GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN UYGUN GAUSS VE FİLON TİPİ İNTEGRASYON METOTLARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LEYLA KAYA
AĞUSTOS 2009

Bazı Yüksek Salınımlı İntegraller İçin Uygun Gauss ve Filon Tipi İntegrasyon Metotları

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK

LEYLA KAYA
AĞUSTOS 2009

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : Bazı Yüksek Salınımlı İntegraller İçin Uygun Gauss ve Filon Tipi İntegrasyon Metotları
Öğrencinin Adı Soyadı : Leyla KAYA
Tez Savunma Tarihi : 03.08.2009

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzası
1. Prof. Dr. İbrahim GÜZELBEY	………………
2. Doç. Dr. A. İhsan HASÇELİK	………………
3. Doç. Dr. Metin BEDİR	………………
4. Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	………………
5. Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	………………

En karanlık günlerimi

ışıklarla dolduran

anneme ve babama ithafen...

ÖZET

BAZI YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN UYGUN GAUSS VE FILON TİPİ İNTEGRASYON METOTLARI

KAYA, Leyla

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Ali İhsan Hasçelik

Ağustos 2009, 55 sayfa

$f(x)$, $[0,1]$-aralığı üzerinde yeterince düzgün bir fonksiyon, $g(x)=1/x^r$, r ve ω pozitif sayılar olmak üzere

(A) $$\int_0^1 f(x)\sin[\omega g(x)]\,dx \quad \text{veya} \quad \int_0^1 f(x)\cos[\omega g(x)]\,dx$$

formundaki integrallerin Newton-Cotes, Gauss-Legendre, Clenshaw-Curtis gibi geleneksel nümerik integrasyon metotları ile, kabul edilebilir sayıda nokta kullanılarak, yeterli duyarlılıkta hesaplanması mümkün değildir.

Bu çalışmada, yüksek salınımlı integralleri hesaplamak için kullanılan Filon, Levin ve asimptotik açılıma dayalı metotlar incelenmiş ve daha önceki çalışmalarda oluşturulan ve (A) formundaki integralleri yüksek duyarlılıkla hesaplayabilen Gauss tipi metotlar g fonksiyonunun $g(x)=1/[(x-x_1)^{r1}(x-x_2)^{r2}]$ şeklinde olduğu durum için genelleştirilmiştir. Ayrıca (A) tipindeki integrallerde $x=1/t$ değişken değişimi yapılarak elde edilen integralleri hesaplamak için uygun Filon tipi metotlar geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gauss integrasyon metodu, Yüksek salınımlı integraller, Filon-tipi metotlar, Levin-tipi metotlar, Asimptotik metotlar.

ABSTRACT

SUITABLE GAUSS AND FILON-TYPE QUADRATURE METHODS FOR SOME HIGHLY OSCILLATORY INTEGRALS

KAYA Leyla
M. Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
August 2009, 55 pages

By the traditional quadrature rules/methods such as Newton-Cotes, Gauss-Legendre, or Clenshaw-Curtis, with the use of an acceptable number of quadrature nodes, it is not possible to obtain accurate approximations to integrals of the form

(A) $$\int_0^1 f\left(x\right)\sin[\omega g(x)\,]dx \quad \text{or} \quad \int_0^1 f\left(x\right)\cos[\omega g(x)]\,dx$$

in general, where ω and r are given positive numbers, $g(x)=1/x^r$, and f is a sufficiently smooth function on the interval $[0,1]$.

In this work, the efficient quadrature methods (Filon, Levin, Asymptotic) to compute highly oscillatory integrals are investigated and the Gauss quadrature rules developed at previous studies, which give very accurate results for (A), are generalized to compute the integrals (A) with $g(x)=1/[(x-x_1)^{r1}(x-x_2)^{r2}]$ accurately. In addition, appropriate Filon-type methods are presented for the computation of integrals obtained by the change of variable $x=1/t$ in (A).

Key words: Gauss quadrature methods, Highly oscillatory integrals, Filon-type methods, Levin-type methods, Asymptotic methods.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca karşılaştığım tüm zorlukları aşmama yardımcı olan, hem lisans hem de yüksek lisans çalışmalarım boyunca bilgisiyle daima yol gösterici olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK' e ve destekleriyle her zaman yanımda olduklarını hissettiren aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

1. BÖLÜM
GİRİŞ

İntegrantı $\psi(x)\exp\left(i\omega g(x)\right)$ tipinde olan yüksek salınımlı integrallere çekirdek kimyası, elektrodinamik, akışkanlar mekaniği, fizik ve mühendislik alanlarında sıkça rastlanmaktadır. Bu alanlarda bazı özel fonksiyonlar yüksek salınımlı integrallerle gösterilir. Örneğin,

- Airy fonksiyonları

$$Ai(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\left(t^3/3\right)+xt\right)dt$$

- Bessel ve Hankel fonksiyonları

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos\left(nt-x\sin t\right)dt$$

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(x\sin t-nt\right)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[e^{nt}+(-1)^n e^{-nt}\right]e^{-x\sinh t}dt$$

$$H_n^{(1)}(x)=J_n(x)+iY_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x)=J_n(x)-iY_n(x)$$

- Hata fonksiyonu (z kompleks sayısı için)

$$erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

seklindedir.

$\omega\gg 1$, ψ ve g, $[a,b]$ integrasyon aralığı üzerinde yeterince düzgün olduğunda integralin doğru hesaplanmasında etkili integrasyon kuralları olmasına rağmen $\omega\approx 1$ ve g, $[a,b]$ üzerinde tekilliğe sahip olduğunda bu kurallar (metotlar) yeterince doğru sonuçlar vermezler [1,2].

r ve ω pozitif reel sayılar ve f, $[0,1]$ üzerinde salınımlı olmayan yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$I_s[r,\omega;f]=\int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{\omega}{x^r}\right)dx \tag{1.1}$$

$$I_c[r,\omega;f]=\int_0^1 f(x)\cos\left(\frac{\omega}{x^r}\right)dx \tag{1.2}$$

integralleri için standart integrasyon formülleri (Gauss-Jacobi, Clenshaw-Curtis, Newton-Cotes gibi) $\sin(\omega/x^r)$ ve $\cos(\omega/x^r)$ fonksiyonlarının orijin civarında yoğun salınımlı davranışı nedeniyle yeterince doğru sonuçlar vermezler. Örneğin,

$$I_a=\int_0^1 \frac{1}{x^2+10^{-2}}\sin\frac{1}{x^8}dx \tag{1.3}$$

integrali için $[0,1]$ aralığı üzerinde n' nin büyük değerleri için $n-$nokta Gauss-Legendre kuralı ve $Q_n^F[f]$ (eşit aralıklara dayalı noktalarda sadece fonksiyonun değerlerini kullanır) ve $Q_{n/2}^F[f,f']$ ($n/2$ fonksiyon değerlerini ve $n/2$ fonksiyonun türevinin değerlerini kullanır) Filon-tipi metotlar kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 1.1' de verilmiştir.

Tablo 1.1 (1.3) integrali için Gauss-tipi ve Filon-tipi metotların sonuçları

Metot	n	I_a
$n-$*nokta Gauss*$-$*Legendre*	500	0,56120645231825
	1001	0,92691949651778
$Q_n^F[f]$	36	0,07828866008616
	72	0,07829137343354
$Q_{n/2}^F[f,f']$	$18+18$	0,07826788814287
Gauss$-$*Gautschi*	36	$-12{,}884585240412$
	100	$-12{,}148274122598$
Gauss$-$*Hasçelik*	36	0,07829142323198
	Gerçek değer	0,07829142323198

Altı çizili basamaklar, doğru basamak sayısını göstermektedir. Tablo 1.1’ den görüldüğü gibi n-nokta Gauss-Legendre kuralıyla 1001 nokta kullanılmasına rağmen sadece 1 basamak doğru sonuç elde edilmiştir. Filon metotları daha iyi netice vermesine rağmen yeterli doğruluk sağlanamamıştır. Bütün bu nümerik hesaplamalar (1.1) ve (1.2) integrallerine doğru yaklaşımlar elde etmenin zor olduğunu gösterir. Ancak tablodan da görüldüğü gibi, W. Gautschi [3] tarafından $r=\omega=1$ durumu için önerilen çalışmadan esinlenerek, A. İ. Hasçelik tarafından geliştirilen Gauss metodu [1] (Gauss-Hasçelik) ile 36 nokta kullanılarak 15 basamağa kadar doğru sonuç elde edilmiştir. Tablo 1.1’ deki nümerik sonuçlar [1]’ den alınmıştır. Tablodaki Gauss-Gautschi, $x^r=\omega t$ değişken değişikliği yapılmasıyla verilen integralin $r=\omega=1$ durumuna getirilerek uygulanmasından elde edilen sonucu gösterir. Ancak I_a integralinde $r>1$ ve $f(0)\neq 0$ olduğundan bu değişken değişikliği integrantın salınımlı olmayan kısmını orijinde tekil yapar, bu durumda Gauss-Gautschi kuralları Tablo 1.1’ de görüldüğü gibi doğru olmayan sonuçlar verir.

Genelde integrasyon aralığı sınırlı iken, $\omega \gg 1$ büyük bir sabit olduğunda integrantı $f(x)\exp(i\omega g(x))$ formundaki yüksek salınımlı integrallerin hesabı için integrasyon metotları vardır. Bu metotlar,

- Levin-tipi metotlar
- Filon- tipi metotlar
- Asimptotik açılım tabanlı metotlar: Asimptotik metotlardır. İkinci bölümde bu metotlara yer verilmiştir.

(1.1) ve (1.2) integralleri için Levin-tipi metotlar, Filon-tipi metotlar ve Asimptotik metotlar standart integrasyon formüllerinden (Gauss-Jacobi, Clenshaw-Curtis, Newton-Cotes gibi) daha iyi sonuç vermesine rağmen, $g(x)=1/x^r$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde tekilliğe sahip olduğundan, bu metotlar

$$w_s(r,\omega;t)=1+\sin\left(\frac{\omega}{t^r}\right) \tag{1.4}$$

$$w_c(r,\omega;t)=1+\cos\left(\frac{\omega}{t^r}\right) \tag{1.5}$$

ağırlık fonksiyonlarına göre oluşturulan Gauss integrasyon metotları [1] kadar doğru sonuç vermezler. Beşinci bölümdeki Tablo 5.1.3 ve Tablo 5.1.4, bu ağırlık fonksiyonlarına göre oluşturulan Gauss metotları ile Filon-tipi metotlardan elde edilen sonuçları karşılaştırmak amacıyla verilmiştir. (1.4)' e bağlı (ya da (1.5)' e bağlı) Gauss integrasyon kuralını kurmak için (1.4) (ya da (1.5)) ile ilgili olarak ortogonal polinomların üç terimli yineleme katsayılarına ihtiyaç vardır. Fakat bu katsayılar analitik olarak elde edilememektedir. Bu yüzden bunları yaklaşık olarak hesaplamak için uygun metotlar kullanılmalıdır. Bu katsayıların hesabı için iki yol vardır:

Birinci yol diskritizasyon metotları üzerine kuruludur (Stieltjes yöntemi, Lanczos-tipi algoritma). İkinci yol momentler üzerine kuruludur (Moment tabanlı metotlar).

Birinci yol nümerik olarak, ikinci yoldan daha kararlı olmasına karşın, nümerik hesaplamalar ne Stieltjes yönteminin ne de Lanczos algoritmasının burada düşünülen ağırlık fonksiyonları için uygun olmadığını gösterir. Diğer taraftan moment tabanlı metotların genelde kötü koşullu olduğu bilinir. Ancak aşağıda verilen momentler

$$\mu_k^s = I_s\left[r,\omega;x^k\right] \quad \text{ve} \quad \mu_k^c = I_c\left[r,\omega;x^k\right] ,$$

sembolik olarak elde edilebildiğinden veya yüksek duyarlılıkla hesaplanabildiğinden, yineleme katsayıları istenilen doğrulukla Chebyshev algoritması ile elde edilebilir. (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonlarının momentleri Üstel İntegral Fonksiyonu' nun terimleriyle ifade edilebilir. (1.1) integrali

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\omega}{x^r}\right) f(x)\,dx = \int_0^1 \left[1+\sin\left(\frac{\omega}{x^r}\right)\right] f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \tag{1.6}$$

formunda yazılabilir. Böylece orjinal integrali hesaplamak için sağ taraftaki ilk integral için (1.4) ağırlık fonksiyonuna bağlı $n-$ nokta Gauss integrasyon kuralına ve ikincisi için $[0,1]$ üzerinde Gauss-Legendre kuralına başvurulur. (1.2) integrali için de aynı yöntem kullanılır. (1.4) veya (1.5) ağırlık fonksiyonuna bağlı Gauss integrasyon kuralını kurmak için bu ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomların yineleme katsayılarına ihtiyaç vardır. Mümkün görünen metot, momentlerden yineleme katsayılarını hesaplayan Chebyshev algoritmasıdır.

Üçüncü bölümde $n-$ nokta Gauss integrasyon metodunun büyük n değerleri için integrasyon noktaları ve w_{nk} ağırlıklarının hesabı için $n-$ inci dereceden Jacobi matrisi olarak bilinen üç köşegenli matris verilmiştir. α_k ve β_k yineleme katsayılarının hesabı için kullanılan Chebyshev algoritmasından bahsedilmiştir. Ayrıca bir ayrık ölçümün yineleme katsayılarının hesabı için kullanılan Stieltjes yöntemi [4], Lanczos-tipi algoritma [5, 6] ve moment tabanlı metotlardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde; daha genel integraller için yeni Gauss-tipi integrasyon metotları verilmiştir. Ayrıca (1.1) ve (1.2) integralleri uygun değişken değişikliği ile $[1,\infty]$ aralığına getirilerek elde edilen integraller için Filon-tipi yeni metotlar oluşturulmuştur.

Beşinci bölümde ise bahsedilen integraller ile ilgili nümerik sonuçlar ve g fonksiyonunun $g(x)=1/[(x-x_1)^{r1}(x-x_2)^{r2}]$ şeklinde olduğu durum için Örnek 5.1 verilmiştir.

