GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PAN BULANIK İNTEGRAL

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ONUR KAYNAR
TEMMUZ 2010

Pan Bulanık İntegral

Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Onur KAYNAR
Temmuz 2010

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Pan-Bulanık İntegral
Öğrencinin, Adı Soyadı: Onur KAYNAR
Tez Savunma Tarihi: 26/07/2010

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans/~~Doktora~~ tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/~~Doktora~~ tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/~~Doktora~~ tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmzası
Prof. Dr. Adil KILIÇ	
Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK	
Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT	
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN	
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN	

ÖZET

PAN BULANIK İNTEGRAL

KAYNAR, Onur
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN
Temmuz 2010, 61 sayfa

Bu tezde, bulanık integral, pan-bulanık integral ve pan-bulanık integralin özellikleri incelenmiştir.

İlk olarak bulanık küme kavramı ve bulanık kümeler üzerinde tanımlanan küme işlemleri verilmiştir. İkinci olarak bulanık ölçüm ve bulanık ölçüm çeşitleri ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur. Daha sonra bulanık integral ve çeşitli bulanık integraller ile ilgili tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiştir.

Son olarak pan-bulanık integral ve özellikleri hakkında genel bilgiler verilip, pan-bulanık integral ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ölçüm, bulanık ölçüm, bulanık integral, Sugeno integral, Choguet integral, t-conorm integral, pan-toplam, pan-çarpım, Pan-bulanık integral.

ABSTRACT

FUZZY PAN INTEGRAL

KAYNAR, Onur
M. Sc. İn Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN
July 2010, 61 pages

In this thesis Fuzzy integral and the features of Pan-fuzzy integrals were studied.

First of all fuzzy set concept and set processes which identified on fuzzy sets were introduced. Second, the fuzzy measure and fuzzy kind of measurement focuses on the basic definitions and theorems. Then fuzzy integral and fuzzy integrals with several definitions, theorems and features are given.

Finally the pan-fuzzy integral and general information about its features were given and the studies about pan-fuzzy integral were searched.

Key words: Measure, fuzzy measure, fuzzy integral, Sugeno integral, Choguet integral, t-conorm integral, pan-additive, pan-multiplication, pan-fuzzy integral.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma konusunu öneren, her aşamasında gösterdiği yol ve yöntemlerle desteğini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN'e, bölümdeki tüm hocalarıma, her zaman bana destek ve moral kaynağı olan eşim Sibel, oğlum Emrullah ve kızım Feyza'ya, ayrıca bana verdikleri emekleri hiçbir zaman ödeyemeyeceğim babam Ramazan KAYNAR ve annem Müşerref KAYNAR'a sonsuz teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
g_λ	$\lambda -$bulanık ölçüm
$E\Delta F$	E ve F kümelerinin simetrik farkı
$\hat{\wp}$	X in bütün ölçülebilir bölümlerinin kümesi
μ	Küme fonksiyonu
χ_E	E nin karakteristik fonksiyonu
$\int_A f\, d\mu$	μ ye göre A da f nin Lebesgue integrali
$\oint f\, d\mu$	μ ye göre X de f nin bulanık (Sugeno) integrali
$\oint_A f\, d\mu$	μ ye göre A da f nin bulanık (Sugeno) integrali
$(p)\int_A f\, d\mu$	μ ye göre A da f nin pan-integrali
$(C)\int_A f\, d\mu$	μ ye göre A da f nin Choguet integrali
$(\mathcal{F})\int f\, dm$	m ye göre f nin t-conorm integrali

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Ölçüm kavramı ve dolayısıyla bunun sonucu olan integral, matematik kavramları arasında çok önemli bir yer tutmaktadır. 19. yüzyılın sonuna doğru daha kesin matematiksel analizler için bir gelişime ihtiyaç vardı. Önceleri basit, sonlu kümelerle ifade edilebilen kavramlar için ölçüm kuralları bulunmuş ancak hızla ilerleyen bilim ve teknolojinin, özellikle matematiğin gelişmesiyle karşılaşılan, sonsuz kümelerle ifade edilebilen daha karmaşık yapıların ve olayların ölçümü için çalışılmıştır. Bu çalışmaların bir sonucu olarak, ölçümlerle ilgili yeni sorular ve konular ortaya çıkmıştır.

Bu konularla ilgili 1871-1956 yılları arasında yaşamış Fransız Matematikçi Emile Borel ve 1875-1941 yılları arasında yaşamış Fransız Matematikçi Henri Lebesgue çalışmalar yapmıştır. Bu iki matematikçinin yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin temelini oluşturmuştur.

Ölçümün istatistik, analiz ve mühendislik gibi birçok alanda uygulaması mevcuttur ve ana karakteristiği toplamsallıktır. Klasik ölçüm teorisindeki ölçümün toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçümlere toplamsal ölçüm de denmiştir. Toplamsallık özelliği etkili ve uygun olabilir ancak bilimin ve teknolojinin hızla ilerleyişine bağlı olarak çoğu zaman çok keskindir, kısıtlayıcıdır ve esnek değildir. İşte bu noktada, yeni bir kavramın bu probleme çözüm olacağı ve çözüme esneklik kazandıracağı düşünülmüştür.

Bu düşünceye göre ölçüm daha da geliştirilmiş ve klasik ölçümün toplamsallık özelliği yerine monotonluk gibi daha esnek şartlar kullanılarak oluşturulan ölçüm kuralları geliştirilmiştir. Bu konuda G.Choguet, Dempster, Shafer, Sugeno ve Zadeh tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu ölçümler genel olarak bulanık ölçüm olarak adlandırılır. Toplamsallık özelliği göstermemesi bulanık ölçümlerin ana karakteristiğidir ve bu yüzden bazı kaynaklarda toplamsal olmayan ölçüm diye de isimlendirilir.[1,2]

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bazı durumlarda bu tanım yetersiz kalmaktadır. Bir başka deyişle, bu tanımdan hareket ederek, integral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak olanaksızdır. İntegral denklemlerle ilk uğraşılar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. İntegral hesabı, Riemann İntegrali üzerine dayandırılmıştır. 19. yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı izlenmektedir. 1875-1941 yılları arasında yaşamış Fransız Matematikçi Henri Lebesgue tarafından Lebesgue ölçüm ve Lebesgue integrali tanımlanmıştır. Lebesgue integrali Riemann integralinin daha genel bir durumudur. Henri Lebesgue, 1902 de yayınlanan doktora tezinde Lebesgue integralini daha ileri seviyede geliştirmiştir. [2,3]

"Bulanık integral" terimi ise, bulanık ölçümlerin sonucu elde edilen integraller için kullanılan genel bir terimdir. Bulanık integral teorisi, bulanık analizin önemli bir parçasıdır. Bulanık ölçüm ve bulanık integral, ölçülebilir fonksiyon aralığının [0,1] olduğu klasik $\sigma -$cebirinde 1974 yılında Sugeno tarafından tanımlanmıştır. Sugeno integrali, özellikle, bulanık kontrol teorisinde önemli uygulamalar sağlar. Bulanık integralle ilgili başka araştırmalarda yapılmıştır. Bu araştırmaların sonucunda bulanık integralin birçok çeşidi tanımlanmıştır. Bunlardan biri de bu çalışmanın konusu olan bulanık pan-integraldir. Bulanık pan-integralle ilgili çeşitli makaleler yayınlanmıştır. [1,4]

Bu tezin ikinci bölümünde küme bilgileri, bulanık küme ve bulanık kümeler üzerinde tanımlanmış küme işlemleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde klasik ölçüm ve bulanık ölçümlerle ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde Lebesgue integrali ve bulanık integrallerle ilgili tanımlar, özellikler ve teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde ise pan-yapılar ile pan bulanık integralin tanımı, özellikleri, bazı dönüşüm teoremleri ile genelleştirilmiş pan-integralle ilgili yapılan çalışmalar üzerinde durulmuştur.

2. BÖLÜM

KÜME BİLGİLERİ

Ölçüm kavramı bir küme fonksiyonu olduğundan dolayı kümelerin cebirsel yapıları önemlidir. Bu bölümde, üzerinde ölçüm kuramının tanımlanacağı küme sınıfları ve bu küme sınıflarının ürettikleri halkalar, cebirler ile bulanık kümeler ve bulanık kümeler üzerindeki cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Küme Sınıfları

Küme sınıfları ile ilgili bilgiler için [2] çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1. X kümesinin tüm alt kümelerinin sınıfına X in *kuvvet kümesi* denir ve $P(X)$ ile gösterilir.[2]

Tanım 2.1.2. Boş olmayan bir $\Re$ sınıfına aşağıdaki şartları sağlıyorsa *halka* denir.

i) $\forall E, F \in \Re$ için

$$E \cup F \in \Re,$$

ii) $\forall E, F \in \Re$ için

$$E - F \in \Re.$$

[2]

Önerme 2.1.1. Boş küme halkanın bir elemanıdır.[2]

Teorem 2.1.1. Her halka birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalıdır ve tersine birleşim, kesişim ve simetrik fark işlemleri altında kapalı olan boş olmayan bir sınıf bir halkadır.[2]

İspat:

$$E\Delta F=(E-F)\cup(F-E) \quad \text{ve} \quad E\cap F=(E\cup F)-(E\Delta F)$$

birinci sonuç elde edilir. Şimdi tersine

$$E\cup F=(E\Delta F)\Delta(E\cap F) \quad \text{ve} \quad E-F=(E\Delta F)\cap E$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.1.2. Boş olmayan ve kesişim, fark ve ayrık kümelerin birleşimi altında kapalı olan her sınıf bir halkadır.[2]

İspat. Teorem 2.1.1. ve aşağıdaki eşitlikten ispat yapılmış olur.

$$E\Delta F= E-(E\cap F) \cup F-(E\cap F) \ . \qquad ■$$

Örnek 2.1.1. X in tüm sonlu alt kümelerinin sınıfı bir halkadır.[2]

Örnek 2.1.2. X reel bir doğru olsun. Yani,

$$X=(-\infty,\infty)=\{\, x \mid -\infty<x<\infty\}.$$

Bütün sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sonlu birleşimleri,

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{x \mid -\infty<a_i\le x<b_i<\infty\},$$

bir halkadır.[2]

Tanım 2.1.3. Aşağıdaki şartları sağlayan ve boş olmayan bir $\Re$ sınıfına *cebir* denir.

i) $\forall\, E,F\in\Re$ için

$$E\cup F\in\Re\,,$$

ii) $\forall\, E\in\Re$ için

$$\bar{E}\in\Re\,.$$

[2]

Teorem 2.1.3. Cebir, X kümesini içeren bir halkadır, tersine, X kümesini içeren bir halka cebirdir.[2]

İspat: $\Re$ bir cebir olsun.

$$E - F = E \cap \bar{F} = \overline{\bar{E} \cup F}$$

ve, eğer $E \in \Re$ ise

$$X = E \cup \bar{E} \in \Re$$

olduğundan teoremin birinci kısmı gösterilmiş olur.

Tersine $\Re$, X kümesini içeren bir halka ise $\forall E \in \Re$ için

$$\bar{E} = X - E \in \Re$$

olduğundan teoremin ikinci kısmı da gösterilmiş olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 2.1.3. Bütün sonlu kümeler ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir cebirdir. [2]

Tanım 2.1.4. Aşağıdaki şartları sağlayan ve boş olmayan bir $\mathscr{S}$ sınıfına *yarı halka* denir.

i) $\forall\, E, F \in \mathscr{S}$ için

$$E \cap F \in \mathscr{S},$$

ii) $\forall\, E, F \in \mathscr{S}$, $E \subset F$, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$ ve $D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathscr{S}$ olacak biçimde $\mathscr{S}$ nin kümelerinin sonlu bir $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ sınıfı vardır.

Her halka bir yarı halkadır ve boş küme her yarı halkanın bir elemanıdır. [2]

Örnek 2.1.4. X kümesinin tek elemanlı tüm alt kümelerini ve boş kümeyi içeren küme sınıfı bir yarı halkadır.[2]

Örnek 2.1.5. X kümesi reel bir doğru olsun. Bütün sınırlı, soldan kapalı, sağdan açık aralıkların sınıfı bir yarı halkadır.[2]

Tanım 2.1.5. Aşağıdaki şartları sağlayan ve boş olmayan bir $\mathfrak{F}$ sınıfına $\sigma-$*halka* denir.

i) $\forall\, E, F \in \mathfrak{F}$ için

$$E - F \in \mathfrak{F},$$

ii) $\forall\, E_i \in \mathfrak{F}, i = 1, 2, \ldots,$ için

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{F}\ .$$

Bir $\sigma-$halka sayılabilir birleşim altında kapalı olan bir halkadır.[2]

Önerme 2.1.2. Bir $\sigma-$halka sayılabilir kesişim altında kapalıdır. Bundan dolayı eğer $\mathfrak{F}$ bir $\sigma-$halka ve $E_n \in \mathfrak{F}$ bir küme dizisi ise,

$$\limsup_{n} E_n \in \mathfrak{F} \quad \text{ve} \quad \liminf_{n} E_n \in \mathfrak{F}$$

olur.[2]

Örnek 2.1.6. Sayılabilir kümelerin sınıfı bir $\sigma-$halkadır.[2]

Tanım 2.1.6. X kümesini içeren bir $\sigma-$halkaya $\sigma-$*cebir* (ya da $\sigma-$*cisim*) denir. [18]

Örnek 2.1.7. Tüm sayılabilir kümelerin ve onların tümleyenlerinin sınıfı bir $\sigma-$cebirdir.[2]

Önerme 2.1.3. Eğer $\mathfrak{F}$ bir $\sigma-$halka ise, bu durumda $\mathfrak{F} \cup \{E \mid \bar{E} \in \mathfrak{F}\}$ bir $\sigma-$ cebirdir.[2]

Tanım 2.1.7. Boş olmayan ve her $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ monoton küme dizisi için eğer $\lim_{n} E_n \in \mathcal{M}$ ise $\mathcal{M}$ küme sınıfına bir *monoton sınıf* denir.[2]

Önerme 2.1.4. Bir $\sigma-$halka bir monoton sınıftır.[2]

Önerme 2.1.5. Eğer bir halka aynı zamanda bir monoton sınıf ise, bu bir

$\sigma -$halkadır. [2]

Örnek 2.1.8. X kümesi reel doğru olsun. Bütün aralıkların sınıfı bir monoton sınıftır. (Boş küme ve tek elemanlı küme: $\varnothing = (a, a]$ ve $\{a\} = [a, a]$)[2]

Tanım 2.1.8. T herhangi bir indeks kümesi olmak üzere $\forall \{E_t \mid t \in T\} \subset \mathfrak{F}_p$ için $\bigcup_t E_t \in \mathfrak{F}_p$ ve $\bigcap_t E_t \in \mathfrak{F}_p$ ise boş olmayan $\mathfrak{F}_p$ sınıfına *düzenli sınıf* denir.[2]

Önerme 2.1.6. Düzenli sınıf bir monoton sınıftır.[2]

Örnek 2.1.9. $X = [0,1]$ olsun. $a \in [0,1]$ olmak üzere $[0, a)$ veya $[0, a]$ biçimindeki bütün kümelerin sınıfı bir düzenli sınıftır.[2]

Önerme 2.1.7. E sabit bir küme olmak üzere, eğer $\mathscr{C}$ küme sınıfı bir $\sigma -$halka ise $\mathscr{C} \cap E$ de bir $\sigma -$halkadır.[2]

Teorem 2.1.4. $\mathscr{C}$ bir küme sınıfı olsun. $\mathscr{C}$ küme sınıfını kapsayan en küçük bir $\mathfrak{R}_0$ halkası vardır. Her $\mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{R}_0 \supset \mathscr{C}$ için $\mathfrak{R} \supset \mathscr{C} \Rightarrow \mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}_0$.

