes_k M}{I^{n+1}(R\otimes_k M)}$$

$\pi\mu(m)=\overline{1\otimes m}$ bileşkesi bir k-lineer dönüşümü olup n-inci dereceden diferansiyel operatördür.

İspat : $I^{n+1}\pi\mu=0$ olup Önerme 3.1.13 den dolayı $\pi\mu$ homomorfizması n-inci dereceden diferansiyel operatördür.

Tanım 3.2.2 : M,N ve K R-modül ve $\Delta_n : M\to N$ n-inci dereceden diferansiyel operatör olsun. Herhangi bir n-inci dereceden $f : M\to K$ diferansiyel operatörü için

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & K \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow I_K \\ N & \xrightarrow{\alpha} & K \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha\Delta_n = f$ olacak şekilde bir tek $\alpha : N \to K$ R-modül homomorfizması varsa o zaman $\Delta_n : M \to N$ diferansiyel operatörüne n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü denir.

Teorem 3.2.3 : R k-cebir ve M, N R-modül olsun. O zaman

$$Hom_k(M, N) \simeq Hom_R(R \otimes_k M, N)$$

dir.

Herhangi bir M R-modülü üzerinde $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatörün varlığı aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 3.2.4 :

$$\pi\mu : M \to \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$
$$\pi\mu(m) = \overline{1 \otimes m}$$

dönüşümü $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatördür.

İspat : N R-modül ve $f : M \to N$ n-inci dereceden diferansiyel operatör olsun. $R \otimes_k M$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu\downarrow & & \downarrow 1_N \\ R \otimes_k M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $F\mu = f$ olacak şekilde bir tek

$$F : R \otimes_k M \to N$$

$R-$modül homomorfizması vardır ve $F(r \otimes_k m) = rf(m)$ olarak tanımlanır.

$f, n-$inci dereceden diferansiyel operatör olduğundan $I^{n+1}f = 0$ ve buradan $F(I^{n+1}(R \otimes_k M)) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu\downarrow & & \downarrow 1_N \\ R \otimes_k M & \xrightarrow{F} & N \\ \pi\downarrow & & \downarrow 1_N \\ \dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)} & \xrightarrow{\overline{F}} & N \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\overline{F}\pi = F$ olacak şekilde bir tek $\overline{F} : \dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)} \to N$

$R-$modül homomorfizması vardır ve $\overline{F}(\overline{r \otimes_k m}) = \overline{rf(m)}$ olarak tanımlanır. Böylece $\overline{F}\pi\mu = F\mu = f$ olup $\pi\mu$ evrenseldir.

Tanım 3.2.5 : $\dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$ modülüne M üzerinde $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülü denir ve $\Omega_n(M)$ ile gösterilir. Burada M $R-$ modülü yerine R nin kendisi alınırsa $\Omega_n(R) = \dfrac{R \otimes_k R}{I^{n+1}}$ olur.

Herhangi bir M $R-$modülü üzerinde $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülün tekliği aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 3.2.6 : M $R-$modül olsun. Eğer $\Omega_n^{'}(M)$, M R-modülünün başka bir evrensel diferansiyel modülü ise o zaman $\Omega_n^{'}(M) \simeq \Omega_n(M)$ dir.

İspat : $\Delta_n : M \to \Omega_n(M)$ ve $\Delta_n^{'} : M \to \Omega_n^{'}(M)$ $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatörleri olsun.

Δ_n nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_n^{'}} & \Omega_n^{'}(M) \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_n(M) & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_n^{'}(M) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\alpha\Delta_n = \Delta_n^{'}$ olacak şekilde bir tek $\alpha : \Omega_n(M) \to \Omega_n^{'}(M)$ $R-$modül homomorfizması vardır.

Benzer şekilde $\Delta_n^{'}$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_n} & \Omega_n(M) \\ \Delta_n^{'} \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_n(M) & \xrightarrow{\beta} & \Omega_n^{'}(M) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\beta\Delta_n^{'} = \Delta_n$ olacak şekilde bir tek $\beta : \Omega_n^{'}(M) \to \Omega_n(M)$ R-modül homomorfizması vardır.

$$\alpha\Delta_n = \Delta_n^{'}$$
$$\beta\alpha\Delta_n = \beta\Delta_n^{'} = \Delta_n$$
$$\beta\alpha\Delta_n(m) = \Delta_n(m)$$

O halde

$$\beta\alpha = 1_{\Omega_n}(M)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\beta\Delta_n^{'} = \Delta_n$$
$$\alpha\beta\Delta_n^{'} = \alpha\Delta_n = \Delta_n^{'}$$
$$\alpha\beta\Delta_n^{'}(m) = \Delta_n^{'}(m)$$

yapılırsa

$$\alpha\beta = 1_{\Omega_n^{'}}(M)$$

bulunur.

O halde $\Omega_n^{'}(M) \simeq \Omega_n(M)$ bulunur.

Şimdi evrensel modüllerle ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 3.2.7 : $R = k\left[x_1,...,x_s\right]$ polinomlar cebiri ve $\delta_n : R \to \Omega_n(R)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun. O zaman $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $\Omega_n(R)$,

$$\left\{\delta_n(x^\alpha):\ \mathrm{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_s^{\alpha_s},\ |\alpha| \le n\right\}$$

baz kümesi ile serbest bir $R-$modüldür.

Örnek 3.2.8 : $K = k(x_1,...,x_s)$ cismi $R = k\left[x_1,...,x_s\right]$' nin kesir cismi olsun. $\delta_n : K \to \Omega_n(K)$ $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$\left\{\delta_n(x^\beta):\ \mathrm{x}^\beta = x_1^{\beta_1}...x_s^{\beta_s},\ |\beta| \le n\right\}$$

baz kümesi ile $n-$inci dereceden evrensel diferansiyel modülü $\Omega_n(K)$ bir $K-$vektör uzayıdır.

Teorem 3.2.9 : M ve N $R-$modül olsun. O zaman

$$Hom_R(\Omega_n(M), N) \simeq D_R^n(M,N)$$

$R-$modül izomorfizması vardır.

Kanıt : $\phi(\alpha)=\alpha\Delta_n$ olmak üzere $\phi: Hom_R(\Omega_n(M),N)\to D_R^n(M,N)$ $R-$modül homomorfizması tanımlansın. $\alpha\in\phi: Hom_R(\Omega_n(M),N)$ için Önerme 3.1.10 dan dolayı $\alpha\Delta_n\in D_R^n(M,N)$ dir.

$\Omega_n(M)$ nin evrensellik dolayı ϕ örtendir.

Şimdi ϕ nin birebir olduğunu gösterelim. $\phi(\alpha)=0$ olsun. O zaman $\forall m\in M$ için $\alpha\Delta_n(m)=0$ dır. Böylece $\alpha(\Omega_n(M))=0$ ve buradan da $\alpha=0$ olup birebirdir.

Böylece ϕ $R-$modül izomorfizmasıdır.

M ve $N, R-$modülleri R olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.10 : $Hom_R(\Omega_n(R),R)\simeq D_R^n(R)$ $R-$modül izomorfizması vardır.

Teorem 3.2.11 : $M, R-$modül olsun. O zaman $\Omega_n(M)\simeq M\otimes_R\Omega_n(R)$ dir.

İspat : $M\simeq R\otimes_R M$ doğal izomorfizması vardır.Buradan $\Omega_n(M)\simeq\Omega_n(R\otimes_R M)$ dir. Tanımdan dolayı $\Omega_n(R\otimes_R M)=R\otimes_k(R\otimes_R M)/I^{n+1}R\otimes_k(R\otimes_R M)$ dir.
$I^{n+1}R\otimes_k(R\otimes_R M)=I^{n+1}\otimes_R M$ olup $\Omega_n(R\otimes_R M)=(R\otimes_k R)\otimes_R M/I^{n+1}\otimes_R M$ elde edilir. Böylece istenen izomorfizma $\Omega_n(M)\simeq M\otimes_R\Omega_n(R)$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.12 : $(i\in I)$ için M_i ler ve N $R-$modül olsun. O zaman

$i)$ $\Omega_n(\bigoplus_i M_i\simeq\bigoplus_i\Omega_n(M_i)$

$ii)$ $D_R^n(\bigoplus_i M_i,N)\simeq\bigoplus_i D_R^n(M_i,N)$

izomorfizmaları vardır.

İspat : i) Bir önceki teoremden dolayı $\Omega_n(\bigoplus_i M_i\simeq\bigoplus_i(M_i)\bigoplus_R\Omega_n(R)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}(\bigoplus_i M_i)\otimes_R\Omega_n(R)&\simeq\bigoplus_i(M_i\otimes_R\Omega_n(R))\\&\simeq\bigoplus_i\Omega_n(M_i)\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

ii) Teorem 3.2.9 dan dolayı $D_R^n(\bigoplus_i M_i, N) \simeq Hom_R(\Omega_n \bigoplus_i M_i), N)$ idi. O halde i) den dolayı

$$\begin{aligned} Hom_R(\Omega_n \bigoplus_i M_i), N) &\simeq Hom_R(\bigoplus_i \Omega_n(M_i), N) \\ &\simeq \bigoplus_i Hom_R(\Omega_n(M_i), N) \\ &\simeq \bigoplus_i D_R^n(M_i, N) \end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

4.BÖLÜM
Evrensel Modüllerin Homolojik Boyutları

Bu bölümde evrensel modüllerin homolojik boyutları hesaplanacaktır.