2. BÖLÜM
YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN BAZI METOTLAR

Trigonometrik tipteki bir yüksek salınımlı integral, $f, g \in \mathbb{C}^\infty$ ve $\omega \gg 1$ için

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde bazı temel kavramlar tanımlanarak yukarıda belirtilen yüksek salınımlı integrallerin hesabı için integrasyon metotları verilecektir. $a \le x \le b$ için $g'(x) \neq 0$ ve $g'(x) = 0$ durumları ayrı ayrı incelenecektir.

2.1 Nümerik İntegrasyon

Nümerik integrasyon metotları

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \tag{2.2}$$

şeklinde verilen bir integralin değerini yaklaşık ya da tam olarak hesaplamaya yarayan metodlardır.

$I_y(f)$ verilen integralin herhangi bir nümerik metot kullanılarak elde edilen yaklaşık değerini gösterirse bu metotla ilgili integrasyon hatası

$$E(f) = I_y(f) - I(f) = I_y(f) - \int_a^b f(x) dx \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.1 Mertebe

$I_y(f)$, verilen integralin herhangi bir metot kullanılarak elde edilen yaklaşık değerini göstermek üzere bu metot ile ilgili integrasyon hatası (2.3)' de tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1.1: Eğer N her $P \in \pi_N$ için $E(P)=0$ şartını sağlayan en büyük pozitif tamsayı ise I_y integrasyon metodunun polinomsal mertebesinin ya da derecesinin N' ye eşit olduğu söylenir. Burada π_N derecesi $(N+1)$' den düşük tüm polinomların kümesini gösterir.

Metotların yakınsama mertebelerinin belirlenmesinde aşağıdaki tanım önemli rol oynar.

Tanım 2.1.1.2: Eğer $|x-a|$ yeteri kadar küçük olduğu zaman

$$|f(x)| \leq K|g(x)| \tag{2.4}$$

şartını sağlayan bir $0 \leq K < \infty$ sayısı varsa bu durumda

$$x \to a \text{ için } \quad f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \tag{2.5}$$

olduğu söylenir.

Bu tanım kabaca

$$x \to a \Rightarrow f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \Leftrightarrow \exists K < \infty \ni \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = K \tag{2.6}$$

şeklinde ifade edilebilir. $K=0$ ise bu durumda $x \to a$ *iken* $f(x) = o(g(x))$ olduğu söylenir.

Nümerik integrasyon metotları $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ şeklinde verilen bir integralin değerini yaklaşık ya da tam olarak hesaplamaya yarayan metotlardır. Nümerik integrasyon metotları genel olarak,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m_i} w_{ik} f^{(k)}(x_i) = I_y(f) \tag{2.7}$$

biçiminde ifade edilir. $x_i \in \mathbb{R}$ sayılarına integrasyon noktaları, $w_{ik} \in \mathbb{R}$ sayılarına da integrasyon metodunun ağırlıkları denir.

Tanım 2.1.1.3: (2.7) ile verilen $I_y(f)$ integrasyon metodunun integrasyon noktaları $\{x_i \in [a,b]\ ,\ i=0,1,...,m\}$ ve $h=\max_i |x_{i+1}-x_i|$ olsun. Eğer her $f \in C^M[a,b]$, $M=\max\{m_i \mid 0\le i\le m\}$ için

$$E(f)=I_y(f)-I(f)=\mathrm{O}\left(h^p\right) \tag{2.8}$$

şartını sağlayan en büyük değer p ise I_y integrasyon metodunun yakınsama mertebesinin p olduğu söylenir.

2.1.2 Newton-Cotes formülleri

Newton-Cotes formüllerinde $[a,b]$ aralığı n eşit parçaya bölünerek elde edilen

$$x_i=a+ih,\ i=0,...,n\ ,\ h=\frac{b-a}{n} \tag{2.9}$$

apsis değerleri kullanılarak

$$P_n(x_i)=f_i=f(x_i)\ ,\ i=0,1,...,n \tag{2.10}$$

şartlarını sağlayan

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\,f_i\ ,\ L_i(x)=\prod_{k=0,k\ne i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \tag{2.11}$$

(interpolasyon) polinomunun integrali alınarak orijinal integrale yaklaşık bir değer elde edilir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n} f_i\int_a^b L_i(x)\,dx \tag{2.12}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki integralde

$$x=a+ht=a+\frac{b-a}{n}t$$

değişken değişikliği yapılırsa

$$L_i\left(x\right)=\prod_{k=0,k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}=\prod_{k=0,k\neq i}^{n}\frac{t-k}{i-k}=\varphi_i\left(t\right) \tag{2.13}$$

olacağından (2.12) ifadesi

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\sum_{i=0}^{n}f_i\int_a^b L_i\left(x\right)dx=h\sum_{i=0}^{n}f\left(x_i\right)\int_0^n\varphi_i\left(t\right)dt \tag{2.14}$$

biçiminde yazılabilir. Bu şekilde elde edilen

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx h\left\{\alpha_0 f\left(x_0\right)+\alpha_1 f\left(x_1\right)+...+\alpha_n f\left(x_n\right)\right\} \tag{2.15}$$

$$\alpha_i=\int_0^n\varphi_i\left(t\right)dt=\int_0^n\prod_{k=0,k\neq i}^{n}\frac{t-k}{i-k}dt \tag{2.16}$$

integrasyon metoduna n-inci dereceden (kapalı) Newton-Cotes formülü denir.

2.2 $g'\left(x\right)\neq 0$ Olması Durumu

2.2.1 Asimptotik metot

Asimptotik metotlarda f ve g fonksiyonlarının $\left[a,b\right]$ üzerinde yeterince türevlenebildiği düşünülecektir. Çünkü bu metotlarda integrasyon aralığının uç noktalarında f ve g fonksiyonlarının değerleri kullanılır. Ayrıca hızlı yakınsaması için bu fonksiyonların uç noktalarda türevlerinin değerleri kullanılır.

$$I\left[f\right]=\int_a^b f\left(x\right)e^{i\omega g\left(x\right)}dx$$

integrali

$$I\left[f\right]=\frac{1}{i\omega}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\frac{d}{dx}e^{i\omega g\left(x\right)}dx$$

şeklinde yazılabilir. Kısmi integrasyonla

$$I\left[f\right]=\frac{1}{i\omega}\left[\frac{f\left(x\right)}{g'\left(x\right)}e^{i\omega g\left(x\right)}\right]_a^b-\frac{1}{i\omega}\int_a^b\frac{d}{dx}\left[\frac{f\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\right]e^{i\omega g\left(x\right)}dx \tag{2.17}$$

elde edilir. $Q^A\left[f\right]$,

$$\frac{1}{i\omega}\left[\frac{f(x)}{g'(x)}e^{i\omega g(x)}\right]_a^b$$

şeklinde tanımlanırsa

$$I[f] = Q^A[f] - \frac{1}{i\omega} I\left[\frac{d}{dx}\frac{f}{g'}\right] \tag{2.18}$$

olur. Bu metotda asimtotik açılım

$$Q_s^A[f] = -\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(-i\omega)^k}\left\{\sigma_k[f](b)e^{i\omega g(b)} - \sigma_k[f](a)e^{i\omega g(a)}\right\} \tag{2.19}$$

$$\sigma_1[f](x) = \frac{f(x)}{g'(x)}, \quad \sigma_{k+1}[f](x) = \frac{\sigma_k[f]'(x)}{g'(x)}, \quad k \geq 1 \tag{2.20}$$

şeklindedir. Asimptotik hata $\omega \to \infty$ iken

$$I[f] - Q_s^A[f] \sim \bigcirc\left(\omega^{-s-1}\right) \tag{2.21}$$

olarak verilir. Asimptotik metotların hatası, $\omega \to \infty$ iken $\bigcirc\left(\omega^{-s-1}\right)$ olduğu için $\omega \approx 1$ iken bu metotlar modifikasyonsuz bahsedilen integrallere yaklaşım için uygun değillerdir [7, 8].

Sonuç 2.2.1.1: Bazı pozitif s tamsayıları için

$$0 = f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = \ldots = f^{(s-1)}(a) = f^{(s-1)}(b)$$

olduğunu varsayalım. Hatta f ω' ya bağlı alınınarak $\left\{f, \ldots, f^{(s+1)}\right\}$ kümesindeki her fonksiyonun, bazı sabit n' ler için asimptotik derecesi $\mathrm{O}\left(\omega^{-n}\right)$ olsun. O zaman $\omega \to \infty$ iken,

$$I[f] \sim \mathrm{O}\left(\omega^{-n-s-1}\right)$$

olur [8].

2.2.2 Filon metodu

Filon-tipi metotda, f fonksiyonu $P_n(x)$ interpolasyon polinomuyla (Hermite-tipi) yer değiştirir.

$$I[f]=\int_0^1 f(x)e^{i\omega g(x)}dx \tag{2.22}$$

integralinde $0=x_0<x_1<x_2<...<x_m=1$ apsis noktalarına karşılık gelen f fonksiyonunun interpolasyon polinomu $P_n(x)$ olsun. Bu durumda Filon metodu,

$$Q_n^F[f]=\int_0^1 P_n(x)e^{i\omega g(x)}dx \tag{2.23}$$

şeklindedir. $n=n_0+n_1+n_2+...+n_m-1$ için

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left((x-x_0)^{n_0}.(x-x_1)^{n_1}...(x-x_m)^{n_m}\right) \tag{2.24}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|I[f]-Q_n^F[f]| &= |\int_0^1 \left(f(x)-P_n(x)\right)e^{i\omega g(x)}dx| \\
&= |\int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}w(x)e^{i\omega g(x)}d_x| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}||w(x)|dx \\
&= |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}|\underbrace{\int_0^1 |w(x)|dx}_{\leq 1} \\
&\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{M}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

olur. Görüldüğü gibi Filon metodu interpolasyon polinomunun derecesine bağlıdır. İnterpolasyon polinomunun derecesi arttıkça daha iyi netice verir.

$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ifadesi (2.23)' de yerine yazılırsa

$$Q_n^F[f] = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} c_k x^k e^{i\omega g(x)} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{\int_0^1 x^k e^{i\omega g(x)} dx}_{\mu_k (momentler)}$$

olur. Filon metodunda momentlerin kolay hesaplanabiliyor olması istenir. Ancak bu her zaman mümkün değildir. Filon metodunun dezavantajı karşımıza hesaplanması zor momentlerin çıkabilme ihtimalidir. Filon metodunda asimptotik hata $\omega \to \infty$ iken $\bigcirc\left(\omega^{-s-1}\right)$' dir [7, 8, 9, 10, 11].

Teorem 2.2.2.1: s bir pozitif tam sayı olsun, $a = x_0 < x_1 < ... < x_\eta = b$ olmak üzere $\{x_k\}_0^\eta$, integrasyon noktalarının kümesi ve $\{m_k\}_0^\eta$, $m_0, m_\eta \geq s$ iken bu integrasyon noktalarına bağlı çoklukların kümesi olsun. Her $0 \leq k \leq \eta$ tamsayısı için

$$\upsilon(x_k) = f(x_k),$$

$$\upsilon'(x_k) = f'(x_k),$$

$$\vdots$$

$$\upsilon^{(m_k-1)}(x_k) = f^{(m_k-1)}(x_k),$$

eşitsizlik sisteminin çözümünün $n = \sum_{k=0}^{\eta} m_k - 1$ olmak üzere $\upsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ olduğunu varsayalım. O zaman $Q^F[f] \equiv I[\upsilon] = \sum_{k=0}^{n} c_k I\left[x^k\right]$ olduğunda

$$I[f] - Q^F[f] \sim \mathrm{O}\left(\omega^{-s-1}\right)$$

olur [8].

2.2.3 Levin metodu

Levin-tipi metotlarda da asimptotik metotlarda olduğu gibi f ve g fonksiyonlarının $[a,b]$ üzerinde yeterince türevlenebildiği düşünülecektir.

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)e^{i\omega g(x)}\right]=f(x)e^{i\omega g(x)} \tag{2.25}$$

olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonunun olduğunu varsayalım. Buradan

$$I[f]=\left[F(x)e^{i\omega g(x)}\right]_a^b \tag{2.26}$$

olur. Levin metodunda F ’ ye bazı v fonksiyonları tarafından yaklaşılıyor. Böylece integrale aşağıdaki Levin metodu ile yaklaşılmış oluyor:

$$Q^L[f]=\left[v(x)e^{i\omega g(x)}\right]_a^b \tag{2.27}$$

$\frac{d}{dx}\left[F(x)e^{i\omega g(x)}\right]=f(x)e^{i\omega g(x)}$ ifadesinde sol tarafın türevi alınırsa,

$$F'(x)e^{i\omega g(x)}+i\omega g'(x)e^{i\omega g(x)}F(x)=f(x)e^{i\omega g(x)} \tag{2.28}$$

elde edilir ve $e^{i\omega g(x)}$ ’ ler çıkarılırsa,

$$F'+i\omega g'F=f \tag{2.29}$$

olur. Burada L,

$$\mathrm{L}[F]=F'+i\omega g'F \tag{2.30}$$

olarak tanımlanırsa

$$\mathrm{L}[F](x)=f(x) \tag{2.31}$$

eşitliği elde edilir. $v(x)$, $a=x_0<x_1<...<x_\eta=b$ noktalarında $\mathrm{L}[v](x_k)=f(x_k)$ denklem sisteminin çözümü olan

$$v(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k x^k \tag{2.32}$$

polinom ailesi olsun. Bu durumda $Q^L[f]$, $I[f]$ ’ ye $\bigcirc\left(\omega^{-2}\right)$ hata ile yaklaşır.

Levin metodunda, sadece f ile $\mathrm{L}[v]$ ’ nin integrasyon noktalarındaki değerleri karşılaştırılmıyor aynı zamanda f ile $\mathrm{L}[v]$ ’ nin türevlerinin değerleri de karşılaştırılıyor.

Levin metodunda f ve $\mathrm{L}[v]$' nin değerlerinin ve ilk $s-1$ türevlerinin değerlerinin karşılaştırılmasıyla asimptotik hata $\omega \to \infty$ $\bigcirc\left(\omega^{-s-1}\right)$ olur. Bu yüzden Levin metodu da $\omega \approx 1$ iken (2.1) integraline yaklaşım için uyun değildir [8, 11, 12].

