GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DENGELİ KARELERİN DOĞAL ALGORİTMASI VE ONLARIN UYGULAMALARI

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜMEYRA GÖKTEPE

TEMMUZ 2009

Dengeli Karelerin Doğal Algoritması ve Onların Uygulamaları

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Sümeyra GÖKTEPE
Temmuz 2009

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Dengeli Karelerin Doğal Algoritmaları ve Onların Uygulamaları
Öğrencinin, Adı Soyadı: Sümeyra GÖKTEPE
Tez Savunma Tarihi: 01.09.2009

Prof. Dr. Ramazan KOÇ

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:
(Ünvanı, Adı ve SOYADI) İmzası

1. Prof. Dr. Adil KILIÇ ______________________

2. Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK ______________________

3. Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ______________________

4. Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN ______________________

5. Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT ______________________

ÖZET

DENGELİ KARELERİN DOĞAL ALGORİTMASI VE ONLARIN UYGULAMALARI

GÖKTEPE Sümeyra
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Temmuz 2009, 73 sayfa

Bu çalışmada, A. A. Abiyev [1] tarafından bulunan dengeli karelerin doğal algoritması incelenmiştir. Dengeli karelerin bazı önemli özellikleri, graflar (çizgeler) ve sayılar teorisinden yararlanılarak açığa çıkarılmıştır.

Sihirli karenin her bir hanesindeki sayılar birer nokta kütle olarak düşünülürse, sistemin kütle merkeziyle geometrik merkezi aynı olacaktır. Bu yüzden, 'sihirli kareler','dengeli kareler' olarak adlandırılmıştır. Karenin merkezindeki en büyük ve en küçük sayıdan yola çıkarak bazı zincirli özdeşlikler ve $x^2+(x+1)^2=z^2$ denklemini sağlayan sayı dizilerinin düzeni incelenmiştir.

Dengeli karelerin bazı uygulama alanları; analiz, graf teorisi, olasılık teorisi, geometri ve astronomidir. Dengeli kare ve dengeli küp yardımıyla uygulamada geliştirilebilecek konulardan bazıları ise; Kriptoloji, (Şifreleme Bilimi), optimal problemler, genetik kodun incelenmesi, şehir planlaması ve mimarlıktır.

Anahtar Kelimeler: Dengeli kareler, doğal algoritma, aritmetik dizi, çizge (graf), kütle merkezi, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları.

ABSTRACT

THE NATURAL ALGORITHM OF THE BALANCED SQUARES AND ITS APPLICATIONS

GÖKTEPE Sümeyra
M. Sc. in Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sabri BİRLİK
July 2009, 73 pages

In this study, the natural algorithms of the balanced squares have been investigated, which is established by A. A. Abiyev [1]. Some important properties of the balanced squares have been revealed by graphs and number theories.

If the numbers in their respective locations in these natural magic squares are considered as point-masses, then the mass center and geometric center of such a system will be the same. For that reason; the 'magic squares' will be called as 'balanced squares'. Also, using the biggest and the smallest numbers in the center of the squares, some chain identities and the number series have been investigated, that provides the equation of $x^2 + (x+1)^2 = z^2$.

Some application areas of the balanced squares are calculus, graphs theory, probability theory and astronomy. The study is under progress for possible applications of balanced squares and cubes; Cryptology, optimal problems, investigation of genetic code, planning of the city and architecture.

Key Words: Balanced squares, natural algorithm, arithmetic sequence, graph, mass center, Fibonacci numbers, Lucas numbers.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada benden yardımlarını esirgemeyen, bana her konuda destek olan kıymetli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK'e ve Prof. Dr. Asker Ali ABİYEV'e, sevgili kardeşlerim Fatih, Dilek ve Ahmet'e, gölgelerini her zaman arkamda hissettiğim çok sevdiğim anne ve babama tüm kalbimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET..i
ABSTRACT..ii
TEŞEKKÜR...iii
İÇİNDEKİLER..iv
1. BÖLÜM: GİRİŞ...1
1.1. n. Dereceden Sihirli Karenin Tanımı... 1
1.2. Sihirli Karelerin Kısa Tarihçesi 2
1.2.1. Lo-Shu 3
1.2.5. Henry Dudeney... 4
1.2.9. A. A. Abiyev...5
2. BÖLÜM: DOĞAL DENGELİ KARELERİN ALGORİTMALARI........................8
2.1. Aritmetik Dizilerin Oluşturulması..8
2.2. Dengeli Karelerin Çerçevelere Ayrılması...9
2.2.1 Çift Dereceden Karelerin Çerçeveleri...9
2.2.2 Merdivenli Çerçeveler..10
2.3. Merdivenli Çerçevelerin Hane Sayısı..14
2.4. Tek Dereceden Karenin Çerçeveler Sayısı...16
2.5. Dengeli Karelerin Çizgeleri..17
2.5.1. Çiftli-Çift Dereceden Dengeli Karelerin Çizgeleri..................17
2.5.2. Tekli-Çift Dereceden Karelerin Çizgeleri........................... 23
2.5.3. Tek Dereceden Karelerin Çizgeleri..23
3. BÖLÜM: DOĞAL DENGELİ KARELERİN ÖZELLİKLERİ............................32
3.1 Tanımlar...32
3.2. Dengeli Karelerin Özellikleri..35
4. BÖLÜM: DENGELİ KARENİN KÜTLE MERKEZİNİN İNCELENMESİ........45
4.1. Kütle Merkezi...45
4.2. Dengeli Kare ve Kütle Merkezi...46
5. BÖLÜM: DENGELİ KARELERİN UYGULAMALARI....................................52
5.1. Yeni Özdeşlik Formülleri...52
5.1.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları İle İlgili Bir Hatırlatma................53
5.1.2. Algoritma..53
5.1.3. Üçgenin Oluşturulması...54
5.1.4. Sol Üçgenin Oluşturulması... 55
5.2. $x^2+(x+1)^2=z^2$ Denklemini Sağlayan Sayı Dizilerinin İncelenmesi....57
5.2.1 Pisagor Üçlüleri.. 58
SONUÇ..70
KAYNAK...71

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. n. Dereceden Sihirli Karenin Tanımı

Herhangi bir kareyi eşit aralıklarla $n-1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) sayıda yatay ve düşey doğrular yardımıyla n^2 sayıda hanelere bölelim. Böyle bir kareye $n.$ dereceden kare diyeceğiz. $\{1, 2, 3, ... n^2 - 1, n^2\}$ sayılar kümesinin elemanlarını $n \times n$ kareye öyle bir yazalım ki, istenen satır, sütun veya köşegenlerdeki n tane sayının toplamı aynı sabit S sayısına eşit olsun. Bu sabite sihirli sayı denir. Sihirli kare tanımına göre tüm hanelerdeki sayıların toplamı nS 'e, diğer yandan ise $1+2+3+\ldots+\left(n^2-1\right)+n^2$ ye eşit olacak, yani

$nS = 1+2+3+...+(n^2-1)+n^2 = \dfrac{1+n^2}{2}n^2$ ye eşittir. Buradan,

$$S = \frac{n.\left(n^2+1\right)}{2} \text{ bulunur.} \tag{1.1}$$

Örneğin n=3 için sihirli sabiti:

$$S = \frac{3.\left(3^2+1\right)}{2} = 15$$

Olacaktır. Aşağıda 3x3 normal bir sihirli kareye örnek verilmiştir. Her üç satırın, üç sütunun ve köşegenlerin toplamı 15 sayısını verir.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Şekil 1.1. 3.dereceden bir sihirli kare

1.2. Sihirli Karelerin Kısa Tarihçesi

Sihirli kareler üzerinde en az 3000 yıldır çalışılmaktadır ve ilk kayda Çin'de M.Ö. 2200 yıllarında rastlanmıştır. Bilinen ilk sihirli kare Lo-Shu sihirli karesidir. Karenin sayılarını düzenli biçimde listeleyen ilk kesin referans M.S. ilk yüzyıla ait olup dolaylı referanslar M.Ö. 4. yüzyılda yaşamış olan filozof Tsou Yon yazıtlarına dayanır.

Bu ilk kayıt olmasına rağmen, öyle görünüyor ki diğer insanlar ilk sihirli kareyi yapmak için numaralarla oynamışlar ve muhtemelen, ilk çağda yaşamış birçok insan onları birbirinden bağımsız olarak keşfetmişlerdi.

Kumda bir motif üzerinde bir yığın taşla oynamış olmalılar veya kare tabanı olarak seçilmiş fıstık istiflemişlerdir. Öyle görünüyor ki M.Ö. 2200 yıllarında ilk basit 3x3 sihirli karesini sadece bir matematikçinin geliştirmesi imkânsızdır. O zamandan beri birçok ulustan insan, sihirli kareleri sevdi, çalıştı ve kaydetti.

Sihirli kareler Çin'de; astroloji, fal bakma, felsefi yorumlama, doğa olayları ve insan davranışları dâhil olmak üzere değişik çalışma alanlarında kullanılmıştır. Çinliler deneme yanılma yöntemiyle bir sihirli kare elde edebilirlerdi. Fakat kendilerine has bir metot geliştirmişlerdi. Lo-shu'nun ilk sihirli özelliği şudur ki tek ve çift sayılar merkez etrafında dizilmişlerdir. Lo-shu sihirli kareleri yüzyıllar boyunca gizli tutulmuştur.

9.yüzyılda Arap astrologlar sihirli kareleri, yıldız falı ve gök haritalarının çiziminde kullanmışlardı.15. yüzyılda Batı Afrika'da bu karelerin manevi bir önemi vardı. Bu kareler elbiseler, maskeler ve dini sanat eserlerinin üzerine işlenmiştir. 19. yüzyılın sonlarında ise matematikçiler sihirli kareleri olasılık ve analiz problemlerinde uygulamaya başlamışlardır.

M.S. 1300 lü yıllarda ise sihirli kareler Batıya yayılmıştır. Alman ressam Albrecht Dürer; 1514 tarihinde oyma baskılı bir sihirli kare bulmuştur.

Sihirli kare kavramı kolay anlaşılır olup, özellikle amatör matematikçiler için çok ilgi çekici olmuşlardır. Benjamin Franklin bile sihirli karelerle amatörce uğraşmış ve 8x8 sihirli karesi oldukça ilginç özellikleriyle ona aittir.

Şimdi de tarihte sihirli karelerle uğraşan bazı bilim adamlarının çalışmalarını inceleyelim.

1.2.1. Lo-shu [2]: Yetenekli bir devlet adamı ve büyük bir bilge olan Çin imparatoru Yü'nün Sarı Irmak'ın kenarında gördüğü bir kaplumbağadan ilham alan Lo-shu sihirli karelerin günümüze kadar sürecek 3000 yıllık serüvenini başlatmış oldu. Çin'de başlayan bu serüven İpek Yolu kervanlarıyla Hindistan'a ve çok sonraları da Eski Yunan'a taşındı. Batıda sihirli karelerle ilgili yazılı kaynak yaklaşık olarak M.S. 130 yılına ait İzmirli Theon'un yapıtıdır.

1.2.2. Yang-hui [3]: 1275'te Yang-hui sihirli karelerin küçük bir koleksiyonunu bir kitap olarak yayınladı. Fakat bunların gerçek anlamlarından habersizdi. Bu kareler 13. yüzyıldan önce Çin'de bilinen üçüncü dereceden büyük ilk karelerdir. Yong-hui'nin karesi diğerlerinden çok daha farklı bir metotla yazılmış olup Lo-shu'nun yazdığı metoda yakın bir metottur.

1.2.3. En iyi bilinen ilk sihirli kare (Albrecht Dürer) [4]: En iyi bilinen ilk sihirli kare muhtemelen 1514'te Albrecht Dürer'in 'Melancholia' adlı kitabında geçen 4x4 sihirli karesidir. Dürer'in kareleri orijin ve anlamları ile ilgili bir çok spekülasyon doğurdu. Bu konu hakkında çok çeşitli açıklamalar yapıldı. Bunlardan biri, bu karelerin orijinal bir yola sahip olması ve birçok karmaşık tercüme oluşturmasıdır. 1496 ve 1508 yılları arasında Lucca Pacioli sihirli kareler üzerine 'De Viribüs quantitiatis'i' yazdı. Bu yazdığı bilgiler Dürer'in 4'lü karelerini tanımlıyordu. Bu tanımlamalar Dürer'in anlatmak istediği karelerin daha kolay anlaşılmasını ve yeniden biçimlendirilmesini sağlıyordu. Bu yeni biçimlendirmede iki satırı ya da sütunu sihirli karenin özellikleri bozulmadan değiştirilebiliyordu.

1.2.4. Benjamin Franklin [5]:1936–37 yıllarında Pennsylvania'da memur iken sihirli karenin yapısal temeliyle uğraşmıştır. Bu karelerin hiç biri tam olarak sihirli değildir. Fakat oluşan karelerin mantıklı ve düzenli gerçek bir sistemle oluşturulduğunu ortaya koymuştur.

1.2.5. Henry Dudeney [6]: 1963 yılında 4. dereceden olası bütün sihirli kareleri ilk defa tanımlayan Frenide'yi örnek olarak almıştır. Dudeney bu sonuçların tekrar tekrar doğrulandığını gösterir. Ayrıca 1910 yılında 'Nature'da yayınlanan ve bu konuyla ilgilenen çocuklar için çok önemli olan Bergholt'un genel çözümünü tanımlar.

1.2.6. Martin Gardner [7]: Matematiğin sapması ile ilgili kitabında, Martin Gardner bir bölümünü sihirli karelere ayırmıştır. Sihirli karelerin de Yunan karakterlerinden farklı Latin karakterleri kullanılarak Euler ile başlayan bir geleneği örnek olarak göstermiş ve 'Latin Kareler' adını bu geleneğe atfetmiştir.

Latin bir karenin her bir Latin harfi sadece bir kez ve sadece her Yunan harfiyle bir kez birleştiğinde bunların ortogonal kareler olduğu gözlenir. Oluşan bu kare 'Graeco-Latin' karesi olarak bilinir.

Gardner araştırmada tesadüfen seçilen Latin karelerin önemine şükran duyar. Mesela tarımsal verimlilik deneylerini yaparken kare her gübrenin toprak durumuna göre farklı sonuçlar verecek şekilde test edilmesini sağlamıştır.

2	1	3
3	2	1
1	3	2

Şekil 1.2. Latin Kareye Bir Örnek

1.2.7. William Andrews [8]: Andrews, 'Sihirli Kareler ve Küpler' adlı kitabında 5 sıralı sihirli olmayan karelerin yapısını anlatır. Andrews, Gardner'ın Latin karelerinin tıpatıp aynısı olan basit karelerin yansıyan çiftinin kullanımını tanımlamıştır. Fakat Andrews Yunan karakterleri yerine Latin karelerden ikinci bir dizi kullanmıştır.

Avrupa'da sihirli karelerin kullanımı, İslam dünyasında ya da Çin'de kullanıldığı gibi kullanılmamıştır. Çin'de ve İslam dünyasında psikolojik ve felsefi düşüncelerde etkili olmuştur. Arap dünyası bu sınırı aşmış ve yeni anlamlar yüklemeye başlamışlardır. Kalitenin tanımını, sıcağı, kuruluğu, ya da doğal dengeye hazırlanmanın imkânsızlığını bulmaya yönelmişlerdir. Daha doğrusu doğanın sihirli karelerle ifadesini bulmaya çalışmışlardır.

1.2.8. Cabir Bin Hayyan [9]: Arap dünyasında ünlü filozof Cabir bin Hayyan sihirli kareler üzerinde çok ilginç çalışmalar yapmıştır. Bu düşüncelerini Kitab al-mawazin (Denge ile ilgili bir kitap) kitabında göstermiştir. Bu kitap Fransızcaya tercüme edilmiş, Kahire'de bir kütüphanede bulunmaktadır.

Sihirli kareler matematik tarihinin bir parçasıdır. Doğal psikoloji ve bilimin başlıca kaynağıdır. Bu kareler bütün kültürleri ilgilendirmiştir. Düzenli olarak bilimsel bütün konuları etkilemiş, örneğin Çin'deki doğal psikolojiyi, Araplarda yaşamı ve kimyayı öğrenmek için kullanılmıştır. Sadece Latin Avrupa'da gizem parçası olarak görülmüştür. Çünkü Avrupa'da zaten yaşamın neden var olduğu araştırılmış ve iyi bir yere gelinmişti. Yani gelişmiş bir durumda olduklarından bu kareleri kullanmadan yaşamı anlamaya yönelik iyi bir yere ulaşmışlardı. Bu yüzden sihirli kareler Çin'i ve Arap dünyasını yakından ilgilendirmiştir.

1.2.9. Asker Ali Abiyev [10]: Yaklaşık 3000 yıldır insanların kafasını meşgul eden ve son 250 yılda matematikçilerin ciddi bir matematik problemi olduğunu ortaya koydukları sihirli kareler, son 50 yılda matematikçiler ve amatörler tarafından güncel bir problem haline getirilmiştir.

Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Leonard Euler, Arthur Cayley gibi aralarında çok ünlü matematikçi ve fizikçilerin bulunduğu birçok ünlü bilim adamının çözümü için uğraştığı sihirli kareler bulunan bu algoritma ile sonsuza dek Prof. Dr. Asker Ali Abiyev tarafından çözümlenmiş durumdadır.

1934'te Bakü'de dünyaya gelen Abiyev çocukluğunda zekâ oyunlarına çok meraklıymış. Azerbaycan Pionerri Dergisi'nde 3x3, 9 haneli bir kareye 1'den 9'a kadar sayıların öyle bir şekilde oturtulması istenmiş ki; ister köşeden köşeye, ister yatay veya dikey kenardan kenara karelerin içindeki sayıların toplamı sabit (aynı) bir sayıyı versin. Bunun üzerinde biraz çalışan Abiyev, 3x3 kareye 1'den 9'a kadar sayıları oturtmakla kalmamış, istenmediği halde ayrıca 4x4 kareye 1'den 16'ya kadar sayıları deneme yanılma yoluyla oturtmuştur. 11 yaşında gösterdiği bu çaba, dergi tarafından hediye edilen kitaplar ve bir laboratuar ile ödüllendirilmiştir.

Uzunca bir süre sihirli kareler defterini kapatan Abiyev 1957–1961 yıllarında öğrenimini Moskova Devlet Üniversitesi Fizik Fakültesi'nde fizik ihtisasını tamamlamış, 1970–1973 yıllarında Azerbaycan Bilimler Akademisi'nin Radyasyon Araştırmaları Bölümü'nde laboratuar başkanı olarak görev almıştır. Aynı anda hem fizik hem de matematik profesörü olan Abiyev, 1995 yılında Türkiye'yi ziyaretinde Matematik Dünyası dergisini incelemiş, orada okuduğu bir makale onu çocukluğundaki karelere götürmüş.

Çocukluğunda zekâ oyunu sandığı sihirli karelerin aslında insanoğlu tarafından 3000 yıldır çözülmeye çalışılan matematiğin ciddi bir problemi olduğunu öğrenen Profesör, çok şaşırmış. Birçok kişinin halen bu konuda uğraştığını ve sihirli karelerin kuralını çözemediklerini öğrenmiş. Çocukluğunda çözmekten vazgeçtiği bu sırrın, bu ciddi problemin peşine tekrar takılmış.

Türkiye, Eylül 1995 Prof. Dr. Asker Ali Abiyev'in sihirli kareler üzerinde ikinci kez çalışmaya başlama noktasıdır artık. Uzun uğraşlardan sonra çeşitli derecelerden sihirli kareleri tamamlayarak sihirli karelerin sırrı çözülür ve Asker Ali Abiyev, 'Doğal Sihirli Kareler Kuralını' ortaya koyar.

Artık onun için sayıların ya da karelerin büyüklüğü ve cinsi önemli değildir. Kuralı tüm sayılar, semboller, simgeler ve desenler için geçerlidir.

A.A. Abiyev, sihirli karelerin sırrını çözmeye çalışırken, karenin ortasına bir nokta koymuş ve etrafındaki kareleri terazinin kefeleri olarak değerlendirmiş. O teraziye sayıları öyle bir yerleştirmesi gerekiyormuş ki kefelerin dengesi bozulmasın.

Sayıları o denge içinde yerleştirirken bir şey dikkatini çekmiş, sayılar doğal bir simetriyle oturuyor karelere. Kendisinin kuralını oluşturduğu sihirli karelerdeki bu doğal simetri ise, sayıları normal sırasıyla yazdığınızda elde edilen karenin köşegenleri arasındaki sayıların aynı sayılar olması. İşte bu yüzden sihirli karelere ‘Dengeli Kareler’ adı uygun görülmüştür.

Sihirli küpler ve Latin Kareler de Asker Ali Abiyev’in çalışma alanı olmuş. 6., 8., 10., dereceden sihirli küplerin yazımını bitiren ve bu alanda çalışmalarını sürdüren Abiyev, sihirli küpler kuralını yavaş yavaş oturtmaya başlamıştır.

3	2	1	5	4
4	3	2	1	5
5	4	3	2	1
1	5	4	3	2
2	1	5	4	3

Şekil 1.3. Abiyev’in Latin Karelerine Bir Örnek

Sihirli karelerde köşeden köşeye, satır ve sütunların toplamı sabit bir sayıya eşit olduğu gibi sihirli küpte de istenilen sıra, satır, kolon ve iç köşegenlerin toplamı sabit bir sayıya eşittir.

Bugün geldiği noktada Abiyev, meydan okurcasına istenilen sayılardan (tam, rasyonel, karmaşık, vb.) sonsuza dek sihirli kareler ve küpler oluşturulabileceğinin mümkün olduğunu gösterir.

Bu karelerde öyle mükemmel özellikler vardır ki; bu da uygulama alanının fazlalığına yol açmaktadır. Sihirli kareler doğadaki hiçbir düzenin tesadüf olmadığını, bir uyumun ve korelâsyonun olduğunu gösteriyor. Sihirli kareler veya küpler doğada karşılığı olan olayların fizikte, biyolojide, genetikte ve hangi alanda olursa olsun o alanın bilim adamları tarafından uygulanacaktır.

Dengeli karelerin ve küplerin bazı uygulama alanları; analiz, graf teorisi, olasılık teorisi, geometri ve astronomidir. Uygulaması düşünülen bazı alanlar ise Kriptoloji (şifreleme bilimi), optimal problemler, genetik, şehir planlaması ve mimarlıktır.

BÖLÜM 2

DOĞAL DENGELİ KARELERİN ALGORİTMALARI

2.1. Aritmetik Dizilerin Oluşturulması

Kareler, derecelerine göre çiftli ve tekli kareler olarak isimlendirilirler. Çift sayılar ise çiftli-çift ve tekli-çift sayılar olarak ikiye ayrılır.