$\mathfrak{R}_0$, $\mathscr{C}$ sınıfının ürettiği halka olarak adlandırılır ve $\mathfrak{R}(\mathscr{C})$ ile gösterilir.[2]

İspat: $P(X)$, $\mathscr{C}$ sınıfını kapsayan bir halkadır. $\mathscr{C}$ yi kapsayan halkaların kesişimi de yine $\mathscr{C}$ yi kapsayan bir halkadır. Bu halka $\mathfrak{R}_0$ halkasıdır. $\mathfrak{R}_0$ ın tekliği aşikardır.

Benzer şekilde $\mathscr{C}$ nin ürettiği $\sigma -$halka, monoton sınıf ve düzenli sınıf tanımlanıp sırasıyla $\mathfrak{F}(\mathscr{C}), \mathcal{M}(\mathscr{C}), \mathfrak{F}_p(\mathscr{C})$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.10. X sonsuz bir küme olsun. Eğer $\mathscr{C}$ bütün tek elemanlı kümelerin sınıfı ise $\mathfrak{R}(\mathscr{C})$ bütün sonlu kümelerin ve $\mathfrak{F}(\mathscr{C})$ bütün sayılabilir kümelerin sınıfıdır.[2]

Örnek 2.1.11. X reel bir doğru olsun. Eğer $\mathscr{C}$ bütün açık aralıkların sınıfı ise $\mathcal{M}(\mathscr{C})$ bütün aralıkların sınıfı ve $\mathfrak{F}_p(\mathscr{C}) = P(X)$ dir.[2]

Önerme 2.1.8. Eğer $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$ ise bu durumda $\mathcal{K}(\mathscr{C}_1) \subset \mathcal{K}(\mathscr{C}_2)$ dir, burada $\mathcal{K}$ yerine $\mathfrak{R}, \mathfrak{F}, \mathcal{M}$ veya $\mathfrak{F}_p$ den herhangi biri alınabilir.[2]

Teorem 2.1.5. $\mathscr{S}$ bir yarı halka olsun. $\mathfrak{R}(\mathscr{S})$, $\mathscr{S}$ deki bütün kümelerin sonlu, ayrık birleşimlerinin sınıfıdır.[2]

Teorem 2.1.6. $\mathfrak{F}(\mathscr{S}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{R}(\mathscr{S}))$. [2]

İspat. İlk olarak $\mathscr{S} \subset \mathfrak{R}(\mathscr{S})$ olduğundan Önerme 2.1.8.'e göre,

$$\mathfrak{F}(\mathscr{S}) \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{R}(\mathscr{S})).$$

İkinci olarak $\mathfrak{F}(\mathscr{S}) \supset \mathscr{S}$ ve $\mathfrak{F}(\mathscr{S})$ bir halka olduğundan $\mathfrak{F}(\mathscr{S}) \supset \mathfrak{R}(\mathscr{S})$ olur. Ayrıca $\mathfrak{F}(\mathscr{S})$ bir $\sigma -$halka olduğundan,

$$\mathfrak{F}(\mathscr{S}) \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{R}(\mathscr{S})),$$

olur. Böylece,

$$\mathfrak{F}(\mathscr{S}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{R}(\mathscr{S})).$$ ■

Örnek 2.1.12. X reel bir doğru ve $\mathscr{S}$ de Örnek 2.1.5. deki yarı halka olsun. Bu durumda $\mathfrak{F}(\mathscr{S})$ ye *Borel cebiridir* denir ve $\mathfrak{B}$ ile gösterilir. $\mathfrak{B}$ deki kümeler *Borel kümesi* olarak adlandırılır. $\mathfrak{B}$ aynı zamanda sırasıyla bütün açık aralıkların sınıfı, bütün kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan açık sağdan kapalı aralıkların sınıfı, bütün soldan kapalı sağdan açık aralıkların sınıfı veya bütün aralıkların sınıfı tarafından üretilen bir $\sigma -$halkadır.[2]

Teorem 2.1.7. Eğer $\mathscr{C}$ bir küme sınıfı ise, bu durumda

$$\mathfrak{F}_p(\mathscr{C}) = \{ \bigcup_{t\in T} \bigcap_{s\in S_t} E_s \,|\, E_s \in \mathscr{C}, S_t \text{ ve } T \text{ herhangi indeks kümeleri}\}.\ [2]$$

İspat. Eşitliğin sağ tarafı $\mathscr{E}$ ile gösterilsin.

(1) $\mathscr{E} \supset \mathscr{C}$ çünkü S_t ve T tek elemanlı olabileceklerinden,

(2) Bileşke işleminin birleşme özelliğinden $\mathscr{E}$, bileşke işlemine göre kapalıdır.

(3) $\mathscr{C}$ deki kesişim ve bileşke işleminin yer değiştirebilmesinden ve kesişimin birleşme özelliğinden, $\mathscr{E}$ kesişim işlemine göre kapalıdır.

Bundan dolayı, $\mathscr{E}$, $\mathscr{C}$ yi içeren bir düzgün sınıftır ve bu yüzden $\mathscr{E} \supset \mathfrak{F}_p(\mathscr{C})$.

Tersine olarak, $\mathscr{C}$ yi kapsayan her düzgün sınıf $\mathscr{E}$ yi de kapsar, buradan $\mathscr{F}_p(\mathscr{C}) \supset \mathscr{E}$. Sonuç olarak $\mathscr{F}_p(\mathscr{C}) = \mathscr{E}$ bulunur. ■

Teorem 2.1.8. Eğer $\mathscr{C}$ herhangi bir sınıf ve A herhangi bir küme ise, bu durumda

$$\mathscr{F}(\mathscr{C}) \cap A = \mathscr{F}(\mathscr{C} \cap A).[2]$$

Benzer şekilde halka, monoton sınıf ve düzgün sınıf içinde aynı ifade doğrudur.

İspat. (1) $\mathscr{F}(\mathscr{C}) \cap A$ bir $\sigma-$halkadır ve $\mathscr{C} \cap A$ yı kapsar, bu yüzden

$$\mathscr{F}(\mathscr{C}) \cap A \supset \mathscr{F}(\mathscr{C} \cap A).$$

(2) $\mathscr{E} = \{E \,|\, E \cap A \in \mathscr{F}(\mathscr{C} \cap A), E \in \mathscr{F}(\mathscr{C})\}$ olsun, $\mathscr{E}$ bir $\sigma-$halkadır ve $\mathscr{E} \supset \mathscr{C}$. Bu yüzden $\mathscr{E} \supset \mathscr{F}(\mathscr{C})$, yani, $\forall\, E \in \mathscr{F}(\mathscr{C})$ için

$$E \cap A \in \mathscr{F}(\mathscr{C} \cap A).$$

Buradan

$$\mathscr{F}(\mathscr{C}) \cap A \subset \mathscr{F}(\mathscr{C} \cap A).$$

Sonuç olarak,

$$\mathscr{F}(\mathscr{C}) \cap A = \mathscr{F}(\mathscr{C} \cap A)$$

elde edilir. ■

Örnek 2.1.13. $\mathscr{B}$ reel doğru üzerinde bir Borel cebiri olsun. $\mathscr{B} \cap [0,1]$, birim aralık üzerindeki Borel cebiri olarak adlandırılır. Bu, $[0,1]$ deki bütün aralıkların sınıfı tarafından üretilen $\sigma-$halkadır.[2]

Teorem 2.1.9. Eğer $\mathscr{R}$ bir halka ise, bu durumda

$$\mathcal{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{F}(\mathscr{R}).\ [2]$$

Sonuç 2.1.1. Bir halkayı kapsayan bir monoton sınıf, bu halkanın ürettiği $\sigma-$halkayı da kapsar.[2]

2.2. Bulanık Kümeler

Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsizlikler çoğunlukla bilimsel olmayan bir şey olarak kabul görmesine rağmen, 19.yy başlarında belirsizlikler üzerine birçok filozof kafa yormuştur. Belirsizliğin, modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası, Zadeh [5] in bulanık küme teorisini tanımlamasıyla başlamıştır. Klasik mantıkta, önermeler ya doğrudur ya da yanlıştır, üçüncü bir alternatifleri yoktur. Bu nedenle klasik mantığın doğurduğu klasik kümeler, evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve ait olmayanlar diye ikiye böler. Matematiksel olarak ifade edildiğinde varlık küme ile olan üyelik ilişkisi bakımından kümenin elemanı olduğunda ‘1’ kümenin elemanı olmadığı zaman ‘0’ değerini alır. Bulanık küme, klasik küme gösteriminin genişletilmesidir. Bulanık kümede her bir elemanın üyelik derecesi vardır. Elemanların üyelik derecesi, [0,1] aralığında herhangi bir değer olabilir ve bu $\mu(x)$ üyelik fonksiyonu ile gösterilir. Üyelik fonksiyonlarının birçok farklı şekilde tanımlanabilmesi bulanık küme teorisinin esnekliğini yansıtmaktadır.[6,7]

Örnek olarak normal oda sıcaklığı 23 derece olarak kabul edilirse, klasik küme kuramına göre 23 derecenin üzerindeki sıcaklık dereceleri sıcak olarak kabul edilir ve bu derecelerin sıcak kümesindeki üyelik dereceleri ‘1’ olur. 23’ün altındaki sıcaklık dereceleri ise soğuktur ve sıcak kümesindeki üyelik dereceleri ‘0’ olur. Soğuk kümesi temel alındığında bu değerler tersine döner. Bulanık küme yaklaşımında üyelik değerleri [0,1] aralığında değerler almaktadır. Örneğin 14 derecelik sıcaklık için üyelik değeri ‘0’, 23 derecelik sıcaklık derecesi için üyelik değeri ‘0,25’ olabilir.

Bu kısımda Zadeh’in [5,8,9] çalışmalarından yararlanılarak bulanık küme kavramı ile bulanık kümelerde temel işlemler üzerinde durulmuştur.

X boş olmayan bir küme olsun. X kümesindeki bir bulanık küme (veya X in bir bulanık alt kümesi) $\mu : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Eğer,

$$\sup_{x \in X} \mu(x) = 1$$

ise bulanık kümeye normal denir. Klasik kümelerde olduğu gibi bulanık kümeler

$A, B, C, \ldots$ gibi büyük harflerle ve bunların üyelik fonksiyonları $\mu_A, \mu_B, \mu_C, \ldots$ ile gösterilir. $\mu_A(x)$ e x elemanının A kümesindeki üyelik derecesi denir. X in bütün bulanık alt kümelerinin sınıfı $\mathfrak{F}(X)$ ile gösterilir. $P(X)$ deki klasik E kümesi bir $\chi_E : X \to \{0,1\}$ karakteristik fonksiyonu ile gösterilebildiğinden özel bir bulanık kümedir, dolayısıyla $P(X) \subset \mathfrak{F}(X)$ olur.

Tanım 2.2.1. Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ ise B bulanık kümesi A bulanık kümesini *içerir* denir ve $A \subset B$ veya $B \supset A$ yazılır. Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise, A ve B *eşittir* (ya da, A *eşittir* B) denir ve $A = B$ yazılır.

Tanım 2.2.2. A ve B bulanık kümeler olsun. ‘ $\vee$ ’ en büyük işlemi olmak üzere A ve B nin birleşimi, $A \cup B$,

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \qquad \forall x \in X \tag{2.2.1}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. A ve B bulanık kümeler olsun. ‘ $\wedge$ ’ en küçük işlemi olmak üzere A ve B nin kesişimi, $A \cap B$,

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \qquad \forall x \in X \tag{2.2.2}$$

ile gösterilir.

Benzer şekilde, eğer $\{A_t \mid t \in T\}$ bulanık kümelerin bir sınıfı ise $\bigcup_{t \in T} A_t$ ve $\bigcap_{t \in T} A_t$ bulanık kümeleri de aynı üyelik fonksiyonları kullanılarak $\sup_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$ ve $\inf_{t \in T} \mu_{A_t}(x)$ ile bulunur.