2.3 $g'(x)=0$ Olması Durumu

$$I[f]=\int_0^1 f(x)e^{i\omega g(x)}dx \tag{2.33}$$

(0,1) aralığındaki noktalardan birinde g' yok olduğunda, $I[f]$' nin asimptotikleri durağan noktaların klasik metotları ile verilir. Bu durum yanlış yola sürükleyebilir. Temelde durağan nokta metotlarının uygulaması iki durumdadır,

1) f ve g, $L[\mathbb{R}]\cap C^{\infty}[\mathbb{R}]$' de olmak şartıyla $[0,1]$ aralığında integral almak yerine $(-\infty,\infty)$ aralığında integral alınır [13].

2) $[0,1]$ aralığında integral alınır, fakat g fonksiyonunun durağan noktasına yeterince yakın bir yerde f fonksiyonunun kompakt desteğe sahip olması istenir [14].

I fonksiyonunun genelleştirilmiş momentleri

$$\mu_m(\omega;\xi)=I\left[x^m\right]=\int_0^1 (x-\xi)^m e^{i\omega g(x)}dx \quad , \quad m \ge 0 \tag{2.34}$$

şeklinde tanımlansın. Her $\xi \in [0,1]$ ve $g'(\xi)=0$, $g''(\xi) \neq 0$ ve $x \in (0,1)-\{\xi\}$ için $g(x) \neq 0$ olacak şekilde yeterince düzgün her f ve g fonksiyonu için

$$\begin{aligned} I[f] &= f(\xi)I[1]+I\left[f-f(\xi)\right] \\ &= f(\xi)\mu_0(\omega,\xi)+\frac{1}{i\omega}\int_0^1 \frac{f(x)-f(\xi)}{g'(x)}\frac{d}{dx}e^{i\omega g(x)}dx \end{aligned} \tag{2.35}$$

şeklindedir.

Lemma 2.3.1: g fonksiyonunun yeterince düzgün bir fonksiyon ve bazı $\xi \in (0,1)$ için $g'(\xi)=0$, $g''(\xi)\neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda yeterince düzgün her f fonksiyonu için,

$$\rho_0[f](x) = f(x) \tag{2.36}$$

$$\rho_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx}\frac{\rho_k[f](x)-\rho_k[f](\xi)}{g'(x)} \;,\; k \geq 0 \tag{2.37}$$

olduğunda

$$I[f] \sim \mu_0(\omega;\xi)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(-i\omega)^m}\rho_m[f](\xi)$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(-i\omega)^m}\left(\frac{e^{i\omega g(1)}}{g'(1)}\{\rho_{m-1}[f](1)-\rho_{m-1}[f](\xi)\}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{i\omega g(0)}}{g'(0)}\{\rho_{m-1}[f](0)-\rho_{m-1}[f](\xi)\}\right), \omega \to \infty \tag{2.38}$$

olur [7].

İspat 2.3.1:

$$I[f] = \mu_0(\omega,\xi)\sum_{m=0}^{s-1}\frac{1}{(-i\omega)^m}\rho_m[f](\xi)$$

$$-\sum_{m=1}^{s}\frac{1}{(-i\omega)^m}\left(\frac{e^{i\omega g(1)}}{g'(1)}\{\rho_{m-1}[f](1)-\rho_{m-1}[f](\xi)\}-\frac{e^{i\omega g(0)}}{g'(0)}\{\rho_{m-1}[f](0)-\rho_{m-1}[f](\xi)\}\right)$$

$$+\frac{1}{(-i\omega)^s}I\left[\rho_s[f]\right] \;,\; s \geq 0 \tag{2.39}$$

şeklindedir. Bu ifade $s=0$ için doğrudur. Bundan başka (2.35) ile

$$I\left[\rho_s[f]\right] = \mu_0(\omega;\xi)\rho_s[f](\xi)+\frac{1}{i\omega}\int_0^1\frac{\rho_s[f](x)-\rho_s[f](\xi)}{g'(x)}\frac{d}{dx}e^{i\omega g(x)}dx$$

da kısmi integrasyon yapılarak ve (2.39)' da yerine yazılarak ispat tamamlanır. $s \to \infty$ (2.38)' deki asimptotik tahmin sağlanır [7].

(2.38)’ deki asimptotik açılım her $r \geq 1$ tamsayısı için

$$g'(\xi) = g''(\xi) = ... = g^{(r)}(\xi) = 0\,,\quad g^{(r+1)}(\xi) \neq 0$$

olacak şekilde genişletilebilir. Böylece (2.35)’ den

$$I[f] = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\xi)\mu_j(\omega;\xi)$$
$$+\frac{1}{i\omega}\int_0^1 \frac{1}{g'(x)}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\xi)(x-\xi)^j \right] \frac{d}{dx} e^{i\omega g(x)} dx \qquad (2.40)$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$\rho_0[f](x) = f(x) \qquad (2.41)$$

$$\rho_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx} \frac{\rho_k[f](x) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!}\rho_k[f]^{(j)}(\xi)(x-\xi)^j}{g'(x)}\,,\ k \geq 0 \qquad (2.42)$$

olur. Yeterince düzgün her f fonksiyonu için Lemma 2.3.1’ deki ispat izlenerek,

$$I[f] \sim \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!}\mu_j(\omega;\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m^{(j)}[f](\xi)$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(1)}}{g'(1)} \{\rho_{m-1}[f](1) - \rho_{m-1}[f](\xi)\} \right.$$
$$\left. - \frac{e^{i\omega g(0)}}{g'(0)} \{\rho_{m-1}[f](0) - \rho_{m-1}[f](\xi)\} \right), \quad \omega \to \infty \qquad (2.43)$$

asimptotik hesabı elde edilir.

İlk önce, $(0,1)$’ deki bir tek durağan nokta için (2.33)’ deki integralin asimptotik açılımı yapılır. Daha sonra her sonlu durağan nokta için yapılabilir. Böylece eğer $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_q \in (0,1)$, $g'(0), g'(1) \neq 0$ iken g fonksiyonunun farklı mertebelerinin durağan noktalarıysa, bir tek durağan noktayı her bir I_j’ de yerine koyacak şekilde $[0,1]$ aralığını q’ nun $I_1, I_2, ..., I_q$ alt aralıklarına bölünebilir.

Teorem 2.3.2:

$$g'(\xi) = g''(\xi) = \ldots = g^{(r)}(\xi) = 0, \quad g^{(r+1)}(\xi) \neq 0 \quad \text{ve} \quad [0,1]-\{\xi\} \quad \text{de} \quad g' \neq 0$$

olduğunu varsayalım. Daha sonra her $s \geq 0$ için

$$\begin{aligned} Q_s^A[f] = {} & \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \mu_j(\omega;\xi) \sum_{m=0}^{s-j-1} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m^{(j)}[f](\xi) \\ & - \sum_{m=1}^{s-1} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(1)}}{g'(1)} \{\rho_{m-1}[f](1) - \rho_{m-1}[f](\xi)\} \right. \\ & \left. - \frac{e^{i\omega g(0)}}{g'(0)} \{\rho_{m-1}[f](0) - \rho_{m-1}[f](\xi)\} \right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

metodu her düzgün f fonksiyonu için asimptotik hatayı

$$Q_s^A[f] - I[f] = \bigcirc\left(\omega^{-s-1/(r+1)}\right) \tag{2.45}$$

ifadesine götürür [7].

3. BÖLÜM

GAUSS METOTLARININ OLUŞTURULMASI

3.1 Ortogonal Polinomlar

$\lambda(t)$, gerçel sayı doğrusu $\mathbb{R}$ üzerinde $t \to -\infty$ ve $t \to +\infty$ iken sonlu limitlere sahip azalmayan fonksiyon ve $d\lambda$ pozitif ölçümü bütün mertebelerin

$$\mu_r = \mu_r(d\lambda) := \int_{\mathbb{R}} t^r d\lambda(t), \quad r = 0,1,2,\ldots, \quad \mu_0 > 0 \tag{3.1}$$

sonlu momentlerine sahip olsun. $\wp$ reel polinomlar uzayı ve $\wp_d \subset \wp$ derecesi $\leq d$ olan polinomlar uzayı olsun. $\forall u, \upsilon \in \wp$ için, iç çarpım

$$(u,\upsilon) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\upsilon(t)\, d\lambda(t) \tag{3.2}$$

şeklinde tamamlanır. Eğer $(u,\upsilon) = 0$ ise, u ile υ polinomlarının ortogonal olduğu söylenir. Eğer $u = \upsilon$ ise,

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int_{\mathbb{R}} u^2(t)\, d\lambda(t) \right)^{1/2} \tag{3.3}$$

ifadesine u' nun normu denir (eğer $d\lambda$ ölçümü gösterilmek istenirse $(u,\upsilon)_{d\lambda}$ ve $\|u\|_{d\lambda}$ şeklinde yazılır). $\forall u \in \wp$ için $\|u\| \geq 0$ olduğu açıktır. Schwarz eşitsizliği

$$|(u,\upsilon)| \leq \|u\| \|\upsilon\| \tag{3.4}$$

şeklindedir.

3.2 Üç Terimli Yineleme Bağıntısı

Üç terimli yineleme bağıntısı ortogonal polinomları ve türevlerini bulmak için kullanılabilir. Ayrıca bu bağıntıyla yineleme kat sayılarından ortogonal polinomların kökleri ve Gauss integrasyon kuralında kullanılan ağırlıklar bulunabilir. Dahası monik ortogonal polinomlardan ortonormal polinomlar oluştururken de kullanılabilir. Üç terimli yineleme bağıntısının varlığının başlıca sebebi ,

$$(tu, \upsilon)_{d\lambda} = (u, t\upsilon)_{d\lambda} \quad , \qquad \forall u, \upsilon \in \wp \tag{3.5}$$

değişme özelliğidir. Buradaki iç çarpım,

$$(u, \upsilon) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\, \upsilon(t)\, d\lambda(t) \tag{3.6}$$

şeklindedir.

3.2.1 Monik ortogonal polinomlar

$k, l = 0,1,2,...$ olmak üzere $k \neq l$ için $(\pi_k, \pi_l)_{d\lambda} = 0$ ve $k = 0,1,2,...$ için $\|\pi_k\|_{d\lambda} > 0$ ise $\pi_k(t) = t^k + ...,$ $k = 0,1,2,...$ monik reel polinomlarına, $d\lambda$ ölçümüne bağlı monik ortogonal polinomlar denir ve $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot; d\lambda)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.1.1: $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot\,;\, d\lambda),$ $k = 0,1,2,...$ $d\lambda$ ölçümüne bağlı monik ortogonal polinomlar olsun.

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}} \quad , \qquad k = 0,1,2,... \tag{3.7}$$

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})_{d\lambda}} \quad , \quad k = 1,2,... \tag{3.8}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \;\; k = 0,1,2,... \\ &\pi_{-1}(t) = 0 \quad , \qquad \pi_0(t) = 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dir [15].

$\wp$ reel polinomlar uzayı ve $\wp_d \subset \wp$ derecesi $\leq d$ olan polinomların uzayı olmak üzere indis değeri sonsuz , $k \leq \infty$, ya da sonlu , $k \leq d-1$, ise $(\cdot\ ,\ \cdot)_{d\lambda}$ iç çarpımı sırasıyla $\wp$ ya da $\wp_d$ üzerinde pozitif belirlidir, fakat $n > d$ ise $\wp_n$ üzerinde pozitif belirli değildir.

Teorem 3.2.1.2: $d\lambda$’ nın destek aralığı $[a,b]$ sonlu olsun. d , Teorem 3.2.1.1’ deki gibi olmak üzere indis derecesi ayrı ayrı $k \leq \infty$ ve $k \leq d$ olduğunda

$$a < \alpha_k(d\lambda) < b \ , \quad k = 0,1,2,... \tag{3.10}$$

$$0 < \beta_k(d\lambda) \leq \max\left(a^2, b^2\right) \ , \quad k = 1,2,... \tag{3.11}$$

olur [15].

3.2.2 Ortonormal polinomlar

$\pi_k(t) = \|\pi_k\| \tilde{\pi}_k(t)$, $k = 0,1,2,...$ koşulunu sağlayan $\tilde{\pi}_k(\cdot) = \tilde{\pi}_k(\cdot\ ;\ d\lambda)$ polinomları ortonormal polinomlardır.

Teorem 3.2.2.1: $\tilde{\pi}_k(\cdot) = \tilde{\pi}_k(\cdot\ ;\ d\lambda)$, $k = 0,1,2,...$ $d\lambda$ ölçümüne bağlı ortonormal polinomlar olsun. $\beta_0(d\lambda) = (\pi_0, \pi_0) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda(t)$ ve α_s ile β_s (3.7) ve (3.8)’ deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned} &\sqrt{\beta_{k+1}}\,\tilde{\pi}_{k+1}(t) = (t-\alpha_k)\,\tilde{\pi}_k(t) - \sqrt{\beta_k}\,\tilde{\pi}_{k-1}(t) \ , \quad k = 0,1,2,... \\ &\tilde{\pi}_{-1}(t) = 0 \quad , \quad \tilde{\pi}_0(t) = 1/\sqrt{\beta_0} \end{aligned} \tag{3.12}$$

dır. İndis değerleri Teorem 3.2.1.1’ deki gibidir [15].

Tanım 3.2.2.2: Teorem 3.2.1.1’ deki indis değerleri sonsuz ise $d\lambda$ ölçümüyle sonsuz, simetrik, üç köşegenli Jacobi matrisi,

$$J_\infty = J_\infty(d\lambda) := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

şeklindedir. $n\times n$' lik minör matrisi

$$J_n = J_n\left(d\lambda\right) := \left[J_\infty\left(d\lambda\right)\right]_{[1:n,1:n]} \tag{3.14}$$

ile gösterilir. Eğer Teorem 3.2.2.1' deki indis değerleri sonlu, $k \le d-1$, ise J_n, $0 \le n \le d$ için iyi tanımlıdır. Eğer (3.12)' nin ilk n denklemi

$$t\tilde{\pi}_k\left(t\right) = \sqrt{\beta_k}\,\tilde{\pi}_{k-1}\left(t\right) + \alpha_k\tilde{\pi}_k\left(t\right) + \sqrt{\beta_{k+1}}\,\tilde{\pi}_{k+1}\left(t\right) \quad , \quad k = 0,1,...,n-1 \tag{3.15}$$

formunda yazılır ve

$$\tilde{\pi}\left(t\right) = \left[\tilde{\pi}_0\left(t\right), \tilde{\pi}_1\left(t\right), ..., \tilde{\pi}_{n-1}\left(t\right)\right]^T \tag{3.16}$$

olursa, (3.15)' deki ifade, $e_n = \left[0,0,...,1\right]^T$, $\mathbb{R}^n$ de $n-$ inci koordinat vektörü olmak üzere

$$t\tilde{\pi}\left(t\right) = J_n\left(d\lambda\right)\tilde{\pi}\left(t\right) + \sqrt{\beta_n}\,\tilde{\pi}\left(t\right)e_n \tag{3.17}$$

matris formunda ifade edilebilir.