Çiftli-Çift Sayılar: İkiye bölündüğünde çift sayı oluşturan sayılardır.

Tekli-Çift Sayılar: İkiye bölündüğünde tek sayı oluşturan sayılardır. Oluşturacağımız sihirli karelerin dereceleri tek, çiftli-çift veya tekli-çift olarak adlandırılacaktır.

4,8,12,16,20,…,4k çiftli-çift sayılar,

2,6,10,14,...,2(2k-1) tekli-çift sayılar,

1,3,5,7,9,…,2k+1 tek sayılar, $k \in ¥^+$

Dengeli karelerin algoritmasını açıklamak için 3 soruyu yanıtlamak gerekir: Ne, Nereye, Nasıl yazılmalıdır?

$n \in ¥^+$ olmak üzere, n. Dereceden bir sihirli kare oluşturmak için $\{1,2,3,\dots,n^2\}$ kümesinin sayıları $n/2$ gruba ayrılır (tek dereceden kare için $(n+1)/2$). Her grup ise 4 çeşit aritmetik dizi içerir. Her dizinin son terimi bir sonraki dizinin ilk terimi olur. Her 4. dizinin son terimi 1. dizinin 1. terimiyle aynıdır. Bu ifade tüm grupların dizileri için geçerlidir. İlk grubun dizi uzunluğu n, ikinci grubun dizi uzunluğu n-2, genel olarak k. grubun dizi uzunluğu n-2(k-1)'dir. ($k \in \{1,2,\dots,n/2\}$) Böylece son grubun , yani $n/2$. grubun dizi uzunluğu 2 olur. n. Dereceden kare için 1. grubun 4 dizisini oluşturalım:

α_1: 1,2,3,…,(n-1), n (1'er artar)

β_1: $n, 2n, 3n, \dots, (n-1)n, n^2$ (n'er artar)

γ_1: $n^2, (n^2-1), (n^2-2), \dots, \left[n^2-(n-1)\right]$ (1'er azalır)

δ_1: $\left[n^2-(n-1), \left[n^2-(n-1)-n\right], \dots, \left[n^2-(n-1)-(n-2)n\right], \left[n^2-(n-1)-(n-1)n\right]\right.$ (n'er azalır)

δ_1 dizisinin son terimi 1'e, ondan bir öncesi ise $(n+1)$'e eşittir.

Her grubun 1. dizisinin 1. terimi bir önceki grubun 4. dizisinin (yani δ dizisinin) sondan bir önceki terimin 1 fazlasına eşittir. Örnek olarak, 2. grubun 1. terimi (n +2) sayısı ile başlayacaktır. Her grubun 1., 2., 3., ve 4., dizileri sırasıyla +1, $+n$, -1, $-n$ olarak artar ve azalır.

Örnek olarak n=12 için 1. ve 2. grupların dizilerini yazalım:

- α_1: 1,2,3,…,11,12
- β_1: 12,24,36,..,132,144
- γ_1: 144,143,142,…,134,133
- δ_1: 133,121,109,…13,1

- α_2: 14,15,…,22,23
- β_2: 23,35,…,119,131
- γ_2: 131,130,…,123,122
- δ_2: 122,110,...,26,14 vb.

Böylelikle, “Ne” sorumuzun yanıtı olarak grupları ve dizileri nasıl elde edeceğimizi gösterdik. Grupların ve dizilerin böyle kuralla oluşturulması istenen çiftli-çift, tekli-çift ve tek dereceden karelerin hepsi için geçerlidir.

2.2. Dengeli Karelerin Çerçevelere Ayrılması

Şimdi ise “Nereye” sorusunu yanıtlamak için ele aldığımız kareyi çerçevelere ayıralım: Çerçevelerden kastımız dıştan içe varolan iç-içe, eş merkezli (konsentrik) kare çerçeveleridir. Tek ve çift dereceden sihirli karenin eş merkezli çerçeveleri farklı olduklarından, onları ayrı ayrı inceleyelim.

2.2.1. Çift Dereceden Karelerin Çerçeveleri

Herhangi bir büyük kareyi eşit aralıklı olmak üzere yatay ve düşey paralel doğrularla hanelere bölelim. Doğruların sayısına göre kare belli bir sayıda hanelere bölünmüş olacaktır. Büyük kare bu durumda her zaman belli bir tam sayının karesine eşit şekilde sayıya sahip olacaktır. Çift dereceden kareler için, n bir çift tamsayı olmak üzere, n- sayısı karenin derecesini belirleyecektir. Dıştan içeriye doğru elde ettiğimiz bu haneleri eş merkezli çerçeveler halinde gruplandıralım. Bu çerçevelerin sayısı $\frac{n}{2}$ sayısına eşittir. Bu durumda sonuncu çerçeveyi 4 haneden oluşan bir kare belirleyecektir. Bu son kare de çerçeve olarak $\frac{n}{2}$ sayısına dâhildir. Dıştan içe doğru çerçeveleri sırasına göre n. dereceden $(n-2)$. dereceden,…,4. dereceden ve 2. dereceden eş merkezli çerçeveler olarak belirleyelim. Her çerçevede bulunan haneler sayısını belirleyelim. n. dereceden karenin her satır ve sütununda n-sayıda hane olduğu aşikârdır. Çerçevedeki tüm hanelerin sayısı $4n-4$ e eşit olacaktır. —4 ün nedeni çerçevenin köşelerindeki hanelerin her satırı her sütuna dâhil olmasından dolayıdır. Böylece n. Dereceden çerçevede $4.(n-1)$ tane hane olacaktır. Bu düşünceyi $(n-2)$. Dereceden çerçeveye uyguladığımızda

$$4.(n-2)-4=4n-8-4=4n-12=4.(n-3)$$

tane hane olacaktır. Böylece devam ettiğimizde 4. dereceden kare için 4.3, 2.dereceden kare için 4.1 tane hane olacaktır. Burada <u>istenilen</u> <u>çerçevedeki</u> haneler sayısı çerçevenin derecesinden 1 eksik olarak 4 ile çarpımına eşit olacaktır. (4.(kare derecesi–1))

Görüldüğü gibi çerçevedeki haneler sayısı bir aritmetik dizi oluşturur. Bu aritmetik dizinin terimler sayısının toplamı n^2 ye eşit olacaktır. Bunu gösterelim.

Bu diziyi oluşturalım:

N=4.1+4.3+4.5+…+4.(n–1)

=4.(1+3+5+…+n–1)

Terim sayısı $\frac{n}{2}$ ye eşit olduğundan dolayı,

$$N=4.1.\frac{1+n-1}{2}.\frac{n}{2}=n^2 \quad \text{olur.}$$

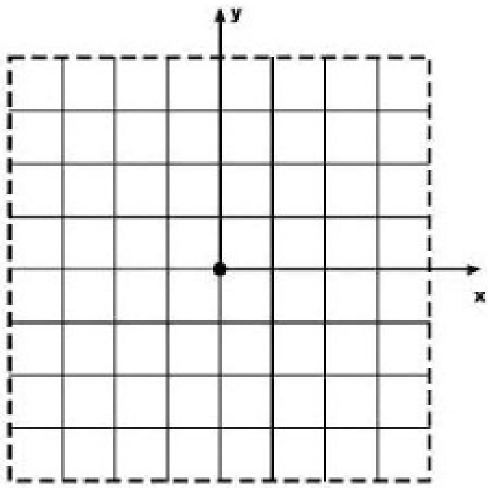
2.2.2. Tek Dereceden Karelerin Çerçeveleri (Merdivenli Çerçeveler)

n. dereceden bir karede, n çift sayı olduğunda karenin geometrik merkezine yakın bir çift satır ve sütunu; n tek olduğunda ise karenin merkezinden geçen tek satır ve sütunu göz önüne alalım.(Şekil 2.1.1 ve Şekil2.1.2) Çift ve tek dereceden karelerdeki bu satır ve sütunları karşılaştıralım. Orijini karelerin geometrik merkezinde ve eksenleri karenin kenarlarına paralel olmak üzere kartezyen koordinat sistemini ele alalım: n çift olduğunda eksenlere göre bu satır ve sütunlar simetriktirler. (Şekil 2.1.1); n tek ise eksenlere göre yarım haneli satır ve sütunlar simetriktirler. (Şekil 2.1.2)

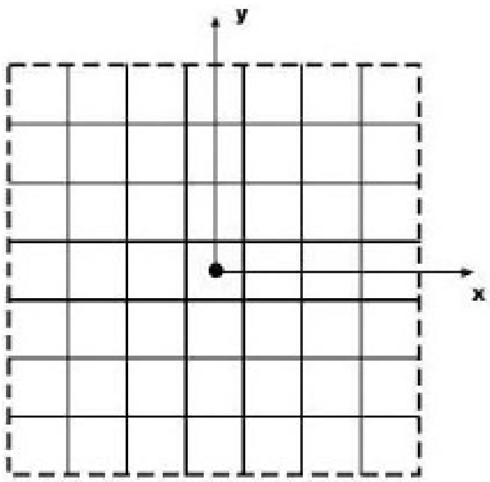
Bu yarım haneli satır ve sütunları çift dereceden karenin haneleri ile karşılaştırdığımızda bunların köşegenlere uygun olduğunu görürüz. Çünkü karelerin çerçevelerindeki satır ve sütunlar bu köşegen hanelerindeki sayıları içermektedir. Bundan dolayı tek dereceden karelerin konsentrik çerçeveleri farklı şekil alacaklardır. Karenin köşegenleri 45^{o} dönerek tek dereceden karelerin merkezcil satır ve sütununa dönüştüğüne göre yeni çerçeveler de aynı açı kadar döneceklerdir.

Merkezcil satır ve sütunların, karenin merkezine göre yatay ve dikey olarak eşit uzaklıkta olan 4 hanenin merkezlerini birleştirdiğimizde, bu doğruların üzerinden geçtiği haneler merdivenli çerçeveler oluşturacaklardır.(Şekil2.2)

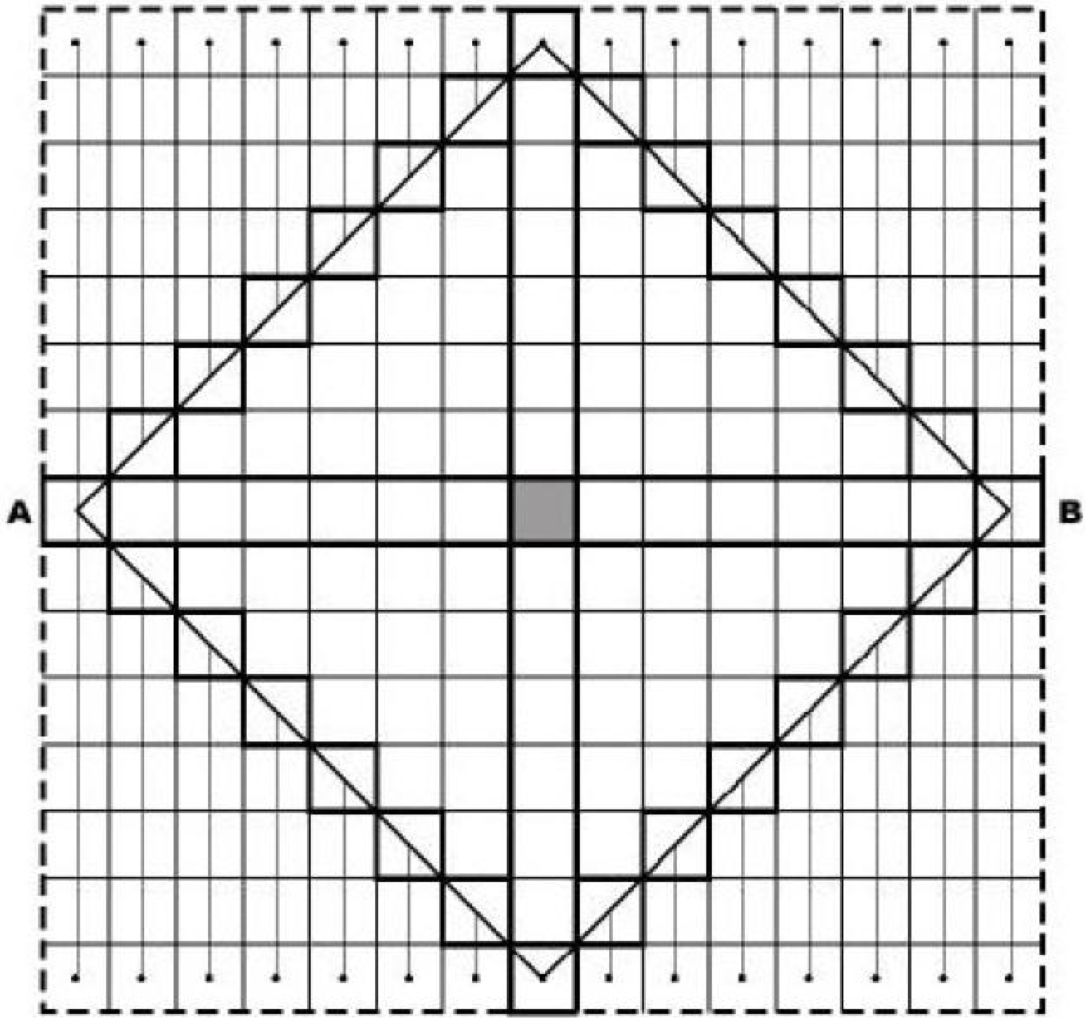
$n.$ dereceden karede bu çerçeveleri sırasıyla, $n., (n-2)., (n-4).,$ vb dereceden iç çerçeveler olarak isimlendireceğiz ve bunları $M_{n,} M_{n-2}, M_{n-4,}$ vb ile göstereceğiz. Böyle merdivenli çerçevelerdeki hanelerin karenin normal çerçevesinin satırlarına (veya sütunlarına) izdüşümlerini aldığımızda M çerçevelerin haneler sayısının satırlardaki (veya sütunlardaki) haneler sayısına eşit olduğunu görürüz. (şekil2.2) Herhangi bir M_{μ} çerçevesinin bir sonraki $M_{\mu-2}$ çerçevesini köşelerden açarak M_{μ} çerçevesinin uygun kenarlarına paralel olarak dışarı taşırdığımızda açılmış merdivenli çerçeve oluşacaktır. Bu çerçeveye dış merdivenli çerçeve diyeceğiz ve $M'_{\mu-2}$ olarak göstereceğiz.



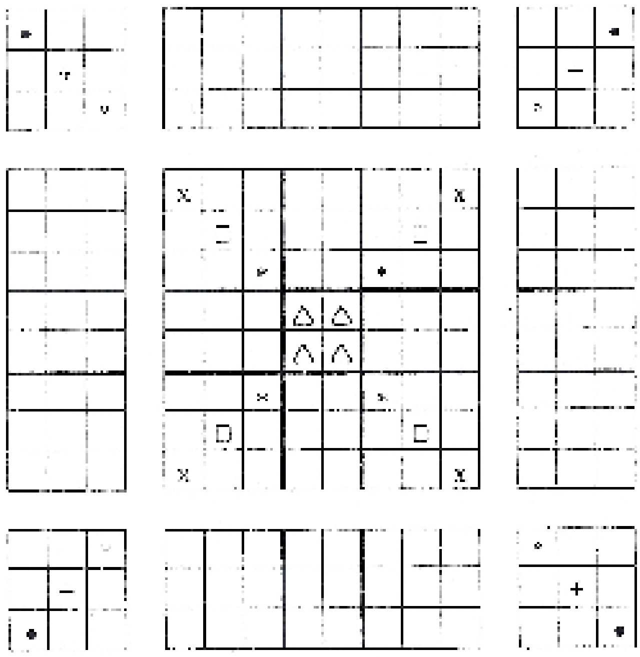
Şekil 2.1.1



Şekil 2.1.2



Şekil 2.2 M_{μ} Merdivenli Çerçeve



Şekil 2.3 Karenin Çerçevelerinin Sıralanması veya Derecelenmesi

- • 1. çerçeve [n. derece]
- + 2. çerçeve [(n-2). derece]
- ○ 3.çerçeve [(n-4). derece]

----

x ($\frac{n}{2}$-3). çerçeve [8.derece]

□ ($\frac{n}{2}$-2). çerçeve [6.derece]

∗ ($\frac{n}{2}$-1). çerçeve [4.derece]

Δ ($\frac{n}{2}$). çerçeve [2.derece]

Şekil 2.3' te n.dereceden karenin çerçeveleri sırasına (derecesine) göre gösterilmiş ve aynı çerçevelerin köşegenlerindeki haneleri aynı sembollerle işaretlenmiştir. Çerçevenin yatay veya düşey hanelerinin sayısı onun derecesini gösterir. Kuşkusuz ki, çerçevelerin sayısı ve ele aldığımız grupların sayısı birbirlerine eşittirler, yani çerçeveler sayısı=gruplar sayısı=n/2. Tek dereceden kare için çerçeve ve gruplar sayısı (n+1)/2'ye eşittir. Bu nedenle son dizi bir sayıdan ve çerçeve ise bir haneden ibarettir.

Her gruptaki dizilerin elemanları sayısı uygun çerçevedeki haneler sayısına eşittir.

Görüldüğü gibi çerçeveler ve gruplar sayılarının eşitliği bizi şu noktaya götürür:

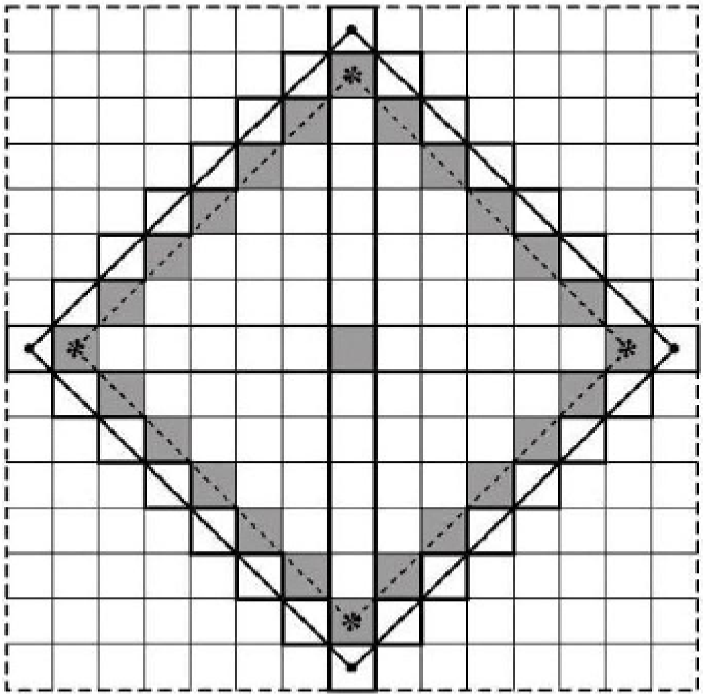
1. çerçeve hanelerine 1. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak;
2. çerçeve hanelerine 2. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak, vb.

Her grubun dizi elemanları çerçevenin hanelerine kapalı graflarla (çizgelerle) yazılır. Her çerçeveye uygun bir kapalı çizge mevcuttur.

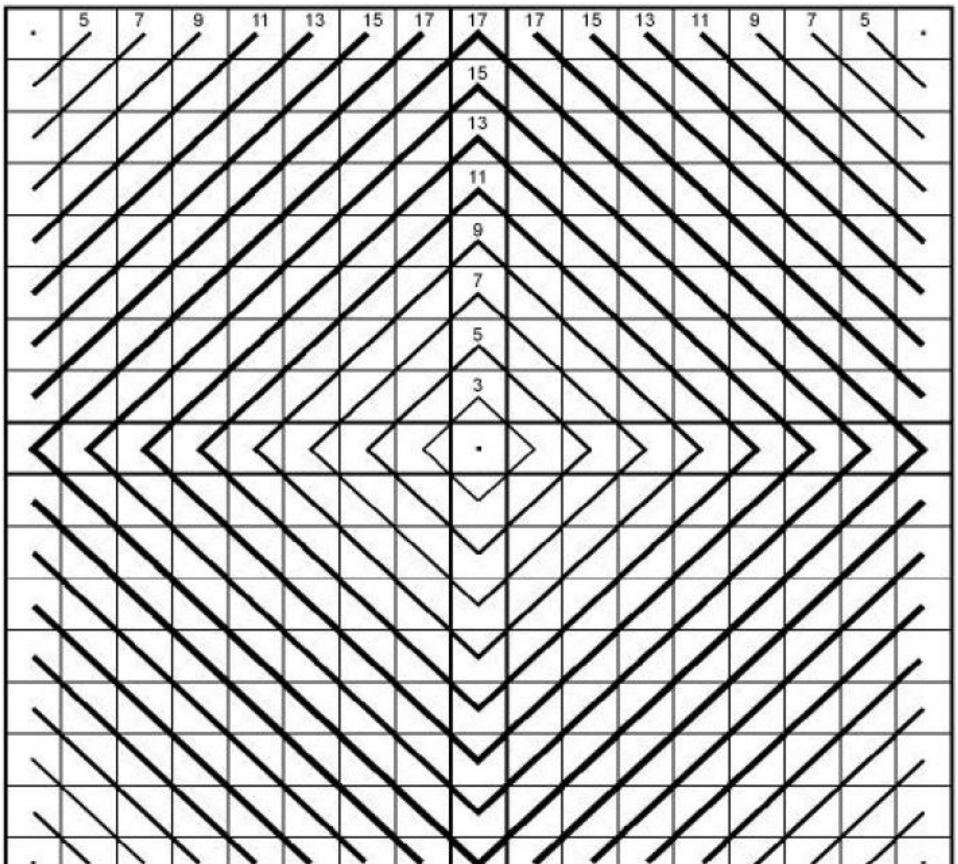
2.3. Merdivenli Çerçevelerin Hane Sayısı:

Şimdi iç ve dış çerçevelerdeki haneler sayısını inceleyelim. $n.$ dereceden karenin istenilen $\mu.$ dereceden çerçevesinin simetrik 2 satır ve 2 sütunundaki haneler sayısının $4.(\mu-1)$ e eşit olduğunu çift dereceden kareler için ispat etmiştik. Aynı yöntemle bunu n'nin tek değerleri için de ispat etmek mümkündür.