4.1.Evrensel Modüllerin Homolojik Boyutları

İlk olarak evrensel modüllerin homolojik boyutlarını hesaplamak için bilinmesi gerekli olan temel kavramlar verilecek daha sonra da homolojik boyutlarının nasıl bulunduğu örnekler verilerek gösterilmeye çalışılacaktır.

Önerme 4.1.1 : $R = k[x_1, x_2, ..., x_s]$ polinomlar cebiri ve $I = (f_1, f_2, ..., f_t)$ *de* R nin bir ideali olsun. $\Delta_n : R \to \Omega_n(R)$, n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere L nin $\{\Delta_n(x^\alpha f_i) | \quad i = 1,2,...,t \quad |\alpha| < n\}$ kümesi tarafından üretilen $\Omega_n(R)$ nin bir alt modülü olduğu varsayılırsa o zaman $R\Delta_n(I) \subseteq L + I\,\Omega_n(R)$ dir.

İspat : Δ_n k-lineer operatör olduğuna göre her $g \in R$ için $\Delta_n(f_i g) \in L + I\,J_n(R)$ olduğunu göstermeliyiz. $|\alpha| < n$, $|\beta| < n$ olmak üzere $a_\alpha, b_\beta \in k$ için $g = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha + \sum_\beta b_\beta x^\beta \in R$ olsun. O zaman

$$\Delta_n(f_i g) = \sum_\alpha a_\alpha \Delta_n(x^\alpha f_i) + \sum_\beta b_\beta \Delta_n(x^\beta f_i)$$

dir.

$\sum_\beta b_\beta \Delta_n(x^\beta f_i)$ tanımından dolayı L nin içindedir.

Diğer kısım için $\Delta_n \in D^n(R, \Omega_n(R))$ olduğundan dolayı Sonuç 3.1.14 kullanılırsa $|\mu| < n$ ve $|\nu| < n$ olmak üzere $c_\mu, d_\nu \in R$ için

$$\Delta_n\left(x^\alpha f_i\right)=\sum_\mu c_\mu \Delta_n\left(x^\mu f_i\right)+f_i\sum_\nu d_\nu \Delta_n\left(x^\nu\right)$$

eşitliği yazılabilir. Elde edilen son denklem ilk denklemde yerine yazılırsa

$$\Delta_n\left(f_i g\right)=\sum_\alpha\sum_\mu a_\alpha c_\mu \Delta_n\left(x^\mu f_i\right)+f_i\sum_\alpha\sum_\nu a_\alpha d_\nu \Delta_n\left(x^\nu\right)+\sum_\beta b_\beta \Delta_n\left(x^\beta f_i\right)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $L+I\,\Omega_n(R)$'nin elemanıdır.

$R=k[x_1,x_2,...,x_s]$ polinomlar cebiri ve $I=(f_1,f_2,...,f_t)$ de R nin bir ideali olsun. $S=R/I$ afin cebiri

$$0\rightarrow\frac{R\Delta_n(R)+I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}\rightarrow\frac{\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}\xrightarrow{\theta}\Omega_n(S)\rightarrow 0$$

$S=R/I$ modül homomorfizmalarının tam dizisi vardır.

Önerme 4.1.2 : $\dfrac{R\Delta_n(R)+I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$ modülü S-modül olarak

$$\left\{\Delta_n\left(x^\alpha f_i\right)+I\,\Omega_n(R):\ |\alpha|<n\quad i=1,2,...,t\right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

İspat : Bir önceki önerme kullanılırsa $\dfrac{L+I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$,

$$\left\{\overline{\Delta_n\left(x^\alpha f_i\right)}:\ i=1,2,...,t\quad |\alpha|<n\right\}$$

kümesi tarafından üretilir.

Yine aynı önermeden $R\Delta_n(I)\subseteq L+I\,\Omega_n(R)$ olduğundan dolayı ;

$$\frac{L+I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}=\frac{R\Delta_n(R)+I\,\Omega_n(R)}{I\,\Omega_n(R)}$$

olup istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3 : $\delta_n : R/I\rightarrow\Omega_n(R/I)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere $\Omega_n(R/I)$ modülü $\left\{\delta_n\left(x^\alpha+1\right):|\alpha|<n\right\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat : $\Omega_n(R)$, bazı $\{\Delta_n(x^\alpha):|\alpha|\le n\}$ kümesi olan serbest R-modül ve buradan $\dfrac{\Omega_n(R)}{I\Omega_n(R)}$ de bazı $\{\overline{\Delta_n(x^\alpha)}:|\alpha|\le n\}$ kümesi olan serbest R/I-modüldür. Böylece $\Omega_n(R/I)$ nin üreteçlerinin kümesi $\{\theta(\overline{\Delta_n(x^\alpha)}):|\alpha|\le n\}$ kümesidir. Bu küme ise $\{\delta_n(x^\alpha+1):|\alpha|<n\}$ kümesi olup istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.4 : $S=\dfrac{k[x_1,x_2,...,x_s]}{(f)}$ afin tamlık bölgesi ise o zaman $\Omega_n(S)$ nin homolojik boyutu 1 veya 1 den küçüktür.

İspat : $R=k[x_1,x_2,...,x_s]$ polinomlar cebiri ve $\Delta_n:R\to\Omega_n(R)$ n-inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun.

m , R nin f yi içeren maksimal ideali olsun. R , s boyutlu regüler halka olup R nin m deki lokalizasyonu R_m de s boyutlu regüler halkadır. $\Omega_n(R_m)$ rankı $\begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix}$ olan serbest R_m-modülüdür. S , boyutu $s-1$ olan tamlık bölgesi olduğundan $R_m/f\,R_m$ de boyutu $s-1$ olan tamlık bölgesidir.

L , $R_m/f\,R_m$ nin kesir cismi olsun. O zaman $tr.\deg_L R_m/f\,R_m=s-1$ olup $\dim_L\Omega_n(L)=\begin{pmatrix} n+s-1 \\ s-1 \end{pmatrix}$ dir. Bu sayı aynı zamanda $\Omega_n(R_m/f\,R_m)$ nin de rankıdır.

Teorem 3.2.11 den $\Omega_n(L)=L\otimes_{R_m/f\,R_m}\Omega_n(R_m/f\,R_m)$ olarak alabiliriz. Sonuç 4.1.3 kullanılırsa

$$0\to Çek\theta\to\Omega_n(R)/f\,\Omega_n(R)\xrightarrow{\theta}\Omega_n(S)\to 0$$

S- modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir. M , m nin S deki görüntüsü olmak üzere yukarıdaki tam dizi , S_M ile tensörlediği zaman

$$0\to(Çek\theta)_M\to(\Omega_n(R)/f\,\Omega_n(R))_M\xrightarrow{\theta_M}(\Omega_n(S))_M\to 0$$

S_M- modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir.

$\left(\Omega_n\left(R\right)/ f\,\Omega_n\left(R\right)\right) \simeq \Omega_n\left(R_m / f\, R_m\right)$ izomorfizmasından dolayı

$\left(\Omega_n\left(R\right)/ f\,\Omega_n\left(R\right)\right)_M$ serbest modülü olup rankı $\begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix}$ dir. Böylece

$$rank\left(Çek\theta_M\right) = \begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+s-1 \\ s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+s-1 \\ s \end{pmatrix}$$

dir. Diğer taraftan $Çek\theta$, $\Sigma = \left\{\Delta_n\left(x^\alpha f\right) : |\alpha| < n\right\}$ kümesi tarafından üretilir ve bu kümenin elemen sayısı tam olarak $\begin{pmatrix} n+s-1 \\ s \end{pmatrix}$ dir. Böylece $Çek\theta_M$ serbest modül olup bazı Σ kümesidir.

m , R nin herhangi bir maksimal ideali olduğuna göre $Çek\theta$ homolojik S-modülüdür.

Sonuç olarak $hd\left(\Omega_n\left(S\right)\right) \leq 1$ dir.

Örnek 4.1.5 : $R = k[x, y]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - x^3$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R / I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Sırasıyla $\Omega_1\left(S\right), \Omega_2\left(S\right)$ ve $\Omega_3\left(S\right)$ nin homolojik boyutunu bulalım.

$\Omega_1\left(S\right)$: F , bazı $\left\{\Delta_1\left(x\right), \Delta_1\left(y\right)\right\}$kümesi olan serbest S-modül ve Nde $\Delta_1\left(f\right)$ elemanı tarafından üretilen F nin bir alt S-modülü olsun.

$\Omega_1\left(ab\right) = a\Omega_1(b) + b\Omega_1(a)$ diferansiyel operatörü yardımı ile $\Delta_1\left(f\right)$ hesaplanırsa

$\Delta_1\left(f\right) = \Delta_1\left(y^2 - x^3\right) = 2y\Delta_1\left(y\right) - 3x^2\Delta_1\left(x\right)$ olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1\left(S\right) \simeq F / N$ dir.