Teorem 3.2.2.3: $\pi_n\left(\cdot\,;\,d\lambda\right)$ (ya da $\tilde{\pi}_n\left(\cdot\,;\,d\lambda\right)$)' nin sıfırları $\tau_\nu^{(n)}$ ler $n-$inci dereceden $J_n\left(d\lambda\right)$ Jacobi matrisinin özdeğerleridir ve $\tilde{\pi}\left(\tau_\nu^{(n)}\right)$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir [15].

Sonuç 3.2.2.3: υ_ν, $\tau_\nu^{(n)}$ özdeğerlerine karşılık gelen $J_n\left(d\lambda\right)$' nın normalize edilmiş özvektörlerini

$$J_n\left(d\lambda\right)\upsilon_\nu = \tau_\nu^{(n)}\upsilon_\nu \,, \quad \upsilon_\nu^T\upsilon_\nu = 1$$

ve $\upsilon_{\nu,1}$, özvektörlerin birinci bileşenini göstermek üzere

$$\beta_0\upsilon_{\nu,1}^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\tilde{\pi}_k\left(\tau_\nu^{(n)}\right)\right]^2} \quad , \quad \nu = 1,2,...,n \tag{3.18}$$

olur [15].

3.3 Gauss İntegrasyon Metodu

$[a,b]$ aralığında $W(x)$ negatif olmayan ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$I(f)=\int_a^b W(x)\,f(x)\,dx \tag{3.19}$$

formundaki integrali düşünelim. $[a,b]$ aralığı sonlu, yarı sonlu ya da sonsuz olabilir. Ağırlık fonksiyonu,

- $W(x)\geq 0$, $[a,b]$ sonlu ya da sonsuz aralıkta ölçülebilir.
- Bütün momentler $\mu_k=\int_a^b x^k\,W(x)\,dx$, $k=0,1,...$ var ve sınırlıdır.
- $[a,b]$ aralığında negatif olmayan $P(x)$ polinomları için

$\int_a^b W(x)P(x)\,dx=0$ ise $P(x)\equiv 0$

şartlarını sağlasın.

Tablo 3.3.1' de pratikte çok sık kullanılan ağırlık fonksiyonları ve ilgili ortogonal polinomlar verilmiştir. Tablo 3.3.1, [16]' dan alınmıştır.

Tablo 3.3.1 Bazı Ağırlık Fonksiyonları ve İlgili Ortogonal Polinomlar

$[a,b]$	Ağırlık Fonksiyonları	Ortogonal Polinomlar
$[-1,1]$	$W(x)\equiv 1$	Legendre polinomları
$[-1,1]$	$W(x)=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$	Chebyshev polinomları
$[0,\infty]$	$W(x)=e^{-x}$	Laguerre polinomları
$[-\infty,\infty]$	$W(x)=e^{-x^2}$	Hermite polinomları

$n-$ nokta Gauss integrasyon metodu

$$Q_n^G[f]=\sum_{k=1}^{n} w_{nk}\,f(x_{nk}) \tag{3.20}$$

şeklinde ifade edilir. Gauss integrasyon metodunun yakınsama mertebesi $2n-1$' dir. $n-$nokta Gauss integrasyon metodunun x_{nk} integrasyon noktaları, π_n $n-$inci ortogonal polinomun kökleridir. Pratikte, özellikle büyük n değerleri için integrasyon noktaları ve w_{nk} ağırlıkları $n-$inci dereceden Jacobi matrisi olarak bilinen

$$J_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

üç köşegenli matrisi ile hesaplanır. Bu matrisin özdeğerleri $n-$nokta Gauss integrasyon metodunun noktalarıdır. $\beta_0 = \mu_0$ ve $\upsilon_{k,1}$, x_{nk} özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özvektörlerin birinci bileşenleri olmak üzere ağırlıklar, $w_{nk} = \beta_0 \left(\upsilon_{k,1}\right)^2$ ile bulunur.

α_k ve β_k yineleme katsayıları Chebyshev algoritması ile hesaplanır. Chebyshev algoritması 3.4.4.1.1’ de verilmiştir.

Ağırlık fonksiyonu verilen aralıkta işaret değiştirirse Gauss metodu garanti olmamaktadır. Bu yüzden, bu çalışmada ağırlık fonksiyonunu pozitif yapmak için 1 eklenecektir.

Teorem 3.3.1: $f \in C^{2n}\left[a,b\right]$ ise Gauss integrasyon metodu için hata

$$\int_a^b W(x)\, f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\left(P_n, P_n\right), \quad \xi \in (a,b) \tag{3.22}$$

eşitliği ile verilir [16, 17].

3.3.1 Ağırlıkların hesaplanması

Ağırlıklar,

$$w_k = \int_a^b W(x)\, L_k(x)\,dx = \int_a^b \left(W(x) \prod_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) dx \tag{3.23}$$

eşitliği ile hesaplanır. Ancak bu bağıntı pratikte kullanmaya elverişli değildir. Bu yüzden ağırlıkların hesaplanmasını kolaylaştıran aşağıdaki bağıntı verilecektir.

$c_k,\ b_k > 0$ olmak üzere $\{\varphi_k \mid k = 0,1,...,n\}$,

$\varphi_{-1}(x) \equiv 0$

$\varphi_0(x) \neq 0$

$$c_{k+1}\varphi_{k+1}(x) = (x - a_k)\varphi_k(x) - b_k\varphi_{k-1}(x)\,, \quad k = 0,1,... \tag{3.24}$$

bağıntısı ile elde edilen ortogonal polinomlar olsun. Ağırlıklar ,

$$w_k = -\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)\frac{\varphi_0(x_k)\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle}{\varphi_{n+1}(x_k)\varphi_n'(x_k)} \tag{3.25}$$

şeklindedir. Burada $\{x_k\}$ değerleri, $\varphi_n(x) = A_n x^n + ...$ ortogonal polinomun kökleridir.

3.4 Bir Ayrık Ölçümün Yineleme Katsayılarının Hesabı

Gauss integrasyon kuralını kurmak için, (1.4) ya da (1.5) ağırlık fonksiyonları ile ilgili olarak ortogonal polinomların üç terimli yineleme katsayılarına ihtiyaç vardır. Fakat bu katsayılar analitik olarak elde edilememektedir. Bu yüzden bunları yaklaşık olarak hesaplamak için uygun metotlar kullanılmalıdır.

Bu kısımda diskritizasyon metotları üzerine kurulu, biri 1884'de Stieltjes [4] tarafından öne sürülen, diğeride Lanczos [5] ve Rutishauser' un [6] fikri olan iki yöntem üzerinde durulacaktır. Fakat bu metotlar burada düşünülen ağırlık fonksiyonları için uygun olmadığından, yineleme bağıntısı katsayıların hesabı için moment tabanlı metotlar verilecektir.

3.4.1 Diskritizasyon metotları

Verilen $d\lambda$ ölçümüne, N noktalı $d\lambda_N$ ayrık ölçümü ile yaklaşılabilir. $d\lambda$ ölçümünün $N \to \infty$ giderken

$$\beta_{k,N} = \beta_k(d\lambda_N) \quad ; \quad \alpha_{k,N} = \alpha_k(d\lambda_N)$$

yineleme katsayıları hesaplanır. Eğer diskritizasyon metodu başarılı bir şekilde uygulanırsa herhangi bir k için $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha_{k,N} = \alpha_k$ ve $\lim\limits_{N\to\infty}\beta_{k,N} = \beta_k$ yaklaşımları bulunur. Burada $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$ ve $\beta_k = \beta_k(d\lambda)$ verilen ölçüme göre yineleme katsayılarıdır.

Metot uygulanırken ilgileneceğimiz ilk sorun yakınsama, ikinci sorun ise ayrık ölçümde yineleme bağıntısı katsayılarının nasıl hesaplanacağıdır. Üçüncü ve en önemlisi de diskritizasyon seçeneklerinin uygunluğudur.

İç çarpıma yaklaşım yaratılan diskritizasyon metotlarında, modifiye Chebyshev algoritmasının kombinasyonu olan modifiye edilmiş momentlere yaklaşım uygulanabilir. Bu da yineleme katsayılarının başka bir yoldan hesabıdır [15].

3.4.1.1 Ayrık ortogonal polinomun sürekli bir polinoma yakınsaması

İlk olarak $d\lambda$ ölçümünün sınırlı bir aralıkta mesela $[-1,1]$' de desteklendiği kabul edilecektir ve $d\lambda_N$' nin destek noktaları $[-1,1]$ aralığı olacaktır.

$N \to \infty$ iken $\pi_{n,N}(\cdot) = \pi_n(\cdot; d\lambda_N)$ ayrık ortogonal polinomlarının, $\pi_n(\cdot) = \pi_n(\cdot; d\lambda)$ sürekli ortogonal polinomlara yakınsaması mümkündür.

$$(p,q)_{d\lambda_N} := \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)\,d\lambda_N(t) = \sum_{v=1}^{N} w_v p(t_v) q(t_v) \tag{3.26}$$

iç çarpımı, $N \to \infty$ iken p ve q polinom, t_v ve w_v N' ye bağlı olmak üzere $(p,q)_{d\lambda}$ iç çarpımına yakınsar. Bu da aşağıdaki teoremi doğurur.

Teorem 3.4.1.1.1: $d\lambda$**,** $[-1,1]$ üzerinde bütün mertebeleri sonlu momentlere sahip pozitif ölçüm olsun ve $d\lambda_N$, $[-1,1]$' de $t_v = t_{v,N}$ farklı sayıları ile oluşturulan ayrık ölçüm ve her bir N için $w_v = w_{v,N} > 0$ olsun. P reel polinomların sınıfı olmak üzere

$$\lim_{N\to\infty} (p,q)_{d\lambda_N} = (p,q)_{d\lambda}, \quad p \in P, \; q \in P \tag{3.27}$$

olduğunu varsayalım. Herhangi bir k için $d\lambda_N$ ölçümüne bağlı ayrık ortogonal polinomlar için $\alpha_{k,N}$ ve $\beta_{k,N}$ yineleme katsayıları, sürekli ortogonal polinomlar için $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$, $\beta_k = \beta_k(d\lambda)$ yineleme katsayılarına yakınsar. Böylece

$$\lim_{N\to\infty} \alpha_{k,N} = \alpha_k \ , \ \lim_{N\to\infty} \beta_{k,N} = \beta_k \tag{3.28}$$

olur. Hatta $[-1,1]$' deki t' ler için,

$$\lim_{N\to\infty} \pi_n(t;d\lambda_N) = \pi_n(t;d\lambda) \tag{3.29}$$

eşitliği sağlanır [15].

İspat 3.4.1.1.1: $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot\,;d\lambda)$, $d\lambda$ ölçümüne bağlı (monik) ortogonal polinomlar olmak üzere

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}} \quad , \quad k = 0,1,2,... \tag{3.30}$$

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)_{d\lambda}}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})_{d\lambda}} \quad , \quad k = 1,2,... \tag{3.31}$$

formüllerine karşılık gelen formüller ayrık polinomlar için

$$\alpha_{k,N} = \frac{(t\pi_{k,N}, \pi_{k,N})_{d\lambda_N}}{(\pi_{k,N}, \pi_{k,N})_{d\lambda_N}} \quad , \quad k = 0,1,2,... \tag{3.32}$$

$$\beta_{k,N} = \frac{(\pi_{k,N}, \pi_{k,N})_{d\lambda_N}}{(\pi_{k-1,N}, \pi_{k-1,N})_{d\lambda_N}} \quad , \quad k = 1,2,... \tag{3.33}$$

şeklindedir. Burada

$$\beta_0 = (1,1)_{d\lambda} \quad , \quad \beta_{0,N} = (1,1)_{d\lambda_N} \tag{3.34}$$

dir. Sonsuz norm, $[-1,1]$ aralığıyla bağlantılı olmak üzere $\forall\, f, g \in C[-1,1]$ için

$$\left| (f,g)_{d\lambda_N} \right| \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty (1,1)_{d\lambda_N} \tag{3.35}$$

eşitsizliğinin sağlandığı fikriyle başlayalım. n üzerinden tümevarım ile (3.29)' daki ifadenin bazı $n=s$ ve $n=s-1$ (bu $s=0$ olduğunda önemsizdir) için doğru olduğu kabul edilir. (3.29)' u $n=s+1$ için ispatlamak yerine (3.28)' i $k=s$ için ispatlamak yeterlidir. Aşağıdaki

$$\pi_{s+1,N}(t)=(t-\alpha_{s,N})\pi_{s,N}(t)-\beta_{s,N}\pi_{s-1,N}(t)$$

üç terimli yineleme bağıntısı ve tümevarım hipotezi ile

$$\pi_{s+1,N}(t)\to(t-\alpha_s)\pi_s(t)-\beta_s\pi_{s-1}(t)=\pi_{s+1}(t)$$

olur. (3.28)' in diğer taraftan ispatı için (3.32) ve (3.33)' deki tüm iç çarpımların $k=s$ olduğunda $N\to\infty$ giderken (3.30) ve (3.31)' e yakınsadığını göstermek yeterlidir. Bu, $(\pi_{s,N},\pi_{s,N})_{d\lambda_N}$ iç çarpımı için gösterilecektir. Diğerleri benzer şekilde ispatlanır.

$$\begin{aligned}(\pi_{s,N},\pi_{s,N})_{d\lambda_N}&=\left(\pi_s+(\pi_{s,N}-\pi_s),\pi_s+(\pi_{s,N}-\pi_s)\right)_{d\lambda_N}\\&=(\pi_s,\pi_s)_{d\lambda_N}+2(\pi_s,\pi_{s,N}-\pi_s)_{d\lambda_N}+(\pi_{s,N}-\pi_s,\pi_{s,N}-\pi_s)_{d\lambda_N}\end{aligned}\tag{3.36}$$

şeklinde yazılabilir. Sağ taraftaki ilk terim (3.27)' den $(\pi_s,\pi_s)_{d\lambda}$' ya yakınsar. İkinci terim ise (3.35)' in uygulamasıyla

$$\left|(\pi_s,\pi_{s,N}-\pi_s)_{d\lambda_N}\right|\le\|\pi_s\|_\infty\|\pi_{s,N}-\pi_s\|_\infty(1,1)_{d\lambda_N}$$

sonucunu verir. $(1,1)_{d\lambda_N}\to(1,1)_{d\lambda}$ olduğu kabulüyle tümevarım hipotezinden $\pi_{s,N}\to\pi_s$ olur ve sağ taraf sıfıra yaklaşır. Aynı sebepten dolayı (3.36)' nın son terimi sıfıra yakınsar. Sonuç olarak

$$\lim_{N\to\infty}(\pi_{s,N},\pi_{s,N})_{d\lambda_N}=(\pi_s,\pi_s)_{d\lambda}$$

bulunur [15].