Tanım 2.2.4. A bulanık küme olsun. A nın tümleyeni, $\overline{A}$,

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X \tag{2.2.3}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 2.2.1. Bulanık kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir;

Tümleme: $\overline{\overline{A}} = A$

Tek kuvvet: $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Değişme: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Yutma: $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Evrensel ve boş küme de yutma: $A \cup X = X$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Özdeşlik: $A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A$

Birleşme: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma: $B \cap (\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} (B \cap A_t)$

$B \cup (\bigcap_{t \in T} A_t) = \bigcap_{t \in T} (B \cup A_t)$

De Morgan kuralları: $\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A}_t$

$\overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A}_t$

Örnek 2.2.1. $X = \{a, b, c\}$ ve A, B, C bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları için bunların küme işlemleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0.7, & x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0.6, & x = a \\ 1, & x = b \\ 0.2, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0.1, & x = a \\ 0, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup C}(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0.7, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{A \cap C}(x) = \begin{cases} 0.1, & x = a \\ 0, & x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0, & x = b \\ 0.8, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0.6, & x = a \\ 0.3, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = \begin{cases} 0.6, & x = a \\ 0.7, & x = b \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$\neq \mu_X(x)$$

$$\mu_{A \cap \bar{A}}(x) = \begin{cases} 0.4, & x = a \\ 0.3, & x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

$$\neq \mu_{\varnothing}(x).$$

Örnek 2.2.2. $X = [0,100]$ insanların yaş dönemlerinin aralığı olsun. Buna göre insanların G, 'genç' bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu;

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 25 \\ (40 - x)/15 & , \quad 25 < x < 40 \\ 0 & , \quad x \ge 40 \end{cases}$$

ve Y, 'yaşlı' bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu;

$$\mu_Y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 50 \\ (x - 50)/15 & , \quad 50 < x < 65 \\ 1 & , \quad x \ge 65 \end{cases}$$

ise 28 yaşın G bulanık kümesinin üyelik derecesi 0.8 iken 45 yaşın hem G bulanık kümesine hem de Y bulanık kümesine üyelik derecesi 0 olduğu görülür. Dolayısıyla 45 yaşındaki birisine genç denilemeyeceği gibi yaşlıda denilemez. Bu üyelik fonksiyonlarına göre 'genç değil', 'yaşlı değil', 'genç değil ve yaşlı değil' kümeleri aşağıdaki gibi olur;

$$\mu_{\bar{G}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 25 \\ (x - 25)/15 & , \quad 25 < x < 40 \\ 1 & , \quad x \ge 40 \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 50 \\ (65 - x)/15 & , \quad 50 < x < 65 \\ 0 & , \quad x \ge 65 \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{G} \cap \bar{Y}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 25 \\ (x - 25)/15 & , \quad 25 < x < 40 \\ 1 & , \quad 40 \le x \le 50 \\ (65 - x)/15 & , \quad 50 < x < 65 \\ 0 & , \quad x \ge 65 \end{cases}$$

böylece $Y \subset \bar{G}$ yani 'yaşlı' ise 'genç değildir' olduğu anlaşılır. Bu üyelik fonksiyonuna göre 32 yaşındaki bir insanın 'genç' bulanık kümesine ait üyelik derecesi yaklaşık 0.6, 'yaşlı' bulanık kümesine ait üyelik derecesi 0 olur.

Tanım 2.2.6. $A \in \mathcal{F}(X)$ olsun. $\{x | \mu_A(x) > 0\}$ klasik kümesi A nın desteği olarak isimlendirilir ve *suppA* ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. $A \in \mathcal{F}(X)$ olsun. Her $\alpha \in [0,1]$ için $\{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ve $\{x | \mu_A(x) > \alpha\}$ klasik kümelerine $\alpha - kesim$ ve *güçlü* $\alpha - kesim$ kümeleri denir ve sırasıyla A_α, A_{α^+} ile gösterilir.

Örnek 2.2.3. Yukarıdaki örnekte G bulanık kümesi 0.2 ve 0.6 kesim kümeleri $G_{0.2} = [0,37]$ ve $G_{0.6} = [0,31]$ olur.

Tanım 2.2.8. $X = (-\infty, \infty)$ olsun. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için A_α bir sonlu kapalı aralık ise $A \in \mathcal{F}(X)$ bulanık kümesine *bulanık sayı* denir. Eğer A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu a, b reel sayı ve $b \geq 0$ olmak üzere

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a - b \text{ veya } x > a + b \\ (x - a + b)/b & , \quad a - b \leq x < a \\ (a + b - x)/b & , \quad a \leq x < a + b \\ 1 & , \quad x = a \end{cases}$$

ise A ya *üçgensel bulanık sayı* denir.

Her üçgensel bulanık sayı bir bulanık sayı, her reel sayı özel bir üçgensel bulanık sayı ve buradan her reel sayı aynı zamanda bulanık sayıdır.

Tanım 2.2.9. $X = (-\infty, \infty)$ olsun. Eğer her $x_1, x_2, x_3 \in X$ için $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ iken

$$\mu_A(x_2) \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_3)$$

ise $A \in \mathcal{F}(X)$ bulanık kümesine *konveks* denir.

Teorem 2.2.2. Her bulanık sayı, $(-\infty, \infty)$ un konveks bulanık alt kümesidir ve bunların üyelik fonksiyonları üstten yarı süreklidir.

Tanım 2.2.10. A, B bulanık sayılar olsun. Bu durumda $A+B, A-B, A\cdot B, A/B$ aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{x+y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)],$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{x-y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)],$$

$$\mu_{A\cdot B}(z) = \sup_{x\cdot y=z} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)],$$

$$\mu_{\frac{A}{B}}(z) = \sup_{\frac{x}{y}=z, y\neq 0} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \quad (0 \notin suppB).$$

2.3. Bulanık Cebir

Tanım 2.3.1. X boş olmayan bir küme ve X kümesinin bulanık alt kümelerinden oluşan bir sınıf $\mathfrak{F}(X) = \{A \mid A : X \to [0,1]\}$ olsun. $\mathfrak{F}(X)$ in boş olmayan bir alt kümesi $\mathfrak{F}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathfrak{F}$ ye *bulanık* $\sigma-$*cebir* denir.

i) $\varnothing, X \in \mathfrak{F}$,

ii) $A \in \mathfrak{F}$ ise, bu durumda $A^c \in \mathfrak{F}$,

iii) $\{A_n\} \subset \mathfrak{F}$ ise, bu durumda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$. [10]

3. BÖLÜM

ÖLÇÜM

Bu bölümde klasik ölçüm kavramı ile bulanık ölçümler hakkında genel tanım ve teoremler incelenmiştir.

3.1. Klasik Ölçüm

Klasik ölçüm teorisindeki ölçümün toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçümler toplamsal ölçümler olarak da adlandırılabilir. Bu konuda Fransız Matematikçiler Emile Borel ve Henry Lebesgue' in çalışmaları temel kaynaklar olmuştur. Klasik ölçümlerle ilgili bilgiler için [11] incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. $\mathcal{A}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve μ, $\mathcal{A}$ cebirinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde μ ye *ölçüm* denir;

i) $\mu(\emptyset) = 0,$

ii) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0,$

iii) $\forall A_n \in \mathcal{A}$ ikişer ikişer ayrık dizisi ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{(sayılabilir toplamsallık özelliği)}$$

Eğer $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$ alınırsa *sonlu toplamsallık özelliği* denir.

Önerme 3.1.1. μ, $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

i) $A \subset B,$ $A \in \mathcal{A},$ $B \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \leq \mu(B),$

ii) Eğer $A_n \in \mathcal{A},$ $1 \leq n < \infty$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ için;

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \text{(sayılabilir alt toplamsallık özelliği)}$$

İspat:

i) $B = A \cup (B - A)$; buradan $A_1 = A$, $A_2 = B - A$, ve $n > 2$ için $A_n = \varnothing$ ise μ nün sayılabilir toplamsallığından $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ ve $\mu(B) \geq \mu(A)$ olur.

ii) $n > 1$ için $A_1 = B_1$ ve $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ olsun. $\forall n$ için $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \subset A_n$ ve B_n ler ikişer ikişer ayrık kümeler ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Buradan,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Önerme 3.1.2. μ , $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

i) Eğer $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $1 \leq n < \infty$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3.1.1}$$

ii) Eğer $A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $1 \leq n < \infty$, $\mu(A_1) < \infty$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3.1.2}$$

Ayrıca, (i) den sonlu toplamsal μ için sayılabilir toplamsallık bulunur.

3.2. Bulanık Ölçümler

Bulanık ölçümlerle ilgili çeşitli tanım ve kavramlar geliştirilmiştir. Bulanık ölçümler ilk olarak 1974 yılında Sugeno [12,13] tarafından bulanık sistemleri ve subjektif insan değerlendirme yapısını modellemek amacıyla tasarlanmıştır. Sugeno aynı zamanda $\lambda-$bulanık ölçümü de tanımlamıştır. Weber [14] tarafından yarı ölçüm kavramına benzer bir kavram olan $\perp-$ayrıştırılabilir (decomposable) ölçüm kavramı geliştirilmiştir.

3.2.1 Bulanık ölçüm ve yarı sürekli bulanık ölçüm

X boş olmayan bir küme, $\mathscr{C}$, X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir sınıfı ve $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ genişletilmiş reel değerli, negatif olmayan bir küme fonksiyonu olsun.

Tanım 3.2.1. μ, $(X, \mathscr{C})$ üzerinde tanımlı $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty)$ a bir küme fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa μ ye *monoton ölçüm* denir.

i) $\mu(\varnothing) = 0,$

ii) $E \in \mathscr{C}$, $F \in \mathscr{C}$, ve $E \subseteq F$ ise $\mu(E) \leq \mu(F)$. [11]

Tanım 3.2.2. μ, $(X, \mathscr{C})$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa μ küme fonksiyonuna *bulanık ölçüm* denir.

i) $\mu(\varnothing) = 0$, $\varnothing \in \mathscr{C}$ ise

ii) $E \in \mathscr{C}$, $F \in \mathscr{C}$, ve $E \subset F$ ise $\mu(E) \leq \mu(F)$ (monotonluk)

iii) $\{E_n\} \subset \mathscr{C}$, $E_1 \subset E_2 \subset ...$, ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{C}$ ise

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \quad \text{(üstten süreklilik)}$$

iv) $\{E_n\} \subset \mathscr{C}$, $E_1 \supset E_2 \supset ...$, $\mu(E_1) < \infty$, ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{C}$ ise

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \quad \text{(alttan süreklilik)[2]}$$

i), ii), iii) veya i), ii), iv) özellikleri sağlanırsa, μ küme fonksiyonuna sırasıyla *azalan* veya *artan yarı sürekli bulanık ölçüm* denir. İkisine de kısaca *yarı sürekli bulanık ölçüm* denir. Ayrıca bulanık ölçüm veya yarı sürekli bulanık ölçüm μ için $X \in \mathscr{C}$ ve $\mu(X) = 1$ ise μ fonksiyonuna *normal* denir.

Genelde μ fonksiyonunun tanımlandığı $\mathscr{C}$ sınıfı bir monoton sınıf, yarı halka, halka, cebir, σ -halka, σ -cebir veya kuvvet kümesi olarak göz önüne alınır. Eğer μ, $(X, \mathfrak{F})$ de bir *bulanık ölçüm* (veya yarı sürekli bulanık ölçüm) ise $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ ye bir *bulanık ölçüm uzayı* (veya yarı sürekli bulanık ölçüm uzayı) denir.

Bir yarı halka üzerindeki bulanık ölçümde, klasik ölçümdeki toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik ve boş kümede sıfır olma gelir. Bunun yanında bulanık ölçüme *toplamsal olmayan ölçüm* de denir.[2]

Örnek 3.2.1. μ, $(X,\mathscr{F})$ üzerinde tanımlı ve her $E \in \mathscr{F}$ için x_0, X kümesinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan Dirac ölçümü bir *normal bulanık ölçümdür.*

$\mathscr{R}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir cebir ve μ, $(X,\mathscr{R})$ üzerinde tanımlı bir normal bulanık ölçüm (normal artan yarı sürekli veya normal azalan yarı sürekli bulanık ölçüm) olsun. Eğer v, $(X,\mathscr{R})$ de bir küme fonksiyonu ve

$$v(E) = 1 - \mu(\bar{E})$$

ise v bir *normal bulanık ölçüm* (sırasıyla, *normal artan yarı sürekli* veya *normal azalan yarı sürekli bulanık ölçüm*) dür. v ye μ nün *eş bulanık ölçümü* denir.[2]

3.2.2. $\lambda -$Bulanık Ölçüm

Tanım 3.2.3. $\sup \mu = \sup_{E\in\mathscr{C}} \mu(E)$ ve $\lambda \in (-\frac{1}{\sup \mu}, \infty) \cup \{0\}$ olmak üzere,

$$E \in \mathscr{C},\ F \in \mathscr{C},\ E \cup F \in \mathscr{C} \text{ ve } E \cap F = \varnothing,$$

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) + \lambda \cdot \mu(E) \cdot \mu(F) \tag{3.2.1}$$

ise μ küme fonksiyonu, $\mathscr{C}$ sınıfı üzerinde $\lambda -$*kuralını sağlar* denir. Eğer,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right]-1\right\}, & \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i), & \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

ise birleşimleri de $\mathscr{C}$ de olan her sonlu ayrık $\{E_1,...,E_n\}$ küme sınıfı için μ, $\mathscr{C}$

üzerinde sonlu $\lambda-$kuralını sağlar.

Eğer,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{\infty}\left[1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right]-1\right\}, & \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i), & \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

ise birleşimleri de $\mathscr{C}$ küme sınıfında olan her ayrık $\{E_n\}$ küme dizisi için μ, $\mathscr{C}$ üzerinde $\sigma-\lambda-$kuralını sağlar.

$\lambda = 0$ olduğunda $\lambda-$kuralı, sonlu $\lambda-$kuralı , $\sigma-\lambda-$kuralı sırasıyla *toplamsal, sonlu toplamsal,* $\sigma-$*toplamsal* olur.[2]

Teorem 3.2.1 Eğer $\mathscr{C} = \mathfrak{R}$ bir halka ve μ, $\lambda-$kuralını sağlıyorsa sonlu $\lambda-$kuralını da sağlar.[2]

Örnek 3.2.2. $X = \{a, b\}$ ve $\mathscr{C} = P(X)$ olsun. Eğer,

$$\mu = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ 0.2, & E = \{a\} \\ 0.4, & E = \{b\} \\ 1, & E = X \end{cases}$$

ise $\lambda = 5$ olduğunda μ, $\lambda-$kuralını sağlar. $\mathscr{C}$ sınıfı sonlu bir halka olduğundan μ, sonlu $\lambda-$kuralını da sağlar.[2]

Tanım 3.2.4. Eğer μ, $\mu(E) < \infty$ olacak biçimde en az bir $E \in \mathscr{C}$ kümesi varken $\mathscr{C}$ de $\sigma-\lambda-$kuralını sağlıyorsa μ küme fonksiyonuna $\mathscr{C}$ üzerinde $\lambda-$*bulanık ölçüm* denir.[2]

$\lambda-$bulanık ölçüm genellikle g_λ ile gösterilir. $\mathscr{C}$, $\sigma-$cebir ve $g_\lambda(X) = 1$ olduğunda $\lambda-$bulanık ölçüm *Sugeno ölçümü* olarak da adlandırılır. Yukarıdaki örnekte küme fonksiyonu bir Sugeno ölçümüdür.

Teorem 3.2.2. Eğer g_λ, boş kümeyi içeren $\mathscr{C}$ küme sınıfında bir $\lambda-$bulanık ölçüm ise $g(\emptyset) = 0$ ve g_λ, sonlu $\lambda-$kuralını sağlar.[2]

Teorem 3.2.3. Eğer g_λ bir $\mathscr{S}$ yarı halkası üzerinde bir $\lambda-$bulanık ölçüm ise g_λ *monotondur*.[2]

Teorem 3.2.2. ve Teorem 3.2.3. den $\lambda-$bulanık ölçümlerin sürekli ve buradan bir yarı halka üzerindeki $\lambda-$bulanık ölçümlerin bir bulanık ölçüm oldukları anlaşılır.