$rank\Omega_1\left(S\right) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1\left(S\right) = 3 - 2 = 1$ olup N serbest S-modülüdür. O halde

$$0 \to N \to F \to \Omega_1\left(S\right) \simeq F / N \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_1\left(S\right)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_1\left(S\right) \leq 1$ bulunur.

$\Omega_2\left(S\right)$: F', bazı $\left\{\Delta_2\left(x^2\right), \Delta_2\left(y^2\right), \Delta_2\left(xy\right), \Delta_2\left(y\right)\right\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'de $\Delta_2\left(f\right)$, $\Delta_2\left(xf\right)$ ve $\Delta_2\left(yf\right)$ elemanları tarafından üretilen F' nin bir alt S-modülü olsun. Burada ;

$$\Omega_2(abc) = a\Omega_2(bc) + b\Omega_2(ac) + c\Omega_2(ab) - ab\Omega_2(c) - ac\Omega_2(b) - bc\Omega_2(a) - abc$$

diferansiyel operatör yardımı ile $\Delta_2(f)$, $\Delta_2(xf)$ ve $\Delta_2(yf)$ hesaplanırsa

$$\Delta_2(f) = \Delta_2(y^2) - 3x\Delta_2(x^2) + 3x^2\Delta_2(x) - x^3$$

$$\Delta_2(xf) = x\Delta_2(y^2) - 6x^2\Delta_2(x^2) + 2y\Delta_2(xy) + 7x^3\Delta_2(x) - 2xy\Delta_2(y) - 2x^4$$

$$\Delta_2(yf) = 3y\Delta_2(y^2) - 3xy\Delta_2(x^2) - 3x^2\Delta_2(xy) + 6x^2y\Delta_2(x) - y^2\Delta_2(y) - 2x^3y$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_2(S) \simeq F'/N'$ dir.

$rank\Omega_2(S) = 3$ olduğu için $rankN' = rankF' - rank\Omega_2(S) = 6 - 3 = 3$ olup N' serbest S-modüldür. O halde

$$0 \to N' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\pi} \Omega_2(S) \simeq F'/N' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_2(S) \leq 1$ bulunur. Burada π doğal homomorfizma ve ϕ ise

$$\begin{pmatrix} -3x & 1 & 0 & 3x^2 & 0 & -x^3 \\ -6x^2 & x & 2y & 7x^3 & -2xy & -2x^4 \\ -3xy & 3y & -3x^2 & 6x^2y & -y^2 & -2x^3y \end{pmatrix}$$

matrisidir.

$\Omega_3(S)$: F'' , bazı $\{\Delta_3(x^i y^j) : \ i, j = 0,1,2,3 \quad 0 \leq i + j \leq 3\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'' de aşağıdaki elemanları tarafından üretilen F'' nin bir alt dizisi S-modül olsun.

$$\begin{aligned}\Omega_3(abcd) &= a\Omega_3(bcd) + b\Omega_3(acd) + c\Omega_3(abd) + d\Omega_3(abc) - ab\Omega_3(cd) - ac\Omega_3(bd) \\ &- ad\Omega_3(bc) - bc\Omega_3(ad) - bd\Omega_3(ac) - cd\Omega_3(ab) + abc\Omega_3(d) + abd\Omega_3(c) \\ &+ acd\Omega_3(b) + bcd\Omega_3(a) - abcd\end{aligned}$$

diferansiyel operatör yardımı ile $\Delta_3(f)$, $\Delta_3(xf)$, $\Delta_3(yf)$, $\Delta_3(x^2f)$, $\Delta_3(y^2f)$, $\Delta_3(xyf)$ hesaplanırsa

$$\Delta_3(f) = \Delta_3(y^2) - \Delta_3(x^3)$$

$$\Delta_3(xf) = x\Delta_3(xy^2) - 4x\Delta_2(x^3) + 6x^2\Delta_3(x^2) - 4x^3$$

$\Delta_3\left(x^2 f\right)=2x\Delta_3\left(xy^2\right)+2y\Delta_2\left(x^2 y\right)+19x^3\Delta_2\left(x^2\right)-10x^2\Delta_3\left(x^3\right)-x^2\Delta_3\left(y^2\right)-$
$4xy\Delta_3\left(xy\right)+2x^2y\Delta_3\left(y\right)-13x^4\Delta_3\left(x\right)+3x^5$

$\Delta_3\left(yf\right)=\Delta_3\left(y^3\right)-3x\Delta_3\left(x^2 y\right)-y\Delta_3\left(x^3\right)+3xy\Delta_3\left(x^2\right)+3x^2\Delta_3\left(xy\right)-3x^3\Delta_3\left(y\right)-$
$3x^2y\Delta_3\left(x\right)+x^3y$

$\Delta_3\left(y^2 f\right)=4y\Delta_3\left(y^3\right)-3x^2\Delta_3\left(xy^2\right)-6xy\Delta_3\left(x^2 y\right)+6xy^2\Delta_3\left(x^2\right)-x^3\Delta_3\left(x^3\right)-$
$4x^3\Delta_3\left(y^2\right)+12x^2y\Delta_3\left(xy\right)-2yx^3\Delta_3\left(y\right)-9x^5\Delta_3\left(x\right)+3x^6$

$\Delta_3\left(xyf\right)=x\Delta_3\left(y^3\right)+3y\Delta_3\left(xy^2\right)-6x^2\Delta_3\left(x^2 y\right)+12x^2y\Delta_3\left(x^2\right)-4xy\Delta_3\left(x^3\right)-$
$3xy\Delta_3\left(y^2\right)+5x^3\Delta_3\left(xy\right)-11x^3y\Delta_3\left(x\right)+3x^4y$

Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_3\left(S\right)\simeq F''/N''$ dir.

$rank\Omega_3\left(S\right)=4$ olduğu için $rankN''=rankF''-rank\Omega_3\left(S\right)=10-4=6$ olup N'' serbest S- modüldür. O halde

$$0\rightarrow N''\xrightarrow{\varphi}F''\xrightarrow{\pi}\Omega_3\left(S\right)\simeq F''/N''\rightarrow 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_3\left(S\right)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_3\left(S\right)\leq 1$ bulunur. Burada π doğal homomorfizma ve ϕ ise

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-4x^3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6x^2 & 0 & -4x^3 & 0 & x^4\\
-10x^2 & 0 & 2y & 2x & -4xy & 19x^3 & -x^2 & -13x^4 & 2x^2y & 3x^5\\
-y & 1 & -3x & 0 & 3x^2 & 3xy & 0 & -3x^2y & -x^3 & x^3y\\
-x^3 & 4y & -6xy & -3x^2 & 12x^2y & 6x^4 & -4x^3 & -9x^5 & -2x^3y & 3x^6\\
-4xy & x & -6x^2 & 3y & 5x^3 & 12x^2y & -3xy & -11x^3y & 0 & 3x^4y
\end{pmatrix}$$

matrisidir.

Örnek 4.1.6 : $R=k\left[x,y,z\right]$ polinomlar cebiri ve I da $f=y^2-xz$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S=R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 2 dir. Sırasıyla $\Omega_1\left(S\right),\Omega_2\left(S\right)$ ve $\Omega_3\left(S\right)$'nin homolojik boyutunu bulalım.

$\Omega_1\left(S\right)$: F , bazı $\left\{\Delta_1\left(x\right),\Delta_1\left(y\right),\Delta_1\left(z\right)\right\}$ kümesi olan serbest S modül ve N de $\Delta_1\left(f\right)$ elemanı tarafından üretilen F nin bir alt S-modülü olsun.

$\Delta_1(f)=\Delta_1(y^2-xz)=2y\Delta_1(y)-z\Delta_1(x)-x\Delta_1(z)$ olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1(S)\simeq F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S)=2$ olduğu için $rankN=rankF-rank\Omega_1(S)=3-2=1$ olup N serbest S-modülüdür. O halde

$$0\to N\to F\to\Omega_1(S)\simeq F/N\to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_1(S)\le 1$ bulunur.

$\Omega_2(S):F'$, bazı

$\{\Delta_2(x^2),\Delta_2(xz),\Delta_2(xy),\Delta_2(z^2),\Delta_2(y^2),\Delta_2(yz),\Delta_2(x),\Delta_2(y),\Delta_2(z)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N' de $\Delta_2(f)$, $\Delta_2(xf)$ ve $\Delta_2(yf)$ elemanları tarafından üretilen F' nin bir alt S-modülü olsun. Burada ;

$$\Delta_2(f)=\Delta_2(y^2)-\Delta_2(xz)$$

$$\Delta_2(xf)=x\Delta_2(xy^2-x^2z)=-z\Delta_2(x^2)+x\Delta_2(y^2)+2y\Delta_2(xy)-2x\Delta_2(xz)+xz\Delta_2(x)-2xy\Delta_2(y)+x^2\Delta_2(z)$$

$$\Delta_2(yf)=\Delta_2(y^3-xyz)=3y\Delta_2(y^2)-z\Delta_2(xy)-y\Delta_2(xz)-x\Delta_2(yz)+yz\Delta_2(x)-2xz\Delta_2(y)+xy\Delta_2(z)$$

$$\Delta_2(zf)=\Delta_2(y^2z-xz^2)=z\Delta_2(y^2)-x\Delta_2(z^2)-2z\Delta_2(xz)+2y\Delta_2(yz)-z^2\Delta_2(x)-2yz\Delta_2(y)+xz\Delta_2(z)$$

olup Sonuç 3.1.3 den dolayı $\Omega_2(S)\simeq F'/N'$ dir.