Teorem 3.4.1.1.1' in ispatındaki son bağıntıya göre $\|\pi_{n,N}\|_{d\lambda_N}\to\|\pi_n\|_{d\lambda}$ olur. Bunun, (3.29) ile birleştirilmesiyle Teorem 3.4.1.1.1 aynı zamanda ortonormal polinomlar içinde sağlanır. Yani

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\pi}_n\left(t;d\lambda_N\right)=\tilde{\pi}_n\left(t;d\lambda\right) \tag{3.37}$$

eşitliği sağlanır. Teorem 3.4.1.1.1 aşağıdaki basit sonucu verir.

Sonuç 3.4.1.1.1: n**'** ler sabit ve π_n' in sıfırları artma sırasıyla $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ olsun. Aynı sırayla $\pi_{n,N}$' inkiler $\tau_{1,N}, \tau_{2,N}, ..., \tau_{n,N}$ ile gösterilsin. Bu durumda Teorem3.4.4.1.1' deki varsayımla

$$\lim_{N\to\infty} \tau_{v,N}=\tau_v\,,\quad \lim_{N\to\infty} \pi_{m,N}\left(\tau_{v,N}\right)=\pi_m\left(\tau_v\right)\,,\quad v=1,2,...,n\ ;\ \ m\neq n \tag{3.38}$$

eşitliği sağlanır [15].

İspat 3.4.1.1.1: (3.38)' deki ilk bağıntı polinom sıfırlarının sürekliliğinin sonucudur. İkinci bağıntı ise $\left|\pi_{m,N}\left(\tau_{v,N}\right)-\pi_m\left(\tau_{v,N}\right)\right|\leq\left\|\pi_{m,N}-\pi_m\right\|_\infty\to 0$ ve $N\to\infty$ iken $\pi_m\left(\tau_{v,N}\right)\to\pi_m\left(\tau_v\right)$ fikri ile

$$\pi_{m,N}\left(\tau_{v,N}\right)-\pi_m\left(\tau_v\right)=\left(\pi_{m,N}\left(\tau_{v,N}\right)-\pi_m\left(\tau_{v,N}\right)\right)+\left(\pi_m\left(\tau_{v,N}\right)-\pi_m\left(\tau_v\right)\right)$$

eşitliğinden izlenir [15].

Açıklama: (3.38)' deki ilk bağıntı $d\lambda_N$ için $n-$ nokta Gauss integrasyon kuralının noktalarının $d\lambda$ için n- nokta Gauss integrasyon noktalarına yakınsadığını söyler. Bunlar aynı zamanda $\lambda_{v,N}^G$ ve λ_v^G ağırlıkları içinde sağlanır. Bu, (3.38)' deki ikinci bağıntının (ortonormal polinomlar için)

$$\lambda_{v,N}^G=\frac{1}{\sum_{m=0}^{n-1}\tilde{\pi}_{m,N}^2\left(\tau_{v,N}\right)}\ ,\ v=1,2,...,n \tag{3.39}$$

formülünde kullanılmasıyla bulunur [15].

3.4.1.2 Fejer metodu

$T_n\left(x\right)=\cos\left(n\arccos x\right)$' in köklerini kullanan metot Fejer metodudur.

$T_n\left(x\right)=\cos\left(n\arccos x\right)$ 1. çeşit Chebychev

$T_0\left(x\right)=1$

$$T_1(x) = x$$
$$\vdots$$
$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{dir.}$$

$$(T_n, T_m)_{d\lambda} = \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) w(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \;\; ise \\ sıfırdan\ farklı, & \quad n = m \;\; ise \end{cases} \tag{3.40}$$

dir. İntegrasyon noktaları $T_n(x)$ ' in kökleridir. $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$ ' dan

$$n \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad , \quad k = 1, 2, ..., n$$

bulunur. Buradan

$$\cos^{-1} x = \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \theta_k$$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad , \quad k = 1, ..., n \tag{3.41}$$

olur. Gauss Chebyshev' de ağırlıklar

$$w_k = \frac{\pi}{n} \tag{3.42}$$

dir. Fakat Fejer metodunda ağırlıklar

$$w_v^F = \frac{2}{N}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\cos 2n\theta_v^F}{4n^2 - 1}\right) \quad , \quad v = 1, 2, ..., N \tag{3.43}$$

dir.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, d(x) \approx \sum_{k=1}^{N} w_k^F f(x_k) \tag{3.44}$$

dir. Burada x_k ' lar ve w_k^F ' ler bilindiği için integralin yaklaşık değeri bulunur [15].

3.4.2 Stieltjes yöntemi

Stieltjes yöntemi diskritizasyon metotları üzerine kurulu, yineleme katsayılarının hesabında kullanılan bir yöntemdir. Ancak yapılan nümerik hesaplamalar bu yöntemin, (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonları için uygun olmadığını gösterir.

$$\alpha_{k,N} = \frac{\left(t\pi_{k,N}, \pi_{k,N}\right)_{d\lambda_N}}{\left(\pi_{k,N}, \pi_{k,N}\right)_{d\lambda_N}}, k = 0,1,2... \tag{3.45}$$

$$\beta_{k,N} = \frac{\left(\pi_{k,N}, \pi_{k,N}\right)_{d\lambda_N}}{\left(\pi_{k-1,N}, \pi_{k-1,N}\right)_{d\lambda_N}}, k = 1,2... \tag{3.46}$$

formülleri yineleme katsayılarını hesaplamak için doğal bir temel sağlar.

$$\left(p,q\right)_{d\lambda_N} = \sum_{v=1}^{N} w_v p\left(t_v\right) q\left(t_v\right) \tag{3.47}$$

formülünde görülen tüm iç çarpımlar sonlu toplamlardır ve bu yüzden hesabı mümkündür. Tek problem, bilinmeyen $\pi_{k,N}$ ve $\pi_{k-1,N}$ polinomlarını oluşturabilmektir. Ancak bunlar da

$$\pi_{k+1,N}\left(t\right) = (t-\alpha_{k,N})\pi_{k,N}\left(t\right) - \beta_{k,N}\pi_{k-1,N}\left(t\right), k = 0,1,2,..., N-1 \tag{3.48}$$

üç terimli yineleme bağıntısı ile başarılı bir şekilde kurulabilirler. $\pi_{0,N} = 1$ olduğundan $\alpha_{0,N}$ katsayısı $k = 0$ için (3.45) formülünden hesaplanabilir ve bundan dolayı $\beta_{0,N} = \left(1,1\right)_{d\lambda_N}$ olur. Bu her $t = t_v$ değeri için $k = 0$ ile (3.48)' den $\pi_{1,N}\left(t\right)$ 'nin hesaplanmasını sağlar. $\pi_{1,N}\left(t_v\right)$ ve $\pi_{0,N}\left(t_v\right)$ değerlerinin bilinmesiyle (3.45) ve (3.46) formülleri uygulanabilir ve $\alpha_{1,N}$ ve $\beta_{1,N}$ bulunur. Bu (3.48)' de kullanılarak $\pi_{2,N}$ bulunur. Bu yolla bütün yineleme katsayıları ya da ihtiyaç duyulanlar hesaplanabilir.

Yöntem nümerik açıdan tümüyle güvenilir değildir. Yöntemin uygulanması durumunda istenilen sonuçların elde edilme olasılığı zayıflamaktadır [4, 15].

3.4.3 Lanczos tipi algoritma

Bir reel simetrik A matrisi verilsin. T, köşegenin her iki tarafında negatif olmayan elemanları olan üç köşegenli simetrik matris olmak üzere $Q^T AQ = \mathrm{T}$ den T ye bir ortogonal benzerlik dönüşümü vardır. Genelde ortogonal Q matrisi ve T matrisi A ve Q' nun ilk sütunu tarafından tek şekilde belirlenir. Lanczos algoritması A' yı veren Q ve T' yi üreten bir metottur. t_v noktaları ve

$$(p,q)_{d\lambda_N} := \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)d\lambda_N(t) = \sum_{v=1}^{N} w_v p(t_v) q(t_v) \tag{3.49}$$

ifadesindeki ayrık iç çarpımın pozitif w_v ağırlıkları ile

$$\sqrt{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} \\ \sqrt{w_2} \\ \vdots \\ \sqrt{w_N} \end{pmatrix}, \quad D_t = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_N \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

şeklinde tanımlanan $\sqrt{w}$ vektörü ve köşegensel D_t matrisi oluşturulur.

O zaman $e_1^T = (1, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0) \in \mathbb{R}^N$ ve $J_N(d\lambda_N)$, (3.49)' daki $d\lambda_N$ ayrık ölçümünün N ' ninci mertebeden Jacobi matrisi olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{w}^T \\ \sqrt{w} & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\beta_{0,N}} e_1^T \\ \sqrt{\beta_{0,N}} e_1 & J_N(d\lambda_N) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

olacak şekilde N mertebeli ortogonal Q_1 matrisinin varlığı doğrudur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{w}^T \\ \sqrt{w} & D_t \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

ve T, (3.51)' in sağ tarafındaki Jacobi matrisinin genişletilmişidir. Sondaki sıfır olmayan elemanlar belirlemek istenilen $\alpha_{k,N}$ ve $\beta_{k,N}$ yineleme katsayılarıdır. A verildiğinden ve $e_1 \in \mathbb{R}^{N+1}$ Q' nun ilk sütunu olduğundan Lanczos algoritması, prensipte istenilen yineleme katsayılarının hesaplanmasında başvurulabilir. Prensipte denildi, çünkü maalesef yöntem nümerik kararsızdır [5, 6, 15, 18].

3.4.4 Moment tabanlı metotlar

Moment tabanlı metotlar momentler üzerine kuruludur. (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonları için yineleme katsayılarının hesabında Stieltjes ve Lanczos metotları uygun değildir. Momentler sembolik olarak elde edilebildiğinden veya yüksek duyarlılıkla hesaplanabildiğinden uygun görünen metot moment tabanlı metotlardır.

$$\mu_r = \mu_r(d\lambda) := \int_{\mathbb{R}} t^r d\lambda(t),\ r = 0,1,2,\dots\ ,\ \mu_0 > 0 \tag{3.53}$$

şeklinde verilen momentlerin n mertebeli Hankel determinantı Δ_n ile aşağıdaki gibi gösterilsin;

$$\Delta_0 = 1 \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix},\ n = 1,2,3,\dots \tag{3.54}$$

Ek olarak

$$\Delta_0' = 0\,,\quad \Delta_1' = \mu_1$$

$$\Delta_n' = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-3} & \mu_{2n-1} \end{vmatrix},\ n = 2,3,\dots \tag{3.55}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece Δ_n', Δ_{n+1} determinantında sondan bir önceki sütunun ve son satırın kaldırılmasıyla Δ_{n+1} Hankel determinantıdır. Δ_{n+1} Hankel determinantında yer değiştirme işlemi yapılıp, sondan bir önceki satırın ve son sütunun kaldırılmasıyla da aynı durum elde edilir [15].

Teorem 3.4.4.1 : $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot\,; d\lambda)$, $d\lambda$ ölçümüne bağlı derecesi k olan monik ortogonal polinom olsun. O zaman

$$\pi_k(t) = \frac{1}{\Delta_k} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \mu_{2k-1} \\ 1 & t & \dots & t^k \end{vmatrix} = t^k - \frac{\Delta_k'}{\Delta_k} t^{k-1} + \dots,\quad k = 1,2,\dots \tag{3.56}$$

dir [15].

İspat 3.4.4.1 : (3.56)' daki ifade derecesi k olan monik bir polinomdur. Bunu $d_k(t)$ ile gösterelim. $C_0, C_1, \dots, C_k$, Δ_{k+1} ' in son satırındaki elemanların kofaktörleri olsun.

$$t^r d_k(t) = \frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \mu_{2k-1} \\ t^r & t^{r+1} & \cdots & t^{r+k} \end{vmatrix} \tag{3.57}$$

ifadesinde son satıra göre determinantın Laplace açılımı kullanılarak

$$t^r d_k(t) = \frac{1}{\Delta_k}\sum_{\ell=0}^{k} C_\ell t^{r+\ell} \tag{3.58}$$

elde edilir.

Böylece toplam, son satırı önceki satırıyla yer değiştirmiş Δ_{k+1} Hankel determinantının son satırına göre Laplace açılımı olduğundan

$$\int_{\mathbb{R}} t^r d_k(t)\, d\lambda(t) = \frac{1}{\Delta_k}\sum_{\ell=0}^{k} C_\ell \mu_{r+\ell} = 0,\; r = 0,1,...,k-1 \tag{3.59}$$

dir. Bu d_k ’ nın, derecesi kendisinden düşük olan tüm polinomlarla ortogonalliğini ispatlar. Buradan teklik ile $d_k \equiv \pi_k$ ’ dır. (3.56)’ daki determinantın t^{k-1} katsayısı $-\Delta'_k$, t^{k-1} ’ in kofaktörüdür [15].