Tanım 3.2.5. $E \in \mathscr{C}$, $E_1 \in \mathscr{C}$, $E_2 \in \mathscr{C}$ ve $E = E_1 \cup E_2$ olmak üzere

$$\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

ise μ, *alt toplamsaldır* denir.

$E \in \mathscr{C}$, $E_1 \in \mathscr{C}$, $E_2 \in \mathscr{C}$ $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ve $E = E_1 \cup E_2$ olmak üzere

$$\mu(E) \geq \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

ise μ, *üst toplamsaldır* denir.[2]

Teorem 3.2.4. g_λ bir $\mathscr{S}$ yarı halkası üzerinde bir $\lambda-$bulanık ölçüm olsun. g_λ, $\lambda < 0$ ise alt toplamsal, $\lambda > 0$ ise üst toplamsal ve $\lambda = 0$ ise toplamsaldır.[2]

Teorem 3.2.5. g_λ, $\Re$ halkası üzerinde bir $\lambda-$bulanık ölçüm olsun. Buradan her $E, F \in \Re$ için,

1) $g_\lambda(E-F) = \dfrac{g_\lambda(E) - g_\lambda(E \cap F)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(E \cap F)}$,

2) $\mathrm{g}_\lambda(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \dfrac{\mathrm{g}_\lambda(\mathrm{E}) + \mathrm{g}_\lambda(\mathrm{F}) - \mathrm{g}_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) + \lambda \cdot \mathrm{g}_\lambda(\mathrm{E}) \cdot \mathrm{g}_\lambda(\mathrm{F})}{1 + \lambda \cdot \mathrm{g}_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}$,

3) $g_\lambda(\bar{E}) = \dfrac{1 - g_\lambda(E)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)}$ ($\Re$ bir cebir ve g_λ normal ise)

özellikleri sağlanır.[2]

3.2.3. T-conorm ve ayrıştırılabilir (decomposable) ölçüm

t-conorm ve t-normlar genelleştirilmiş toplama ve çarpma, ve aynı zamanda maksimum ve minimum olan ikili işlemlerdir.

Tanım 3.2.6. $[0,1]$ aralığında bir ikili işlem aşağıdaki şartları sağladığı takdirde *t-conorm* olarak adlandırılır.

i) $r \perp 0 = 0 \perp r = r,$

ii) $r \leq u$ ve $s \leq v$ olmak üzere $r \perp s \leq u \perp v,$

iii) $r \perp s = s \perp r,$

iv) $(r \perp s) \perp t = r \perp (s \perp t).$ [1,15]

Örnek 3.2.3. Bulanık küme teorisinde çoğunlukla aşağıdaki t-conormlar kullanılır.

mantıksal toplam :

$$r \vee s = \max\{r, s\}.$$

sınırlandırılmış toplam :

$$r \oplus s = \min\{r + s, 1\}.$$

cebirsel toplam :

$$r \dot{+} s = r + s - rs.$$

zorlayıcı toplam :

$$r \dot{\vee} s = \begin{cases} 1, & r > 0, \quad s > 0, \\ r, & s = 0, \\ s, & r = 0, \end{cases}$$

Her t-conorm $\perp$ aşağıdakileri sağlar. $\forall r, s \in [0,1]$ için,

$$r \vee s \leq r \perp s \leq r \dot{\vee} s.$$

Her $r \in [0,1]$ için $1 \geq r \perp 1 = 1 \perp r \geq 1 \perp 0 = 1$ olmak üzere

$$r \perp 1 = 1 \perp r = 1.$$

Eğer

$$\mathop{\perp}_{i=1}^{n} r_i = r_1 \perp r_2 \perp \ldots \perp r_n$$

olmak üzere

$$s < \mathop{\perp}_{i=1}^{n} r_i$$

olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı vardır öyle ki her r, s reel sayı çifti için $0 < r < s < 1$ ise, t-conorm $\perp$ 'ye *Arşimedyan*(*Archimedean*) denir.[1]

Sınırlandırılmış toplam, cebirsel toplam ve zorlayıcı toplam Arşimedyandır ve mantıksal toplam Arşimedyan olmayandır. Eğer bir t-conorm $\perp$, Arşimedyan ise, bu durumda $\forall r \in (0,1)$ için $r < r \perp r.$ Eğer bir t-conorm $\perp$, sürekli ise, ve eğer $\forall r \in (0,1)$ için $r < r \perp r$ ise, bu durumda t-conorm $\perp$, Arşimedyandır.[1]

Teorem 3.2.6. Bir ikili işlem $\perp$, bir sürekli Arşimedyan t-conormdur ancak ve ancak her r reel sayısı için

$$r + \infty = \infty + r = \infty + \infty = \infty$$

ve ψ nin *pseudo-tersi* $\psi^{(-1)}$,

$$\psi^{(-1)}(r) = \begin{cases} \psi^{(-1)}(r) & r \leq \psi(1), \\ 1 & r > \psi(1), \end{cases}$$

biçiminde tanımlandığında $\forall r, s \in [0,1]$ için

$$r \perp s = \psi^{(-1)}(\psi(r) + \psi(s)) \tag{3.2.4}$$

olacak şekilde sürekli kesin artan bir $\psi : [0,1] \to [0,\infty]$ fonksiyonu vardır.[1]

Tanım 3.2.7. $\perp$ bir t-conorm olsun. m , 2^X üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olsun. Eğer $m(\varnothing) = 0,\ m(X) = 1,$ ve X in A ve B ayrık kümelerinin her çifti için

$$m(A \cup B) = m(A) \perp m(B)$$

ise, 2^X de tanımlı küme fonksiyonu m 'ye X 'de bir $\perp -$*ayrıştırılabilir* (*decomposable*) *ölçüm* (kısaca *ayrıştırılabilir ölçüm*) denir.

Her t-conorm $\perp$ için, bir $\perp -$ayrıştırılabilir (decomposable) ölçüm bir normal bulanık ölçümdür; monotonluk $\perp$ nin azalmayan olmasından anlaşılır. (Tanım 3.2.6 (ii))

$m,$ X üzerinde bir $\perp -$ayrıştırılabilir ölçüm olsun. X sonlu bir küme olduğunda, X in her A alt kümesi için

$$m(A) = \underset{x \in A}{\perp}\, m(\{x\}).$$

[1]

4. BÖLÜM

İNTEGRALLER ve ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, önce Lebesgue integralinin tanımı ve özellikleri sonra da çeşitli bulanık integral tanım ve özellikleri verilmiştir. Lebesgue integrali Henri Lebesgue tarafından tanımlanmıştır. Lebesgue integrali Riemann integralinin daha genel bir durumudur. Henri Lebesgue, 1902 de yayınlanan doktora tezinde Lebesgue integralini daha ileri seviye de geliştirmiştir. Bu bölümde Lebesgue integrali için [16] dan yararlanılmıştır.

4.1. Lebesgue İntegral

Tersi söylenmedikçe, $\mu(A)$ ölçümünü, X kümesinin alt kümelerinin birimi X olan bir Borel cebiri üzerinde tanımlı, $\sigma-$toplamsal olarak düşüneceğiz. Bütün $A \subseteq X$ kümelerinin $\mu-$ölçülebilir, $f(x)$ fonksiyonlarının $x \in X$ için tanımlı ve $\mu-$ölçülebilir oldukları var sayılacaktır.[16]

4.1.1. Basit fonksiyonların lebesgue integrali

İlk olarak, sonlu ya da sayılabilir sayıda değer alan ölçülebilir fonksiyonlar için, Lebesgue integralini verelim. $f(x)$, $i \neq j$ için $y_i \neq y_j$ olmak üzere, $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ değerlerini alan bir fonksiyon olsun.

$f(x)$ fonksiyonunun A kümesi üzerindeki integrali

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n y_n\, \mu\{x : x \in A,\ f(x) = y_n\} \tag{4.1.1}$$

eşitliği ile tanımlanır.[16]

Tanım 4.1.1. Eğer (4.1.1) dizisi mutlak yakınsak ise $f(x)$ basit fonksiyon A kümesi üzerinde (Lebesgue ölçümüne göre) *integrallenebilirdir,* denir. $f(x)$

integrallenebiliyorsa (4.1.1) serisinin toplamına $f(x)$ fonksiyonunun A üzerindeki *integrali* denir.

Basit fonksiyonlar için tanımlanan Lebesgue integralinin özellikleri aşağıda verilmiştir.[16]

1) $\int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\;d\mu = \int_A \{f(x)+g(x)\}\;d\mu.$

Sol taraftaki integralin varlığı sağ taraftaki integralin varlığını gerektirir.

2) Her k sabiti için

$$k\int_A f(x)\;d\mu = \int_A \{k\;f(x)\}\;d\mu.$$

3) A üzerinde tanımlı $f(x)$ basit fonksiyonu, A üzerinde integrallenebilirdir. Ayrıca, eğer A üzerinde $|f(x)| \le M$ oluyorsa $\left|\int_A f(x)\;d\mu\right| \le M\mu(A)$ elde edilir.

4.1.2. Lebesgue integralinin genel tanımı ve temel özellikleri

Tanım 4.1.2. A üzerinde integrallenebilen $f_n(x)$ basit fonksiyonların bir dizisi, düzgün olarak $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna, A üzerinde *integrallenebilir*, denir.[16]

$$J = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,d\mu \tag{4.1.2}$$

limiti

$$\int_A f(x)\;d\mu$$

ile gösterilir ve buna, $f(x)$ fonksiyonunun A üzerinde *integrali* denir. Bu tanımın geçerli olabilmesi için aşağıdaki özelliklerin sağlanması gerekir.

1) A üzerinde integrallenebilen basit fonksiyonların düzgün yakınsak her dizisi için, (4.1.2) limiti vardır.

2) Verilen $f(x)$ fonksiyonu için, (4.1.2) limiti $\{f_n(x)\}$ dizisinin seçilişine bağlı

değildir.

3) Basit fonksiyonlar için integral ve integrallenebilme tanımları (basit fonksiyonların integralinde) verilenlerle eşdeğerdir.[16]

Lebesgue integralinin temel özellikleri:

Teorem 4.1.1.

$$\int_A 1\, d\mu = \mu(A)\ [16]$$

Teorem 4.1.2. Her k sabiti için

$$k\int_A f(x)\ d\mu = \int_A \{k\ f(x)\}\, d\mu.[16]$$

Teorem 4.1.3.

$$\int_A f(x)\ d\mu + \int_A g(x)\ d\mu = \int_A \{f(x) + g(x)\}\ d\mu.[16]$$

Teorem 4.1.4. A kümesi üzerinde tanımlı olan $f(x)$ fonksiyonu A üzerinde integrallenebilirdir.[16]

Teorem 4.1.5. $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_A f(x)\ d\mu \geq 0.[16]$$

Sonuç 4.1.1. $f(x) \geq g(x)$ ise

$$\int_A f(x)\ d\mu \geq \int_A g(x)\ d\mu.[16]$$

Sonuç 4.1.2. A üzerinde $m \leq f(x) \leq M$ ise

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x)\ d\mu \leq M\mu(A).[16]$$

Teorem 4.1.6. $i \neq j$ için, $A_i \cap A_j = \varnothing$ olmak üzere $A = \bigcup_n A_n$ oluyorsa,

$$\int_A f(x)\ d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\ d\mu.[16]$$

4.2. Bulanık İntegraller ve Özellikleri

Çeşitli bulanık integral tanım ve kavramları geliştirilmiştir. Bulanık integral ilk olarak Sugeno [12,13] tarafından tanımlanmıştır. Bulanık integral dizilerinin monoton yakınsama teoremi de Sugeno tarafından çalışılmıştır. Choguet [17] tarafından Choguet integrali tanımlanmıştır. Choguet ve Sugeno integralleri benzer olan karakteristik özelliklere sahiptirler. Bulanık integrallerle ilgili çeşitli araştırmalara devam edilmiştir. Bulanık integralin bir genelleştirilmesi Ralescu ve Adams [18] ve Wang [19] tarafından ortaya konulmuştur. t-conorm integral teorisi Weber [14] ve Murofushi ve Sugeno [15,20] tarafından çalışılmıştır. t-conorm integral teorisi Sugeno ve Choguet integrallerinin genelleştirilmesinin bir sonucu olur. [2,21]

4.2.1. Sıfır (Null)-toplamsallık

$\mathfrak{F}$, $P(X)$ in kümelerinin bir $\sigma-$cebiri ve $\mu : \mathfrak{F} \to [-\infty, \infty]$ genişletilmiş reel değerli bir küme fonksiyonu olsun.

Tanım 4.2.1. $E \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathfrak{F}$, $E \cap F = \varnothing$, ve $\mu(F) = 0$ olmak üzere

$$\mu(E \cup F) = \mu(E)$$

ise $\mu : \mathfrak{F} \to [-\infty, \infty]$ küme fonksiyonuna, *sıfır (null)-toplamsaldır* denir.[2]

Teorem 4.2.1. Boş olmayan her $F \in \mathfrak{F}$ kümesi için $\mu(F) \neq 0$ ise, bu durumda μ, sıfır (null)-toplamsaldır.[2]

Teorem 4.2.2. Eğer $\mu : \mathfrak{F} \to [0, \infty]$ azalmayan bir küme fonksiyonu ise, bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) μ, sıfır (null)-toplamsaldır;

ii) $E \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathfrak{F}$, ve $\mu(F) = 0$ olmak üzere $\mu(E \cup F) = \mu(E)$;

iii) $E \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset E$, ve $\mu(F) = 0$ olmak üzere $\mu(E - F) = \mu(E)$;

iv) $E \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathfrak{F}$, ve $\mu(F) = 0$ olmak üzere $\mu(E - F) = \mu(E)$;

v) $E \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$, ve $\mu(F) = 0$ olmak üzere $\mu(E \Delta F) = \mu(E)$. [2]

4.2.2. Ölçülebilir fonksiyon

Bu bölümde, $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzay, $\mu : \mathcal{F} \to [\mathbf{0}, \infty]$ bir bulanık ölçüm (ya da yarı sürekli bulanık ölçüm) ve $\mathcal{B}$, $(-\infty, \infty)$ üzerinde Borel cisim olsun.