$rank\Omega_2(S)=6$ olduğu için $rankN'=rankF'-rank\Omega_2(S)=10-6=4$ olup N' serbest S-modüldür. O halde

$$0\to N'\xrightarrow{\varphi}F'\xrightarrow{\pi}\Omega_2(S)\simeq F'/N'\to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_2(S)\le 1$ bulunur. Burada π doğal homomorfizma ve ϕ ise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & x & 0 & 2y & -2x & 0 & xz & -2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 3y & 0 & -z & -y & -x & yz & -2xz & xy & 0 \\ 0 & z & -x & 0 & -2z & 2y & z^2 & -2yz & xz & 0 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

$\Omega_3(S)$: F'' , bazı $\{\Delta_3(x^i y^j x^k) : i,j,k = 0,1,2,3 \quad 0 \le i+j+k \le 3\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'' de $\{\Delta_3(f), \Delta_3(xf), \Delta_3(yf), \Delta_3(zf), \Delta_3(x^2 f), \Delta_3(y^2 f),$ $\Delta_3(z^2 f), \Delta_3(xyf)\Delta_3(xzf)\Delta_3(yzf)\}$ aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen F'' nin bir alt dizisi S-modül olsun.

Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_3(S) \cong F''/N''$ dir.

$rank\Omega_3(S) = 4$ olduğu için $rankN'' = rankF'' - rank\Omega_3(S) = 20 - 10 = 10$

olup N'' serbest S- modüldür. O halde

$$0 \to N'' \to F'' \to \Omega_3(S) \simeq F''/N'' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd\Omega_2(S) \le 1$ bulunur.

Şimdi evrensel modüllerin homolojik boyutlarının sonlu olmadığını gösteren örnekler verelim.

Örnek 4.1.7 : $R = k[x,y,z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$, $g = yz - x^3$, $h = z^2 - x^2 y$ elemanları tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir

F , bazı $\{\delta_1(x), \delta_1(y), \delta_1(z)\}$ kümesi olan serbest S modül ve N de $\delta_1(f)$, $\delta_1(g)$, $\delta_1(h)$ elemanı tarafından üretilen F nin bir alt S-modülü olsun.

$$\delta_1(f) = \delta_1(y^2 - xz) = 2y\delta_1(y) - z\delta_1(x) - x\delta_1(z)$$
$$\delta_1(g) = \delta_1(yz - x^3) = z\delta_1(y) + y\delta_1(z) - 3x^2\delta_1(x)$$
$$\delta_1(h) = \delta_1(z^2 - x^2 y) = 2z\delta_1(z) - 2xy\delta_1(x) - x^2\delta_1(y)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1(S) \simeq F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3 - 2 = 1$ dir. O halde

$$0 \to N \xrightarrow{\theta} F \to \Omega_1(S) \simeq F/N \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Burada θ ,

$$\begin{pmatrix} -z & -3x^2 & -2xy \\ 2y & z & -x^2 \\ -x & y & 2z \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanırsa ;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & x^2 \\ -x & 0 & z \end{pmatrix}$$

matrisi ve buradan da

$$\begin{aligned} zr_2 + x^2 r_3 &= 0 \\ -xr_1 + zr_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Denklemin çözüm kümesi $\{(xy,-x^2,z),(x^2,z,y^2),(z,-y,x)\}$ dir.

$m=\{x,y,z\}$, S de maksimal ideal olsun. $m_1=(xy,-x^2,z)$, $m_2=(x^2,z,y^2)$, $m_3=(z,-y,x)$ denirse $m=\{x,y,z\}\simeq m_1S+m_2S+m_3S$ izomorfizması vardır. Böylece ;

$$0 \to m \to S^3 \to F \to \Omega_1(S) \to 0$$

S-modül tam dizisi elde edilir. S, regüler olmadığına göre $hd\Omega_1(S)=\infty$ bulunur.

Örnek 4.1.8 : $R=k[x,y]$ ve $S=k[z,t]$ polinomlar cebiri ve sırasıyla I , $f=y^2-x^3$ ve $g=t^2-z^3$ elemanları tarafından üretilen R ile S nin bir idealleri olsun. $R/I\otimes_k S/J\simeq k[x,y,z,t]/(y^2-x^3)$ izomorfizması vardır. Bu örnekte $\Omega_2(R/I\otimes_k S/J)$ modülünün homolojik boyutunun sonlu olduğunu görelim:

F, bazı $\{d_2(x^i,y^j,z^k):\ 1\le i+j+k+l\le 2\}$ kümesi olan serbest modül ve N de aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun. Burada ;

$$\begin{aligned} d_2(f) &= d_2(y^2)-3xd_2(x^2)+3x^2d_2(x) \\ d_2(g) &= d_2(t^2)-3xzd_2(x^2)+3z^2d_2(z) \\ d_2(xf) &= xd_2(y^2)+2yd_2(xy)+7x^3d_2(x)-2xyd_2(y)-6x^2d_2(x^2) \end{aligned}$$

$$d_2(yf) = 3yd_2(y^2) - x^3 d_2(y) - 3xyd_2(x^2) - 3x^2 yd_2(xy) + 6x^2 yd_2(x)$$
$$d_2(zf) = zd_2(y^2) + 2yd_2(yz) - 2yzd_2(y) - x^3 d_2(z) - 3xzd_2(x^2) + 6x^2 zd_2(x)$$
$$d_2(tf) = td_2(y^2) + 2yd_2(yt) + x^3 d_2(t) - 2ytd_2(y) - 3xtd_2(x^2) - 3x^2 zd_2(xt) +$$
$$6x^2 td_2(x)$$
$$d_2(xg) = xd_2(t^2) + 2td_2(xt) - 2xtd_2(t) - 2ytd_2(y) + z^3 d_2(x) - 3xzd_2(z^2) -$$
$$3z^2 td_2(xz) + 6z^2 xd_2(z)$$
$$d_2(yg) = yd_2(t^2) + 2td_2(yt) - 2ytd_2(t) + z^3 d_2(y) - 3yzd_2(z^2) - 3z^2 d_2(yz) +$$
$$6z^2 yd_2(z)$$
$$d_2(xg) = zd_2(t^2) + 2td_2(zt) + 7z^3 d_2(z) - 2ztd_2(t) - 5z^2 d_2(z^2)$$
$$d_2(tg) = 3td_2(t^2) - z^3 d_2(t) - ztd_2(z^2) - 3z^2 d_2(zt) + 6z^2 td_2(z)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_2(R/I \otimes_k S/J) \simeq F/N$ dir. O halde

$$0 \to N \to F \to \Omega_2(R/I \otimes_k S/J) \to 0$$

tam dizisi alınabilinir. Buradan $\mathrm{Im}\phi = N$ olacak şekilde

$$0 \to Çek\phi \to F' \xrightarrow{\phi} F \to \Omega_2(R/I \otimes_k S/J) \to 0$$

modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir. Burada ϕ homomorfizması ;

$$\begin{pmatrix}
-3x & 0 & 6x^2 & 3xy & 3xz & -3xt & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & x & 3y & z & w & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3z & 0 & 0 & 0 & 0 & -6z^2 & -3zt & -3xz & -3yz \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 3t & x & y \\
0 & 0 & 2y & -3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 0 & 0 & -3z^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 0 & 2t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 & -3z^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 & 2t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & -3z^2 & 0 & 0 \\
3x^2 & 0 & 7x^3 & 6x^2 y & 6x^2 z & 6x^2 t & 0 & 0 & z^3 & 0 \\
0 & 0 & -2xy & -x^3 & -2yz & -2yt & 0 & 0 & 0 & z^3 \\
0 & 3z^2 & 0 & 0 & x^3 & 0 & 7z^3 & 6z^2 t & 6xz^2 & 6yz^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & -2zt & -z^3 & -2xt & -2yt
\end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanırsa ;

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z & 3y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\{e_i :\ i = 1,...,8\}$ kümesi F' nün bazı ve $s_i \in R/I \otimes_k S/J$ olmak üzere $u = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 + s_4e_4 + s_5e_5 + s_6e_6 + s_7e_7 + s_8e_8 + s_9e_9 + s_{10}e_{10}$ elemanı *Çekϕ* nin elemanı olsun. Yukarıdaki matris kullanılırsa ;

$$2s_1 - ts_6 = 0$$

$$2s_2 - ys_{10} = 0$$

$$2xs_9 + 3ys_{10} = 0$$

$$2zs_5 + 3ys_6 = 0$$

$$ys_6 + ts_{10} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler $R/I \otimes_k S/J$ de çözülürse $Çek\phi = u(R/I \otimes_k S/J)$ olacak şekilde ;

$$u = t^2e_1 - y^2e_2 - 3z^2e_5 + 2te_6 + 3x^2e_9 - 2ye_{10}$$

bulunur. Böylece *Çekϕ* serbest modül olup

$$hd\left(\Omega_2\left(R/I \otimes_k S/J\right)\right) \le 2$$

dir.

Örnek 4.1.9 : $R = k[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$, $g = z^2 - x^3$ elemanları tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Sırasıyla $\Omega_1(S), \Omega_2(S)$ ve $\Omega_3(S)$ nin homolojik boyutunu bulalım.