Teorem 3.4.4.2: $\pi_k(\cdot; d\lambda)$ monik ortogonal polinomları için $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$, $\beta_k = \beta_k(d\lambda)$ katsayıları

$$\alpha_k = \frac{\Delta'_{k+1}}{\Delta_{k+1}} - \frac{\Delta'_k}{\Delta_k},\; k = 0,1,2,... \tag{3.60}$$

$$\beta_k = \frac{\Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}{\Delta_k^2},\quad k = 1,2,3,... \tag{3.61}$$

şeklindedir [15].

İspat 3.4.4.2: (3.7) ve (3.8) ile

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k,\pi_k)}{(\pi_k,\pi_k)}\;,\quad k \ge 0 \quad ;\quad \beta_k = \frac{(\pi_k,\pi_k)}{(\pi_{k-1},\pi_{k-1})}\;,\quad k \ge 1 \tag{3.62}$$

dir. (3.56) kullanılarak, ayrıca $k = 0$ içinde sağlanan

$$\left(t\pi_k,\pi_k\right)=\left(t^{k+1}-\frac{\Delta_k'}{\Delta_k}t^k+...,\pi_k\right)=\left(t^{k+1},\pi_k\right)-\frac{\Delta_k'}{\Delta_k}\left(t^k,\pi_k\right) \tag{3.63}$$

dir. Teorem 3.4.4.1 dikkate alınarak

$$\left(t^{k+1},\pi_k\right)=\frac{\Delta_{k+1}'}{\Delta_k}\ ,\quad \left(t^k,\pi_k\right)=\left(\pi_k,\pi_k\right)=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \tag{3.64}$$

bulunur. Bundan dolayı

$$\alpha_k=\left(\frac{\Delta_{k+1}'}{\Delta_k}-\frac{\Delta_k'\Delta_{k+1}}{\Delta_k\Delta_k}\right)/\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}=\frac{\Delta_{k+1}'}{\Delta_{k+1}}-\frac{\Delta_k'}{\Delta_k}\ , \tag{3.65}$$

$$\beta_k=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}/\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}=\frac{\Delta_{k+1}\Delta_{k-1}}{\Delta_k^2} \tag{3.66}$$

şeklindedir [15].

3.4.4.1 Modifiye Chebyshev algoritması

Algoritma, Gautschi' deki [19] Chebyshev' in [20] oluşturduğu algoritmanın adi momentlerden modifiye momentlere bir genelleştirmesidir. Bu yüzden modifiye Chebyshev algoritması denilmektedir. $a_k \in \mathbb{R}$ ve $b_k \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &p_{k+1}(t)=(t-a_k)\,p_k(t)-b_k\,p_{k-1}(t)\ ,\ k=0,1,2,...\\ &p_{-1}(t)=0\ ,\ p_0(t)=1 \end{aligned} \tag{3.67}$$

üç terimli yineleme bağıntısını sağlayan $\{p_k\}$ monik polinomlar sistemine tam olarak uygulanabilir.

$a_k=b_k=0$ almak orjinal Chebyshev algoritmasını küçültür. Verilen $d\lambda$ ölçümüne bağlı $\pi_k(\cdot)=\pi_k(\cdot;d\lambda)$ monik ortogonal polinomlar olmak üzere "karışık momentler"

$$\sigma_{k\ell}=\int_{\mathbb{R}}\pi_k(t)\,p_\ell(t)d\lambda(t)\ ,\ k,\ell\geq -1 \tag{3.68}$$

şeklindedir. Ortogonallik ile $k>\ell$ için $\sigma_{k\ell}=0$' dır ve $tp_{k-1}(t)=\pi_k(t)+...$ olduğundan noktalar *derecesi* $<k$ olan bir polinom anlamına geldiğinde

$$\int_{\mathbb{R}}\pi_k^2(t)\,d\lambda(t)=\int_{\mathbb{R}}\pi_k(t)\,tp_{k-1}(t)\,d\lambda(t)=\sigma_{kk}\ ,\quad k\geq 1$$

sağlanır. $\sigma_{k+1,k-1}=0$ ve π_k için üç terimli yineleme bağıntısı

$$\pi_{k+1}(t)=(t-\alpha_k)\pi_k(t)-\beta_k\pi_{k-1}(t) \quad , \quad k=0,1,2,...$$
$$\pi_{-1}(t)=0 \ , \ \pi_0(t)=1 \tag{3.69}$$

ile ortogonallik kullanılarak

$$0=\int_{\mathbb{R}}\left[(t-\alpha_k)\pi_k(t)-\beta_k\pi_{k-1}(t)\right]p_{k-1}(t)\,d\lambda(t)=\sigma_{kk}-\beta_k\sigma_{k-1,k-1}$$

elde edilir. Yani

$$\beta_k=\frac{\sigma_{kk}}{\sigma_{k-1,k-1}} \quad , \qquad k=1,2,3,... \tag{3.70}$$

dir $\left(\beta_0=\int_{\mathbb{R}}d\lambda(t)=m_0\right)$. Benzer şekilde $\sigma_{k+1,k}=0$ oluşu

$$0=\int_{\mathbb{R}}\left[(t-\alpha_k)\pi_k(t)-\beta_k\pi_{k-1}(t)\right]p_k(t)\,d\lambda(t)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\pi_k(t)tp_k(t)\,d\lambda(t)-\alpha_k\sigma_{kk}-\beta_k\sigma_{k-1,k}$$

eşitliğini verir. (3.67)' i

$$tp_k(t)=p_{k+1}(t)+a_k p_k(t)+b_k p_{k-1}(t) \tag{3.71}$$

formunda kullanmak

$$0=\sigma_{k,k+1}+(a_k-\alpha_k)\sigma_{kk}-\beta_k\sigma_{k-1,k}$$

ifadesini verir. Buradan , (3.70) ve $\sigma_{-1,\ell}=0$ ile

$$\alpha_0=a_0+\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{00}}$$

$$\alpha_k=a_k-\frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}+\frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{kk}} \quad , \qquad k=1,2,3,...$$

olur. σ_s , (3.69)' da k yerine $k-1$ yazarak ve (3.71)' de k yerine ℓ yazarak elde edilen

$$\sigma_{k\ell}=\sigma_{k-1,\ell+1}-(\alpha_{k-1}-a_\ell)\sigma_{k-1,\ell}-\beta_{k-1}\sigma_{k-2,\ell}+b_\ell\sigma_{k-1,\ell-1}$$

yinelemesini sağlar. Böylece ilk $2n$ modifiye momentlerden ilk n yineleme katsayılarını hesaplamak için aşağıdaki algoritma elde edilir.

3.4.4.1.1 Algoritma (modifiye Chebyshev algoritması):

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{m_1}{m_0}$$

$$\beta_0 = m_0$$

$$\sigma_{-1,\ell} = 0 \quad , \qquad \ell = 1,2,\dots,2n-2$$

$$\sigma_{0,\ell} = m_\ell \quad , \qquad \ell = 0,1,\dots,2n-1 \tag{3.72}$$

(Eğer $n>1$ ise): $k = 1,2,\dots,n-1$ için

$$\sigma_{k\ell} = \sigma_{k-1,\ell+1} - \left(\alpha_{k-1} - a_\ell\right)\sigma_{k-1,\ell} - \beta_{k-1}\sigma_{k-2,\ell} + b_\ell \sigma_{k-1,\ell-1} \quad ,$$
$$\ell = k, k+1,\dots,2n-k-1 \tag{3.73}$$

$$\alpha_k = a_k + \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{kk}} - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,\ell-1}} \qquad ; \quad \beta_k = \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_{k-1,k-1}}$$

Agoritma girdiyi $\{m_\ell\}_{\ell=0}^{2n-1}$ ve $\{a_k, b_k\}_{k=0}^{2n-2}$ gibi ister ve $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=0}^{n-1}$ 'i üretir. Aritmetik işlem terimlerinin hatası $\mathrm{O}\left(n^2\right)$ ' dir [15].

3.5 Gauss-Tipi İntegrasyon Formülünün Hesaplanması

3.5.1 Gauss integrasyon formülü

Gauss integrasyon formülü

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\lambda(t) = \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^G f\left(\tau_v^G\right) + R_n^G(f) \tag{3.74}$$

dir. Bunun hesaplanmasına yardımcı olacak ipucu, $d\lambda$ (pozitif) ölçümün $J_n(d\lambda)$ Jacobi matrisinin spectral ayrışımından gelir. Teorem 3.2.2.3' ten $\pi_n(\cdot\,; d\lambda)$ ' nın kökleri olan $\tau_v^G = \tau_v^{(n)}$ Gauss integrasyon noktalarının, $J_n(d\lambda)$ ' nın öz değerleri olduğu bilinmektedir. υ_v, $\tau_v^{(n)}$ öz değerlerine karşılık gelen $J_n(d\lambda)$ ' nın normalize edilmiş öz vektörleri olmak üzere karşılıklı normalize edilmiş öz vektörler

$V=\left[\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n\right]$ ile gösterilsin. Böylece V, $J=J_n\left(d\lambda\right)$' nın spectral ayrışımını etkileyen ortogonal matristir ve

$$JV=VD_\tau\ ,\quad D_\tau=diag\left(\tau_1^G,\tau_2^G,...,\tau_n^G\right) \tag{3.75}$$

şeklindedir.

Teorem 3.5.1.1: $n-$ nokta Gauss integrasyon kuralının τ_v^G, $v=1,2,...,n$ noktaları $J_n\left(d\lambda\right)$ Jacobi matrisinin özdeğerleridir. $\beta_0=\int_{\mathbb{R}} d\lambda(t)$ ve $\upsilon_{v,1}$, τ_v^G öz değerlerine karşılık gelen υ_v normalize edilmiş özvektörün birinci bileşeni olmak üzere λ_v^G, $v=1,2,...,n$ ağırlıkları

$$\lambda_v^G=\beta_0\upsilon_{v,1}^2 \tag{3.76}$$

dir [15].

İspat 3.5.1.1: $\tilde{\pi}_k\left(t\right)=\tilde{\pi}_k\left(t;d\lambda\right)$, $d\lambda$ ölçümüne bağlı ortonormal polinomlar ve

$$\tilde{\pi}\left(t\right)=\left[\tilde{\pi}_0\left(t\right),\tilde{\pi}_1\left(t\right),...,\tilde{\pi}_{n-1}\left(t\right)\right]^T$$

(3.16)' daki gibi bunların ilk n tanesinin vektörü olsun. Teorem 3.2.2.3 ve Sonuç3.2.2.3 ile

$$\beta_0\upsilon_{v,1}^2=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\tilde{\pi}_k\left(\tau_v^G\right)\right]^2}\quad ,\quad v=1,2,...,n \tag{3.77}$$

olur. Diğer taraftan (3.74)' deki Gauss formülünde $f\left(t\right)=\tilde{\pi}_k\left(t\right)$, $k\le n-1$ alınması, $\tilde{\pi}_0=\beta_0^{-1/2}$ olduğuna dikkat edilmesi ve ortogonalliğin kullanılması ile

$$\beta_0^{1/2}\delta_{k,0}=\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^G\tilde{\pi}_k\left(\tau_v^G\right)\quad ,\quad \delta_{k,0}$$

Kronecker delta elde edilir veya P, özvektörlerin matrisi ve λ^G, Gauss ağırlıklarının vektörü, $P=\left[\tilde{\pi}\left(\tau_1^G\right),\tilde{\pi}\left(\tau_2^G\right),...,\tilde{\pi}\left(\tau_n^G\right)\right]$, $\lambda^G=\left[\lambda_1^G,\lambda_2^G,...,\lambda_n^G\right]^T$ ve $e_1^T=\left[1,0,...,0\right]\in\mathbb{R}^n$ ilk koordinat vektörü olmak üzere

$$\mathrm{P}\lambda^G = \beta_0^{1/2} e_1 \tag{3.78}$$

matris formunda yazılabilir. P' nin sütunları birbiriyle ortogonal olduğundan

$$\mathrm{P}^T\mathrm{P} = D_\pi \ , \qquad D_\pi = diag\left(d_0, d_1, ..., d_{n-1}\right), \quad d_{\nu-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\tilde{\pi}_k\left(\tau_\nu^G\right)\right]^2$$

sağlanır. $e = [1,1,...,1]^T \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere (3.78)' i soldan P^T ile çarpmakla

$$D_\pi \lambda^G = \beta_0^{1/2}\mathrm{P}^T e_1 = \beta_0^{1/2}\beta_0^{-1/2} e = e$$

elde edilir. Buradan $\lambda^G = D_\pi^{-1} e$ olur, yani

$$\lambda_\nu^G = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\tilde{\pi}_k\left(\tau_\nu^G\right)\right]^2} \ , \qquad \nu = 1, 2, ..., n$$

şeklindedir. (3.76)' da öne sürülen (3.77)' den bulunur [15].

Teorem 3.5.1.1 Matlab'da yazılmış ortogonal polinomlar paketinde uygulanır.
.

Açıklama: f yeterince düzgün fonksiyon ise, örneğin τ_ν^G Gauss integrasyon noktalarını içeren bir aralıkta analitik ise , $f(J)$, $J = J_n(d\lambda)$ anlamlıdır ve (3.74) deki Gauss integrasyon toplamı,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^G f\left(\tau_\nu^G\right) = \beta_0 e_1^T f(J) e_1 \ , \quad e_1^T = [1, 0, ..., 0] \in \mathbb{R}^n \tag{3.79}$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.75) ve (3.76) kullanılarak

$$\beta_0 e_1^T f(J) e_1 = \beta_0 e_1^T V f(D_\tau) V^T e_1 = \beta_0 \sum_{\nu=1}^{n} \upsilon_{\nu,1}^2 f\left(\tau_\nu^G\right) = \sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^G f\left(\tau_\nu^G\right) \tag{3.80}$$

elde edilir [15].

Sonuç 3.5.1.1:

$\lambda^G = \left[\lambda_1^G, \lambda_2^G, ..., \lambda_n^G\right]^T$ ve $D_\tau = diag\left(\tau_1^G, \tau_2^G, ..., \tau_n^G\right)$ olsun. O zaman

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\lambda^G}^T \\ \sqrt{\lambda^G} & D_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\beta_0} e_1^T \\ \sqrt{\beta_0} e_1 & J_n(d\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

olacak şekilde bir $Q \in \mathbb{R}^n$ ortogonal matrisi vardır. Sağdaki matris $d\lambda$ ölçümlü Jacobi matrisinin bir genişletilmişi olarak düşünülebilir [15].