Şimdi herhangi M_μ çerçevesindeki haneleri hesaplayalım. Şekil 2.2' de herhangi bir M_μ çerçevesi gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi karenin 1. ve sonuncu satırdaki haneler sayısı 2μ'ye, çerçevedeki haneler sayısı ise $2(\mu-1)$'e eşittir. Bu durumda 2 hanenin az olmasının nedeni, A ve B hanelerinde, satırlardaki 2 simetrik hanelerin çakışmasıdır. Merdivenli iç çerçevenin bir sonraki $M_{\mu-2}$ yi göz önüne alalım. Şekil 2.4' te M_μ ve $M_{\mu-2}$ çerçeveleri sırasıyla $\bullet$ ve $*$ sembolleriyle işaretlenmiştir. İncelemeler gösterir ki, $M'_{\mu-2}$ çerçevedeki haneler sayısı da $2(\mu-1)$'e eşittir. Bu eşitliğin nedeni, $M_{\mu-2}$ çerçevesi açılırken onun tepe hanelerinin $M'_{\mu-2}$ çerçevesinde 2 haneye dönüşmesidir. Böylece M_μ ve $M'_{\mu-2}$ çerçevelerindeki haneler sayısı $4.(\mu-1)$'e eşittir.



Şekil 2.4 M_{μ} ve $M_{\mu-2}$ İç Merdivenli Çerçeveler



Şekil 2.5 17.Dereceden Karenin İç ve Dış Merdivenli Çerçeveleri

Böylece, tek dereceden karenin normal çerçevesi 2 merdivenli çerçeveden oluşur, $N_\mu = M_\mu + M'_{\mu-2}$ dir. Buradan şu sonucu çıkarabiliriz ki, çift dereceden karelerdeki çerçevelerden farklı olarak tek dereceden karelerde merdivenli dış ve iç çerçeveler normal çerçevenin tüm hanelerini kapsamaktadır. Şekil 2.5'te 17. dereceden karenin iç ve dış merdivenli çerçevelerin tümü gösterilmiştir.

2.4. Tek Dereceden Karenin Çerçeveler Sayısı:

Çift dereceden karelerde olduğu gibi tek dereceden karelerde $\mu.$ dereceden çerçevedeki haneler sayısı $4(\mu-1)$ formülü ile ifade edilir. Tek dereceden karelerde merkezcil haneyi n^2 tane haneden çıkarırsak, geri kalan n^2-1 haneleri çerçevelere dağıtmak gerekir. $n.$ dereceden karede sırasıyla, $n.,(n-2).,(n-4).,...,3.$.dereceden çerçevelerdeki haneler sayısının $4(n-1), 4(n-3), 4(n-5),...,8$'e eşit olduğunu ele aldığımızda, bu sayıların aritmetik bir dizi oluşturduğunu görürüz. Bu dizinin sabiti 8'e eşittir. Bu dizideki terimler sayısının çerçeveler sayısına eşit olduğu göz önüne alınıp, bu değere x denirse ve terimler toplamının $(n^2-1)'$e, yani karenin (merkezcil hane hariç) tüm haneler sayısına eşit olduğu dikkate alınırsa, aşağıdaki formülden x'i bulabiliriz:

$$\frac{4(n-1)+8}{2}x = n^2-1 \Rightarrow x = \frac{n-1}{2} \tag{2.1}$$

Uyarı: Burada sonuncu merdivenli çerçevenin bir haneden, yani merkezcil haneden oluştuğu dikkate alınmıştır. Tüm tek dereceden karelerde bu haneye yazılan sayı $\frac{n^2+1}{2}$ ye eşit olacaktır.

Teorem 2.1: n^2 tane haneye bölünmüş tek dereceden kare $\frac{n-1}{2}$ tane konsentrik (eş merkezli) merdivenli çerçeveden ve bir tane merkezcil haneden oluşur. Örneğin; $n=5$ için $\frac{5-1}{2}=2$ tane çerçeve ve bir merkezcil hane oluşur.

Tek dereceden karelerde dizi grupları sayısının da $\frac{n-1}{2}$ ye eşit olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayabiliriz. Böylece, tek dereceden karelerde de, çift dereceden karelerde olduğu gibi çerçeveler sayısı 4 aritmetik diziler gruplarının sayısına eşittir.

Bu dizilerdeki sayılar derecesine uygun çerçeveye yazılır. Aritmetik dizi grupları $\{\alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu, \delta_\mu\}$ sırasıyla, dizi sabitleri $+1, +n, -1, -n$ olan dizilerden oluşur. α_μ dizisinin 1.sayısı merkezcil sütunun 1. hanesine yazılır. Her dizinin terimleri merdivenli iç M_μ ve dış $M'_{\mu-2}$ çerçevelerine çok basit grafiklerle (çizgelerle) yazılır. Şekil 2.5'de 17.dereceden karenin merdivenli çerçevelerinin tümü gösterilmiştir.

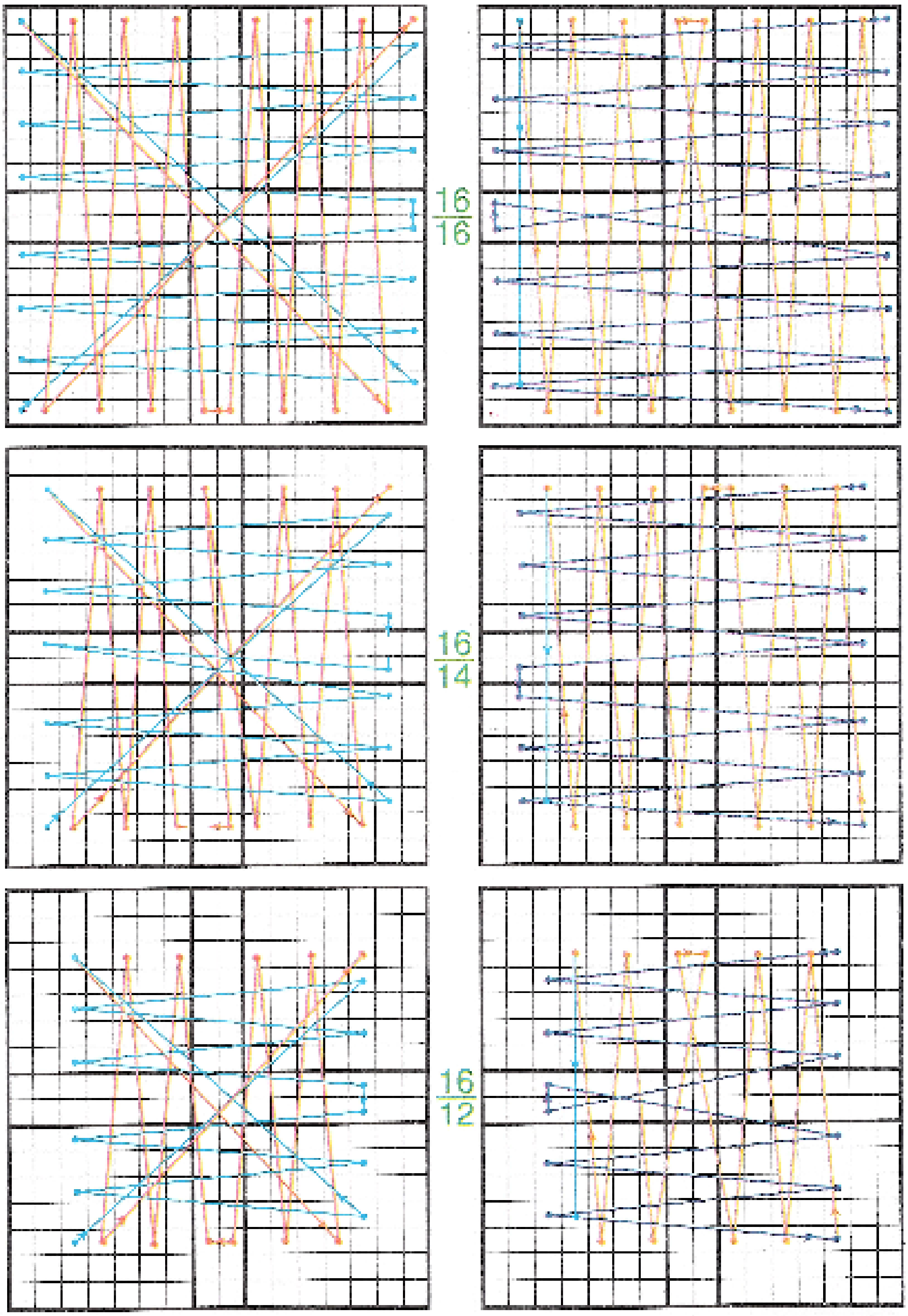
2.5. Dengeli Karelerin Çizgeleri

2.5.1. Çiftli-Çift Dereceden Dengeli Karelerin Çizgeleri

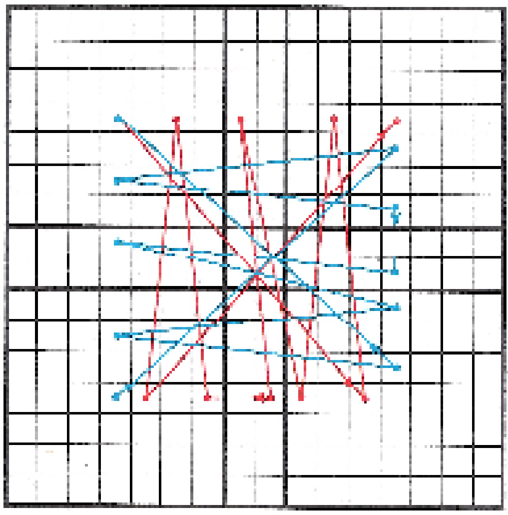
Sihirli kareyi oluşturmak için 3 sorudan 2. sini yanıtladık. Yani sayıları düzenli olarak karenin hangi hanelere yazılması gerektiğini belirledik. Çiftli-çift dereceden kareler için çerçeveler karenin geometrik merkezine göre eş merkezli merdivenli çerçevelerden oluşmaktadır. Çift dereceden çerçeveler için önemli olan haneler, köşegenler ve merkeze yakın iki satır ve sütunlardır. Tek dereceden karelerde ise özel haneler merkezden geçen tek satır ve sütundan oluşmaktadır. Bu özel haneler, yani çift derecelerde köşegenler ve tek dereceli karelerde ise merkezden geçen satır ve sütunlar anahtar rolünü oynamaktadır. Bu hanelerde olan sayılar dizi gruplarındaki başlangıç ve sonuncu sayıların bulunduğu yerlerdir.

Sihirli karenin algoritmasının 3. sorusu bu çerçevelere sayıların 'nasıl' yazılacağıdır. Dizi gruplarındaki sayıları çerçeveleri yazmak için özel çizgilerden faydalanmak gerekir. Bu çizgiler bir dizi grubundaki sayıları uygun çerçeveye yazmak için belirtilen çizgilerdir. Herhangi bir çerçevede başlangıç hane olarak ele aldığımızda dizi grubunun sayılarını tam olarak yazdığımızda yeniden başlangıç hanesine dönmüş oluruz. Bu da kapalı bir graf (çizge) oluşturmaktadır. Çift dereceden karelerde bu kapalı çizgelerin farklılığı sadece '+' işareti oluşturan hanelerde bulunmaktadır. (Merkezden geçen iki satır ve iki sütunun oluşturduğu hanelere '+' işareti ismini vereceğiz). Bu işaretin dışındaki hanelerde çizgiler aynı özelliğe sahiptirler. Çift dereceden karelerde birinci hane olarak karenin sol yukarı köşesindeki hane kabul edilir. (Köşelerden herhangi birisi de olabilirdi). Şekil 2.6 da başlangıç olarak seçilen hane, sol alt hane olarak seçilmiştir. İkinci hane ise merkeze göre birinci hanenin simetriği olan saat ibresi yönündeki hane olarak ele alınır.

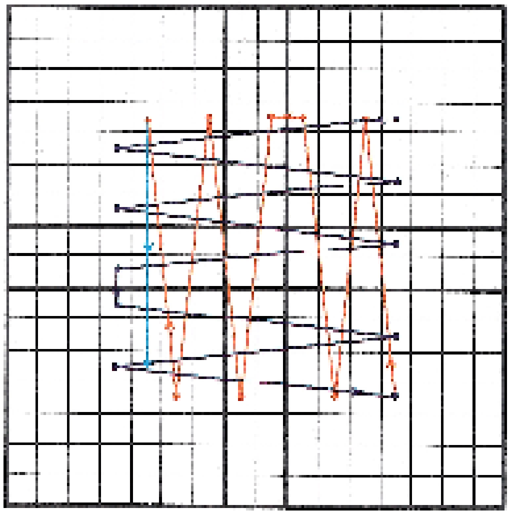
Örneğin16.dereceden karenin kapalı çizgelerini gösterelim.

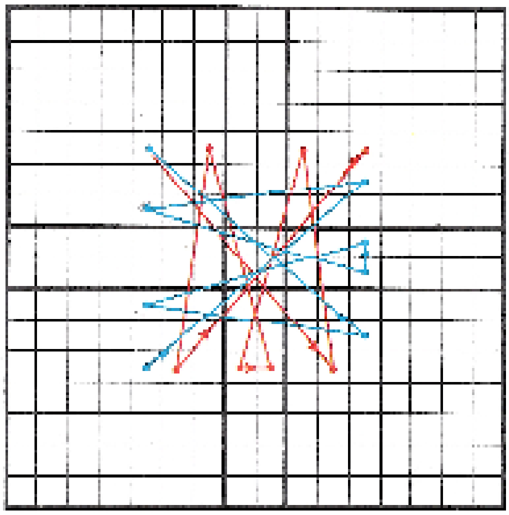


Şekil 2.6 16. Dereceden Dengeli Karenin Kapalı Grafları

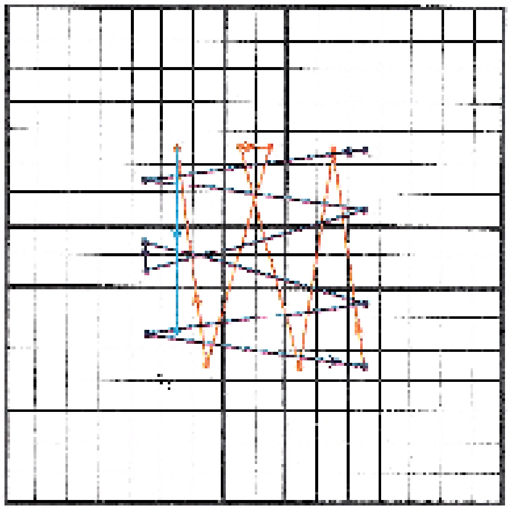


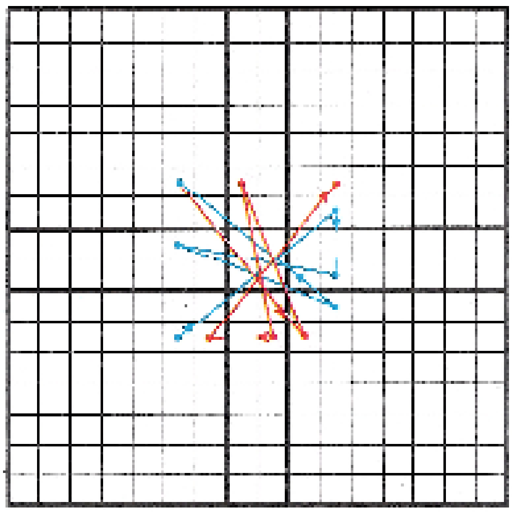
$\frac{16}{10}$



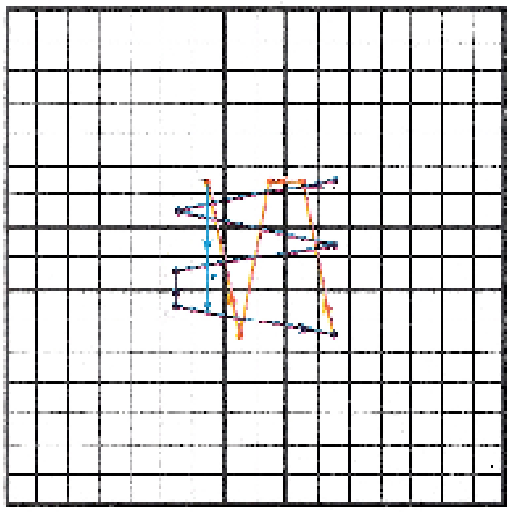


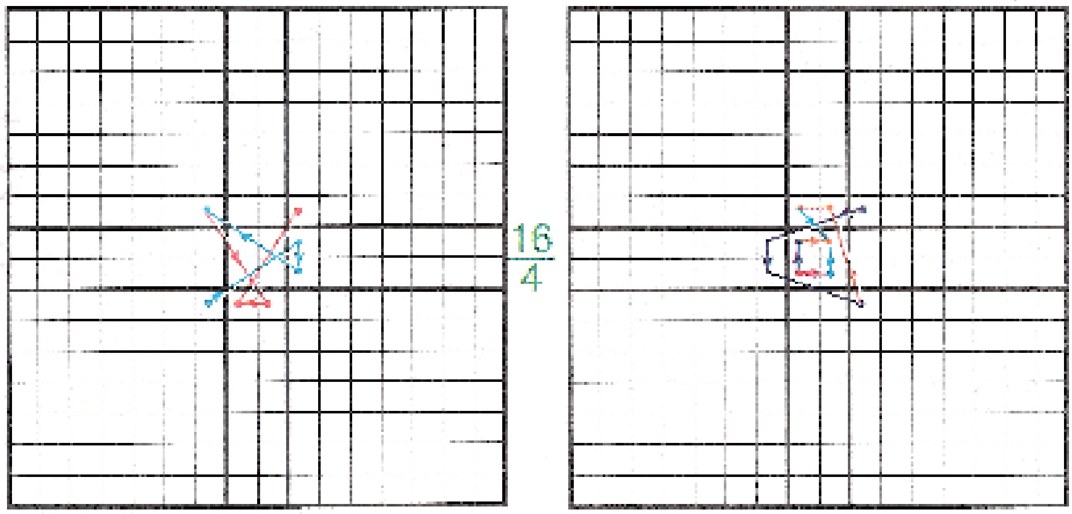
$\frac{16}{8}$



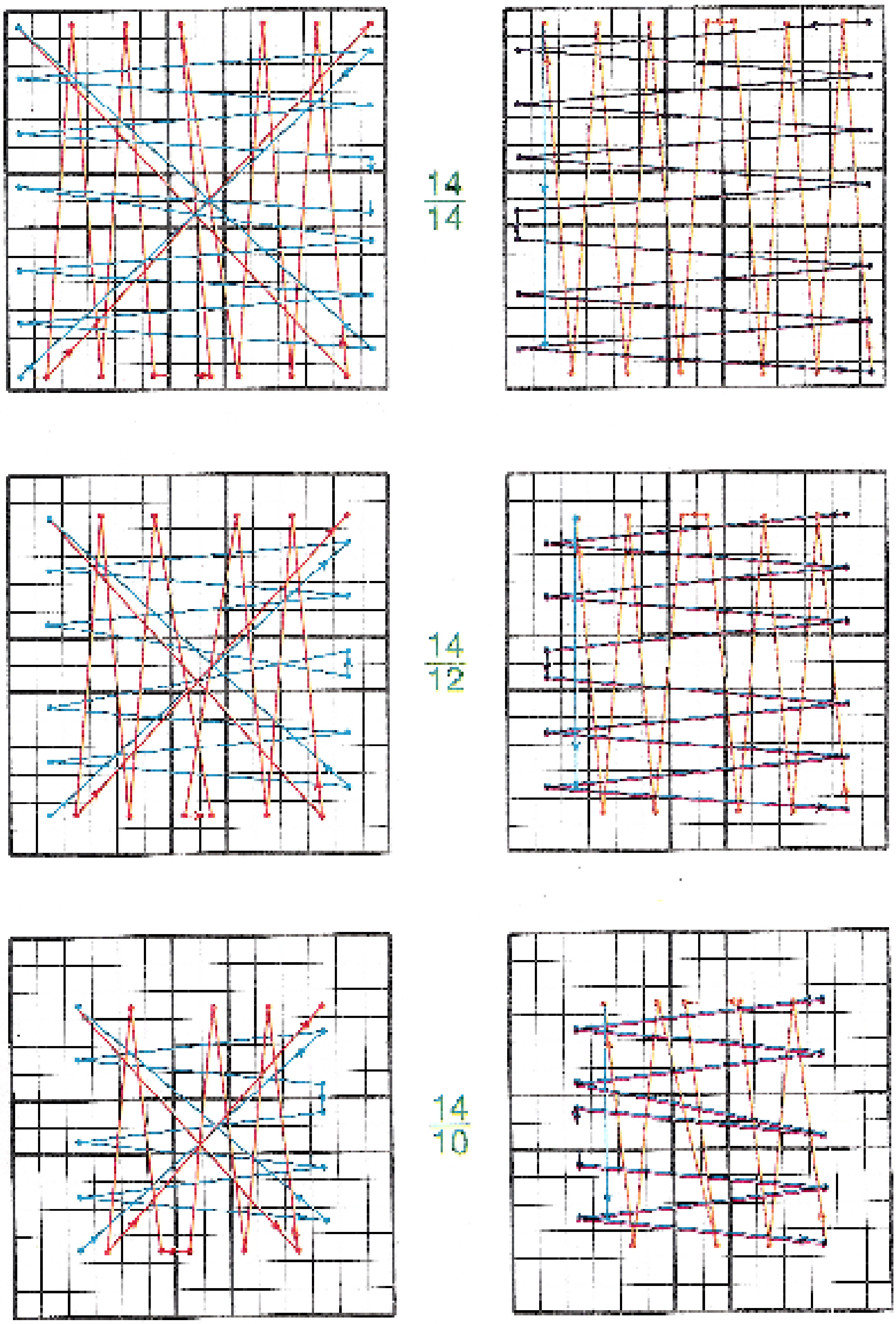


$\frac{16}{6}$

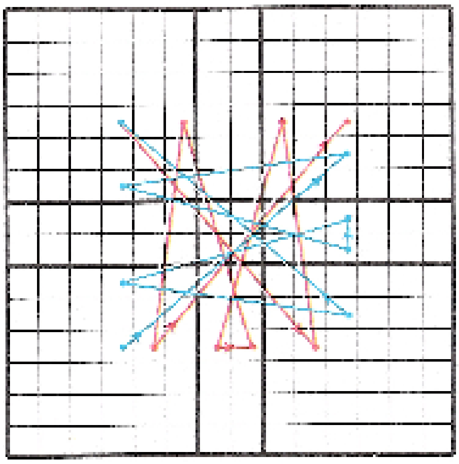




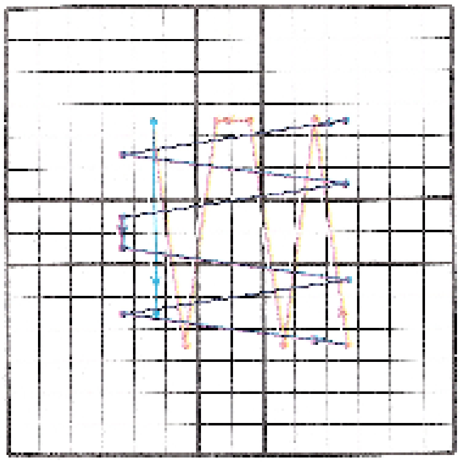
Dizi grubu 4 diziden oluştuğuna göre kapalı grafımız 4 da kısımdan oluşmaktadır. Dizi gruplarını görüntü olarak birbirinden farklılaştırmak için karenin haneleri uygun diziler için renklendirilmektedir. α dizisine uygun haneleri mavi, β dizisine uygun haneleri kırmızı, γ dizisine uygun haneleri mor, δ dizisine uygun haneleri turuncu ile renklendirilmiştir. Kapalı çizgenin dizilere uygun kısımları da bu renklere boyanır. Şekle dikkat ettiğimizde bu kapalı graf aşikâr olarak görülmektedir. Her dizinin hangi haneye yazılacağı oklarla gösterilmiştir. Bu kapalı çizgenin çizgileri '+' işareti içinde farklılık gösterirler. Çiftli-Çift derecelerin böyle kapalı grafiğini E_μ ile gösterelim. Şimdi ise bir sonraki Tekli-Çift dereceden çerçevenin kapalı grafını (çizgesini) ele alalım. Bu graf şekilde $\dfrac{16}{14}$ ile gösterilmektedir. Şimdi Çiftli-Çift dereceden karede olduğu gibi bu kapalı grafın çizgileri de uygun renklerden oluşmaktadır. Burada fark yine de '+' işaretinin içerisindedir. Bu kapalı çizgeyi $E_{\mu-2}$ ile gösterelim. Böylece istenilen Çiftli-Çift dereceden kare için tüm Çiftli-Çift dereceden çerçeveler için kapalı graflar E_μ gibi, Tekli-Çift dereceden çerçeveler için ise $E_{\mu-2}$ gibi gösterilecektir. Çiftli-Çift dereceden kareler için 8. dereceden çerçevenin kapalı grafı, Çiftli-Çift çerçevelerin hepsinden farklılık gösterir. Burada Çiftli-Çift çerçeve için artan dizilerin grafikleri, azalan dizinin grafiklerinden '+' işareti içinde farklılık gösterirler. 8. derecede ise artan ve azalan dizilerin grafları aynıdır. Geri kalan $\dfrac{16}{4}$ ve $\dfrac{16}{2}$ nin kapalı grafları şekil 2.6'da gösterilmiştir.