Tanım 4.2.2 Her $B \in \mathcal{B}$ Borel kümesi için

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{F}$$

ise, X de $f : X \to (-\infty, \infty)$ a reel değerli fonksiyona $\mathcal{F} - \textit{ölçülebilir}$ (kısaca ölçülebilir) denir.[2]

Teorem 4.2.3. Eğer $f : X \to (-\infty, \infty)$ reel değerli bir fonksiyon ise, bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) f, ölçülebilirdir;

ii) Her $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$;

iii) Her $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}$;

iv) Her $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{F}$;

v) Her $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x \mid f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F}$ [2].

Sonuç 4.2.1. Eğer f, ölçülebilir bir fonksiyon ise, bu durumda her $\alpha \in (-\infty, \infty)$ için $\{x \mid f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F}$ dır.[2]

4.2.3. Bulanık integral ve özellikleri

$X \in \mathcal{F}$ olmak üzere $(X, \mathcal{F})$ ölçülebilir bir uzay, $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ bir bulanık ölçüm, ve $\mathbf{F}$, $(X, \mathcal{F})$ de tanımlı negatif olmayan tüm sonlu ölçülebilir fonksiyonların bir sınıfı kabul edilsin. Verilen her $f \in \mathbf{F}$ için $\alpha \in [0, \infty]$ olduğunda

$F_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$, $F_{\alpha^+} = \{x \mid f(x) > \alpha\}$ yazılır. F_α ve F_{α^+} kümeleri sırasıyla $\alpha -$ *kesim* ve *güçlü* $\alpha -$ *kesim* olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.3 $A \in \mathfrak{F}$ ve $f \in \mathbf{F}$ olsun. μ ye göre A da f nin bulanık integrali $\oint_A f\, d\mu$ ile gösterilir, ve

$$\oint_A f\, d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$

biçiminde tanımlanır.[2]

$A = X$ olduğunda bulanık integral $\oint f\, d\mu$ ile gösterilir. Bazen, literatürde bulanık integral *Sugeno integrali* olarak da adlandırılır.

Lemma 4.2.1. (1) $\alpha < \beta$ olduğunda F_α ve F_{α^+}, α ya göre artmayandır, ve $F_{\alpha^+} \supset F_\beta$ dır.

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{\beta \to \alpha^-} F_\beta = \lim_{\beta \to \alpha^-} F_{\beta^+} &= F_\alpha \\ &\supset F_{\alpha^+} \\ &= \lim_{\beta \to \alpha^+} F_\beta \\ &= \lim_{\beta \to \alpha^+} F_{\beta^+}.\end{aligned}$$
[2]

Teorem 4.2.4. En küçük $\sigma -$cebiri f, ölçülebilirdir öyle ki $\mathfrak{F}(f)$, f tarafından üretilen $\sigma -$cebiri olmak üzere

$$\oint_A f\, d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0, \infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha^+})]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha^+})]$$

$$= \sup_{E \in \mathfrak{F}(f)} [(\inf_{x \in E} f(x)) \wedge \mu(A \cap E)]$$

$$= \sup_{E \in \mathfrak{F}} [(\inf_{x \in E} f(x)) \wedge \mu(A \cap E)]. \, [2]$$

Örnek 4.2.1. $X = \{a,b,c\}$, $\mathfrak{F} = P(X)$ ve her $E \in \mathfrak{F}$ için μ,

$$\mu(E) = \begin{cases} |E|, & E \neq \{a,b\} \\ 3, & E = \{a,b\} \end{cases}$$

ile verilsin, ve

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x = a \\ 2,5 & x = b \\ 2 & x = c \end{cases}$$

olsun.

Bu durumda

$$\oint_A f \, d\mu = [3 \wedge \mu(\{a\})] \vee [2,5 \wedge \mu(\{a,b\})] \vee [2 \wedge \mu(\{X\})]$$

$$= 1 \vee 2,5 \vee 2$$

$$= 2,5 \quad [2]$$

Örnek 4.2.2. $X = [0,1]$ olsun, X de tüm Borel kümelerinin bir sınıfı $\mathfrak{F}$, m Lebesgue ölçüm olmak üzere $\mu = m^2$, $f(x) = \frac{x}{2}$ olsun.

$$F_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [2\alpha, 1]$$

alalım.

$T = [0, 1/2)$ olduğunda sadece $\alpha \in [0, 1/2)$ dikkate alalım. Buradan,

$$\oint f\, d\mu = \sup_{\alpha \in [0, 1/2)} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0, 1/2)} [\alpha \wedge \mu(1-2\alpha)^2]$$

elde edilir.

Bu ifade de $(1-2\alpha)^2$, $\alpha \in [0, 1/2)$ olmak üzere α nın azalan sürekli fonksiyonudur. Bu nedenle, supremum, $\alpha = (1-2\alpha)^2$ denkleminin çözümlerinden biri olan noktada elde edilecektir. Bu nokta ise $\alpha = 1/4$ tür.

Sonuç olarak

$$\oint f\, d\mu = 1/4$$

elde edilir.[2]

Aşağıdaki teorem bulanık integralin birçok temel özelliklerini verir.

Teorem 4.2.5. (1) Eğer $\mu(A) = 0$ ise, bu durumda her $f \in \mathbf{F}$ için $\oint_A f\, d\mu = 0$ dir.

(2) Eğer $\oint_A f\, d\mu = 0$ ise, bu durumda $\mu(A \cap \{x | f(x) > 0\}) = 0$ dir.

(3) Eğer $f_1 \leq f_2$ ise, bu durumda $\oint_A f_1\, d\mu \leq \oint_A f_2\, d\mu$ dir.

(4) χ_A, A nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\oint_A f\, d\mu = \oint f \cdot \chi_A\, d\mu$ dir.

(5) Her $a \in [0, \infty)$ sabiti için $\oint_A a\, d\mu = a \wedge \mu(A)$ dir.

(6) Her $a \in [0, \infty)$ sabiti için $\oint_A (f + a)\, d\mu \leq \oint_A f\, d\mu + \oint_A a\, d\mu$ dir.[2]

Sonuç 4.2.2.

(7) Eğer $A \supset B$ ise, bu durumda $\oint_A f\, d\mu \geq \oint_B f\, d\mu$ dir.

(8) $\oint_A (f_1 \vee f_2)\, d\mu \geq \oint_A f_1\, d\mu \vee \oint_A f_2\, d\mu$ dir.

(9) $\oint_A (f_1 \wedge f_2)\, d\mu \leq \oint_A f_1\, d\mu \wedge \oint_A f_2\, d\mu$ dir.

(10) $\oint_{A \cup B} f\, d\mu \geq \oint_A f\, d\mu \vee \oint_B f\, d\mu$ dir.

(11) $\oint_{A \cap B} f\, d\mu \leq \oint_A f\, d\mu \wedge \oint_B f\, d\mu$ dir.[2]

İspat: Özellik (7), Teorem 4.2.5 in (3) ve (4) özelliğinden elde edilir. (8) ve (9). özellikler (3) den; (10) ve (11). özellikler (7) den anlaşılır. (1)-(2). özellikler [ve buradan (7)-(11)] klasik Lebesgue integralindeki özelliklere benzerdir ama (5) ve (6), klasik olanlardan biraz farklıdır. Genelde Lebesgue integralinin sahip olduğu bazı önemli özellikler bulanık integralde olmamaktadır. Örneğin, Lebesgue integral doğrusallığa sahiptir; ama bulanık integral sahip değildir. Yani,

$$\int_A (f_1 + f_2)\, d\mu = \int_A f_1\, d\mu + \int_A f_2\, d\mu$$

ve

$$\int_A a\, f\, d\mu = a \int_A f\, d\mu.$$

Bunu aşağıdaki örnekte gösterebiliriz.

Örnek 4.2.3. $X = [0,1]$ olsun, X de tüm Borel kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{F}$ (şöyle ki, $\mathcal{B} \cap [0,1]$), m Lebesgue ölçüm olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = x$ ve $a = 1/2$ alalım.

$$\oint a\, f\, d\mu = \oint \frac{x}{2}\, d\mu = 1/3$$

ve

$$a \oint f\, d\mu = \frac{1}{2} \oint x\, d\mu = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\oint a\, f\, d\mu \neq a \oint f\, d\mu. \quad [2]$$

Teorem 4.2.6. μ sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda $f_1 = f_2$ olduğunda $\oint f_1\, d\mu = \oint f_2\, d\mu$ olur.[2]

Sonuç 4.2.3. Eğer μ sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda A da $f_1 = f_2$ olduğunda $\oint_A f_1\, d\mu = \oint_A f_2\, d\mu$ olur.[2]

Sonuç 4.2.4. Eğer μ sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ ile $\mu(B) = 0$ olmak üzere her $f \in \mathbf{F}$ için

$$\oint_{A \cup B} f\, d\mu = \oint_A f\, d\mu. [2]$$

4.2.4. Choguet integral ve özellikleri

Tanım 4.2.4. μ, X de bir bulanık ölçüm olsun. μ ye göre $f : X \rightarrow R^+$ fonksiyonunun *Choguet integrali* $(C)\int f(x)\, d\mu(x)$ (yada $(C)\int f\, d\mu$),

$$(C)\int f\, d\mu = C_\mu(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_{(i)}) - f(x_{(i-1)})).\mu(A_{(i)})$$

ile tanımlıdır. $0 \leq f(x_{(1)}) \leq f(x_{(2)}) \leq ... \leq f(x_{(n)}) \leq 1$, $A_{(i)} = \{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\}$ ve $f(x_{(0)}) = 0.$[17]

Ölçümün *toplamsal* olduğu durumlarda Choguet integral ile Lebesgue integral denktir. Fakat bu Sugeno integral için geçerli değildir.

Not 4.2.1. $(C)\int_A f\, d\mu$ nün iki farklı tanımı vardır; birincisi

$$(C)\int_A f\, d\mu = (C)\int f\, 1_A\, d\mu$$

ve diğeri

$$(C)\int_A f\, d\mu = (C)\int f\, d\mu_A.$$

μ_A, A da μ nün kısıtlamasıdır.[1]

Choguet integral aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Önerme 4.2.1. f ve g, X de fonksiyonlar ve A, X in bir alt kümesi olsun.

i)

$$(C)\int 1_A \, d\mu = \mu(A).$$

ii) Eğer μ bir bulanık ölçüm ve $f \le g$ ise, bu durumda

$$(C)\int f \, d\mu \le (C)\int g \, d\mu.$$

iii) Eğer a negatif olmayan bir reel sayı ve b bir reel sayı ise, bu durumda

$$(C)\int (af+b) \, d\mu = a \cdot (C)\int f \, d\mu + b \cdot \mu(X)$$

iv)

$$(C)\int (-f) \, d\mu = -(C)\int f \, d\bar{\mu}.$$

v) X de bütün f fonksiyonları için

$$\bar{\mu} = \mu \text{ ise } (C)\int (-f) \, d\mu = -(C)\int f \, d\mu.$$

vi) $f^+(x) = \max\{f(x),\ 0\}$ ve $f^-(x) = \max\{-f(x),\ 0\}$ olduğundan

$$(C)\int f \, d\mu = (C)\int f^+(x) \, d\mu - (C)\int f^-(x) \, d\bar{\mu}.$$

vii) Eğer a bir reel sayı ise, bu durumda

$$(C)\int f \, d(a \cdot \mu) = a \cdot (C)\int f \, d\mu.$$

viii) Eğer μ ve ν, X de bulanık ölçümlerdir öyle ki $\mu \le \nu$ ve $\mu(X) = \nu(X)$ ise, X de bütün f fonksiyonları için

$$(C)\int f \, d\mu \le (C)\int f \, d\nu.$$

ix) Eğer N bir boş (null) küme ve tüm $x \notin N$ için $f(x) = g(x)$ ise, bu durumda

$$(C)\int f\ d\mu = (C)\int g\ d\mu.$$

[1]

4.2.5. Sugeno integral ve özellikleri

Tanım 4.2.5. μ, X de bir normal bulanık ölçüm ve $f : X \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun. μ ye göre $f : X \to [0,1]$ in *Sugeno integrali* $\oint f(x) \circ \mu(x)$ (ya da $\oint f \circ \mu$),

$$S_{\mu}(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)) = \oint f \circ \mu = \bigvee_{i=1}^{n} (f(x_{(i)}) \wedge \mu(A_{(i)}))$$

olarak tanımlanır.

$0 \leq f(x_{(1)}) \leq f(x_{(2)}) \leq ... \leq f(x_{(n)}) \leq 1$ ve $A_{(i)} = \{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\}$. [12]

Sugeno integral aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Önerme 4.2.2. μ ve ν normal bulanık ölçümler, f ve g, X den $[0,1]$ e fonksiyonlar olsunlar. A, X in bir alt kümesi ve $a \in [0,1]$ olsun.

i)

$$\oint 1_A \circ \mu = \mu(A).$$

ii) Eğer $f \leq g$ ise, bu durumda

$$\oint f \circ \mu \leq \oint g \circ \mu.$$

iii)

$$\oint (a \vee f) \circ \mu = a \vee (\oint f \circ \mu).$$

iv)

$$\left|\oint f \circ \mu - (C)\int f \, d\mu\right| \leq \frac{1}{4}.$$

v) Eğer μ bir 0-1 bulanık ölçüm ise, bu durumda

$$\oint f \circ \mu = (C)\int f \, d\mu.$$

vi) Eğer $\mu \leq \nu$ ise, bu durumda

$$\oint f \circ \mu \leq \oint f \circ \nu.$$

vii)

$$\oint f \circ (\mu \vee \nu) = (\oint f \circ \mu) \vee (\oint f \circ \nu).$$

viii) Eğer N bir boş (null) küme ve eğer tüm $x \notin N$ için $f(x) = g(x)$ ise, bu durumda

$$\oint f \circ \mu = \oint g \circ \mu.$$

[1]

4.2.6. T-conorm integral

Tanım 4.2.6. Aşağıdaki şartları sağlayan bir işlem $\Diamond : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve sürekli t-conormlar $\Delta, \perp, \coprod$ nin meydana getirdiği $(\Delta, \perp, \coprod, \Diamond)$ dörtlü grup bir *t-conorm sistem*dir.

i) $\Diamond$,$(0,1]^2$ de süreklidir,

ii) $a \Diamond r = 0$ ancak ve ancak $a = 0$ yada $r = 0,$

iii) Eğer $r \perp s < 1$ ise, bu durumda $a \Diamond (r \perp s) = (a \Diamond r) \coprod (a \Diamond s),$

iv) Eğer $a \Delta b < 1$ ise, bu durumda $(a \Delta b) \Diamond r = (a \Diamond r) \coprod (b \Diamond r).$

$\Delta, \perp$ ve $\amalg$ nin üreteçlerini eğer varsa, sırasıyla φ, ψ ve ζ ile gösterelim. Önemli t-conorm sistemler aşağıdakilerdir.