.

4. BÖLÜM

BAZI YÜKSEK SALINIMLI İNTEGRALLER İÇİN UYGUN GAUSS VE FİLON-TİPİ METOTLAR

(1.1) integrali

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\omega}{x^r}\right) f(x)\,dx = \int_0^1 \left[1+\sin\left(\frac{\omega}{x^r}\right)\right] f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

formunda yazılabilir. Böylece orjinal integrali hesaplamak için sağ taraftaki ilk integral için (1.4) ağırlık fonksiyonuna bağlı $n-$nokta Gauss integrasyon kuralı ve ikincisi için $[0,1]$ üzerinde Gauss-Legendre kuralı uygulanır. (1.2) integrali içinde aynı yöntem kullanılır.

4.1 Genelleştirme

Önceki bölümlerde gösterilen Gauss integrasyon kuralları, $[0,1]$ üzerinde $h(x)\neq 0$ ve $h'(x)\neq 0$ olduğunda $q(x)=x^{-r}h(x)$ olmak üzere

$$I[\psi]=\int_0^1 \psi(x)e^{iq(x)}dx = I_c[\psi]+iI_s[\psi] \;\; , \;\; q(x)=\omega g(x) \tag{4.1}$$

formundaki integrallerde kullanılabilir. Örneğin;

$$I_s[f,h]=\int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{h(x)}{x^r}\right)dx \tag{4.2}$$

integralini düşünelim. Uygun bir tamsayı ya da $m\geq r$ reel sayısı kullanılarak

$$u=\varphi(x)=\left(\frac{h(1)}{h(x)}x^r\right)^{1/m} \tag{4.3}$$

değişken değişikliği yapıldığında integral,

$$I_s[f,h]=\int_0^1 \frac{f\left(\varphi^{-1}(u)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(u)\right)}\sin\left(\frac{h(1)}{u^m}\right)du$$

formunda yazılabilir.

Eğer f yeterince düzgün ve $[0,1]$ üzerinde $\varphi'(x)\neq 0$ ise $\{u_k, w_k\}_{k=1}^n$' lar integrasyon noktaları ve $1+\sin\left[h(1)/u^m\right]$ ağırlık fonksiyonuna bağlı Gauss kuralının ağırlıkları ve $k=1,2,...,n$ için $\varphi(x_k)=u_k$ olmak üzere

$$I_s[f,h]\approx\sum_{k=1}^n w_k\frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}-\int_0^1 f(x)dx \tag{4.4}$$

bulunur. Her bir k için $(0,1]$ aralığında $\varphi(x)=u_k$' nın tek reel kökü, uygun bir kök bulma algoritması kullanılarak hesaplanabilir. Örneğin,

$$\underbrace{\varphi(x)-u_k}_{F(x)}=0 \quad , \quad k=1,...,n \text{ için } \quad x_{k+1}=x_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

Newton metodu kullanılabilir.

Teorem 4.1.1: $[0,1]$ üzerinde $rh(x)-xh'(x)\neq 0$ ve $h(x).h'(x)\neq 0$ olmak üzere $h\in C^1[0,1]$ olsun ve φ, (4.3)' deki gibi tanımlansın. O zaman herhangi bir $0<c<1$ için $\varphi(x)-c$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tek bir köke sahiptir [2].

İspat 4.1.1: $[0,1]$ aralığı üzerinde $h(x)h'(x)\neq 0$ ve $rh(x)-xh'(x)\neq 0$ olması, $(0,1]$ aralığı üzerinde $\varphi'(x)\neq 0$ olmasını gerektirir. Genelliği bozmadan $\varphi'(x)>0$ olduğu varsayılabilir. $F(x)=\varphi(x)-c$ olsun. $(0,1]$ aralığı üzerinde $F'(x)=\varphi'(x)>0$ olduğundan, $F(x)$ fonksiyonu bu aralıkta artandır ve bu yüzden $F(x)$, $(0,1)$ aralığında en çok bir basit köke sahiptir. Bu kökün varlığı $F(0)=-c<0<F(1)=1-c<1$ ve ortalama değer teoreminden bulunur [2].

4.2 $[1,\infty]$ Aralığında Filon Metodunun Uygulanması

$\alpha,\beta,r \quad \{\alpha>0\ ,\ r\geq 1\}$ koşulunu sağlayan reel sayılar, f reel değerli türevlenebilen sürekli fonksiyon ve $f(\infty)=0$ olmak üzere

$$I_s[f;r,\alpha,\beta]:=\int_1^\infty t^{r-1}f(t)\sin\left(\alpha t^r+\beta\right)dt \tag{4.5}$$

$$I_c[f;r,\alpha,\beta]:=\int_1^\infty t^{r-1}f(t)\cos\left(\alpha t^r+\beta\right)dt \tag{4.6}$$

integralleri için uygun Filon tipi metotları inceleyelim:

φ ve g düzgün fonksiyonlar $P_n(x)$, φ için *n.* dereceden Hermite interpolasyon polinomu olmak üzere, $\int_a^b \varphi(x)e^{i\omega g(x)}dx$ formundaki bir integral için genelleştirilmiş Filon metodu,

$$Q^F[\varphi]=\int_a^b P_n(x)e^{i\omega g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Filon tipi metotların $|\omega|$ arttıkça doğru sonuçlar verdiği bilinmektedir. Ancak (4.5)' de integrasyon aralığı sınırsız ve $f(\infty)=0$ olduğundan f fonksiyonuna polinomlar tarafından yaklaşmak imkansızdır. Bu yüzden (4.5) integrali için $\beta=0$ (genelliği bozmaksızın) alınması ile aşağıdaki Filon metodunun modifiye versiyonunu kullanmak çok uygundur:

$x_1=1<x_2<\ldots<x_m$ noktalar kümesinde $\tilde{f}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{x^k}$,

$$\tilde{f}_n^{(k)}(x_j)=f^{(k)}(x_j) \quad , \quad k=0,\ldots,n_j-1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m}n_j=n$$

denklem sistemiyle belirlenmek üzere

$$Q_{n,s}^F[f]=\int_1^\infty x^{r-1}\tilde{f}_n(x)\sin\alpha x^r dx=\sum_{k=1}^{n}c_k\int_1^\infty x^{r-k-1}\sin\alpha x^r dx \tag{4.7}$$

dir. $Ei(a,z)$, genelleştirilmiş üssel integral fonksiyonu

$$Ei(a,z) = \int_1^\infty t^{-a} e^{-zt} dt = z^{a-1}\Gamma(1-a,z) \ , \ \left(a>0,\, \Re(z)\geq 0\right) \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\mu_{k,r}^{s} = \int_1^\infty x^{r-k-1} \sin\alpha x^r dx = -\frac{1}{r}\Im\left[Ei\left(\frac{k}{r}, i\alpha\right)\right], i=\sqrt{-1}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Burada $\Re(z)$ ve $\Im(z)$ sırasıyla z ' nin reel ve sanal kısımlarını, ayrıca $\Gamma(.\,,\,.)$ tamamlanmamış Gama fonksiyonunu gösterir. Sonuç olarak (4.5) integrali için modifiye Filon metodu,

$$Q_{n,s}^{F}[f] = -\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n} c_k \Im\left[Ei\left(\frac{k}{r}, i\alpha\right)\right] \tag{4.9}$$

formunda ifade edilebilir. Benzer olarak $\beta = 0$ ile (4.6) için aşağıdaki Filon - tipi formül elde edilir:

$$Q_{n,c}^{F}[f] = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n} c_k \Re\left[Ei\left(\frac{k}{r}, i\alpha\right)\right] \tag{4.10}$$

Üstel integrali tam olarak hesaplamaya yarayan algoritmalar ve bilgisayar programları vardır. Örneğin Maple ve Mathematica'daki programlar, (4.8)' deki üstel integrali istenilen doğrulukta hesaplayabilir.

f , $[0,1]$ üzerinde yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{\omega}{x^r}\right)dx \text{ ve } \int_0^1 f(x)\cos\left(\frac{\omega}{x^r}\right)dx \quad , \quad \left(r>0,\ \omega\approx 1\right)$$

integralleri $x = \dfrac{1}{t}$ değişken değişikliği yapılarak

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\sin\left(\omega t^r\right)dt \text{ ve } \int_1^\infty \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\cos\left(\omega t^r\right)dt$$

formunda yazılabilir ve yukarıda tanımlanan filon tipi metotlar bu integrallere uygulanabilir.

Teorem 4.2.1: Eğer $f\in C^1[1,\infty)$, $f(\infty)=0$ ve $f'\in L^1[1,\infty]$ ise, $r\geq 1$, $\alpha>0$ ve β reel sayılar olmak üzere

$$\left|I_s[f;r,\alpha,\beta]\right|\leq \frac{1}{\alpha r}\left[\left|f(1)\cos(\alpha+\beta)\right|+\int_1^\infty \left|f'(t)\right|dt\right] \tag{4.11}$$

$$\left|I_c[f;r,\alpha,\beta]\right|\leq \frac{1}{\alpha r}\left[\left|f(1)\sin(\alpha+\beta)\right|+\int_1^\infty \left|f'(t)\right|dt\right] \tag{4.12}$$

dir [21].

İspat 4.2.1: (4.5) integraline kısmi integrasyon uygulanarak, (4.11) sonucunun izlendiği

$$I_s[f;r,\alpha,\beta]=\frac{1}{\alpha r}\left[\int_1^\infty f'(t)\cos\left(\alpha t^r+\beta\right)dt+f(1)\cos(\alpha+\beta)\right] \tag{4.13}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde kısmi integrasyonla (4.6) integrali

$$I_c[f;r,\alpha,\beta]=-\frac{1}{\alpha r}\left[\int_1^\infty f'(t)\sin\left(\alpha t^r+\beta\right)dt+f(1)\sin(\alpha+\beta)\right] \tag{4.14}$$

formunda yazılabilir. Böylece (4.12) eşitsizliği bu denklemden kolayca elde edilir [21].

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 4.2.1’ in sonuçlarıdır.

Sonuç 4.2.2: $f'(t)$, $(1,\infty)$ aralığında $\{t_1,t_2,...,t_m\}$ gibi sonlu sayıda basit reel köke sahipse, Teorem 4.2.1’ den

$$\max\left\{\left|I_s[f;r,\alpha,\beta]\right|,\left|I_c[f;r,\alpha,\beta]\right|\right\}\leq \frac{2}{\alpha r}\left(\left|f(1)\right|+\sum_{i=1}^{m}\left|f(t_i)\right|\right) \tag{4.15}$$

eşitsizliği elde edilir [21].

İspat 4.2.2: Sonuç , (4.11) ve (4.12) eşitsizliklerinden elde edilir [21].

Not: f', $(1,\infty)$ aralığında reel köke sahip değilse (4.15) ifadesinde sağ taraftaki parantezde sadece ilk terim kalacağına dikkat ediniz.

Sonuç 4.2.3: Teorem 4.2.1’ den

$$\lim_{r\to\infty} I_s\left[f;r,\alpha,\beta\right] = \lim_{r\to\infty} I_c\left[f;r,\alpha,\beta\right] = 0 \;, \tag{4.16}$$

$$\left|\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}\sin\left(\alpha t^r+\beta\right)dt\right| \le \frac{2}{r\alpha} \quad , \tag{4.17}$$

$$\left|\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}\cos\left(\alpha t^r+\beta\right)dt\right| \le \frac{2}{r\alpha} \quad , \tag{4.18}$$

elde edilir [21].

İspat 4.2.3: İlk iki sonuç direkt Teorem 4.2.1' in sonucudur. (4.11)' de $f(t)=e^{-t}$ alınarak ve

$$\left|\int_0^1 t^{r-1}e^{-t}\sin\left(\alpha t^r+\beta\right)dt\right| \le \frac{1}{r\alpha} \tag{4.19}$$

sonucu kullanılarak (4.17) elde edilir. (4.18) sonucu da benzer yolla elde edilir [21].

Şimdi de genelde daha iyi sonuç veren aşağıdaki teorem verilecektir, ancak burada r ' ye bağlı olarak maksimum normun ya da f' ve f'' nün L^1 normunun yeterince küçük üst sınır bulundurması istenir.

Teorem 4.2.4: $f \in C^2 \cap L^1[1,\infty]$, $k=0,1,2$ için $\left\| f^{(k)} \right\|_\infty = M_k \le M$ ve $k=0,1,2$ için $\int_1^\infty \left| f^{(k)}(t)\,dt \right| = A_k$ var olsun.

$$E_r(f) = \begin{cases} A_1 + A_2 & , \quad 1 \le r \le 2 \;; \\ 2M & , \quad 2 < r < \infty \end{cases} \tag{4.20}$$

olmak üzere

$$\left|I_s\left[f;r,\alpha,\beta\right]\right| \le \frac{1}{r\alpha}\left| f(1)\cos(\alpha+\beta) - \frac{f'(1)}{r\alpha}\sin(\alpha+\beta)\right| + \frac{E_r(f)}{r^2\alpha^2} \tag{4.21}$$

$$\left|I_c\left[f;r,\alpha,\beta\right]\right| \le \frac{1}{r\alpha}\left| f(1)\sin(\alpha+\beta) - \frac{f'(1)}{r\alpha}\cos(\alpha+\beta)\right| + \frac{E_r(f)}{r^2\alpha^2} \tag{4.22}$$

dir [21].

İspat 4.2.4: Hipotezden $k = 0,1,2$ için $f^{(k)}(\infty) = 0$' dır. Eşitsizlikler, (4.13) ve (4.14)' ün sağ tarafındaki her bir integrale kısmi integrasyon uygulanarak bulunur [21].

5. BÖLÜM

UYGULAMALAR ve NÜMERİK SONUÇLAR

Örnek 5.1: Bu örnekte, dördüncü bölümde bahsedilen genelleştirme $g(x)$' nin $g(x)=1/[(x-x_1)^{r1}(x-x_2)^{r2}]$ olma durumu için genelleştirilecektir.

$$I=\int_0^1 \sin\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}-x\right)}dx$$

integralini hesaplayalım.