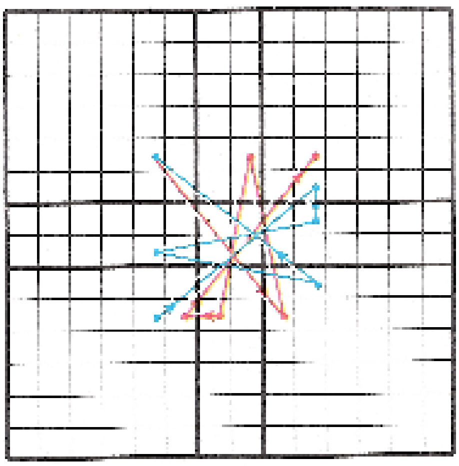


Şekil 2.8 14. Dereceden Dengeli Karenin Kapalı Grafları

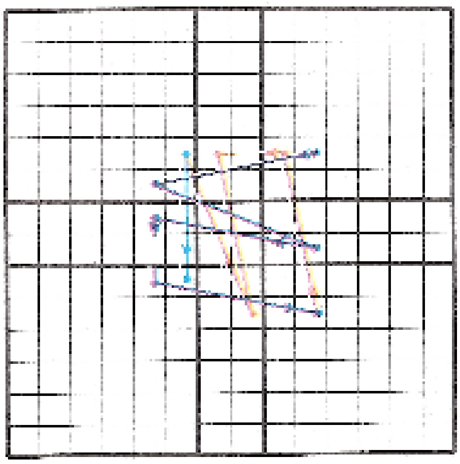


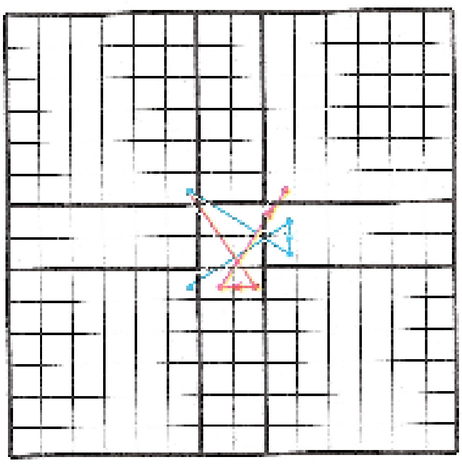
$\frac{14}{8}$



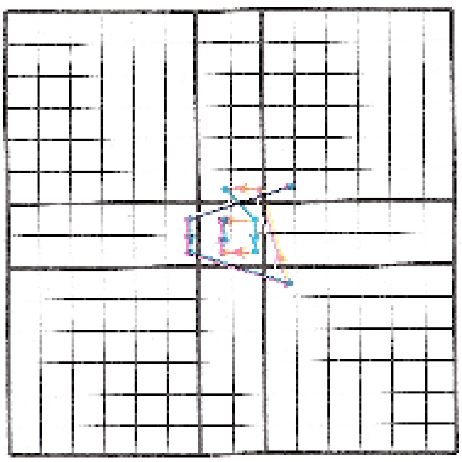


$\frac{14}{6}$





$\frac{14}{4}$



2.5.2. Tekli-Çift Dereceden Karelerin Çizgeleri

Şimdi ise Tekli-Çift dereceden karelerin çizgelerini belirleyelim. Örnek olarak; 14. dereceden kareyi ele alalım. Burada da graflar kapalı olarak uygun renklerle gösterilmiştir. (Şekil 2.8) Burada artan ve azalan dizilerin grafları '+' işareti içerisinde birbirinden farklıdırlar. İlginç olan odur ki, Tekli-Çift dereceden karenin 1. çerçevesi Çiftli-Çift dereceden karelerde Tekli-Çift çerçevelerinin aynısıdır. Bu düşünce istenilen Tekli-Çift kareler için geçerlidir. Şimdi ise bu örnekte Çiftli-Çift çerçevelerin graflarını gösterelim. (Şekil 2.8'e baktığımızda) Çiftli-Çift çerçevelerin graflarının hepsi aynıdır. Tekli-Çift karelerin Tekli-Çift çerçeveleri de birbiriyle aynıdır. Görüldüğü gibi Tekli-Çift karelerin 1. çerçevesi, geri kalan çerçevelerin hepsinden farklıdır. Bu Tekli-Çift dereceden karelerin graflarını ise $E'_{\mu-2}, E'_{\mu-4}...$ ile göstereceğiz. İstenilen Tekli-Çift dereceden karenin kapalı graflarını aşağıdaki gibi sıralamak amacımıza uygundur.

$$\ldots E'_n, E'_{n-2}, E'_{n-4}, E'_{n-6}, \ldots, E'_\mu,\ E'_{\mu-2}, E'_{\mu-4}, E'_8, E'_6\ E'_4, E'_2$$

$$\ldots E'_{18}, E'_{16}, E'_{14}, E'_{12}, E'_{10}, E'_8, E'_6, E'_4, E'_2$$

$E'_{16} = E'_{12} = E'_8$ ve $E'_{14} = E'_{10} = E'_6$ yani graflar aynıdır. ('+' işareti içerisinde)

Sonuç olarak; Çiftli-Çift ve Tekli-Çift çizgelerini kıyaslarsak görüldüğü gibi Çiftli-Çift karelerde 8. dereceden çerçevenin çizgesi ve Tekli-Çift karelerde ise 1. çerçevenin çizgesi öbürlerinden farklıdırlar.

2.5.3. Tek Dereceden Karelerin Çizgeleri

Çift dereceden karelerin çizgelerinden farklı olarak, tek dereceden karelerin çizgeleri çok basittir. Tüm diziler için bu çizgeler aynı biçime sahiptir. Bu çizgeler merdivenli çerçevelerin hanelerini zig-zag şeklinde tarayarak oluşturulur. Bu çizgeler merdivenli çerçevelerin hepsinde aynı biçimde yazılır.

Örnek 2.1 7. dereceden bir doğal sihirli kareyi diziler ve graflar yardımıyla oluşturalım.

- α_1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6,7
- β_1: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49

- γ_1 : 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43
- δ_1 : 43, 36, 29, 22, 15, 8, 1

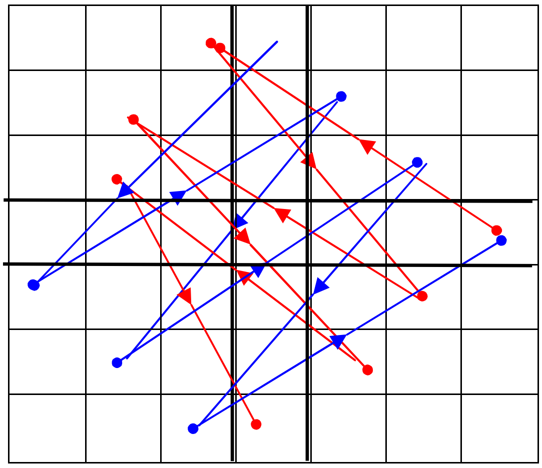
1. dizi grubunu tamamlayarak 7. dereceden karenin 1. merdivenli çerçevesine sayıları '+' işaretinin en üst hanesinden başlayarak graflar yardımıyla yerleştiririz. (Şekil 2.9) Şimdi 2. , 3. ve 4. dizi gruplarını oluşturarak sayıları aynı yöntemle yazmaya devam edriz.

- α_2 : 9, 10, 11, 12, 13
- β_2 : 13, 20, 27, 34, 41
- γ_2 : 41, 40, 39, 38, 37
- δ_2 : 37, 30, 23, 16, 9

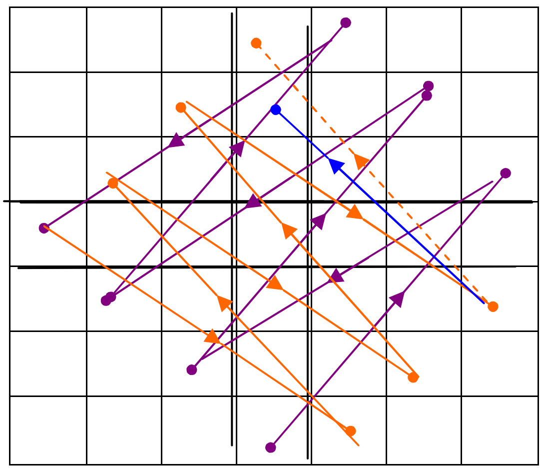
- α_3 : 17, 18, 19
- β_3 : 19, 26, 33
- γ_3 : 33, 32, 31
- δ_3 : 31, 24, 17

- α_4 : 25

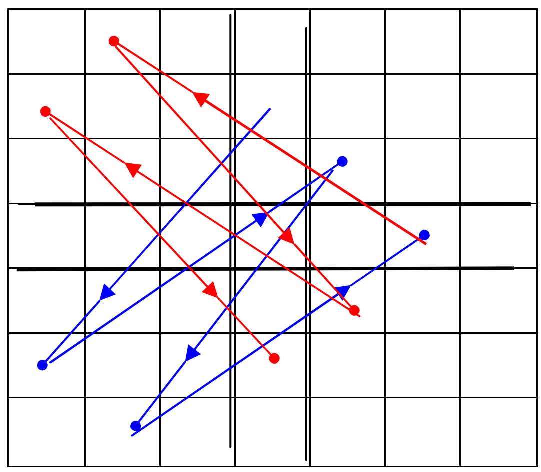
4. dizi grubu sadece 25 ten oluşacak ve merkezdeki haneye yerleşecektir.



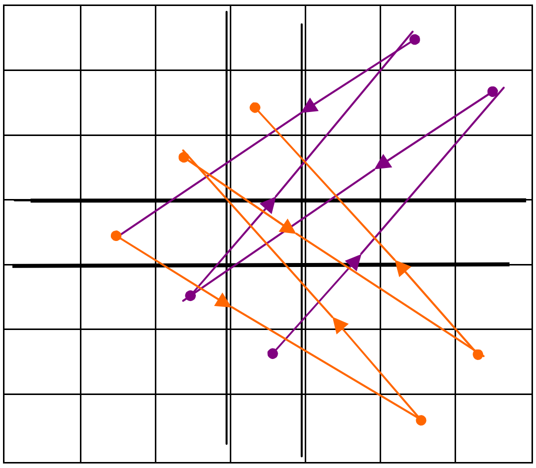
α_7 ve β_7 Grafikleri



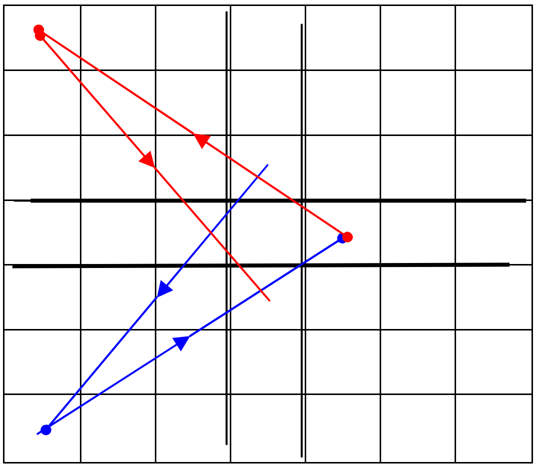
γ_7 ve δ_7 Grafikleri



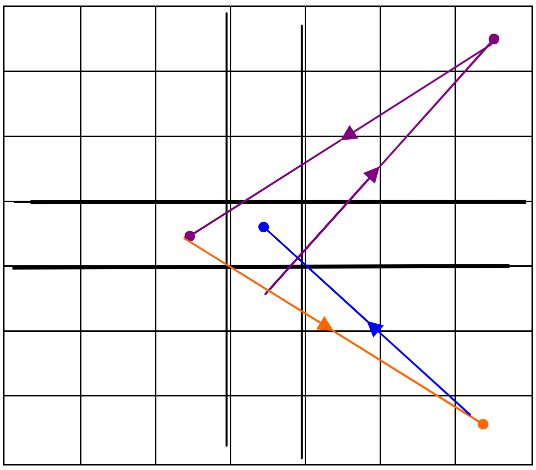
α_5 ve β_5 Grafikleri



γ_5 ve δ_5 Grafikleri



α_3 ve β_3 Grafikleri



γ_3 ve δ_3 Grafikleri

Şekil 2.9 7. Dereceden Doğal Sihirli Karenin Grafikleri

Bu grafın başlangıcı 7. dereceden çerçevenin 1. hanesinden (karenin ortasındaki ‘+’ işaretinin en üst hanesinde) başlayarak açılmış çerçevenin bir kenarının ve açılmamış çerçevenin diğer kenarlarının hanelerini birleştirerek devam eder. Bu graf, açılmamış çerçevenin bir sonraki köşesinde bitmektedir. Sonra aynı kuralla bu graflara dik devam ederek açılmamış çerçevenin bir sonraki hanesinde biter. Yine aynı kuralla bu haneden devam ederek öncekinin kaldığı köşeden başlayarak açılmamış çerçevenin bir sonraki hanesinde biter. Son olarak, bu haneden yine aynı kuralla devam ederek başladığı köşeye(noktaya) gelir. Bu bir 7. dereceden karenin 7. dereceden çizgenin bir devridir. (Şekil 2.9)

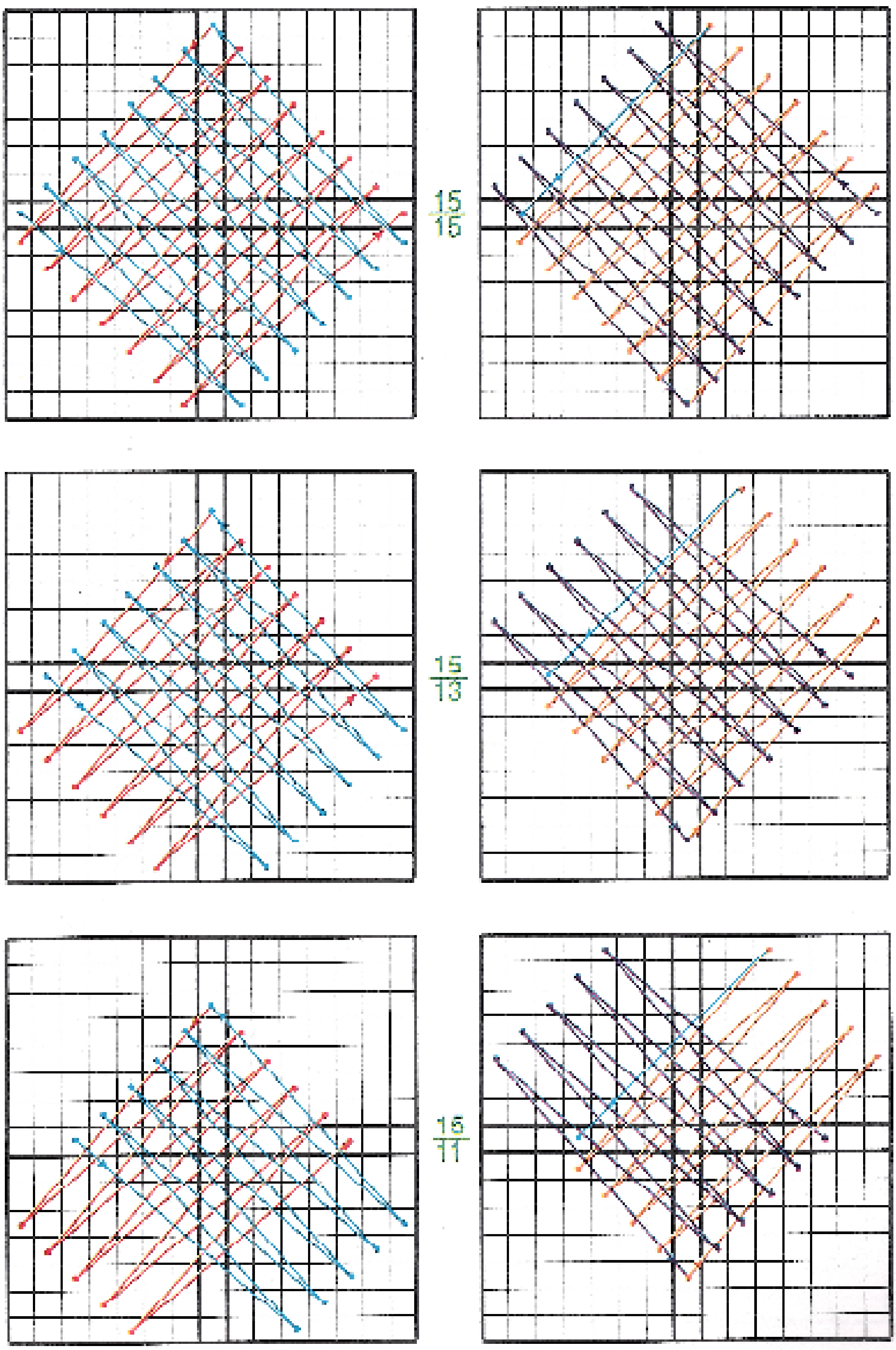
5. dereceden çerçevenin devrini oluşturmak için, bu çerçevenin yukarı köşesinden aynı kuralla devam ederek, haneye döneceğiz. 3. dereceden çerçevenin devrini oluşturmak için yukarı köşesinden başlayarak devam ettireceğiz. Böylece 7. dereceden karenin çizgelerinin devir sayısı $\frac{7-1}{2}=3$ tür. En sondaki merkeze doğru yönelmiş 1 çizgeden oluşur. (Şekil 2.10)

Bu kural, istenilen tek dereceden dengeli karelerin hepsinin yazılması için geçerlidir.

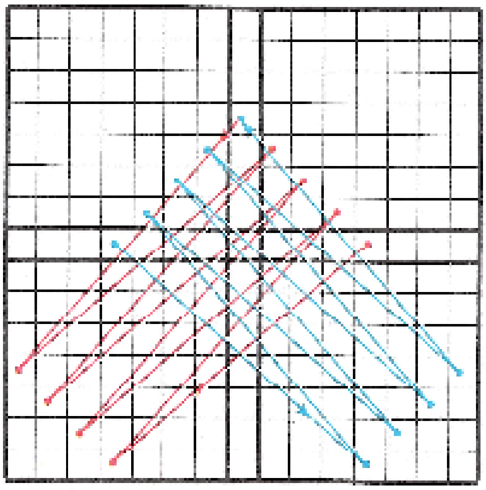
26	20	14	1	44	38	32
34	28	15	9	3	46	40
42	29	23	17	11	5	48
43	37	31	25	19	13	7
2	45	39	33	27	21	8
10	4	47	41	35	22	16
18	12	6	49	36	30	24

Şekil 2.10 7. Dereceden Dengeli Kare

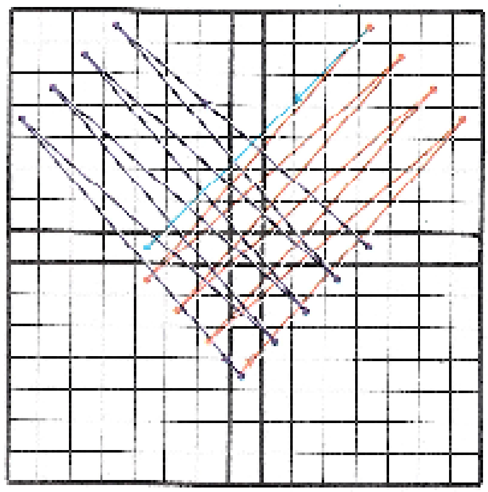
2.6 Örnek: Şimdi de 15. dereceden bir dengeli karenin kapalı çizgelerini ve kareyi şekilleriyle görelim.