$\Omega_1(S)$: F , bazı $\{\delta_1(x), \delta_1(y), \delta_1(z)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N de $\delta_1(f)$ ve $\delta_1(g)$ elemanı tarafından üretilen F nin bir alt S-modülü olsun.

$$\delta_1(f) = \delta_1(y^2 - z) = 2y\delta_1(y) - z\delta_1(x) - x\delta_1(z)$$
$$\delta_1(g) = \delta_1(z^2 - x^3) = 2z\delta_1(z) - 3x^2\delta_1(x)$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_1(S) \simeq F/N$ dir.

$rank\Omega_1(S) = 1$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_1(S) = 3 - 2 = 1$ olup N serbest S-modülüdür. O halde

$$0 \to N \to F \to \Omega_1(S) \simeq F/N \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu da $\Omega_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $hd\Omega_1(S) \leq 1$ bulunur.

$\Omega_2(S)$: F', bazı $\{\delta_2(x^2), \delta_2(y^2), \delta_2(xy), \delta_2(x), \delta_2(y), \delta_2(yz)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N' de aşağıdaki elemanları tarafından üretilen F' nin bir alt S-modülü olsun. Burada ;

$$\delta_2(f) = \delta_2(y^2) - 3x\delta_2(x^2) + 3x^2\delta_2(x) - x^3$$

$$\delta_2(g) = x\delta_2(y^2) - 6x^2\delta_2(x^2) + 2y\delta_2(xy) + 7x^3\delta_2(x) - 2xy\delta_2(y) - 2x^4$$

$$\delta_2(xf) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(yf) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(zf) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(xg) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(yg) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

$$\delta_2(zg) = 3y\delta_2(y^2) - 3xy\delta_2(x^2) - 3x^2\delta_2(xy) + 6x^2y\delta_2(x) - y^2\delta_2(y) - 2x^3y$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_2(S) \simeq F'/N'$ dir.

$rank\Omega_2(S) = 2$ olduğu için $rankN' = rankF' - rank\Omega_2(S) = 9 - 2 = 7$ dir. halde ;

$$0 \to N' \xrightarrow{\varphi} F' \xrightarrow{\pi} \Omega_2(S) \simeq F'/N' \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Buradan $\mathrm{Im}\phi = N'$ olacak şekilde

$$0 \to Çek\varphi \to S^8 \xrightarrow{\varphi} F' \to \Omega_2(S) \to 0$$

S – modül homomorfizmalarının tam dizisi elde edilir. Burada ϕ homomorfizmasını

$$\begin{pmatrix} -3x & 0 & -6x^2 & -3xy & -3xz & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & 3y & z \\ 1 & 0 & x & y & 3z & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 2y & -z & 0 \\ 0 & -1 & 2z & 0 & -3x^2 & -2x & -y & -2z \\ 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & -x & 2y \\ 3x^2 & 0 & 7x^3 & 6x^2y & 6x^2z & xz & yz & z^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & 0 & -2xy & -2xz & -2yz \\ 0 & 0 & -2xz & -2yz & -z^2 & x^2 & xy & xz \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 0 & 3z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\{e_i : i = 1,...,8\}$ kümesi S^8 in bazı ve $s_i \in S$ olmak üzere $u = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 + s_4e_4 + s_5e_5 + s_6e_6 + s_7e_7 + s_8e_8$ elemanı $Çek\phi$ nin elemanı olsun. Yukarıdaki matris kullanılırsa ;

$$s_1 = 0 \quad , \quad s_7 = 0$$
$$2s_2 - zs_8 = 0$$
$$2s_3 - s_8 = 0$$
$$zs_4 - ys_8 = 0$$
$$2zs_5 - xs_8 = 0$$
$$2xs_6 + 3zs_8 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler S de çözülürse $Çek\phi = u_1 S + u_2 S$ olacak şekilde ;

$$u_1 = z^2 e_2 + ze_3 - 2ye_4 + xe_5 - 3x^2 e_6 + 2ze_8$$
$$u_2 = x^2 yze_2 + x^2 ye_3 - 2z^2 e_4 + yze_5 - 3xye_6 + 2x^2 ye_8$$

bulunur. O halde $\{e_1', e_2'\}$ kümesi S^2 nin bazı olmak üzere $\psi(e_1') = u_1$ ve $\psi(e_2') = u_2$ olacak şekilde $\psi : S^2 \to Çek\phi$ $S-$modül homomorfizması tanımlanabilir. Bu homomorfizmanın çekirdeği ;

$$m_1 = -z^2 e_1' + ye_2'$$
$$m_2 = -yze_1' + xe_2'$$
$$m_3 = -x^2 e_1' + ze_2'$$

elemanları tarafından üretilir.

$m = (x, y, z)$, S de maksimal ideal olsun. O zaman $Çek\phi$ ile m maksimal ideali arasında izomorfizma vardır. Böylece ;

$$0 \to m \to S^2 \to S^8 \to F' \to \Omega_2(S) \to 0$$

S-modül tam dizisi alınabilinir. Bu ise $\Omega_2(S)$ nin homolojik boyutunun sonsuz olduğunu gösterir.

$\Omega_3(S)$: F'' , bazı $\left\{\delta_3\left(x^i y^j x^k\right) : i, j, k = 0,1,2,3 \quad 0 \le i + j + k \le 3\right\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N'' de $\left\{\delta_3(f), \delta_3(xf), \delta_3(yf), \delta_3(zf), \delta_3\left(x^2 f\right), \delta_3\left(y^2 f\right),\right.$ $\left.\delta_3\left(z^2 f\right), \delta_3(xyf), \delta_3(xzf), \delta_3(yzf)\right\}$ aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen F'' nin bir alt S-modülü olsun.

$$\delta_3(f) = \delta_3\left(y^2 - xz\right) = \delta_3\left(y^2\right) - \delta_3(xz) = 0$$
$$\delta_3(g) = \delta_3\left(z^2 - x^3\right) = \delta_3\left(z^2\right) - \delta_3\left(x^3\right) = 0$$
$$\delta_3(xf) = \delta_3\left(xy^2 - x^2 z\right) = \delta_3\left(xy^2\right) - \delta_3\left(x^2 z\right) = 0$$

$\delta_3(yf)=\delta_3(y^3-yxz)=\delta_3(y^3)-\delta_3(xyz)=0$

$\delta_3(zf)=\delta_3(y^2z-xz^2)=\delta_3(y^2z)-\delta_3(xz^2)=0$

$\delta_3(xg)=\delta_3(xz^2-x^4)=\delta_3(xz^2)-\delta_3(x^4)=\delta_3(xz^2)-4x\delta_3(x^3)+6x^2\delta_3(x^2)-4x^3\delta_3(x)+x^4$

$\delta_3(yg)=\delta_3(yz^2-yx^3)=\delta_3(yz^2)-\delta_3(yx^3)=\delta_3(yz^2)-3x\delta_3(x^2y)+3x^2\delta_3(xy)-y\delta_3(x^3)+3xy\delta_3(x^2)-3x^2y\delta_3(x)-x^3\delta_3(y)+x^3y$

$\delta_3(zg)=\delta_3(z^3-x^3z)=\delta_3(z^3)-\delta_3(x^3z)=\delta_3(z^3)-3x\delta_3(x^2z)-z\delta_3(x^3)+3x^2\delta_3(xz)+3xz\delta_3(x^2)-x^3\delta_3(z)-3x^2z\delta_3(x)+x^3z$

$\delta_3(xyf)=\delta_3(xy^3-x^2yz)=\delta_3(xy^3)-\delta_3(x^2yz)=-x\delta_3(y^3)+2y\delta_3(xy^2)-xy\delta_3(y^2)-y^2\delta_3(xy)+2xy^2\delta_3(y)-y^3\delta_3(x)-z\delta_3(x^2y)+x^2\delta_3(yz)+yz\delta_3(x^2)-x^2y\delta_3(z)$

$\delta_3(xzf)=\delta_3(xzy^2-x^2z^2)=\delta_3(xzy^2)-\delta_3(x^2z^2)=2y\delta_3(y^3)+x\delta_3(y^2z)+z\delta_3(xy^2)-2xy\delta_3(yz)-2yz\delta_3(xy)+2y^2\delta_3(y^2)-xy^2\delta_3(z)-y^2z\delta_3(x)+2y^3\delta_3(y)+x^2\delta_3(x^3)+z^2\delta_3(x^2)$

$\delta_3(yzf)=\delta_3(y^3z-xyz^2)=\delta_3(y^3z)-\delta_3(xyz^2)=-z\delta_3(y^3)+2y\delta_3(y^2z)-yz\delta_3(y^2)-y^2\delta_3(yz)+2y^2z\delta_3(y)-y^3\delta_3(z)+xy\delta_3(x^3)+z^2\delta_3(xy)-yz^2\delta_3(x)$

$\delta_3(xyg)=\delta_3(xyz^2-x^4y)=\delta_3(xyz^2)-\delta_3(x^4y)=2z\delta_3(y^3)-3x^2\delta_3(x^2y)+3x^2y\delta_3(x^2)-2xz\delta_3(yz)-2yz\delta_3(y^2)+4x^3\delta_3(xy)+2xyz\delta_3(z)-x^4\delta_3(y)-4x^3y\delta_3(x)+x^4y$