Maksimum çeşit:

$\Delta, \perp$ ve $\amalg$ t-conormlar, maksimum $(\vee)$ işlemlerdir.

Arşimedyan çeşit:

$\Delta, \perp$ ve $\amalg$ t-conormların üreteçleri sırasıyla φ, ψ ve ζ dir, ve bütün $a \in [0,1]$ ve $r \in [0,1]$ için

$$a \lozenge r = \zeta^{-1}(\varphi(a) \cdot \psi(r)).$$

(φ, ψ, ζ) ye $(\Delta, \perp, \amalg, \lozenge)$ nin *üreteçi* denir.[1]

Tanım 4.2.7. (i) ya da (ii) sağlanıyorsa $\perp -$ayrıştırılabilir (decomposable) ölçüm m, normaldir.

i) $\perp = \vee$,

ii) $\psi \circ m$ bir ölçümdür ve $\perp$, ψ üreteçine sahiptir.[1]

Tanım 4.2.8. $\mathcal{F} = (\Delta, \perp, \amalg, \lozenge)$ bir t-conorm sistem, m, X de bir normal $\perp -$ ayrıştırılabilir (decomposable) ölçüm, ve $f : X \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun. m ye göre f nin $\mathcal{F}-$ *integrali* (ya da *t-conorm integrali*) $(\mathcal{F})\int f(x)\, dm(x)$ (ya da $(\mathcal{F})\int f\, dm$) ile gösterilir, ve

$$(\mathcal{F})\int f\, dm = \coprod_{x \in X} f(x) \lozenge m(\{x\})$$

biçiminde tanımlanır.[1]

Tanım 4.2.9. Δ bir t-conorm olsun. $[0,1]$ de bir ikili işlem $-_\Delta$

$$a -_\Delta b = \inf\{c \mid b \,\Delta\, c \geq a\}$$

olarak tanımlansın.

Eğer $\Delta = \vee$ (maksimum işlem) ise,

$$a -_{\Delta} b = \begin{cases} a, & a \geq b \\ 0, & a < b \end{cases}$$

ve eğer $\Delta,$ bir φ üretece sahip ise,

$$a -_{\Delta} b = \varphi^{(-1)}(0 \vee [\varphi(a) - \varphi(b)]).$$

Açıkça, $a -_{\Delta} 0 = 0.$ Eğer Δ sürekli ise, bu durumda $a \geq b$ olduğu zaman $(a -_{\Delta} b)\, \Delta\, b = a.$[1]

Tanım 4.2.9. $\mathcal{F} = (\Delta, \perp, \coprod, \Diamond)$ önemli bir t-conorm sistem, $\mu,$ X de bir normal bulanık ölçüm, ve $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ olmak üzere $f,$ $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ aralığı ile X de bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu için *genelleştirilmiş t-conorm integral* aşağıdaki gibi tanımlanır. $a_0 = 0$ olmak üzere μ ye göre f nin $\mathcal{F}-$bulanık integrali (ya da t-conorm bulanık integrali) $(\mathcal{F})\int f(x)\, d\mu(x)$ (ya da $(\mathcal{F})\int f\, d\mu$),

$$(\mathcal{F})\int f\, d\mu = \coprod_{i=1}^{n} (a_i -_{\Delta} a_{i-1}) \Diamond \mu(\{x \mid f(x) \geq a_i\})$$

biçiminde tanımlanır.[1]

Eğer $\mu,$ $\perp -$ayrıştırılabilir ölçüm normal ise, bu durumda μ ye göre $(\Delta, \perp, \coprod, \Diamond)-$ bulanık integrali ile μ ye göre $(\Delta, \perp, \coprod, \Diamond)-$integrali denktir. $(\vee, \vee, \vee, \wedge)-$bulanık integrali Sugeno integralidir. Eğer $(\Delta, \perp, \coprod, \Diamond),$ bir (φ, ψ, ζ) üretecine sahip ise, bu durumda $(\Delta, \perp, \coprod, \Diamond)-$bulanık integrali

$$(\mathcal{F})\int f\, d\mu = \zeta^{(-1)}\ (C)\int \varphi(f)\, d(\psi \circ m)$$

olarak gösterilebilir.

Sağ taraftaki integral Choguet integralidir.[1]

5. BÖLÜM

PAN İNTEGRAL ve ÖZELLİKLERİ

Pan-integral kavramı, 1983 de Yang Qingji tarafından özellikleri tartışılarak çalışılmıştır. Yang [22] tarafından yeniden düzenlenerek tanımlanmıştır. Pan-toplam bulanık ölçüm uzayında, pan-integralin daha fazla araştırılmasına Yang ve Song [23] tarafından devam edilmiştir.[2]

5.1. Pan-toplam ve Pan-çarpım

$R_+ = [0, \infty)$, $\bar{R}_+ = [0, \infty]$ $\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} \cap R_+$ ve a, b, c, d, a_i, b_i ve T indeks kümesi olmak üzere $a_t \in \bar{R}_+$ $(i = 1, 2, ..., t \in T)$ olsun.

Tanım 5.1.1. $\oplus$, $\bar{R}_+$ de bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde $\oplus$ ya $\bar{R}_+$ de bir *pan-toplam* ve $(\bar{R}_+, \oplus)$ ikilisine de *değişmeli isotonik yarı grup* denir.

i) $a \oplus b = b \oplus a$;

ii) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

iii) Her c için $a \le b \Rightarrow a \oplus c \le b \oplus c$;

iv) $a \oplus 0 = a$;

v) $\lim_n a_n$ ve $\lim_n b_n$ var ise $\lim_n (a_n \oplus b_n)$ vardır, ve

$$\lim_n (a_n \oplus b_n) = \lim_n a_n \oplus \lim_n b_n.$$

i) ve iii) den,

iii') $a \le b$ ve $c \le d \Rightarrow a \oplus c \le b \oplus d$.

ii) den, $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ için $\bigoplus_{i=1}^{n} a_i$ yazılabilir. Aynı zamanda T sonlu bir dizin kümesi olduğunda $\bigoplus_{t\in T} a_t$ kullanılır. Bundan başka, eğer T sonsuz bir dizin kümesi ise, T' sonlu olduğundan

$$\bigoplus_{t\in T} a_t = \sup_{T'\subset T} \bigoplus_{t\in T'} a_t$$

şeklinde tanımlanır.[2]

Tanım 5.1.2. $\odot$, $\bar{R}_+$ de bir ikili işlem olsun. $\oplus$, $\bar{R}_+$ de bir pan-toplam olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde $(\bar{R}_+, \oplus, \odot)$ üçlüsüne $\oplus$ ve $\odot$ ya göre bir *değişmeli isotonic yarı halka* denir.

i) $a \odot b = b \odot a$;

ii) $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$;

iii) $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$;

iv) Her c için $a \le b \Rightarrow a \odot c \le b \odot c$;

v) $a \ne 0$ ve $b \ne 0 \Leftrightarrow a \odot b \ne 0$;

vi) Her $a \in \bar{R}_+$ için $I \odot a = a$ olacak şekilde $I \in \bar{R}_+$ vardır.

vii) $\lim_n a_n$ ve $\lim_n b_n$ var ve sonlu ise,

$$\lim_n (a_n \odot b_n) = \lim_n a_n \odot \lim_n b_n.$$

$\odot$ ya $\bar{R}_+$ de bir *pan-çarpım* denir ve I elemanına $(\bar{R}_+, \oplus, \odot)$ nın *birim elemanı* denir.

i) ve iv) den

iv') $a \le b$ ve $c \le d \Rightarrow a \odot c \le b \odot d$

elde edilir.

Her $a \in \overline{R}_+$ için $a \odot 0 = 0$ ve $0 \odot a = 0$ ın v) özelliğini içerdiğini görmek kolaydır. [2]

Örnek 5.1.1. $\overline{R}_+$, reel sayılarda ortak toplam ve ortak çarpım ile bir değişmeli isotonik yarı halkadır. $(\overline{R}_+, +, \cdot)$ ile gösterilir ve birim elemanı 1 dir.[2]

Örnek 5.1.2. $\overline{R}_+$, reel sayılarda mantıksal toplam $\vee$ ve mantıksal çarpım $\wedge$ ile bir değişmeli isotonik yarı halkadır. $(\overline{R}_+, \vee, \wedge)$ ile gösterilir ve birim elemanı ∞ dır. [2]

Örnek 5.1.3. $\overline{R}_+$, reel sayılarda mantıksal toplam $\vee$ ve ortak çarpım ile bir değişmeli isotonik yarı halkadır. $(\overline{R}_+, \vee, \cdot)$ ile gösterilir ve birim elemanı 1 dir.[2]

Tanım 5.1.3. $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ bir bulanık ölçüm uzayı ve $(\overline{R}_+, \oplus, \odot)$ bir değişmeli isotonik yarı halka ise, bu durumda $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, \oplus, \odot)$ uzayına *pan-uzay* denir.[2]

5.2. Pan-İntegralin Tanımı

Tanım 5.2.1. $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, \oplus, \odot)$ bir pan-uzay ve $E \subset X$ olsun. I, $(\overline{R}_+, \oplus, \odot)$ nın birim elemanı olmak üzere

$$\chi_E(x) = \begin{cases} I, & x \in E \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile verilen X de tanımlı fonksiyona E nin *pan-karakteristik fonksiyonu* denir.[2]

Tanım 5.2.2. $(X, \mathfrak{F})$ ölçülebilir bir uzay olsun. Her i için $E_i \in \mathfrak{F}$ olduğunda X in bir bölüntüsü $\{E_i\}$ *ölçülebilirdir* denir.[2]

Tanım 5.2.3. $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, \oplus, \odot)$ bir pan-uzay olsun. $a_i \in R_+$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $\{E_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$, X in ölçülebilir bir bölüntüsü olmak üzere

$$s(x) = \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i \odot \chi_{E_i}(x)]$$

ile verilen X üzerindeki bir fonksiyona *ölçülebilir pan-basit fonksiyon* denir.

Tüm ölçülebilir pan-basit fonksiyonların kümesi $\mathbf{S}$ ile gösterilsin. Açıkça, $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$ dir. $A \in \mathfrak{F}$ olmak üzere her $s(x) = \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i \odot \chi_{E_i}(x)] \in \mathbf{S}$ için

$$P(s|A) = \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i \odot \mu(A \cap E_i)]$$

yazılır.

Verilen $f_1, f_2 \in \mathbf{F}$ ve her $x \in X$ için, eğer $f_1(x) \leq f_2(x)$ ise $f_1 \leq f_2$ yazılır.[2]

Tanım 5.2.4. $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ olsun. $(p)\int_A f\, d\mu$ ile gösterilen, μ ye göre A da f nin pan-integrali,

$$(p)\int_A f\, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f,\, s \in \mathbf{S}} P(s|A)$$

şeklinde tanımlanır.

$A = X$ olduğunda $(p)\int_X f\, d\mu$ yerine $(p)\int f\, d\mu$ yazılır.[2]

Teorem 5.2.1. $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ olsun, ve $\hat{\mathfrak{P}}$, X in bütün ölçülebilir bölüntülerinin kümesini göstersin. Bu durumda,

$$(p)\int_A f\, d\mu = \sup_{\mathscr{E} \in \hat{\mathfrak{P}}} \left\{ \bigoplus_{E \in \mathscr{E}} [(\inf_{x \in E} f(x)) \odot \mu(A \cap E)] \right\} \text{ dir.[2]}$$

Teorem 5.2.2. $\oplus$, mantıksal toplam $\vee$ ve $\odot$, mantıksal çarpım $\wedge$ olmak üzere, her $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ için

$$(p)\int_A f\, d\mu = \oint_A f\, d\mu.$$

Yani, pan-integral ve bulanık integral denktir.[2]

İspat: Her $E \in \mathfrak{F}$ için $\{E, \bar{E}\}$, X in ölçülebilir bölüntüleri olduğunda Teorem 5.2.1

ve Teorem 4.2.4 den

$$(p)\int_A f\,d\mu \geq \oint_A f\,d\mu$$

eşitsizliği elde edilir.

Tersine, verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $\mathscr{E} \in \hat{\mathfrak{P}}$ için

$$\bigoplus_{E\in\mathscr{E}} [(\inf_{x\in E} f(x)) \odot \mu(A\cap E)] = \sup_{E\in\mathscr{E}} [(\inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A\cap E)]$$

$$\leq [(\inf_{x\in E_0} f(x)] \wedge \mu(A\cap E_0) + \varepsilon$$

$$\leq \oint_A f\,d\mu + \varepsilon.$$

olacak şekilde $E_0 \in \mathscr{E}$ vardır.

Böylece

$$(p)\int_A f\,d\mu \leq \oint_A f\,d\mu + \varepsilon$$

elde edilir.

ε keyfi olarak sıfır alındığında

$$(p)\int_A f\,d\mu \leq \oint_A f\,d\mu$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$(p)\int_A f\,d\mu = \oint_A f\,d\mu$$

elde edilir. ■

Teorem 5.2.3. μ toplamsal olsun. $\oplus$, ortak toplam ve $\odot$, ortak çarpım olmak üzere, her $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ için

$$(p)\int_A f\,d\mu = \int_A f\,d\mu.$$

Yani, pan-integral ve Lebesgue integral denktir.[2]

İspat: $\oplus$, $+$ ve $\odot$, $\cdot$ olduğu zaman klasik ölçüm teorisinde kullanılan negatif olmayan basit fonksiyon kavramı ile pan-basit fonksiyon kavramı denktir. Lebesgue integralin tanımından, limiti f olan azalmayan negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi $\{s_n\}$ olmak üzere her $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ için,

$$\int_A f\,d\mu = \lim_n P(s_n|A).$$

Buradan,

$$(p)\int_A f\,d\mu \geq \int_A f\,d\mu$$

olduğu kolayca görülür.

Tersine,

$$\lim_n P(s_n|A) = (p)\int_A f\,d\mu$$

ve $s_n \leq f$, $n = 1, 2, ...,$ olacak şekilde $\{s_n\} \subset \mathbf{S}$ seçelim.