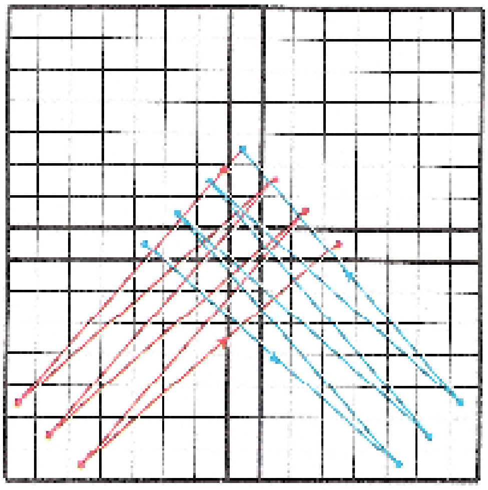


Şekil 2.11 15. Dereceden Dengeli Karenin Kapalı Çizgeleri

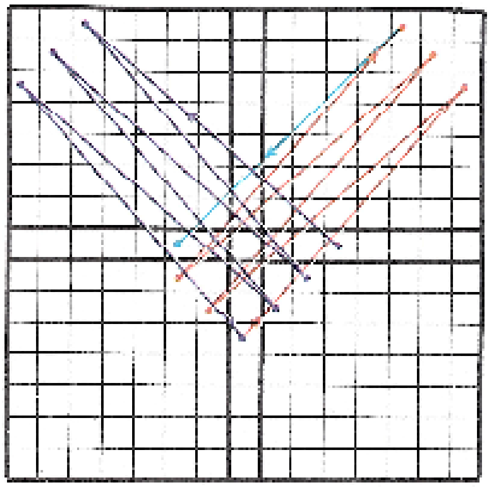


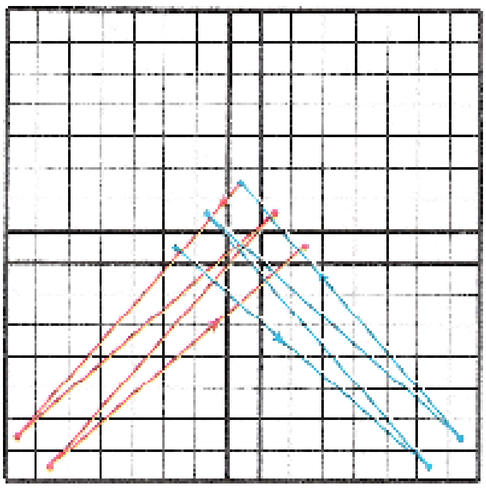
$\frac{15}{9}$



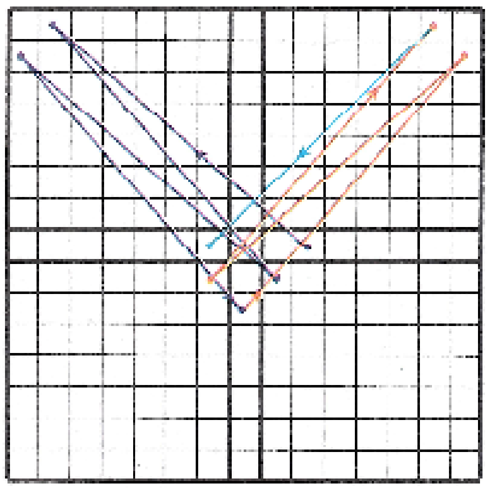


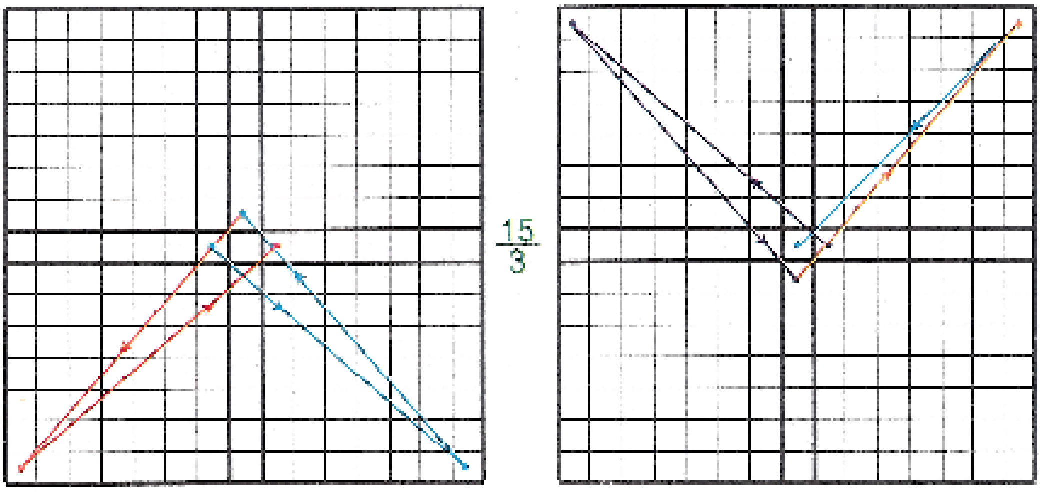
$\frac{15}{7}$





$\frac{15}{5}$





114	100	86	72	58	44	30	1	212	198	184	170	156	142	128
130	116	102	88	74	60	31	17	3	214	200	186	172	158	144
146	132	118	104	90	61	47	33	19	5	216	202	188	174	160
162	148	134	120	91	77	63	49	35	21	7	218	204	190	176
178	164	150	121	107	93	79	65	51	37	23	9	220	206	192
194	180	151	137	123	109	95	81	67	53	39	25	11	222	208
210	181	167	153	139	125	111	97	83	69	55	41	27	13	224
211	197	183	169	155	141	127	113	99	85	71	57	43	29	15
2	213	199	185	171	157	143	129	115	101	87	73	59	45	16
18	4	215	201	187	173	159	145	131	117	103	89	75	46	32
34	20	6	217	203	189	175	161	147	133	119	105	76	62	48
50	36	22	8	219	205	191	177	163	149	135	106	92	78	64
66	52	38	24	10	221	207	193	179	165	136	122	108	94	80
82	68	54	40	26	12	223	209	195	166	152	138	124	110	96
98	84	70	56	42	28	14	225	196	182	168	154	140	126	112

Şekil 2.12 15. Dereceden Dengeli Kare

2.7 Örnek: 16. dereceden bir dengeli kareyi gösterelim.

1	242	14	244	12	246	10	249	248	7	251	5	253	3	255	16
240	18	227	29	229	27	231	232	25	234	22	236	20	238	31	17
33	223	35	212	44	214	42	217	216	39	219	37	221	46	34	224
208	50	206	52	197	59	199	200	57	202	54	204	61	51	207	49
65	191	67	189	69	182	74	185	184	71	187	76	68	190	66	192
176	82	174	84	172	86	167	168	89	170	91	85	173	83	175	81
97	159	99	157	101	155	103	152	153	106	102	156	100	158	98	160
144	114	142	116	124	118	138	137	136	119	123	133	125	131	127	129
128	143	126	141	140	139	122	121	120	135	134	117	132	115	130	113
145	111	147	109	149	107	151	105	104	154	150	108	148	110	146	112
96	162	94	164	92	166	90	88	169	87	171	165	93	163	95	161
177	79	179	77	181	75	183	72	73	186	70	188	180	78	178	80
64	194	62	196	60	198	58	56	201	55	203	53	205	195	63	193
209	47	211	45	213	43	215	41	40	218	38	220	36	222	210	48
32	226	30	228	28	230	26	24	233	23	235	21	237	19	239	225
241	15	243	13	245	11	247	9	8	250	6	252	4	254	2	256

Şekil 2.13 16. Dereceden Dengeli Kare

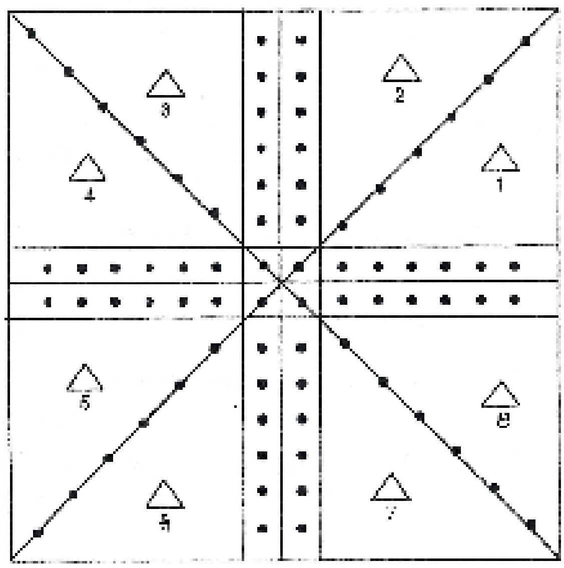
BÖLÜM 3

DOĞAL DENGELİ KARELERİN ÖZELLİKLERİ:

3.1. Tanımlar:

Şimdi doğal dengeli karenin önemli özelliklerini göstermek için birkaç tanım sunalım.

Herhangi bir kareyi Şekil 3.1' de gösterilen bölümlere ayıralım. Şekildeki "+" işareti merkeze en yakın iki satır ve sütunlardan oluşmaktadır. Bu satır ve sütunların kesişmesi karenin merkezi 2x2 karesini oluşturur. Tekli karede "+" işareti bir sütunun ve bir satırın kesişmesinden oluştuğuna göre merkezi kare bir haneli olur.



Şekil 3.1: Çift dereceden karenin özel bölgeleri

Köşegenler ve "+" nın yardımıyla meydana gelen 8 bölge ise "Δ" işaretiyle belirlenmiştir.

a- Köşegen üzerindeki sayılara köşegen sayıları,

b- Merkezi karenin içerisindeki 4 sayıya merkezi sayılar,

c- "+" içerisindeki sayılara (merkezi sayılar hariç) artı-içi sayılar,

d- "Δ" işareti içerisindeki sayılara üçgen-içi sayılar diyeceğiz.

Şimdi ise 16.dereceden sayılı 2 kareyi ele alalım.

1- 256 sayılarını ardışık olarak 16x16 karesindeki hanelere yazalım. Böyle kareye doğal kare denir(Şekil 3.2). Şekil 3.2’de ise tarif ettiğimiz yöntemle yazılmış 16. dereceden doğal sihirli kare gösterilmektedir.

Ele aldığımız bu iki sayılı kareleri (Şekil 3.1 ve şekil 3.2) karşılaştırdığımızda aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmaktadır;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208
209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256

Şekil 3.2: 16. dereceden doğal kare

a- Köşegen üzerindeki sayılardan sadece merkezi sayılar kendi köşegenleri üzerinde yerlerini değişirler,

b- Artı-içi sayılar “+” işareti içinden dışarı çıkmayarak merkezi veya doğrusal simetriye uygun olarak yerlerini değişirler,

1	242	14	244	12	246	10	249	248	7	251	5	253	3	255	16
240	18	227	29	229	27	231	232	25	234	22	236	20	238	31	17
33	223	35	212	44	214	42	217	216	39	219	37	221	46	34	224
208	50	206	52	197	59	199	200	57	202	54	204	61	51	207	49
65	191	67	189	69	182	74	185	184	71	187	76	68	190	66	192
176	82	174	84	172	86	167	168	89	170	91	85	173	83	175	81
97	159	99	157	101	155	103	152	153	106	102	156	100	158	98	160
144	114	142	116	124	118	138	137	136	119	123	133	125	131	127	129
128	143	126	141	140	139	122	121	120	135	134	117	132	115	130	113
145	111	147	109	149	107	151	105	104	154	150	108	148	110	146	112
96	162	94	164	92	166	90	88	169	87	171	165	93	163	95	161
177	79	179	77	181	75	183	72	73	186	70	188	180	78	178	80
64	194	62	196	60	198	58	56	201	55	203	53	205	195	63	193
209	47	211	45	213	43	215	41	40	218	38	220	36	222	210	48
32	226	30	228	28	230	26	24	233	23	235	21	237	19	239	225
241	15	243	13	245	11	247	9	8	250	6	252	4	254	2	256

Şekil 3.3: 16.dereceden doğal sihirli kare

c- Üçgen-içi sayılar ise dönme ve doğrusal simetrilere uygun olarak transpozisyon ederler.

Örnek 3.1: 2 ve 15 sayıları düşey eksen etrafından 180° döndürülerek yatay eksene göre simetrik hanelere, yani 242 ve 255 sayılarının hanelerine kayarlar; bu son 2 sayı ise dönmeden boşaltılmış hanelere geçiyorlar.

Aynı bir simetrik transpozisyon yardımıyla doğal kareden oluşturulan kareye “doğal dengeli kare” denir. [1]

3.2. Dengeli Karelerin Özellikleri

Çift dereceden doğal sihirli karelerde;

3.2.1.Özellik:

a- Karenin geometrik merkezine göre simetrik köşegen sayılar

b- Düşey veya yatay eksenine göre simetrik üçgen-içi sayılar

c- Artı-içi sütun veya satır sayıları sırasıyla, tekli-çift çerçeveler için doğrusal, çiftli-çift çerçeveler için ise noktasal simetri olarak n^2+1, (16^2+1=257) invariantını sağlamaktadırlar. Örnekler (şekil 3.3): aşağıdaki örneklerde sayılar matris elemanları olarak belirlenmişler;

1. 61+196=257 ($a_{4,13}+a_{13,4}$) (yan köşegen üzerinde sayılar)

103+154=257 ($a_{7,7}+a_{10,10}$) (baş köşegen üzerindeki sayılar)

2. 50+207=257 ($a_{4,2}+a_{4,15}$) (şekil 3.1; $\Delta 4$ ve $\Delta 1$ de üçgen-içi sayılar)

77+180=257 ($a_{12,4}+a_{12,13}$) (şekil 3.1; $\Delta 5$ ve $\Delta 8$ de üçgen-içi sayılar)

3. 219+38=257 ($a_{3,11}+a_{14,13}$) (şekil 3.1; $\Delta 2$ ve $\Delta 7$ de üçgen-içi sayılar)

59+198=257 ($a_{4,6}+a_{13,4}$) (şekil 3.1; $\Delta 3$ ve $\Delta 6$ da üçgen-içi sayılar)

4. 127+130=257 ve 114+113=257 ($a_{8,15}+a_{9,15};a_{8,2}+a_{9,2}$) (yatay eksene göre simetrik artı-içi satır sayılar)

128+129=257 ve 144+113=257 ($a_{9,1}+a_{8,16};a_{8,1}+a_{9,16}$) (merkeze göre simetrik artı- içi satır sayılar)

5. 232+25=257 ve 24+233=257 ($a_{2,8}+a_{2,9};a_{15,8}+a_{15,9}$) (düşey eksene göre simetrik artı-içi sütun sayılar)

217+40=257 ve 216+41=257 ($a_{3,8}+a_{14,9};a_{3,9}+a_{14,8}$) (merkeze göre simetrik artı-içi sütun sayılar)

3.2 Tanım: Çerçevenin tepesindeki ve onunla komşu hanelerdeki sayılara "köşe-üçlüsü" denir. [1]

3.2.2. Özellik:

Çiftli-çift ve tekli-çift doğal sihirli karelerde merkeze göre simetrik köşe-üçlüsü sayılarının toplamı kendi aralarında eşittirler.
Baş köşegen üzerinde merkeze göre simetrik köşe-üçlüsü sayılarının karelerinin toplamı kendi aralarında eşittirler.

Örnekler 3.2 (Şekil 3.3):

16+255+17=241+32+15=288

1+242+240=256+225+2=483

$1^2+242^2+240^2=256^2+225^2+2^2=116165$

16. dereceden çerçevedeki sayılar.

31+238+34=226+47+30=303

18+227+223=239+210+19=468

$18^2+227^2+223^2=239^2+210^2+19^2=101582$

14. dereceden çerçevedeki sayılar.

3.2.3. Özellik:

Tek dereceli doğal sihirli karelerde sırasıyla, düşey ve yatay eksenlerine göre simetrik sütunlarda ve satırlardaki sayılar aşağıdaki sayılar sistemini oluştururlar.

Örnekler 3.3 (Şekil 3.4):

114	100	86	72	58	44	30	1	212	198	184	170	156	142	128
130	116	102	88	74	60	31	17	3	214	200	186	172	158	144
146	132	118	104	90	61	47	33	19	5	216	202	188	174	160
162	148	134	120	91	77	63	49	35	21	7	218	204	190	176
178	164	150	121	107	93	79	65	51	37	23	9	220	206	192
194	180	151	137	123	109	95	81	67	53	39	25	11	222	208
210	181	167	153	139	125	111	97	83	69	55	41	27	13	224
211	197	183	169	155	141	127	113	99	85	71	57	43	29	15
2	213	199	185	171	157	143	129	115	101	87	73	59	45	16
18	4	215	201	187	173	159	145	131	117	103	89	75	46	32
34	20	6	217	203	189	175	161	147	133	119	105	76	62	48
50	36	22	8	219	205	191	177	163	149	135	106	92	78	64
66	52	38	24	10	221	207	193	179	165	136	122	108	94	80
82	68	54	40	26	12	223	209	195	166	152	138	124	110	96
98	84	70	56	42	28	14	225	196	182	168	154	140	126	112

Şekil 3.4: 15.dereceden doğal sihirli kare

114+130+…+210+211+2+…+82+98=128+144+…+224+15+16+…+96+112=1695

$$114^2+130^2+\ldots+210^2+211^2+2^2+\ldots+82^2+98^2=128^2+144^2+\ldots+224^2+15^2+16^2+\ldots+96^2+112^2=260065$$

(Bu sayılar 1.ve 15. sütunlardadır).

Çift dereceli sihirli karelerde bu özellik biraz karmaşıktır. 16. dereceden çerçeveyi göz önüne alalım. (Şekil 3.3). Örnek olarak; 1. satırda tek ve çift veya çift ve tek numaralı hanelerde (genel gösterim: $a_{i,k}$ ve $a_{i,k+1}$) bulunan, istenilen 1 çift sayı ve bu sayıların düşey eksene göre simetrik hanelerde ($a_{i,n-k+1}$ ve $a_{i,n-k}$) 1 çiftini ele alalım. Böylelikle elimizde 2 çift sayı olacaktır. Bu 2 çift sayının toplamı yatay eksene göre simetrik 16. satırdaki 2 çift sayının toplamına eşit olur. (eğer köşegen sayıları ve artı-içi sayılar bu çift sayılara dâhillerse, yatay simetri yerine merkez simetrisinden faydalanmak gerekir; tekli-çift çerçevelerin artı-içi sayıları hariç). Bu özellikler 4 çift, 6 çift, 8 çift,… sayılar için de geçerlidir. **İstisna:** istenilen çiftli-çift doğal sihirli karenin 8. ve 4. dereceden çerçevelerinde artı-içi sayılar n^2+1 invariantını noktasal simetri olarak değil, doğrusal simetri olarak sağlamaktadırlar.

İstenilen tekli-çift doğal sihirli karelerde ise bu istisna sadece 4. dereceden çerçeve için geçerlidir.

1. sütunda 2 çift veya 4 çift sayı ve bunlara düşey eksenine göre simetrik 16. sütundaki sayıları ele alalım. Birbirlerine göre simetrik hanelerde bulunan bu 2 çift ve 4 çift sayının toplamı ve karelerinin de toplamı birbirlerine eşittir.

Örnekler 3.4 (Şekil 3.3) :

82+159+111+162=175+98+146+95=514

$$82^2+159^2+111^2+162^2=175^2+98^2+146^2+95^2=70570$$

2. sütun ve 15. sütun

1+240+97+144+128+145+32+241=16+17+160+129+113+112+225+256=1028

$$1^2+240^2+97^2+144^2+128^2+145^2+32^2+241^2=$$

$$16^2+17^2+160^2+129^2+113^2+112^2+225^2+256^2=184260$$

1. sütun ve 16. sütun

69+182+74+185+184+71+187+76=181+75+183+72+73+186+70+188=1028

$$69^2+182^2+74^2+185^2+184^2+71^2+187^2+76^2=$$
$$181^2+75^2+183^2+72^2+73^2+186^2+70^2+188^2=157228$$

5. satır ve 12. satır

Tekli-çift çerçevelerde artı-içi doğrusal simetriye sahip 4 çift sayı n^2+1 invariantını sağlar. 16. dereceden doğal dengeli kareyi ele alalım. (şekil 3.3). Artı-içi (2. Satır ve 2. sütun) ve (15. sütun ve 15. satırdaki) 4 çift sayıyı göz önüne alalım. Yukarıda yazdığımız eşitlik sistemi bu çift sayılar için de sağlanır.

232+25+114+143=127+130+24+233=514=2.(16^2+1)

$$232^2+25^2+114^2+143^2=127^2+130^2+24^2+233^2=87894$$

Not: Bu son eşitlik sisteminde kareler için sağlanan eşitlik (2.satır ve 15. sütun) ve (2. sütun ve 15. satırdaki) sayılar için sağlanamaz. Yani, tekli-çift çerçevelerdeki bu 4 çift sayılar 2'şer çift olarak yan köşegene göre simetrik hanelerde bulunmalıdırlar.

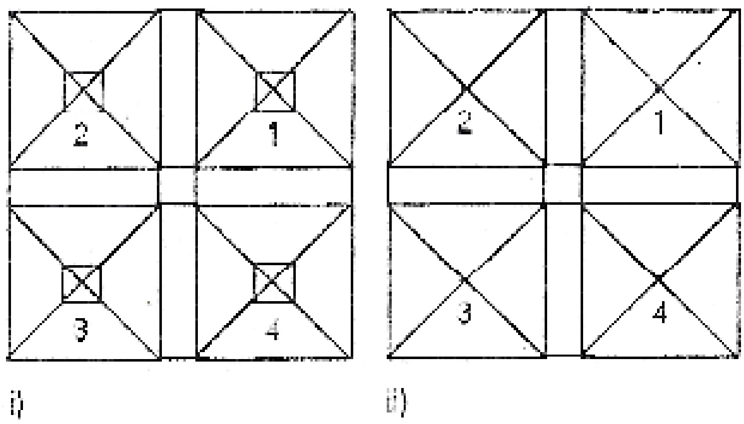
3.2.4. Özellik:

Doğal sihirli karelerde önemli invariantlardan birisi de üçgen-içi sayılara bağlıdır. Burada herhangi sayının yatay ve köşegen (veya düşey ve köşegen) komşu 4 sayının toplamı 2.(n^2+1) invariantını sağlar. Bu sayılar artı-içi ve köşegen üzerindeki sayıları kapsamamalıdırlar.