Bu integralde $r=1$ ve $h(x)=1/(1/2-x)$' dir. $rh(x)-xh'(x)\neq 0$ olmalıdır. Fakat $x=1/4$ için $rh(x)-xh'(x)=0$' dır. Bu yüzden

$$I=\int_0^1 \sin\frac{1}{x(1/2-x)}\,dx$$

integralini

$$I=\underbrace{\int_0^{1/6} \sin\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}-x\right)}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{1/6}^{1/3} \sin\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}-x\right)}dx}_{I_2}+\underbrace{\int_{1/3}^{1/2} \sin\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}-x\right)}dx}_{I_3}+\underbrace{\int_{1/2}^{1} \sin\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}-x\right)}dx}_{I_4}$$

şeklinde yazarız.

I_1 integralinde, $x=\frac{1}{6}t$ değişken değişikliği yapılırsa

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{6}\sin\left(\frac{36}{t(3-t)}\right)dt$$

olur.

I_2 integrali, tekillik olmadığı için Gauss - Legendre ile hesaplanır.

I_3 integralinde, önce $\frac{1}{2}-x=t$ değişken değişikliği yapılırsa

$$I_3=\int_0^{1/6}\sin\frac{1}{t\left(\frac{1}{2}-t\right)}dt$$

olur. Daha sonra $t=\frac{1}{6}u$ değişken değişikliği yapılarak I_3 integrali,

$$I_3=\int_0^1\frac{1}{6}\sin\left(\frac{36}{u(3-u)}\right)du$$

formunda yazılabilir.

I_4 integralinde, önce $\frac{1}{2}-x=t$ değişken değişikliği yapılırsa

$$I_4=\int_{-1/2}^{0}\sin\frac{1}{t\left(\frac{1}{2}-t\right)}dt$$

olur. Daha sonra $t=-\frac{1}{2}u$ değişken değişikliği yapılarak I_4 integrali,

$$I_4=-\int_0^1\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4}{u(u+1)}\right)du$$

formunda yazılabilir. Böylece Mathematica kullanılarak

$$I_1=I_3=0,007522581766$$

$$I_2=-0,1096883593189$$

$$I_4=-0,009936039471$$

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=-0,104579235257$$

sonuçları elde edilir. I integralinin gerçek değeri, $I=-0,10457923525754915$’ dir.

Örnek 5.2:

$$I_A=\int_0^1\sin\frac{x+1}{x}dx \quad , \quad I_B=\int_0^1\sin\frac{\cos x}{x}dx \quad , \quad I_C=\int_0^1 e^{-x}\sin\frac{e^x}{x^2}dx$$

integrallerini düşünelim. (4.3)’ de $m = r$ alınmasıyla ve $\varphi(x) - u_k$’ nın köklerini bulmak için $1/10$ başlangıç değeri ile Newton - Rapshon metodunun kullanılmasıyla 10- nokta Gauss kuralı uygulandı. I_A için çift doğruluklu aritmetik , I_B ve I_C için 18- nokta Gauss kuralı kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edildi,

$$I_A \approx \underline{0,2013192301645}3 \quad , \quad I_B \approx \underline{0,46672831802273}8 \quad , \quad I_C \approx \underline{-0,068113164603717}$$

Altıçizili basamaklar doğru basamak sayısını göstermektedir. Yukarıdaki integrallerde her bir kökü 15 basamak doğrulukla hesaplamak için 4 ya da 5 Newton iterasyonu gereklidir [2].

5.1 Nümerik Örnekler

Bu kısımda (1.1) ve (1.2) integrallerine, (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonlarına göre kurulan Gauss integrasyon kurallarıyla, yüksek doğrulukla başarılı yaklaşımların gerçekleştirilebileceği nümerik örneklerle gösterilecektir.

Tablo 5.1.1’ de seçilen integraller, Tablo 5.1.2’ de de, Tablo 5.1.1’ de seçilen integraller için Program 1-2 ile bulunan (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonlarına bağlı N-nokta Gauss integrasyon kuralının sonuçları yer alacaktır. Program 1 ve Program2’ i görmek için [1]’ e bakılabilir.

Tablo 5.1.1 Seçilen İntegraller

İntegral	*Kaynak*
$I_1 = \int_0^1 \frac{-8x}{x^4+4} \cos\frac{\omega}{x^2} dx$	[1]
$I_2 = \int_0^1 \frac{\pi r}{x^{1+r/2}} \sin\frac{\pi}{2x^r} dx$	[1]
$I_3 = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{x^r}\right) \sin\frac{1}{x^r} dx$	[1]
$I_4 = \int_0^1 e^{5x} \sin\frac{\omega}{x^r} dx$	[1]

Tablo 5.1.2 Tablo 5.1.1' deki integraller için, Program 2' de $d = PR = 16$ basamak aritmetiği kullanılarak, Program 1-2 ile bulunan N-nokta Gauss integrasyon kuralının ((1.4) ve (1.5)' e bağlı) sonuçları

$\dot{I}ntegral$	ω	r	N	$N-nokta\,Gauss\,kuralı$	$Tam\,değer\left(yuvarlatılmış\right)$
I_1	1	2	12	$0,094652806418777$	$0,094652806418777$
I_2	$\dfrac{\pi}{2}$	15	12	$0,387929217969669$	$0,387929217969663$
I_3	1	$\sqrt{2}$	36	0,100858428460946	0,100858428460945
I_4	1	200	10	$0,461841915645013$	$0,461841915645013$

Tablo 5.1.1' deki integraller ve Tablo 5.1.2' deki sonuçlar [1]' den alınmıştır.

Örnek 5.3:

Burada önceki bölümlerde geliştirilen modifiye Filon metotlarının ve Gauss integrasyon kurallarının performansını test etmek için bazı nümerik örnekler verilecektir. Bu amaçla Tablo 5.1.3' deki integraller seçildi. Bazı seçilmiş n değerleri için Gauss ve modifiye Filon metotları ile elde edilen sonuçlar Tablo 5.1.4 de gösterildi.

Buradaki tüm hesaplamalar Pentium 4 işlemci ile PC üzerinde Mathematica5.2 kullanılarak bulundu. Momentler ve $\{\alpha_k, \beta_k\}$ yineleme katsayıları, $(6n+60)$- basamak aritmetiği kullanılarak hesaplandı. Filon metotları için lineer sistemler Mathematica' da NSolve kullanılarak çözülür ($n < 30$ ise çift doğruluklu aritmetik, $30 \le n < 60$ ise 32-basamak ve $n \ge 60$ ise 64-basamak aritmetik kullanılır). Gauss integrasyon kuralının ağırlıkları ve integrasyon noktaları, çift doğruluklu aritmetik kullanılarak hesaplanır.

Tablo 5.1.3 (*) ile gösterilen sonuçlar, (1.4) ve (1.5)' e bağlı Gauss kuralları ile integrasyon noktaları ve ağırlıklar hesaplanırken 32 - basamak aritmetik kullanılarak elde edildi

İntegral	*Tam değer* (**yuvarlatılmış*)
$I_1 = \int_0^1 x^{1-\sqrt{2}} \sin x^2 \sin \frac{1}{x^2} dx$	$0,2108267488780897*$
$I_2 = \int_1^\infty 100 e^{-x/5} x^{40} \sin x^{50} dx$	$0,9674008025530341*$
$I_3(\omega, r) = \int_0^1 x^{\sqrt{5}} e^{-1/x^r} \sin \frac{\omega}{x^r} dx$	$\frac{1}{r} \Im \left[Ei\left(\frac{r+\sqrt{5}+1}{r}, 1-i\omega \right) \right]$

Tablo 5.1.4 (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonlarına göre $Q_n^G[f]$ n- nokta Gauss integrasyon formülü ve N, metot için Hermite interpolasyon polinomunun derecesini göstermek üzere $Q_{N-1}^F[f, f']$ modifiye Filon metoduyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması

İntegral	*n*	$Q_n^G[f]$	$Q_{n-1}^F[f, f']$	$Q_{2n-1}^F[f, f']$
I_1	10	$\underline{0,21082674887809}$	$\underline{0,2108267}6492354$	$\underline{0,21082674887809}$
I_2	22	$\underline{0,96740080255303}$	$\underline{0,967}37260442054$	$\underline{0,9674}6535278260$
$I_3(1,1)$	32	$\underline{0,07449217124069}$	$\underline{0,074492}22852674$	$\underline{0,07449217}218900$
$I_3(1,10)$	48	$\underline{0,01610972079229}$	***	***

Doğru basamakların altı çizilmiştir. $r \geq 10$ için $I_3(1,r)$ integrali NSolve ile çözüldüğünde $Q_n^F[f, f']$ için lineer sistemin çözümünde "underflow" hatası verir ve herhangi bir sonuç vermez. Hatta WorkingPrecision$\to$2000 kullanılsa bile herhangi bir sonuç vermez. Bu underflow problemi $\exp(1/x^r)$ fonksiyonunda r' lerin artışından kaynaklanır.

Tablo 5.1.3' deki integraller ve Tablo 5.1.4' deki sonuçlar [2]' den alınmıştır. Tablolardan da görüldüğü gibi Gauss integrasyon formülü, modifiye Filon metodundan daha iyi netice vermektedir.

6. BÖLÜM
SONUÇLAR

(1.1) ya da (1.2) formundaki yüksek salınımlı integrallere klasik integrasyon kurallarıyla yüksek doğrulukla yaklaşmak zordur.

Bu çalışmada bahsedilen integralleri yüksek doğrulukla hesaplamak için (1.4) ve (1.5) ağırlık fonksiyonlarına bağlı olarak önceki çalışmalarda kurulan Gauss integrasyon kuralları verildi. Bu ağırlık fonksiyonlarıyla ilgili olarak ortogonal polinomların üç terimli yineleme katsayıları α_k ve β_k' ların, yüksek duyarlıklı aritmetik kullanılarak daha az hesap gerektiren Chebyshev algoritması ile momentlerden hesaplanabileceği belirtildi. Gauss kurallarının integrasyon noktaları ve ağırlıkları yüksek duyarlıklı aritmetik kullanılarak hesaplanırsa bu yolla elde edilen sonuçlar, sonuçların doğruluğunu test etmek için diğer metotlardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir.

.

Dördüncü bölümde uygun Gauss kurallarının, $h(x)h'(x) \neq 0$ olmak üzere çekirdeği $\sin\left(h(x)/x^r\right)$ formunda olan çok genel integraller için kullanılabileceği belirtildi. Daha sonra (1.1) ve (1.2) integrallerinde $x = 1/t$ değişken değişimi yapıldı. Böylece tanım aralığındaki tekillik sonsuza atılarak integral daha düzgün hale getirildi ve elde edilen integraller için Filon-tipi metotlar oluşturuldu. Dördüncü bölümde bahsedilen genelleştirme, beşinci bölüm Örnek 5.1' de paydaya başka kökler eklenerek biraz daha genelleştirildi.

İleride $h(x)h'(x) = 0$ olma durumu göz önünde bulundurularak yeni çalışmalar yapılabilir. Ayrıca momentler için yineleme bağıntılarının analizinin teoriksel nümerik kararlılığı ve metotların başka genelleştirmeleri hakkında çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hascelik, A.Ihsan (2009a). On numerical computation of integrals with integrands of the form $f(x)\sin(\omega / x^r)$ on $[0,1]$. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **223**, 399-408

[2] Hascelik, A.Ihsan (2009b). Suitable Gauss and Filon-type methods for oscillatory integrals with an algebraic singularity. *Applied Numerical Mathematics*, **59,** 101-118

[3] Gautschi, W.(2005). Computing polynomials ortogonal with respect to densely oscillating and exponentially decaying weight functions and related integrals, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **184,** 493-504

[4] Stieltjes, T.J. (1884). Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. *Annales Scientifiques de I' Ecole Normale Paris, Sér 3,* **1**, 409-426.

[5] Lanczoz, C. (1950). An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of research of the National Bureau of Standards 45* **(4)**, 255-282.

[6] Rutishauser, H. (1963). On Jacobi rotation patterns. In N.C. Metropolis, A.H. Taub, J. Todd, and C.B. Tompkins (Eds), *Experimental Arithmetichs, high speed computing and mathematics,* **15** of Proceedings of *symposia in applied mathematics* pp. 219-239. Providence, RI: American Mathematical Society

[7] Iserles, A., and Norsett, S.P.(2005). Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivaties, *Proceeding of the Royal Society of London A* **461,** 1383-1399

[8] Olver, S.(2006). Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions, *IMA Journal of Numerical Analysis,* **26,** 213-227

[9] Filon, L. N. G. (1928). On a quadrature formula for trigonometric integrals, *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh* **49,** 38-47

[10] Flinn, E. A. (1960). A modification of Filon's method of numerical integration *Journal of the Association for Computing Machinery* **7,** 181-184

[11] Iserles, A. , Norsett S.P., and Olver, S.(2006). Highly oscillatory quadrature: the story so far. *In: Proceedings of E.Numath, Santiago de Compostela.* Springer, Berlin, pp.97-118

[12] Levin, D. (1997). Analysis of a collocation method for integrating rapidly oscillatory functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **78,** 131-138

[13] Olver, F.W.J. (1974). *Asymptotics and special functions.* New York: Macmillan.

[14] Stein, E. (1993). *Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

[15] Gautschi,W.(2004). *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation,* Oxford University Press.

[16] Bulirsch, R., and Stoer, J. (1979). *Introduction to Numerical Analysis.* Springer Verlag. New York

[17] Hascelik, A.Ihsan (2008). Modified anti-Gauss and degree optimal average formulas for Gegenbauer measure. *Applied Numerical Mathematics,* **58**, 171- 179

[18] Hascelik, A.Ihsan (2006). Gauss quadrature rules for a generalized Hermite function . *Applied Mathematics and Computation,* **180,** 86-96

[19] Gautschi, W. (1982). On generating ortogonal polynomials. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 3***(3),** 289-317

[20] Chebyshev, P. L. (1859). Sur I' interpolation par la methode des moindres carrés. *Mémoires de 1'Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbaurg (7) 1***(15),** 1-24.

[21] Hascelik,A.I., and Kaya, L. (2008). Some Bounds for Certain Highly Oscillatory Integrals. *Applied Mathematical Sciences,* **2,** 187-193