$\overline{s}_n = \sup_{i \leq n} s_i$ alalım, $\overline{s}_n \in \mathbf{S}$, $n = 1, 2, ...$ ve $\overline{s}_n \nearrow f$ elde edilir. $P(s|A)$, teoremde verilen şartlar altında s ye göre azalmayan olduğundan

$$\lim_n P(\overline{s}_n|A) = (p)\int_A f\,d\mu$$

elde edilir.

$\{\overline{s}_n\}$ in monotonluğundan dolayı

$$\lim_n P(\overline{s}_n|A) = \int_A f\,d\mu$$

elde edilir.

Bunun sonucu olarak,

$$(p)\int_A f\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

elde edilir. ■

f fonksiyonunun sürekli olması şartıyla Teorem 5.2.3 de verilen şartlar altında Teorem 5.2.1 den pan-integralin sadece Riemann integral olduğu görülebilir.

Teorem 5.2.4. $(X, \mathfrak{F}, \mu, \bar{R}_+, \oplus, \odot)$ bir bulanık pan-uzay ve $A \in \mathfrak{F}$, $f \in \mathbf{F}$ olsun. Eğer $(\bar{R}_+, \oplus, \odot) = (\bar{R}_+, \vee, \cdot)$ ise, bu durumda

$$(p)\int_A f\, d\mu = (\mathrm{N})\int_A f\, d\mu.$$

$(\mathrm{N})\int_A f\, d\mu = \sup_{\alpha > 0}(\alpha\, \mu(A \cap F_\alpha))$, [24] de tanımlanmış olan (N) bulanık integraldir. [10]

5.3. Pan-İntegralin Özellikleri

Bu bölümde, Lebesgue integral ve bulanık integralin özelliklerine benzer olan bazı ilginç özellikler verilmiştir.

Teorem 5.3.1. Her $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ için

$$(p)\int_A f\, d\mu = (p)\int f \odot \chi_A\, d\mu. [2]$$

Aşağıdaki teoremde verilmiş olan özellikler Tanım 5.2.4, Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.3.1 den kolayca elde edilebilir.

Teorem 5.3.2. Her $f,\ g \in \mathbf{F}$, ve $A, B \in \mathfrak{F}$, ve $a \in R_+$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler elde edilir.

(1) Eğer $f \le g$ ise, bu durumda her $A \in \mathfrak{F}$ için $(p)\int_A f\, d\mu \le (p)\int_A g\, d\mu$ dir.

(2) $(p)\int_A (f \wedge g)\, d\mu \le (p)\int_A f\, d\mu \wedge (p)\int_A g\, d\mu$ dir.

(3) $(p)\int_A (f \vee g)\, d\mu \geq (p)\int_A f\, d\mu \vee (p)\int_A g\, d\mu$ dir.

(4) Eğer $A \subset B$ ise, bu durumda $(p)\int_A f\, d\mu \leq (p)\int_B f\, d\mu$ dir.

(5) $(p)\int_{A\cap B} f\, d\mu \leq (p)\int_A f\, d\mu \wedge (p)\int_B f\, d\mu$ dir.

(6) $(p)\int_{A\cup B} f\, d\mu \geq (p)\int_A f\, d\mu \vee (p)\int_B f\, d\mu$ dir.

(7) Eğer $\mu(A) = 0$ ise, bu durumda her $f \in \mathbf{F}$ için $(p)\int_A f\, d\mu = 0$ dir.

(8) $(p)\int_A a\, d\mu \geq a \odot \mu(A)$ dir.

(9) A da $f = 0$ ise, bu durumda $(p)\int_A f\, d\mu = 0$ dir.[2,10]

Aşağıdaki örnek Teorem 5.3.2 in (8) eşitliğinin geçerli olmayabileceğini gösterir.

Örnek 5.3.1. $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, Örnek 4.2.1 da verilen aynı bulanık ölçüm uzayı olsun. $\oplus$ ve $\odot$ sırasıyla $+$ ve $\cdot$ alalım.

$$(p)\int 1\; d\mu = 1\cdot \mu(\{a\}) + 1\cdot \mu(\{b\})$$

$$= 0,5 + 0,7$$

$$= 1,2$$

elde edilir, ama

$$1\cdot \mu(X) = 1.[2]$$

Teorem 5.3.3. Her $f \in \mathbf{F}$ ve $A \in \mathfrak{F}$ olsun. Eğer $(p)\int_A f\, d\mu = 0$ ise, bu durumda

$$\mu(A \cap \{x \mid f(x) > 0\}) = 0.[2]$$

İspat: $B_n = A \cap \{x \mid f(x) > 1/n\}$ ile gösterilsin.

$$B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A \cap \{x | f(x) > 0\}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.2. i kullanarak

$$0 = (p)\int_A f\, d\mu \geq (p)\int_{B_n} f\, d\mu \geq (p)\int_{B_n} \frac{1}{n}\, d\mu \geq \frac{1}{n} \odot \mu(B_n) \geq 0$$

bulunur.

Pan-çarpımın (v) özelliğinden

$$\mu(B_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

buradan,

$$\mu(A \cap \{x | f(x) > 0\}) = \lim_n \mu(B_n) = 0$$

elde edilir. ■

5.4. Pan Bulanık İntegral için Dönüşüm Teoremleri

Bulanık integral için dönüşüm teoremleri mevcuttur. Şimdi pan-toplam, ortak toplam ve pan-çarpım, ortak çarpım olduğu durumda benzer teoremleri dikkate alalım.

Teorem 5.4.1. $(X,\ \mathfrak{F},\ \mu,\ \overline{R}_+,\ +,\ \cdot)$ pan-uzayında, eğer μ üst toplamsal ise, bu durumda her $\alpha \in R_+$ için

$$F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$$

ve m, $\overline{R}_+$ da Lebesgue ölçüm, ve $f \in \mathbf{F}$, $A \in \mathfrak{F}$ olmak üzere

$$(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)\, dm \geq (p)\int_A f\, d\mu. [2]$$

μ, alt toplamsal olduğunda benzer bir sonuç aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 5.4.2. $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, +, \cdot)$ pan-uzayında, eğer μ alt toplamsal ise, bu durumda her $\alpha \in R_+$ için

$$F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$$

ve m, $\overline{R}_+$ da Lebesgue ölçüm, ve $f \in \mathbf{F}$, $A \in \mathfrak{F}$ olmak üzere

$$(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)\, dm \leq (p)\int_A f\, d\mu. [2]$$

Teorem 5.4.1. ve Teorem 5.4.2. in doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4.3. $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, +, \cdot)$ pan-uzayında, eğer μ toplamsal ise, bu durumda her $\alpha \in R_+$ için

$$F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$$

ve m, $\overline{R}_+$ da Lebesgue ölçüm, ve $f \in \mathbf{F}$, $A \in \mathfrak{F}$ olmak üzere

$$(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)\, dm = (p)\int_A f\, d\mu. [2]$$

Yukarıdaki üç teoremde, $(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)\, dm$ pan-integrale, A üzerinde μ ye göre f nin Choquet integrali denir ve $(C)\int_A f\, d\mu$ ile gösterilir. (Choquet [17] ve Sims ve Wang [25]) Her iki teorem, Teorem 5.4.1 ve Teorem 5.4.2, $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, +, \cdot)$ pan-uzayı üzerinde Pan-integral ve Choquet integral arasındaki ilişkiyi gösterir.

m, Lebesgue ölçüm olduğunda Teorem 5.2.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir ki Teorem 5.4.1 ve Teorem 5.4.3 de $(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)\, dm$ pan-integrali sadece Lebesgue integralidir $\int \mu(A \cap F_\alpha)\, dm$, ve benzer bir sonuç için, eğer μ toplamsal ise $(p)\int_A f\, d\mu = \int_A f\, d\mu$ olur. Bundan dolayı, μ klasik (toplamsal) bir ölçüm olduğunda Choquet integrali ile Lebesgue integrali denktir. Choquet integral, pan-integral kadar Lebesgue integralin iyi bir genelleştirilmesidir.

Teorem 5.4.4. Verilen her $A \in \mathcal{F}$ için, eğer her $E \in \mathcal{B}$ için $\mu^*(E) = \mu(A \cap E)$ ise, bu durumda μ^*, $\mathcal{B}$ üzerinde bir bulanık ölçümdür. μ^* a A ve μ tarafından meydana getirilen *bulanık ölçüm* denir.[10]

İspat: Gerçekten,

(1) $\mu^*(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0;$

(2) Eğer $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$ ve $E_1 \subset E_2$ ise, bu durumda $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2);$

(3) Alttan süreklilik: $\{E_n\} \subset \mathcal{B},\ E_n \subset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots,$ olsun, bu durumda

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(E_n).$$

(4) Üstten süreklilik: Eğer $\{E_n\} \subset \mathcal{B},\ E_n \supset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots,$ ve eğer $\mu^*(E_{n_0}) \leq \infty$ olacak şekilde n_0 varsa, bu durumda

$$\mu^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(A \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(E_n).$$

Bu da demektir ki, μ^*, $\mathcal{B}$ üzerinde bir bulanık ölçümdür. ■

Teorem 5.4.5. (Dönüşüm Teoremi I) $A \in \mathcal{F}$, $f \in \mathbf{F}$ ve μ^*, Teorem 5.4.4 de tanımlanmış olan bulanık ölçüm olsun. Bu durumda $E \in \mathcal{B}$ olduğunda

$$(p)\int_{A \cap E} f \, d\mu = (p)\int_E f \, d\mu^*.$$

Özellikle, $(p)\int_E f \, d\mu^*$, [22] de verilen pan-integral olmak üzere $(p)\int_A f \, d\mu = (p)\int_X f \, d\mu^*$.[26]

İspat: Her $E \in \mathcal{B}$ için

$$(p)\int_{A\cap E} f\, d\mu = \sup_{s\in s(f)} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (\alpha_i \odot \mu(A\cap E\cap E_i))\right)$$

$$= \sup_{s\in s(f)} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (\alpha_i \odot \mu^*(E\cap E_i))\right)$$

$$= (p)\int_E f\, d\mu^*. \qquad \blacksquare$$

Tanım 5.4.1. $f\in \mathbf{F}$ olsun. $\mathcal{B}_+$, R_+ üzerinde bütün Borel kümelerinin sınıfı olmak üzere, eğer $E\in\mathcal{B}$ olduğunda $f(E)\in\mathcal{B}_+$ ve f, birebir örten fonksiyon ise, f fonksiyonuna *homeomorfik fonsiyon* denir.[26]

Teorem 5.4.6. $A\in\mathcal{F}$, $f\in\mathbf{F}$ olsun. Eğer her $B\in\mathcal{B}_+$ için $\mu(B)=\mu(A\cap f^{-1}(B))$ ise, bu durumda μ , $(R_+,\mathcal{B}_+)$ üzerinde bir bulanık ölçümdür.[26]

Teorem 5.4.7.(Dönüşüm Teoremi II) $(X,\mathcal{F},\mu)$ bir bulanık ölçüm uzayı, $A\in\mathcal{F}$, $f\in\mathbf{F}$ bir homeomorfik fonksiyon , μ, Teorem 5.4.6 da tanımlanmış olan bulanık ölçüm ve $g: R_+\to R_+$ bir Borel fonksiyon olsun. Bu durumda $g\circ f$, f ve g nin bileşke fonksiyonu ve $(p)\int_{R_+} g\, d\mu$, μ ye göre R_+ da g nin pan integrali olmak üzere,

$$(p)\int_A g\circ f\, d\mu = (p)\int_{R_+} g\, d\mu$$

dir.[26]

5.5. Yakınsama Teoremleri

Teorem 5.5.1. $(X,\mathcal{F},\mu,\overline{R}_+,\oplus,\odot)$ bir bulanık pan-uzay, $\{f_n, f\}\subset\mathbf{F}$, ve $f_n\le f_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, olsun. Eğer $f_n\to f$ ise, bu durumda her $A\in\mathcal{F}$ için

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int_A f_n\, d\mu = (p)\int_A f\, d\mu$$

dir.[10]

Teorem 5.5.1. in sonucu olarak, aşağıdaki Teorem elde edilir.

Teorem 5.5.2. (Fatou's Lemma) $(X, \mathfrak{F}, \mu, \overline{R}_+, \oplus, \odot)$ bir bulanık pan uzayı olsun. Eğer $\{f_n\} \subset \mathbf{F}$ ise, bu durumda

$$(p)\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} (p)\int_A f_n \, d\mu$$

dir.[10]

5.6. Pan-Genelleştirilmiş Bulanık İntegral Tanımı ve Özellikleri

Tanım 5.6.1. $D = [0,\infty] \times [0,\infty] \setminus \{(0,\infty),(\infty,0)\}$ ile gösterilsin. $S : D \to [0,\infty]$ ye aşağıdaki şartları sağladığı taktirde bir $c-$*genelleştirilmiş üçgensel norm* denir.

(1) Tüm $x \in [0,\infty)$ için $S[0,x] = 0$ ve her bir $x \in [0,\infty]$ için $S[x,e] = x$ olacak şekilde bir $e \in (0,\infty]$ varsa, e ye S nin *birim elemanı* denir.

(2) Bütün $(x,y) \in D$ için $S[x,y] = S[y,x]$;

(3) $a \leq c,\ \ b \leq d$ olmak üzere $S[a,b] \leq S[c,d]$;

(4) Eğer $\{(x_n, y_n)\} \subset D,\ \ (x,y) \in D,\ \ x_n \to x,\ \ y_n \to y,$ ise

$$S[x_n, y_n] \to S[x,y].$$ [27]

Not 5.6.1. Bir genelleştirilmiş üçgensel norm ([2]), bir $c-$genelleştirilmiş üçgensel norm içerir.[27]

Not 5.6.2. $S_1[x,y] = \min(x,y),\ \ S_2[x,y] = k(xy)^p,\ \ (k,p>0)$ ve

$$S_3[x,y] = \begin{cases} 0 & \min(x,y) = 0, \\ xy + k(xy)^p & \min(x,y) \neq 0 \ \ (k,p>0) \end{cases}$$

alalım. Bu durumda S_1, S_2 ve S_3, $c-$genelleştirilmiş üçgensel normdur.[27]

Tanım 5.6.2. $A \in \mathfrak{F}$, f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ve S, bir $c-$ genelleştirilmiş üçgensel norm olsun. $\sup\{i : i \in \emptyset\} = 0$ biçiminde tanımlansın.