Örnekler 3.5 (Şekil 3.3):

1. 66+98+190+160=81+83+192+158=514=2(16^2+1)
   Bu sayılar $\Delta 1$'den alınmıştır. (Şekil 3.1)
2. 198+230+58+28=213+215+60+26=514
   Bu sayılar $\Delta 6$'dan alınmıştır. (Şekil 3.1)

Tek dereceli doğal sihirli karelerde bu özellik aşağıdaki gibi gösterilebilir. Artı işareti, kareyi derecesi $\frac{n-1}{2}$'ye eşit 4 küçük kareye ayırır. $n \times n$ tek dereceli sihirli kare için n sayısına 1 eklendiği zaman çiftli-çift veya tekli-çift sayı elde edilebilir. Bu halde çiftli-çift sayı için her küçük karenin merkezinde bir hane, tekli-çift sayı için ise her küçük karenin merkezinde ise nokta bulunacaktır (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Tek dereceden karenin özel bölgeleri
i) Eğer $n+1$ çiftli-çift sayıya eşit ise
ii) Eğer $n+1$ tekli-çift sayıya eşit ise

15x15 karesinde, merkezi sayılar 218, 120, 8 ve 106'dır. Bu sayılar büyük karenin geometrik merkezine göre n^2+1 invariantını sağlayan simetrik sayılardır. Örnek olarak 1. kareyi 3. kare ile ve 2. kareyi 4. kare ile merkeze göre simetrik kabul ederiz (Şekil 3.5). Küçük karelerin merkezlerini noktasal simetri merkezi kabul edelim. Örnek olarak 1. ve 3. karelerini ele alalım. 1. karenin merkezine göre 1 çift sayı ve 3. karenin merkezine göre aynı simetriye sahip 1 çift sayının hepsini toplarsak bu toplamın $2(n^2+1)$'e eşit olduğunu görürüz.

Örnekler 3.6 (Şekil 3.4):

1) $188+23+203+38=452=2(15^2+1)$
   7+204+22+219=452
   216+220+6+10=452

Bu sayılar 1. ve 3. (Şekil 3.5) karelerden alınmıştır.

2) 114+111+115+112=452
   60+180+46+166=452
   72+153+73+154=452

Bu sayılar 2. ve 4. (Şekil 3.5) karelerden alınmıştır.

3.2.5.Özellik:

Doğal sihirli karelerde belirli aritmetik diziler de mevcuttur. Köşegen sayılar ve köşegenlere paralel doğrular üzerinde bulunan sayılar, (merkezi sayılar da dahil) belirli bir takım diziler oluştururlar (Şekil 3.3).

a) 17,34,…,119,**136**,153,170,…,255

b) 32,47,…,122,**137**,152,167,…,242

c) 15,30,…,105,**120**,135,…,225

d) 1,18,…103,**137**,**120**,154,…,256

e) 2,19,…,104,**121**,138,…,240

f) 16,31,…,106,**136**,**121**,151,…,241.

(120 ve 137); (121 ve 136) merkez sayıları kendi köşegenleri üzerinde yerlerini değiştirirler.

a) dizisinin yarım grafları ve b) ve c) dizilerinin grafları yan köşegene göre simetriktirler.

3.2.6.Özellik:

Doğal sihirli karenin önemli bir özelliği de aşağıda verilmiştir. Çift dereceden bu karelerin, dışardan içeriye doğru çerçeveleri tek-tek çıkarıldığında geri kalan karelerin sihirliliğini sağlamak için bu karelerin içerdiği 4. dereceden karenin yazılışında sadece belirli basit değişiklikler yapmak gerekir. Bu özelliği açıklamak için 4. dereceden 3 matrisi göz önüne alalım (Tablo 3.1, Tablo 3.2 ve Tablo 3.3)

Tablo 3.1 n. dereceden doğal karenin kapsadığı 4. dereceden karenin matrisi

$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+2}$
$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}$
$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-2}$
$a_{\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}+2}$

Tablo 3.2 n. dereceden doğal karenin içerdiği 4.dereceden karesinden (Tablo 3.1) oluşturulmuş doğal sihirli karenin matrisi

$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+2}$
$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-2}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$
$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}$
$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+2}$

Tablo 3.3 n. dereceden doğal sihirli karenin kapsadığı 4. dereceden karesinin matrisi (sihirli değil)

$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-2}$
$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+2}$	$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1}$
$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$
$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}-1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$	$a_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$	$a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+2}$

3.2.6.1 Çiftli-çift doğal sihirli karelerde:

a) 1. çerçeveyi çıkardığımızda geri kalan (n-2) dereceden (öylece de tekli-çift karelerin) karenin sihirli olması için 4. dereceden karede (Tablo 3.3) sadece,

1. satırdaki $\left(a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}}\right.$, veya $\left.a_{\frac{n}{2}+2,\frac{n}{2}+1}\right)$ ve

1.sütundaki $\left(a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}\right.$ veya $\left.a_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2}\right)$ sayıların yerlerini değiştirmek gerekir.

b) Geri kalan çiftli-çift karelerin hepsi, 4. dereceden kare istisna olmakla, sihirli olmaktadırlar. (a) daki sayılardaki değişiklikleri yapmak gerekmez).

c) Sadece 6. dereceden karenin çerçevesi çıkarıldığında 4. dereceden kare Tablo 3.2’deki gibi yazılmalıdır.

3.2.6.2 Tekli-çift doğal sihirli karelerde:

d) 1. çerçeve çıkarıldığında geri kalan istenilen çiftli-çift karelerin sihirli olması için bu karenin kapsadığı 4. dereceden kare Tablo 3.2’ deki gibi yazılmalıdır.

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

Şekil 3.6 16. dereceden sihirli kare (B.Franklin)

1	242	3	244	5	246	7	248	249	10	251	12	253	14	255	16
32	239	30	237	28	235	26	233	232	23	230	21	228	19	226	17
33	210	35	212	37	214	39	216	217	42	219	44	221	46	223	48
64	207	62	205	60	203	58	201	200	65	198	53	196	51	194	49
65	178	67	180	69	182	71	184	185	74	187	76	189	78	191	80
96	175	94	173	92	171	90	169	168	87	166	85	164	83	162	81
97	146	99	148	101	150	103	152	153	106	155	108	157	110	159	112
128	143	126	141	124	139	122	137	136	119	134	117	132	115	130	113
144	127	142	125	140	123	138	121	120	135	118	133	116	131	114	129
145	98	147	100	149	102	151	104	105	154	107	156	109	158	111	160
176	95	174	93	172	91	170	89	88	167	86	165	84	163	82	161
177	66	179	68	181	70	183	72	73	186	75	188	77	190	79	192
208	63	206	61	204	59	202	57	56	199	54	197	52	195	50	193
209	34	211	36	213	38	215	40	41	218	43	220	45	222	47	224
240	31	238	29	236	27	234	25	24	231	22	229	20	227	18	225
241	2	243	4	245	6	247	8	9	250	11	252	13	254	15	256

Şekil 3.7 16.dereceden sihirli kare (Tamori)

e) Geri kalan tüm tekli-çift karelerin sihirli olması için önce ele aldığımız karenin sadece merkezindeki sayılarının yerlerini köşegen üzerinde değişmek gerekir.
Ortaya çıkardığımız bu özellikler istenilen sayılardan yazılmış kareler için de geçerlidirler.

Doğal dengeli karelerde açığa çıkardığımız bu özelliklerin başka yazarların yazdıkları sihirli karelerde mevcut olup olmadığını kontrol edebilmek için Şekil 3.6 ve Şekil 3.7'de 16. dereceden sihirli karelerin örnekleri gösterilmiştir.

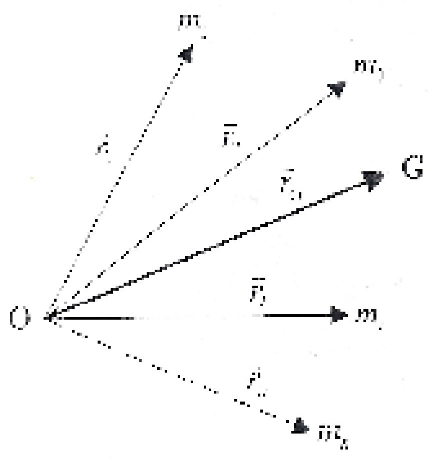
Doğal dengeli karelerin bu özellikleri, 2. bölümde açıklanan algoritmanın doğal dengeli kareler oluşturmak için mükemmel bir kural olduğunu ispat etmektedir.

BÖLÜM 4

DENGELİ KARENİN KÜTLE MERKEZİNİN İNCELENMESİ

4.1. Kütle Merkezi

Belli sayıda kütle noktalarından oluşan (G) kütle merkezi, yarıçap vektörü $\vec{r}_G$ olmak üzere kütle noktalarının yarıçap vektörleri $\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n$ dir. Bunların aşağıdaki denklemde belirtildiği gibi bir ilişkileri vardır.



Şekil 4.1 Kütle Merkezinin Grafik Olarak Gösterimi

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{4.1}$$

Burada m_i, i noktasının kütlesi $\vec{r}_i$, m_i ve O (seçilmiş koordinat merkezi) arasındaki uzaklıktır. $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ ise sistemin toplam kütlesidir. (G) kütle merkezinin yarıçap vektörü (O) koordinat merkezinin seçiminden bağımsızdır.

Düzenli sistemlerin çok basit denklemlerinin kütle merkezlerinin koordinatlarını belirlemek için yazarlar tarafından incelemeler yapmıştır. Düzenli bir sistem olarak biz burada doğal sihirli kareleri inceleyip ele alacağız.

4.2. Dengeli Kare ve Kütle Merkezi

[1] de istenilen derecede, istenilen sayılardan oluşturulan algoritmanın anlaşılması ve uygulaması oldukça kolaydır.

Eğer doğal sihirli karenin her bir hanesindeki sayılar birer nokta kütle olarak düşünülürse, bu sistemin kütle merkezi ve karenin geometrik merkezi aynı olacak yani çakışacaktır. Bu özellik bütün sihirli karelere aittir. Bundan dolayı sihirli kareleri (küpleri,...) 'Dengeli Kareler' olarak adlandırmanın uygun olacağı görülmüştür.

$n.$ dereceden bir doğal sihirli karenin kütle merkezini incelemek için öncelikle doğal sihirli kareyi eş merkezli çerçevelere bölmemiz yani ayırmamız gerekir.

Bu çerçeveler doğal sihirli karenin en dışından en içe doğru $n.,(n-2).,(n-4).,...4.$ ve en sonunda da 2. dereceden çerçevelere ayrılsın. $n.$ dereceden bir sihirli karenin $\frac{n}{2}-1$ tane çerçevesi elde edilir. $n.$ dereceden bir sihirli karenin çerçevelere göre hanelerinin dağılımı (4.2) deki denklemdeki gibi ifade edilebilir.

$$N_\mu = 4(\mu - 1) \tag{4.2}$$

Burada μ, çerçevenin derecesi ve bu da değerlerini $[2,n]$ aralığından alır ki, bunlar ardışık çift sayılardır. N_μ ise $\mu.$ dereceden çerçevenin hanelerinin sayısıdır.

Şimdi de $\sum_{2}^{n} N_\mu = n^2$ olduğunu gösterelim. N_μ sayıları, seri sabiti 8 olan bir seri meydana getirir. Gerçekten (4.2) ye göre, $N_2 = 4$, $N_4 = 12$, $N_6 = 20$,..., $N_n = 4(n-1)$. Eğer biz $\frac{n}{2}$ tane eleman olduğunu hesaba katarsak,

$$\sum_{2}^{n} N_\mu = \frac{N_2 + N_n}{2}\frac{n}{2} = \frac{4+4(n-1)}{2}\frac{n}{2} = n^2 \text{ olur.}$$

Sihirli karenin merkezindeki 1. denklemin yarıçap vektörünün orijinini alalım ve farz edelim ki sihirli karenin sayıları kütle noktaları olsun ve bu sayıların her biri merkezdeki kendi hücresine yerleşmiş şekildedir. Denklem (4.1) deki duruma göre; şöyle yazılabilir:

$$\vec{r}_{kare} = \frac{\sum_{i=1}^{n^2} m_i \vec{r}_i}{M} \tag{4.3}$$

Eğer dengeli karenin kütle merkezi ve onun geometrik merkezi denk gelirse yani çakışırsa, o halde $\vec{r}_{kare} = \vec{0}$ olur. Diğer bir deyişle, denklem (4.4) ü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n^2} m_i \vec{r}_i = \vec{0} \tag{4.4}$$

Denklem (4.2) ye bağlı olarak, çerçevelere göre kütlelerin dağılımını düşünürsek, o zaman denklem (4.4) ü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum_{\mu=2}^{n} \left(\sum_{j=1}^{4(\mu-1)} m_j \vec{r}_j \right) = \sum_{\mu=2}^{n} \vec{A}_{(n,\mu)} = \vec{0} \tag{4.5}$$

Burada $n.$ dereceden sihirli karenin $\mu.$ dereceden çerçevesinin statik kütle momentini $\vec{A}_{(n,\mu)}$ vektörüyle göstereceğiz.

Doğal dengeli karede, hanelere yerleşmiş olan kütleler verilen herhangi bir çerçevenin $\vec{A}_{(n,\mu)}$ vektörü kolayca belirlenebilir. İşlemin açıklaması için O_{xy} koordinat sisteminin orijini ile sihirli karenin geometrik merkezi denk gelsin yani çakışsın ve O_{xy} ekseni sihirli karenin kenarlarıyla paralel olsun. O_x ve O_y eksenlerindeki $A_{(n,\mu)}$ vektörünün izdüşümlerini $A_{x(n,\mu)}$ ve $A_{y(n,\mu)}$ olarak gösterelim.

Çift dereceli sihirli kareler için:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{x(n,2)} = -1; & A_{x(n,4)} = 0 \\ A_{y(n,2)} = n; & A_{y(n,4)} = 0 \end{array}\right\} \; n \neq 4 \tag{4.6}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_{x(4,2)} = 1; & A_{x(4,4)} = -1 \\ A_{y(4;2)} = -4 & A_{y(4,4)} = 4 \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

Çiftli-çift dereceli sihirli kareler için:

$$\begin{cases} A_{x(n,8)} = 0 \\ A_{y(n,8)} = 0 & \mu \neq 4 \\ \left. A_{x(n,\mu)} = (-1)^{\frac{n-\mu-2}{2}} \right] & \mu \neq 8 \\ \left. A_{y(n,\mu)} = n(-1)^{\frac{n-\mu}{2}} \right] \end{cases} \tag{4.8}$$

Tekli-çift dereceli sihirli kareler için:

$$\left\{\begin{array}{l} A_{x(n,n)} = 1 \\ A_{y(n,n)} = -n \end{array}\right] n \neq +2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left. A_{x(n,\mu)} = -1^{\frac{n-\mu-2}{2}} \right] \mu \neq 4 \\ \left. A_{y(n,\mu)} = n(-1)^{\frac{n-\mu}{2}} \right] \mu \neq n \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Tek dereceli sihirli kareler için:

$$\begin{array}{l} A_{x(n,\mu)} = (n-1) * \\ A_{y(n,\mu)} = (n+1) * \end{array} \left\{ \frac{\mu-1}{4}\left[-\frac{(\mu-3)(\mu-2)}{3} + (n-\mu)(\mu-1) \right] \right\} \tag{4.10}$$

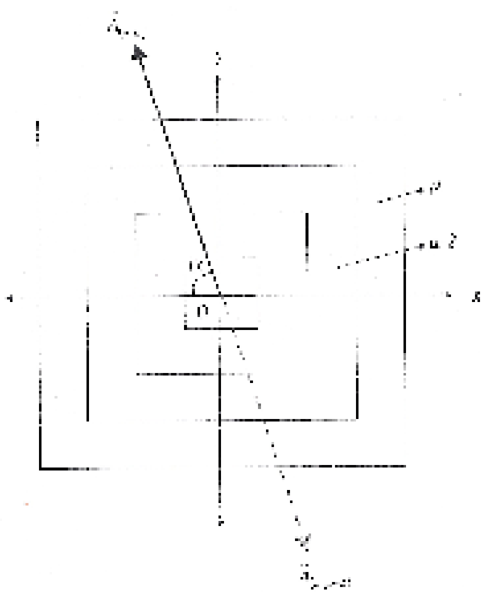
Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 de $A_{x(n,\mu)}$ ve $A_{y(n,\mu)}$ değerleri için çerçevelere göre dengeli karelerin dağılımının düzeni açıkça görülmektedir. Bu değerler yukarıdaki denklemler kullanılarak elde edilir.

Tablo 4.2 deki hanelerde, paydaki sayı aynı hanenin sağındaki sayı ile çarpılırsa $A_{x(n,\mu)}$ elde edilir. Eğer çarpma paydadaki sayı ile yapılırsa $A_{y(n,\mu)}$ elde edilir. Örneğin 9. dereceden bir sihirli karenin 5. dereceden çerçevesini düşünelim. $A_{x(9,5)}$ ve $A_{y(9,5)}$ değerleri sırasıyla 4*28*112 ve 5*28=140 olur. Tablodaki yerleşik sayıların birimini (kg.m) olarak düşünmek mümkündür. Formüllerde sihirli karenin hane kenarının uzunluğu birim uzunluğu olarak, birim uzunluktur. Bu kenar uzunluğunu 'a' ile gösterirsek tablodaki ve formüllerdeki bütün sayılar 'a'ile çarpılmalıdır.

(4.6) ile (4.10) denklemlerden görüldüğü gibi çerçevenin derecesi sadece $A_{x(n,\mu)}$ ve $A_{y(n,\mu)}$nün işaretlerini etkiler. Bütün çerçeveler için $A_{x(n,\mu)}$ve $A_{y(n,\mu)}$ nün toplamı sıfıra eşittir. Diğer bir deyişle sihirli karenin kütle merkezi ve geometrik merkezi aynı olur yani çakışır.

$\left|\vec{A}_{(n,\mu)}\right| = \sqrt{A^2_{x(n,\mu)} + A^2_{y(n,\mu)}}$ denklemi kullanılarak elde edilen $\vec{A}_{(n,\mu)}$ vektörü bazı önemli özelliklere sahiptir.

1. Çift dereceden sihirli karelerin ardışık çerçevelerinin $\vec{A}_{(n,\mu)}$ ve $\vec{A}_{(n,\mu-2)}$ vektörleri bir doğruya göre simetriktir. Şekil 4.2 deki gibi O_x ekseniyle bir α açısı yapar. Tek dereceden sihirli kareler için bu özellik çok az farklılık gösterir.



Şekil 4.2 Çerçevelere Göre $\vec{A}_{(n,\mu)}$ Vektörünün Dağılımı

2. Herhangi bir çerçevede eğer 2 çift veya 4 çift sayı simetrik olarak yerleşmemiş ise ve farklı derecelerden çerçevelerden çiftler simetrik olarak yerleşmemiş ise çerçevelere göre $\vec{A}_{(n,\mu)}$ vektörlerinin dağılımı değişmez. Bu da demektir ki, Tablo 4.1 ve 4.2 deki sayılar değişmez.

İkinci özellik oldukça önemlidir ve bu özellik Abiyev'in 'doğal sihirli kareler' adlı sihirli karelerine dayanır. Ayrıca bu özellikler yalnızca 'doğal sihirli karelere' aittir. Diğer yöntemlerle yazılan başka hiçbir sihirli kare bu özellikleri sağlamaz. Bu yüzdendir ki bu karelere 'Dengeli Kareler' adını vermekteyiz. Mühendislikte denge ve simetri konularında kütle merkezi bulma analizinde dengeli karelerin çok yararlı olacağı açıkça görülmektedir.

Tablo 4.1 Çift Dereceden Dengeli Karelerin Çerçevelere Göre Dağılımı (n: dengeli karenin derecesi)

μ \ n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
[illegible]	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
[illegible]	2	-4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
[illegible]		-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[illegible]		4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[illegible]			1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
[illegible]			6	8	10	-12	14	-16	18	-20	22
[illegible]				0	1	0	1	0	1	0	1
[illegible]				0	-10	0	14	0	-18	0	22
[illegible]					1	1	-1	1	1	1	-1
[illegible]					-10	-12	14	16	18	-20	22
[illegible]						1	1	-1	1	1	1
[illegible]						12	-14	16	18	20	-22
[illegible]							1	1	-1	1	1
[illegible]							14	-16	18	20	22
[illegible]								-1	1	-1	1
[illegible]								16	18	20	-22
[illegible]									1	1	1
[illegible]									-18	20	22
[illegible]										-1	1
[illegible]										20	-22
[illegible]											1
[illegible]											-22

Tablo 4.2 Tek Dereceden Dengeli Karenin Çerçevelere Göre Dağılımı

μ \ n	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
[illegible]	$\frac{1}{2}$ 0	$\frac{2}{3}$ 4	$\frac{3}{4}$ 8	$\frac{4}{5}$ 12	$\frac{5}{6}$ 16	$\frac{6}{7}$ 20	$\frac{7}{8}$ 24	$\frac{8}{9}$ 28	$\frac{9}{10}$ 32	$\frac{10}{11}$ 36
[illegible]		$\frac{2}{3}$ -4	$\frac{3}{4}$ 12	$\frac{4}{5}$ 28	$\frac{5}{6}$ 44	$\frac{6}{7}$ 60	$\frac{7}{8}$ 76	$\frac{8}{9}$ 92	$\frac{9}{10}$ 108	$\frac{10}{11}$ 124
[illegible]			$\frac{3}{4}$ -20	$\frac{4}{5}$ 16	$\frac{5}{6}$ 52	$\frac{6}{7}$ 88	$\frac{7}{8}$ 124	$\frac{8}{9}$ 160	$\frac{9}{10}$ 196	$\frac{10}{11}$ 232
[illegible]				$\frac{4}{5}$ -56	$\frac{5}{6}$ 8	$\frac{6}{7}$ 72	$\frac{7}{8}$ 136	$\frac{8}{9}$ 200	$\frac{9}{10}$ 264	$\frac{10}{11}$ 328
[illegible]					$\frac{5}{6}$ -120	$\frac{6}{7}$ -20	$\frac{7}{8}$ 80	$\frac{8}{9}$ 180	$\frac{9}{10}$ 280	$\frac{10}{11}$ 380
[illegible]						$\frac{6}{7}$ -220	$\frac{7}{8}$ -76	$\frac{8}{9}$ 68	$\frac{9}{10}$ 212	$\frac{10}{11}$ 356
[illegible]							$\frac{7}{8}$ -364	$\frac{8}{9}$ -168	$\frac{9}{10}$ 28	$\frac{10}{11}$ 224
[illegible]								$\frac{8}{9}$ -560	$\frac{9}{10}$ -304	$\frac{10}{11}$ -48
[illegible]									$\frac{9}{10}$ -816	$\frac{10}{11}$ -492
[illegible]										$\frac{10}{11}$ -1140

BÖLÜM 5

DENGELİ KARELERİN UYGULAMALARI

5.1. Yeni Özdeşlik Formülleri

5.1.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları ile İlgili Bir Hatırlatma

Fibonacci sayıları bir çok matematiksel uygulamalarda ortaya çıkmakta ve 0,1,1,2,3,5,8,13,… dizisini oluşturmaktadır. Bu sonsuz dizi aşağıdaki yineleme formülü ile ifade edilebilir:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,; \quad n \geq 2; \quad F_0 = 0\,; \quad F_1 = 1 \tag{5.1}$$

Bu formüle alternatif

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]; \qquad n \geq 0. \tag{5.2}$$

İfadesi de mevcuttur.