$\delta_3(xzg)=\delta_3(xz^3-x^4z)=\delta_3(xz^3)-\delta_3(x^4z)=-3x^2\delta_3(x^2z)+6xz\delta_3(x^3)-3x^2\delta_3(x^2z)-9x^2z\delta_3(x^2)+x^4\delta_3(z)+4x^3z\delta_3(x)+x^4z$

$\delta_3(yzg)=\delta_3(yz^3-x^3yz)=\delta_3(yz^3)-\delta_3(x^3yz)=-x^3\delta_3(yz)+x^3y\delta_3(z)+x^3z\delta_3(y)-3x^2\delta_3(y^3)+6xz\delta_3(x^2y)-2yz\delta_3(x^3)+3x^2y\delta_3(y^2)-3x^2z\delta_3(xy)-6xyz\delta_3(x^2)+3x^2yz\delta_3(x)-x^3yz$

$\delta_3(x^2f)=\delta_3(x^2y^2-x^3z)=\delta_3(x^2y^2)-\delta_3(x^3z)=2y\delta_3(x^2y)+2x^2\delta_3(y^2)-4xy\delta_3(xy)+2y^2\delta_3(x^2)-xy^2\delta_3(x)+2x^2y\delta_3(y)-z\delta_3(x^3)-\delta_3(x^2z)-x^3\delta_3(z)$

$\delta_3(y^2f)=\delta_3(y^4-xy^2z)=\delta_3(y^4)-\delta_3(xy^2z)=2y^3\delta_3(y)-x\delta_3(y^2z)+2y\delta_3(y^3)+2yz\delta_3(xy)-z\delta_3(xy^2)+2xy\delta_3(yz)-4y^2\delta_3(y^2)-y^2z\delta_3(x)-xy^2\delta_3(z)$

$\delta_3(z^2f)=\delta_3(y^2z^2-xz^3)=\delta_3(y^2z^2)-\delta_3(xz^3)=2y\delta_3(yz^2)+2z\delta_3(y^2z)+2y^2\delta_3(x^3)-4yz\delta_3(yz)+2z^2\delta_3(y^2)-y^2z\delta_3(z)+2yz^2\delta_3(y)-x\delta_3(z^3)-z^3\delta_3(x)$

$$\delta_3(x^2g)=\delta_3(x^2z^2-x^5)=\delta_3(x^2z^2)-\delta_3(x^5)=-3x^2\delta_3(x^3)+2z\delta_3(x^2z)+$$
$$7x^3\delta_3(x^2)-4xz\delta_3(y^2)+2x^2z\delta_3(z)-5x^4\delta_3(x)-x^5$$
$$\delta_3(y^2g)=\delta_3(y^2z^2)-\delta_3(y^2x^3)=\delta_3(y^2z^2-y^2x^3)=2z\delta_3(y^2z)-4yz\delta_3(yz)+$$
$$x^3\delta_3(y^2)+2y^2z\delta_3(z)-3x^2\delta_3(xy^2)+6x^2y\delta_3(xy)+3x^2y^2\delta_3(x)-2x^3y\delta_3(y)+x^3y^2$$
$$\delta_3(z^2g)=\delta_3(z^4-x^3z^2)=\delta_3(z^4)-\delta_3(x^3z^2)=4z\delta_3(z^3)-2x^3z\delta_3(z)-$$
$$6xz\delta_3(x^2z)+11x^2z\delta_3(y^2)-5x^3\delta_3(x^3)+12x^2z\delta_3(xz)+5x^4\delta_3(x^2)-9x^5\delta_3(x)+$$
$$3x^3z^2$$

olup Sonuç 4.1.3 den dolayı $\Omega_3(S)\simeq F''/N''$

$$0\to N''\xrightarrow{\varphi}F''\longrightarrow\Omega_3(S)\simeq F''/N''\to 0$$

S -modül tam dizisi alınabilinir. Burada φ homomorfizması

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&-4x&-y&-z&0&x^2&xy&0&6xz&-2yz&-z&0&2xz&-3x^2&0&-5z^2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-x&2y&-z&2z&0&-3x^2&0&2y&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-x&0&0&4z\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-3x&0&-z&0&0&-3x^2&0&6xz&2y&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-3x&0&0&0&0&-3x^2&0&-x&0&0&2z&0&-6xz\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2y&z&0&0&0&0&0&-z&0&0&-3x^2&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&x&2y&0&0&0&0&-x&2z&0&2z&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2y&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3x^2&0&-xz&-2yz&z^2&4z^2&0&-3x^2z&-4xy&2yz&0&0&6x^2y&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&x^2&-2xy&-xz&-2xz&0&-z^2&0&2xy&-4yz&0&-4yz&0\\
0&0&0&0&0&6x^2&3xy&3xz&yz&z^2&0&3x^2y&-9x^2z&-6xyz&2xz&0&0&7z^2&0&5xz^2\\
0&0&0&0&0&0&0&3x^2&-xy&2xz&-yz&-2yz&2z^2&3x^2y&2x^2&-4xz&2z^2&-4xz&z^2&11x^2z\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-4z^2&-3x^2y&-3x^2z&-xyz&-xz^2&-yz^2&-4yz^2&4z^3&3x^2yz&-x^2z&-xz^2&-z^3&-5xz^2&3z^3&-9x^2z^2\\
0&0&0&0&0&0&-z^2&0&2x^2z&2xyz&2xz^2&-xz^2&0&z^3&2x^2y&2xyz&2yz^2&0&-2yz^2&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-z^2&-x^2y&-x^2z&-xyz&2xyz&xz^2&yz^2&-z^2&-x^2z&-xz^2&2x^2z&2xz^2&-2z^3\\
0&0&0&0&0&xz^2&yz^2&z^3&0&0&0&xyz^2&xz^3&-yz^3&0&0&0&-x^2z^2&xz^3&3z^4
\end{pmatrix}
$$