$s = \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \odot \chi_{A_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$, $\alpha_i > 0$, $A_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ve $Q_A(s) = \sup_{1 \le i \le n} S[\alpha_i, \mu(A \cap A_i)]$ olmak üzere A da f nin (PG) bulanık integrali

$$(PG)\int_A f \, d\mu = \inf_{0 < s \le f} Q_A(s)$$

ile tanımlanır.[27]

Teorem 5.6.1. (PG) bulanık integrali için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$N_{\alpha}^{*}(f) = \{x \mid f(x) \ge \alpha\}$ olmak üzere;

$$(PG)\int_A f \, d\mu = \sup_{\alpha > 0} S[\alpha, \mu(A \cap N_{\alpha}(f))]$$

$$= \sup_{\alpha > 0} S[\alpha, \mu(A \cap N_{\alpha}^{*}(f))]$$

$$= \sup_{E \in \mathfrak{F}, \inf_{x \in E} f(x) > 0} S[\inf_{x \in E} f(x), \mu(A \cap E)]$$ [27]

Teorem 5.6.2. (PG) bulanık integrali için aşağıdaki özellikler elde edilir.

(1) Eğer $f_1 \le f_2$ ise, bu durumda $(PG)\int_A f_1 \, d\mu \le (PG)\int_A f_2 \, d\mu$ dir.

(2) Eğer $A_1 \subset A_2$ ise, bu durumda $(PG)\int_{A_1} f \, d\mu \le (PG)\int_{A_2} f \, d\mu$ dir.

(3) Eğer $\mu(A) = 0$ ise, bu durumda $(PG)\int_A f \, d\mu = 0$ dir.

(4) $(PG)\int_A f \, d\mu = (PG)\int f \odot \chi_A \, d\mu$ dir.

(5) Her $A \in \mathfrak{F}$ ve $c \in (0, \infty)$ sabiti için $(PG)\int_A c \, d\mu = S[c, \mu(A)]$ dir.

(6) $(PG)\int_A f_1 \vee f_2 \, d\mu \geq (PG)\int_A f_1 \, d\mu \vee (PG)\int_A f_2 \, d\mu$ dir.

(7) $(PG)\int_A f_1 \wedge f_2 \, d\mu \leq (PG)\int_A f_1 \, d\mu \wedge (PG)\int_A f_2 \, d\mu$ dir.

(8) Her $c \in (0,\infty)$ sabiti için $(PG)\int_A (c \vee f) \, d\mu = (PG)\int_A c \, d\mu \wedge (PG)\int_A f \, d\mu$ dir. [27]

Teorem 5.6.3. f, g negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $f = g$ olmak üzere $\mu,$ sıfır (null)-toplamsal olduğunda $(PG)\int f \, d\mu = (PG)\int g \, d\mu$ olur. [27]

İspat: Kabul edelim ki $\mu,$ sıfır (null)-toplamsal ve $f = g$ dir. $B = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ ile ifade edelim. Bu durumda $\mu(B) = 0$ ve $\mu(N_\alpha(g)) = \mu(N_\alpha(g) \cup B).$ Buradan her $\alpha > 0$ için $\mu(N_\alpha(f)) \leq \mu(N_\alpha(g) \cup B) = \mu(N_\alpha(g))$ elde edilir. Eşitsizliğin terside sağlanır, $\mu(N_\alpha(f)) = \mu(N_\alpha(g))$ elde edilir. Teorem 5.6.1. den $(PG)\int f \, d\mu = (PG)\int g \, d\mu$ elde edilir.

Her $A \in \mathfrak{F},$ $B \in \mathfrak{F},$ ve $\mu(B) = 0$ için, eğer $\mu(A) = \infty$ ise, bu durumda μ nün monotonluğundan $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(A)$ elde edilir. Şimdi, $\mu(A) < \infty$ farz edelim. S nin birim elemanı e olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} e, & x \in A \cup B \\ 0, & x \notin A \cup B \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad g(x) = \begin{cases} e, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır, bu durumda $f = g$ dir. Hipotezden, $(PG)\int f \, d\mu = (PG)\int g \, d\mu.$ Bundan dolayı $S[e, \mu(A \cup B)] = S[e, \mu(A)]$ elde edilir. Buradan, $\mu(A \cap B) = \mu(A)$ sonucu elde edilir. Bu yüzden $\mu,$ sıfır (null)-toplamsaldır.

Sonuç 5.6.1. Eğer $\mu,$ sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda A da $f = g$ olduğu zaman

$$(PG)\int_A f \, d\mu = (PG)\int_A g \, d\mu$$

olur.[27]

Sonuç 5.6.2. Eğer μ, sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, ile $\mu(B) = 0$ olmak üzere

$$(PG)\int_{A \cup B} f\, d\mu = (PG)\int_A f\, d\mu.\text{[27]}$$

Teorem 5.6.4. $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ bir bulanık ölçüm uzayı ve f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda m, Lebesgue ölçüm ve $g_A(\alpha) = \mu(A \cap N_\alpha(f))$, $g_A^*(\alpha) = \mu(A \cap N_\alpha^*(f))$ olmak üzere $A \in \mathfrak{F}$ için,

$$(PG)\int_A f\, d\mu = (PG)\int_0^\infty g_A(\alpha)\, dm = (PG)\int_0^\infty g_A^*(\alpha)\, dm.\text{[27]}$$

5.7. Pan-Çift Yönlü Genelleştirilmiş Bulanık İntegral

Tanım 5.7.1. $D = [0,\infty] \times [0,\infty]$ ile gösterilsin. $T : D \to [0,\infty]$ ye aşağıdaki şartları sağladığı takdirde bir $c-$*genelleştirilmiş üçgensel conorm* denir.

(1) $\forall x \in [0,\infty]$ için $T[0,x] = x$ ve her bir $x \in [0,\infty]$ için $T[x,e] = x$ olacak şekilde bir $e \in [0,\infty]$ varsa, e ye T nin *birim elemanı* denir.

(2) $\forall (x,y) \in D$ için $T[x,y] = T[y,x]$;

(3) $x_1 \le x_2$, $y_1 \le y_2$ olduğunda $T[x_1,y_1] \le T[x_2,y_2]$;

(4) Eğer $\{(x_n,y_n)\} \subset D$, $(x,y) \in D$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ ise, bu durumda

$$T[x_n,y_n] \to T[x,y].\text{[28]}$$

Not 5.7.1. (1) ve (3) den, her $x \in [0,\infty]$ için $T[x,\infty] = \infty.$[28]

Not 5.7.2. $T_1[x,y] = \max[x,y]$, $T_2[x,y] = x + y$, $T_3[x,y] = x \oplus y$ ve

$$T_4[x,y] = \begin{cases} \infty, & \max\{x,y\} = \infty \\ x + y + k(xy)^p, & \max\{x,y\} < \infty \quad (k > 0, p > 0), \end{cases}$$

alalım. Bu durumda T_1, T_2, T_3 ve T_4, $c-$genelleştirilmiş üçgensel conormdur.[28]

Tanım 5.7.2. $(X, \mathfrak{F}, \mu, \bar{R}_+, \oplus, \odot)$ bir pan-uzay, ve T bir $c-$genelleştirilmiş üçgensel conorm, ve f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon, $A \in \mathfrak{F}$ olsun. $s = \bigoplus_{i=1}^{n}[\alpha_i \odot \chi_{A_i}]$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $(i \neq j)$, $\alpha_i > 0$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $A_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, $A_i^c = X - A_i$ ve χ_{A_i}, A_i nin karakteristik fonksiyonu ve

$$\mathrm{Q}_A(s) = \bigwedge_{i=1}^{n} T[\alpha_i, \mu(A \cap A_i^c)]$$

olmak üzere A da f nin (PDG) bulanık integrali

$$(PDG)\int_A f\, d\mu = \inf_{f \le s} \mathrm{Q}_A(s)$$

şeklinde tanımlanır.[28]

Teorem 5.7.1. (PDG) bulanık integrali için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$N_\alpha^*(f) = \{x \mid f(x) \ge \alpha\}$ olmak üzere;

$$(PDG)\int_A f\, d\mu = \inf_{a \ge 0} T[\alpha, \mu(A \cap N_\alpha^*(f))]$$

$$= \inf_{a \ge 0} T[\alpha, \mu(A \cap N_\alpha(f))]$$

$$= \inf_{E \in \mathfrak{F}} T[\sup_{x \in E} f(x), \mu(A \cap E^c)].\,[28]$$

Teorem 5.7.2. (PDG) bulanık integrali için aşağıdaki özellikler elde edilir.

(1) Eğer $f_1 \le f_2$ ise, bu durumda $(PDG)\int_A f_1\, d\mu \le (PDG)\int_A f_2\, d\mu$;

(2) Eğer $A_1 \subset A_2$ ise, bu durumda $(PDG)\int_{A_1} f\, d\mu \le (PDG)\int_{A_2} f\, d\mu$;

(3) Eğer $\mu(A) = 0$ ise, bu durumda $(PDG)\int_A f\, d\mu = 0$;

(4) $(PDG)\int_A f\,d\mu = (PDG)\int_X f\cdot\chi_A\,d\mu;$

(5) $(PDG)\int_A (f_1 \wedge f_2)\,d\mu \le (PDG)\int_A f_1\,d\mu \wedge (PDG)\int_A f_2\,d\mu;$

(6) Her $A\in\mathfrak{F}$ ve $c\in[0,\infty]$ sabiti için $(PDG)\int_A c\,d\mu = c\wedge\mu(A).$ [28]

Teorem 5.7.3. f, g negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $f=g$ olmak üzere μ, sıfır (null)-toplamsal olduğunda $(PDG)\int f\,d\mu = (PDG)\int g\,d\mu$ olur.[28]

Sonuç 5.7.1. Eğer μ, sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda A da $f=g$ olmak üzere

$$(PDG)\int_A f\,d\mu = (PDG)\int_A g\,d\mu. \text{[28]}$$

Sonuç 5.7.2. Eğer μ, sıfır (null)-toplamsal ise, bu durumda $A\in\mathfrak{F}$, $B\in\mathfrak{F}$, ile $\mu(B)=0$ olmak üzere

$$(PDG)\int_{A\cup B} f\,d\mu = (PDG)\int_A f\,d\mu. \text{[28]}$$

Teorem 5.7.4. $(X,\mathfrak{F},\mu)$ bir bulanık ölçüm uzayı ve f negatif olmayan ölçülebilir

bir fonksiyon olsun. Bu durumda m, Lebesgue ölçüm ve $g_A(\alpha)=\mu(A\cap N_\alpha(f))$ olmak üzere $A\in\mathfrak{F}$ için,

$$(PDG)\int_A f\,d\mu \ge (PDG)\int_0^\infty g_A(\alpha)\,dm$$

olur.[28]

6. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışmada bulanık integraller, pan-bulanık integral ve pan-bulanık integralin özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Lebesgue integral, Sugeno integral, Choguet integral ile Pan-bulanık integral arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bulanık ölçümün alt toplamsal, üst toplamsal ve toplamsal olduğu durumlarda pan-bulanık integralin diğer bulanık integrallerle olan ilişkileri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Murofushi, T. and Sugeno, M. (2000). Fuzzy measures and fuzzy integrals, *Department of Computational and Systems Science*, Tokyo Institute of Technology, 4259-G3-47 Nagatsuta, 226-8502 Yokohama, Japan.

[2] Wang, Z. and Klir, G. J. (1992). *Fuzzy measure theory*. New York, Plenum Press.

[3] Tulga, İ. (2006). *İntegral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri*, M. Sc. Tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi.

[4] Baykal, N. ve Beyan, T. (2004). *Bulanık mantık ilke ve temelleri*, Ankara.

[5] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.

[6] Esin, B. (2007). *Bulanık kümelerin üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi*. M.Sc. Tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi.

[7] Kahyaoğlu, S. (2008). *Bulanık Ölçüm Teorisinde Caratheodory Genişleme Teoremi*. M.Sc. Tezi. Gaziantep Üniversitesi.

[8] Zadeh, L. A. (1971). Similarity relations and fuzzy ordering. *Information Science*, **3**, 177-200.

[9] Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reosoning. Part 3, *Information Science*, **9**, 43-80.

[10] Xiaoqi, L. (1988). Fuzzy pan-integral, *Busefal*, **33**, 104-112.

[11] Halmos, P. R. (1967). *Measure Theory*. New York, Van Nostrand

[12] Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integrals and its Aplications*. Ph.D. Dissertation. Tokyo: Institue of Technology.

[13] Sugeno, M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey. In: M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines (Eds.), *Fuzzy Automata and Decision Processes*. North-Holland, Amsterdam and New York, 89-102.

[14] Weber, S. (1984). $\perp-$decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **101**, 114-138.

[15] Murofushi, T. and Sugeno, M. (1991). Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: generalization of Sugeno integral and Choguet integral, *Fuzzy Sets and Systems,* **42**, 57-71.

[16] Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. (1957). *Element of the Theory of Functions and Functional Analysis*, (Karaçay, T. ve Ataman, Y.(1977)) Volume I. New York: Graylock

[17] Choguet, G. (1953). *Theory of capacities*, Ann. Ints. Fourier, Grenobla, **5**, 131-295.

[18] Ralescu, D. A. and Adams, G. (1980). Fuzzy integral, J. *Math. Anal. Application*, **75**, 562-570.

[19] Wang, Z. (1984). The Autocontinuity of set founction and the fuzzy integral, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **99**,195-218.

[20] Murofushi, T. and Sugeno, M. (1989). An interpretation of fuzzy measures and the Choguet integral as an integral with respect to a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, **29**, 201-227.

[21] Narukawa, Y. and Torra, V. (2006). Generalized transformed t-conorm integral and multifold integral. *Fuzzy Sets and Systems*, **157**, 1384-1392.

[22] Qingji, Y. (1985). *The pan-integral on the fuzzy measure space*, Fuzzy Mathematics, **3**, 108-114 (in Chinese).

[23] Yang, Q. and Song, R. (1985). A further discussion on the pan-integral. *Fuzzy Mathematics*, **4**, 27-36 (in Chinese)

[24] Ruhuai, Z. (1981). (N) fuzzy integral, *J. Math. Resear. Exp*. **2**, 55-72.

[25] Sims, J. R. and Wang, Z. (1990). Fuzzy measures and fuzzy integrals: An overview. *International Journal of General systems*, **17**, 157-189.

[26] Xiaoqi, L. (1990). Transformation theorem for fuzzy pan-integrals, *Busefal*, **45**, 33-45.

[27] Yoon, J. H., Eun, G. S. and Lee, B. M. (1998). The pan-generalized fuzzy integral of a commutative isotonic semigroup-valued function. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, **11**, 173-183.

[28] Yoon, J. H., Eun, G. S. and Kım, B. M. (2000). The pan-dual generalized fuzzy integral of a commutative isotonic semigroup-valued function. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, **13**, 27-37.