Nihayet, bu sayılar $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ fonksiyonu ile de üretilebilir. Bu fonksiyonu polinom biçiminde yazdığımızda terimlerin karşısındaki katsayılar Fibonacci sayılarını oluşturur:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = 0x^0 + 1x + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \ldots \tag{5.3}$$

Fibonacci sayıları Pascal üçgeninde köşegen sayıların toplamı biçiminde de ifade edilmektedir:

$$F_{n+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_{n-j}^{j} \qquad \text{her} \quad n \geq 0 \quad \text{için} \tag{5.4}$$

Fibonacci sayılarının yanı sıra Lucas sayıları da yaygın sayılardandır. Bunlar aşağıdaki yineleme formülden bulunur:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}; \qquad n \geq 2, \; L_0 = 2; \; L_1 = 1. \tag{5.5}$$

$L_0, L_1, L_2, L_3, \ldots$ Lucas dizisi $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x-x^2}$ fonksiyonu yardımıyla da üretilebilir:

$$\frac{2-x}{1-x-x^2} = 2x^0 + 1x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 18x^6 + 29x^7 + \ldots \tag{5.6}$$

Fibonacci ve Lucas dizilerindeki terimlerin orantılarının limiti aynı bir sayıya, altın orantı sayısına eşittir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1,61803\ldots \tag{5.7}$$

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında çok ilginç bağıntılar mevcuttur. Bu sayıların birçok alanlarda ortaya çıkması onların doğada çok önemli diziler olduğunu göstermektedir.

Tarafımızca bulunan yeni algoritma yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayılarının ortaya çıkması yukarıda değindiğimize güzel bir örnektir.

5.1.2. Algoritma

1995 yılından bugüne kadar sihirli kareler ve küplerle uğraşan A.A.Abiyev [1] çift dereceden karelerin, küplerin, hiperküplerin merkezlerindeki en küçük ve en büyük sayılar için aşağıdaki zincirli özdeşliğin sağlandığını fark etmiştir. Sonra ise bu özdeşliklerin istenilen sayılar için de geçerli olduğu belirlenmiştir:

Eğer $n-$ çift sayı ise

$$a^n + b^n = x_1(a+b)^n - ab\left[x_2(a+b)^{n-2} - ab\left[x_3(a+b)^{n-4} - \ldots\right]\right] \tag{5.8}$$

Eğer $n-$ tek sayı ise

$$a^n + b^n = (a+b)\left[x_1'(a+b)^{n-1} - ab\left[x_2'(a+b)^{n-3} - ab\left[x_3'(a+b)^{n-5} - \ldots\right]\right]\right] \tag{5.9}$$

Bu zincirli özdeşliklerdeki katsayılar binom katsayılarından farklı olup, tarafımızca sunulan algoritma yardımıyla bulunurlar. Bu sayılar, bu algoritma yardımıyla düzenlenmiş üçgenden elde edilirler.

5.1.3. Üçgenin Oluşturulması

Ardışık doğal sayıları 0, 1, 2, 3, 4,… alt alta yazarsak merkez sütunu oluştururuz. Bu sütunun sağında 1. sütunu oluşturmak için merkezi sütundaki tek sayılar aynen sağa geçirilir (Tablo 5.1). Boş yerlere ise sadece 2 sayısını yazıyoruz. 1. sütunun solunda 2. sütunu oluşturmak için önce 1. sütundaki alt alta olan 2 ve 3 sayılarının soluna 1 sayısı yazılır. Daha sonra, birinci 1 sayısı birinci sütundaki 3 sayısı ile toplanır ve ikinci 1 sayısının altına yazılır. Elde ettiğimiz 4 sayısı birinci sütundaki 5 sayısı ile toplanır ve 4 sayısının altına bir hane atlayarak yazılır; böylece, ikinci sütunda bir boşluk ara ile ardışık sayıların karelerinin dizisi 1, 4, 9, 16, 25, 36,… oluşur. Boş hanelere ise, hanenin üstündeki iki sayının toplamı yazılır; örnek: 1+4 =5, 5+9=14, 14+16=30, … Böylece, ikinci sütun 1, 1, 4, 5, 9, 14, 16, 30, 25,… elde edilir (Tablo 5.1).

Üçüncü sütunu oluşturmak için önce ikinci sütundaki 4 ve 5 sayısının soluna 1 sayısı, dördüncü sütunu oluşturmak için üçüncü sütundaki 6 ve 7 sayılarının soluna 1 sayısı, vb. yazılır. Daha sonra ise yukarıdaki ikinci sütunu oluşturma kuralını 3., 4., v.b. uygulayarak 3., 4., v.b. sütunlar elde edilir (Tablo 5.1).

Böylece, tarafımızca sunulan algoritma yardımıyla bulunan sayılardan bir üçgen oluşturuldu.

Bu üçgendeki her satırdaki sayıların toplamı Lucas sayısına eşittir. Bu üçgenin her satırındaki sayılar (5.8) ve (5.9) özdeşliklerindeki katsayıları belirtir. Örneğin: $n=6$ için

$$a^6+b^6=1(a+b)^6-ab\left[6(a+b)^4-ab\left[9(a+b)^2-ab\left[2(a+b)^0\right]\right]\right] \tag{5.10}$$

$n=7$ için

$$a^7+b^7=(a+b)\left[1(a+b)^6-ab\left[7(a+b)^4-ab\left[14(a+b)^2-\left[7(a+b)^0\right]\right]\right]\right] \tag{5.11}$$

(Tablo 5.1’de 6. ve 7. satırlardaki sayılara bkz.)

5.1.4. Sol Üçgenin Oluşturulması

Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki

$$F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}; \qquad L_n = F_{n-1} + F_{n+1}; \quad n \geq 1 \tag{5.12}$$

bağıntılarından yola çıkarak şöyle bir soru sorulabilir: “Lucas sayılarını oluşturmak için elde ettiğimiz algoritmaya benzer algoritma Fibonacci sayıları için de mevcut mudur?”

Bulduğumuz üçgeni sağ üçgen olarak isimlendirirsek, buna simetrik sol üçgen ise Fibonacci sayılarını belirtecektir. Benzer şekilde sol üçgeni de oluşturalım:
Sol üçgenin birinci sütunu, merkez sütunundaki tek sayılara karşılık 1 sayısı, çift sayılara karşılık 0 yazarak oluşturulur (Tablo 5.1). Sağ üçgende birinci sütundaki 2 ve 3 sayılarına simetrik 0 ve 1 sayıları uygun gelir. Bu sayıların sağına sağ üçgende olduğu gibi 1 sayısı yazılır.

Sağ üçgeni oluşturmak için sayıların toplanma kuralı simetrik olarak sol üçgenin de oluşturulması için uygulanır. Önce, ikinci sütundaki ilk 1 sayısı birinci sütundaki ikinci 1 sayısı ile toplanır (1+1=2), ve bu sayı ilk 1’den bir hane atlayarak aşağı yazılır. Daha sonra bu sayı birinci sütundaki üçüncü 1 sayısı ile toplanır (2+1=3) ve 2’den yine bir hane atlayarak aşağı yazılır. Bu kuralı devam ettirdiğimizde ikinci sütunda bir boş hane ara ile ardışık doğal sayıları yazmış oluruz.

İkinci sütundaki boş hanelere, hanenin üstündeki iki sayı toplanarak yazılır. Örneğin: 1+2=3; 3+3= 6; 6+4=10;… üçüncü sütunu oluşturmak için ikinci sütundaki 2 ve 3 sayıların sağına 1 yazmak gerekir. Daha sonra ikinci sütunu oluşturmak için kullandığımız kural üçüncü sütuna da uygulanır. Böylece, elde ettiğimiz sol üçgende satırlardaki sayıların toplamı Fibonacci sayılarına eşit olur (Tablo 5.1).

F_n	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	$n=$ $p+1$	**7.**	**6.**	**5.**	**4.**	**3.**	**2.**	**1.**	L_n
0	0							**0**							2	**2**
1	1	0						**1**						0	1	**1**
1	0	1						**2**						1	2	**3**
2	1	1						**3**						1	3	**4**
3	0	2	1					**4**					1	4	2	**7**
5	1	3	1					**5**					1	5	5	**11**
8	0	3	4	1				**6**				1	6	9	2	**18**
13	1	6	5	1				**7**				1	7	14	7	**29**
21	0	4	10	6	1			**8**			1	8	20	16	2	**47**
34	1	10	15	7	1			**9**			1	9	27	30	9	**76**
55	0	5	20	21	8	1		**10**		1	10	35	50	25	2	**123**
89	1	15	35	28	9	1		**11**		1	11	44	77	55	11	**199**
144	0	6	35	56	36	10	1	**12**	1	12	54	112	105	36	2	**322**

Tablo 5.1

Şimdi şöyle bir soru sorulabilir: “Bu sayılar nerede uygulanabilir?”

Yukarıda incelediğimiz zincirli özdeşlikler $a^n + b^n$ ifadesi için geçerli idi. Simetriliği dikkate alırsak, biz $a^n - b^n$ ifadesi için de zincirli özdeşliği bulabiliriz. Araştırmalar gösterdi ki, bu formüller aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = y_1\left(a+b\right)^{n-1} - ab\left[y_2\left(a+b\right)^{n-3} - ab\left[y_3\left(a+b\right)^{n-5} - ....\right]\right] \qquad (5.13)$$

Bu zincirli özdeşliklerde terimlerin katsayıları sol üçgenden alınacaktır. $n=6$; $n=7$ için örnekler yazalım.

$$\frac{a^6 - b^6}{a-b} = 1\left(a+b\right)^5 - ab\left[4\left(a+b\right)^3 - ab\left[3\left(a+b\right) - ab\left[0\left(a+b\right)^{-1}\right]\right]\right] \qquad (5.14)$$

$$\frac{a^7 - b^7}{a-b} = 1\left(a+b\right)^6 - ab\left[5\left(a+b\right)^4 - ab\left[6\left(a+b\right)^2 - ab\left[1\left(a+b\right)^0\right]\right]\right] \qquad (5.15)$$

Sol üçgende sayılar katsayı olarak sağdan sola doğru alınır. (Tablo 5.1’in sol üçgeninde 6. ve 7. satırlardaki sayılara bkz.)

5.2. $x^2+(x+1)^2=z^2$ Denklemini Sağlayan Sayı Dizilerinin Düzeninin İncelenmesi

n. dereceden dengeli bir karede karenin merkezindeki dört tane sayıya 'merkezcil sayılar' denildiğini biliyoruz.

Büyük boyutlu şekillerde (küp, hiperküp vb.) merkezcil sayıların kaç tane olduğu $q=2^p$ formülüyle bulunabilir. p, şeklin oluşturduğu uzayın boyutudur.

(5.10) ve (5.11) formüllerinden de görüldüğü gibi

$$A_p^{p+1}+B_p^{p+1}=F\left[\left(A_p+B_p\right),A_pB_p\right] \tag{5.16}$$

şeklinde bir açılım yapmak mümkündür.

Örnek 5.1: $p=1$ için $A_1^2+B_1^2=\dfrac{(n+1)^2+1}{2}=\left(\dfrac{n}{2}+1\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$

$A_1=\dfrac{n}{2}+1$ ve $B_1=\dfrac{n}{2}$ olduğunu görüyoruz.

Görüldüğü gibi uzayın boyutu $p=1$ iken $\dfrac{n}{2}=x$ dersek;

$$A_1^2+B_1^2=(x+1)^2+x^2 \tag{5.17}$$

elde edilir.

Böylece dik kenarları arasındaki farkı 1 birim olan dik üçgenlerin fikrinin nereden oluştuğunu görmüş olduk. Dengeli karenin merkezindeki dört tane sayıyı ele alıp, en büyük ve en küçük sayıdan yola çıkarak (5.17) yi elde ettik. Bu denklemin aslında bir bağıntı oluşturacağını sezerek bazı indirgeme formüllerini ve buna bağlı olarak bazı tabloları incelemeye çalışacağız. Önce Pisagor üçlüleriyle ilgili kısa bir hatırlatma yapalım.

5.2.1. Pisagor Üçlüleri

Burada önce Pisagor üçlülerini tanımaya çalışalım. Bir dik açılı üçgenin dik kenarlarının uzunlukları toplamı, hipotenüsün uzunluğu toplamına eşittir. i,j,k tamsayı olmak üzere olacak şekilde sonsuz sayıda Pisagor üçlüleri vardır.

Euclid'in İspatı: $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ eşitliğini düşünelim. $2n + 1$ burada quadratik (kare, ikinci dereceden) olursa, bu Pisagor üçlüsünü oluşturur. Burada $2n + 1$ bütün tek sayıları gösterir; bütün diğer quadratik(kare) sayılar tektir, sonsuz çoklukta tek sayı vardır; böylece sonsuz çoklukta Pisagor üçlüsü vardır.

Euclid ispatında bulunan Pisagor üçlüleri;

[$m = 2k + 1$]	[$n = (m^2 - 1) / 2$]	[$n + 1$]
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
… vb…		

Sadece bu formda olmayan sonsuz çoklukta Pisagor üçlüleri de vardır. Aynı şeyi $n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$ için düşünelim. $4n + 4 = 4(n + 1)$ bir kare(quadratik) olduğunda bir Pisagor üçlüsü elde ederiz. Şimdi 4 ile bölünebilen bütün quadratik sayılara bakıyoruz.

(Bununla birlikte eğer m, 2 ile bölünebilirse fakat 4 ile bölünemezse $m = (2k + 1)$ ise yeni üçlü bir "Euclid"'in çarpanıdır. Böylece sadece 4 ün katlarını düşünelim.

[$m,m = 4k$]	[$n = (m^2 / 4) - 1$]	[$n + 2$]
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
20	99	101
24	143	145

28	195	197
30	255	257
…Vb…		

● Diğer Üçlüler şöyle sıralanabilir:

20,21,29,…,n = 21: $n^2 + 16n + 64 = (n + 8)^2$

28,45,53,…,n = 45: $n^2 + 16n + 64 = (n + 8)^2$

36,77,85,…,n = 77: $n^2 + 16n + 64 = (n + 8)^2$

33,56,65,…,n = 80: $n^2 + 18n + 81 = (n + 9)^2$

48,55,73,…,n = 55: $n^2 + 36n + 324 = (n + 18)^2$

60,91,109,…,n = 91: $n^2 + 36n + 324 = (n + 18)^2$

65,72,97,…,n = 72: $n^2 + 50n + 625 = (n + 25)^2$…vb…

Pisagor üçlülerini kısaca bir hatırlattıktan sonra bizim burada amaçladığımız şeyi açıklayalım: Buradaki esas amacımız; kendi aralarında ikişer ikişer asal olan Pisagor üçlülerinin dizileri arasındaki bir bağıntıyı(düzeni) incelemektir.

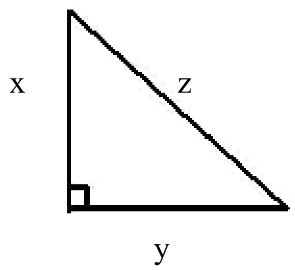
Yüzyıllardan beri şimdiye kadar dik üçgende iki türlü bağıntı incelenmiştir.

1) Hipotenüs ile dik kenar bağıntısı

2) Yalnızca dik kenarlar arasındaki bağıntı

Hipotenüs dik kenar bağıntısını açıklamaya çalışalım.

1.

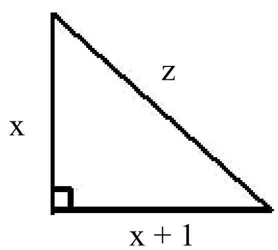


$z = y + d$

$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow x^2 + y^2 = (y+d)^2$

$d = 0,1,2,...,\infty$

2. Şimdi dik kenarlar arasındaki bağıntıyı göz önüne alalım.



$y = x + 1 \rightarrow x^2 + (x + 1)^2 = z^2$ olur.

Yukarıda görüldüğü gibi dik kenarlar arasında fark yalnızca 1 iken bir bağıntı (düzen) bulmak istiyoruz. İki dik kenar arasındaki fark 1'den fazla iken bir bağıntı bulamıyoruz. Öyleyse burada dik kenarlar arasında fark 1 iken olan bağıntıyı inceliyoruz. Matematikçiler, Pisagor üçlüleriyle aşağı yukarı 2500 yıl boyunca ilgilenmişlerdir. Ama ilgilerini sadece hipotenüs dik kenar arasındaki bağıntıya toplamışlar, dik kenarlar arasındaki düzene işaret etmişlerdir.

Şimdi burada şu soruyu sorabiliriz. Acaba neden matematikçiler bu 25 asır boyunca dik kenarlar arasındaki bağıntıya önem vermemişlerdir? Ve yine neden aralarındaki fark 1 olan dik üçgenlerde çok güzel bir düzen(bağıntı) varken fark 1'den fazla iken böyle bir düzen yoktur?

Ancak 1968 yılında Pell adında bir matematikçi aradaki fark 1 olan dik üçgenlerle uğraşmış ve bazı indirgeme formülleri bulmuştur. Şimdi bu yönteme bir göz atalım.

$$x^2 + (x + 1)^2 = z^2 \tag{5.18}$$

denklemini sağlayan sayılar Pell sayılarıyla elde edilebilir.

$$x_n = P^2_{n+1} - P^2_n \, ; \qquad z_n = P^2_{n+1} + P^2_n$$

Burada $P_0 = 0$; $P_1 = 1$; $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ 'dır.

Yukarıdaki (5.18) denklemini şöyle yazılabilir.

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{5.18.1}$$

Bu denklemi sağlayan sayılar dizisi ilk defa Pell yöntemiyle hesaplanmıştır.

$n = 0$ $P_2 = 2P_1 + P_0 = 2.1 + 0 = 2$ $\quad x_n = P^2_{n+1} - P^2_n$, $z_n = P^2_{n+1} + P^2_n$

$n = 1$ $P_3 = 2P_2 + P_1 = 2.2 + 1 = 5$ $\quad x_0 = 1$ $\quad z_0 = 1$

$n = 2$ $P_4 = 2P_3 + P_2 = 2.5 + 2 = 12$ $\quad x_1 = 2^2 - 1^2 = 3$ $\quad z_1 = 2^2 + 1 = 5$

$n = 3$ $P_5 = 2P_4 + P_3 = 2.12 + 5 = 29$ $\quad x_2 = 5^2 - 2^2 = 21$ $\quad z_2 = 5^2 + 2^2 = 29$

$n = 4$ $P_0 = 2P_0 = 2P_5 + P_4 = 2.29 + 12 = 70$ $\quad X_3 = 12^2 - 5^2 = 119$

$Z_3 = 29^2 + 5^2 = 169$

“y” değerini bulurken de “x_1” gibi “n = tek” sayılarda bir fazlasını, x_2 gibi “ n = çift sayılarda bir fazlasını almayıp bir eksiğini alacağız.

Gördüğünüz gibi Pell yöntemiyle sayıları hesaplamak zordur. Ve kuadratik formdadır. Oysa [1]’de bir indirgeme formülü bularak bu hesapları çok daha kolay ve lineer bir şekilde yapmıştır. Bu formüller şöyledir.

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= 6x_{n+1} - (x_n - 2) \qquad & x_1 = 0 \, , \, x_2 = 3 \\
y_{n+2} &= 6y_{n+1} - (y_n + 2) \qquad & y_1 = 1 \, , \, y_2 = 4 \\
z_{n+2} &= 6z_{n+1} - (z_n) \qquad & z_1 = 1 \, , \, z_2 = 5
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

n = 1 için $x_3 = 6x_2 - (x_1 - 2) = 6.3 - (0 - 2) = 20$

$y_3 = 6y_2 - (y_1 + 2) = 6.4 - (1 + 2) = 21$

$z_3 = 6z_2 - z_1 = 6.5 - 1 = 29$

ve diğer bütün “n” değerleri için x, y, z sayıları kolayca elde edilir.

(5.19) formülleri ile yazılan dizilerdeki sayılar arasında aşağıdaki önemli özellikler açığa çıkarılmıştır.

y = x + 1 koşulu dikkate alınıyorsa

$$x_{n+1} = y_n + y_{n+1} \tag{5.20}$$

olduğu görülmektedir.

Bulduğumuz dizinin iki art-arda terimleri için (5.21) denklemini yazalım:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= z_{n+1}^2 \\
x_n^2 + y_n^2 &= z_n^2
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.21}
$$

1. eşitliğinden 2. sini çıkarsak ve basit işlemler yaparsak:

$$x_{n+1}^2 - y_n^2 + y_{n+1}^2 - x_n^2 = z_{n+1}^2 - z_n^2 \Rightarrow (x_{n+1} - y_n)(x_{n+1} + y_n) + (y_{n+1} - x_n)(y_{n+1} + x_n) = (z_{n+1} - z_n)(z_{n+1} + z_n)$$

bulunur.

Bu formülden (5.20) eşitliği dikkate alınıyorsa:

$$(x_{n+1} + y_n)\left[x_{n+1} + y_{n+1} - (x_n + y_n)\right] = (z_{n+1} - z_n)(z_{n+1} + z_n) \tag{5.22}$$

yazılabilir.

(5.22) den iki denklem sistemi sunulabilir:

$$\left.\begin{aligned} x_n + y_{n+1} - (x_{n+1} + y_n) = z_{n+1} - z_n \\ x_{n+1} + y_{n+1} - (x_n + y_n) = z_{n+1} + z_n \end{aligned}\right\} \qquad (5.23)$$

(5.23) sisteminin (5.21) formülüne göre mümkün olmadığı görünmektedir. Böylelikle biz (5.23) sistemini ele alabiliriz.

Şimdi Pisagor teoremini (n+2) terim için yazıp ve bu eşitliği de y = x + 1 dikkate alıp (5.19) rekurrent (indirgeme) formüllerinden faydalanırsak;

$$x_{n+2}^2 + y_{n+2}^2 = z_{n+2}^2 \Rightarrow \left[6x_{n+1} - \left(x_n - 2\right)\right]^2 + \left[6y_{n+1} - \left(y_n + 2\right)\right]^2 = (6z_{n+1} - z_n)^2 \Rightarrow$$

$$36x_{n+1}^2 - 12x_{n+1}\left(x_n - 2\right) + \left(x_n - 2\right)^2 + 36y_{n+1}^2 - 12y_{n+1}(y_n + 2) + \left(y_n + 2\right)^2$$
$$= 36z^2{}_{n+1} - 12z_{n+1}z_n + z_n - 12x_{n+1} + 24x_{n+1}x_n^2 - 4x_n + 4 - 12y_{n+1}y_n - 24y_{n+1} + y_n^2 + 4y_n + 4$$

$$= -12z_{n+1}z_n + z_n^2 \Rightarrow -12(x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n) - 24(y_{n+1} - x_{n+1}) + 4\left(y_n - x_n\right) + 8 =$$

$$= -12z_{n+1}z_n \Rightarrow x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n = z_{n+1}z_n - 1 \qquad (5.24)$$

bulunur.