matrisidir. Bu matrise macaulay2 [4] matematik programı kullanılarak elementer satır işlemleri yapılırsa.

```
F:\Macaulay2\bin>"F:\Macaulay2\bin\Macaulay2" -ephase=1
"F:/Macaulay2/m2/setup.m2" -ephase=0 -erunStartFunctions()
Macaulay 2, version 0.8.52b
  Copyright 1993-1999, all rights reserved, D. R. Grayson and M. E. Stillman
  Factory 1.2c from Singular, copyright 1993-1997, G.-M. Greuel, R. Stobbe
  Factorization and characteristic sets 0.3.1, copyright 1996, M. Messollen
  GC, copyright 1996, Hans-J. Boehm, Alan J. Demers, Xerox, Silicon Graphics
  GNU libc and libg++, copyright 1996, Free Software Foundation
  GNU MP, copyright 1996, Free Software Foundation
--loading source code...

i1 : R=QQ[x,y,z]

o1 = R

o1 : PolynomialRing

i2 : I=ideal(y^2-x*z,z^2-x^3)

             2          3    2
o2 = ideal (y  - x*z, - x  + z )

o2 : Ideal of R

i3 : S=R/I

o3 = S

o3 : QuotientRing

i4 : p=matrix{{0,0,0,0,0,-4*x,-y,-z,0,x^2,x*y,0,6*x*z,-2*y*z,-z,0,2*y^2,-3*x^2,0
,-5*x^3},{0,0,0,0,0,0,0,0,-x,2*y,-z,2*z,0,-3*x^2,0,2*y,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,0,1,0,
0,0,0,0,0,0,0,-x,0,0,4*z},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,-3*x,
0,-z,0,0,-3*x^2,0,6*x*z,2*y,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,0,-3*x,0,0,0,0,-3*x^2,0,-x,0,    0,
2*z,0,-6*x*z},{0,0,0,0,0,0,0,0,2*y,z,0,0,0,0,0,-z,0,0,-3*x^2,0},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,   x,
2*y,0,0,0,0,-x,2*z,0,2*z,0},{0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,  0,0,0,1,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,2*y,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,3*x^2,0,-y^2,-2*y*z,z^2,4*x^3,0,   -3*x^2*z,-
4*x*y,2*y*z,0,0,6*x^2*y,0},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,0,
0,x^2,-2*x*y,-y^2,-2*x*z,0,-x^3,0,2*x*y,-4*y*z,0,-4*y*z,0},{0,0,0,0,0,6*x^2,
3*x*y,3*x*z,y*z,z^2,0,3*x^2*y,-9*x^2*z,-6*y^3,2*y^2,0,0,7*x^3,0,5*x*z^2},
{0,0,0,0,0,0,0,3*x^2,-x*y,2*y^2,-y*z,-2*y*z,2*x^3,3*x^2*y,2*x^2,-4*y^2,2*z^2,
-4*x*z,x^3,11*x^2*z},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,-4*x^3,
-3*x^2*y,-3*x^2*z,-y^3,-y^2*z,-y*z^2,-4*x^3*y,4*x^3*z,3*x^2*y*z,-x*y^2,
-y^2*z,-z^3,-5*x^4,3*x^2*y^2,-9*x^2*z^2},{0,0,0,0,0,0,-x^3,0,2*x*y^2,2*y^3,
2*y^2*z,-x^4,0,x^3*z,2*x^2*y,2*y^3,2*y*z^2,0,-2*x^3*y,0},{0,0,0,0,0,0,0,-x^3,
-x^2*y,-x*y^2,-y^3,2*x*y*z,x^4,x^3*y,-x^3,-x*y^2,-y^2*z,2*x^2*z,2*y^2*z,-
2*x^3*z},{0,0,0,0,0,x^4,x^3*y,x^3*z,0,0,0,x^4*y,x^4*z,-x^3*y*z,0,0,0,-x^5,
x^3*y^2,3*x^3*z^2}}
```

```
o4 = {0} | 0 0 0 0 0 -4x  -y    -z    0    x2    xy   0    6xz   -2yz  -z   0 2xz  -3x2  0 -5z2 |
     {0} | 0 0 0 0 0 0     0     0  -x    2y    -z  2z    0    -3x2    0  2y 0    0     0     0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     1     0    0     0    0     0     0     0   0 -x   0     0     4z    |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     0     0    0     0    0     0     0     0   0 0    0     0     0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0   -3x   0    -z   0     0    -3x2  0    6xz   2y   0 0    0     0     0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0    -3x   0    0     0    0    -3x2  0    -x   0 0    2z    0    -6xz  |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     0    2y   z     0    0     0     0     0   -z 0   0    -3x2  0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     0     0    x    2y   0     0     0     0   -x 2z  0     2z    0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 1    0     0     0    0     0    0     0     0     0   0 0    0     0     0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    1     0     0    0     0    0     0     0     0   0 2y   0     0     0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0  3x2    0 -xz  -2yz z2    4z2   0-3x2z -4xy 2yz 0    0   6x2y  0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     0     0    0     0    0     0     0     0   0 0    0     0     0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     0   x2   -2xy -xz  -2xz  0  -z2   0    2xy -4yz 0  -4yz  0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 6x2  3xy 3xz   yz   z2 0 3x2y  -9x2z -6xyz 2xz  0 0  7z2 0 5xz2  |
     {0} | 0 0 0 0 0 0 0  3x2 -xy 2xz -yz -2yz 2z2 3x2y  2x2 -4xz 2z2-4xz z2 11x2z  |
     {0} | 0 0 0 0 0 0    0     0     0    0     0    0     0     0     0   0 0    0     0     0     |
     {0}  | 0  0  0  0  0-4z2-3x2y-3x2z-xyz-xz2-yz2-4yz2 4z3 3x2yz -x2z-xz2-z3-5xz2
3z3   -9x2z2 |
     {0} | 0 0 0 0 0 0 -z2 0 2x2z 2xyz 2xz2 -xz2  0 z3  2x2y 2xyz 2yz2 0 -2yz2 0     |
     {0} | 0 0 0 0 0 0 0 -z2-x2y-x2z -xyz 2xyz  xz2yz2-z2-x2z-xz2 2x2z  2xz2  -2z3 |
     {0} | 0 0 0 0 0 xz2   yz2    z3  0 0 0 xyz2  xz3   -yz3  0 0 0   -x2z2 xz3    3z4    |

          20       20
o4 : Matrix S   <--- S

i5 : p1=p^{0}

o5 = {0} | 0 0 0 0 0 -4x -y -z 0 x2 xy 0 6xz -2yz -z 0 2xz -3x2 0 -5z2 |

          1       20
o5 : Matrix S  <--- S

i6 : p2=p^{1}

o6 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -x 2y -z 2z 0 -3x2 0 2y 0 0 0 0 |

          1       20
o6 : Matrix S  <--- S

i7 : p3=p^{2}

o7 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 -x 0 0 4z |

          1       20
o7 : Matrix S  <--- S

i8 : p4=p^{3}

o8 = 0
```

```
            1       20
o8 : Matrix S  <--- S

i9 : p5=p^{4}

o9 = {0} | 0 0 0 0 0 0 -3x 0 -z 0 0 -3x2 0 6xz 2y 0 0 0 0 0 |

            1       20
o9 : Matrix S  <--- S

i10 : p6=p^{5}

o10 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 -3x 0 0 0 0 -3x2 0 -x 0 0 2z 0 -6xz |

             1       20
o10 : Matrix S  <--- S

i11 : p7=p^{6}

o11 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 2y z 0 0 0 0 0 -z 0 0 -3x2 0 |

             1       20
o11 : Matrix S  <--- S

i12 : p8=p^{7}

o12 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 x 2y 0 0 0 0 -x 2z 0 2z 0 |

             1       20
o12 : Matrix S  <--- S

i13 : p9=p^{8}

o13 = {0} | 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |

             1       20
o13 : Matrix S  <--- S

i14 : p10=p^{9}

o14 = {0} | 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2y 0 0 0 |

             1       20
o14 : Matrix S  <--- S

i15 : p11=p^{10}

o15 = {0} | 0 0 0 0 0 0 3x2 0 -xz -2yz z2 4z2 0 -3x2z -4xy 2yz 0 0 6x2y 0 |
```

```
             1       20
o15 : Matrix S  <--- S

i16 : p12=p^{11}

o16 = 0

             1       20
o16 : Matrix S  <--- S

i17 : p13=p^{12}

o17 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 x2 -2xy -xz -2xz 0 -z2 0 2xy -4yz 0 -4yz 0 |

             1       20
o17 : Matrix S  <--- S

i18 : p14=p^{13}

o18 = {0} | 0 0 0 0 0 6x2 3xy 3xz yz z2 0 3x2y -9x2z -6xyz 2xz 0 0 7z2 0 5xz2 |

             1       20
o18 : Matrix S  <--- S

i19 : p15=p^{14}

o19 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 3x2 -xy 2xz -yz -2yz 2z2 3x2y 2x2 -4xz 2z2 -4xz z2 11x
2z |

             1       20
o19 : Matrix S  <--- S

i20 : p16=p^{15}

o20 = 0

             1       20
o20 : Matrix S  <--- S

i21 : p17=p^{16}

o21 = {0} | 0 0 0 0 0 -4z2 -3x2y -3x2z -xyz -xz2 -yz2 -4yz2 4z3 3x2yz -x2z -xz2
-z3 -5xz2 3z3 -9x2z2 |

             1       20
o21 : Matrix S  <--- S

i22 : p18=p^{17}

o22 = {0} | 0 0 0 0 0 0 -z2 0 2x2z 2xyz 2xz2 -xz2 0 z3 2x2y 2xyz 2yz2 0 -2yz2 0
```