(5.23) denklem sisteminin 1. denklemi ele alıp her iki tarafı kareye yükseltip belirli işlemler yapalım.

$$(z_{n+1} - z_n)^2 = (x_{n+1} + y_n)^2 \Rightarrow z_{n+1}^2 - 2z_{n+1}z_n + z_n^2 = x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}y_n + y_n^2 \Rightarrow$$

$$2z_{n+1}z_n = z_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 - y_n^2 - 2x_{n+1}y_n - y_{n+1}^2 + x_n^2 - 2x_{n+1}y_n =$$

$$(x_{n+1} + 1)^2 + (y_n - 1)^2 - 2x_{n+1}y_n = x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 1 + y_n^2 - 2y_{n+1} - 2x_{n+1}y_n \Rightarrow$$

$$2(z_{n+1}z_n - 1) = x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}y_n + y_n^2 + 2x_{n+1} - 2y_n - 2x_{n+1}y_n - 2x_{n+1}y_n$$

$$= (x_{n+1} + y_n)^2 - 2x_{n+1}(y_n + 1) + 2y_n(x_{n+1} - 1) = (x_{n+1} + y_n)^2 - 2x_{n+1}x_n - 2y_ny_{n+1} =$$

$$= (x_{n+1} + y_n)^2 - 2(x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n)$$

Bu son ifadede (5.24) eşitliğini dikkate alırsak:

$$2(z_{n+1}z_n - 1) = (x_{n+1} + y_n)^2 - 2\left(z_{n+1}z_n - 1\right) \Rightarrow$$

$$4(z_{n+1}z_n - 1) = \left(x_{n+1} + y_n\right)^2 \Rightarrow$$

$$z_{n+1}z_n - 1 = \left(\frac{x_{n+1} + y_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_n + y_{n+1}}{2}\right)^2 \tag{5.25}$$

Yinede (5.23) denklem sisteminin 1. denklemini kareye yükseltip $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$ denklemini dikkate alırsak:

$$\left(z_{n+1}z_n\right)^2 = \left(x_{n+1} + y_n\right) \Rightarrow z_{n+1}^2 - 2z_{n+1}z_n + z_n^2 = x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}y_n + y_n^2 \Rightarrow$$

$$x_n^2 = y_{n+1}^2 = (x_{n+1} + y_n + z_{n+1}z_n) \tag{5.26}$$

aynı kaide ile

$$x_{n+1}^2 + y_n^2 = 2(x_n y_{n+1} + z_{n+1} z_n)$$

buluruz.

Şimdi ise (5.25) ve (5.23) formüllerinden faydalanırsak:

$$\left(\frac{x_{n+1} + y_n}{2}\right)^2 = z_{n+1}z_n - 1 \Rightarrow x_n^2 + y_{n+1}^2 + 2x_n y_{n+1} = 4\left(z_{n+1}z_n - 1\right) \Rightarrow$$

$$x_{n+1}y_n + z_{n+1}z_n + x_n y_{n+1} z_n - 2 \Rightarrow$$

$$x_{n+1}y_n + x_n y_{n+1} = z_{n+1}z_n - 1 \tag{5.27}$$

(5.27) ve (5.24) formülleri dikkate alındığında ise;

$$x_{n+1}y_n + x_n y_{n+1} = x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n - 1 \tag{5.28}$$

bulunur.

Şimdi ise (5.23) denklem sisteminin 2. denklemini kareye yükseltip malum cebirsel işlemler yapalım.

$$\left[x_{n+1}y_{n+1}-(x_n+y_n)\right]^2=(z_{n+1}+z_n)^2 \Rightarrow$$

$$(x_{n+1}+y_{n+1})^2-(x_n+y_n)^2-2(x_{n+1}+y_{n+1})(x_n+y_n)=z_{n+1}^2+z_n^2+2z_{n+1}z_n \Rightarrow$$

$$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2+2x_{n+1}y_{n+1}+x_n^2+y_n^2+2x_ny_n-2(x_{n+1}+y_{n+1})(x_n+y_n)=z_{n+1}^2+z_n^2+2z_{n+1}z_n \Rightarrow$$

$$x_{n+1}y_{n+1}+x_ny_n-x_{n+1}x_n-x_{n+1}y_n-y_{n+1}x_n-y_{n+1}y_n=z_{n+1}z_n \Rightarrow$$

$$x_{n+1}(y_{n+1}-y_n)-x_n(y_{n+1})=z_{n+1}z_n+x_{n+1}x_n+y_{n+1}y_n$$

Bu son eşitlikte (5.24) formülü dikkate alınırsa,

$$(x_{n+1}-x_n)(y_{n+1}+y_n)=2z_{n+1}z_n-1 \qquad (5.29)$$

bulunur.

$y_{n+1}=x_{n+1}+1$ formülü ile dikkate alındığında,

$$(x_{n+1}-x_n)^2\left(y_{n+1}+y_n\right)^2=2z_{n+1}z_n-1 \qquad (5.30)$$

Son olarak aşağıdaki limiti hesaplayalım:

$$K=\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{6z_n-z_{n-1}}=\frac{1}{6-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_{n-1}}{z_n}}=\frac{1}{6-K} \Rightarrow$$

$$K^2-6K+1=0$$

$$K=3\pm\sqrt{8}=(\sqrt{2})^2\pm2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}\pm1)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_{n+1}}=(\sqrt{2}-1)^2;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}=(\sqrt{2}+1)^2$$

Sonuç: Şimdi ise bulduğumuz ve ispatladığımız özellikleri sıralayalım:

$$x_{n+1} + y_n = y_{n+1} + x_{n+1} - z_n$$

$$x_{n+1} + y_{n+1} - (x_n + y_n) = z_{n+1} + z_n$$

$$x_{n+1} x_n + y_{n+1} y_n = z_{n+1} z_n - 1$$

$$\left(\frac{x_n + y_{n+1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_{n+1} + y_n}{2}\right)^2 = z_{n+1} z_n - 1$$

$$\begin{cases} x_{n+1}^2 + y_n^2 - 2x_n y_{n+1} = 2z_{n+1} z_n \Rightarrow x_{n+1}^2 + y_n^2 = 2(x_n y_{n+1} + z_n z_{n+1}) \\ x_n^2 + y_{n+1}^2 - 2x_{n+1} y_n = 2z_{n+1} z_n \Rightarrow x_n^2 + y_{n+1}^2 = 2(x_{n+1} y_n + z_n z_{n-1}) \end{cases}$$

$$x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_n = z_{n+1} z_n - 2$$

$$x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_n = x_{n+1} x_n + y_{n+1} y_n - 1$$

$$(x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) = 2z_{n+1} z_n - 1 - (x_{n+1} - x_n)^2 = (y_{n+1} + y_n)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_{n+1}} = (\sqrt{2} - 1)^2; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

Eğer $y_n = x_{n+1}$ dikkate alınırsa, bu özellikler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1. $x_{n+1} + x_n + 1 = z_{n+1} - z_n$

2. $x_{n+1} - x_n = \dfrac{z_{n+1} + z_n}{2}$

3. $2x_{n+1} x_n + x_{n+1} x_n = z_{n+1} z_n - 2$

4. $\left(\dfrac{x_{n+1} + x_n + 1}{2}\right)^2 = z_{n+1} z_n - 1$

5. $(x_{n+1} - x_n)^2 = 2z_{n+1} z_n - 1$

6. $2x_{n+1}x_n + x_{n+1} + x_n = \left(\dfrac{x_{n+1} + x_n + 1}{2} \right)^2 - 1$

7. $\sqrt{2z_{n+1}z_n - 1} = \dfrac{z_{n+1} + z_n}{2}$

$x^2 + y^2 = z^2$ ve $x^2 + y^2 = (y + d)^2, d \in \mathbb{N}$

Denklemlerini karşılaştırdığımızda, d'nin belirli değerlerinde bu denklemleri sağlayan sayıların aynı olduğu görülmektedir. d'nin bu değerlerini bulmak için aşağıdaki denklemler sistemini z_{n+1} ve x_{n+1} için indirgeme formüllerini dikkate alarak, çözersek:

$$\begin{cases} z_{n+1} - x_{n+1} = 1 + d_{n+1} \Rightarrow 6z_n - z_{n-1} - 6x_n + x_{n-1} + 2 = 1 + d_{n+1} \\ z_n - x_n = 1 + d_n \\ z_{n-1} - x_{n-1} = 1 + d_{n-1} \Rightarrow 6(z_n - x_n) - (z_{n-1} - x_{n-1}) - 3 = d_{n+1} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= 6d_n + 6 - 1 - d_{n-1} - 3 = 6d_n - d_{n-1} + 2 \\ d_{n+1} &= 6d_n - (d_{n-1} - 2) \end{aligned} \tag{5.31}$$

bulunur. Burada $d_1 = 0$ $d_2 = 1$ olduğu dikkate alınır.

Görüldüğü gibi x_{n+1} ve d_{n+1} için rekurrent formüller aynıdır.

Yukarıda sayılar için gösterdiğimiz özellikleri kontrol etmek ve d'nin değerlerini karşılaştırmak için aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

Tablo 5.2 Rekurrent Formül Değerleri

n	x_n	$y_n = x_n + 1$	$z_n = x_n + 1 + d_n$	d_n
1	0	1	1	0
2	3	4	5	1
3	20	21	29	8
4	119	120	169	49
5	696	697	985	288
6	4059	4060	5741	1681

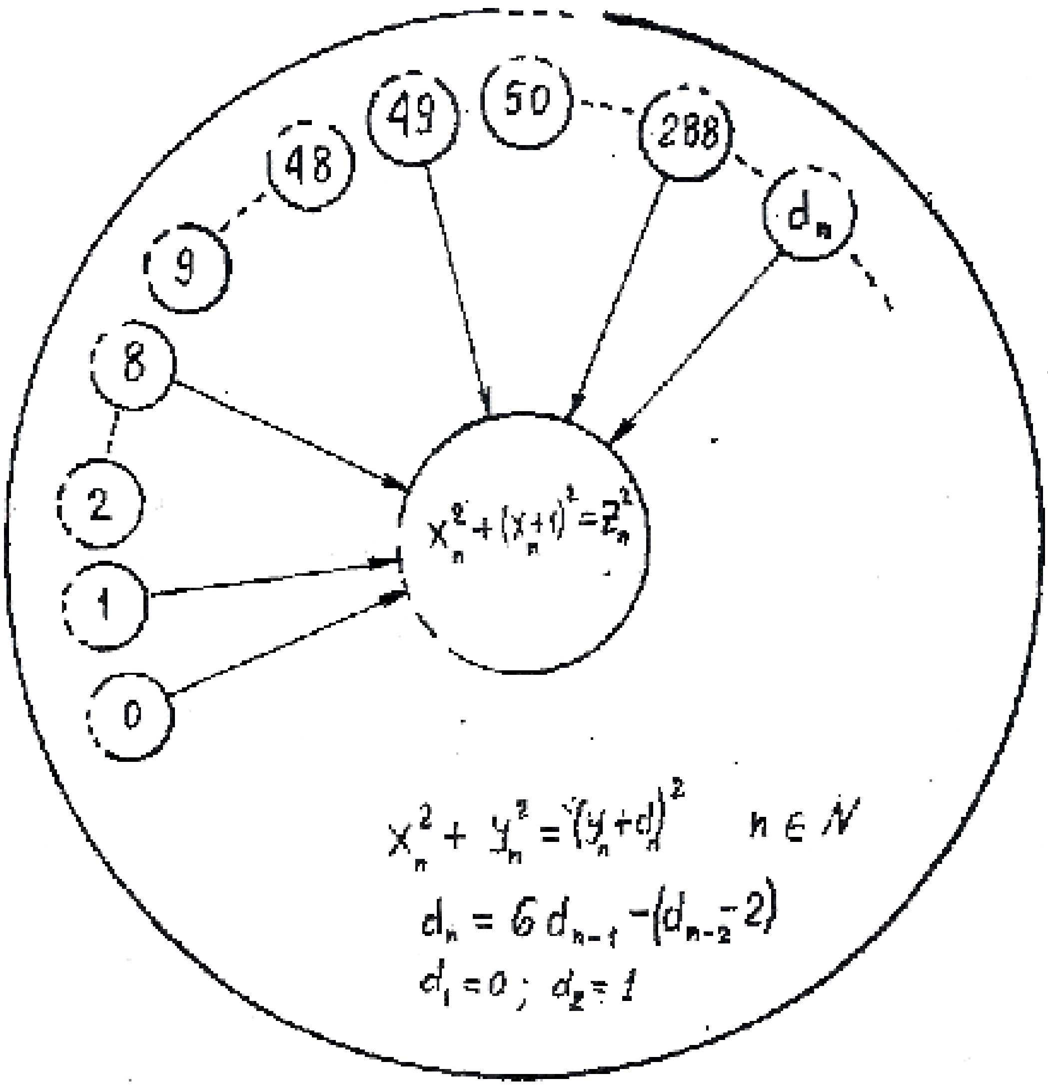
Aşağıda d = 1,2,…,∞ dik üçgenlerin hipotenüs ile dik kenarları arasındaki farkı göstermektedir. Bu d farkı incelenerek bazı dik üçgenlerin ilk elemanlarının dik kenarları arasındaki farkı 1 birim olduğu görülür.

d=1	d=2	d=8	d=49	d=288
0 1 1				
3 4 5	4 3 5			
20 21 29	....	20 21 29		
119 120 169	....	....	119 120 169	
696 697 985	....	....	....	696 697 985
		....	....	....
			....	....
				....

O halde dik kenar bağıntısını sağlayan Pisagor üçlülerinin dik kenar hipotenüs bağıntısını sağlayan Pisagor üçlülerinin bir kısmının yalnızca ilk elemanı içerdiğini gördük.

Şimdi bunu daha iyi görebilmek için başka bir tablo daha inceleyelim.

Tablo 5.3



Tablo 5.3 de görülen büyük daire bütün pisagor üçlülerinin dizilerini içerir. Tablonun tam merkezindeki daire ise dik kenarları arasındaki farkı bir birim olan dik üçgenlerin dizisini gösterir. Büyük dairenin içine dizilmiş küçük dairelerde de hipotenüs dik kenar bağıntısını sağlayan dik üçgenlerin dizileridir. Yani d_n farkı hipotenüs ile dik kenar arasındaki farktır. Bulduğumuz dik kenarlar arasındaki farkı 1 olan dizinin elemanları (merkezdeki daire) oklarla gösterilen küçük dairelerdeki dizileri sağlayan üçgenlerin sadece ilk elemanını alır. Bu elemanlardan hangilerini alacağını dairedeki formüllerden görebiliriz.

Tablo 5.4 Temel Pisagor Üçlülerinin Gösterimi

X	y=x+1	Z
0	1	1
3	4	5
20	21	29
119	120	196
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137933	137934	195025
803760	803761	1136689
4684659	4684660	6625109
27304196	97	38613965
159140519	20	225058681
927538920	21	1311738121
5406093003	04	7645370045
31509019100	01	44560482149
183648021599	600	259717522849
1070379110496	97	1513744654945
6238626641379	80	8822750406821
36361380737780	81	51422757785981
211929657758303	04	299713796309065

Tablo 5.4 te dik kenarlar arasındaki farkı 1 birim olan dik üçgenlerin dik kenarları gösterilmektedir. Burada x, y, z değerleri daha önce açıkladığımız indirgeme formüllerinden kolayca bulunabilir. Bu tabloda gösterilen dizide ilginç bir düzen vardır. Görüldüğü gibi altışar grup halinde sayıların birler basamakları tekrarlanmaktadır.

SONUÇ:

1. **1.** Doğal dengeli karelerin tanımı yapılarak, algoritması tanıtıldı ve özelliklerinden bahsedildi. Doğal dengeli karelerin uygulanabilmesi bakımından onların özelliklerinin ortaya çıkarılması büyük önem taşımaktadır.

2. Dengeli karelerde diğer hiçbir sihirli karede olmayan önemli bir özellik vardır: 'denge'. Karenin her bir hanesindeki sayılar birer nokta kütle olarak düşünülürse, sistemin geometrik merkeziyle kütle merkezi aynı olacaktır. Ayrıca dengeli kareler bazı önemli simetri özellikleri sergiler.

3. Çift dereceden doğal dengeli karelerin merkezindeki en büyük ve en küçük sayıdan yola çıkarak aşağıdaki zincirli özdeşliklerin sağlandığı fark edildi. Daha sonra bunun istenilen sayılar için geçerli olduğu belirlendi. Bu zincirli özdeşliklerdeki katsayılar binom katsayılarından farklı olup tarafımızca sunulan algoritma yardımıyla bulundu. Bu sayılar algoritma yardımıyla düzenlenmiş üçgenden elde edildi.

Eğer $n-$ çift sayı ise

$$a^n+b^n=x_1\left(a+b\right)^n-ab\left[x_2\left(a+b\right)^{n-2}-ab\left[x_3\left(a+b\right)^{n-4}-...\right]\right]$$

Eğer $n-$ tek sayı ise

$$a^n+b^n=\left(a+b\right)\left[x_1'\left(a+b\right)^{n-1}-ab\left[x_2'\left(a+b\right)^{n-3}-ab\left[x_3'\left(a+b\right)^{n-5}-...\right]\right]\right]$$

4. Uzayın boyutu p=1 iken $A_1^2+B_1^2=(x+1)^2+x^2$ elde edildi. Bu denklem dik kenarlar arasındaki farkı 1 birim olan Pisagor üçlülerini sağlar. Bu denklemin bir düzen oluşturacağı, sezilerek ilk defa bulunan bazı indirgeme formülleri incelendi.

KAYNAKLAR

[1] Abiyev, A.A. (1996). *Sayılı sihirli karelerin doğal şifresi.* Ankara: Enderun Ofset.

[2] Andrews, W.S. (1917). *Magic Squares and Cubes*. New York: Dover.

[3] Lam, L.Y. (1977). *A critical study of the 'Yang Hui suan fa': a thirteenth-century Chinese mathematical treatise*. Singapore: Nelson Publications.

[4] Brion, M. (1960). *Albrecht Dürer : his life and work.* New York: The Brick Row Book Shop, inc.

[5] Marder, C.C. (1940). *The magic squares of Benjamin Franklin.* New York: The Brick Row Book Shop, inc.

[6] Bouwkamp, C.J. (1986). *On Dudeney's puzzle 229 of blocks and squares*. New York: W.Morrow Pub.

[7] Gardner, M. (2002). *Martin Gardner's Favorite Poetic Parodies.* New-York: Prometheus Books.

[8] Andrews, W.S. , Sayles, H.A. (1960). *Magic squares and cubes.* New York: Dover Pub.

[9] www.webhattı.com/kimya/67502-cabir-bin-hayyan.html

[10] Abiyev, A.A. (2000). Doğal Sihirli Kareler. *Tübitak, Bilim ve Teknik,* **85,** 87-89

[11] Gardner, M. (2003). *Are Universes Thicker Than Blackberries?: Discourses on Gödel, Magic Hexagrams, Little Red Riding Hood, and Other Mathematical and Pseudoscientific Topics*. New-York: Prometheus Books.

[12] Gardner, M. (2004). *Smart Science Tricks*. New-York: Prometheus Books.

[13] Gardner, M. (2007). *The Jinn from Hyperspace: And Other Scribblings—both Serious and Whimsical*. New-York: Prometheus Books.

[14] Gardner, M. (2008). *Bamboozlers: The Book of Bankable Bar Betchas, Brain Bogglers, Belly Busters & Bewitchery by Diamond Jim Tyler*. New York: Diamond Jim Productions.

[15] Gardner, M. (2004). *Dr Matrix ve Gizemli Sayılar.* İstanbul: Güncel Yayıncılık

[16] Gardner, E.S. (1968). *Mexico's magic square*. New York: W.Morrow Pub.

[17] Ball, R.W.W. (1892). *Mathematical recreations and problems of past and present times.* New York: Macmillan and co.

[18] Calter, P. (1977). *Magic squares.* Nashville: T. Nelson Pub.

[19] Kelsey, K. (1982). *More number puzzles.* New York: Prentice Hall.

[20] Andrews, W.S. , Sayles, H.A. (1960). *Magic squares and cubes.* New York: Dover Pub.

[21] Shen, C.T. (1989). *Magic squares: general solutions for even order.* Monterey, CA: Victory Pres.

[22] Denes, J. and Keedwell, A.D. (1991). *Latin squares: new developments in the theory and applications.* Amsterdam: Elsevier Science Pub. Co.

[23] Soror, A.L. (1995). *Western mandalas of transformation: magical squares , tattwas, qabalistic talismans.* St. Pal. MN,USA: Llewellyn Publications.

[24] Gündüz, D. (1998). Kaplumbağanın Sırtındaki Sır:Sihirli Kareler. *Tübitak, Bilim ve Teknik,* **36,** 42-45

[25] Aksoy, D. (1991). Sihirli Kareler. *Matematik Dünyası,* **2,** 6-9

[26]Abe, G. (1994). Unsolved Problems on Magic Squares. *Discrete Mathematics,***127,** 3-13

[27] Abiyev, A.A. ,Baykasoğlu, A. , Dereli,T. , Filiz, H. , Abiyev, A.(2001). Investigation of Center of Mass By Using Magic Squares and Its Possible Engineering Applications*., Proceedings of third International Symposıum on Intelligent Manufacturing Systems., SAU Department of Industrial Engineering,* **49,** 219-226

[28] Abiyev, A.A. , Bingül, A. ,Abiyev, A. (2004). Tek Dereceden Dengeli Karelerin Algoritması. *Journal of Qafqaz University*, **14,** 71-80

[29] Abiyev, A.A. , Abiyev, A. (2002). Doğal Sihirli Karelerin Özellikleri. *SAU Fen Bilimleri Enstitü Dergisi,* **6,** 18-25

[30] Abiyev, A.A. (2000). Doğal Sihirli Kareler. *Gaziantep Tıp Dergisi*, **4,** 66-70

[31] Benjamin, A. and Yasudi, K.(1999). Magic squares indeed!. *American Mathematical Monthly*, **106,** 152-156

[32] Abiyev, A.A. , Şahin, M. , Abiyev, A. (2002). A study on derivation and explanation of $A_p^{p+1} + B_p^{p+1} = F\left[(A_p + B_p), A_p B_P\right]$ formula for some geometric figures. *Journal of Marmara for Pure and Applied Sciences,* **18,** 73-80