|

```
            1       20
o22 : Matrix S  <--- S

i23 : p19=p^{18}

o23 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 -z2 -x2y -x2z -xyz 2xyz xz2 yz2 -z2 -x2z -xz2 2x2z 2xz
2 -2z3 |

            1       20
o23 : Matrix S  <--- S

i24 : p20=p^{19}

o24 = {0} | 0 0 0 0 0 xz2 yz2 z3 0 0 0 xyz2 xz3 -yz3 0 0 0 -x2z2 xz3 3z4 |

            1       20
o24 : Matrix S  <--- S

i25 : p1=4*x*p9+p1

o25 = {0} | 0 0 0 0 0 0 -y -z 0 x2 xy 0 6xz -2yz -z 0 2xz -3x2 0 -5z2 |

            1       20
o25 : Matrix S  <--- S

i26 : p14=-6*x^2*p9+p14

o26 = {0} | 0 0 0 0 0 0 3xy 3xz yz z2 0 3x2y -9x2z -6xyz 2xz 0 0 7z2 0 5xz2 |

            1       20
o26 : Matrix S  <--- S

i27 : p17=4*x^3*p9+p17

o27 = {0} | 0 0 0 0 0 0 -3x2y -3x2z -xyz -xz2 -yz2 -4yz2 4z3 3x2yz -x2z -xz2 -z3
 -5xz2 3z3 -9x2z2 |

            1       20
o27 : Matrix S  <--- S

i28 : p20=-x^4*p9+p20

o28 = {0} | 0 0 0 0 0 0 yz2 z3 0 0 0 xyz2 xz3 -yz3 0 0 0 -x2z2 xz3 3z4 |

            1       20
o28 : Matrix S  <--- S

i29 : p1=y*p10+p1
```

```
o29 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 -z 0 x2 xy 0 6xz -2yz -z 0 4xz -3x2 0 -5z2 |

             1       20
o29 : Matrix S  <--- S

i30 : p5=3*x*p10+p5

o30 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 -z 0 0 -3x2 0 6xz 2y 0 6xy 0 0 0 |

             1       20
o30 : Matrix S  <--- S

i31 : p11=-3*x^2*p10+p11

o31 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 -xz -2yz z2 4z2 0 -3x2z -4xy 2yz -6x2y 0 6x2y 0 |

             1       20
o31 : Matrix S  <--- S

i32 : p14=-3*x*y*p10+p14

o32 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 3xz yz z2 0 3x2y -9x2z -6xyz 2xz 0 -6x2z 7z2 0 5xz2 |

             1       20
o32 : Matrix S  <--- S

i33 : p17=3*x^2*y*p10+p17

o33 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 -3x2z -xyz -xz2 -yz2 -4yz2 4z3 3x2yz -x2z -xz2 5z3 -5x
z2 3z3 -9x2z2 |

             1       20
o33 : Matrix S  <--- S

i34 : p18=x^3*p10+p18

o34 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 2x2z 2xyz 2xz2 -xz2 0 z3 2x2y 2xyz 4yz2 0 -2yz2 0 |

             1       20
o34 : Matrix S  <--- S

i35 : p20=-x^3*y*p10+p20

o35 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 z3 0 0 0 xyz2 xz3 -yz3 0 0 -2xz3 -x2z2 xz3 3z4 |

             1       20
o35 : Matrix S  <--- S

i36 : p1=z*p3+p1
```

```
o36 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 x2 xy 0 6xz -2yz -z 0 3xz -3x2 0 -z2 |

             1       20
o36 : Matrix S  <--- S

i37 : p6=3*x*p3+p6

o37 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -3x2 0 -x 0 -3x2 2z 0 6xz |

             1       20
o37 : Matrix S  <--- S

i38 : p14=-3*x*z*p3+p14

o38 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 yz z2 0 3x2y -9x2z -6xyz 2xz 0 -3x2z 7z2 0 -7xz2 |

             1       20
o38 : Matrix S  <--- S

i39 : p15=-3*x^2*p3+p15

o39 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 -xy 2xz -yz -2yz 2z2 3x2y 2x2 -4xz 5z2 -4xz z2 -x2z
|

             1       20
o39 : Matrix S  <--- S

i40 : p17=3*x^2*z*p3+p17

o40 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 -xyz -xz2 -yz2 -4yz2 4z3 3x2yz -x2z -xz2 2z3 -5xz2 3
z3 3x2z2 |

             1       20
o40 : Matrix S  <--- S

i41 : p19=x^3*p3+p19

o41 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 -x2y -x2z -xyz 2xyz xz2 yz2 -z2 -x2z -2xz2 2x2z 2xz2
 2z3 |

             1       20
o41 : Matrix S  <--- S

i42 : p20=-x^3*z*p3+p20

o42 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 xyz2 xz3 -yz3 0 0 -xz3 -x2z2 xz3 -z4 |

             1       20
o42 : Matrix S  <--- S
```

```
i43 : p19=y*p13+p19

o43 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -3x2z -2xyz 0 xz2 0 -z2 x2z -6xz2 2x2z -2xz2 2z3 |


            1       20
o43 : Matrix S  <--- S

i44 : p17=y*p11+p17

o44 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 -2xyz -3xz2 0 0 4z3 0 -5x2z xz2 -4z3 -5xz2 9z3 3x2z2
 |

            1       20
o44 : Matrix S  <--- S

i45 : p18=2*y*p15+p18

o45 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 6xyz 0 -5xz2 4yz2 7z3 6x2y -6xyz 14yz2 -8xyz 0 -2x
2yz |

            1       20
o45 : Matrix S  <--- S

i46 : p15=-y*p2+p15

o46 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4yz 2z2 6x2y 2x2 -6xz 5z2 -4xz z2 -x2z |

            1       20
o46 : Matrix S  <--- S

i47 : p11=-z*p2+p11

o47 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4yz 2z2 2z2 0 0 -4xy 0 -6x2y 0 6x2y 0 |

            1       20
o47 : Matrix S  <--- S

i48 : p13=x*p2+p13

o48 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2xz 0 0 -4z2 0 4xy -4yz 0 -4yz 0 |

            1       20
o48 : Matrix S  <--- S

i49 : p14=y*p5+p14

o49 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 z2 0 0 -9x2z 0 4xz 0 3x2z 7z2 0 -7xz2 |
```

```
             1       20
o49 : Matrix S  <--- S

i50 : p17=3*x*z*p7+p17

o50 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 4xyz 0 0 0 4z3 0 -5x2z -2xz2 -4z3 -5xz2 0 3x2z2 |

             1       20
o50 : Matrix S  <--- S

i51 : p18=-2*y*p15+p18

o51 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 6xyz 0 3xz2 0 -5z3 2x2y 6xyz 4yz2 0 -2yz2 0 |

             1       20
o51 : Matrix S  <--- S

i52 : p14=-3*z*p6+p14

o52 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 z2 0 0 0 0 7xz 0 12x2z z2 0 -25xz2 |

             1       20
o52 : Matrix S  <--- S

i53 : p19=3*x*z*p8+p19

o53 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4xyz 0 xz2 0 -z2 -2x2z 0 2x2z 4xz2 2z3 |

             1       20
o53 : Matrix S  <--- S

i54 : p13=2*y*p8+p13

o54 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2xy 2xz 0 0 -4z2 0 2xy 0 0 0 0 |

             1       20
o54 : Matrix S  <--- S

i55 : p18=-3*z*p13+p18

o55 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -6xz2 3xz2 0 7z3 2x2y 0 4yz2 0 -2yz2 0 |

             1       20
o55 : Matrix S  <--- S

i56 : p15=2*x*p6+p15

o56 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4yz -4z2 6x2y 0 -6xz -z2 0 z2 11x2z |

             1       20
```

o56 : Matrix S <--- S

i57 : p19=-x^2*p6+p19

o57 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4xyz 0 4xz2 0 0 -2x2z 3xz2 0 4xz2 -4z3 |

1 20
O57 : Matrix S <--- S

i58 : p17=-5*x*z*p6+p17

o58 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 4xyz 0 0 0 19z3 0 0 -2xz2 11z3 -15xz2 0 -27x2z2 |

1 20
O58 : Matrix S <--- S

i59 : p15=x*z*p15+4*p20

o59 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2yz3 0 -6x2z2 -5xz3 -4x2z2 5xz3 7z4 |

1 20
O59 : Matrix S <--- S

i60 : p1=-2*y*p1+x*p13

o603 = {0} | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -12xyz 0 2yz 2x2y -6xyz 6x2y 0 2yz2 |

1 20
o60 : Matrix S <--- S

Sonuçta ;

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12xyz & 0 & 2yz & 2x^2y & -6xyz & 6x^2y & 0 & 2yz^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 2y & -z & 2z & 0 & -3x^2 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 4z \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 6xz & 2y & 0 & 6xy & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & -x & 0 & -3x^2 & 2z & 0 & 6xz \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & -3x^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 2z & 0 & 2z & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4yz & 2z^2 & 2z^2 & 0 & 0 & -4xy & 0 & -6x^2y & 0 & 6x^2y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2xy & 2xz & 0 & 0 & -4z^2 & 0 & 2xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 7x & 0 & 12x^2 & z & 0 & -25xz \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2yz & 0 & -6x^2 & -5xz & -4x^2 & 5xz & 7z^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4xy & 0 & 0 & 0 & 19z^2 & 0 & 0 & -2xz & 11z^2 & -15xz & 0 & -27x^2z \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6xz^2 & 3xz^2 & 0 & 7z^3 & 2x^2y & 0 & 4yz^2 & 0 & -2yz^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4xy & 0 & 4xz & 0 & 0 & -2x^2 & 3xz & 0 & 4xz & -4z^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & xz & -yz & 0 & 0 & -xz & -x^2 & xz & -z^2
\end{pmatrix}
$$

matrisi elde edilir. Bu matristen $\Omega_3(S)$ nin homolojik boyutunun sonsuz olduğu tahmin edilmektedir. Henüz Evrensel Modüllerin Homolojik Boyutunu bulunması problemi tam olarak çözülmemiştir. Bu konuda çalışmalar devam etmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Bushbaum, D.A. ve Auslander M. (1956*),* Homological Dimension in Local Rings, *Proc.Not.Acad.Sci. USA*, 42.

[2] Erdoğan, A. (1993), Differential Operators and Their Universal Modules, *Phd. Thesis, Universty of Leeds*.

[3] Erdoğan, A. ve Çimen, N. (1999), Projective Dimension of the Universal Modules fort he Product of a Hypersurface and Affine T-Space. *Comm.Algebra,* 27(10), 4737-4741.

[4] Macaluay2 (1996), Free Software Foundation

[5] Matsuoka, T. (1987), On Almost Complete Intersections*, Manuscript Math.* 21, 329-340.

[6] McConnell, J.C. and Rabson, J.C. (1987), Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience.*

[7] Nakai, Y. (1970), High Order Derivations*, Osaka J. Math.* 7, 1-27.

[8] Nakai, Y. (1961), On The Theory of Differantials in Commutative Rings*, J. Math.Soc.Japon* 13, 63-84.

[9] Olgun, N. (2005), Sonlu Üretilmiş Cebirlerin Evrensel Diferansiyel Modülleri*,* Hacettepe Üniversitesi, 4-15, 22-31.

[10] Osborn, H. (1967), Modules of Differentials I, *Math. Ann.* 170, 221-244.

[11] Osborn, H. (1968), Modules of Differentials II, *Math.Ann.*175, 146-158.

[12] Sweedler, M.E. ve Heyneman, R.G. (1969), Affine Hopf Algebras, *J.Algebra* 13, 192-241.

[13] Sweedler, M.E. (1975), *Groups of Simple Algebras,* Publ. Math. 44, 79-188

[14] Vasconcelos, W.V. (1968), A Note On Normality and The Module of Differentials, *Math. Z.* 105, 291-293.

[15] Vasconcelos, W.V. (1978), On The Homology of I/I^2, *Comm. Algebra* 6(17), 180-189.